

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA TEÓRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

VICTOR BILLY DA SILVA

**Otimização volumétrica de gemas de  
cor utilizadas para lapidação**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Marcus Rolf Peter Ritt  
Orientador

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho  
Co-orientador

Porto Alegre, Dezembro de 2013

## CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Silva, Victor Billy da

Otimização volumétrica de gemas de cor utilizadas para lapidação / Victor Billy da Silva. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2013.

75 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 2013. Orientador: Marcus Rolf Peter Ritt; Co-orientador: João Batista da Paz Carvalho.

1. Problema do Lapidário. 2. Lapidação de gemas de cor. 3. Heurísticas. 4. Meta-heurísticas. 5. Problemas contínuos de otimização global. 6. Algoritmos Genéticos. 7. GRASP Contínuo. I. Ritt, Marcus Rolf Peter. II. Carvalho, João Batista da Paz. III. Otimização volumétrica de gemas de cor utilizadas para lapidação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. Carlos Alexandre Netto

Pró-Reitor de Coordenação Acadêmica: Prof. Rui Vicente Oppermann

Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof. Vladimir do Nascimento

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Luís da Cunha Lamb

Coordenador do PPGC: Prof. Luigi Carro

Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

*“Os problemas significativos com os quais nos deparamos  
não podem ser resolvidos no mesmo nível de pensamento  
em que estávamos quando eles foram criados”.*

— ALBERT EINSTEIN

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, que ao longo de minha vida tem me agraciado com saúde, e as condições necessárias para que possa traçar meu caminho em busca de meus ideais.

Agradeço enormemente a minha mãe, Maria Lorita, pelo carinho e eterna dedicação que tem tido por mim nestes anos, tendo provido-me, sem medir esforços, do mais precioso e mais importante bem que há no mundo: o amor. Agradeço também ao meu Pai, Marino, que embora distante deu-me ensinamentos para a vida, sendo o principal deles: você deve ser forte, corajoso e lutar como um campeão.

Agradeço ao meu tio Juliano Tonezer, que tem sido meu mentor e amigo ao longo dos anos, desde minha infância, graduação e certamente em conquistas futuras. Sou grato pelo seu apoio, tanto emocional quanto financeiro, sem os quais hoje eu não estaria concluindo mais esta etapa. Disse certa vez um sábio: um homem forte protege a si mesmo, o mais forte protege a sua família. Obrigado, tio Biri, por tudo.

Agradeço, sem menor grau de importância, a todos os meus familiares, em especial meu querido avô Anselmo (*in memoriam*), meu irmãos: Michele, Eduardo (*in memoriam*), Mariana e Thomaz. Aos tios, tias, primos, e, enfim todos que de uma maneira ou de outra auxiliaram na minha caminhada até esta conquista.

Quero agradecer a minha linda namorada, Letícia, principalmente por ter entendido do sacrifício que se exige em uma pesquisa, aceitando com doçura e paciência a minha ausência e os intempestivos momentos de aborrecimento. Obrigado, Leta, por ter sido meu porto seguro. Te amo.

Serei sempre grato ao casal de amigos Mirto e Glória, seus adoráveis filhos Pedro e Lucas, a querida amiga Gigi, por ter me acolhido em sua residência, com todo carinho e atenção, hospedando-me nos períodos letivos. Por essa hospitalidade e tamanha gentileza, meu grato: muitíssimo Obrigado.

Agradeço ainda aos amigos, colegas e professores do Centro Tecnológico de Soledade, e aos colegas do laboratório de algoritmos e otimização da UFRGS. Quero que saibam que sem os devidos auxílios e discussões, eu não teria o crescimento necessário para chegar até aqui. Obrigado, e um forte Abraço.

Por fim, agradeço com todo meu carinho, aos meus orientadores, Marcus Ritt e João Batista, pela paciência, dedicação e principalmente seus sábios ensinamentos, muitos dos quais, com certeza vou levar além da vida acadêmica, como lições de vida. Muito Obrigado!

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>LISTA DE ALGORITMOS</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1 Principais Contribuições . . . . .	19
1.2 Organização da Dissertação . . . . .	19
<b>2 LAPIDAÇÃO DE GEMAS DE COR</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1 Confecção de modelos facetados de lapidação . . . . .	22
2.2 Modelos de Lapidação utilizados na pesquisa . . . . .	24
<b>3 O PROBLEMA DO LAPIDÁRIO</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1 Estado-da-arte em Otimização de Gemas utilizadas para lapidação . . . . .	30
3.1.1 Tecnologia 3D Gemas . . . . .	30
3.1.2 Abordagem Determinística para corte ótimo em diamantes . . . . .	32
3.1.3 Abordagem utilizando Rede Artificial Neural para estimar parâmetros de lapidação de gemas . . . . .	32
3.1.4 Abordagem utilizando programação semi-infinita para otimizar o aproveitamento de gemas de cor . . . . .	33

<b>4 META-HEURÍSTICAS PARA PROBLEMAS CONTÍNUOS DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL</b>	<b>35</b>
4.1 Algoritmos Genéticos	36
4.2 GRASP Contínuo	39
4.2.1 Fase de Construção	41
4.2.2 Fase de busca local	43
<b>5 ALGORITMO GENÉTICO E C-GRASP COMO ABORDAGEM PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO LAPIDÁRIO</b>	<b>45</b>
5.1 Formulação do problema	45
5.2 Função de Avaliação	47
5.3 Determinando se um ponto é interior a uma malha triangular	51
5.4 Abordagem para solucionar o problema do lapidário utilizando Algoritmo Genético	53
5.5 Abordagem para solucionar o problema do lapidário utilizando GRASP Contínuo	54
<b>6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>55</b>
6.1 Ambiente de Testes	55
6.2 Ajustes de Parâmetros das Meta-heurísticas	55
6.2.1 Ajuste de Parâmetros do Algoritmo Genético	57
6.2.2 Ajuste de Parâmetros do método C-GRASP	58
6.3 Resumo dos Resultados Obtidos	60
6.4 Comparativo com as abordagens da literatura	62
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>65</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>67</b>
<b>APÊNDICE A RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS</b>	<b>71</b>
<b>APÊNDICE B PUBLICAÇÕES REFERENTES À DISSERTAÇÃO</b>	<b>75</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Modelo facetado de lapidação inscrito no interior de uma gema bruta. . . . .	18
2.1	Diferentes tipos de lapidação: cabochão, facetada e <i>millenium</i> . . .	21
2.2	Formas básicas de lapidação. . . . .	23
2.3	Efeitos óticos em facetas com diferentes ângulos. . . . .	24
2.4	Renderização com vista frontal do Modelo facetado de lapidação Brillante no formato Redondo (a), e Oval (b). . . . .	24
2.5	Tela do Software GemCad . . . . .	25
2.6	Diagrama de lapidação do modelo Brillante Redondo com oito facetas principais. . . . .	26
2.7	Diagrama de lapidação do modelo Brillante Oval com oito facetas principais. . . . .	27
3.1	Intersecção entre a malha triangular representando a gema e o plano descrito pelos vértices $i_1, i_2, i_3$ . . . . .	31
4.1	Representação de uma solução do problema do lapidário em duas dimensões através de um cromossomo. . . . .	36
4.2	Representação do espaço de busca para o problema do lapidário em duas dimensões . . . . .	40
4.3	Representação da fase de busca local em duas dimensões . . . . .	44
5.1	Modelo de lapidação facetado oval e corpo de calibração correspondente ao modelo facetado . . . . .	46
5.2	Parametrização da calibração do modelo de lapidação Brillante para os formatos Redondo e Oval. . . . .	48
5.3	Vértice da gema no sistema de coordenadas locais do modelo de calibração. . . . .	49

6.1	Média dos desvios relativos obtidos com o AG em função do tempo de execução. . . . .	58
6.2	Média dos desvios relativos em função do número de iterações para o método C-GRASP. . . . .	59
6.3	Média dos desvios relativos em função do tempo de execução para o método C-GRASP. . . . .	60
6.4	Demonstrativo de solução para uma instância do problema . . . .	61



## LISTA DE TABELAS

5.1	Parâmetros do Corpo de Calibração. . . . .	47
6.1	Característica das 50 instâncias utilizadas nos testes computacionais. . . . .	56
6.2	Valores utilizados para os parâmetros dos corpos de calibração. . . . .	56
6.3	Quadro comparativo entre os resultados obtidos pelo AG e o C-GRASP. Melhores resultados destacados em negrito. . . . .	61
A.1	Resultados computacionais para o aproveitamento no melhor caso. . . . .	72
A.2	Resultados computacionais para o modelo de lapidação Redondo. Melhores resultados destacados em negrito . . . . .	73
A.3	Resultados computacionais para o modelo de lapidação Oval. Melhores resultados destacados em negrito. . . . .	74



## LISTA DE ALGORITMOS

4.1	Pseudo-código de um algoritmo genético. . . . .	39
4.2	Pseudo-código do método C-GRASP. . . . .	41
4.3	Pseudo-código da fase de construção. . . . .	42
4.4	Pseudo-código para a fase de busca local. . . . .	43
5.1	Pseudo-código para a avaliação da Função Objetivo. . . . .	52



## RESUMO

O Problema do Lapidário tem como objetivo encontrar o modelo de lapidação que resulte no maior aproveitamento volumétrico para uma dada gema bruta. Nesta dissertação apresentamos um Algoritmo Genético com variáveis de valores reais, e um *GRASP* Contínuo como heurísticas para resolução deste problema. Ambos os algoritmos maximizam o fator de escala do modelo de lapidação, sobre todas as posições de centro e ângulos de giro que o modelo pode assumir, buscando encontrar o modelo de maior volume inscrito no interior da gema, representada virtualmente por uma malha triangular. Propomos também um algoritmo de avaliação de uma instância do problema, o qual determina eficientemente o maior fator de escala, para um dado centro e orientação, que o modelo de lapidação pode assumir permanecendo completamente no interior da gema. Os algoritmos propostos foram avaliados em um conjunto de 50 gemas reais para o problema, utilizando como modelos base os cortes redondo e oval. Por fim, comparamos os resultados computacionais obtidos em relação a aproveitamento volumétrico e tempo de execução com os principais trabalhos relatados na literatura, demonstrando que as heurísticas propostas são competitivas com as demais abordagens.

**Palavras-chave:** Problema do Lapidário, Lapidação de gemas de cor, Heurísticas, Meta-heurísticas, Problemas contínuos de otimização global, Algoritmos Genéticos, *GRASP* Contínuo.



## Volumetric optimization for colored gemstone cutting

### ABSTRACT

The goal of the gemstone cutting problem is to find the largest cutting design which fits inside a given rough gemstone. In this work, we propose a real-valued Genetic Algorithm and a Continuous GRASP heuristic to solve it. The algorithms determine the largest scaling factor, over all possibilities of centers and orientations which the cutting could assume, finding the cutting with the largest volume as possible inside a gemstone, represented by a triangular mesh. We also propose an algorithm to evaluate a problem instance. This method efficiently determines the greatest scaling factor, for a given center and orientation, such that the cutting fits inside the rough gemstone. The proposed algorithms are validated for an instance set of 50 real-world gemstones, using the round and oval cuttings. Finally, we compare our computational results, for volume yield and running time, with the state-of-art. Ours methods are proved be competitive with the previous approaches.

**Keywords:** The gemstone cutting problem, Heuristics, Metaheuristics, Continuous global optimization problems, Genetic Algorithms, Continuous GRASP.





# 1 INTRODUÇÃO

O Rio Grande do Sul possui as maiores jazidas de ágata e ametista do mundo, o que torna um dos principais fornecedores dessas gemas, em quantidade e qualidade, para o mercado internacional. No estado, a cidade de Soledade consolidou-se como principal polo de comercialização e exportação de pedras preciosas, contando com mais de 180 empresas de micro e pequeno porte com atividades relacionadas ao beneficiamento de gemas.

Apesar da importância econômica deste setor para o município, observa-se que os processos empregados na industrialização dos materiais gemológicos são pouco competitivos, o que acarreta uma produção de baixo valor agregado. Além disso, firmou-se na região uma política extrativista que impulsiona a comercialização das pedras preciosas em seu estado bruto ou semibeneficiadas. Assim, comerciantes de outros países compram as gemas como matéria-prima para beneficiá-las usando tecnologias mais desenvolvidas e mão-de-obra mais qualificada, conquistando mercados mais exigentes no exterior. Por vezes os produtos beneficiados retornam ao nosso país com preço elevado, para serem utilizados na indústria joalheira.

Dentre os processos de beneficiamento, destaca-se o processo de lapidação, que consiste nas etapas de corte e polimento de gemas visando realçar as qualidades óticas, definir formas e aumentar o brilho e a beleza destes minerais, que posteriormente são utilizados como adorno, em grande maioria pela indústria joalheira (MOL, 2004). Este processo, de acordo com o Boletim Referencial de preços de diamantes e gemas de cor (IBGM, 2009), pode elevar em mais de dez vezes o valor dos materiais gemológicos, por valorizar o material e ressaltar suas qualidades naturais. Contudo, nas etapas do processo de lapidação ocorre um elevado índice de perda de material, que segundo uma estimativa empírica pode atingir até 75% da gema bruta, para alguns projetos de corte (WINTERFELD, 2007; ZANATTA et al., 2010). Ressalta-se que não existem na literatura dados científicos que comprovem ou refutem este índice, o qual é aceito em consenso pela comunidade dos lapidários.

A etapa do corte é o fator determinante na perda de material durante o processo de lapidação de gemas. Nesta etapa, é necessário definir o formato do modelo de lapidação mais adequado para a gema bruta, e a orientação ideal para o corte do mesmo. Estas decisões são tomadas pelos lapidários sem o auxílio de equipamentos ou tecnologias, baseadas apenas na análise cuidadosa da superfície irregular da gema, e almeja-se, sempre que possível, obter o modelo de lapidação que resulte no maior aproveitamento do material, tanto em peso quanto em beleza e precificação.

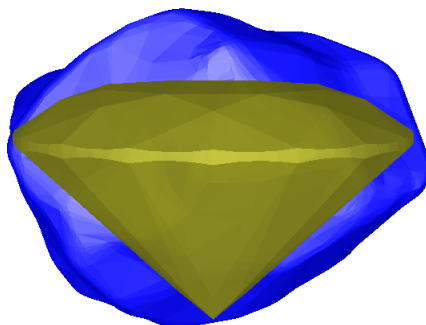


Figura 1.1: Modelo facetado de lapidação inscrito no interior de uma gema bruta.

Na literatura a problemática de maximizar o aproveitamento da gema resultante do processo de lapidação é tratada como *the gemstone cutting problem* – o problema do corte de gemas preciosas, em uma tradução livre – ou *the lapidary cutting problem* – o problema do lapidário, em uma tradução livre. Neste trabalho, nos referimos a este como **O problema do lapidário**. A Figura 1.1 apresenta uma instância deste problema, com uma gema bruta e um modelo de lapidação otimizado em seu interior.

Destaca-se que este problema tem sido amplamente estudado pela indústria do diamante, sendo que tecnologias completas, tanto de hardware quanto de software, foram desenvolvidas para otimizar o aproveitamento volumétrico deste tipo de material gemológico, que possui um alto valor de mercado. Como exemplo, podemos citar a empresa *Ogi Systems Ltd* (OGI, 2012). Contudo, as tecnologias desenvolvidas tem a finalidade comercial, não estando seus algoritmos e ferramentas disponíveis para estudo. Além disso, a lapidação do diamante possui particularidades que diferem o corte deste mineral do corte das demais gemas de cor, sendo estas: (i) o diamante é geralmente cortado na lapidação Brillhante com 57 facetas, enquanto que na lapidação de gemas de cor estes critérios variam consideravelmente; (ii) o diamante possui clivagem octaédrica o que determina o plano e a orientação do corte do modelo em seu interior, o que não ocorre para gemas de cor – com algumas exceções, como por exemplo o topázio, o berilo e o corindo – o que torna o problema, para gemas de cor, consideravelmente mais difícil de ser solucionado.

Salienta-se que em Soledade existe o Centro Tecnológico de Pedras, Gemas e Joias do Rio Grande do Sul (CTPGJRS), instituição mantida pela Universidade de Passo Fundo (UPF), Prefeitura Municipal, Sindicato das Indústrias de Joalheria, Mineração, Lapidação, Beneficiamento e Transformação de Pedras Preciosas do Rio Grande do Sul – Sindipedras (2013), possuindo ainda convênio de cooperação em desenvolvimento de pesquisa com a Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) desde 2010.

O CTPGJRS tem como objetivo o desenvolvimento de tecnologias para o setor de gemas e joias, sendo que em uma das pesquisas realizadas nesta instituição desenvolveu-se a Tecnologia 3D Gemas (BRUSSO et al., 2010), que visa minimizar a perda de material referente ao processo de lapidação, e consequentemente melhorar o aproveitamento volumétrico de gemas de cor utilizadas neste processo. Esta tecnologia através do software Otimizador 3D Gemas, encontra, para uma representação virtual de uma dada gema, a orientação, o posicionamento e a escala do

modelo facetado de lapidação de maior volume que é possível ser confeccionado no interior desta gema. Este software realiza a otimização para os modelos de lapidação Brillhante no formato Redondo e Oval, utilizando um algoritmo genético conforme descrito em (FIOREST; BRUSSO, 2011), atingindo, em simulações computacionais, um aproveitamento volumétrico médio de 34.8% (ZANATTA et al., 2010), o que, em comparação ao processo manual de lapidação, reduziria a perda do material de 75% para 63.2%.

O presente estudo é uma continuação do projeto 3D Gemas, e tem como objetivo propor um algoritmo para solucionar o problema do lapidário mais eficientemente do que a versão atual do software Otimizador 3D Gemas, sendo competitivo, em tempo (1300 segundos) e qualidade da solução (40.7%), com o principal algoritmo relatado na literatura (WINTERFELD, 2007), considerando os modelos de lapidação Brillhante Redondo e Oval, que são utilizados como base na Tecnologia 3D Gemas.

## 1.1 Principais Contribuições

Como contribuições propomos duas heurísticas para solucionar o problema do lapidário. A primeira é um **Algoritmo Genético** com variáveis de valores reais, com implementação significativamente diferente do algoritmo descrito em (FIOREST; BRUSSO, 2011). A segunda um **GRASP Contínuo**. Ambos os algoritmos maximizam o fator de escala do modelo de lapidação, sobre todas as posições de centro e ângulos de orientação que o modelo de lapidação pode assumir, buscando encontrar o modelo de maior volume inscrito no interior de uma dada gema, representada virtualmente por uma malha triangular. Além disso, tem-se ainda como contribuição um algoritmo de avaliação de uma instância do problema, o qual determina eficientemente o maior fator de escala, para um dado centro e orientação, que o modelo de lapidação pode assumir permanecendo completamente no interior de uma gema bruta. Outra importante contribuição deste estudo é o processamento de um conjunto de 50 gemas digitalizadas, as quais foram disponibilizadas no sítio do projeto 3D Gemas <sup>1</sup> e que servem como *benchmark* para o problema, para grupos que tenham interesse nesta área. Este *benchmark* é inédito nesta área de pesquisa.

## 1.2 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 é discutida a lapidação de gemas de cor e quais as características óticas que devem ser consideradas na confecção de um modelo de lapidação. Além disso, é discutida a principal forma de representação de um modelo facetado de lapidação, que é o diagrama de lapidação, sendo que apresentamos o diagrama dos modelos utilizados na pesquisa.

No Capítulo 3, o problema do lapidário é discutido bem como o estado-da-arte em otimização volumétrica de gemas de cor. Ainda neste capítulo apresentamos a formulação matemática definida para o problema. No Capítulo 4 apresentamos as meta-heurísticas Algoritmo Genético e GRASP Contínuo, as quais são tidas na literatura como propostas para problemas de otimização global em domínio contínuo.

---

<sup>1</sup>Disponível em <http://usuarios.upf.br/3dgemas/repositorio>

Além disso, discutimos no capítulo as principais características e parâmetros destes métodos.

Os algoritmos propostos neste trabalho são apresentados no Capítulo 5. Os resultados computacionais obtidos com os métodos, bem como experimentos realizados para ajustar seus respectivos parâmetros, são apresentados no Capítulo 6, juntamente com um comparativo entre os resultados dos métodos, e os resultados apresentados na literatura. Por fim, as conclusões referentes a este trabalho são apresentadas no Capítulo 7.

## 2 LAPIDAÇÃO DE GEMAS DE COR

A lapidação é o processo de corte e polimento de gemas que visa realçar as qualidades óticas, empregar formas, e aumentar o brilho e a beleza destes minerais que são geralmente utilizados como adorno (MOL, 2004). Existem diversos tipos de lapidação, dentre elas se destacam a lapidação facetada, o cabochão e a lapidação *millenium*, conforme demonstrado na Figura 2.1.

A lapidação do tipo cabochão é utilizado para minerais opacos, *i.e.* materiais que a luz não ultrapassa sua superfície até a outra extremidade. A lapidação facetada e a *millenium* são utilizadas em gemas transparentes e translúcidas. Este trabalho tem como foco a lapidação facetada, que consiste no corte da gema no formato de um poliedro, tendo como objetivo controlar o brilho, a saturação de cor, maximizar o volume final e permitir a fixação em joias (KRAUS, 1987).

Uma gema facetada é avaliada internacionalmente segundo essencialmente quatro critérios: peso, cor, pureza e lapidação. Estes fatores são individualmente avaliados e cada um possui um percentual no valor da peça lapidada, de acordo com a sua relevância (IBGM, 2009). O peso é medido em quilates (*ct*) sendo 1*ct* equivalente a 0.2 gramas. A cor é responsável por cerca de 50% do valor de uma gema. Avalia-se três fatores para indicar o grau da cor: matiz, tonalidade e saturação. O matiz, principal aspecto dentre os três, é o comprimento de onda predominante, pelo qual a gema pode ser descrita, por exemplo, como verde, azul ou vermelha (NADUR, 2009). A tonalidade ou intensidade refere-se à sensação claro-escuro, e a saturação avalia a força, a pureza e a intensidade do matiz. A melhor qualidade de gema apre-



Figura 2.1: Diferentes tipos de lapidação. À esquerda lapidação cabochão, ao centro uma lapidação facetada e à direita uma lapidação *millenium*.

senta homogeneidade do matiz, sem a presença de manchas (zonas de cor), e uma saturação vivida, sendo o tom uma característica específica para cada variedade de pedra, avaliados por um sistema como por exemplo *Gem Set* (GIA, 2012).

Quanto a pureza, avalia-se se a gema possui ou não inclusões em seu interior ou imperfeições externas, algo que possa diminuir a sua beleza. Este critério representa cerca de 30% do valor final e recomenda-se a utilização de uma lupa de 10 aumentos para averiguá-lo (LEAL; BECATTINI; LOPES, 2007). A presença de algumas inclusões em determinadas circunstâncias pode aumentar a raridade da gema, e assim elevar o valor da mesma. No entanto estes casos são tratados como especiais tendo uma avaliação mais subjetiva. O último critério avaliado é a lapidação onde as proporções, simetria das facetas e o acabamento final (polimento) são analisados e mensurados. A lapidação corresponde a 20% do valor de uma gema, e embora seja o elemento de menor porcentagem em relação aos demais critérios, se mal executada pode desvalorizar significativamente a peça.

Considerando estes critérios de avaliação, ao se lapidar uma gema deve-se buscar o maior valor econômico, independente de gerar o maior peso (IBGM, 2009). Isto implica que uma lapidação mal executada, com a proporção entre as partes comprometendo o brilho da peça final, mesmo possuindo o maior peso, terá seu valor menor do que uma gema lapidada seguindo critérios de restrições óticas do mineral, e assim, resultando em maior brilho. Diante desta afirmação, na seção seguinte apresenta-se uma revisão sobre os fenômenos óticos que guiam a confecção de um modelo de lapidação.

## 2.1 Confecção de modelos facetados de lapidação

O processo de lapidação é realizado em quatro etapas consecutivas, sendo elas: corte/serragem ou martelamento, pré-formação, facetamento e polimento (NADUR, 2009). A primeira etapa consiste basicamente em preparar a gema para ser lapidada, isto significa extrair as impurezas, como inclusões e trincas, utilizando-se de martelos de desbaste, ou de serras.

Para os passos seguintes o lapidário analisa a superfície irregular da gema bruta, visando identificar o formato de lapidação que será confeccionado em seu interior, definindo a posição do modelo de lapidação. Na etapa de pré-formação, a gema é cortada no formato de poliedro no posicionamento definido pelo lapidário, sendo fixado a parte central do modelo de lapidação (cintura), a parte inferior (pavilhão), e a parte superior (coroa). A coroa e o pavilhão são cortados com o ângulo da faceta de maior grau que o modelo final facetado possui nestas partes (SEVERO, 2008).

Na etapa de facetamento, a gema é cortada com uma sequência de faces dispostas ao longo do poliedro obtido na etapa anterior. Destaca-se que existem diversos formatos de modelos facetados de lapidação que podem ser utilizados em gemas de cor. Os modelos tradicionais são: Redondo, Oval, Gota, Navete, Retangular, Quadrado e Coração, os quais são ilustrados na Figura 2.2.

Por fim, na etapa de polimento, as faces são polidas para um melhor acabamento, eliminando os riscos e impurezas oriundos da etapa anterior, aumentando o brilho da peça lapidada. O brilho destaca-se como a principal métrica utilizada para avaliar a

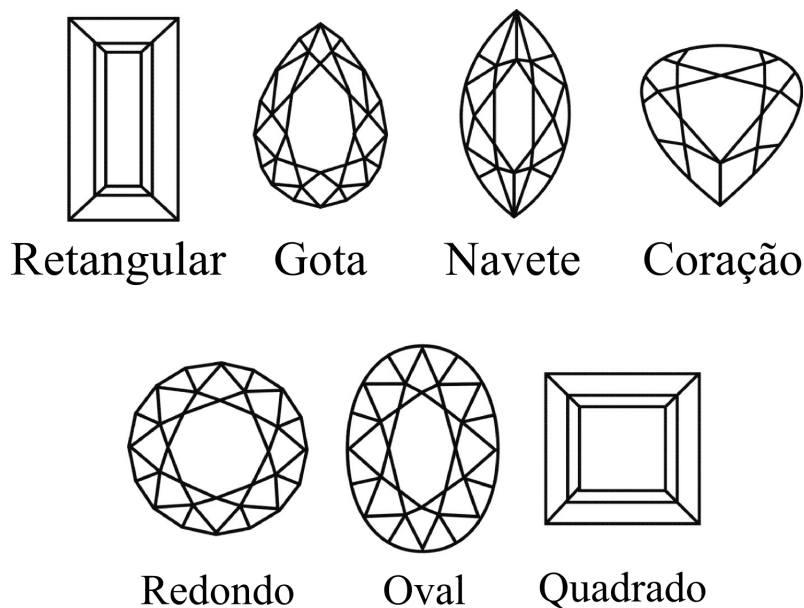


Figura 2.2: Formas básicas de lapidação.

qualidade de um modelo de lapidação, e além do polimento, este é resultado também da simetria e das proporções utilizadas nas partes que compõem o modelo (coroa, cintura, pavilhão), sendo caracterizado como a luz que adentra pela parte superior do modelo facetado, percorre seu interior e retorna à perspectiva do observador. Deste modo, quanto maior for o retorno da luz, maior será o efeito do brilho.

Para que se maximize o retorno da luz ao se confeccionar uma lapidação facetada, é necessário obedecer algumas restrições dos fenômenos óticos em gemologia, sendo que a principal restrição no projeto de lapidação é o ângulo crítico que as facetas angulares do modelo devem ter. Este ângulo é definido pelo índice de refração (IR), o qual é uma característica intrínseca de cada mineral (SINKANKAS, 1984).

Um modelo de lapidação, portanto, deve ter sua simetria e facetas projetadas tal que as faces da parte superior direcionem a luz incidente para o interior da gema – quando a luz incide com o mineral, parte da mesma é refletida e parte penetra o mineral. O feixe de luz que penetra a gema irá percorrer o interior do mineral, devendo ser direcionado para o encontro de uma nova faceta na parte inferior. Esta faceta deve estar posicionada de acordo a refletir este feixe para a outra extremidade do modelo, que por fim, deve ter uma face disposta para refletir esta luz de volta à parte superior, de forma maximizada.

A Figura 2.3 apresenta modelos de lapidação com diferentes ângulos críticos. É possível observar que se o ângulo empregado estiver abaixo ou acima do indicado para tal material, a luz incidente será dispersada, não retornando à perspectiva do observador, reduzindo a qualidade da peça lapidada. Na Figura 2.3(c) o ângulo indicado é utilizado e a luz percorre o caminho ideal, com o mínimo de perda de luz.

A partir dos estudos dos efeitos óticos em gemas, na presente pesquisa optou-se por utilizar como modelos base para os experimentos, o modelo facetado de lapidação Brillhante nos formatos Redondo e Oval, pela simplicidade dos poliedros dos respectivos modelos. Os modelos utilizados foram projetados levando em considera-

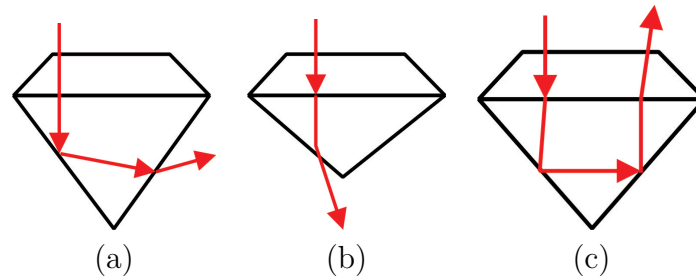


Figura 2.3: Efeitos óticos em facetas com diferentes ângulos. (a) ângulo abaixo do indicado e (b) ângulo acima do indicado, ambos acarretam na perda de alguns raios que são dispersados. (c) ângulo correto com o mínimo de raios dispersados. Adaptado de (SINKANKAS, 1984).



Figura 2.4: Renderização com vista frontal do Modelo facetado de lapidação Brilhante no formato Redondo (a), e Oval (b).

ção a restrição do ângulo crítico, e suas características são apresentadas a seguir.

## 2.2 Modelos de Lapidação utilizados na pesquisa

Os modelos de lapidação utilizados nesta pesquisa foram selecionados para gemas da variedade quartzo, dado que as gemas utilizadas como *benchmark* são gemas de ametista e citrino. Buscou-se na literatura modelos indicados para estes minerais, considerando seus índices de refração, cujo valor encontra-se entre 1.54 – 1.55.

O modelo Brilhante Redondo utilizado foi proposto em (STRICKLAND, 2002) para gemas com  $IR = 1.54$ , sendo portanto, indicado para as gemas de quartzos. Uma renderização deste modelo pode ser observada na Figura 2.4(a). O modelo Brilhante Oval é uma adaptação do formato redondo com algumas alterações nas facetas do pavilhão, para ajustes de simetria, sendo possível observar uma renderização de sua malha na Figura 2.4(b).

Destaca-se que uma importante ferramenta para confeccionar e avaliar projetos de lapidação é o software Strickland (2013). Este software é do tipo CAD (*Computer-Aided Design* – projeto auxiliado por computador, em uma tradução livre), e tem como objetivo auxiliar na confecção e avaliação de projetos de lapidação virtuais,



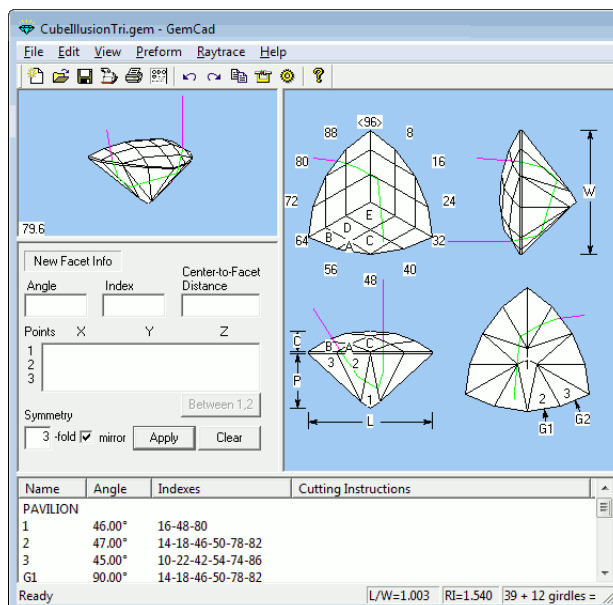


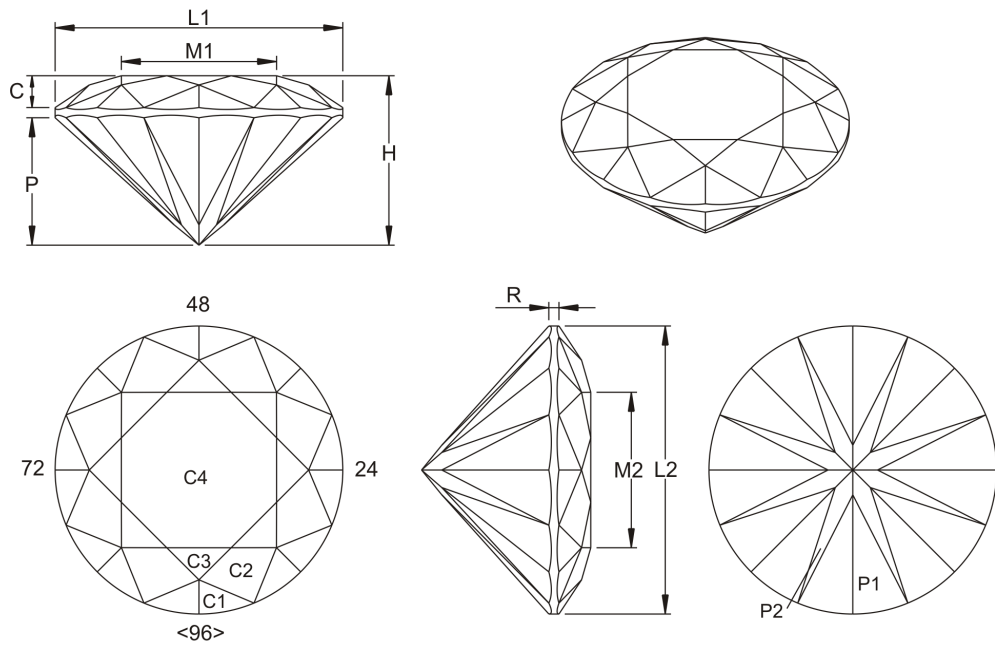
Figura 2.5: Tela do Software GemCad. Fonte (STRICKLAND, 2013)

evitando a necessidade da confecção da peça lapidada, sendo possível inclusive corrigir defeitos, caso identificados. O GemCad permite confeccionar virtualmente um modelo de lapidação, indicando o índice de refração do mineral, além do ângulo, da posição e da disposição das facetas, sendo possível também avaliar o percurso de raios de luz pela peça lapidada, analisando se são refletidos novamente para a parte superior ou são dispersos em outra posição do modelo. A Figura 2.5 apresenta uma visão do software GemCad, com a demonstração da funcionalidade de avaliação do percurso de um raio de luz pela peça lapidada. No canto inferior no lado direito é possível averiguar o índice de refração utilizada para este modelo ( $IR=1.54$ ).

O software GemCad utiliza o conceito de diagrama de lapidação para representar um modelo facetado de lapidação. O diagrama de lapidação contém a ordem em que as facetas devem ser lapidadas, o grau de inclinação em que cada faceta deve ser cortada e as medidas e proporções do modelo de lapidação, sendo possível a reprodução de modelos a partir deste diagrama, o qual é amplamente utilizado como guia na execução do processo de lapidação, facilitando as etapas de facetamento e polimento. As Figuras 2.6 e 2.7 apresentam o diagrama de lapidação dos modelos utilizados como base neste trabalho.

Descrevendo sucintamente as partes do diagrama, este apresenta quatro vistas da lapidação: superior, lateral, inferior e frontal. Além disso, são apresentadas informações relevantes para a confecção do modelo, como por exemplo o índice de refração da gema (utilizado para avaliar a brilho do modelo), a quantidade total de facetas, o tipo de simetria utilizado para confeccionar o modelo, a indexação (índice dos ângulos de cada faceta) utilizada e, as proporções do modelo, que são apresentadas através da relação entre suas partes. Por fim, o diagrama apresenta logo abaixo das imagens, a angulação de cada faceta e quais os índices (utilizados na catraca de máquinas de corte) devem ser utilizados para cortar estas facetas.

Cabe ressaltar que apresentamos os diagramas de lapidação apenas para demonstrar uma forma de representar um modelo facetado para que possam ser re-



Ângulos da Coroa			Ângulos do pavilhão		Medidas
C1	34.0°	03-09-15-21 27-33-39-45 51-57-63-69 75-81-87-93	90.0°	Cintura sem facetas	57 Facetas
			P1	42.5°	I.R.: 1,5400
					L2/L1: 1,0000
C2	28.0°	06-18-30-42 54-66-78-90	P2	41.5°	P/L1: 0,4400
C3	16.0°	96-12-24-36 48-60-72-84			R/L1: 0,0200
C4	0°	Mesa			C/L1: 0,1081

Figura 2.6: Diagrama de lapidação do modelo Brillante Redondo com oito facetas principais.

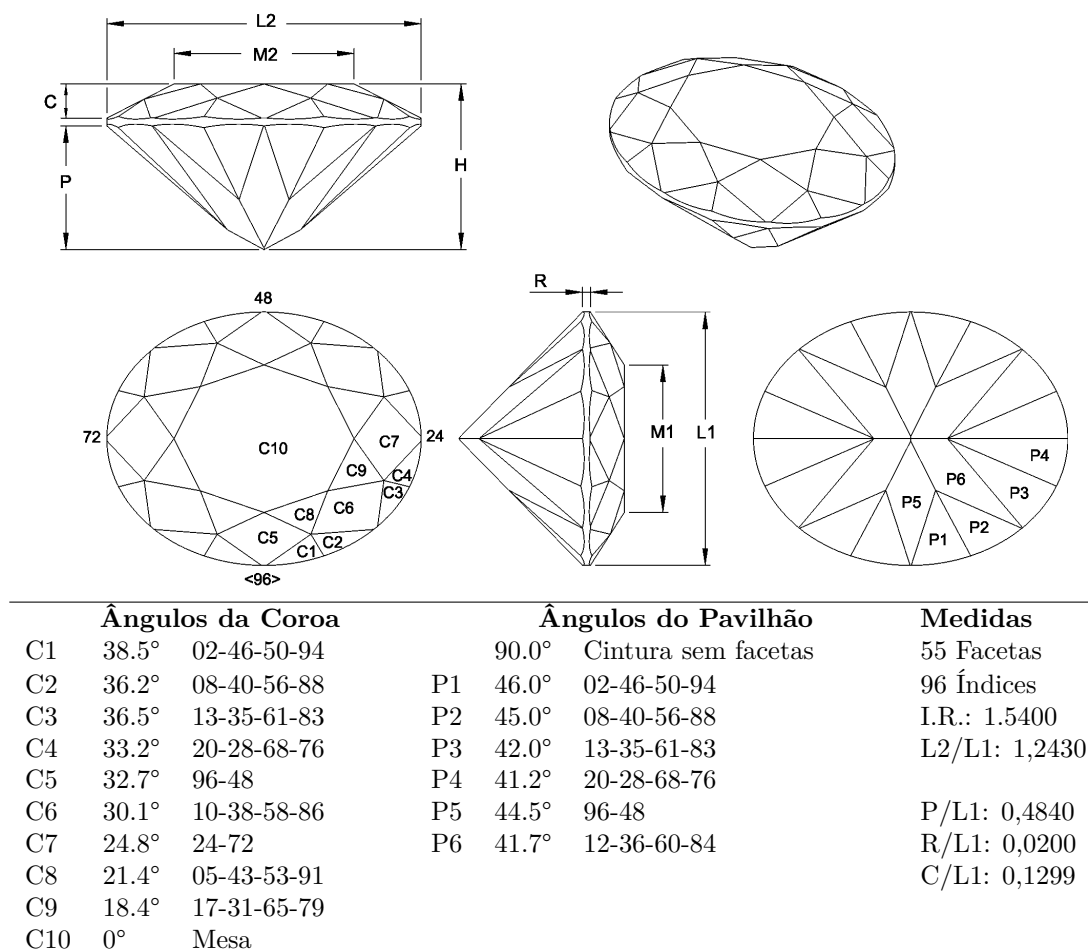


Figura 2.7: Diagrama de lapidação do modelo Brilhante Oval com oito facetas principais.

produzidos, caso necessário. Não pretendemos aprofundar conceitos relacionados ao diagrama de lapidação como o sistema de indexação, por exemplo, para maiores informação o leitor pode consultar as referências (STRICKLAND, 2002; NADUR, 2009).

No capítulo seguinte é definido o problema do lapidário e uma revisão do estado-da-arte em otimização volumétrica de gemas de cor é apresentada.

### 3 O PROBLEMA DO LAPIDÁRIO

O problema de determinar qual o modelo de lapidação é mais adequado para uma dada gema, e qual o posicionamento deste modelo no interior da mesma, não possui uma solução simples. Este problema é complexo até mesmo para um experiente lapidário, devido ao fato de que ao se analisar a gema em uma perspectiva, o campo de visão humano vislumbra apenas um plano da gema por vez, permanecendo a profundidade, nesta perspectiva, oculta ao olhar do lapidário.

O baixo índice de aproveitamento de gemas lapidadas aponta para a dificuldade de resolução do problema. Para o modelo Brillhante no formato Redondo, existe uma estimativa empírica de aproveitamento volumétrico médio de 25% (WINTERFELD, 2007). Em (ZANATTA et al., 2010) um controle estatístico foi realizado em uma escola de lapidação, para avaliar a porcentagem de aproveitamento volumétrico obtido nas gemas lapidadas. Neste levantamento mais de 200 gemas foram pesadas antes e após a lapidação, como resultado constatou-se um aproveitamento médio de aproximadamente 22%, para os modelos de lapidação no formato Redondo e Oval.

Partindo da constatação do baixo aproveitamento volumétrico tido em gemas de cor utilizadas na lapidação, alguns autores tem pesquisado e proposto abordagens computacionais para otimizar o aproveitamento destes minerais. Este problema é conhecido na literatura como Problema do Lapidário e visa encontrar o projeto de lapidação que resulte no maior aproveitamento – tanto em peso como em brilho – para uma determinada gema.

Este problema pode ser definido como um problema contínuo de otimização global. Por definição problemas de otimização global buscam determinar o máximo (ou mínimo) global  $x^* \in S \subseteq R^n$  tal que  $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in S$ , sendo  $S$  uma região de  $R^n$  e  $f : S \rightarrow R$  (HIRSCH, 2006), sendo o conjunto de soluções  $S$  representado através de um espaço de busca contínuo.

Métodos para solucionar computacionalmente problemas contínuos de otimização global existem na literatura (M.; H.; SHETTY, 2006). Contudo, pela razão que a função objetivo deste problema não é diferenciável, e o vetor gradiente não está definido, mesmo se esse não fosse o caso, não é trivial calculá-lo analiticamente, e, portanto, uma extensa lista de métodos baseados no gradiente (M.; H.; SHETTY, 2006) não pode ser utilizada. Como alternativa, tem-se a utilização de técnicas algorítmicas de otimização que não usem informações do gradiente da função objetivo, e que possuam convergência global razoável, ao contrário do conhecido método de coordenadas cíclicas ou melhoramentos deste (M.; H.; SHETTY, 2006).

Meta-heurísticas (MH) destacam-se, nesta área de técnicas algorítmicas de otimização, por possuir convergência global considerável, encontrando soluções de boa qualidade, em um tempo de execução aceitável, sem a necessidade da informação do gradiente da função objetivo. Neste trabalho, propomos duas abordagens heurísticas utilizando as meta-heurísticas Algoritmos Genéticos e GRASP Contínuo como alternativas para solucionar o problema do lapidário. No capítulo seguinte apresentamos um revisão sobre as meta-heurísticas citadas.

No restante deste capítulo vamos discutir o estado-da-arte sobre trabalhos relacionados ao Problema do Lapidário com as principais abordagens encontradas na literatura que estão relacionadas a otimização volumétrica de gemas.

### 3.1 Estado-da-arte em Otimização de Gemas utilizadas para lapidação

Inicialmente vamos analisar o algoritmo utilizado pelo software Otimizador 3D Gemas. Ressalta-se que existem poucos trabalhos relacionados a este tema, sendo os principais discutidos nesta seção.

#### 3.1.1 Tecnologia 3D Gemas

O CTPGJRS desenvolveu, através do projeto de pesquisa 3D Gemas, a Tecnologia 3D Gemas (2012). Esta tecnologia tem como objetivo otimizar o aproveitamento de gemas coradas utilizadas no processo de lapidação, visando encontrar o modelo de lapidação que resulte no maior aproveitamento volumétrico da gema bruta, considerando volume e brilho (ZANATTA et al., 2010). Para se obter o brilho adequado, foram confeccionados modelos de lapidação com proporções indicadas para as variedades do quartzo ametista e citrino, gemas estas que são vendidas em volume considerável na cidade de Soledade/RS e região.

A Tecnologia 3D Gemas é dividida em três níveis: (i) Digitalização da gema bruta; (ii) Otimização volumétrica através do software Otimizador 3D Gemas; (iii) Visualização do projeto virtual de lapidação e geração do diagrama de lapidação através do software Visualizador 3D Gemas.

O software Otimizador 3D Gemas utiliza o algoritmo genético descrito em (FI-OREST; BRUSSO, 2011) para solucionar o problema do lapidário. (Uma revisão bibliográfica sobre algoritmos genéticos é apresentada na seção seguinte). O algoritmo foi implementado utilizando a biblioteca GALib (WALL, 1996). Utilizou-se na implementação o algoritmo *SimpleGA*, o qual recria a população de indivíduos a cada geração, mantendo apenas o indivíduo mais apto para as gerações futuras. Os indivíduos são representados através de uma *string* binária, usando o genoma *GA-Bin2DecGenome*. Cada indivíduo é composto de três valores inteiros, sendo cada um destes valores o índice de um vértice no vetor que armazena as pontos tridimensionais da malha da gema. Os indivíduos, portanto, possuem três pontos 3D, que representam um plano tridimensional no universo. Este plano por possuir três vértices da gema irá, obrigatoriamente, interceptá-la, gerando instâncias factíveis para a função de avaliação.

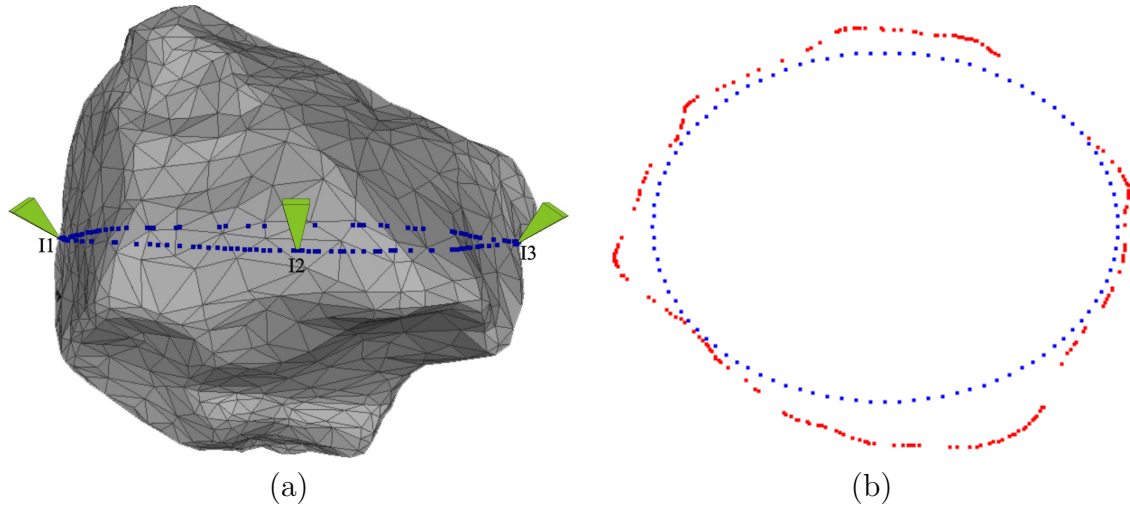


Figura 3.1: (a) Intersecção entre a malha triangular representando a gema e o plano descrito pelos vértices  $i_1, i_2, i_3$ . (b) Uma elipse, representando a forma geométrica do modelo Oval, com escala otimizada no interior do polígono não-convexo resultante da intersecção dos pontos da malha com o plano descrito pelos vértices  $i_1, i_2, i_3$ .

A função de avaliação dos indivíduos foi proposta em (BRUSSO et al., 2010) e soluciona o problema de otimização de maneira simplificada, em duas dimensões. Para tal, primeiramente é executado um procedimento que encontra o conjunto de vértices  $V$  da gema que interceptam com o plano descrito pelos três vértices do indivíduo avaliado ( $i_1, i_2, i_3$ ). Os pontos em  $V$  são projetados para duas dimensões, gerando um polígono não convexo. Após, a otimização é efetuada neste polígono, encontrando o posicionamento (centro) e a orientação ideal para a forma geométrica correspondente à cintura do modelo de lapidação, maximizando a escala desta forma geométrica. O procedimento de otimização é ilustrado na Figura 3.1, sendo que a Figura 3.1(a) demonstra a intersecção da malha triangular da gema com o plano descrito pelos três vértices do indivíduo ( $i_1, i_2, i_3$ ), e a Figura 3.1(b) exemplifica a otimização da figura geométrica elipse – que representa a cintura do modelo oval – no interior do polígono não convexo.

Após a otimização bidimensional, ainda na função de avaliação, existe um procedimento que posiciona a calibração do modelo de lapidação, alinhando a sua cintura com o centro e a orientação obtida na otimização da forma geométrica, sendo ainda, o modelo escalado proporcionalmente tal que sua cintura possua a mesma escala que a forma geométrica. Após isso, uma rotina verifica se o modelo de lapidação está totalmente inscrito no interior da gema, caso isto não ocorra, a escala da calibração é diminuída até que o modelo esteja totalmente inscrito no interior. O volume resultante desta validação é a aptidão (*fitness*) atribuída ao indivíduo.

A população deste AG foi estipulada em 50 indivíduos inicializados aleatoriamente. O *crossover* utilizado foi o *OnePointCrossover* com uma taxa de 0.01%, utilizou-se a mutação *FlipMutation* com uma taxa de 0.75%. Como critério de seleção de indivíduos para cruzamento foi utilizado o sorteio, onde indivíduos com maior aptidão recebem maior chance de passar suas características para próximas gerações. Por fim, estabeleceu-se como critério de parada 50 gerações, e ao final destas o indivíduo com maior aptidão é tido como solução.

Esta abordagem, conforme relatado em (ZANATTA et al., 2010), foi avaliada em um conjunto de 78 instâncias, para os modelos redondo e oval. O aproveitamento médio obtido no melhor caso foi de 34.8%. Entende-se como melhor caso, o melhor aproveitamento para cada gema, dentre os resultados obtidos para os modelos redondo e oval,

No Capítulo 6 é estabelecido um comparativo com os resultados obtidos com esta abordagem, e os resultados obtidos com as abordagens propostas.

### 3.1.2 Abordagem Determinística para corte ótimo em diamantes

Em (NGUYEN; STRODIOT, 1992) uma abordagem determinística foi proposta para solucionar o problema do lapidário, encontrando o corte ótimo para diamantes. No entanto, este trabalho utiliza o plano de clivagem para determinar a orientação do modelo de lapidação no interior da gema bruta. Assim, o algoritmo otimiza apenas o fator de escala e o centro do modelo de lapidação. Além disso, conforme descrito anteriormente, o corte de diamantes e de gemas de cor possui diferença também em relação à simetria e quantidade de facetas do modelo de lapidação. Este método, portanto, não é indicado para gemas de cor e não será comparado com as abordagens desenvolvidas.

### 3.1.3 Abordagem utilizando Rede Artificial Neural para estimar parâmetros de lapidação de gemas

Em (MOL; FILHO; ROCHA, 2007) uma rede artificial neural foi proposta para estimar eficientemente os parâmetros de lapidação para gemas de cristal de rocha incolor, também chamados de quartzos cristal hialinos, avaliando a influência da interação da luz com o material segundo dois critérios: brilho e aproveitamento de volume.

Estes critérios foram analisados para 62 modelos virtuais de lapidação dispostos na literatura, os quais possuíam proporções e simetria propícias para a variedade do quartzo em questão, seguindo o  $IR = 1.54$ .

O brilho da lapidação foi avaliado através do software Strickland (2013), que utiliza *ray tracing* para analisar a porcentagem de luz retornada pelo projeto de lapidação. Para o aproveitamento de volume, os autores usaram a medida  $Vol/W^3$  indicada no diagrama de lapidação de cada modelo, conforme discutido no Capítulo 2, sendo este valor a razão entre o volume do modelo de lapidação ( $Vol$ ) e o volume de um cubo de aresta  $W$ , sendo  $W$  a maior medida da parte central (cintura) do modelo.

Esta abordagem é considerada ineficaz na resolução do problema de otimização do aproveitamento volumétrico por não levar em consideração a topologia da gema, analisando o aproveitamento em relação à um cubo, e, portanto, não será considerada em comparações nesse trabalho.



### 3.1.4 Abordagem utilizando programação semi-infinita para otimizar o aproveitamento de gemas de cor

Em (WINTERFELD, 2007) uma abordagem utilizando programação semi-infinita é proposta para solucionar o problema do lapidário para gemas de cor. Esta abordagem utiliza um resolvidor GSIP (*general semi-infinite program*) baseado no método de pontos interiores proposto por (STEIN, 2006).

O algoritmo proposto por Winterfeld soluciona o problema do lapidário em três etapas. A primeira etapa – pré-otimização – suaviza a malha tridimensional da gema, gerando uma representação da mesma a partir de restrições concavas quadráticas. A segunda etapa é a otimização propriamente dita, utilizando-se do resolvidor GSIP, tendo como entrada os parâmetros do corpo de calibração e as restrições que descrevem a gema. Por fim, na terceira etapa, ocorre um processo de pós-otimização, que determina os planos e a disposição das facetas ao longo do corpo de calibração otimizado. A seguir vamos discutir cada um destes níveis de otimização.

No nível inicial esta abordagem utiliza-se de uma heurística para representatividade da malha da gema. Em síntese, para obter o modelo matemático utilizado para representar a gema são executados quatro passos: (a) calcula-se o invólucro convexo tridimensional (*convex hull*) da malha da gema; (b) projeta-se os vértices/triângulos da malha original neste invólucro convexo; (c) armazena-se os pontos da malha original que interceptam esta projeção; (d) utiliza-se uma aproximação concava quadrática na nuvem de pontos restante, para gerar as restrições matemáticas destas regiões na formulação.

O modelo matemático da gema ainda passa por uma etapa de suavização através de um refinamento adaptativo – proposto pelo autor – para redução do número de restrições geradas na etapa anterior. Cabe ressaltar que este refinamento gera um *gap* entre a gema real e o modelo matemático utilizado para representá-la. No entanto, destaca-se que sem este passo não seria viável encontrar soluções factíveis para o problema através do resolvidor citado.

Os modelos de lapidação são representados por um corpo de calibração genérico, descrito por uma função matemática não-linear. Através desta representação é possível descrever uma quantidade considerável de modelos de lapidação, com formatos derivados de formas retangular e oval. Esta generalização dá a solução uma flexibilidade na resolução do problema, não tornando a abordagem engessada para geometrias fixas, embora haja uma leve perda de volume no momento da otimização.

Após, a otimização do modelo utilizando-se do resolvidor GSIP, ocorre a rotina de pós-otimização que recobre o corpo de calibração otimizado com as facetas de acordo com uma função determinística proposta pelo autor, sendo o número de facetas ajustado conforme parâmetro de entrada.

Por fim, os resultados apresentados em (WINTERFELD, 2007) demonstram que esta abordagem possui grande potencialidade, sendo o principal algoritmo disponível na literatura para solucionar o problema do lapidário para gemas de cor. Esta abordagem foi avaliada em um universo de 50 gemas, para nove modelos de lapidação, sendo eles: Redondo, Oval, Retangular, Navete, Esmeralda, TV, *Reuleaux*, Trapézio e *Trillion*. O aproveitamento volumétrico médio relatado no melhor

caso, dentre os nove modelos, foi de 42.4%. A soma dos tempos médios para os novos modelos de lapidação remetem a um tempo de execução de 5852 segundos, em média. Considerando os formatos de lapidação Redondo e Oval, modelos base escolhidos nesta pesquisa, a abordagem utilizando programação semi-infinita alcançou um aproveitamento volumétrico médio de 40.2% em um tempo médio de 692 segundos para o modelo Oval, e 35% em um tempo médio de 608 segundos para o modelo redondo.

Cabe ainda ressaltar que, embora esta abordagem seja considerada como uma solução matemática para o problema do lapidário, esta utiliza-se de heurística para suavização da gema, a qual como já mencionado gera um *gap* entre a gema real do problema, e a representação via restrições utilizada. Além disso, ao se trabalhar com o corpo de calibração, também perde-se uma parcela sutil de volume do modelo. Portanto, pode-se concluir que a solução obtida através desta abordagem não é comprovadamente a solução ótima para o problema.

Assim, não há na literatura até o presente momento, pelo menos de conhecimento do autor, uma solução totalmente determinística para o problema. Isto reforça a dificuldade discutida anteriormente em calcular analiticamente o gradiente da função objetivo, reforçando também a utilização por Meta-heurísticas, as quais são tratadas no capítulo a seguir.

No Capítulo 6 apresenta-se um comparativo das abordagens utilizando AG e programação semi-infinita com as heurísticas propostas neste trabalho.

## 4 META-HEURÍSTICAS PARA PROBLEMAS CONTÍNUOS DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL

O termo Meta-heurística é utilizado para descrever todos os métodos heurísticos que, de uma maneira genérica *i.e.* para diferentes tipos de problemas, alcançam uma solução de boa qualidade, não necessariamente a solução ótima, em um tempo aceitável.

Existem na literatura uma grande quantidade de meta-heurísticas que têm sido amplamente utilizadas na solução de problemas de otimização global e combinatória. Como exemplo podemos citar Colônia de Formigas, Arrefecimento Simulado, Algoritmos Genéticos (AG), Busca Tabu, GRASP, entre outros (GENDREAU; POTVIN, 2010). Por definição, as meta-heurísticas foram inicialmente propostas para problemas discretos de otimização combinatória. No entanto, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos propondo adaptações das tradicionais técnicas heurísticas para utilização em problemas de domínio contínuo, conforme discutido em (HIRSCH, 2006; SOCHA; DORIGO, 2006; LOCATELLI, 2000; PARDALOS; ROMELIJN, 2002).

Para este trabalho, optamos por manter a escolha de Algoritmos Genéticos, discutido em (FIOREST; BRUSSO, 2011), como abordagem para solução do problema do lapidário. Aprofundamos a revisão bibliográfica – apresentada na Seção 4.1 deste capítulo – sobre os procedimentos e configurações ajustáveis de um AG, e, assim, propomos uma nova implementação, com configurações e parâmetros, calibrados em exaustivos testes computacionais.

Além do AG, propomos a utilização da meta-heurística GRASP Contínuo (C-GRASP) como alternativa de solução para o problema do lapidário. Esta meta-heurística é baseada no conhecido método GRASP, do acrônimo em inglês *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* – procedimento de busca adaptativo, aleatório guloso, em uma tradução livre. Optamos pela utilização desta abordagem pela característica de busca local do método, que conforme discutido em (HIRSCH, 2006), apresenta bons resultados para problemas contínuos de otimização global, sendo que em um comparativo efetuado com outras três heurísticas conhecidas (*Scatter Search*, busca tabu e algoritmos genéticos) o C-GRASP obteve resultados competitivos.

Na continuidade deste capítulo apresenta-se as principais características de ambas as meta-heurísticas citadas, detalhando suas funcionalidades.

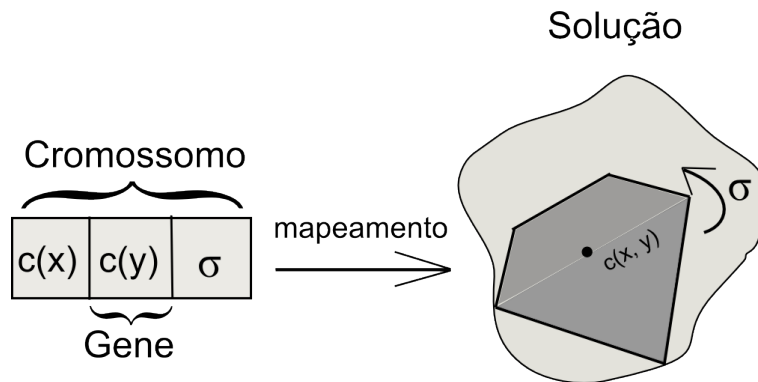


Figura 4.1: Representação de uma solução do problema do lapidário em duas dimensões através de um cromossomo.

## 4.1 Algoritmos Genéticos

Algoritmos Genéticos foram inicialmente utilizados por John Holland na década de 60 do século passado (HOLLAND, 1975). Atualmente esta técnica é uma das mais difundidas, sendo amplamente utilizada na solução de problemas de otimização global. O método é baseado na teoria da Evolução de Darwin. Em analogia à evolução biológica, em algoritmos genéticos indivíduos representam uma solução para o problema de otimização. Estes indivíduos são avaliados segundo uma função que atribui a cada indivíduo um grau de aptidão (*fitness*). Os indivíduos são agrupados em uma população, sendo que esta população evolui ao longo de um número de gerações ou até que um critério de parada seja satisfeito, como por exemplo a convergência para a solução.

Para a “evolução da espécie”, indivíduos são selecionados por um método de seleção, geralmente seleção natural (*i.e.* indivíduos mais aptos), para passar para gerações futuras suas características. Novos indivíduos são gerados através de cruzamento e mutação. No cruzamento ou *crossover* os indivíduos selecionados (pais) são cruzados entre si, gerando indivíduos (filhos) que herdam suas características. Já a mutação é responsável por alterar as características genéticas de cada indivíduo, variando, através de um critério aleatório, os genes do indivíduo. Por fim, quando o algoritmo termina, o indivíduo mais apto da população é eleito como solução heurística para o problema (MITCHELL, 1999). Nesta seção vamos estar discutindo sobre os principais componentes que constituem um AG.

Os indivíduos – representações de uma solução  $x$  – são codificados como cromossomos, sendo cada cromossomo constituído de um conjunto de genes. A Figura 4.1 exemplifica o mapeamento de uma solução do problema do lapidário, em duas dimensões, através de um cromossomo. No exemplo da figura o cromossomo é composto pelos genes  $c(x)$ ,  $c(y)$  e  $\sigma$ , os quais representam o centro  $c(x, y)$  do modelo de lapidação e o ângulo  $\sigma$  de inclinação do modelo em relação a este centro.

A função de avaliação  $f(x)$  ou função objetivo, é responsável por atribuir um grau de aptidão para cada indivíduo  $x$ . Esta aptidão indica qual a qualidade da solução que o indivíduo representa para o problema. No exemplo da Figura 4.1, a aptidão do indivíduo é o fator de escala máximo que o modelo de lapidação pode assumir na coordenada  $c(x, y)$  inclinado  $\sigma$  a partir deste centro.

Para a evolução da população, são utilizados três operadores genéticos: seleção, cruzamento e mutação. O primeiro dos operadores tem como objetivo selecionar indivíduos para serem utilizados pelos outros dois operadores. Existem diversos tipos de algoritmos para os operadores genéticos, na seleção os principais são: seleção proporcional à aptidão, também chamado de sorteio, seleção por torneio e seleção por ranqueamento (BLICKLE; THIELE, 1995). O método mais comumente utilizado é o operador do tipo sorteio, onde a probabilidade de um indivíduo ser selecionado é proporcional a sua aptidão. Esta técnica garante diversidade, incluindo até mesmo os indivíduos menos aptos no sorteio, e, garante também que os indivíduos mais aptos tenham maior probabilidade de serem selecionados.

A seleção por torneio é caracterizada pela ocorrência de diversos torneios para seleção de indivíduos. Cada torneio ocorre com um número ajustável de indivíduos, os quais são selecionados aleatoriamente na população, sendo o indivíduo com maior aptidão, no torneio em questão, eleito para cruzamento ou mutação. A seleção por ranqueamento, ordena em uma lista os indivíduos pela sua aptidão (em ordem decrescente). Após, cada indivíduo recebe uma probabilidade de ser selecionado de acordo com sua posição nesta lista. A seleção a partir deste ponto ocorre como no sorteio, porém diferentemente da seleção por sorteio, os indivíduos que possuam o mesmo valor de aptidão, irão possuir uma probabilidade diferente de seleção, devido ao ranqueamento na lista (BLICKLE; THIELE, 1995).

O operador genético de mutação visa alterar a característica genética do cromossomo (indivíduo). Este operador altera um ou mais genes do cromossomo, incorporando diversidade na população, buscando melhorar a aptidão dos indivíduos. Os operadores de mutação mais comuns na otimização em domínio contínuo são: *swap mutation*, *flip mutation*, *boundary mutation* e *gaussian mutation*. O operador *swap mutation* troca um ou mais genes de posição no cromossomo. Enquanto o *flip mutation*, geralmente utilizado para cromossomos representados por *string* de bits, inverte o valor do bit, de 0 para 1 ou vice-versa. O operador *boundary mutation*, também chamado de Min-Max, altera um ou mais genes, aleatoriamente, para o valor mínimo ou máximo que o gene pode assumir. E, por fim, o operador *Gaussian Mutation* perturba cada um dos valores assumidos pelos genes, adicionando a cada gene um valor aleatoriamente escolhido na distribuição gaussiana do intervalo definido pelo valor mínimo e máximo que cada gene pode assumir.

O operador genético de *crossover* é responsável por fazer o cruzamento entre dois indivíduos selecionados como pais, gerando um ou dois indivíduos filhos, com características genéticas herdadas dos pais. Como exemplo de operadores genéticos de cruzamento, pode-se citar: o *One Point Crossover* e suas variações, o *Real Blending Crossover* e o *Uniform Crossover*.

O *One Point Crossover* seleciona um ponto aleatoriamente na estrutura do cromossomo dos indivíduos selecionados como pais, utilizando este ponto como limitante, gera dois novos filhos, sendo que o primeiro contém a estrutura de genes à esquerda do limitante do indivíduo pai, com a estrutura de genes à direita do indivíduo mãe. O segundo filho contém a combinação contrária. Uma outra variação desta técnica é o *Two Points Crossover* que utiliza dois pontos limites para troca de informações genéticas.

O método de cruzamento *Uniform Crossover* passa para cada filho 50% de genes

do pai e 50% de genes da mãe, sendo a herança realizada gene a gene. O terceiro método, o *Real Blending Crossover*, calcula, para cada gene do indivíduo filho, um novo valor, obtido através da função  $\phi g_p + (1 - \phi)g_m$ , sendo  $g_p$  o valor do gene do indivíduo pai, e  $g_m$  o valor do gene do indivíduo mãe, e  $\phi$  eleito aleatoriamente no intervalo  $[-0.5, 1.5]$ , uniformemente distribuído.

Além dos componentes apresentados, um AG pode ainda ser classificado de acordo com a forma de evolução de sua população durante a execução do algoritmo. Existem os seguintes tipos de algoritmos genéticos: simples, *steady-state*, incremental e *Deme* (WALL, 1996). O algoritmo genético simples possui elitismo opcional e recria, a cada geração, uma população inteiramente nova de indivíduos. O algoritmo genético *steady-state* inicia com uma população inicial de  $n$  indivíduos, e a cada geração, para uma dada taxa de sobreposição  $r$ , uma população temporária com  $n_{tmp} = nr$  novos indivíduos é criada, os quais são gerados através de cruzamento e mutação. Os  $n_{tmp}$  novos indivíduos gerados são inseridos na população, e, apenas os  $n - n_{tmp}$  indivíduos mais aptos passam para a próxima geração, mantendo o número de indivíduos constante durante a evolução do algoritmo.

O algoritmo genético incremental considera unicamente um ou dois filhos na população, permitindo algumas técnicas de sobreposição de indivíduos, como por exemplo a sobreposição do pai ou da mãe – selecionados aleatoriamente ou não –, a sobreposição do pai mais “parecido” com o filho, entre outras. E, por último, o algoritmo genético *deme* utiliza duas ou mais populações em paralelo, utilizando para cada população o algoritmo *steady-state*, sendo que a cada geração indivíduos são migrados de uma população para outra (WALL, 1996).

Apresentamos no Algoritmo 4.1 um pseudo-código de um algoritmo genético de forma simplificada, exemplificando as etapas desta meta-heurística.

Discutindo sucintamente o pseudo-código, o algoritmo recebe como parâmetro de entrada a função de avaliação  $f(x)$  que irá atribuir o grau de aptidão ( $v$ ) para cada indivíduo  $x$ . E, retorna como saída o indivíduo  $x^*$  mais apto obtido durante a execução do algoritmo. No algoritmo genético, inicialmente defini-se os operadores genéticos de seleção, cruzamento e mutação que serão utilizados. Após, uma população  $P$  de  $n_{ind}$  indivíduos é inicializada a partir de algum critério, ou elegendo indivíduos aleatoriamente, em um espaço de busca pré-determinado, sendo que após criados os indivíduos são avaliados pela função objetivo, e um grau de aptidão é atribuído a cada indivíduo.

Nas linhas 4 a 22, o laço principal do método é executado até que um dado critério de parada seja satisfeito. Interno a este laço, o cruzamento e a mutação são efetuados, respectivamente nas linhas 5 e 6, em indivíduos selecionados pelo operador de seleção, sendo gerados  $n_{cross} + n_{mut}$  novos indivíduos, os quais são inseridos em uma população temporária  $P_{tmp}$ . Se elitismo for selecionado para o algoritmo genético (teste da linha 8), a população  $P$  evolui, sobrepondo os  $n_r$  indivíduos menos aptos de  $P$ , pelos  $n_r$  indivíduos mais aptos em  $P_{tmp}$ , sendo  $n_r = rn_{ind}$ , para uma dada taxa de sobreposição  $r$ . Caso contrário, a população de indivíduos é novamente recriada a cada geração, sem herança de gerações anteriores (linha 14).

Nas linhas 18 a 21, o valor de função objetivo ( $v$ ) do indivíduo mais apto da geração ( $x$ ) é comparado ao melhor valor de função objetivo ( $v^*$ ) obtido durante as

---

**Algoritmo 4.1:** Pseudo-código de um algoritmo genético.

---

**Dados:** função de avaliação  $f(x)$   
**Resultado:** Elemento mais apto  $x^*$

```

1 Define operadores genéticos (seleção, cruzamento e mutação)
2 Inicializa População  $P \leftarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{n_{ind}}\}$ 
3  $v^* \leftarrow -\infty$ 
4 enquanto critério de parada não for satisfeito faça
5      $Cross \leftarrow$  Selecciona  $n_{cross}$  indivíduos em  $P$  e realiza cruzamento
6      $Mut \leftarrow$  Selecciona  $n_{mut}$  indivíduos em  $P$  e realiza mutação
7      $P_{tmp} \leftarrow \{Cross\} \cup \{Mut\}$ 
8     se Elitismo for escolhido então
9          $n_r \leftarrow rn_{ind}$ 
10         $P \leftarrow P \cup \{n_r \text{ indivíduos mais aptos em } P_{tmp}\}$ 
11         $P \leftarrow P \setminus \{n_r \text{ indivíduos menos aptos em } P\}$ 
12    senão
13         $P \leftarrow P_{tmp}$ 
14     $x \leftarrow$  indivíduo mais apto em  $P$ 
15     $v \leftarrow f(x)$ 
16    se  $v \geq v^*$  então
17         $x^* \leftarrow x$ 
18         $v^* \leftarrow v$ 
19 retorna ( $x^*$ )

```

---

gerações anteriores, caso o indivíduo mais apto da geração possua maior valor de função objetivo, a melhor solução corrente  $x^*$  é atualizada (linhas 19 e 20). Quando um critério de parada é atingido, o indivíduo  $x^*$  mais apto obtido durante a execução do método é retornado como solução do problema.

No capítulo seguinte, discutimos a escolha dos operadores e dos demais componentes do AG proposto neste trabalho, a seguir apresenta-se uma revisão sobre a meta-heurística C-GRASP.

## 4.2 GRASP Contínuo

O método C-GRASP foi proposto por (HIRSCH, 2006) para solucionar problemas contínuos de otimização global. C-GRASP baseia-se na tradicional meta-heurística GRASP, incorporando técnicas para a resolução de problemas em domínio contínuo. Este método consiste de uma busca local estocástica, que combina técnicas “gulosas”, adaptativas e aleatórias visando obter soluções de boa qualidade, em tempo custo-eficiente. Nesta seção são apresentadas as principais características deste método.

A meta-heurística C-GRASP é um procedimento multi-partida que consiste de duas etapas: uma fase de construção e de uma busca local. Estas duas etapas são repetidas até que um dado critério de parada seja satisfeito. Geralmente se estabelece o número de iterações *maxIterações* como critério de parada.

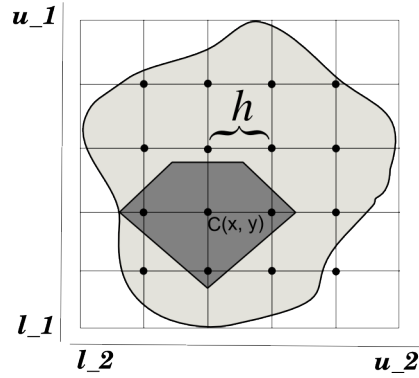


Figura 4.2: Representação do espaço de busca para o problema do lapidário em 2d, discretizado por uma grade com células de tamanho  $h$ .

O espaço de busca, nesta abordagem, é delimitado por um cuboide de dimensão  $n$ , tendo  $l \in R^n$  como limitante inferior e  $u \in R^n$  como limitante superior, sendo ainda, discretizado em uma grade com células de tamanho  $h$ . O parâmetro  $h$  é inicializado a cada iteração global do C-GRASP com o valor  $h_s$ . Quando nem a fase de construção, nem a fase de busca local conseguem melhorar a solução corrente, a grade que discretiza o espaço de busca é tornada mais densa, dividindo o tamanho do passo  $h$  ao meio. A iteração do C-GRASP finaliza quando  $h$  for menor ou igual ao parâmetro  $h_e$ .

A Figura 4.2 exemplifica a discretização do espaço de busca do problema do lapidário, simplificado em duas dimensões. Na figura é possível observar os limites do espaço de busca, e os pontos candidatos a serem coordenadas de centro do modelo de lapidação, os quais são definidos a partir do tamanho da célula  $h$  da grade de discretização.

Além dos parâmetros  $n, h_s, h_e, l, u, maxIterações$ , o método possui ainda o parâmetro  $maxVizinhos$  que estabelece a quantidade máxima de vizinhos que serão avaliados na fase de busca local. O algoritmo 4.2 apresenta um pseudo-código demonstrando a meta-heurística C-GRASP. Destacamos que este algoritmo é baseado em um C-GRASP aperfeiçoado proposto em (HIRSCH et al., 2010).

Nas linhas 2 – 16, o laço principal do método é repetido até que o critério de parada seja satisfeito, executando as iterações do método C-GRASP. Interior ao laço, inicialmente uma solução  $x$  é selecionada aleatoriamente no intervalo uniformemente distribuído  $l$  e  $u$  (linha 3), e, na linha 4, o tamanho do passo  $h$  é inicializado com  $h_s$ .

Nas linhas 5 – 15 um laço executa as fases de construção (linha 8) e de busca local (linha 9), buscando, iterativamente, melhorar a solução corrente. Se o valor da função objetivo obtido na fase de construção ou de busca local for maior que a melhor solução atual, então a solução  $x^*$ , e o valor de função objetivo  $v^*$  são atualizados com o valor da solução atual (linhas 12 e 13). Se não houve melhoras na solução encontrada durante a iteração nas duas fases, a densidade da grade é dividida ao meio (linha 15), encerrando-se o laço quando a densidade for menor ou igual ao parâmetro  $h_e$ .

O algoritmo encerra-se quando o critério de parada, neste caso o número máximo de iterações, é alcançado, dando como resposta a melhor solução  $x^*$  encontrada



---

**Algoritmo 4.2:** Pseudo-código do método C-GRASP.
 

---

**Dados:**  $n, l, u, h_s, h_e, \max\text{Iterações}, \max\text{Vizinhos}$   
**Resultado:** Melhor solução  $x^*$  encontrada

```

1   $v^* \leftarrow -\infty$ 
2  enquanto  $\max\text{Iterações} > 0$  faça
3      Selecione um valor aleatório para  $x$  no intervalo  $[l, u]$ 
4       $h \leftarrow h_s$ 
5      enquanto  $h \geq h_e$  faça
6           $\text{melhoraC} \leftarrow \text{falso}$ 
7           $\text{melhoraL} \leftarrow \text{falso}$ 
8           $(x, \text{melhoraC}) \leftarrow \text{construção}(x, h, n, l, u)$ 
9           $(x, \text{melhoraL}) \leftarrow \text{busca local}(x, h, n, l, u, \max\text{Vizinhos})$ 
10          $v \leftarrow \text{função de avaliação}(x)$ 
11         se  $v > v^*$  então
12              $x^* \leftarrow x$ 
13              $v^* \leftarrow v$ 
14         se  $\text{melhoraC}$  e  $\text{melhoraL}$  for falso então
15              $h \leftarrow h/2$ 
16          $\max\text{Iterações} \leftarrow \max\text{Iterações} - 1$ 
17 retorna  $x^*$ 

```

---

durante sua execução. Nas próximas seções detalha-se as fases de construção e de busca local.

#### 4.2.1 Fase de Construção

A fase de construção busca, a cada coordenada do vetor de solução  $x$ , combinando características “gulosas”, aleatórias e adaptativas, melhorar a solução atual. Um pseudo-código é apresentado no algoritmo 4.3, exemplificando esta etapa do método C-GRASP.

Inicialmente é estabelecido que toda coordenada do vetor  $x$  pode ser alterada (linha 1). As variáveis inicializadas nas linhas 2 – 4 são discutidas posteriormente. O laço principal desta rotina, linhas 5–27, visa obter uma solução  $x$  de melhor valor de função objetivo, alterando, independentemente, os valores das coordenadas de  $x$ , fixando-as, posteriormente, uma a uma. Para isso, primeiramente uma busca unidimensional (*line search*) é realizada na direção de cada coordenada ainda não fixa (linha 10). Esta rotina consiste em avaliar todos os pontos  $x + h\vec{k}$  no intervalo  $[l, u]$ , sendo  $\vec{k}$  o vetor unitário na direção da coordenada a ser fixada, permanecendo as demais coordenadas inalteradas (HIRSCH et al., 2010). A busca unidimensional retorna a melhor solução encontrada e, o valor da função objetivo neste ponto é armazenado na variável  $g_i$ . Armazena-se ainda, na variável  $z_i$ , a coordenada  $x_i$  onde obteve-se o melhor valor de função objetivo, na direção  $i$ . (Uma discussão sobre métodos de busca unidimensional é apresentada no capítulo seguinte, quando discutimos sobre a abordagem proposta utilizando C-GRASP para solucionar o problema do lapidário).

Posteriormente, uma lista de candidatos restritos  $lcr$  é preenchida (linhas 16 – 18) com coordenadas  $i$ , ainda não fixadas, cujo o valor de função objetivo  $g_i$  é maior

---

**Algoritmo 4.3:** Pseudo-código da fase de construção.
 

---

**Dados:**  $x, h, n, l, u$   
**Resultado:**  $x, melhoraC$

```

1   $fixar \leftarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 
2   $reUso \leftarrow \text{falso}$ 
3   $\phi \leftarrow \text{rand}(0, 1)$ 
4   $melhoraC \leftarrow \text{falso}$ 
5  enquanto  $fixar$  possuir elementos faça
6       $g_{min} \leftarrow +\infty$ 
7       $g_{max} \leftarrow -\infty$ 
8      para  $i \leftarrow 1 \dots n$  faça
9          se  $reUso = \text{falso}$  então
10              $g_i \leftarrow \text{busca unidimensional}(x, h, i, l, u)$ 
11              $z_i \leftarrow x_i$ 
12              $g_{min} \leftarrow \min(g_{min}, g_i)$ 
13              $g_{max} \leftarrow \max(g_{max}, g_i)$ 
14              $limiar \leftarrow g_{min} + \phi(g_{max} - g_{min})$ 
15              $lcr \leftarrow \emptyset$ 
16             para  $i \in fixar$  faça
17                 se  $g_i \geq limiar$  então
18                      $lcr \leftarrow lcr \cup \{i\}$ 
19             se  $lcr$  possuir elementos então
20                  $j \leftarrow \text{selecione um elemento aleatoriamente de } lcr$ 
21             se  $x_j = z_j$  então
22                  $reUso \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
23             senão
24                  $x_j \leftarrow z_j$ 
25                  $melhoraC \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
26                  $reUso \leftarrow \text{falso}$ 
27              $fixar \leftarrow fixar \setminus \{j\}$ 
28 retorna  $(x, melhoraC)$ 

```

---

ou igual a um limiar, escolhido aleatoriamente no intervalo  $[g_{min}, g_{max}]$  (linha 14), sendo  $g_{min}$  e  $g_{max}$ , respectivamente, o menor e o maior valor de função objetivo encontrados com a busca unidimensional, para todas as coordenadas.

Esta lista de candidatos restritos é utilizada para eleger qual a coordenada será fixada, sendo que uma coordenada  $j$  – pertencente a esta lista – é eleita aleatoriamente e fixada a cada iteração (linha 27). Se o valor da coordenada eleita  $j$  for igual ao valor da coordenada no vetor de solução  $x$  – teste da linha 26 –, a variável *reUso* é utilizada para que não seja recalculado a busca unidimensional, nesta coordenada, nas próximas iterações (HIRSCH et al., 2010). Caso contrário, o vetor de solução  $x$  atualizado com o valor da coordenada  $j$  eleito, e a variável *melhoraC*, a qual indica se houve melhoras na solução, é atualizada como verdadeiro.

Por fim, quando todas as coordenadas estiverem fixadas, a função retorna se houve ou não melhora na solução, e a melhor solução  $x$  encontrada.

#### 4.2.2 Fase de busca local

A etapa de busca local verifica na vizinhança da atual melhor solução  $x^*$  se existe uma solução vizinha  $x'$ , tal que o valor de função objetivo em  $x'$ , seja maior ou igual ao valor obtido em  $x^*$ , *i.e.*  $f(x') \geq f(x^*)$ . Apresenta-se um pseudo-código deste procedimento no algoritmo 4.4.

---

**Algoritmo 4.4:** Pseudo-código para a fase de busca local.

---

**Dados:**  $x, h, n, l, u, maxVizinhos$   
**Resultado:**  $x, melhoraL$

```

1   $melhoraL \leftarrow falso$ 
2   $x^* \leftarrow x$ 
3   $v^* \leftarrow$  função de avaliação ( $x^*$ )
4   $numPontosVisitados \leftarrow 0$ 
5  enquanto  $numPontosVisitados \leq maxVizinhos$  faça
6       $x \leftarrow$  selecione aleatoriamente um vizinho de  $x^*$ 
7       $v \leftarrow$  função de avaliação ( $x$ )
8      se  $v \geq v^*$  então
9           $v^* \leftarrow v$ 
10          $x^* \leftarrow x$ 
11          $melhoraL \leftarrow verdadeiro$ 
12          $numPontosVisitados \leftarrow 0$ 
13          $numPontosVisitados \leftarrow numPontosVisitados + 1$ 
14 retorna ( $x, melhoraL$ )
```

---

O procedimento consiste em avaliar, através do laço principal (linhas 5–15), um número máximo de vizinhos de cada melhor solução  $x^*$  encontrada. Os vizinhos de  $x^*$  são obtidos projetando os pontos do espaço de busca – os quais estão dispostos em uma grade regular de largura  $h$  – em uma esfera n-dimensional com raio de tamanho  $h$ , centrada em  $x^*$ . A Figura 4.3 ilustra a escolha de vizinhos em uma representação do problema do lapidário, em duas dimensões, sendo os pontos mais claros os vizinhos candidatos a serem avaliados.

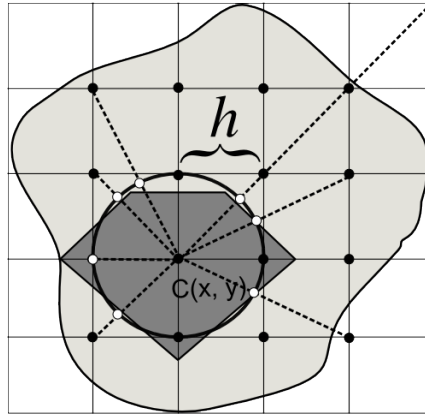


Figura 4.3: Representação da fase de busca local em duas dimensões. Pontos mais claros são vizinhos candidatos a serem avaliados.

Assim, se existir algum ponto  $x'$ , eleito aleatoriamente dentre os pontos projetados na vizinhança de  $x^*$  (linha 6), tal que o valor da função objetivo, neste ponto, seja maior ou igual a melhor solução atual, a solução é atualizada (linhas 8–13), e o procedimento reinicia, *i.e.*  $numPontosVisitados = 0$ . Quando  $maxVizinhos$  são avaliados sem encontrar nenhuma melhora na solução, o procedimento é finalizado retornando a melhor solução encontrada, e a variável  $melhoraL$  que indica se, nesta etapa, houve melhora na solução.

No capítulo seguinte vamos discutir a formalização do problema do lapidário como um problema contínuo de otimização global, e, apresentar as abordagens propostas neste trabalho, utilizando-se das meta-heurísticas Algoritmos Genéticos e GRASP Contínuo.

## 5 ALGORITMO GENÉTICO E C-GRASP COMO ABORDAGEM PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO LAPIDÁRIO

Neste capítulo apresentamos as principais contribuições do presente estudo: a implementação de um Algoritmo Genético com variáveis de valores reais, e de um GRASP Contínuo, propostos como alternativas para resolução do problema do lapidário. Ambas as meta-heurísticas maximizam o fator de escala para um dado modelo de lapidação, sobre todas as posições de centro e ângulos de giro que o modelo pode assumir, buscando encontrar o modelo de maior volume que esteja completamente inscrito no interior de uma gema. Propomos também neste estudo, e discutimos neste capítulo, um algoritmo que é utilizado como função de avaliação por ambas as heurísticas, e que avalia eficientemente uma instância do problema, para uma dada posição de centro e um dado ângulo de giro do modelo de lapidação determinando o fator de escala máximo que o modelo pode assumir, permanecendo no interior da gema.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. Inicialmente formulamos o problema do lapidário como um problema contínuo de otimização global, definindo seu conjunto de restrições. Após, na Seção 5.2, discutimos a função de avaliação desenvolvida para as meta-heurísticas e a implementação de um procedimento para testar a inclusão de um ponto tridimensional em uma malha triangular, na Seção 5.3. Por fim, nas Seções 5.4 e 5.5 são apresentados o Algoritmo Genético e o GRASP Contínuo e suas configurações propostas.

### 5.1 Formulação do problema

O problema do lapidário, conforme discutido no capítulo anterior, visa maximizar o volume de um modelo de lapidação que será confeccionado a partir de uma gema bruta. Para sua resolução, devemos considerar as restrições óticas referentes à lapidação, conforme apresentado no Capítulo 2. Em suma, a principal restrição do projeto de lapidação, imposta pela interação da luz com o material, nos diz que uma vez definido o projeto do modelo de lapidação, utilizando-se do índice de refração para determinar a disposição das facetas ao longo do poliedro, a inclinação e a proporção entre as suas partes, não é possível alterar a altura ou largura do modelo separadamente.

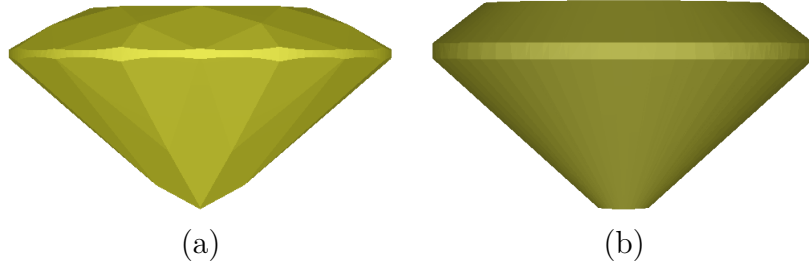


Figura 5.1: (a) Modelo de lapidação facetado Oval. (b) Corpo de calibração correspondente ao modelo facetado.

Para este trabalho, assim como em (WINTERFELD, 2007), optou-se pela utilização da calibração do modelo de lapidação ao invés do modelo facetado, na rotina da otimização. Isto, apesar de implicar em uma suave perda de volume na avaliação de uma instância do problema, aumenta a flexibilidade de resolução, por permitir a representação dos modelos de lapidação através de funções paramétricas – devido a simplicidade geométrica do poliedro do corpo de calibração – gerando um ganho em tempo de execução do algoritmo de avaliação do problema, e reduzindo a complexidade das funções matemáticas para representação das diferentes variações dos poliedros facetados. A Figura 5.1 apresenta a renderização do modelo de lapidação facetado oval, com o corpo de calibração correspondente, para exemplificar esta escolha.

Uma vez definido que usaremos modelos calibrados na avaliação de uma instância do problema, para uma dada gema  $G$  e uma calibração  $C$ , temos dois subproblemas aninhados:

- (L1) para um dado centro  $c = (x_0, y_0, z_0)$  e ângulos de orientação  $(\theta, \psi, \sigma)$ , encontrar o fator de escala  $\alpha$  da calibração  $C$  de maior volume, interior à gema  $G$ ;
- (L2) encontrar o maior valor de  $\alpha$  sobre todas as posições de centro e ângulos de orientação.

Os subproblemas podem ser formulados como um problema de maximização volumétrica, escrito como:

$$\text{maximize } \alpha(c, \theta, \psi, \sigma) \quad (5.1a)$$

$$\text{sujeito a } \{c + \alpha C(\theta, \psi, \sigma)\} \subseteq G, \quad (5.1b)$$

$$0 \leq \theta, \psi, \sigma \leq 2\pi, \quad (5.1c)$$

$$c \in G. \quad (5.1d)$$

A notação da restrição 5.1b enfatiza que a calibração  $C$ , orientado no espaço por  $(\theta, \psi, \sigma)$ , com seu centro posicionado em  $c$ , e escalonado por  $\alpha$ , deve ser interior à gema  $G$ . Além disso, a restrição 5.1c define o conjunto de combinações possíveis para giros da calibração no espaço, e, a restrição 5.1d define que o centro da calibração deve ser interior à gema.

Tabela 5.1: Parâmetros do Corpo de Calibração.

Par.	Descrição
$a$	comprimento do semi-eixo maior
$b$	comprimento do semi-eixo menor
$e$	excentricidade
$D$	altura do cone central (Cintura)
$L_{inf}$	altura do cone inferior
$\mu_{inf}$	$(0 \leq \mu_{inf} \leq 1)$ : relação entre a altura do pavilhão com a altura do cone inferior
$L_{sup}$	altura do cone superior
$\mu_{sup}$	$(0 \leq \mu_{sup} \leq 1)$ : relação entre a altura da coroa com a altura do cone superior
$\varphi_{sup}$	ângulo entre a geratriz superior e o semi-eixo maior da base
$\varphi_{inf}$	ângulo entre a geratriz inferior e o semi-eixo maior da base

Na seção seguinte apresentamos a função de avaliação desenvolvida para o solucionar o subproblema (L1), para uma dada instância do problema, encontrando o valor máximo de  $\alpha$ , tal que a restrição 5.1b não seja violada. Além disso, na Seção 5.3 apresentamos um procedimento que avalia se um ponto tridimensional é interior a uma malha tridimensional, utilizado para avaliar a restrição 5.1d. O subproblema (L2) é solucionado encontrando a solução para a Equação 5.1a, e para isso propomos as meta-heurísticas Algoritmo Genético e C-GRASP, conforme discutido nas Seções 5.4 e 5.5, respectivamente.

## 5.2 Função de Avaliação

Para representação da gema utilizamos uma malha tridimensional formada por vértices e faces triangulares, obtido através de digitalização por um escâner tridimensional modelo REVSscan desenvolvido pela empresa Creaform (2013). Este escâner utiliza de câmeras e feixes de raio laser para obtenção dos dados. Cabe ressaltar que em virtude das gemas utilizadas serem translúcidas (ametistas e citrinos), fez-se necessário o recobrimento destas por alguma substância para deixá-las opacas, para que os feixes de raio laser do escâner pudessem fazer a varredura de sua superfície (SOUZA, 2010). Ressalta-se ainda que este procedimento não identifica inclusões no interior de gema, ou cores. Destacamos que para obtenção dos dados utilizou-se a precisão máxima de varredura deste modelo de escâner ( $0.2mm$ ).

Os modelos de lapidação e suas respectivas calibrações foram projetados para gemas de quartzo com  $IR = 1.54$ , conforme introduzido no Capítulo 2. Os corpos de calibração nos formatos redondo e oval utilizados no procedimento de otimização, foram modelados como dois troncos de cone elípticos, justapostos pelo seu semi-eixo maior, separados por um cilindro de altura  $D$ , conforme ilustrado na Figura 5.2, tendo os parâmetros que os descrevem apresentados na Tabela 5.1.

A abordagem que propomos para avaliar uma instância do problema consiste em verificar se o corpo de calibração está totalmente incluso, ou não, no interior da gema, determinando a escala  $\alpha$  máxima que a calibração  $C$  pode assumir, sem ultrapassar a fronteira da gema  $G$ . Uma vez que a gema possui uma topologia irregular, e que a parametrização da calibração nos dá um poliedro sólido convexo, uma maneira eficiente para determinar  $\alpha$ , consiste de analisar todos os vértices da

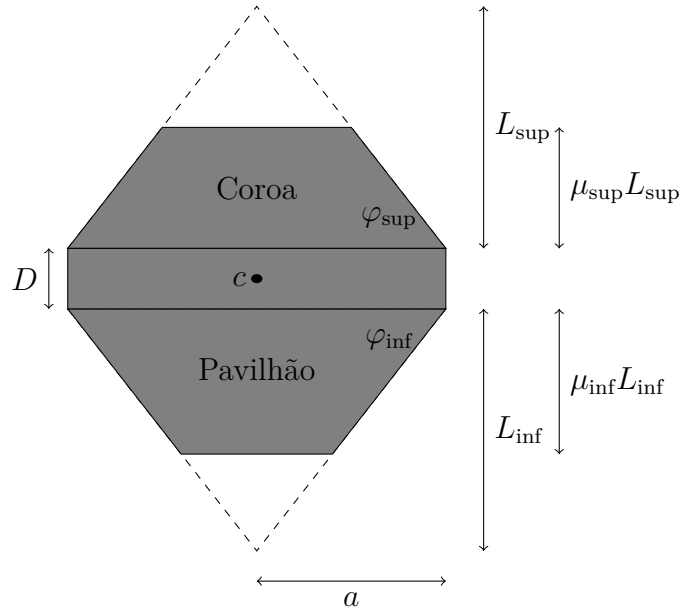


Figura 5.2: Parametrização da calibração do modelo de lapidação Brilhante para os formatos Redondo e Oval.

malha da gema, verificando, um a um, se o ponto da gema é exterior ou interior ao modelo parametrizado. Destaca-se que a precisão desta abordagem depende da norma<sup>1</sup> da malha da gema. Se a calibração, por exemplo, invadir a gema no meio de uma face, este procedimento não irá detectar, e a restrição 5.1b será violada. Para minimizar este *gap*, utilizamos a precisão máxima do equipamento de digitalização (0.2mm), assumindo que a malha esteja suficientemente densa para este teste.

Em síntese, o algoritmo consiste em determinar, para cada ponto  $p$  da malha da gema, o maior fator de escala  $\alpha_p$  que pode ser aplicado a calibração, tal que  $p$  seja exterior à calibração, ou resida no limite de sua fronteira. O menor fator de escala  $\alpha_p$ , dentre todos os pontos  $p$  avaliados, é o maior fator de escala  $\alpha$  que a calibração pode assumir permanecendo interior à gema, isto é, com todos os pontos da gema exteriores a sua superfície. Este algoritmo determina o fator de escala  $\alpha$  em uma complexidade linear  $O(n_v)$ , sendo  $n_v$  o número de vértices da malha da gema. A seguir discutimos as equações para determinar o fator de escala  $\alpha_p$ .

Para um dado ponto  $p$  e o conjunto de variáveis  $(c, \theta, \psi, \sigma)$ , o primeiro passo para determinar  $\alpha_p$  é transformar  $p$  para o sistema de coordenadas locais do modelo de calibração, centrado em  $c$ , girado e orientado no espaço por  $(\theta, \psi, \sigma)$ . O vértice  $p$  neste novo sistema de coordenadas é dado por

$$(\delta, \beta, \gamma) \leftarrow ((p - c) \cdot v_1, (p - c) \cdot v_2, (p - c) \cdot v_n)) \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>A norma da malha triangular é a área da sua maior face.



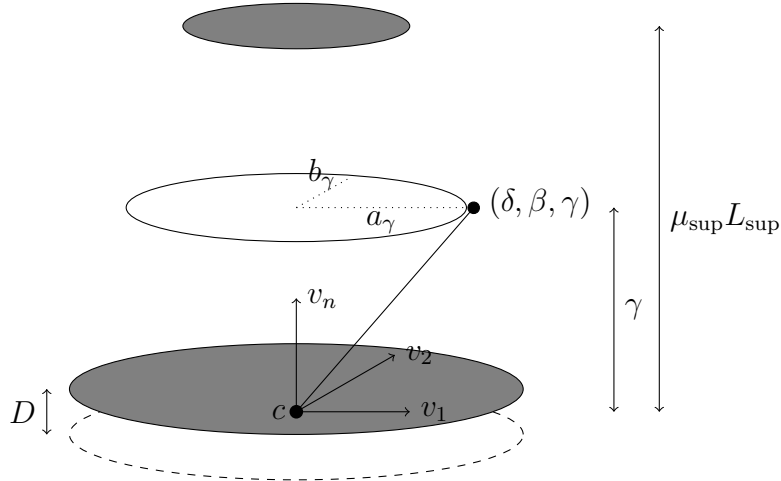


Figura 5.3: Vértice da gema no sistema de coordenadas locais do modelo de calibração.

sendo  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_n$  obtidos a partir das equações

$$u = [\cos(\theta) \cos \psi, \cos(\theta) \sin \psi, -\sin(\theta)]^t, \quad (5.3)$$

$$v = [-\sin \psi, \cos \psi, 0]^t, \quad (5.4)$$

$$[v_1 \ v_2] = [u \ v] \begin{bmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma \\ \sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$v_n = [\sin(\theta) \cos \psi, \sin(\theta) \sin \psi, \cos(\theta)]^t. \quad (5.6)$$

As Equações 5.3 e 5.4 definem a matriz de rotação para o novo sistema de coordenadas, a partir dos valores dos ângulos dados. A Equação 5.5 determina os vetores de apoio  $v_1$  e  $v_2$  deste novo plano, e por fim, a Equação 5.6 define o vetor normal ( $v_n$ ) para o plano. A Figura 5.3 demonstra um vértice  $p$  no sistema de coordenadas locais do modelo de calibração.

A partir da representação do ponto  $p$  em  $(\delta, \beta, \gamma)$ , a escala  $\alpha_p$  é determinada através de um conjunto de inequações lineares que encontram o fator de escala tal que  $p$  resida no limite da superfície da calibração. Para isso, existem três escalas candidatas a serem consideradas:  $\alpha_p^\gamma$ ,  $\alpha_p^\delta$  e  $\alpha_p^c$ . O valor de  $\alpha_p^\gamma$  determina a escala máxima que a calibração pode assumir tal que  $p$  resida no limite, superior ou inferior, dos troncos de cone formados pela calibração. O ponto reside na parte superior da calibração se  $\gamma \geq 0$  e na parte inferior caso  $\gamma < 0$ . Já  $\alpha_p^\delta$  determina a escala tal que  $p$  resida no limite lateral do tronco de cone na altura  $\gamma$  (vide Figura 5.3). Por fim, uma terceira escala  $\alpha_p^c$  deve ser considerada, e será discutida posteriormente.

Sabendo que, pela parametrização, a altura dos cones superiores e inferiores é

dada, respectivamente, por  $\mu_{\text{sup}}L_{\text{sup}}$  e  $\mu_{\text{inf}}L_{\text{inf}}$ , a escala  $\alpha_p^\gamma$  é obtida pelas equações

$$\alpha_p^\gamma = \begin{cases} \gamma/(\mu_{\text{sup}}L_{\text{sup}} + d), & \text{se } \gamma \geq 0, \\ -\gamma/(\mu_{\text{inf}}L_{\text{inf}} + d), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.7)$$

sendo  $d = D/2$ .

O outro fator de escala ( $\alpha_p^\delta$ ) determina a escala que o corpo de calibração pode assumir, considerando as demais direções ( $\delta, \beta$ ). Utilizando-se da parametrização sabemos que a calibração é modelada a partir de troncos de cones elípticos, e que cortando-os na altura  $\gamma$  será gerado uma elipse com semi-eixos  $(a_\gamma, b_\gamma)$  (Figura 5.3). Para determinar  $\alpha_p^\delta$  encontramos o valor de escala tal que o ponto  $(\delta, \beta)$  resida no limite da área formada pela elipse na altura  $\gamma$ .

Pela equação canônica da elipse, sabemos que um ponto  $(\delta, \beta)$  reside no limite de sua área se e somente se

$$\delta^2/a_\gamma^2 + \beta^2/b_\gamma^2 = 1. \quad (5.8)$$

sendo a excentricidade um parâmetro conhecido, temos que  $b_\gamma$  é dado por

$$b_\gamma = a_\gamma \sqrt{(1 - e^2)}. \quad (5.9)$$

substituindo  $b_\gamma$  na Equação 5.8, temos

$$\delta^2/a_\gamma^2 + \beta^2/a_\gamma \sqrt{(1 - e^2)} = 1. \quad (5.10)$$

por fim, resolvendo a Equação 5.10 para  $a_\gamma$  temos

$$a_\gamma = \sqrt{\delta^2 + \beta^2/(1 - e^2)}. \quad (5.11)$$

Ainda, pela simplicidade da parametrização do tronco de cone elíptico, sabemos que o semi-eixo maior de uma elipse obtida em um corte na altura  $\gamma$ , de um tronco de cone escalonado por  $\alpha_p^\delta$  pode ser obtido resolvendo

$$a_\gamma = \begin{cases} \alpha_p^\delta a(1 - \gamma - \alpha_p^\delta d/\alpha_p^\delta L_{\text{sup}}), & \text{se } \gamma \geq 0, \\ \alpha_p^\delta a(1 + \gamma + \alpha_p^\delta d/\alpha_p^\delta L_{\text{inf}}), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Isolando  $\alpha_p^\delta$  na Equação 5.12, temos

$$\alpha_p^\delta = \begin{cases} a_\gamma L_{\text{sup}}/a + \gamma/(L_{\text{sup}} + d), & \text{se } \gamma \geq 0, \\ a_\gamma L_{\text{inf}}/a - \gamma/(L_{\text{inf}} + d), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.13)$$

finalmente, substituindo  $a_\gamma$  na Equação 5.13, temos que  $\alpha_p^\delta$  é determinado por

$$\alpha_p^\delta = \begin{cases} \sqrt{\delta^2 + \beta^2/(1 - e^2)} L_{\text{sup}}/a + \gamma/(L_{\text{sup}} + d), & \text{se } \gamma \geq 0, \\ \sqrt{\delta^2 + \beta^2/(1 - e^2)} L_{\text{inf}}/a - \gamma/(L_{\text{inf}} + d), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.14)$$

Uma terceira e última escala candidata ( $\alpha_p^c$ ) deve ser considerada, caso o ponto  $p$  intercepte o cilindro da cintura do modelo, que une os troncos de cones elípticos, escalonado por ( $\alpha_p^\delta$ ). Sendo  $\alpha_p^c$  obtido por

$$\alpha_p^c = \begin{cases} a_\gamma/a, & \text{se } |\gamma| < \alpha_p^\delta d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.15)$$

Uma vez que as três escalas não possuem dependência entre si, temos que  $\alpha_p$  é dado por

$$\alpha_p = \max(\alpha_p^\gamma, \alpha_p^\delta, \alpha_p^c). \quad (5.16)$$

Além das equações apresentadas, para avaliação de uma instância do problema é necessário, ainda, definir se o ponto de centro da calibração ( $c$ ) é interior à malha que descreve a gema, discutimos a seguir um procedimento que avalia esta restrição.

### 5.3 Determinando se um ponto é interior a uma malha triangular

A rotina que propomos para avaliar se um dado ponto está ou não no interior de uma malha triangular tridimensional utiliza-se da técnica de *ray casting*. Em síntese, este procedimento consiste em projetar um dado raio ou segmento  $\vec{R}$  – descrito pelo ponto dado e uma direção qualquer – na direção das faces (triângulos) da malha. O número de triângulos interceptados por  $\vec{R}$ , através da regra par-ímpar (*odd-even rule*), define se o ponto está ou não incluso na malha, sendo que quantidade ímpar de intersecções indicam que o ponto é interior, caso contrário é exterior.

Para verificar as intersecções de um raio (ou segmento) com os triângulos da malha, primeiramente avalia-se a existência da intersecção do raio com o plano formado pelo triângulo. Caso exista a intersecção, deve-se verificar se o ponto de intersecção está contido ou não no interior da face. Para este tipo de teste, existem diversos trabalhos relatados na literatura, como por exemplo (DENIS; BORUT, 2012; SUNDAY, 2008; BERG et al., 2008; AMANATIDES; CHOI, 1997), portanto, não vamos aprofundar a discussão neste tema.

Para amortizar o tempo de execução deste algoritmo, que devido ser necessário avaliar todos os vértices da malha, possui, claramente, uma complexidade linear  $O(n_t)$  sendo  $n_t$  o número de triângulos da malha, utilizamos a estrutura de subdivisão de espaço AABB (*axis-aligned bounding boxes*), conforme discutido em (DENIS; BORUT, 2012).

Para criação desta estrutura, inicialmente projetamos os triângulos da malha para duas dimensões, desconsiderando a coordenada de maior valor – no nosso caso a coordenada  $z$ . Após, os triângulos projetados são subdivididos em uma grade, delimitada pelo *bounding box* da malha da gema, obtido pelos valores de coordenadas máximos e mínimos em cada direção. A grade é discretizada pelo parâmetro  $k$ , o qual divide a malha – no plano  $x, y$  – em  $k$  subintervalos, resultando em  $k^2$  células, contendo cada célula aproximadamente  $n_t/k^2$  triângulos. Por fim, esta estrutura é transformada em uma tabela *hash* das células da grade, a qual contém a lista de triângulos que reside em cada célula.

Utilizando-se desta estrutura, para avaliar a inclusão do vértice no interior da malha, primeiro encontra-se a célula em que o ponto reside na grade, após, projeta-se o raio  $\vec{R}$  na lista de triângulos contidos nesta célula, os quais são candidatos a intersectarem com  $\vec{R}$ . Conforme já mencionado, número ímpar de intersecções determinam que o ponto é interior à malha. Através desta abordagem reduzimos a complexidade desta rotina para  $O(n_t/k^2)$ . Definimos na implementação deste método  $k = 10$  e  $\vec{R} = (p, z_{max})$ , sendo  $p$  o ponto a ser avaliado, e  $z_{max}$  o maior valor de coordenada  $z$  da malha.

Finalmente, a partir das equações apresentadas, e da rotina que determina a inclusão do ponto no interior da malha, podemos avaliar uma instância do problema através do pseudo-código descrito no Algoritmo 5.1.

---

**Algoritmo 5.1:** Pseudo-código para a avaliação da Função Objetivo.

---

**Dados:**  $G, C, c, \theta, \psi, \sigma$   
**Resultado:** O maior volume da calibração  $C$  centrada em  $c$  e orientada por  $\theta, \psi, \sigma$ , tal que  $C$  seja interior a  $G$ .

```

1  se  $c$  não estiver incluso em  $G$  então
2      retorna 0
3   $\alpha \leftarrow \infty$ 
4  para cada ponto  $p$  em  $G$  faça
5       $\gamma \leftarrow (p - c) \cdot v_n$ 
6      calcular  $\alpha_p^\gamma$  conforme equação (5.7)
7      se  $\alpha \leq \alpha_p^\gamma$  então
8          avalie o próximo ponto
9       $(\delta, \beta) \leftarrow ((p - c) \cdot v_1, (p - c) \cdot v_2)$ 
10     calcular  $\alpha_p^\delta$  conforme equação (5.14)
11     se  $\alpha \leq \alpha_p^\delta$  então
12         avalie o próximo ponto
13     calcular  $\alpha_p^c$  conforme equação (5.15)
14      $\alpha_p \leftarrow \max(\alpha_p^\gamma, \alpha_p^\delta, \alpha_p^c)$ 
15      $\alpha \leftarrow \min(\alpha, \alpha_p)$ 
16  retorna  $\alpha^3 \text{volume}(C)$ 

```

---

O algoritmo primeiramente verifica se o centro  $c$  da calibração é interior à gema ( $G$ ), utilizando do procedimento de *ray casting* discutido. Caso  $c$  não seja interior, o algoritmo retorna um volume zero para este conjunto de parâmetros. Após, o laço principal do algoritmo (linhas 5–19) avalia cada vértice da gema, determinando para cada ponto  $p$  o fator de escala  $\alpha_p$ , tal que  $p$  resida no limite da superfície do corpo de calibração (linha 17). O menor fator de escala  $\alpha_p$  dentre todos os pontos avaliados é armazenado em  $\alpha$  (linha 18).

Dado a prerrogativa de que o valor de  $\alpha$  é o menor valor dentre o maior valor das escalas candidatas, isto nos permite adicionar dois pontos de escape no algoritmo – linhas 8 e 13 – evitando assim, o cálculo desnecessário de equações para escalas candidatas, acelerando a execução do algoritmo.

Quando todos os vértices de  $G$  tiverem sido avaliados, o fator de escala  $\alpha$  é o maior valor possível que a calibração  $C$  pode assumir permanecendo interior a  $G$ .

O volume do corpo de calibração escalonado por  $\alpha$  é retornado como solução para a instância do problema.

Cabe ressaltar, que além de solucionar o problema de maneira eficiente, este algoritmo ainda pode ser adaptado para solucionar o problema do lapidário para outros modelos de lapidação convexos, alterando a Equação 5.11, para uma equação que avalie se o ponto é interior a outro corpo de calibração parametrizado.

Nas próximas seções, vamos estar discutindo as duas abordagens propostas neste trabalho, as quais utilizando da função de avaliação proposta, maximizam o fator de escala do modelo de lapidação, sobre todas as posições de centro e ângulos de giro que o modelo pode assumir.

## 5.4 Abordagem para solucionar o problema do lapidário utilizando Algoritmo Genético

Nesta seção vamos discutir os principais componentes do algoritmo genético proposto durante a pesquisa. O AG implementado utiliza-se da biblioteca para algoritmos genéticos GALib (WALL, 1996). Optamos por utilizar o algoritmo genético *GASteadyStateGA*, o qual utilizando elitismo sobrepõe uma taxa  $r$  de indivíduos a cada geração, retornado ao fim do algoritmo o indivíduo mais apto como solução do problema.

Nossa escolha pelo *GASteadyStateGA* está relacionada ao fato de que, através do parâmetro de sobreposição  $r$ , é possível obter um algoritmo com variados comportamentos. Variando  $r$  tem-se, desde um algoritmo com total sobreposição da população (escolhendo  $r = 1$ ), como com a sobreposição de apenas um indivíduo (para  $r = 0$ ). O ajuste deste parâmetro será discutido na Seção 6.2.1.

Para representar os indivíduos, utilizamos o cromossomo *GARealGenome*, com genes de valores reais:  $x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \sigma$ . Cada indivíduo criado durante a execução do algoritmo é avaliado de acordo com a função objetivo proposta, possuindo como aptidão o volume da calibração, orientada pelos parâmetros relatados, de maior escala inscrita no interior da gema. A população foi inicializada aleatoriamente, com a restrição de que todos os indivíduos iniciais da população devem possuir o centro ( $c = x_0, y_0, z_0$ ) interior à gema. Ainda, durante a inicialização, o parâmetro  $\sigma$  foi reduzido para o intervalo  $[0, \pi]$  para o modelo oval, pela sua simetria, e restrito a  $\sigma = 0$  para o modelo redondo, devido a sua excentricidade nula ( $e = 0$ ).

Para operador de seleção utilizamos o sorteio, visando garantir diversidade no cruzamento e mutação dos indivíduos, uma vez que esta técnica considera indivíduos menos aptos no sorteio, e garante que indivíduos mais aptos tenham maior probabilidade de ser eleitos.

Como operador de mutação optamos pelo *Gaussian Mutation*. Este tipo de operador perturba cada gene na estrutura do cromossomo, com um valor escolhido aleatoriamente na distribuição gaussiana do intervalo entre os genes. Os demais tipos de operadores baseados em troca de posição de genes não são indicados para este problema, dado que a magnitude dos valores que cada alelo pode assumir é variável para cada gene, por exemplo o gene  $\sigma$  possui intervalo  $[0, \pi]$  e o gene  $x_0$

pode, para uma dada gema, variar seu intervalo entre [100, 300].

Para o cruzamento avaliamos três estratégias: *One Point Crossover*, *Uniform Crossover* e *Real Blending Crossover*. Como critério de parada definimos o número de iterações, o qual também foi avaliado. Os resultados destas avaliações são apresentados no capítulo seguinte, na seção de ajustes de parâmetros para as meta-heurísticas.

## 5.5 Abordagem para solucionar o problema do lapidário utilizando GRASP Contínuo

Diferentemente do AG e de outras meta-heurísticas, o C-GRASP pode ser utilizado fornecendo simplesmente uma função objetivo. Logo, uma versão básica do C-GRASP pode ser obtida através dos algoritmos descritos no Capítulo 4, juntamente com a função de avaliação proposta na Seção 5.2. Para melhorar o método básico, alguns elementos do C-GRASP podem ser ajustados, entre eles a escolha do ponto inicial de cada iteração do método, e o procedimento de busca unidimensional. Para definir o ponto inicial impomos a restrição de que o centro  $c = (x_0, y_0, z_0)$ , escolhido aleatoriamente no início de cada iteração do C-GRASP, deve ser interior à gema, isto nos dá uma solução inicial factível para o problema.

Estudamos também diferentes métodos de busca unidimensional, como o *golden section search*, o *pattern search* (M.; H.; SHETTY, 2006) e uma busca em linhas regular simples proposta em (HIRSCH, 2006). Descobriu-se em testes preliminares que, devido ao fato da função objetivo não ser convexa, o método de busca em linha simples proposta no artigo original obtém melhores resultados para o C-GRASP em relação aos métodos propostos em (M.; H.; SHETTY, 2006), e, portanto, somente esta será considerada a partir daqui.

Destacamos que, assim como no AG, o parâmetro  $\sigma$  também foi reduzido para o intervalo  $[0, \pi]$  para o modelo oval, e para  $\sigma = 0$  no caso do modelo redondo.

Por fim, a etapa mais importante para um bom funcionamento do C-GRASP é a calibração de seus parâmetros ajustáveis, sendo esta etapa discutida no capítulo seguinte.

## 6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo discutimos os experimentos realizados para avaliar as abordagens propostas. Os experimentos foram executados em um conjunto de 50 instâncias reais para o problema. Estas 50 gemas foram digitalizadas, e estão disponíveis no sítio do projeto 3D Gemas (2012). A Tabela 6.1 apresenta as características das gemas digitalizadas: volume em  $mm^3$ , número de vértices e número de faces triangulares. Os dados estão ordenados pelo número de vértices, que é o principal fator de escalonamento de tempo na função de avaliação.

Para avaliar as abordagens definimos como métrica: (i) tempo de execução; (ii) aproveitamento volumétrico; e (iii) desvio relativo – calculado através do volume obtido em relação ao melhor volume encontrado em todos os experimentos, visto que a solução ótima para as instâncias não é conhecida. O aproveitamento volumétrico é calculado através da razão entre o volume da gema e o volume do modelo facetado. Utilizamos os modelos facetados apresentados nos diagramas de lapidação conforme discutido no Capítulo 2, sendo que o modelo redondo possui um volume inicial de  $198.57mm^3$  e o modelo oval  $280.70mm^3$ . Os valores destas três métricas são a média de dez execuções de cada algoritmo. Por fim, os parâmetros utilizados para os corpos paramétricos de calibração são apresentados na Tabela 6.2.

### 6.1 Ambiente de Testes

Os algoritmos foram implementados em C++ e compilados com o GNU g++, versão 4.4.5 usando as diretivas máximas de otimização. Para a implementação do algoritmo genético utilizou-se a biblioteca GALib (2013). Utilizou-se ainda, no algoritmo C-GRASP o gerador de números randômicos, em intervalo uniformemente distribuído, *Mersenne Twister* (WAGNER, 2009). Os experimentos foram realizados em um PC com processador Intel Core 2 Duo (2.93 GHz), com 3 MB de cache e 2 GB de RAM, rodando o sistema operacional Fedora 13.

### 6.2 Ajustes de Parâmetros das Meta-heurísticas

Nas Subseções 6.2.1 e 6.2.2 relatamos os experimentos realizados para avaliar a influência dos parâmetros nas meta-heurísticas AG e C-GRASP. Para estes experimentos utilizamos uma amostra de seis instâncias: (21, 23, 30, 31, 45, 46). Estas

Volume	Vértices	Faces	Volume	Vértices	Faces	Volume	Vértices	Faces
1421,0	15880	31756	1776,9	19017	38030	2199,3	22278	44552
1380,9	16250	32496	1836,3	19058	38112	2283,4	22377	44750
1544,0	16641	33278	1737,8	20017	40030	2324,7	22388	44772
1554,3	16679	33354	1969,4	20116	40228	2170,1	22539	45074
1504,5	16688	33372	1841,2	20165	40326	2471,6	22611	45218
1550,9	16882	33760	2056,5	20211	40418	2228,2	22706	45408
1614,5	16904	33804	1947,3	20348	40692	2313,2	22754	45504
1511,4	17213	34422	1721,8	20765	41526	2155,3	22827	45650
1497,8	17241	34478	2325,8	20852	41700	2560,6	22999	45994
1486,1	17444	34884	2070,2	21129	42254	2393,3	23101	46198
1514,9	17659	35314	2241,6	21185	42366	2093,5	23450	46896
1689,0	18272	36540	2105,0	21230	42456	2268,7	23727	47450
1787,9	18334	36664	2148,8	21241	42478	2528,8	23919	47834
1680,4	18392	36780	1897,0	21473	42942	2608,6	24079	48154
1854,3	18536	37068	2174,3	21764	43524	2512,2	24525	49048
1580,0	18847	37690	2338,8	22154	44304	2515,4	25070	50136
1828,1	18943	37882	2229,2	22158	44312			

Tabela 6.1: Característica das 50 instâncias utilizadas nos testes computacionais.

Tabela 6.2: Valores utilizados para os parâmetros dos corpos de calibração.

Redondo		Oval	
$a$	5.00 mm	$a$	6.21 mm
$b$	5.00 mm	$b$	5.00 mm
$D$	0.40 mm	$D$	0.50 mm
$\varphi_{\text{sup}}$	34.0°	$\varphi_{\text{sup}}$	38.0°
$\varphi_{\text{inf}}$	42.5°	$\varphi_{\text{inf}}$	42.0°
$L_{\text{sup}}$	$a \tan \varphi_{\text{sup}}$	$L_{\text{sup}}$	$a \tan \varphi_{\text{sup}}$
$\mu_{\text{sup}} L_{\text{sup}}$	1.08 mm	$\mu_{\text{sup}} L_{\text{sup}}$	1.30 mm
$L_{\text{inf}}$	$a \tan \varphi_{\text{inf}}$	$L_{\text{inf}}$	$a \tan \varphi_{\text{inf}}$
$\mu_{\text{inf}} L_{\text{inf}}$	4.40 mm	$\mu_{\text{inf}} L_{\text{inf}}$	4.84 mm



instâncias foram selecionadas considerando seu número de vértices, dado que este é o principal fator de escalonamento no tempo de execução da função objetivo. Duas instâncias possuem o menor número de vértices, duas o maior número de vértices e duas o número médio de vértices. Além disso, rodamos os experimentos para os corpos de calibração redondo e oval, replicando cada experimento dez vezes.

### 6.2.1 Ajuste de Parâmetros do Algoritmo Genético

O AG tem como parâmetros ajustáveis a quantidade de indivíduos na população ( $p_{size}$ ), porcentagem de mutação ( $p_{mut}$ ), porcentagem de *crossover* ( $p_{cross}$ ), número de gerações ( $n_{ger}$ ), e, no caso do algoritmo utilizado – *Steady-State* – a taxa de sobreposição de indivíduos ( $r$ ).

A escolha dos operadores genéticos de mutação (*Gaussian Mutation*) e seleção (sorteio) foi discutida no capítulo anterior. Para o operador de cruzamento avaliamos três métodos: *One Point Crossover*, *Uniform Crossover* e *Real Blending Crossover*, rodando o algoritmo genético nas seis instâncias pré-definidas, para os dois corpos de calibração (redondo e oval). Definimos, a partir de testes preliminares, o conjunto de parâmetros  $p_{mut} = 0.3$ ,  $p_{cross} = 0.6$ ,  $p_{size} = 75$ ,  $r = 0.9$  e  $n_{ger} = 3000$  como critério de parada. Cabe salientar que no *One Point Crossover* fixamos o ponto de separação dos genes na metade do cromossomo. Assim, um filho será gerado com o centro do pai e o ângulo de inclinação da mãe, e o segundo filho terá configuração inversa.

Avaliamos para este experimento apenas a média do desvio relativo. O menor valor médio de desvio relativo (3.26%) foi obtido com o método *One Point Crossover*. Os métodos *Uniform Crossover* e *Real Blending Crossover* obtiveram, respectivamente, 3.80% e 3.29%. Os resultados demonstraram que as diferentes técnicas de cruzamento avaliadas não influenciam significativamente na qualidade da solução. Avaliamos, então, o AG com as mesmas configurações do experimento anterior, desligando o cruzamento ( $p_{cross} = 0$ ). O desvio relativo médio obtido com este novo experimento foi de 3.57%, o que nos fez constatar que, para este problema, o método de cruzamento realmente não influencia na qualidade da resposta e, portanto, optamos por não utilizar o operador de cruzamento no AG, reduzindo assim o tempo de execução do algoritmo. O AG proposto é, portanto, constituído de uma busca estocástica com pequenas perturbações da solução, através do operador de mutação.

Avaliamos posteriormente qual a configuração dos demais parâmetros obtém melhores resultados. Definimos um conjunto de três valores variando o conjunto inicial para cada parâmetro, estipulando:  $p_{mut} \in \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $p_{size} \in \{25, 50, 75\}$  e  $r \in \{0.9^2, 0.9, \sqrt{(0.9)}\}$ . O valor da taxa de sobreposição  $r$  foi escolhido visando elitismo, buscando que ao menos um indivíduo (o melhor de cada geração) seja passado para as gerações futuras. Ainda, definimos como critério de parada  $n_{ger} = 4000$  aumentando o número de gerações, buscando melhorar os resultados. Por fim, definimos como métrica para este experimento o desvio relativo e o tempo de execução.

Deste novo experimento, inicialmente avaliamos a influência da combinação dos parâmetros  $p_{size}$  e  $p_{mut}$ . Apresentamos na Figura 6.1 um gráfico com a distribuição da média dos desvios relativos em função do tempo de execução, dispostos a partir da

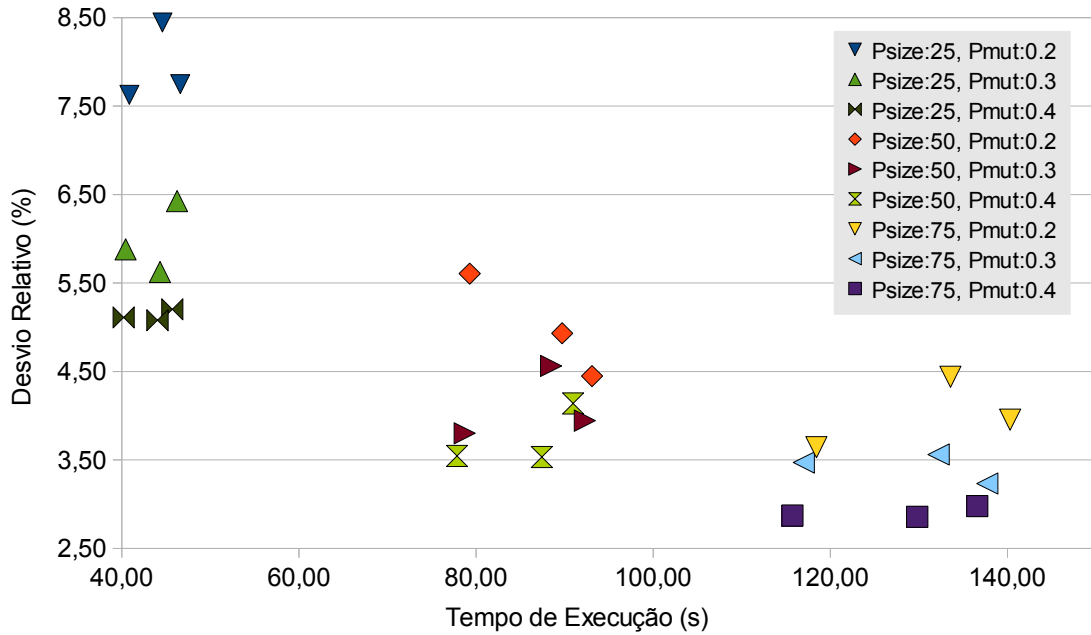


Figura 6.1: Média dos desvios relativos obtidos com o AG em função do tempo de execução.

combinação  $p_{size}$  e  $p_{mut}$ , sendo que a variação dos três pontos para estas combinações a variação do parâmetro  $r$ .

Pode ser observado no gráfico que os melhores resultados são obtidos com populações mais povoadas de indivíduos (parâmetro  $p_{size}$ ). Fica evidenciado no gráfico que o tamanho da população é também o principal fator de escalonamento no tempo de execução, sendo possível verificar três classes de soluções bem distanciadas no eixo do tempo de execução, para cada variação do parâmetro  $p_{size}$ . Contudo, mesmo para  $p_{size} = 75$  o AG apresenta um tempo médio aceitável (140 segundos no pior caso), o que nos levou a fixar o parâmetro  $p_{size} = 75$  e desconsiderar o tempo de execução, para este experimento.

Fixamos o parâmetro  $p_{mut} = 0.4$ , dado que para todas as combinações, as configurações com este valor obtêm melhores resultados. Por fim, a variação do parâmetro  $r$  não influenciou significativamente na resposta, sendo que para cada classe de respostas dispostas no gráfico, os valores obtidos, variando  $r$ , são relativamente próximos, e, dado que o parâmetro  $r = 0.9$  obteve, na combinação com  $p_{size} = 75$  e  $p_{mut} = 0.4$ , o melhor desvio relativo (2.86%), obtido em 130 segundos (em média), fixamos-o com este valor.

Portanto, a configuração de parâmetros do AG, que será utilizada para os experimentos finais têm  $p_{size} = 75$ ,  $p_{mut} = 0.4$ ,  $r = 0.9$  e  $n_{ger} = 4000$  – dado que com 4000 gerações houve uma ligeira melhora no desvio relativo, considerando o teste anterior.

## 6.2.2 Ajuste de Parâmetros do método C-GRASP

O método C-GRASP possui os seguintes parâmetros ajustáveis:  $h_s$ ,  $h_e$ ,  $maxIterações$  e  $maxVizinhos$ . Em experimentos preliminares constatou-se que

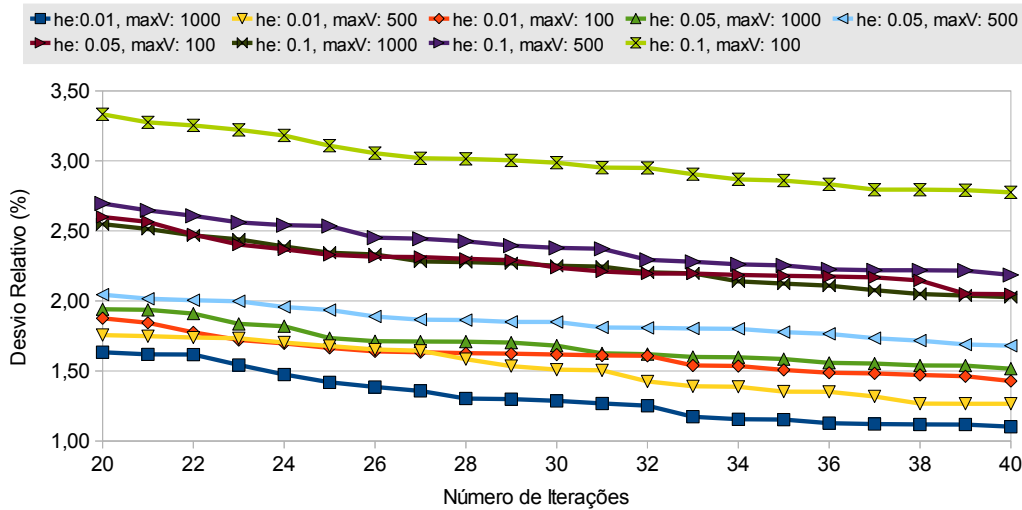


Figura 6.2: Média dos desvios relativos em função do número de iterações para o método C-GRASP.

o parâmetro  $h_s$  afeta apenas ligeiramente os resultados, assim optamos por fixar seu valor em  $h_s = 1.0$ .

Avaliamos os parâmetros  $h_e$ ,  $maxVizinhos$  e  $maxIterações$  nos intervalos  $h_e \in \{0.1, 0.5, 0.01\}$ ,  $maxVizinhos \in \{100, 500, 1000\}$  e  $maxIterações \in \{20, 30, 40\}$ . Sendo estes intervalos definidos em testes preliminares.

Para o C-GRASP, assim como o AG, o experimento para ajuste de parâmetros foi avaliado no conjunto das seis instâncias estabelecidas, rodando para cada instância os modelos de calibração redondo e oval, replicando cada experimento dez vezes. Definimos como métrica a média, dentre as dez execuções, do desvio relativo e do tempo de execução. Os resultados deste experimento são apresentados no gráfico da Figura 6.2. Este gráfico apresenta a distribuição da média dos desvios relativos obtido para cada combinação de parâmetros, em cada iteração do C-GRASP.

É possível observar no gráfico que quanto menor a densidade da grade de discretização do espaço de busca (parâmetro  $h_e$ ), melhores são os resultados, independente da combinação dos demais parâmetros. Além disso, o parâmetro  $maxVizinhos$  influencia positivamente na qualidade da resposta, sendo que quanto mais vizinhos são avaliados na etapa de busca local melhor é a solução. A seguir analisamos o custo-benefício entre a qualidade da solução *versus* tempo de execução, para estes parâmetros, dado que a relação  $h_e$  e  $maxVizinhos$  é o fator determinante no tempo de execução do algoritmo, uma vez que a combinação destes parâmetros definem a quantidade de soluções que são avaliadas a cada iteração do C-GRASP.

O gráfico na Figura 6.3 apresenta o valor médio do desvio relativo em função do tempo de execução, limitando o desvio relativo em 2% e o tempo mínimo em 50 segundos – refutando valores maiores que estes, sendo os pontos no gráfico, para cada combinação, o parâmetro  $maxIterações \in \{20, 30, 40\}$ .

Podemos perceber através do gráfico apresentado que existem pelo menos três pontos claros de *trade-off* entre a qualidade da solução *versus* tempo. Isto implica que, através de refinamentos dos parâmetros do C-GRASP é possível ajustar a qua-

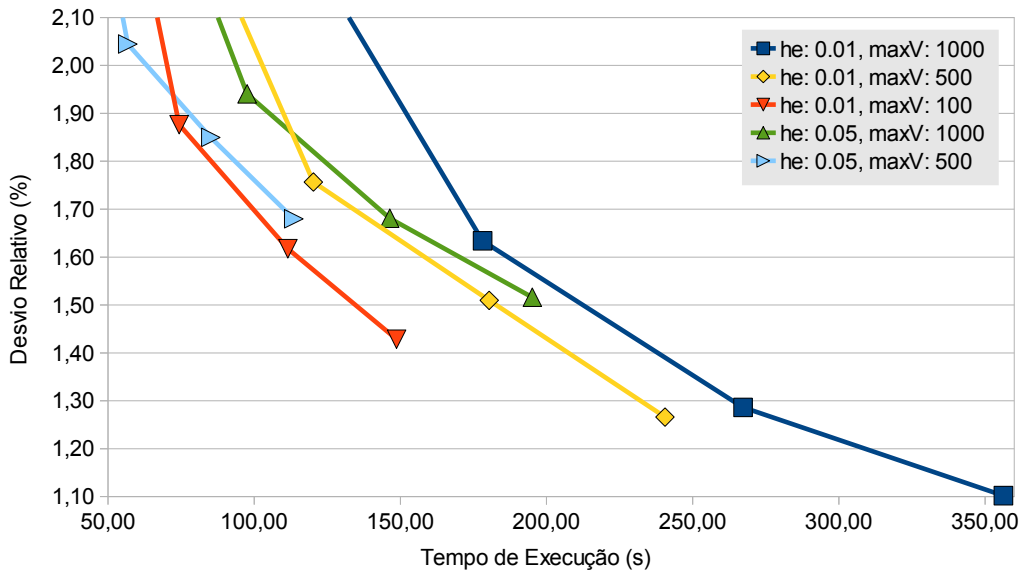


Figura 6.3: Média dos desvios relativos em função do tempo de execução para o método C-GRASP.

lidade da resposta, pagando com um tempo de execução linearmente maior. Esta característica do método possibilita a escolha de uma solução custo-eficiente para a problema. Deste modo, uma vez que o objetivo desta pesquisa é obter soluções de boa qualidade em um tempo de execução considerável, optamos por fixar os parâmetros em ( $h_e = 0.01$ ,  $maxVizinhos = 100$ ,  $maxIterações = 40$ ), visto que esta configuração obteve bons resultados (desvio relativo médio 1.43%) em menos da metade do tempo (150 segundos), comparado com a melhor solução (1.10%), utilizando  $maxVizinhos = 1000$ , o qual necessitou um tempo de execução de 357(s) (em média).

Além disso, destacamos que pela escolha por soluções custo-eficientes, não realizou-se testes com valores de maior grau para os parâmetros, mesmo o gráfico demonstrando que o método ainda não convergiu completamente. No entanto, para aplicações onde almeja-se o aproveitamento máximo que o método pode ter, é possível, conforme discutido, refinar as configurações de parâmetros, ou até mesmo utilizar valores de maior grau para os parâmetros, obtendo respostas de maior qualidade em um tempo linearmente superior.

Na seção seguinte apresentamos os resultados obtidos com os métodos propostos utilizando as configurações relatadas.

### 6.3 Resumo dos Resultados Obtidos

Para avaliar os algoritmos propostos neste trabalho, utilizamos o conjunto de 50 gemas digitalizadas, rodando cada instância com os corpos de calibração redondo e oval, replicando dez vezes cada teste, sendo os resultados discutidos a média destas dez execuções. Apresentamos na Figura 6.4 uma demonstração da solução para uma instância do problema, para o modelo de lapidação Brillante Oval. As imagens foram renderizadas através do software POV-Ray (2003).

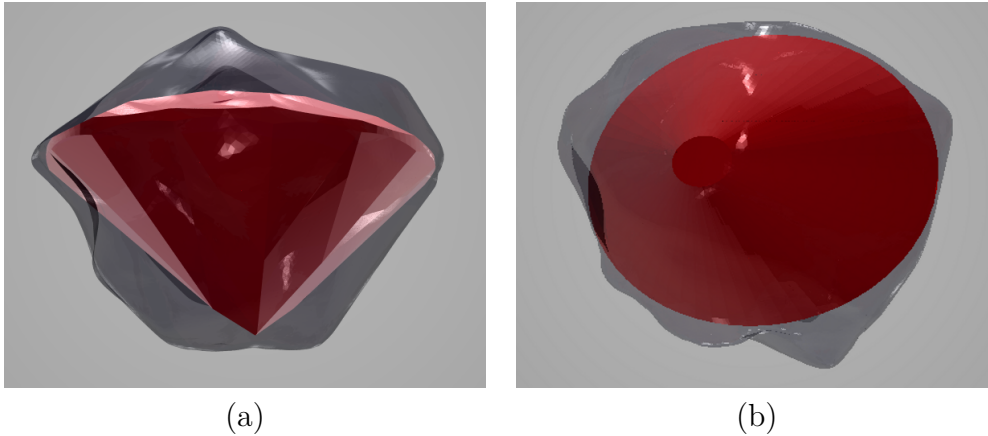


Figura 6.4: Solução encontrada para a instância 38 para o modelo de lapidação Brilhante Oval, aproveitamento volumétrico de 46%. Renderização do modelo facetado (a) e corpo de calibração correspondente (b).

Tabela 6.3: Quadro comparativo entre os resultados obtidos pelo AG e o C-GRASP. Melhores resultados destacados em negrito.

Modelo	Redondo		Oval		Melhor Apt.	
	AG	CG	AG	CG	AG	CG
Mínimo (%)	30,8	<b>31,4</b>	33,9	<b>34,6</b>	34,6	<b>35,1</b>
Máximo (%)	43,2	<b>44,1</b>	45,0	<b>46,2</b>	45,1	<b>46,2</b>
Médio (%)	36,5	<b>37,2</b>	38,1	<b>39,3</b>	38,6	<b>39,2</b>
Desvio Relativo	1,9	<b>0,7</b>	2,9	<b>1,7</b>	-	-
Desvio Padrão	0,9	<b>0,2</b>	1,0	<b>0,4</b>	-	-
tempo (s)	124	140	136	162	260	302

Avaliamos para o AG e o C-GRASP o aproveitamento volumétrico médio, o desvio relativo médio entre o volume obtido e o maior volume encontrado, o desvio padrão, e o tempo de execução em segundos. Utilizamos como parâmetro para calcular o desvio relativo o maior volume encontrado dentre todos os testes executados para ambas as abordagens, pois as soluções ótimas das instâncias não são conhecidas.

Rodamos o algoritmo genético com a configuração de parâmetros  $p_{size} = 75$ ,  $p_{mut} = 0.4$  e  $r = 0.9$ , tendo como critério de parada 4000 gerações, e no C-GRASP utilizamos a configuração  $h_e = 0.01$ ,  $maxVizinhos = 100$  e  $maxIterações = 40$ . Os resultados obtidos com as abordagens são apresentados nos anexos, nas Tabelas A.1, A.2 e A.3, relatando o aproveitamento no melhor caso, e os resultados para os modelos de lapidação redondo e oval, respectivamente.

Um resumo dos resultados obtidos pelo algoritmo genético e C-GRASP é apresentado na Tabela 6.3. Na tabela relatamos para o modelo redondo, oval e no melhor caso (Melhor Apt.), os valores do menor (“Mínimo”) e maior (“Máximo”) aproveitamento obtidos, além do aproveitamento médio (“Médio”). Ainda, apresentamos as médias do desvio relativo e do desvio padrão, sendo que a última linha da tabela indica o tempo médio de execução (em segundos).

O aproveitamento volumétrico médio, considerando o maior volume obtido entre todas as execuções de ambas as abordagens, foi de 37.2% para o modelo redondo e 39.3% para o modelo oval. Se considerarmos o aproveitamento no melhor caso, dentre os modelos redondo e oval, o aproveitamento médio foi de 39.7%.

Dentre as meta-heurísticas, o AG obteve para o modelo redondo um aproveitamento volumétrico de 36.5%, variando entre 30,8% no pior caso, e 43.27% no melhor caso. A média de valores para o desvio padrão foi de 0.91%, e o desvio relativo médio foi de 1.94%. O tempo de execução médio obtido para este modelo foi de 124 segundos. No modelo oval, o AG obteve um aproveitamento volumétrico de 38.1% (em média), variando entre 33.9% e 45%, no pior e melhor caso. O desvio padrão médio foi de 0.96% e o desvio relativo 2.93%, obtidos em um tempo médio de 136 segundos. Considerando o melhor caso para cada gema o AG obteve um aproveitamento médio de 38.61%.

O C-GRASP obteve um aproveitamento médio de 37.2% para o modelo redondo, variando entre 31.39% no pior caso e 44.14% no melhor caso. Ainda para o modelo redondo, o desvio relativo obtido foi 0.68%, o desvio padrão 0.17%, e o tempo de execução de 140 segundos (em média). No modelo oval, o aproveitamento médio foi de 39.3%, sendo, respectivamente, o pior e melhor caso, 34.56% e 46.23%. As médias de desvio relativo e desvio padrão foram 1.67% e 0.39%, tendo um tempo de execução de 162 segundos (em média). Considerando o melhor caso, o aproveitamento do C-GRASP foi de 39.15%.

Comparando os resultados de aproveitamento médio obtidos com a solução inicial construída aleatoriamente no início de cada método, temos que as abordagens melhoraram, ao longo de suas execuções, significativamente esta primeira solução, que em média, dentre as dez execuções, foram de 1,97% e 1,45% para os modelos redondo e oval, respectivamente.

Por fim, traçando um comparativo entre os métodos, o método C-GRASP obteve resultados ligeiramente melhores do que o AG, em um tempo de execução entre 12% maior para o modelo redondo e 20% maior para o modelo oval. Ambas as meta-heurísticas obtiveram valores de desvio relativo consideravelmente baixo, o que demonstra robustez. Além disso, o desvio padrão foi ínfimo (menor que 1%) em ambas, o que garante que nas dez execuções dos métodos foram obtidos resultados consistentemente próximos aos valores de aproveitamento médio relatados.

Na seção seguinte comparamos os resultados obtidos com os principais resultados discutidos na literatura, em relação a aproveitamento e tempo de execução.

## 6.4 Comparativo com as abordagens da literatura

O único trabalho relacionado ao problema do lapidário para gemas de cor encontrado na literatura é apresentado em (WINTERFELD, 2007). Neste trabalho uma abordagem utilizando programação semi-infinita é proposta, sendo avaliada em um conjunto de 50 gemas e nove modelos de lapidação, rodando os experimentos em um computador com sistema operacional Linux, com processador Intel Xeon (3 GHz), sem paralelismo, com 4GB de memória RAM. Destaca-se que nem o algoritmo, nem as instâncias estão disponíveis. Deste modo, vamos comparar os resultados relatados

em (WINTERFELD, 2007) qualitativamente aos obtidos pelas meta-heurísticas.

Comparando as abordagens em relação ao método de resolução, a programação semi-infinita utiliza-se de um resolvidor GSIP proposto em (STEIN, 2006) para solucionar o problema. O resolvidor recebe como entrada as representações paramétricas do corpo de calibração e da malha da gema. Para gerar a representação da malha da gema, um processo de suavização é realizado, descrevendo esta em um conjunto de funções concavas quadráticas, conforme discutido no Capítulo 3. Este refinamento, necessário para o resolvidor GSIP, gera um ruído entre a malha original e a representação da gema, o qual não foi mensurado em Winterfeld.

A abordagem proposta neste trabalho, diferentemente da programação semi-infinita, soluciona o problema utilizando diretamente a malha triangular da gema, e, embora exista um pequeno *gap* no tamanho dos triângulos da malha – advindos da aquisição dos dados, acreditamos que esta abordagem produz um ruído menor do que o gerado pelo processo de parametrização utilizado em (WINTERFELD, 2007).

Quanto aos resultados, o aproveitamento médio relatado em Winterfeld foi de 42.4%, no melhor caso, dentre os nove modelos, para as 50 instâncias analisadas. A soma dos tempos médios, dentre os nove modelos de lapidação, implicam um tempo de execução <sup>1</sup> em torno de 5852 segundos para obter o melhor modelo de lapidação.

Para os modelos de lapidação redondo e oval o aproveitamento médio foi, respectivamente, de 35% e 40.2%, obtidos em um tempo médio de execução de 608 segundos (modelo redondo) e 692 segundos (modelo oval). Considerando o aproveitamento médio no melhor caso, tomando como base apenas os modelos de lapidação redondo e oval, o aproveitamento foi de 40.7%, em um tempo de execução de 1300 segundos.

Comparando os resultados apresentados com os obtidos pelas abordagens propostas, temos que tanto o AG, com 36.5%, como o C-GRASP, com 36.9%, alcançaram melhores resultados para o modelo redondo, comparado aos 35% obtidos pela abordagem utilizando programação semi-infinita. Para o modelo Oval, a programação semi-infinita obteve um aproveitamento médio de 40.2%, sendo este valor superior ao AG (38.1%) e C-GRASP (38.6%). Conseqüentemente, o aproveitamento médio no melhor caso, considerando os modelos redondo e oval, na abordagem proposta em (WINTERFELD, 2007) obteve melhores resultados, com 40.7%, enquanto o AG obteve 38.6% e o C-GRASP 39.1%.

Estima-se que a diferença de aproximadamente 1.5% (para mais ou para menos), em termos de aproveitamento médio, pode ter sido causada tanto pelo modelo eleito para realizar os testes, como pela topologia das malhas das gemas, dado que os experimentos não foram executados nas mesmas instâncias. Um forte indício para esta afirmação são os aproveitamentos relatados no pior e melhor caso, sendo que no pior caso, para os modelos redondo e oval, respectivamente, a programação semi-infinita obteve 19.1% e 21.1%, o AG obteve 30.8% e 33.9%, e o C-GRASP obteve 31.4% e 34.6%. No melhor caso, o aproveitamento obtido pelas abordagens, foram 45.9% e 53.6 pela programação semi-infinita, 43.2% e 45% pelo AG, e 44.1% e 46.2% pelo C-GRASP, para os modelos redondo e oval, respectivamente.

---

<sup>1</sup>O tempo médio considerado para o melhor caso é a soma dos tempos médios necessários para cada modelo.

Analisando a variação do aproveitamento, percebe-se que existe uma acentuada diferença de topologia nas instâncias, sendo as gemas utilizadas para os experimentos em Winterfeld bem mais irregulares, apresentando uma variação de aproveitamento de 26.8% para o modelo redondo e 32.5% para o modelo oval, a qual é amplamente superior, comparado aos 12.4% e 11.1% do AG e 12.7% e 11.7% do C-GRASP, para os modelos redondo e oval.

Além disso, se considerado o aproveitamento no melhor caso, temos que os valores relatados pela programação semi-infinita, principalmente para o modelo oval, foram amplamente superiores aos valores obtidos pelas abordagens heurísticas, apresentando uma variação de 8.6% para o AG e 7.4% para o C-GRASP. Esta diferença reforça a hipótese de que os modelos utilizados nos testes não foram os mesmos, e, como em (WINTERFELD, 2007) não se especifica a variedade da gema utilizada nos testes, deve-se considerar a hipótese de que os modelos podem ter sido confeccionados para gemas diferentes do quartzo, com um índice de refração diferente de 1.54, gerando um modelo de lapidação com diferentes simetrias e inclinações.

Estas afirmativas reforçam que a suave diferença de aproveitamento volumétrico entre os resultados finais, foram possivelmente acarretadas pela diferença nas instâncias, e, portanto, avaliando os resultados qualitativamente, temos que as abordagens propostas obtiveram resultados relativamente próximos comparados a abordagem utilizando programação semi-infinita.

Comparando as abordagens quanto a tempo de execução, temos que as meta-heurísticas obtiveram soluções em menor tempo em relação aos 608 (modelo redondo) e 692 (modelo oval) segundos necessários pela programação semi-infinita. O AG despreendeu um tempo médio de 124 segundos para o modelo redondo e 136 segundos para o modelo oval, enquanto o C-GRASP precisou de 140 e 162 segundos, respectivamente, para tais modelos.

No entanto, cabe ressaltar que o número de vértices das instâncias utilizadas por (WINTERFELD, 2007) é maior do que duas vezes, em média 49294, o número de vértices das malhas utilizadas neste trabalho (20421 vértices). E, uma vez que o algoritmo de avaliação utilizado pelas heurísticas possui uma complexidade  $O(n_v)$  linear no número ( $n_v$ ) de vértices da malha, deve-se ao se comparar tempo de execução, reduzir o tempo despreendido pela programação semi-infinita em um fator dois.

Ainda, temos que o ambiente computacional utilizado em (WINTERFELD, 2007), comparado aproximadamente<sup>2</sup> ao utilizado neste trabalho, considerando como *benchmark* a métrica apresentada em Passmark (2013), possui um processamento que pode ser até um fator dois mais lento em relação ao processador utilizado nesta pesquisa. Logo, estima-se que os tempos de execução das abordagens são proporcionalmente similares.

Por fim, conclui-se que as abordagens heurísticas obtiveram resultados muito próximos aos relatados pela programação semi-infinita, em aproveitamento volumétrico e tempo de execução, cumprindo com o objetivo principal proposto neste trabalho, reforçando que ambas as heurísticas são válidas como abordagens para solucionar este problema.

---

<sup>2</sup>O modelo exato do processador não foi relatado.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho propomos duas abordagens heurísticas que solucionam o problema do lapidário em um tempo de execução competitivo, para os modelos de lapidação redondo e oval. Estas abordagens maximizam o fator de escala do modelo de lapidação, dentre todas as possíveis posições de centro e ângulos de orientação que o modelo pode assumir. Propomos um Algoritmo Genético com variáveis de valores reais, e um GRASP Contínuo. Ambos os algoritmos utilizam-se da função de avaliação proposta, a qual soluciona eficientemente uma instância do problema para um modelo de calibração parametrizado, podendo ser generalizada para outros modelos de lapidação, conforme discutido no Capítulo 3.

Comparando as meta-heurísticas temos que o C-GRASP produziu melhores resultados em relação ao AG, em um tempo de execução entre 12% e 20% mais lento. Contudo, os resultados apresentados no Capítulo 6 demonstram que ambas as abordagens são robustas obtendo valores de desvio relativo e desvio padrão consideravelmente baixos.

Em relação a aproveitamento médio, as abordagens propostas obtiveram um alto acréscimo para o modelo redondo, considerado o aproveitamento discutido na literatura para o processo manual de lapidação deste modelo, de 25% para 37%. Comparado ao algoritmo atual do software otimizador 3D Gemas, as abordagens obtiveram uma melhora significativa na qualidade da resposta, neste novo conjunto de instâncias, elevando o índice de aproveitamento médio de 34.8% para 39% no melhor caso.

A única outra abordagem encontrada na literatura foi proposta em (WINTERFELD, 2007). Uma comparação aproximada, dado que nem o algoritmo nem as instâncias utilizadas foram disponibilizadas, demonstra que os resultados obtidos com as heurísticas propostas são estritamente próximos dos resultados alcançados através da abordagem utilizando programação semi-infinita, em um tempo de execução similar, evidenciando que as abordagens são adequadas para resolução do problema do lapidário.

Temos ainda como contribuição deste estudo, a disponibilização das gemas e dos modelos utilizados nos experimentos, no sítio do projeto 3D Gemas para que possam ser utilizados em trabalhos futuros, sendo este uma importante contribuição para esta área, visto que não existem dados disponíveis para pesquisa.

Como trabalho futuro sugerimos a implementação da função objetivo para solucionar o problema do lapidário para outros modelos de lapidação, visando aumentar o aproveitamento médio, para pelo menos 42%, tendo como base o índice de 42.6% relatado em (WINTERFELD, 2007). E, uma vez que as abordagens heurísticas obtiveram tempos relativamente próximos a programação semi-infinita, considerando a diferença entre os ambientes computacionais, almeja-se obter o melhor modelo de lapidação, dentre os nove modelos, em cerca de 50 minutos.

Sugerimos ainda como trabalho futuro, conforme levantado também em (WINTERFELD, 2007), o estudo da relação entre o aproveitamento volumétrico e a beleza do modelo final de lapidação. Partindo da seguinte indagação: É possível maximizar além do aproveitamento volumétrico também a beleza da peça final (retorno da luz)?

Outro objeto de estudo a ser considerado é o problema de minimizar a perda de material em um lote de gemas. Para exemplificar, dado um lote com 50 gemas, extrair deste lote um “pedido” de 20 modelos ovais, 10 modelos redondo, 10 modelos navete e 10 retangulares, tal que o aproveitamento de cada gema seja maximizado, e, no lote, a perda de material seja a mínima possível.

Temos ainda um “campo em aberto” na otimização de gemas com zoneamento de cores e inclusões (DUARTE et al., 2003). Pois estes assuntos não possuem trabalhos relacionados na literatura, sendo restrições que podem ser acrescentadas à formulação do problema, ampliando o universo de aplicação do algoritmo para este conjunto de gemas não contempladas num primeiro momento.

## REFERÊNCIAS

3D Gemas. *3D Gemas*. Dezembro 2012. Acesso em: 10 dez. 2013. Disponível em: <<http://www.upf.br/3dgemas>>.

AMANATIDES, J.; CHOI, K. Ray tracing triangular meshes. *Proceedings of the Eighth Western Computer Graphics Symposium*, p. 43–52, April 1997.

BERG, M. de et al. *Computational Geometry, Algorithms and Applications*. Third. [S.l.]: Springer, 2008. 386 p.

BLICKLE, T.; THIELE, L. *A Comparison of Selection Schemes used in Genetic Algorithms*. [S.l.], 1995. 65 p.

BRUSSO, M. J. et al. Tecnologias para o setor de gemas, joias e mineração. In: \_\_\_\_\_. Porto Alegre: IGEO/UFRGS, 2010. cap. Tecnologia 3D Gemas: otimização do aproveitamento de gemas coradas digitalizadas tridimensionalmente, p. 40–52.

CREAFORM. Novembro 2013. Acesso em: 12 nov. 2013. Disponível em: <<http://www.creaform3d.com>>.

DENIS, H.; BORUT, Z. Ray-casting point-in-polyhedron test. *Central European Seminar on Computer Graphics*, p. 8, 2012.

DUARTE, L. C. et al. Aplicações de microscopia eletrônica de varredura (mev) e sistema de energia dispersiva (eds) no estudo de gemas: exemplos brasileiros. *Pesquisas em Geociências*, v. 30, p. 3–15, 2003.

FIOREST, M. B.; BRUSSO, M. J. Algoritmos genéticos na otimização da lapidação de gemas coradas. *Revista de Ciências Exatas Aplicadas e Tecnológicas*, v. 3, p. 44–55, 2011.

GALIB. Novembro 2013. Acesso em: 10 dez. 2013. Disponível em: <<http://lancet.mit.edu/ga/>>.

GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. *Handbook of Metaheuristics*. Second. [S.l.]: Springer, 2010. 648 p.

GIA. *Gemological Institute of America*. Dezembro 2012. Acesso em: 10 nov. 2013. Disponível em: <<http://www.gia.edu/>>.

HIRSCH, M. J. *GRASP-Based Heuristics for continuous global optimization problems*. 110 p. Dissertação de Mestrado — University of Florida, 2006.

HIRSCH, M. J. et al. Speeding up continuous grasp. *European Journal of Operational Research*, v. 205, p. 507–521, September 2010.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. first. [S.l.]: University of Michigan Press, 1975. 183 p.

IBGM. *Boletim referencial de preços de diamantes e gemas de cor*. 2009. Acesso em: 10 dez. 2013. Disponível em: <[http://www.dnpm.gov.br/mostra\\_arquivo.asp?IDBancoArquivoArquivo=3330](http://www.dnpm.gov.br/mostra_arquivo.asp?IDBancoArquivoArquivo=3330)>.

KRAUS, P. D. *Introduction to Lapidary*. [S.l.]: Krause Publications, 1987. 208 p.

LEAL, J. M.; BECATTINI, C. D.; LOPES, V. C. P. *Dossiê Técnico – Gemologia ao alcance de todos*. [S.l.], 2007. Acesso em: 10 dez. 2012. Disponível em: <<http://sbirt.ibict.br/dossie-tecnico/downloadsDT/MjEw>>.

LOCATELLI, M. Simulated annealing algorithms for continuous global optimization: Convergence conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 104, n. 1, p. 121–133, January 2000.

M., B.; H., S.; SHETTY, C. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. Third. [S.l.]: John-Wiley, Toronto, 2006.

MITCHELL, M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. [S.l.]: MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1999. 158 p.

MOL, A. A. *Estudo de Ferramenta Computacional para Análise de Parâmetros em Gemas Lapidadas: Quartzo hialino*. 110 p. Dissertação de Mestrado — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Materiais, Universidade Federal de Ouro Preto, Outubro 2004.

MOL, A. A.; FILHO, J. D. S. d. S. L. S. M.; ROCHA, R. Efficiency parameters estimation in gemstones cut design using artificial neural networks. *Computational Materials Science*, v. 38, p. 727–735, 2007.

NADUR, A. V. *Lapidação de gemas no panorama brasileiro*. 142 p. Dissertação de Mestrado — Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo, 2009.

NGUYEN, H. V.; STRODIOT, J.-J. Computing a global optimal solution to a design centering problem. *Mathematical Programming*, v. 53, p. 111–123, January 1992.

OGI. *OGI Systems Ltd*. Dezembro 2012. Acesso em: 10 out. 2013. Disponível em: <<http://www.ogisystems.com/products.html>>.

PARDALOS, P. M.; ROMEIJN, H. E. *Handbook of Global Optimization*. first. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2002.

PASSMARK. *CPU Benchmarks – Over 600,000 CPUs Benchmarked*. Dezembro 2013. Acesso em: 10 dez. 2013. Disponível em: <<http://www.cpubenchmark.net/>>.

POVRAY. *Persistence of Vision Raytracer Pty. Ltd*. 2003. Acesso em: 15 dez. 2013. Disponível em: <<http://www.povray.org/>>.

SEVERO, G. B. *Projeto 3D-Gemas: Desenvolvimento do protótipo de interface gráfica de usuário para o software CAD-GEMAS*. 72 p. Monografia — Insitute de Ciências Exatas e Geociências, Universidade de Passo Fundo, 2008.

SINDIPEDRAS. *Sindicato das indústrias de joalheira, mineração, lapidação, beneficiamento e transformação de pedras preciosas do RS*. Dezembro 2013. Acesso em: 10 mar. 2013. Disponível em: <<http://www.sindipedras.com.br>>.

SINKANKAS, J. *Gem Cutting a Lapidary's Manual*. [S.l.]: Van Nostrand Reinhold, 1984.

SOCHA, K.; DORIGO, M. Ant colony optimization for continuous domains. *European Journal of Operational Research*, v. 185, p. 1155–1173, November 2006.

SOUZA, E. P. *Contribuição ao estudo da aplicação da digitalização tridimensional para o design e a lapidação de gemas*. Dissertação de Mestrado — Programa de Pós-Graduação em Design, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

STEIN, O. Optimization with multivalued mappings. In: \_\_\_\_\_. first. [S.l.]: Springer, 2006. cap. A semi-infinite approach to design centering, p. 209–228.

STRICKLAND, R. W. *GemCad for Windows. User's Guide*. September 2002. Acesso em: 10 dez. 2013. Disponível em: <[http://www.gemcad.com/downloads-gemcadman%-.pdf](http://www.gemcad.com/downloads/gemcadman%-.pdf)>.

STRICKLAND, R. W. *GemCad – Computer-Aided Design Software for Faceted Gemstones*. 2013. Acesso em: 15 dez. 2013. Disponível em: <<http://www.gemcad.com/>>.

SUNDAY, D. *Intersections of Rays, Segments, Planes and Triangles in 3D*. 2008. Acesso em: 10 nov. 2013. Disponível em: <[http://www.softsurfer.com/Archive/algorithm\\_0105/algorithm\\_0105.htm](http://www.softsurfer.com/Archive/algorithm_0105/algorithm_0105.htm)>.

WAGNER, R. J. *Mersenne Twister*. 2009. Acesso em: 10 mar. 2012. Disponível em: <[http://sumo.sourceforge.net/daily/sumodoku/da/d3b/\\_mersenne\\_twister\\_8h\\_source.html](http://sumo.sourceforge.net/daily/sumodoku/da/d3b/_mersenne_twister_8h_source.html)>.

WALL, M. *Galib: A C++ Library of Genetic Algorithm Components*. 1996. Acesso em: 05 set. 2013. Disponível em: <<http://lancet.mit.edu/ga/dist/galibdoc.pdf>>.

WINTERFELD, A. *Large-scale semi-infinite optimization applied industrial gemstone cutting*. 151 p. Tese (Doutorado) — Tech. Univ. Kaiserslautern, April 2007.

ZANATTA, A. L. et al. Tecnologias para o setor de gemas, joias e mineração. In: \_\_\_\_\_. first. Porto Alegre: IGEO/UFRGS, 2010. cap. Tecnologia 3D Gemas: visualização de projetos virtuais de lapidação, p. 53–76.



## APÊNDICE A RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS

Os resultados obtidos com as abordagens são apresentados nas Tabelas A.1, A.2 e A.3. A Tabela A.1 apresenta o aproveitamento no melhor caso, para cada instância avaliada, relatando qual o modelo que obteve o melhor resultado para a instância.

As Tabelas A.2 e A.3 apresentam os resultados obtidos para os modelos de lapidação redondo e oval, respectivamente. As tabelas apresentam a seguinte nomenclatura. A coluna " $S_0$ " apresenta o valor médio da solução inicial obtida pelos métodos para a instância. Enquanto as colunas "Max" e "Méd" apresentam, respectivamente, o maior aproveitamento encontrado e a média do aproveitamento volumétrico obtido. A coluna "DR" indica o desvio relativo médio, e "DP" o desvio padrão médio. Por fim, a coluna "t(s)" apresenta o tempo médio em segundos.

Tabela A.1: Resultados computacionais para o aproveitamento no melhor caso.

Inst.	Volume	AG			C-GRASP		
		Otim.	Apt(%)	Modelo	Otim.	Apt(%)	Modelo
1	1787,88	764,14	42,74	Oval	762,84	42,67	Oval
2	1854,32	753,23	40,62	Oval	766,53	41,34	Redondo
3	1504,53	641,67	42,65	Redondo	641,09	42,61	Redondo
4	2393,32	944,29	39,46	Oval	897,45	37,50	Oval
5	2283,41	836,36	36,63	Oval	849,11	37,19	Oval
6	1828,07	742,36	40,61	Oval	754,70	41,28	Oval
7	1554,31	631,82	40,65	Redondo	634,53	40,82	Redondo
8	1680,38	642,06	38,21	Oval	675,85	40,22	Oval
9	1497,82	546,90	36,51	Oval	532,98	35,58	Oval
10	1947,31	715,54	36,74	Oval	728,71	37,42	Oval
11	2093,46	865,00	41,32	Redondo	866,77	41,40	Redondo
12	2170,07	805,43	37,12	Oval	801,86	36,95	Oval
13	2155,25	807,15	37,45	Oval	814,81	37,81	Oval
14	2528,77	991,53	39,21	Oval	999,43	39,52	Oval
15	1550,86	565,94	36,49	Oval	571,41	36,84	Oval
16	1896,95	682,18	35,96	Oval	666,58	35,14	Oval
17	2241,57	802,01	35,78	Oval	823,17	36,72	Oval
18	1836,31	718,54	39,13	Oval	699,02	38,07	Oval
19	2070,24	831,65	40,17	Redondo	842,53	40,70	Redondo
20	2056,50	837,47	40,72	Redondo	855,20	41,59	Redondo
21	1721,78	637,43	37,02	Redondo	640,42	37,20	Redondo
22	1689,01	660,12	39,08	Redondo	660,25	39,09	Redondo
23	1380,94	517,56	37,48	Oval	556,85	40,32	Redondo
24	1511,42	542,53	35,90	Oval	567,92	37,58	Oval
25	1514,94	582,57	38,46	Oval	583,44	38,51	Oval
26	2560,60	1012,52	39,54	Oval	1027,27	40,12	Oval
27	1969,40	690,79	35,08	Oval	747,02	37,93	Oval
28	1737,80	618,98	35,62	Redondo	624,76	35,95	Redondo
29	1614,50	615,25	38,11	Redondo	649,10	40,20	Redondo
30	2512,20	868,09	34,56	Oval	890,38	35,44	Oval
31	2515,39	936,23	37,22	Oval	969,65	38,55	Oval
32	2228,17	981,88	44,07	Oval	1004,18	45,07	Oval
33	2268,65	822,87	36,27	Oval	828,90	36,54	Oval
34	1841,19	686,73	37,30	Oval	668,12	36,29	Oval
35	2324,72	842,56	36,24	Redondo	845,55	36,37	Redondo
36	2471,59	1069,57	43,27	Oval	1077,74	43,61	Oval
37	2608,64	1005,03	38,53	Redondo	1017,66	39,01	Redondo
38	2148,76	968,04	45,05	Oval	993,34	46,23	Oval
39	1776,89	624,36	35,14	Oval	636,19	35,80	Oval
40	2199,31	850,10	38,65	Oval	848,70	38,59	Oval
41	2338,78	869,86	37,19	Oval	975,17	41,70	Oval
42	2104,95	888,24	42,20	Oval	914,50	43,45	Oval
43	2174,34	773,94	35,59	Oval	775,57	35,67	Oval
44	1579,98	661,97	41,90	Redondo	697,47	44,14	Redondo
45	2325,80	836,40	35,96	Redondo	837,26	36,00	Redondo
46	1421,02	548,09	38,57	Oval	533,06	37,51	Oval
47	1543,97	665,81	43,12	Redondo	663,40	42,97	Redondo
48	1486,10	524,14	35,27	Oval	543,74	36,59	Oval
49	2313,15	935,39	40,44	Oval	942,87	40,76	Oval
50	2229,24	884,69	39,69	Oval	873,43	39,18	Oval
		<b>Média:</b> 38,61			<b>Média:</b> 39,15		



Tabela A.2: Resultados computacionais para o modelo de lapidação Redondo. Melhores resultados destacados em negrito

Inst.	$S_0$	Max	AG				GRASP			
			Méd.	D.R.	D.P.	t(s)	Méd.	D.R.	D.P.	t(s)
1	2,27	39,78	<b>39,69</b>	0,23	0,06	114	39,51	0,67	0,15	124
2	1,20	41,48	40,25	2,96	2,09	119	<b>41,34</b>	0,34	0,08	135
3	0,33	43,15	<b>42,65</b>	1,16	0,35	108	42,61	1,25	0,33	116
4	1,93	36,93	35,15	4,81	3,36	151	<b>36,72</b>	0,58	0,18	168
5	2,70	36,36	<b>36,31</b>	0,14	0,04	136	36,12	0,65	0,25	153
6	0,55	37,71	37,62	0,24	0,02	115	<b>37,63</b>	0,20	0,06	129
7	3,66	40,9	40,65	0,61	0,15	103	<b>40,82</b>	0,19	0,03	108
8	1,75	33,38	32,82	1,66	1,47	102	<b>33,02</b>	1,08	0,12	121
9	1,30	35,45	34,45	2,81	0,98	99	<b>34,81</b>	1,80	0,33	110
10	0,77	36,02	34,02	5,56	1,94	122	<b>35,96</b>	0,17	0,01	140
11	1,60	41,51	41,32	0,46	0,42	140	<b>41,40</b>	0,26	0,04	154
12	2,24	35,58	34,55	2,89	0,73	136	<b>35,47</b>	0,31	0,07	162
13	1,15	32,87	31,88	3,02	0,73	138	<b>32,73</b>	0,43	0,07	155
14	2,27	36,55	<b>36,42</b>	0,35	0,07	144	36,27	0,77	0,42	177
15	2,14	32,89	32,25	1,95	1,23	100	<b>32,75</b>	0,42	0,19	107
16	1,65	34,35	33,08	3,70	1,21	123	<b>34,28</b>	0,22	0,03	132
17	0,79	34,49	32,65	5,33	2,20	128	<b>34,32</b>	0,51	0,12	138
18	1,95	36,61	<b>36,50</b>	0,29	0,11	115	35,72	2,43	1,27	123
19	0,31	40,9	40,17	1,78	1,96	129	<b>40,70</b>	0,50	0,12	144
20	2,28	41,62	40,72	2,16	2,56	125	<b>41,59</b>	0,08	0,01	140
21	1,70	37,34	37,02	0,85	0,40	122	<b>37,20</b>	0,39	0,06	143
22	3,32	39,14	39,08	0,14	0,05	114	<b>39,09</b>	0,13	0,02	127
23	4,10	40,39	35,94	11,02	2,14	101	<b>40,32</b>	0,16	0,03	104
24	2,24	36,12	35,60	1,44	0,58	104	<b>36,08</b>	0,11	0,02	110
25	0,38	36,84	36,71	0,35	0,06	104	<b>36,73</b>	0,29	0,07	112
26	2,55	31,75	30,81	2,95	0,63	139	<b>31,39</b>	1,12	0,26	170
27	2,12	33,87	33,32	1,62	0,57	122	<b>33,73</b>	0,41	0,11	136
28	2,44	36,03	35,62	1,14	0,18	118	<b>35,95</b>	0,22	0,04	135
29	0,94	40,28	38,11	5,39	3,24	102	<b>40,20</b>	0,19	0,03	109
30	2,59	34,26	32,77	4,35	0,85	139	<b>33,51</b>	2,19	0,40	166
31	5,58	37,37	36,95	1,12	1,08	151	<b>37,22</b>	0,39	0,16	175
32	1,16	41,26	<b>41,21</b>	0,12	0,03	138	41,10	0,40	0,13	157
33	2,08	34,18	33,97	0,62	0,17	141	<b>34,02</b>	0,45	0,05	164
34	0,58	34,19	33,73	1,34	0,74	117	<b>33,76</b>	1,26	0,27	127
35	2,59	36,44	36,24	0,54	0,20	132	<b>36,37</b>	0,19	0,05	158
36	1,25	40,91	40,84	0,16	0,03	144	<b>40,88</b>	0,07	0,02	175
37	5,21	39,06	38,53	1,36	1,05	147	<b>39,01</b>	0,12	0,04	177
38	3,21	43,51	43,27	0,56	0,18	130	<b>43,34</b>	0,39	0,10	151
39	2,05	35,94	34,58	3,80	1,44	114	<b>35,78</b>	0,44	0,13	122
40	3,32	32,22	<b>32,16</b>	0,18	0,05	139	31,62	1,86	0,18	159
41	0,48	33,89	<b>33,30</b>	1,75	0,95	133	33,08	2,40	0,59	154
42	0,32	36,92	36,44	1,31	0,63	130	<b>36,81</b>	0,29	0,08	152
43	1,58	34,44	<b>34,06</b>	1,11	0,62	127	33,79	1,90	0,35	155
44	0,71	44,43	41,90	5,70	4,85	115	<b>44,14</b>	0,64	0,10	128
45	1,47	36,09	35,96	0,36	0,05	125	<b>36,00</b>	0,25	0,07	140
46	0,41	37,23	36,46	2,06	1,13	112	<b>36,77</b>	1,24	0,12	99
47	4,94	43,19	<b>43,12</b>	0,16	0,07	101	42,97	0,52	0,15	118
48	1,66	31,58	31,10	1,52	0,79	102	<b>31,42</b>	0,52	0,08	111
49	1,90	36,67	36,58	0,25	0,03	136	<b>36,62</b>	0,15	0,03	151
50	2,80	36,52	<b>35,97</b>	1,52	1,05	133	35,66	2,35	0,84	155
	1,97	37,21	36,49	1,94	0,91	124	<b>36,97</b>	<b>0,68</b>	<b>0,17</b>	140

Tabela A.3: Resultados computacionais para o modelo de lapidação Oval. Melhores resultados destacados em negrito.

Inst.	$S_0$	Max	AG				GRASP			
			Méd.	D.R.	D.P.	t(s)	Méd.	D.R.	D.P.	t(s)
1	2,16	43,07	<b>42,74</b>	0,77	0,17	124,96	42,67	0,93	0,30	146,94
2	0,70	41,19	<b>40,62</b>	1,38	0,77	130,63	40,21	2,38	0,94	156,61
3	2,78	42,03	40,92	2,65	0,86	118,78	<b>41,05</b>	2,34	0,66	135,59
4	0,78	41,19	<b>39,46</b>	4,21	2,90	171,03	37,50	8,96	1,36	189,93
5	1,89	37,71	36,63	2,87	0,87	146,71	<b>37,19</b>	1,39	0,32	178,70
6	1,19	41,93	40,61	3,15	1,60	126,79	<b>41,28</b>	1,54	0,63	148,48
7	1,41	38,75	<b>38,32</b>	1,12	0,28	111,26	<b>38,56</b>	0,48	0,20	124,84
8	0,89	40,57	38,21	5,82	3,13	117,34	<b>40,22</b>	0,86	0,31	144,91
9	0,70	37,12	<b>36,51</b>	1,64	0,62	109,48	35,58	4,14	0,52	127,44
10	1,46	37,85	36,74	2,92	0,47	136,74	<b>37,42</b>	1,13	0,20	161,16
11	1,08	38,56	37,95	1,57	0,45	152,91	<b>38,38</b>	0,46	0,16	178,29
12	1,76	38,3	<b>37,12</b>	3,09	1,44	149,17	36,95	3,52	0,15	189,64
13	1,16	38,08	37,45	1,65	0,36	153,00	<b>37,81</b>	0,72	0,24	183,01
14	0,91	39,69	39,21	1,21	0,12	158,64	<b>39,52</b>	0,42	0,09	208,06
15	2,90	37,12	36,49	1,69	0,16	109,30	<b>36,84</b>	0,74	0,19	124,41
16	0,98	36,52	<b>35,96</b>	1,53	1,22	133,60	35,14	3,78	1,28	152,84
17	1,40	37	35,78	3,30	0,92	140,27	<b>36,72</b>	0,75	0,22	162,70
18	0,51	39,48	<b>39,13</b>	0,89	0,19	129,51	38,07	3,58	0,55	147,43
19	0,79	39,87	39,46	1,02	0,15	142,64	<b>39,65</b>	0,56	0,17	167,32
20	0,99	42,23	40,32	4,52	2,35	135,82	<b>40,52</b>	4,06	1,01	160,60
21	0,13	37,04	35,30	4,70	1,12	148,97	<b>36,55</b>	1,32	0,50	165,81
22	1,85	37,05	36,22	2,25	0,60	123,77	<b>36,87</b>	0,49	0,17	144,35
23	1,16	38	<b>37,48</b>	1,37	0,78	113,79	37,22	2,06	0,66	121,52
24	1,43	37,8	35,90	5,04	1,31	114,52	<b>37,58</b>	0,59	0,11	128,15
25	2,49	38,84	38,46	0,99	0,13	115,57	<b>38,51</b>	0,84	0,22	129,64
26	1,45	40,17	39,54	1,56	0,60	154,65	<b>40,12</b>	0,13	0,02	199,00
27	0,78	38,38	35,08	8,61	2,47	134,03	<b>37,93</b>	1,17	0,32	158,89
28	2,22	35,54	33,69	5,21	0,28	127,80	<b>34,56</b>	2,76	0,57	155,08
29	0,38	39,66	37,45	5,57	1,24	114,61	<b>39,56</b>	0,25	0,06	126,33
30	2,15	36,97	34,56	6,53	1,53	150,07	<b>35,44</b>	4,13	0,93	190,94
31	3,16	38,62	37,22	3,62	1,41	165,88	<b>38,55</b>	0,19	0,03	203,31
32	0,94	45,35	44,07	2,83	2,74	149,57	<b>45,07</b>	0,62	0,43	181,76
33	2,73	36,85	36,27	1,57	0,90	155,56	<b>36,54</b>	0,85	0,14	192,63
34	0,38	37,78	<b>37,30</b>	1,28	0,44	130,98	36,29	3,95	0,60	146,56
35	2,64	36,6	35,16	3,93	0,62	144,91	<b>36,24</b>	0,99	0,14	181,86
36	2,17	43,68	43,27	0,93	0,19	161,21	<b>43,61</b>	0,17	0,04	203,71
37	1,75	38,7	37,84	2,23	0,91	163,63	<b>38,55</b>	0,38	0,03	205,49
38	0,53	46,39	45,05	2,89	1,95	143,94	<b>46,23</b>	0,35	0,12	177,20
39	0,75	36,15	35,14	2,80	0,41	126,67	<b>35,80</b>	0,96	0,29	141,11
40	1,03	39,14	<b>38,65</b>	1,24	0,63	153,63	38,59	1,41	0,24	186,46
41	0,90	41,83	37,19	11,09	1,38	149,05	<b>41,70</b>	0,32	0,13	184,28
42	0,73	43,63	42,20	3,28	0,35	144,75	<b>43,45</b>	0,42	0,12	179,99
43	1,67	36,54	35,59	2,59	0,10	145,16	<b>35,67</b>	2,38	0,43	177,35
44	2,62	41,8	39,58	5,30	3,20	126,40	<b>40,37</b>	3,43	1,26	149,00
45	0,62	35,01	34,51	1,43	0,12	135,00	<b>34,89</b>	0,34	0,04	162,31
46	0,52	39,19	<b>38,57</b>	1,58	0,29	103,65	37,51	4,28	0,73	116,49
47	0,87	41,33	40,96	0,89	0,47	111,46	<b>41,08</b>	0,60	0,25	135,98
48	2,58	37,11	35,27	4,96	1,39	112,50	<b>36,59</b>	1,41	0,64	130,36
49	2,06	40,86	40,44	1,03	0,14	150,49	<b>40,76</b>	0,24	0,05	174,41
50	3,60	40,65	<b>39,69</b>	2,37	1,29	146,78	39,18	3,62	0,70	182,19
	1,45	39,30	38,15	2,93	0,96	<b>136,35</b>	<b>38,65</b>	<b>1,67</b>	<b>0,39</b>	162,42

## APÊNDICE B PUBLICAÇÕES REFERENTES À DISSERTAÇÃO

- SILVA, Victor Billy; RITT, Marcus; CARVALHO, João Batista da Paz; BRUSSO, Marcos José; SILVA, Juliano Tonezer; ZANATTA, Alexandre Lazaretti. *A real-valued genetic algorithm for gemstone cutting*. 2012. XXXVIII Conferencia Latinoamericana En Informatica.
- SILVA, Victor Billy; RITT, Marcus; CARVALHO, João Batista da Paz; BRUSSO, Marcos José; SILVA, Juliano Tonezer; ZANATTA, Alexandre Lazaretti. *Identificação da maior elipse em um polígono não convexo através do continuous grasp*. 2012. Revista Brasileira de Computação Aplicada.
- SILVA, Victor Billy; RITT, Marcus; CARVALHO, João Batista da Paz; BRUSSO, Marcos José; SILVA, Juliano Tonezer; ZANATTA, Alexandre Lazaretti. *Algoritmo heurístico utilizando GRASP Contínuo para a otimização do aproveitamento volumétrico de gemas de cor*. 2012. II Mostra de resultados de pesquisas aplicadas ao Arranjo Produtivo de Gemas e Joias do Rio Grande do Sul. Porto Alegre:IGEO/UFRGS.
- FITZ, Jonas Fernando Cecon; SILVA, Juliano Tonezer; BRUSSO, Marcos José; SILVA, Victor Billy; IPAR, Carlos Edmundo de Abreu e Lima. *Comparativo entre os modelos de lapidação praticados em Soledade/RS e os sugeridos pela Tecnologia 3D Gemas*. 2011. Anais do 2º Seminário de Gemologia e Design Sustentável (Belo Horizonte).