$Z^4 = X^4 + Y^4 + W^4$

Autora: Carolina Graciolli
Orientador: Eduardo Brietzke

Queremos estudar as soluções inteiras de
$z^4 = x^4 + y^4 + w^4$

Para isso, primeiro achamos as soluções paramétricas de $z^4 = x^4 + y^4 + t^2$
e as escrevemos como quádricas em u e v.
Por exemplo,

$$z = u^2 + uv + v^2, \qquad x = uv, \qquad y = uv + v^2$$

A cada família de soluções paramétricas, podemos associar como quádrica homogênea Q(x,y,z).
A da solução dada acima é

$$x^2 + y^2 - xy + xz - yz = 0.$$

Como essas quádricas representam soluções de $z^4 = x^4 + y^4 + t^2$
têm a propriedade que
$Q(x,y,z) = 0 \Longrightarrow z^4 - x^4 - y^4$ é um quadrado.

Assim, $F(x,y,z) = z^4 - x^4 - y^4$ é um quadrado módulos Q e temos que
$F(x,y,z) = R(x,y,z)^2 - Q(x,y,z)S(x,y,z)$
para certas quádricas R e S.

Mas 4(R^2 - QS) é o discriminante de
$Q\xi^2 + 2R\xi\eta + S\eta^2$ e portanto não se altera sobre transformações lineares da forma $(\xi\eta) \mapsto (\xi\eta)\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ onde a

matriz 2x2 tem determinante 1.

Assim, podemos obter novos Q, R e S da forma

$$Q(x,y,z) = \alpha^2 Q_0 + 2\alpha\beta R_0 + \beta^2 S_0$$
$$R(x,y,z) = \alpha\gamma Q_0 + (\alpha\delta + \beta\gamma)R_0 + \beta\delta S_0$$
$$S(x,y,z) = \gamma^2 Q_0 + 2\gamma\delta R_0 + \delta^2 S_0$$

<u>Proposição 1:</u> Sejam A = α^2-2$\alpha\beta$+2β^2, B= 2$\alpha\beta$ e C=α^2-2β^2. Então

$$Q_{A,B,C} = A(x^2 - xy + y^2) + B(xy + z^2) + C(xz - yz)$$

é tal que $Q_{A,B,C} = 0 \Longrightarrow z^4 - x^4 - y^4$ é um quadradp.

<u>Proposição 2:</u> Qualquer solução (x,y,z,t) de
$z^4 = x^4 + y^4 + t^2$ satisfaz $Q_{A,B,C} = 0$
para certos A, B, C racionais tais que A^2 +2AB –B^2 = C^2.

<u>Proposição 3</u>: $Q_{A,B,C} = 0$ tem solução não-trivial nos racionais se e somente se A+B e A-B são somas de dois quadrados (racionais).

<u>Proposição 4:</u> Para que as soluções associadas a α e β tenham t quadrado ou –t quadrado é necessário que A, A+2B e A-B não sejam divididos por um primo numa potência máxima ímpar.

Usando os critérios dados por essas proposições podemos eliminar muitas soluções paramétricas de $z^4 = x^4 + y^4 + t^2$ que não podem ter t quadrado. Assim, podemos testar as soluções paramétricas que nos restarem.

Uma das soluções obtidas é

$$20\,615\,673^4 = 18\,796\,760^4 + 2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4$$

<u>Bibliografia:</u> "New Looks at Old Number Theory" Aimeric Malter, Dierk Schleicher e Don Zagier