

Solução das Equações de Navier-Stokes pelo Método de Elementos Finitos

Cássio Baissvenger Pazinato
Carolina Cardoso Manica (Orientador)

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Objetivos

Os objetivos do presente trabalho são:

- Obtenção de soluções numéricas das Equações de Navier-Stokes através do Método de Elementos Finitos.
- Verificação do funcionamento do método através do cálculo de taxas de convergência.
- Simulação de um escoamento bidimensional em torno de um cilindro e a obtenção dos coeficientes de arrasto e sustentação do cilindro.

Introdução

As equações de Navier-Stokes, obtidas através das leis básicas de conservação da física, como em [1], visam modelar o escoamento de fluidos newtonianos isotrópicos através da obtenção dos seus campos de velocidade e de pressão. Podem ser utilizadas como base para a modelagem de problemas atmosféricos, oceânicos, entre outros exemplos. No caso incompressível, as equações são dadas, na forma adimensional, por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \frac{1}{Re} \Delta u + \nabla p = f, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (2)$$

em uma região limitada Ω . O adimensional Re é o número de Reynolds e pode ser interpretado como uma razão entre as forças inerciais e viscosas.

Para que o Método de Elementos Finitos seja aplicado, é necessária a discretização de Ω , neste trabalho por triângulos. Além disso, é necessária a escolha de bases discretas adequadas para os espaços da velocidade e da pressão.

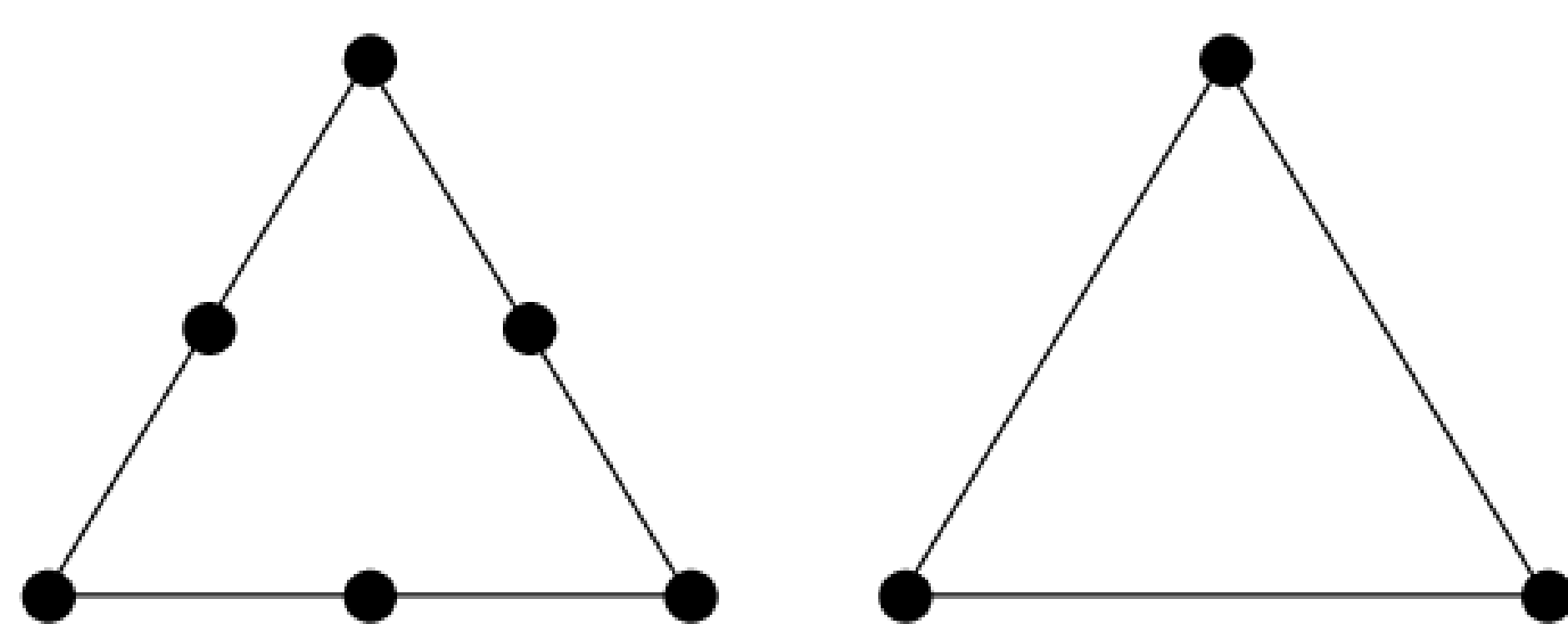


Figura 1: Graus de liberdade para elementos P2 e P1, respectivamente.

Elementos P2-P1

A região Ω é discretizada por triângulos. São definidos espaços lineares X^h e Q^h , tais que as funções nestes espaços quando restritas a um triângulo da discretização sejam polinômios de grau dois e um, respectivamente. A distribuição dos graus de liberdade é feita de maneira a garantir continuidade das funções, conforme a Figura 1.

Semidiscretização

Defina os espaços

$$X = \{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d : v, \nabla v \in L^2(\Omega) \text{ e } v = 0 \text{ em } \partial\Omega \}, \quad (3)$$

e

$$Q = \{ q : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : q \in L^2(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} q dx = 0 \}. \quad (4)$$

Dados $X^h \subseteq X$ e $Q^h \subseteq Q$ subespaços de dimensão finita, de acordo com o par de elementos P2-P1 descrito anteriormente, a formulação variacional discreta assume a forma: encontre (u^h, p^h) em $X^h \times Q^h$ tal que

$$(u_t^h, v^h) + \frac{1}{Re} (\nabla u^h, \nabla v^h) + (u^h \cdot \nabla u^h, v^h) - (p^h, \nabla \cdot v^h) = (f, v^h), \quad (q^h, \nabla \cdot u^h) = 0, \quad (5)$$

para todo $(v^h, q^h) \in X^h \times Q^h$.

Discretização Temporal

Existem diversos métodos de discretização do termo temporal. Neste trabalho será utilizado o método de Crank-Nicolson: conhecidas condições iniciais (u_0, p_0) , encontre indutivamente $(u_k^h, p_k^h) \in X^h \times Q^h$ tais que

$$\frac{1}{\delta t} (u_k^h - u_{k-1}^h, v^h) + \frac{1}{Re} (\nabla u_{k+1/2}^h, \nabla v^h) + (\nabla u_{k+1/2}^h \cdot \nabla u_{k+1/2}^h, v^h) - (p_{k+1/2}^h, \nabla \cdot v^h) = (f_{k+1/2}, v^h), \quad (q^h, \nabla \cdot u_k^h) = 0, \quad (7)$$

para todo $(v^h, q^h) \in X^h \times Q^h$.

Resultados Teóricos

É demonstrado em [2] que o método apresentado é convergente e incondicionalmente estável, isto é, o método é independente do tamanho do passo de tempo δt . Para o par de elementos escolhido, é esperado

$$\|u - u^h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = O(h^3 + \delta t^2), \quad (6)$$

onde h é o diâmetro da malha. A tabela a seguir mostra os valores obtidos para as taxas de convergência do problema cuja solução exata é dada por: $u(t, x, y) = \sin(t) (\sin(\pi x) \sin(\pi y), \cos(\pi x) \cos(\pi y))$ e $p(t, x, y) = \sin(t) (\sin(\pi x) + \cos(\pi y) - 2/\pi)$ em $\Omega = (0, 1)^2$ com $t \in [0, 1]$.

h	Taxa de Convergência
$h \rightarrow h/2$	2.96673
$h/2 \rightarrow h/4$	2.72625
$h/4 \rightarrow h/8$	2.90138
$h/8 \rightarrow h/16$	2.96779
$h/16 \rightarrow h/32$	2.99077
$h/32 \rightarrow h/64$	2.99569

Tabela 1: Taxas de convergência no espaço para $h = \sqrt{2}$.

Simulação de Escoamento

Um clássico *benchmark* para códigos de dinâmica de fluidos computacional é o problema do escoamento em torno de um cilindro [3, 4]. O problema é esquematizado na figura a seguir.

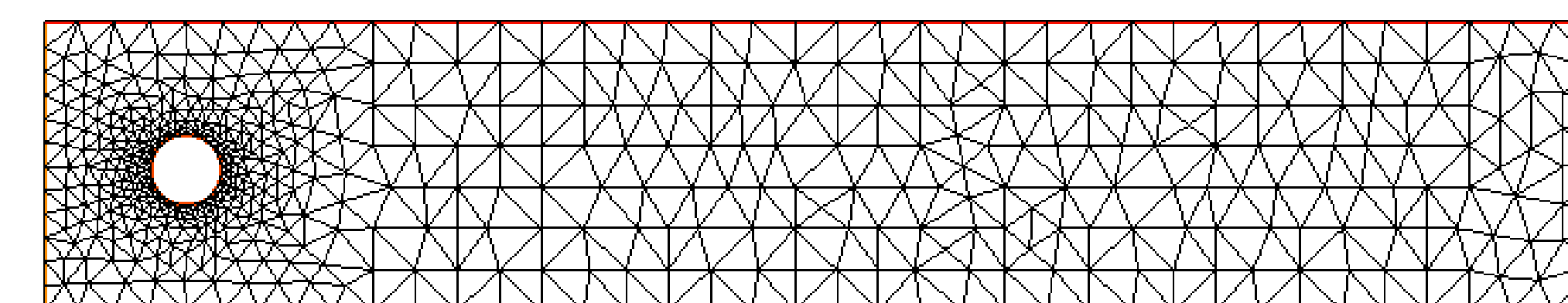


Figura 2: Esquema do escoamento e exemplo de malha utilizada.

O perfil de velocidades na entrada (esquerda) e na saída (direita) é dado por $u = 4U_M \sin(\pi t/T) (y(H-y)/H^2, 0)$, onde T é o tempo de simulação, H é a altura do canal e U_M é a velocidade média. Nas demais fronteiras é fornecida condição de não deslizamento, $u = 0$.

Gráficos das Linhas de Corrente

Seguem os gráficos das aproximações do escoamento para $T = 8s$, $H = 0,41m$, $U_M = 1,5m/s$, $Re = 1000$ e $\delta t = 0,0025$.

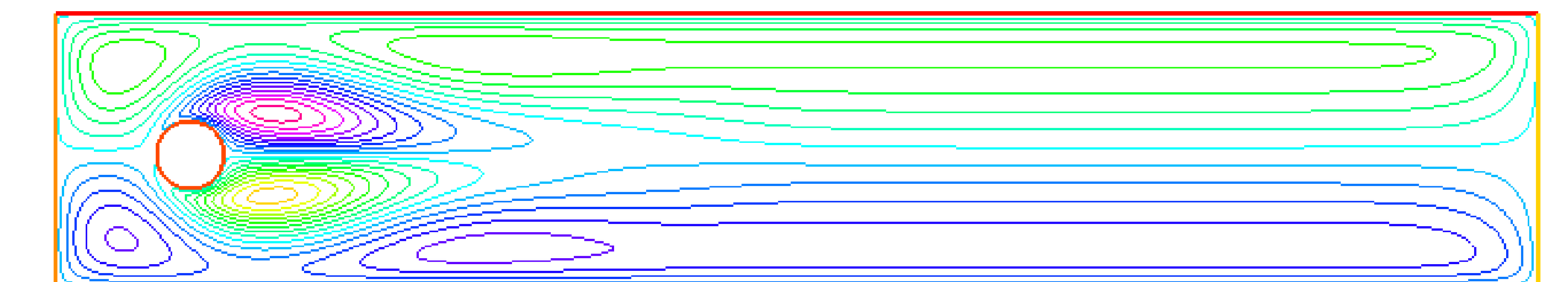


Figura 3: Linhas de corrente em $t = 2s$.

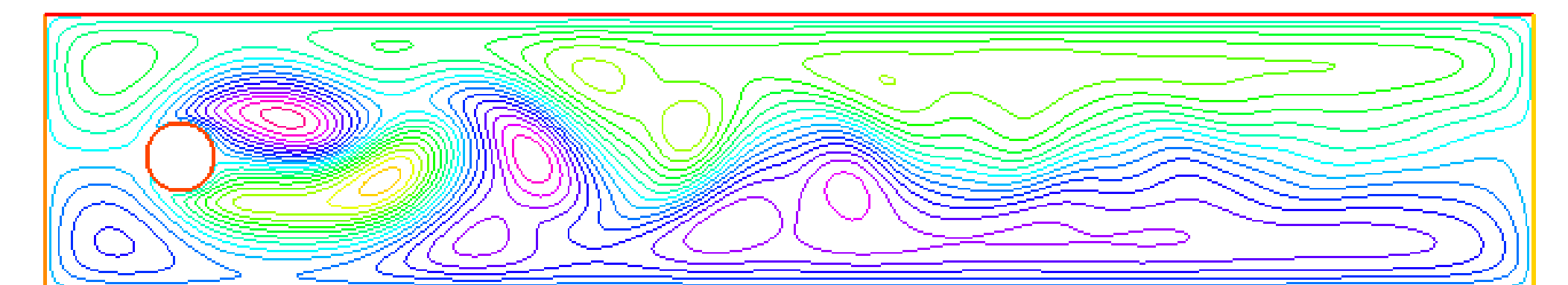


Figura 4: Linhas de corrente em $t = 5s$.

Coefficientes de Arrasto e Sustentação

Os coeficientes de arrasto e sustentação considerados são os valores máximos, definidos conforme [3] e calculados conforme [4]. Os valores obtidos são, respectivamente,

$$C_{D,max} = 2,950390, \text{ em } t = 3.9375s \quad (8)$$

$$C_{L,max} = 0,474792, \text{ em } t = 5.6975s \quad (9)$$

Estes encontram-se dentro das faixas de referência obtidas em [3, 4].

Referências

- [1] K. G. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] W. Layton. *Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows*. SIAM, 2008.
- [3] M. Schäfer, S. Turek. Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 48:547–566, 1996.
- [4] V. John. Reference values for drag and lift of a two-dimensional time-dependent flow around a cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44:777–788, 2004.

Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq por concessão de bolsa.