

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

---

**Transição Coerência-Incoerência em Interações Não Lineares  
de Tripleto de Ondas com Banda Larga\***

Marcos Frichembruder

---

Tese realizada sob orientação do Professor Dr. Felipe Barbedo Rizzato e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

Março, 2005

---

\*Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Para Rô, com amor

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os que colaboraram, direta ou indiretamente, para a conclusão deste trabalho de tese. Quero agradecer, em especial, ao meu orientador, Felipe Rizzato, cujo apoio e auxílio foi, em vários momentos, essencial. Pelas reuniões de grupo, que levaram a troca de idéias e a novas abordagens, extendo meus agradecimentos ao Renato Pakter e ao Gunther. Por um apoio e suporte em questões computacionais, agradeço, novamente, ao Gunther e ao Felipe. Ao Irapuã fico, também, grato, pois me forneceu o estilo de tese que usei. Quanto a questões pessoais, nunca esquecerei do apoio da Eliane, do Regis, dos meus pais e, principalmente, da Rô, em quem sempre pude confiar. Por fim, agradeço ao CNPq, que financiou este projeto.

Marcos Frichembruder

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul*

*Março 2005*

# Resumo

Nesta tese, investigamos a interação não linear entre tripletos de ondas, segundo a perspectiva das equações de Zakharov. Analisamos, em primeiro lugar, o triplete puro, estudando a influência do caos na coerência da interação de três ondas que apresentam descasamento de frequência angular. O caos torna-se proeminente, quando as aproximações adiabáticas, que levam a um modelo integrável, deixam de ser válidas. Nos regimes regulares, onde a intensidade dos campos é suficientemente baixa, há um valor de bifurcação para a defasagem entre as frequências do triplete, abaixo do qual a coerência e o sincronismo das fases são dominantes. Nos regimes caóticos, por outro lado, não há tal valor de bifurcação e o sincronismo entre as fases não pode mais ser observado.

A seguir, analisamos o papel do caos e de efeitos de não equilíbrio dinâmico, na interação de três grupos de ondas, cada qual com muitos modos. O modelo democrático apresentado, é uma extensão da interação entre um triplete puro, onde muitos modos são adicionados a cada um dos três modos do triplete, de modo a simular um espectro de banda larga. Incluímos características não integráveis, resultantes da presença de derivadas de ordem mais alta em um dos grupos envolvidos, e estudamos efeitos de não equilíbrio, os quais são gerados quando o correspondente triplete puro apresenta intensa troca de energia. Com simulações e estimativas, mostramos que, em relação ao critério de transição do caso adiabático e estacionário, a presença do caos e dos efeitos de não equilíbrio reduzem substancialmente a coerência das ondas.

Finalmente, introduzimos um modelo no qual é imposta uma regra de seleção ressonante sobre os termos não lineares das equações que governam a interação entre um triplete de pacotes de onda de banda larga. Restringindo-nos às aproximações adiabáticas, analisamos a transição da coerência para a incoerência, usando estimativas analíticas e simulações. Como regra geral, termos não lineares induzem à coerência através do processo de acoplamento das fases. Contudo, em contraste com o modelo democrático, as não linearidades provocam alargamento dos pacotes. A excitação de modos ressonantes detém o alargamento dos pacotes e destrói a coerência, implicando num critério de transição equivalente ao do modelo democrático.

# Abstract

In this thesis we investigate the non-linear interaction of a wave triplet in the context of the Zakharov equations. We first analyze the influence of chaos on the coherence of the mismatched pure three-wave interaction. Chaos becomes prominent when adiabatic approximations leading to an integrable model for the system cease to be valid. In regular regimes where the field levels are sufficiently small, there is a characteristic value for the frequency mismatch of the triplet below which coherence and phase locking are dominant. In chaotic regimes, on the other hand, there is no such value and phase synchronism can no longer be observed.

We then analyze the role of chaos and nonequilibrium dynamical effects in the interaction of three groups of waves with many modes each. The democratic model presented is a refined model of the pure triplet interaction where many modes are added to each of the three single modes of the triplet in order to simulate broad-band spectra. We include nonintegrable features resulting from the presence of higher-order time derivatives in one of the groups involved, and study nonequilibrium effects, which are generated when the underlying pure triplet undergoes intense energy exchange. With simulations and estimates we show that the presence of chaos and nonequilibrium effects reduces substantially wave coherence, in comparison to the criterion of transition of the stationary adiabatic case.

Finally, it is introduced a model where resonant wave vector selection rules are imposed on the nonlinear terms of the governing equations of a broad-band triplet interaction. Under the adiabatic approximation we analyze the transition from coherence to incoherence, using analytical estimates and simulations. As a general rule, nonlinear terms induce coherence via a phase-locking process. However, in contrast to the democratic model, wave vector spread results from nonlinearity. The excitation of resonant modes arrests wave vector spread and destroys the coherence, implying in a transition criteria that is equivalent to the one obtained for the democratic model.

# Sumário

Agradecimentos . . . . .	i
Sumário . . . . .	iv
Lista de Figuras . . . . .	vi
<b>1 Introdução . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Os modos lineares de um plasma não magnetizado . . . . .	2
1.2 O acoplamento não linear de ondas e as equações de Zakharov . . . . .	4
1.3 Introdução aos capítulos . . . . .	7
<b>2 A Equação de Zakharov e o Tripleto Monocromático . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1 As equações de Zakharov e a aproximação adiabática . . . . .	12
2.2 A solução analítica da aproximação adiabática . . . . .	19
2.3 A dinâmica completa na quebra da aproximação modulacional . . . . .	20
2.4 Incoerência e a fração de escape $f$ . . . . .	26
2.5 Conclusões do capítulo . . . . .	28
<b>3 O Tripleto de Pacotes em Campo Médio . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1 O modelo de interações democráticas . . . . .	34
3.2 Coerência segundo a aproximação de modo teste . . . . .	38
3.3 Modo teste na aproximação adiabática . . . . .	39
3.4 Simulações do sistema adiabático . . . . .	42
3.5 Simulações do sistema completo . . . . .	45
3.6 Conclusões do capítulo . . . . .	48
<b>4 O Tripleto com Interações Seletivas . . . . .</b>	<b>54</b>
4.1 Acoplamento Seletivo de Modos . . . . .	55

4.2	O Caso de velocidades de grupo idênticas . . . . .	61
4.3	Simulações de ondas . . . . .	66
4.4	Conclusões do capítulo . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>73</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>81</b>

# Lista de Figuras

2.1	Espaço de fase da dinâmica do tripleto adiabático com constantes de Manley-Rowe $\mathcal{A} = 0, 1 = \mathcal{B}$ , e defasagens angulares $\Omega = 0, 0, 0, 4, -0, 4$ .	18
2.2	A condição na qual o ponto estacionário da função $g(r, \varphi)$ tangencia o eixo $r$ , para um dado $\varphi$ fixo, determina um ponto da curva que delimita a região acessível à dinâmica completa (não modulacional) com condição inicial de decaimento. . . . .	24
2.3	Curvas limites e mapas de Poincaré gerados pela Hamiltoniana completa, Eq.(2.47), com $\omega_3 = 1, B = A$ . (a) $\Omega = 0$ e $A = 3$ . (b) $\Omega = -0, 4$ e $A = 3$ . (c) $\Omega = 0, 5$ e $A = 3$ . (d) $\Omega = 0, 5$ e $A = 0, 55$ . . . . .	30
2.4	(a) Fração $f$ de estados que permanecem em $\mathcal{R}_0$ após um intervalo de tempo $t$ , dadas 5000 condições iniciais uniformemente distribuídas em $\varphi = \pi$ . (b) $\varphi(t)$ contra $t$ com três condições iniciais $\varrho_1 = A/1, 1, A/3$ e $A/10$ , com $\omega_3 = 1, A = 3$ e $\Omega = 0, 5$ . (c) em menor escala de tempo, $\varphi(t)$ contra $t$ para a condição inicial $\varrho_1 = A/3$ , note-se os saltos na fase relativa. . . . .	31
3.1	Valores assintóticos de $b$ contra $\rho(0)/A$ , calculados a partir do sistema adiabático. Tempo de simulação, $T = 10^5$ . . . . .	44
3.2	Espaço de fase do modo mais externo ( $1, q = n$ ) obtido de simulações do sistema adiabático. Em (a) e (b) $A = 10$ e $\rho(0) = 0, 9A$ , com (a) obtido por simulação do modo teste e (b) por simulação autoconsistente. Em (c) e (d) $A = 0, 04$ e $\rho(0) = 0, 9A$ , com (c) obtido por simulação do modo teste e (d) por simulação autoconsistente. A diferença de fase entre o modo mais externo e o central, $\Delta\phi_{1n}$ , está em radianos. . . . .	45
3.3	Mapas de Poincaré para a dinâmica do tripleto monocromático segundo o sistema de equações completo, não adiabático. Em (a) $A = 0, 1$ e $\rho(0) = 0, 7A$ , em (b) $A = 10$ e $\rho(0) = 0, 9A$ , $\phi$ em radianos. . . . .	50



3.4	<p>Comparação envolvendo os sistemas adiabático e completo. Valores assintóticos de <math>b</math> contra <math>\rho(0)/A</math> para <math>A = 0,04</math> em (a) e para <math>A = 10</math> em (b). No ítem (c) tem-se o mapa do diagrama de fase do modo mais à direita do primeiro pente, obtido por simulação auto-consistente do sistema completo, onde <math>A = 10</math> e <math>\rho(0) = 0,9A</math>. <math>\Delta\phi_{1n}</math> em radianos, tempo de simulação=<math>10^5</math>. . . . .</p>	51
3.5	<p>Ítem (a), taxa <math>R</math> obtida dos sistemas adiabático e completo. Ítem (b), valor assintótico de <math>R_q</math> contra <math>q</math> em um tempo <math>T = 2 \times 10^5</math> conforme o sistema adiabático. Ítem (c), valor assintótico de <math>R_q</math> contra <math>q</math> em um tempo <math>T = 2 \times 10^5</math> conforme o sistema completo. . . . .</p>	52
3.6	<p>Dinâmica relativa normalizada para o modo mais externo à direita do modo central conforme a simulação auto-consistente do sistema completo. Caso de campos extremamente elevados, <math>A = 10^3</math> e <math>\rho(0)/A = 0,9</math>. <math>\Delta\phi_{1n}</math> em radianos. . . . .</p>	53
4.1	<p>(a) Valor absoluto da amplitude transformada <math> a(k, t) </math> em função do tempo e do número de onda. Vê-se claramente o alargamento da onda. (b) comparação entre a parte real da função <math>a_{analitica}</math>, obtida pelo método da fase estacionária, e as partes reais dos modos simulados <math>a_{1j=1}</math> e <math>a_{1j=[k_d/k_b]}</math>. Na segunda amplitude <math>[k_d/k_b]</math> é a parte inteira da razão entre o vetor tomado como extremo do pente <math>k_d</math> e o vetor de base <math>k_b</math>. Os dois modos acabam por acoplar-se, seguindo o comportamento de <math>a_{analitica}</math>. Em ambos os ítems a velocidade de grupo é <math>v_{g1} = 0</math>. . . .</p>	71
4.2	<p>(a) Valor absoluto da amplitude transformada <math> a(k, t) </math> em função do tempo e do número de onda. O alargamento regular nos vetores de onda é interrompido pela ressonância. (b) Comparação entre as partes reais dos modos simulados <math>a_{1j=1}</math>, <math>a_{1j=[k_r/k_b]}</math> e <math>a_{1j=[k_d/3k_b]}</math>. Na segunda amplitude <math>[k_r/k_b]</math> é a parte inteira da razão entre o vetor onda ressonante <math>k_r</math> e o vetor de base <math>k_b</math>, na terceira amplitude <math>[k_d/3k_b]</math> é a parte inteira da razão entre o terço do vetor de onda tomado como extremo do pente <math>k_d</math> e o vetor de base <math>k_b</math>. No ítem (b) tem-se <math>v_{g1} = 0,1</math> e observa-se o desacoplamento das fases, causada pelo excitação do modo ressonante. (c) Mesma coisa que em (b), agora com <math>v_{g1} = 0,05</math>. . . .</p>	72

# Capítulo 1

## Introdução

Esta tese trata da interação não linear de tripletos de ondas, no contexto das equações de Zakharov. A interação entre tripletos é uma das mais significativas formas de interação entre sistemas de ondas, nela encontrando-se as características não lineares mais proeminentes presentes em sistemas de ondas. Tal interação pode surgir em várias versões, sendo que, nesta tese, examinaremos o regime conservativo. Portanto, desprezaremos possíveis amortecimentos das ondas a serem consideradas. Há vários sistemas físicos que podem ser modelados pela interação conservativa de tripletos, tendo-se, como exemplos mais importantes, a instabilidades de decaimentos em interações entre laser e plasma e a interação de três modos em sistemas óticos não lineares, SHUKLA et al. (1986), KIVSHAR & MALOMED (1989), CHIAN & ALVES (1988), GRATTON et al. (1997) FRICHEMBRUDER et al. (2000).

O tripleto puro clássico, ao qual nos referiremos mais adiante nesta introdução e que consiste num dos objetos principais do Cap.2, pode ser totalmente integrado e os modos, nele envolvidos, desenvolvem uma troca periódica de energia entre si. Uma questão, que é tópico de pesquisa, diz respeito à preservação, ou não, deste tipo de periodicidade quando cada um dos modos únicos do tripleto é substituído por um estreito pacote de ondas. Se a multitude de modos em cada pacote evolui coerentemente, como se fossem modos idênticos, podemos esperar que a periodicidade esteja presente. Por outro lado, quando a coerência é perdida, é de se esperar que os modos do pacote evoluam de um modo mais complicado. A primeira situação é conhecida como o regime de fase fixa da interação não linear e a segunda é conhecida como regime de fases randômicas. Dado um problema físico, é comum que se tome uma abordagem “a priori”, baseada nas condições dadas, na qual utiliza-se exclusivamente ou a abordagem de fase fixa ou a de fase randômica.

Um dos primeiros trabalhos a tratar da transição entre coerência e incoerência foi feito utilizando-se o método dos operadores de projeção, MARTINS & MENDONÇA (1985). A presente tese, desenvolve-se no contexto do método do modo teste, utilizado em ROBINSON & DRYSDALE (1996), onde foi definido o critério para a coerência de um tripleto de pacotes que, num estado estacionário, interage via campo médio. Seguimos esta abordagem, extendendo o método de modo teste para a interação de decaimento de um tripleto de ondas e, também, para a dinâmica caótica, própria às equações de Zakharov, de OLIVEIRA et al. (2002). A análise da dinâmica caótica do tripleto de ondas se dá como uma extensão de de OLIVEIRA et al. (1997), onde estudou-se a dinâmica de um tripleto puro, que contém apenas três modos. Além destes dois aspectos originais, introduzimos um modelo no qual a interação do tripleto de pacotes se dá, não por campo médio, mas sim através de termos não lineares, formados por modos ressonantes, FRICHEMBRUDER et al. (2005).

O principal objetivo desta tese é o de examinar a transição do regime de fase fixa para o de fase randômica. Procuraremos desenvolver critérios, baseados em parâmetros de bifurcação, que nos indiquem quando esta transição ocorre. Para tanto, definiremos quantidades que nos fornecerão uma diagnose dos pacotes, tanto no comportamento médio destes, quanto no comportamento individualizado de determinados modos dos pacotes. Nossa motivação maior reside, portanto, na caracterização de estados coerentes e incoerentes dos pacotes.

## 1.1 Os modos lineares de um plasma não magnetizado

Nesta introdução vamos abordar o tema da interação de tripletos sob a perspectiva da física de plasmas, apresentando uma discussão heurística das equações de Zakharov. Especificamente, nosso meio consistirá em um plasma não magnetizado e completamente ionizado, no qual elétrons e íons possuem distribuição de velocidade próxima ao equilíbrio térmico. Portanto, consideraremos processos nos quais o plasma está próximo à distribuição de Maxwell-Boltzmann. Sob as condições especificadas para o plasma, este suporta três modos lineares fracamente amortecidos: ondas de Langmuir ( $L$ ), íon-acústicas ( $I$ ) e ondas eletromagnéticas transversais ( $T$ ). A física de fluidos nos fornece as relações de dispersão,  $\omega_M = \omega_M(k)$ , destes modos,  $M = L, I, T$ . Para

o modo de Langmuir, a relação de dispersão toma a forma,

$$\begin{aligned}\omega_L &\approx \omega_p \left(1 + 3k^2\lambda_D^2/2\right), \\ &\approx \omega_p + \frac{3}{2}k^2\frac{V_e^2}{\omega_p}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Há uma série de parâmetros na equação acima. A frequência de plasma é dada por,

$$\omega_p^2 = N_e e^2 / m_e \epsilon_0, \quad (1.2)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo,  $N_e$  é a densidade numérica de elétrons, sendo  $e$  e  $m_e$ , respectivamente, a carga e a massa do elétron. O comprimento de Debye é tal que,  $\lambda_D = V_e/\omega_p$ , onde  $V_e = (k_B T_e/m_e)^{1/2}$  é a velocidade térmica dos elétrons, sendo  $T_e$  a temperatura da distribuição eletrônica e  $k_B$  a constante de Boltzmann. Para a relação de dispersão das ondas íon-acústicas, tem-se

$$\omega_I = kv_s, \quad (1.3)$$

onde tem-se a velocidade do som no plasma, a qual é  $v_s = \sqrt{\gamma m_e/m_i} V_e$ , sendo  $\gamma = 1 + 3T_i/T_e$  a razão entre os calores específicos do plasma,  $m_q$  e  $T_q$ , indicando massa e temperatura eletrônicas, para  $q = e$ , e iônica, para  $q = i$ . Para as ondas eletromagnéticas transversais a relação de dispersão é dada por,

$$\omega_T = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}, \quad (1.4)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo. As ondas transversais não são amortecidas em um plasma não magnetizado e sem colisões, visto que sua velocidade de fase excede à da luz, o que as impede de ressonar com partículas do plasma. Quanto às ondas de Langmuir e íon-acústicas, desprezaremos seus amortecimentos. Para que isto seja possível, é necessário que os modos, envolvidos nestas ondas, encontrem-se suficientemente fora de ressonância com as partículas que constituem o plasma.

Abordaremos o acoplamento não linear dos modos de Langmuir e íon-acústico. Este tipo de acoplamento também ocorre entre ondas eletromagnéticas transversais e ondas íon-acústicas, tema que não será abordado nesta tese.

## 1.2 O acoplamento não linear de ondas e as equações de Zakharov

O índice de refração, em um meio não linear, depende da intensidade das ondas presentes. Com isto, cria-se um possível acoplamento entre ondas, mediante as variações do índice de refração que estas causam. Os modos de Langmuir e eletromagnético transversal dependem, em sua relação de dispersão, da frequência de plasma,  $\omega_p$ , Eq.(1.2). Esta, por sua vez, depende da densidade de elétrons, a qual pode variar devido a um efeito ambipolar, envolvendo a variação da densidade iônica. Tais variações da densidade iônica podem ser produzidas por ondas íon-acústicas, as quais envolvem oscilações, quase em fase, de íons e elétrons. Cria-se, assim, um mecanismo não linear, que acopla ondas de alta frequência, dos modos de Langmuir e transversal, às ondas de baixa frequência do modo íon-acústico. A seguir nos limitaremos a casos envolvendo os modos de Langmuir e íon-acústico, os quais são concernentes a este trabalho.

As equações que descrevem o comportamento de uma onda de Langmuir, em presença de flutuações de densidade de carga, foram deduzidas por ZAKHAROV (1972). Abreviadamente, pode-se obter as chamadas equações de Zakharov a partir de uma argumentação heurística, ROBINSON (1997), na qual a relação de dispersão é generalizada a

$$\omega_L = \omega_p + \frac{3k^2 V_e^2}{2\omega_p} + \frac{\delta N_e}{2N_e} \omega_p, \quad (1.5)$$

onde  $\omega_p$  é a frequência do plasma não perturbado,  $\delta N_e \ll N_e$  é uma pequena perturbação da densidade, supondo-se, ainda,  $(k\lambda_D)^2 \ll 1$ . Chega-se a esta relação de dispersão generalizada, tomando-se, no primeiro termo da Eq.(1.1), uma frequência de plasma com densidade  $N_e + \delta N_e$ . Em seguida este termo é linearizado na flutuação  $\delta N_e$ .

Para ondas próximas à frequência de plasma, o campo elétrico pode ser aproximado por

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} [\vec{E} e^{-i\omega_p t} + \vec{E}^* e^{i\omega_p t}], \quad (1.6)$$

onde  $\vec{E}$  é um envoltório que varia lentamente frente à  $\omega_p$ . A relação de dispersão, Eq.(1.5), é definida no espaço recíproco dos vetores de número de onda,  $\vec{k}$ . Levando-a ao espaço real, pela transformada de Fourier inversa, e aplicando um operador

divergente, chega-se a

$$\nabla \cdot \left( i\partial_t + \frac{3V_e^2}{2\omega_p} \nabla^2 \right) \vec{E} = \nabla \cdot \left( \frac{\omega_p \delta N_e}{2N_e} \vec{E} \right), \quad (1.7)$$

onde  $\partial_t$  indica derivação parcial no tempo. Note-se que a equação aplica-se ao envoltório das ondas de Langmuir, portanto, foram descartadas as componentes de alta frequência, que dizem respeito aos termos harmônicos,  $e^{\pm i\omega_p t}$ , da Eq.(1.6). Esta equação apresenta acoplamento com as perturbações de densidade de carga, sendo que o fator  $\delta N_e \vec{E}$  não é, necessariamente, livre de termos rotacionais. Por isto é que tomamos o divergente da equação, o que garante o caráter eletrostático do modo de Langmuir. A Eq.(1.7) é a primeira das equações de Zakharov. Salientamos que deve-se incluir a componente uniforme do campo eletrostático, o que, leva a uma equação adicional, dada por  $i\partial_t \vec{E}_0 = \omega_p \left( \frac{\delta N_e}{2N_e} \vec{E} \right)_0$ , onde o sub-índice 0, indica o componente  $k = 0$  da transformada de Fourier.

Obtivemos a primeira das equações de Zakharov. Note-se, no entanto, que uma descrição completa do sistema só é obtida com uma equação que determine o comportamento das flutuações do modo íon-acústico, em presença da ondas eletrostáticas. Quanto a isto, um intenso pacote coerente de ondas de Langmuir pode produzir uma depressão na densidade de cargas, via uma força ponderomotriz, a qual fornece a pressão da onda em um caso incoerente. À ordem zero, uma carga  $q$  de massa  $m$ , quando sob ação de tal campo, oscila em torno de uma posição média fixa. Entretanto, quando as não uniformidades do campo são levadas em conta, a posição média desloca-se lentamente para fora do pacote, como se estivesse sob a ação de uma força  $\vec{F}_p$ , LANDAU & LIFSHITZ (1960) e MELROSE (1989), dada por

$$\vec{F}_p = -\frac{q^2}{4m\omega_p^2} \nabla |\vec{E}|^2 \equiv -\nabla \phi_p, \quad (1.8)$$

onde  $\phi_p$  define o potencial da força ponderomotriz. Esta força é muito mais intensa para elétrons do que para íons, devido à dependência inversa na massa. Devido a isto, os elétrons são expelidos para fora do pacote, o que produz um campo elétrico ambipolar que, atuando sob os íons, mantém a quase-neutralidade, ou seja, igualdade das densidades de íons e elétrons à ordem zero. Este efeito indireto sob os íons é um fator  $m_i/m_e$  mais intenso que a força ponderomotriz que atua diretamente sob os íons. Há, portanto, uma aceleração  $\vec{F}_p/m_i$  de todo o plasma contido no pacote.

O divergente da força ponderomotriz entra como um termo na equação de onda íon-acústica linear, pois a força resultante, que atua sob um elemento de volume, depende da variação de  $\vec{F}_p$  ao longo deste volume. Obtem-se, assim, a segunda das equações de Zakharov, dada por

$$\left(\partial_t^2 - v_S^2 \nabla^2\right) \delta N_e = \frac{\epsilon_0}{4m_i} \nabla^2 |\vec{E}|^2 . \quad (1.9)$$

As equações de Zakharov, Eq.(1.7) e (1.9), são frequentemente escritas em forma adimensional, mediante as seguintes mudanças de escala:

$$\vec{r}' \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\alpha} \frac{\vec{r}}{\lambda_D} , \quad (1.10)$$

$$t' \equiv \frac{2}{3} \alpha \omega_p t , \quad (1.11)$$

$$n' \equiv \frac{3}{4\alpha} \frac{\delta N_e}{N_e} , \quad (1.12)$$

$$|\vec{E}'|^2 \equiv \frac{3}{4\alpha} \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{4N_e k_B T_E} , \quad (1.13)$$

onde  $\alpha \equiv (m_e/m_i)$ , e  $\vec{r}'$  denota vetor posição. Para termos uma idéia, o fator  $\alpha$  é aproximadamente igual a  $3,64 \cdot 10^{-4}$ , quando os íons são prótons individuais, sendo ainda menor para outros casos. Note-se, entretanto, que a flutuação da densidade eletrônica,  $n'$ , depende do inverso de alfa,  $1/\alpha \approx 2,75 \cdot 10^3$ . Portanto, deve-se ter atenção nestes termos, visto que esta flutuação normalizada pode tomar valores bem maiores do que normalmente esperaríamos para o que, em geral, chamamos flutuações. Com estas mudanças de escala as equações de Zakharov, Eq.(1.7) e (1.9), omitidos os superíndices, tomam as seguintes formas:

$$\nabla \cdot \left( i\partial_t + \nabla^2 \right) \vec{E} = \nabla \cdot \left( n\vec{E} \right) , \quad (1.14)$$

$$\left( i\partial_t^2 - c_S^2 \right) n = \nabla^2 |\vec{E}|^2 . \quad (1.15)$$

Como já havíamos salientado, deve-se também incluir a equação para o componente uniforme do campo elétrico,  $i\partial_t \vec{E}_0 = (n\vec{E})_0$ . Todas as equações aplicam-se às variáveis reescaladas, conforme as Eq.(1.10)-(1.13), sendo que  $c_S$  é a razão entre a velocidade do som, na temperatura da distribuição de Maxwell-Boltzmann e seu valor para  $T_i = 0$ . Note-se que, devido à razão entre massas,  $1/\alpha = (m_i/m_e)$  o uso

das equações de Zakharov, em sua forma adimensional, Eq. (1.14) e (1.15), não está restrito às condições  $E, n < 1$ .

O presente trabalho, aqui introduzido, trata exclusivamente de fenômenos unidimensionais, o que nos permitirá descartar o divergente aplicado à Eq.(1.15). Assim, no caso unidimensional, onde o campo elétrico,  $\vec{E}$ , reduz-se a um único componente,  $E$ , ficamos com equações de Zakharov adimensionalizadas, dadas por

$$(i\partial_t + \partial_x^2) E = nE , \quad (1.16)$$

$$(i\partial_t^2 - c_S^2 \partial_x^2) n = \partial_x^2 |E|^2 . \quad (1.17)$$

Salientamos, novamente, que os argumentos apresentados não constituem uma dedução das equações de Zakharov. Nosso objetivo, aqui, foi o de contextualizar tais equações , mediante uma apresentação de argumentos heurísticos.

### 1.3 Introdução aos capítulos

No primeiro capítulo desta tese trataremos da dinâmica mais simples que pode ocorrer no contexto das equações de Zakharov. Trata-se do caso onde o tripleto é constituído por três modos puros, os quais interagem, realizando uma troca de energia. Este tripleto puro é constituído por dois modos de Langmuir, que compõem o envoltório eletrostático  $E$ , e por um modo íon-acústico, que compõe a flutuação da densidade de elétrons,  $n$ . Os três modos são dados por harmônicos espaciais, cada um deles com um único número de onda bem definido, os quais modulam-se no tempo; tipicamente na forma  $a_p(t)e^{ik_p x}$ ,  $p = 1, 2$  distinguindo os modos de Langmuir e  $p = 3$  o modo íon-acústico. Trabalharemos sempre na condição de ressonância dos números de onda, de modo que  $k_1 = k_2 + k_3$ . Haverão outras interações , além das ressonantes, as quais poderão ser desprezadas. Tais termos, não ressonantes, permanecerão em nível de ruído.

As formas linearizadas das Eq.(1.16) e (1.17) levam a relações de dispersão, as quais definirão frequências lineares para os três modos,  $\omega_p = \omega_p(k_p)$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Introduziremos, então, um parâmetro de defasagem angular  $\Omega = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ .

Veremos que há dois regimes para o tripleto puro. O modo íon-acústico depende, em sua equação de evolução, de uma derivada de segunda ordem no tempo. Quando esta derivada for lenta frente à de primeira ordem, poderemos aplicar uma aproximação adiabática. Distinguiremos, então, um regime modulacional adiabático



aproximado e outro regime, no qual esta aproximação não é justificável. Satisfeita a condição de derivada segunda lenta, reduziremos a dinâmica adiabática do tripleto a um sistema hamiltoniano com um grau de liberdade. A dinâmica será integrável, envolvendo uma troca periódica de energia entre os modos do tripleto puro. Apresentaremos o diagrama de fases correspondente, o qual dependerá fortemente da defasagem angular  $\Omega$ . A análise dos casos  $\Omega \leq 0$  resultará apenas em estados coerentes, enquanto que, no caso  $\Omega > 0$ , o espaço de fase se subdividirá, de forma regular, numa parte coerente e numa incoerente. A distinção entre estados coerentes e incoerentes se dará no espaço de fase, onde teremos trajetórias rotacionais-coerentes e trajetórias libracionais-incoerentes. A região do entorno da separatriz, entre rotações e librações, corresponde a uma interação de decaimento. Nesta situação, um modo de Langmuir atua como um “pump” que decai, gerando os dois outros modos do tripleto, que principiam em nível de ruído. No Cap.3, daremos especial ênfase à interação de decaimento. Apresentaremos, também, a solução analítica do tripleto puro.

Ainda no Cap.2, concluiremos que o regime adiabático não se sustenta quando as amplitudes dos modos tornam-se elevadas. A condição de modulação lenta deixará de ser justificável e a hamiltoniana passará a depender de dois graus de liberdade. A dinâmica tornar-se-á mais complexa, apresentando um grau de caoticidade crescente com as amplitudes dos modos. A coerência será fortemente influenciada pelo caos, perdendo-se para a maioria das condições iniciais. Amplitudes mais elevadas implicarão em ergodicidade e incoerência em todo o espaço de fase.

No Cap.3, investigaremos o que ocorre quando os três modos puros do tripleto são substituídos por três pacotes de onda com bandas estreitas. Os pacotes terão seus modos discretizados e, a eles, nos referiremos como pentes. Sob certas condições, seremos capazes de expressar as interações envolvidas na forma de um tripleto acoplado por campo médio, o que simplificará o tratamento matemático. Obteremos a aproximação de campo médio, restringindo a região de interação do tripleto a uma largura  $l_{int}$ , muito menor que a dimensão,  $L$ , do sistema físico que contém as ondas. No caso de um plasma, vamos supor que este possui uma não homogeneidade, sendo muito mais denso numa região  $l_{int}$ , dentro da qual, praticamente, estão limitadas as interações dos tripletos. Situação semelhante ocorre, se consideramos ondas de luz incidindo sob um material dielétrico não linear de espessura estreita  $l_{int}$ . Matematicamente, isto implicará no uso de um fator de forma, o qual limitará a região do espaço real, no qual se dão as interações, à  $l_{int}$ .

Analisaremos primeiramente o regime adiabático. Nele, determinaremos critérios para transição entre os estados coerentes e incoerentes, o que será feito mediante um parâmetro de bifurcação. Para tanto, consideraremos um modo teste, sobre o qual atua um campo médio coerente, formado pelos modos que interagem com este modo teste. Abordaremos duas situações : uma, na qual o campo médio coerente é quase estático e outra, na qual o campo médio corresponde a uma interação de decaimento. A diagnose de tais estados será feita introduzindo-se duas grandezas: o “bunching factor” que nos dará uma visão da média dos modos de um pente, e a taxa de quebra de coerência, definida para particulares modos de um pente.

Por fim, investigaremos o caso em que se dá a perda de adiabaticidade dos modos íon-acústicos, o que ocorrerá à medida em que as energias envolvidas crescerem. As características básicas da transição para incoerência serão modificadas. Haverá perda de coerência em situações que, na aproximação adiabática, eram coerentes.

Introduziremos, no Cap.4, o modelo com interações seletivas ressonantes. Neste caso, os acoplamentos não lineares, entre os modos, deverão respeitar um perfeito casamento entre os números de onda. Nesta situação, a região de interação estende-se por toda região física que contém as ondas, de modo que  $l_{int} \rightarrow L$ . Partiremos das equações para evolução do tripleto em campo médio, nas quais faremos duas aproximações, envolvendo as frequências dos modos íon-acústicos. No coeficiente dos termos lineares dos modos íon-acústicos, tomaremos uma expansão em primeira ordem das relações de dispersão, as quais serão expressas em termo das velocidades de grupo dos pentes. No coeficiente dos termos não lineares, desprezaremos a dispersão das frequências. Aplicaremos, então, uma regra de correspondência, que levará as interações de campo médio à forma com interações seletivas ressonantes. Tal correspondência implica, simplesmente, na tomada da transformada de Fourier sem nenhum fator de forma, com a consequente regra de ortogonalidade entre os modos espaciais.

Aplicaremos uma transformada inversa de Fourier, que nos fornecerá as equações de evolução no espaço real. Com as aproximações tomadas, obteremos três equações diferenciais parciais de primeira ordem no tempo e no espaço, com os termos não lineares dados como interações locais. As velocidades de grupo serão parâmetros fundamentais da teoria, constituindo os coeficientes das derivadas espaciais.

Analisaremos, inicialmente, o caso no qual as velocidades de grupo dos três pentes são iguais, o que simplificará, em grande monta, as equações envolvidas. Tomaremos soluções estacionárias, realizando estimativas analíticas mediante o método

da fase estacionária. Com isto, obteremos um critério para a inclusão de novos modos, o que levará ao conseqüente alargamento dos pentes. Distinguiremos, também, um modo ressonante, cuja presença implicará em incoerência dos pentes.

Apresentaremos resultados de simulações, tomando, sempre, velocidades de grupo iguais para os segundo e terceiro pentes. Tais velocidades poderão, então, ser levadas a zero, mediante uma transformação de coordenadas conveniente. Verificaremos a validade dos resultados analíticos, comparando-os com os resultados numéricos do caso no qual a velocidade de grupo do primeiro pente é nula.

Consideraremos, por fim, casos nos quais a velocidade de grupo do segundo pente é distinta de zero, verificando, com simulações numéricas, o critério analítico de ressonância e a perda de coerência.

## Capítulo 2

# A Equação de Zakharov e o Tripleto Monocromático

No presente capítulo iremos estudar a dinâmica de um tripleto monocromático de ondas, segundo as equações de Zakharov. Este tripleto é constituído por dois modos de Langmuir e um modo íon-acústico, todos eles com número de onda bem definido. A evolução do modo íon-acústico depende de derivação de segunda ordem no tempo. Se esta derivada é lenta frente a de primeira ordem, podemos aplicar uma aproximação modulacional adiabática. Com isto, distinguimos dois regimes, um modulacional e outro com a quebra desta aproximação.

Primeiro, iremos analisar o regime modulacional, o qual se reduz a um sistema hamiltoniano com um grau de liberdade e, portanto, integrável. Distinguiremos três casos nos quais a defasagem angular entre as frequências do tripleto,  $\Omega = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ , pode ser nula, positiva ou negativa. Em cada caso será apresentado o espaço de fase relevante. Veremos que o caso de defasagem angular nula é coerente. Nele a fase relativa do tripleto  $\phi$  mantém-se dentro do intervalo  $\mathcal{R}_0$  dado em  $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ . Situação semelhante será observada no caso de defasagem angular negativa, na qual há um incremento na coerência, devido a uma redução do espaço de fase acessível. Teremos transição entre coerência e incoerência apenas quando a defasagem for positiva. Neste caso a fase relativa do tripleto poderá apresentar variações ilimitadas, o que denota incoerência. Veremos, no caso  $\Omega > 0$ , que as órbitas rotacionais (fases desacopladas) se tornam mais numerosas que as libracionais (fases acopladas) desde que  $\Omega > \Omega_{bif} \equiv \mathcal{A}^{1/2}$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma medida da energia total do tripleto de ondas. Apresentaremos, ainda, a solução analítica do caso modulacional.

Em seguida, analisaremos o caso de quebra do regime modulacional. Após uma série de transformações canônicas obteremos uma hamiltoniana com dois graus de liberdade. Nos restringiremos ao processo de decaimento, no qual uma onda eletrostática de Langmuir decai, gerando outra onda eletrostática e uma íon-acústica. Neste caso, o espaço de fase apresentará curvas limite. Nestas curvas, a defasagem angular possuirá papel semelhante ao do caso integrável: defasagem nula implicará em fase relativa restrita ao intervalo  $\mathcal{R}_0$  e defasagem negativa levará à redução do espaço de fase acessível. Para defasagem positiva abrir-se-á um canal de escape da região  $\mathcal{R}_0$ , o que levará à incoerência. A dinâmica será caótica quando a onda que decai é de grande amplitude, sendo que para amplitudes suficientemente altas ter-se-á ergodicidade. O caos terá um papel essencial na questão da coerência. Veremos que, quando este se impõe, a coerência acaba por perder-se em grande parte das condições iniciais, indo ao ponto de incoerência global, no caso ergódico.

## 2.1 As equações de Zakharov e a aproximação adiabática

Trataremos, nesta seção, das equações de Zakharov unidimensionais,

$$(i \partial_t + \partial_x^2) \vec{E} = n \vec{E}, \quad (2.1)$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) n = \partial_x^2 |\vec{E}|^2, \quad (2.2)$$

onde utilizamos a notação abreviada,  $\partial_y f \equiv \partial f / \partial y$ . Restringir-nos-emos, neste capítulo, ao caso em que três modos harmônicos modulam-se no tempo. Estes modos descrevem os campos eletrostático unidimensional,  $E$ , e íon-acústico,  $n$ , dados por

$$E = a_1(t) e^{ik_1 x} + a_2(t) e^{ik_2 x}, \quad (2.3)$$

$$n = a_3(t) e^{ik_3 x} + a_3^*(t) e^{-ik_3 x}, \quad (2.4)$$

sendo que o símbolo de asterisco (\*) indica conjugação complexa. Note-se que o campo íon-acústico é real, como se deveria esperar. As relações de dispersão entre números de onda e frequências angulares são obtidas a partir da linearização das equações de Zakharov, Eq.(2.1) e (2.2), donde obtém-se

$$\omega_p = k_p^2, \quad p = 1, 2, \quad (2.5)$$

$$\omega_3 = k_3 . \quad (2.6)$$

Iremos supor que os números de onda satisfazem condição de ressonância,

$$k_1 = k_2 + k_3 , \quad (2.7)$$

mantendo, no entanto, uma possível defasagem nas frequências angulares,

$$\Omega = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 . \quad (2.8)$$

Utilizando as relações de dispersão, Eq.(2.5) e (2.6), e a condição de ressonância, Eq.(2.7), os números de onda dos campos eletrostáticos podem ser expressos em função do número de onda do modo íon-acústico,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + k_3 + \frac{\Omega}{k_3} \right) , \\ k_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - k_3 + \frac{\Omega}{k_3} \right) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Com isto, temos  $\omega_1 > \omega_2$ , o que é consistente com o processo de decaimento da onda um, a ser analisado adiante. Inseridos os três modos, Eq.(2.3) e (2.4), nas equações de Zakharov, Eq.(2.1) e (2.2), obtém-se as equações de evolução temporal destes,

$$i \frac{da_1}{dt} = \omega_1 a_1 + a_2 a_3 , \quad (2.10)$$

$$i \frac{da_2}{dt} = \omega_2 a_2 + a_3^* a_1 , \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 a_3}{dt^2} + \omega_3^2 a_3 = -k_3^2 a_1 a_2^* . \quad (2.12)$$

Este sistema e sua aproximação modulacional, a ser exposta nas Eq.(2.14)-(2.16), foi analisado no artigo de FRICHEMBRUDER et al. (2000) e nele baseia-se o presente capítulo. Os resultados concernentes ao caso sem defasagem,  $\Omega = 0$ , foram desenvolvidos em artigo anterior, de OLIVEIRA et al. (1997). Com uma rápida consideração dos membros não lineares, presentes nas Eq.(2.1) e (2.2), vemos que estes geram oito possíveis termos bilineares. Quanto a isto, desprezamos dois dos quatro termos bilineares presentes no membro  $n\vec{E}$  da primeira das equações de Zakharov, Eq.(2.1). Estes, são termos quantitativamente irrelevantes na dinâmica do campo eletrostático, pois não são ressonantes, permanecendo em nível de ruído. Especificamente, estes dois

termos desprezados são:  $a_1(t) e^{ik_1x} a_3(t) e^{ik_3x}$  e  $a_2(t) e^{ik_2x} a_3^*(t) e^{-ik_3x}$ . A eles estão associados os vetores de onda não ressonantes que mencionamos,  $k_1 + k_3$  e  $k_2 - k_3$ . Há ainda dois termos bilineares que se anulam na evolução do modo íon-acústico; veja-se o membro  $\partial_x^2 |\vec{E}|^2$  da segunda das equações de Zakharov, Eq.(2.2). Estes são espacialmente constantes, sendo dados por,  $a_1(t)a_1^*(t) + a_2(t)a_2^*(t)$ . Sobre eles atua o laplaciano unidimensional, portanto, anulam-se exatamente.

Em certas condições, a equação de evolução do modo íon-acústico pode ser reduzida à primeira ordem no tempo, mediante uma aproximação adiabática modulacional. Para tanto, ao expressarmos a amplitude íon-acústica na forma modulacional  $a_3(t) = \tilde{a}_3(t)e^{-i\omega_3 t}$ , faz-se necessário que a função modulacional  $\tilde{a}_3(t)$  seja tal que,

$$\left| \frac{d^2 \tilde{a}_3}{dt^2} \right| \ll \left| \omega_3 \frac{d\tilde{a}_3}{dt} \right|. \quad (2.13)$$

Quando esta desigualdade é aplicável podemos desprezar a derivada segunda. Re-definimos, então, os campos eletrostáticos, tomando  $a_2 = \sqrt{2/\omega_3} \tilde{a}_2 e^{-i\omega_2 t}$  e  $a_1 = \sqrt{2/\omega_3} \tilde{a}_2 e^{-i(\omega_2 + \omega_3)t}$ . Com isto, o sistema de equações para a evolução do tripleto reduz-se à seguinte forma aproximada,

$$i \frac{d\tilde{a}_1}{dt} = \Omega \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3, \quad (2.14)$$

$$i \frac{d\tilde{a}_2}{dt} = \tilde{a}_3^* \tilde{a}_1, \quad (2.15)$$

$$i \frac{d\tilde{a}_3}{dt} = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2^*. \quad (2.16)$$

Mediante uma transformação trigonométrica, dada por

$$\tilde{a}_p = \sqrt{\rho_p} e^{-i\phi_p}, \quad p = 1, 2, 3, \quad (2.17)$$

as três equações diferenciais, relativas às amplitudes complexas  $a_p$ , desdobram-se em seis equações reais. Três para os quadrados das amplitudes,

$$\dot{\rho}_1 = +2\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \sin \phi, \quad (2.18)$$

$$\dot{\rho}_2 = -2\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \sin \phi, \quad (2.19)$$

$$\dot{\rho}_3 = -2\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \sin \phi, \quad (2.20)$$

e três para as fases,

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= \sqrt{\frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1}} \cos \phi + \Omega, \\
 \dot{\phi}_2 &= \sqrt{\frac{\rho_3 \rho_1}{\rho_2}} \cos \phi, \\
 \dot{\phi}_3 &= \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3}} \cos \phi,
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

sendo  $\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$  a fase relativa do tripleto. Este sistema de equações é hamiltoniano,  $\rho_p$  são momenta,  $\phi_p$  coordenadas conjugadas e a função hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H}_{ad} = 2\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) + \Omega \rho_1. \tag{2.22}$$

Utilizamos o sub-índice *ad*, pois estamos, aqui, nos restringindo à aproximação adiabática, na qual é válida a desigualdade dada pela Eq.(2.13). A dinâmica segue, então, as equações de Hamilton,

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_p &= - \frac{\partial \mathcal{H}_{ad}}{\partial \phi_p}, \\
 \dot{\phi}_p &= \frac{\partial \mathcal{H}_{ad}}{\partial \rho_p}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Esta hamiltoniana depende das fases  $\phi_p$  via a fase relativa  $\phi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ , é, então, conveniente tomar uma transformação canônica, GOLDSTEIN (1980), com a geratriz dada por

$$S = (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \rho_{1N} + \phi_2 \rho_{2N} + \phi_3 \rho_{3N}, \tag{2.24}$$

onde  $\rho_{pN}$  para  $p = 1, 2, 3$  são as novas momenta. A transformação canônica é obtida a partir das equações

$$\begin{aligned}
 \rho_p &= \frac{\partial S}{\partial \phi_p}, \\
 \phi_{pN} &= \frac{\partial S}{\partial \rho_{pN}},
 \end{aligned}$$

que nos fornecem  $\rho_1 = \rho_{1N}$ ,  $\rho_2 = \rho_{2N} - \rho_{1N}$  e  $\rho_3 = \rho_{3N} - \rho_{1N}$ , para as momenta e  $\phi_{1N} = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ ,  $\phi_{2N} = \phi_2$  e  $\phi_{3N} = \phi_3$  para as coordenadas de fase conjugadas. Note-se que a hamiltoniana não depende das coordenadas de fase novas  $\phi_{2N}$  e  $\phi_{3N}$ , portanto, as respectivas momenta são constantes,  $\rho_{2N} = \mathcal{A}$  e  $\rho_{3N} = \mathcal{B}$ . Identificando



$\phi_{1N}$  com a fase relativa  $\phi$  e descartando o subíndice  $N$ , irrelevante em  $\rho_{1N}$ , chega-se à nova hamiltoniana, dada por

$$\mathcal{H}_{adr} = 2\sqrt{\rho_1(\mathcal{A} - \rho_1)(\mathcal{B} - \rho_1)} \cos \phi + \Omega \rho_1, \quad (2.25)$$

onde explicitamos que  $\rho_{2N} = \mathcal{A}$  e  $\rho_{3N} = \mathcal{B}$  são constantes de movimento. Esta hamiltoniana possui um único grau de liberdade, cujo par de variáveis canônicas é  $(\phi, \rho_1)$ ; sua dinâmica é, portanto, integrável.

As constantes de movimento que obtivemos são denominadas constantes de Manley-Rowe. Note-se que, em termos das amplitudes  $a_p$ , elas são dadas por,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= |\tilde{a}_1|^2 + |\tilde{a}_2|^2 = \rho_1 + \rho_2, \\ \mathcal{B} &= |\tilde{a}_1|^2 + |\tilde{a}_3|^2 = \rho_1 + \rho_3, \end{aligned}$$

e sua constância é imediatamente verificável se as derivarmos, levando em conta a forma explícita das derivadas dos quadrados das amplitudes, Eq.(2.18)-(2.20).

A dinâmica do sistema reduzido é determinada pelas equações de Hamilton

$$\dot{\rho}_1 = - \frac{\partial \mathcal{H}_{adr}}{\partial \phi}, \quad (2.26)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}_{adr}}{\partial \rho_1}, \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

que nos fornecem,

$$\dot{\rho}_1 = 2(\mathcal{A} - \rho_1) \sqrt{\rho_1} \sin \phi, \quad (2.29)$$

$$\dot{\phi} = \left( \frac{\mathcal{A} - \rho_1}{\sqrt{\rho_1}} - 2\sqrt{\rho_1} \right) \cos \phi + \Omega, \quad (2.30)$$

onde, por simplicidade, nos restringimos à  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . Na Fig.2.1 tem-se uma série de condições iniciais, integradas a partir das Eq.(2.29) e (2.30), via o método de Runge-Kuta de quarta ordem com passo temporal variável. Os mesmos resultados podem ser obtidos tratando-se a energia, dada pela Eq.(2.25), como uma equação não-linear implícita, na qual  $\rho_1 = \rho_1(\phi)$ , o que nos dá curvas de níveis da energia. Em todas as simulações numéricas desta tese utilizamos  $k_3 = 1$ .

A dinâmica do tripleto depende fortemente do sinal do parâmetro de defasagem,  $\Omega$ . Quando este é nulo, Fig.2.1(a), a função  $\phi$  mantém-se dentro do intervalo  $\mathcal{R}_0 \equiv [\pi/2, 3\pi/2]$ , realizando libração em torno do ponto de equilíbrio localizado em  $\phi_0 = \pi$  e  $\rho_0 = \mathcal{A}/3$ . Na realidade, todos os pontos do conjunto  $\phi_n = (2n + 1)\pi$  e  $\rho_0$  são de equilíbrio. Quanto à fase de equilíbrio temos, portanto,  $\phi_n = \pi, (\text{mod } 2\pi)$ . A dinâmica, na condição  $\Omega = 0$ , repete-se de forma periódica em  $\phi$ , de modo que todas as regiões  $\mathcal{R}_l \equiv [(2l + 1)\pi/2, (2l + 3)\pi/2]$  são o retrato da região  $\mathcal{R}_0$ . Órbitas de diferentes regiões não se misturam. A dinâmica é, portanto, coerente. É claro que a coerência, no sentido restrito,  $\dot{\phi} = 0$ , só ocorre no ponto de equilíbrio. Portanto, os estados que chamamos coerentes o são, na realidade, apenas parcialmente, pois neles

$$\Delta\phi \equiv |\phi(t) - \pi| < \pi/2. \quad (2.31)$$

Esta é, explicitamente, a condição de ressonância.

Se a defasagem é positiva,  $\Omega = 0.4$ , Fig.2.1(b), parte das órbitas deixa de se limitar aos intervalos  $\mathcal{R}_l$ , e passa a um movimento ilimitado em  $\phi$ , semelhante à rotação de um pêndulo. Esta é a situação incoerente, referida na introdução desta tese, nela têm-se  $\Delta\phi > \pi/2$ , conforme o critério da Eq.(2.31). De fato,  $\Delta\phi$  cresce sem limite com o tempo. Para defasagens positivas, apenas órbitas suficientemente próximas aos pontos de equilíbrio mantêm-se em oscilação dentro dos intervalos  $\mathcal{R}_l$ . O ponto de equilíbrio passa a ser função da defasagem  $\Omega$ , via  $\rho_0(\Omega) = 2(\Omega/6)^2 + \mathcal{A}/3 - (\Omega/6)[\mathcal{A}/3 + (\Omega/6)^2]^{1/2}$ . Note-se que há uma redução do valor do campo de equilíbrio, observável nos gráficos. Nossa análise do caso  $\Omega > 0$  irá se restringir à região dada por  $\mathcal{H}_{adr} \leq \Omega\mathcal{A}$ . Esta região refere-se ao processo de decaimento, conforme análise a ser feita na Sec.(2.3).

Por fim, na Fig.2.1(c) temos o caso de defasagem negativa,  $\Omega < 0$ , onde há uma redução do espaço de fase acessível ao sistema. Este último caso não é de grande interesse, pois nele, ao contrário da situação  $\Omega > 0$ , não há trajetórias de rotação, ou seja, não há trajetórias ilimitadas na fase relativa  $\phi$ . Não há, portanto, transição entre coerência e incoerência quando a defasagem é negativa. O que ocorre é uma redução do espaço de fase acessível, devida à redução da energia do sistema causada pelo termo  $\Omega\rho_1 < 0$ .

Nesta versão integrável do tripleto, o tamanho do conjunto de trajetórias incoerentes depende fortemente da magnitude da defasagem  $\Omega$ . Se  $\Omega$  é positivo e pequeno, o conjunto incoerente também o será, não tendo influência relevante sob os aspectos estatísticos da dinâmica. De um modo aproximado, podemos dizer que as órbitas

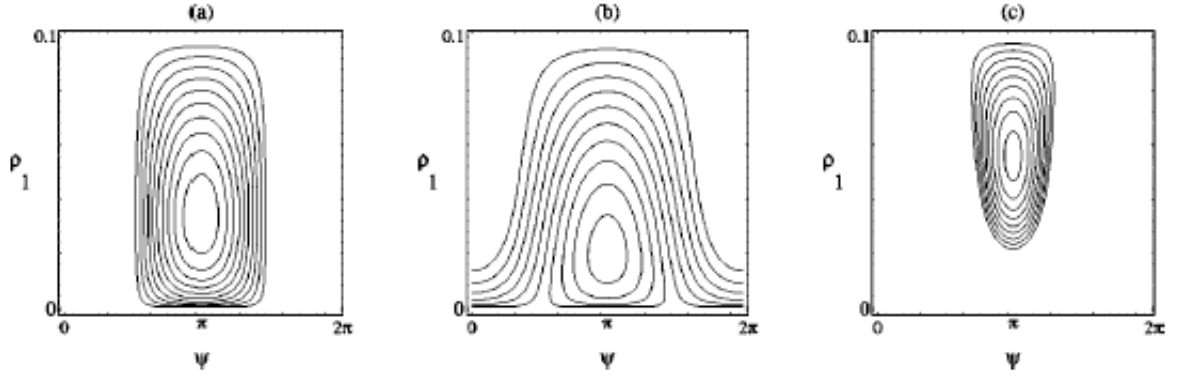


Figura 2.1: Espaço de fase da dinâmica do tripleto adiabático com constantes de Manley-Rowe  $\mathcal{A} = 0, 1 = \mathcal{B}$ , e defasagens angulares  $\Omega = 0, 0, 0, 4, -0, 4$ .

incoerentes se tornam dominantes apenas quando o ponto fixo desce a uma posição muito abaixo de  $\rho_1 = \mathcal{A}/3$  de modo que a maioria das órbitas passam a fases desacopladas, tornando-se rotacionais. O ponto fixo em  $\phi = \pi$  ocorre quando  $\partial\mathcal{H}_{adr}/\partial\rho_1 = 0$  donde obtem-se  $\rho_1/(\mathcal{A}/2) \sim \mathcal{A}^{1/2}/(2\Omega)$ , se  $\rho_1 \ll \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  e  $k_3 = 1$ .

Uma possível abordagem, para a medida do grau de coerência-incoerência, parte da constatação de que a separatriz é determinada pela condição  $\mathcal{H}_{adr} = 0$ . No presente caso, onde tomamos  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , parece possível obter analiticamente as trajetórias do espaço de fase, explicitando a amplitude como função da fase, ou seja, obtendo a relação  $\rho_1 = \rho_1(\cos\phi)$ . Para tanto, pode-se tomar a hamiltoniana com um valor de energia dada, o que leva à

$$h = 2(1 - x^2)x \cos\phi + \omega x^2, \quad (2.32)$$

onde  $x \equiv \rho_1/\mathcal{A}$ ,  $\omega \equiv \Omega/\mathcal{A}^{1/2}$  e  $h = \mathcal{H}_{adr}/\mathcal{A}^{3/2}$ , para um dado valor da hamiltoniana  $\mathcal{H}_{adr}$ . Com o devido cuidado para o caso  $\cos\phi = 0$ , talvez seja útil tratar a Eq.(2.32) como um polinômio cúbico em  $x$ , dado por

$$x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0, \quad (2.33)$$

onde  $c_1 \equiv -\omega/(2\cos\phi)$ ,  $c_2 \equiv -1$  e  $c_3 \equiv h/(2\cos\phi)$ . Em particular, para a separatriz onde  $h = 0$  as raízes que compoem a trajetória s ao facilmente obtiveis, sendo dadas por:  $x = 0$  e

$$x = \frac{\omega}{4|\cos\phi|} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{4\cos\phi}{\omega} \right)^2} \right]. \quad (2.34)$$

Note-se que nos limites da separatriz, onde  $\phi \rightarrow 0, 2\pi$  e  $\cos\phi \rightarrow 0$  (Fig.2.1b), a expressao acima nos dá, corretamente,  $x \rightarrow 2\cos\phi/\omega \rightarrow 0$ . Não continuaremos a desenvolver a abordagem destes últimos parágrafos, no entanto, frisamos que tal tratamento polinomial pode, talvez, ser útil na elucidação de certos aspectos do espaço de fase da hamiltoniana, Eq.(2.25).

## 2.2 A solução analítica da aproximação adiabática

Consideremos, agora, a dinâmica do tripleto adiabático, tomando uma abordagem um pouco diferente. Utilizando-se a conservação de energia, é possível isolar a dinâmica do momentum  $\rho_1$ , de modo que a coordenada conjugada,  $\phi$ , não aparece explicitamente. Obtém-se

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d\rho_1}{dt} \right)^2 = \Pi(\rho_1), \quad (2.35)$$

onde  $\Pi$  é um polinômio cúbico, o qual atua como um potencial, sendo dado por

$$\Pi(\rho_1) = \rho_1^3 - \left[ 2\mathcal{A} + \left( \frac{\Omega}{2} \right)^2 \right] \rho_1^2 + \left[ \mathcal{A}^2 + h \frac{\Omega}{2} \right] \rho_1 - \left( \frac{h}{2} \right)^2, \quad (2.36)$$

onde  $h$  é o valor da energia na trajetória considerada. A oscilação não linear do sistema limita-se à região onde  $\Pi \geq 0$ , visto que a conservação de energia implica em  $\Pi(\rho_1) = 1/4(d\rho_1/dt)^2 \geq 0$ . A integração por quadraturas da Eq.(2.35) leva a uma solução por funções elípticas, (WEILAND & WILHELMSSON, 1977).

Isolando o diferencial temporal temos,

$$dt = \frac{\frac{1}{2}d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1 - \rho_a)(\rho_1 - \rho_b)(\rho_1 - \rho_c)}}, \quad (2.37)$$

onde  $\rho_a \leq \rho_b \leq \rho_c$  são as três raízes do polinômio  $\Pi$ . A integração leva à

$$\rho_1 = \rho_a + (\rho_b - \rho_a) \operatorname{sn}^2(w[t - t_a], k) \quad (2.38)$$

onde  $w = (\rho_c - \rho_a)^{1/2}/2$  e  $k = (\rho_b - \rho_a)^{1/2}/(\rho_c - \rho_a)^{1/2}$  é o chamado módulo da função. Na literatura  $sn$  é uma das três funções elípticas de Jacobi, chamada seno amplitude. Salientamos que a apresentação da Eq.(2.38) é meramente expositiva. Nesta tese não iremos trabalhar com esta solução analítica. Fica, no entanto, aberta uma possível utilização das soluções analíticas, dadas por funções elípticas, como base para expansões perturbativas dos sistemas a serem analisados nos próximos capítulos.

## 2.3 A dinâmica completa na quebra da aproximação modulacional

Como próximo passo, investigaremos o que ocorre quando a aproximação modulacional, Eq.(2.13), não mais se aplica. Devemos, então, reter a derivada segunda presente na dinâmica do modo íon-acústico, Eq.(2.12). Passando a variáveis reais, segundo as transformações ,

$$a_p = \sqrt{\varrho_p} e^{-i\varphi_p}, \quad p = 1, 2, \quad (2.39)$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + iv), \quad (2.40)$$

as três equações de evolução para as amplitudes complexas,  $a_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , Eq.(2.10)-(2.12) desdobram-se em seis equações , com as seguinte formas,

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \sqrt{\frac{\varrho_2}{2\varrho_1}} [u \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - v \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] ,$$

$$\dot{\varrho}_1 = \sqrt{2\varrho_1\varrho_2} [u \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + v \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] ,$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \sqrt{\frac{\varrho_2}{2\varrho_1}} [u \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - v \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] ,$$

$$\dot{\varrho}_2 = \sqrt{2\varrho_1\varrho_2} [-u \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - v \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] ,$$

$$\ddot{u} = -\omega_3^2 u - \sqrt{2\varrho_1\varrho_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) ,$$

$$\ddot{v} = -\omega_3^2 v + \sqrt{2\varrho_1\varrho_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) ,$$

onde, por brevidade, utilizamos a notação de Newton,  $\dot{f}(t) \equiv df/dt$ . Tais equações podem ser deduzidas a partir da seguinte hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \omega_1 \varrho_1 + \omega_2 \varrho_2 + \frac{1}{2} [p_u^2 + p_v^2 + \omega_3^2 (u^2 + v^2)] \\ & + 2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} [u \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - v \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] , \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde,  $\dot{u}$  e  $\dot{v}$  são momenta das coordenadas  $u$  e  $v$ , respectivamente. As variáveis  $(\varphi_p, \varrho_p)$ ,  $p = 1, 2$ , seguem sendo momenta e coordenadas conjugadas, respectivamente, como no caso adiabático.

Tomando-se as seguintes transformações canônicas:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \beta$  e  $\varphi_2 = \gamma$ , reconhecemos uma variável cíclica na hamiltoniana da Eq.(2.41), a qual é  $\gamma$ . Esta é uma transformação de ponto, pois envolve apenas coordenadas conjugadas. Devido a isto, LANCZOS (1970), as formas diferenciais abaixo mantêm-se iguais,

$$\begin{aligned} \varrho_1 d\varphi_1 + \varrho_2 d\varphi_2 &= p_\beta d\beta + p_\gamma d\gamma \\ &= p_\beta (d\varphi_1 - d\varphi_2) + p_\gamma d\varphi_2 , \end{aligned}$$

donde conclui-se que,

$$\varrho_1 = p_\beta , \quad (2.42)$$

$$\varrho_2 = p_\gamma - \varrho_1 . \quad (2.43)$$

Salientamos, aqui, que as igualdades acima podem ser obtidas se consideramos o formalismo lagrangiano, com a função lagrangiana dada por  $L = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H$ . Lembrando que uma transformação é canônica quando a integral de ação mantêm-se invariante, ou seja, quando  $\int_{t_1}^{t_2} (\sum_{j=1}^n p_j dq_j - H dt) = \int_{t_1}^{t_2} (\sum_{j=1}^n P_j dQ_j - H' dt)$ . Uma forma simples de garantir este resultado é manter a igualdade entre os integrandos, de modo que  $\sum_{j=1}^n p_j dq_j = \sum_{j=1}^n P_j dQ_j$ . Nisto, implícito está que a transformação canônica não altera o valor da hamiltoniana, de modo que  $H(p, q) = H(p(P, Q), q(P, Q)) = H'(P, Q)$ . Portanto, se impomos a igualdade entre o somatório diferencial, estamos garantindo que a transformação é canônica. É neste sentido que devemos entender a igualdade entre as formas diferenciais, dada pela Eq.(2.42).

Voltando a Eq.(2.43), nela  $p_\gamma = A$ , ou seja, este momentum é uma constante de movimento, visto que, como já foi dito, a hamiltoniana independe da coordenada

$\gamma$ . Com isto, a hamiltoniana, Eq.(2.41), simplifica-se à

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (\omega_1 - \omega_2)\varrho_1 + \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + \frac{\omega_3^2}{2}(u^2 + v^2) \\ & + \sqrt{2\varrho_1(A - \varrho_1)}(u \cos \beta - v \sin \beta) , \end{aligned} \quad (2.44)$$

sendo que desprezamos o termo constante  $\omega_2 p_\gamma$ , por ser irrelevante na dinâmica. Uma nova transformação canônica, dada por

$$u + iv = r e^{-i\theta} , \quad (2.45)$$

nos leva à

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (\Omega + \omega_3)\varrho_1 + \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \left( \frac{p_\theta}{r} \right)^2 + \omega_3^2 r^2 \right] \\ & + \sqrt{2\varrho_1(A - \varrho_1)} r \sin(\theta - \beta) . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Note-se que, no termo linear em  $\varrho_1$ , utilizamos  $\Omega + \omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . É claro que  $p_r^2 + (p_\theta/r)^2 = p_u^2 + p_v^2$ , o que pode ser facilmente provado, utilizando-se a igualdade entre os diferenciais do integrando da ação, conforme a explanação feita após a Eq.(2.42). Por fim, visto que os ângulos aparecem na combinação  $\beta - \theta$ , é possível aplicar uma última transformação canônica que substitui  $\beta$ , de modo que  $\beta \rightarrow \varphi \equiv \beta - \theta + \pi/2$ . Com isto, tem-se um novo momentum conservado, dado por  $B = p_\theta + \varrho_1$ , o que deixa a hamiltoniana na sua forma definitiva, dada por,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \left[ p_r^2 + \left( \frac{B - \varrho_1}{r} \right)^2 + \omega_3^2 r^2 \right] + (\omega_3 + \Omega)\varrho_1 \\ & + \sqrt{2\varrho_1(A - \varrho_1)} r \cos \varphi , \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde  $\varphi = \beta - \gamma$ ,  $\alpha = \theta$ . A hamiltoniana independe de  $\alpha$ , logo,  $p_\alpha = B$  é mais uma constante de movimento. É importante notar que a hamiltoniana obtida,  $\mathcal{H}$ , possui dois graus de liberdade, dados pelos pares de variáveis canônicas,  $(p_r, r)$  e  $(\varrho_1, \phi)$ . Além disto, a hamiltoniana é não linear. Esperamos, portanto, um possível comportamento caótico. Devido a isto, a apresentação de dados numéricos será feita utilizando-se mapas de Poincaré. Antes de realizar simulações envolvendo a dinâmica completa, é conveniente comparar com o caso adiabático. Supondo que a aproximação

adiabática é válida para o tripleto, podemos fazer uso das constantes de Manley-Rowe, expressando as variáveis do campo íon-acústico, Eq.(2.45), de tal forma que  $r = \sqrt{2(A - \varrho_1)}$ . Tomamos aqui, de modo similar ao caso adiabático,  $A = B$ . Nestas condições, as hamiltonianas adiabática, Eq.(2.25), e completa, Eq.(2.47), relacionam-se conforme a seguinte equação,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{adr} + \omega_3 \varrho_1 + \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{5}{2} (A - \varrho_1) \right), \quad (2.48)$$

onde supomos uma igualdade entre os ângulos dos casos adiabático  $\phi$  e completo,  $\varphi = \phi$ , o mesmo se aplicando à amplitude do campo eletrostático,  $\varrho_1 = \rho_1$  e à constante de movimento,  $\mathcal{A} = A$ . Lembremos que estamos trabalhando com  $k_3 = 1$ , conseqüentemente  $\omega_3 = 1$ , o que gera o fator  $5/2$  na Eq.(2.48). Esta conexão entre os sistemas adiabático e completo será, como seria de se esperar, corroborada ao analisarmos mapas de Poincaré do sistema completo, o que será feito adiante. Nossas simulações, envolvendo a hamiltoniana completa, limitaram-se à situação de uma onda eletrostática “pump”,  $p = 1$ , decaindo em duas ondas “filhas”, uma eletrostática  $p = 2$  e uma íon-acústica,  $p = 3$ . Situação que, na literatura, é denominada interação de decaimento. Isto fica bem representado pela condição inicial  $\varrho_1(t = 0) = A$ . Além disto, nos limitamos, por conveniência, a um subespaço no qual  $\mathcal{H} = (\omega_3 + \Omega) A$ , conseqüentemente  $r(t = 0) = 0 = p_r(t = 0)$ . Nestas condições, a relação entre as hamiltonianas, Eq.(2.48), implica em  $(\omega_3 + \Omega) A = \mathcal{H}_{adr} + \omega_3 A + \frac{1}{2} p_r^2$ , ou seja,  $\mathcal{H}_{adr} + \frac{1}{2} p_r^2 = \Omega A$ . Portanto, na perspectiva da aproximação modulacional, nossa região de interesse limita-se à  $\mathcal{H}_{adr} \leq \Omega A$ , como já havíamos indicado na Sec.(2.1). É claro que, com isto, não estamos fazendo uma análise exaustiva do espaço de fase. No contexto da dinâmica completa, também é possível determinar uma região de interesse, que generaliza a desigualdade acima, aplicável apenas na aproximação modulacional. De fato, com as condições iniciais de decaimento, nossas constantes permitem expressar o momentum radial como,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_r^2 &= (\omega_3 + \Omega)(A - \varrho_1) - \sqrt{2\varrho_1(A - \varrho_1)} r \cos \varphi \\ &- \frac{1}{2} \left( k_3^2 r^2 + \left( \frac{A - \varrho_1}{r} \right)^2 \right) \\ &\equiv g(r, \varphi). \end{aligned} \quad (2.49)$$



Portanto, há uma curva limite, que delimita a região acessível ao processo de decaimento, dada por  $g \geq 0$ . Este limite é alcançado em  $g = 0$ . Assim, para um dado valor de  $\varrho_1$  um valor físico marginal em  $\varphi$  é atingido quando a curva  $g = g(r, \varphi)$  é tangente à  $g = 0$ . A curva limite  $\varrho_{1L} = \varrho_{1L}(\varphi)$  pode, então, ser obtida a partir do conjunto de equações

$$g(r, \varphi) = 0 = \frac{\partial g}{\partial r}, \quad (2.50)$$

o que nos dá a condição esquematizada no gráfico da Fig.2.2. Quando  $\varphi$  ou um dos parâmetros presentes ( $\Omega$  e  $A$ ) é tal que o gráfico cruza o eixo  $r$ , passamos a ter duas raízes que correspondem a pontos de intersecção de uma trajetória com o plano que define o mapa de Poincaré. Eles, portanto, fazem parte do espaço de fase acessível ao sistema.

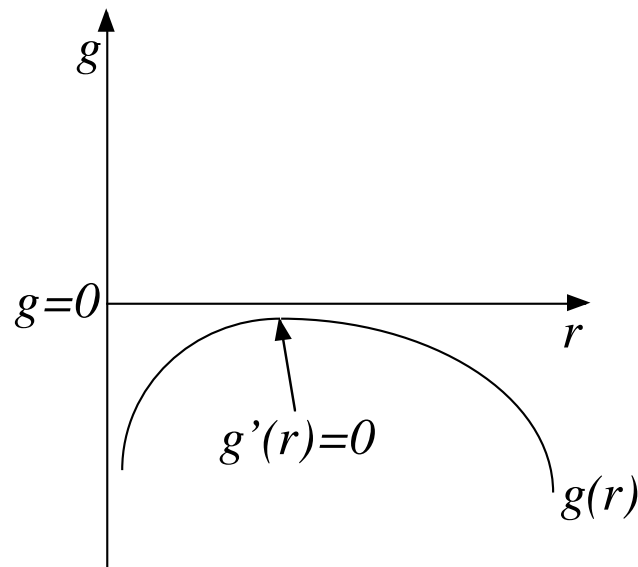


Figura 2.2: A condição na qual o ponto estacionário da função  $g(r, \varphi)$  tangencia o eixo  $r$ , para um dado  $\varphi$  fixo, determina um ponto da curva que delimita a região acessível à dinâmica completa (não modulacional) com condição inicial de decaimento.

Na Fig.2.3 as curvas limites são representadas por linhas cheias e tem-se, também, mapas de Poincaré. Os limites foram obtidos utilizando-se o “software” Mathematica. Os mapas de Poincaré foram, por sua vez, obtidos selecionando-se os pares  $(\varphi, \varrho_1)$ , cada vez que a trajetória, avaliada por integração numérica, atingiu

$p_r = 0$ , com  $\dot{p}_r \geq 0$ . Portanto, a superfície de seccionamento, que define o mapeamento, foi obtida com as condições  $\mathcal{H} = (\omega_3 + \Omega) A$  e  $p_r = 0$ . A integração numérica foi feita a partir da dinâmica do Hamiltoniano completo, Eq.(2.47), e, também, diretamente a partir das equações de evolução das amplitudes complexas das ondas, Eq.(2.10)-(2.12). Houve perfeita concordância entre os dois métodos.

Vários valores foram tomados para  $\Omega$  e  $A$ , sob as condições, já usuais,  $\omega_3 = 1$  e  $B = A$ . Na Fig.2.3(a), tem-se  $\Omega = 0$ , com um valor  $A = 3$ , bem acima da bifurcação para o caos, o qual manifestou-se nos mapas de Poincaré. Nestas condições a região acessível confunde-se com a região  $\mathcal{R}_0$ , definida anteriormente como,  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ . Ou seja, mesmo para um valor relativamente alto de  $A$ , mantém-se um certo sincronismo na fase relativa,  $\varphi$ . Este sincronismo parcial permanece ativo para  $\Omega < 0$ , mas, neste caso, Fig.2.3(b), a troca de energia torna-se menor, pois o espaço de fase disponível é reduzido, de forma semelhante ao que se obteve no caso adiabático. Estes dois casos são profundamente caóticos, sendo que as órbitas parecem preencher ergodicamente o espaço de fase disponível. Isto se aplica até mesmo para as órbitas mais internas à região acessível, sem que se encontre barreiras relacionadas a ilhas de ressonância. Para ter alguma medida do grau de ergodicidade, tomamos uma grandeza de uso corrente na física de aceleradores, o fator de “bunching”,  $b$ , na forma

$$b = \left| \langle e^{i\varphi} \rangle \right| \equiv \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j} \right|, \quad (2.51)$$

onde a soma realiza-se sob  $N$  condições iniciais distintas. Em um caso ergódico, esta média deve independer das condições iniciais, podendo ser avaliada como uma média sob todo o espaço de fase acessível, denotado pelo sub-índice “*access*” na integral abaixo.

$$b_{erg} \equiv \left| \frac{\int_{access} e^{i\varphi} d\varphi d\varrho_1}{\int_{access} d\varphi d\varrho_1} \right|. \quad (2.52)$$

Quando  $\Omega = 0$ ,  $b_{erg}$  é facilmente avaliável como sendo,  $b_{erg} = 2/\pi \approx 0,637$ . Para valores suficientemente altos de  $A$ , Fig.2.3(a), simulações com  $N = 1000$  condições iniciais revelam que a aproximação ergódica é boa, uma vez que  $b \approx 0,64$ . A importância prática da noção de ergodicidade pode ser vista na Fig.2.3(b), onde tomamos,  $\Omega = 0,5$  e  $A = 0,55$ . De forma similar à que tínhamos no caso adiabático, abre-se um pequeno canal, próximo a  $\varrho_1 = 0$ , a partir do qual uma trajetória pode abandonar a região  $\mathcal{R}_0$ . Em um caso ergódico, as órbitas, inicialmente internas à  $\mathcal{R}_0$ ,

acabam por se aproximar do canal de escape, abandonando esta região. O sincronismo do sistema é, então, completamente perdido, uma vez que a fase relativa deixa de sofrer variações limitadas à  $\mathcal{R}_0$ . Saliente-se que não há ergodicidade no caso (c), nele o campo aplicado,  $A = 0,55$ , é muito baixo.

Para finalizar esta seção: enfatizamos que o comportamento da fase relativa é completamente distinto do que tínhamos no caso adiabático, de dinâmica integrável. No caso regular, a incoerência torna-se relevante apenas quando  $\Omega$  atinge valores suficientemente altos, tais que  $\Omega \sim \Omega_{bjf}$ . Para valores de  $\Omega$  mais baixos, há sempre uma porção relevante de órbitas regulares que mantêm-se distantes do canal de escape. Este quadro não se mantém na dinâmica completa e caótica, uma vez que um certo grau de ergodicidade permite que as órbitas atinjam o canal de escape da região  $\mathcal{R}_0$ . Assim, na dinâmica completa, mesmo para valores positivos arbitrariamente pequenos de  $\Omega$ , ocorre incoerência. No entanto, para  $\Omega$ 's muito pequenos, o escape é pequeno e  $b$  mantém-se próximo de  $2/\pi$ . Para melhor estudar este caso, é conveniente introduzir ferramentas capazes de uma análise mais fina do que a que se obtém com o “bunching factor”. O que nos leva à próxima seção.

## 2.4 Incoerência e a fração de escape $f$

A análise dos casos  $\Omega > 0$  é facilitada tomando-se gráficos onde lançamos  $f = f(t)$ , a fração de condições iniciais que mantêm-se dentro da região  $\mathcal{R}_0$ . Para tanto, rodamos simulações com  $N = 5000$  condições iniciais em  $\varphi(t = 0) = \pi$ , contando a fração de órbitas que manteve-se em  $\mathcal{R}_0$ , num dado tempo  $t$ .

Na Fig.2.4(a) tem-se três situações distintas. Para uma onda “pump” intensa,  $A = 3$ , o regime caótico leva, inevitavelmente, à perda de coerência da fase relativa  $\varphi$ . O aumento da defasagem angular, de  $\Omega = 0,2$  para  $\Omega = 0,5$  na figura, apenas acelera o processo de decoerência, no qual, assintoticamente,  $f \rightarrow 0$ . Entretanto, se  $A = 0,55$ , a fração  $f$  inicialmente cai, sem, contudo, anular-se. Cerca de dez por cento das trajetórias iniciais mantêm-se dentro da região  $\mathcal{R}_0$ . Estas são órbitas envoltas por superficies *KAM* LICHTENBERG & LIEBERMAN (1991) que não se destruíram, estando, assim, impediadas de atingir o canal de escape. O mapeamento de Poincaré na Fig.2.3(d), apresenta claramente ilhas de ressonância.

Uma visão mais detalhada é obtida nas Fig.2.4(b) e (c), onde graficamos a fase relativa,  $\varphi$  como função que não é módulo  $2\pi$ , versus tempo. Nas três condições iniciais utilizadas no item (b),  $\varrho_1 = A/1, 1$ ,  $\varrho_1 = A/3$  e  $\varrho_1 = A/10$ , têm-se  $\varphi(t)$

crescendo em uma longa escala de tempo. A grosso modo isto ocorre de forma semelhante a dependência linear característica de uma defasagem regular, o que denota a incoerência do tripleto de ondas.

O ítem (c) nos dá o mesmo quadro numa escala de tempo bem mais fina, nele percebemos que a evolução de  $\varphi$  é bem mais complexa. Na realidade, a fase relativa evolui de um modo errático, ora mantendo-se presa em regiões  $\mathcal{R}_l$ , numa coerência fugaz, ora pulando para uma das regiões vizinhas em módulo  $2\pi$  à anterior. Este quadro de coerência intermitente é apagado em escalas de tempo muito maiores, onde  $\varphi$  segue em média uma evolução livre.

Um último ponto a ser considerado nesta seção é o efeito da defasagem angular  $\Omega$  nas curvas limites do espaço de fase. Considerando a hamiltoniana completa dada na forma da Eq.(2.41):  $\omega_1 \varrho_1 + \omega_2 \varrho_2$  corresponde à energia dos modos adiabáticos 1 e 2 (frequência  $\omega$  vezes intensidade de onda  $|a|^2 = \varrho$ ), o termo  $\frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + \frac{\omega_3^2}{2}(u^2 + v^2)$  nos dá a energia do modo não adiabático 3, e, por fim,  $V_{int} \equiv 2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} [u \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - v \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$  representa o potencial de interação entre estes três modos. Usando as constantes de Manley-Rowe e nossas condições iniciais, podemos obter a hamiltoniana em sua forma final, Eq.(2.47), na qual  $B = A$ ,  $\mathcal{H} = (\omega_3 + \Omega)A$ , sendo que o potencial de interação toma a forma  $V_{int} = \sqrt{2\varrho_1(A - \varrho_1)}r \cos \varphi$ . Para um dado  $\varrho_1$  fixo, a menor energia possível para o modo 3, implica na maximização do potencial de interação,  $V_{int}$ . A maximização do potencial  $V_{int}$  pode, então, nos dar uma idéia do alcance das órbitas em  $\varphi$ . A correspondente minimização da energia do modo 3 implica em  $p_r = 0$  e  $r^2 = \sqrt{A - \varrho_1}/\omega_3$ , donde  $\mathcal{H} = \omega_3 A + \Omega \varrho_1 + V_{int}$ . Se  $\Omega = 0$ , a medida em que  $\varrho_1$  decrescer,  $V_{int}$  será limitado por  $\mathcal{H} - \omega_3 A = \omega_3 A - \omega_3 A = 0$ , o que implica  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ , que define a região acessível,  $\mathcal{R}_0$ . No entanto, se  $\Omega > 0$ , a medida em que  $\varrho_1$  decrescer,  $V_{int}$  será obrigado a crescer, para que  $\mathcal{H}$  se mantenha constante. Neste caso,  $\cos \varphi$  deve tornar-se positivo, o que abre o canal de escape da região  $\mathcal{R}_0$ . Por outro lado,  $\Omega < 0$  reduz o espaço de fase acessível. A diferença de fase entre os três modos envolvidos  $\Omega$ , pode, então, ser praticamente interpretada como um excesso de energia por fônon, relativamente às separatrizes em  $\varphi = \pi/2$  e  $\varphi = 3\pi/2$ .

## 2.5 Conclusões do capítulo

Neste capítulo, analisamos a interação de um tripleto de ondas monocromáticas, segundo as equações de Zakharov. Há uma troca de energia que implica numa modulação temporal das amplitudes das ondas. O modo íon-acústico depende, em sua dinâmica, de derivação temporal de segunda ordem. Se a condição de modulação adiabática é aplicável a este modo, a evolução do tripleto reduz-se a um sistema de equações de primeira ordem. Vimos que, neste caso, a evolução do sistema é integrável, pois, devido as constantes de Manley-Rowe, a função hamiltoniana reduz-se a um único grau de liberdade. Soluções do caso adiabático consistem em funções elípticas e o correspondente espaço de fase apresenta um ponto de equilíbrio estável, em torno do qual o sistema realiza libração se  $\Omega = 0$ . Quando esta defasagem é positiva, parte das órbitas deixam de ser libracionais e passam a realizar rotação, o que denota incoerência. As condições iniciais que levam à rotação são mais numerosas desde que a defasagem angular seja suficientemente alta para satisfazer a desigualdade  $\Omega > \Omega_{bif} = A^{1/2}$ . No caso  $\Omega < 0$ , o espaço de fase é reduzido e a dinâmica limita-se à oscilação.

Analisamos a situação na qual a aproximação adiabática não é justificável. Dado isto, a função hamiltoniana passa a depender de mais um par canônico, havendo portanto dois graus de liberdade, o que gera a possibilidade de regimes caóticos. Estes ocorrem para amplitudes de intensidade suficientemente altas. Demos especial atenção para o parâmetro de defasagem entre as frequências angulares dos modos,  $\Omega$ . Como no caso adiabático, quando a defasagem é positiva, abre-se um canal de escape para fora da região de libração em torno do ponto de equilíbrio,  $\mathcal{R}_0$ , o que é particularmente notável nas curvas limites do espaço de fase da dinâmica completa. No entanto, há uma grande diferença entre os comportamentos dos sistemas adiabático e completo no que tange à transição entre os regimes coerente e incoerente. Para quantificar a perda de coerência, introduzimos dois parâmetros apropriados à diagnose: o “bunching factor” e a fração de escape. Representando graficamente a fração de escape, vimos que na dinâmica completa, não adiabática, grande parte das condições iniciais leva ao regime incoerente. Ao contrário do regime adiabático, isto ocorre mesmo quando a defasagem encontra-se abaixo do valor de bifurcação próprio do regime adiabático,  $0 < \Omega < \Omega_{bif}$ . Tal fato acontece porque o caos presente acaba por levar boa parte das órbitas ao canal de escape e daí, a incoerência. Para amplitudes de onda mais intensas, instaura-se o regime ergódico e todas as condições iniciais,

sem exceção, acabam por alcançar o canal de escape. Portanto, quando instaura-se a ergodicidade, a perda de coerência se dá globalmente.

Nos dois próximos capítulos, estudaremos a interação entre tripletos de pacotes de onda. Permitiremos, portanto, que cada modo monocromático alargue-se, de modo a conter vários modos com distintos números de onda.

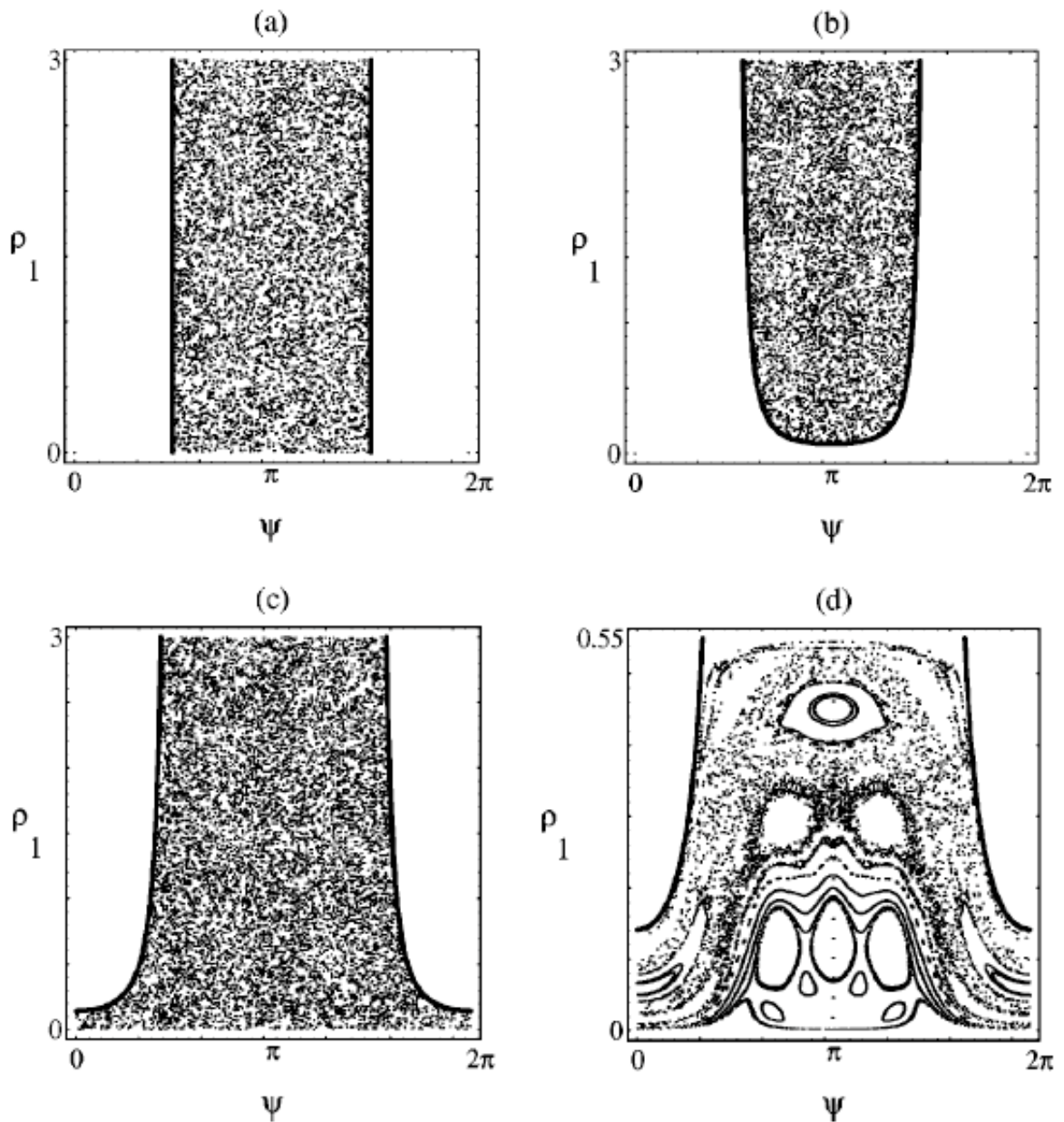


Figura 2.3: Curvas limites e mapas de Poincaré gerados pela Hamiltoniana completa, Eq.(2.47), com  $\omega_3 = 1$ ,  $B = A$ . (a)  $\Omega = 0$  e  $A = 3$ . (b)  $\Omega = -0,4$  e  $A = 3$ . (c)  $\Omega = 0,5$  e  $A = 3$ . (d)  $\Omega = 0,5$  e  $A = 0,55$ .

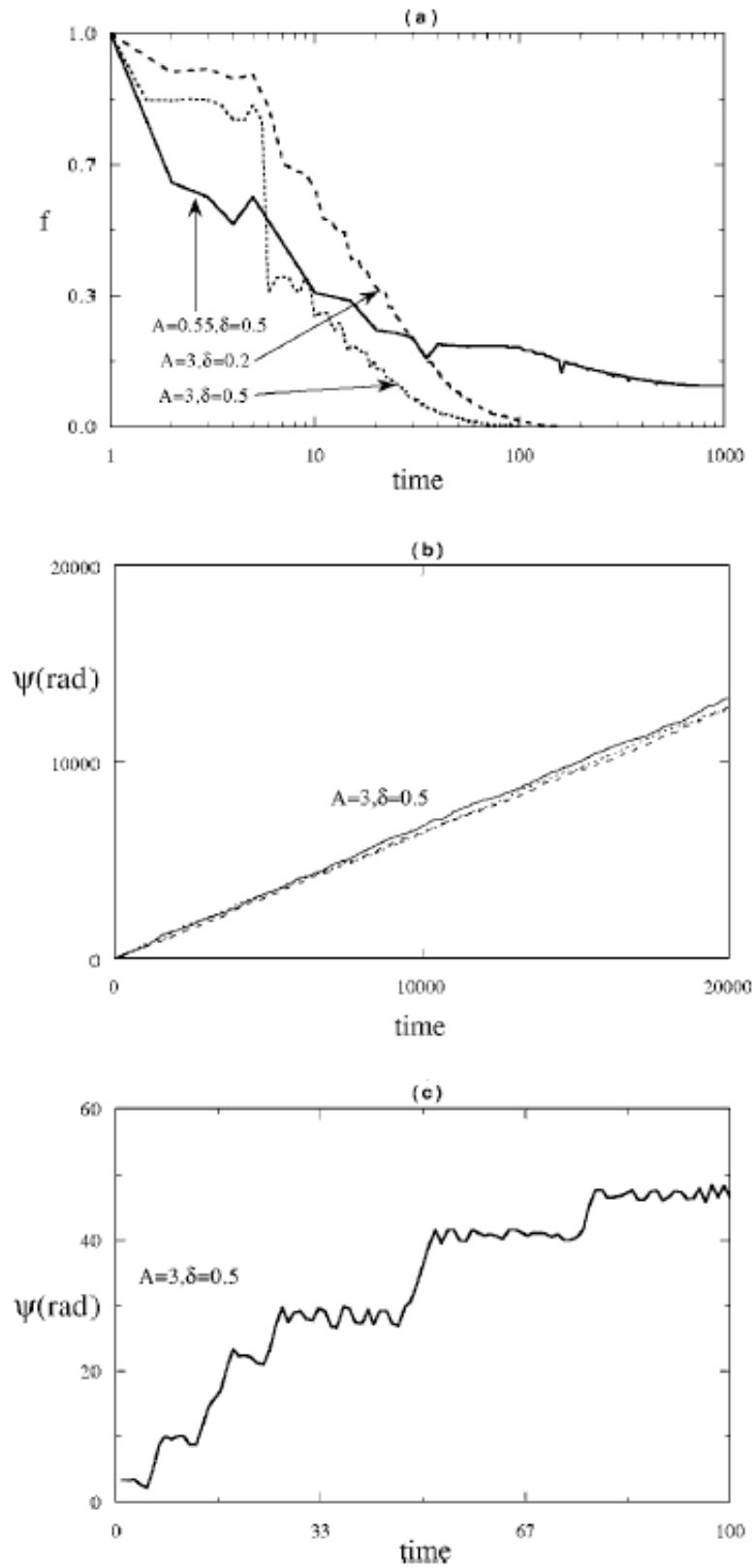


Figura 2.4: (a) Fração  $f$  de estados que permanecem em  $\mathcal{R}_0$  após um intervalo de tempo  $t$ , dadas 5000 condições iniciais uniformemente distribuídas em  $\varphi = \pi$ . (b)  $\varphi(t)$  contra  $t$  com três condições iniciais  $\varrho_1 = A/1, 1, A/3$  e  $A/10$ , com  $\omega_3 = 1$ ,  $A = 3$  e  $\Omega = 0,5$ . (c) em menor escala de tempo,  $\varphi(t)$  contra  $t$  para a condição inicial  $\varrho_1 = A/3$ , note-se os saltos na fase relativa.



## Capítulo 3

# O Tripleto de Pacotes em Campo Médio

No presente capítulo iremos investigar um tipo de interação conservativa que envolverá três grupos de  $N$  modos, onde  $N$  é um número inteiro grande. Estes grupos de modos constituem pacotes de ondas discretizados e a eles nos referiremos, alternativamente, como pentes. As equações de evolução destes grupos de modos serão similares ao sistema do tripleto monocromático. De fato, a generalização do sistema que caracteriza o tripleto monocromático se dará de tal modo que o próprio conceito de tripleto permanecerá válido. Para tanto, faz-se necessário que a distância espectral entre os centros dos pacotes eletrostáticos de Langmuir (pacotes 1 e 2) seja muito maior que a largura de banda destes pacotes. Se esta condição não fosse satisfeita haveriam interações entre modos de um mesmo pacote. Portanto, não serão incluídas interações entre dois modos do mesmo pente, pois contribuições deste tipo levam, dentro das condições acima estabelecidas, a termos não ressonantes.

Outro aspecto fundamental das interações que vamos analisar é a sua forma de campo médio. Cada modo de um dado pente irá interagir com todos os possíveis termos bilineares formados por modos dos outros dois pentes, não havendo, como já foi dito, termos bilineares tomados do mesmo pacote. Nos referiremos a esta interação de campo médio como sendo democrática. Tal forma de expressar a interação de um tripleto de pentes é adequada quando a largura,  $l_{int}$ , da região onde se dá a interação não linear, é muito menor que a dimensão,  $L$ , do sistema físico que contém as ondas. Vamos, então, supor que é satisfeita a condição  $l_{int} \ll L$  e, também, que a meia largura dos pentes,  $\Delta_n$ , é tal que,  $\Delta_n \ll 2\pi/l_{int}$ . Com esta última condição, todos os acoplamentos bilineares terão o mesmo peso, com coeficiente unitário.

Determinaremos um parâmetro de bifurcação, abaixo do qual a dinâmica será dominada pelos termos lineares, os modos se encontrarão desacoplados e suas fases relativas crescerão com o tempo. Acima da bifurcação, a dinâmica será controlada pelos termos não lineares, o acoplamento de fases será mantido e o grupo de modos apresentará comportamento coerente ao longo de toda sua evolução temporal. Esta bifurcação foi determinada por ROBINSON & DRYSDALE (1996) os quais analisaram a dinâmica de um modo teste sobre o qual atua um campo quase estático aproximado. Seguindo o mesmo procedimento, tomaremos um particular modo, que será denominado modo teste, e sobre ele faremos atuar um campo coerente formado por todos os outros modos tomados próximos aos seus estados de equilíbrio. Como os modos deste campo atuante são tomados, para cada pente em separado, como coerentes entre si, eles seguirão uma dinâmica comum e idêntica ao do tripleto puro, analisado no Cap.2. Portanto, os modos de um dado pente seguirão uma mesma fase comum que evolui conforme o espaço de fase apresentado no Cap.2. Se a fase relativa do modo teste de um pente, medida em relação à fase comum dos outros modos deste mesmo pente, não aumentar com o tempo, teremos um estado coerente estável. Caso contrário, se esta fase relativa aumentar, teremos a quebra da coerência.

Além da dinâmica do modo teste sob a ação de um campo quase estático, estenderemos o mesmo método para o caso da interação de decaimento. O campo atuante sobre o modo teste será, então, intrinsecamente dependente do tempo, sendo caracterizado por uma ativa troca de energia entre os modos que formam o pente “pump” e os modos dos outros dois pentes. Faremos estimativas quanto à questão da coerência, seguindo a metodologia apresentada por deOLIVEIRA et al. (2002).

Mantendo-nos no contexto das equações de Zakharov, investigaremos, de forma análoga ao que fizemos no Cap.2, a questão da aproximação adiabática usada para reduzir a ordem das derivadas temporais da equação de evolução do modo íon-acústico. Veremos que, à medida em que a energia cresce, a adiabaticidade e a integrabilidade serão perdidas, o que resultará em altos níveis de atividade caótica. Basicamente, isto levará nosso modelo de muitos modos a perder a coerência em situações que, sob a aproximação adiabática, seriam coerentes. Devido ao caos, as características básicas da transição para incoerência serão alteradas frente ao que se têm no caso regular.

Os dois pontos básicos que motivam o presente capítulo são: o estudo da coerência das ondas, quando estas encontram-se longe do equilíbrio (interação de decaimento) e, quando a atividade caótica é significativa (quebra da aproximação modulacional).

### 3.1 O modelo de interações democráticas

Partindo novamente das equações de Zakharov, Eq.(2.1) e Eq.(2.2), investigaremos, agora, o que ocorre quando nosso tripleto monocromático alarga-se a três pacotes de onda. Passaremos ao espaço recíproco, seguindo uma decomposição de Fourier em modos discretos. Devido a isto, ao invés de utilizarmos o termo pacotes, nos referiremos a pentes, sendo que cada dente de um dado pente corresponderá a um modo de Fourier do pacote discretizado. Esta é a terminologia utilizada em ROBINSON & DRYSDALE (1996), a qual temos mantido em artigos publicados de OLIVEIRA et al. (2002) e aceitos para publicação FRICHEMBRUDER et al. (2005).

A princípio, seguimos um procedimento semelhante ao da primeira seção do Cap.2, decompondo em séries de Fourier os campos eletrostático e íon acústico. No entanto, os três modos monocromáticos ( $p = 1, 2, 3$ ), antes presentes, Eq.(2.3)-(2.4), alargam-se em três pentes, cada qual com  $N = 2n + 1$  modos, onde  $n$  é número inteiro. Limitamo-nos ao caso  $N$  ímpar, de modo que

$$a_p \rightarrow (a_{pq}, q = -n, -n + 1, \dots, -1, 0, +1, \dots, +n - 1, +n) . \quad (3.1)$$

Seguindo WEILAND & WILHELMSSON (1977), MARTINS & MENDONÇA (1985) e ROBINSON & DRYSDALE (1996), as Eqs.(2.10)-(2.12) são generalizadas para

$$i \frac{da_{1q}}{dt} = \omega_{1q} a_{1q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{2l} a_{3m} , \quad (3.2)$$

$$i \frac{da_{2q}}{dt} = \omega_{2q} a_{2q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l} a_{3m}^* , \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 a_{3q}}{dt^2} = -\omega_{3q}^2 a_{3q} - \frac{k_3^2}{N} \sum_{l,m} a_{1l} a_{2m}^* , \quad (3.4)$$

onde  $\omega_{pq} \equiv k_{pq}^2$ ,  $p = 1, 2$  e  $\omega_{3q} \equiv k_{3q}$ . Os números de onda dos modo são dados por  $k_{pq} = k_p + q\Delta_k$ , sendo  $\Delta_k$  a distância espectral entre dois modos contíguos, tomada igual para os três pentes. Portanto,  $\Delta_n = n\Delta_k$  é a meia largura dos pentes. Note-se que a dupla soma, sob os índices  $l$  e  $m$ , é irrestrita, correndo sobre  $|l|, |m| \leq n$ .

Há uma série de aproximações envolvidas na obtenção das Eqs.(3.2)-(3.4). Basicamente, partindo de uma transformação integral de Fourier, realizamos médias parciais dentro de cada pacote. Com isto, um dado pacote  $p$ , caracterizado por número de onda contínuo  $k(p)$ , é sub-dividido em  $N$  intervalos de número de onda,

$k_{p0} + (q-1/2)\Delta_k \leq k(p) \leq k_{p0} + (q+1/2)\Delta_k$ , onde  $-n \leq q \leq +n$  e  $k_{p0}$  é o modo central do respectivo pacote  $p$ . As médias parciais, realizadas sob sub-intervalos da variável contínua  $k(p)$ , discretizam o pacote, que passa a ser representado por um pente. Cada sub-divisão do pacote passa a ser representada por um dos modos discretos do correspondente pente, um “dente” do pente.

Para que não haja interação entre modos do mesmo pente é necessário que a meia largura dos pacotes eletrostáticos 1 e 2 seja bem menor que a distância espectral entre estes. Assim, devemos ter  $\Delta_n \ll |k_{10} - k_{20}|$ . Por outro lado, as somas sobre os índices  $l$  e  $m$  correm irrestritas de  $-n$  a  $+n$ , o que é válido quando a região em que se dá as interações não lineares possui uma largura  $l_{int}$ , muito menor que a dimensão física,  $L$ , que contém as ondas. Esta largura estreita, pode corresponder a uma região altamente ionizada, em um plasma inomogêneo, ou, ainda, a região onde se encontra presente um material dielétrico não linear, caso no qual os modos em questão compoem ondas de luz. Para se chegar a uma interação de campo médio, é conveniente explicitar esta limitação espacial das interações, mediante um fator de forma  $f(x)$ , incluído nos termos não lineares das equações de Zakharov,

$$(i\partial_t + \partial_x^2) \vec{E} = fn\vec{E}, \quad (3.5)$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)n = f\partial_x^2 |\vec{E}|^2. \quad (3.6)$$

Os campos envolvidos, conforme a Eq.(3.1), são dados como,

$$E = \sum_{q=-n}^{q=+n} [a_{1q}(t) e^{ik_{1q}x} + a_{2q}(t) e^{ik_{2q}x}], \quad (3.7)$$

$$n = \sum_{q=-n}^{q=+n} [a_{3q}(t) e^{ik_{3q}x} + a_{3q}^*(t) e^{-ik_{3q}x}]. \quad (3.8)$$

Por simplicidade, tomamos o fator de forma como,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & |x| > l_{int}/2, \\ f(x) &= 1, & |x| \leq l_{int}/2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aplicando a transformada de Fourier nas Eqs.(3.5)-(3.6), obtem-se, para um dado modo  $pq$ ,

$$\begin{aligned} i\frac{da_{1q}}{dt} &= \omega_{1q}a_{1q} + \frac{l_{int}}{L} \sum_{l,m} \tilde{f}_{l+m-q} a_{2l} a_{3m} , \\ i\frac{da_{2q}}{dt} &= \omega_{2q}a_{2q} + \frac{l_{int}}{L} \sum_{l,m} \tilde{f}_{l-m-q} a_{1l} a_{3m}^* , \\ \frac{d^2 a_{3q}}{dt^2} &= -\omega_{3q}^2 a_{3q} - k_3^2 \frac{l_{int}}{L} \sum_{l,m} \tilde{f}_{l-m-q} a_{1l} a_{2m}^* , \end{aligned}$$

onde os fatores de forma, no espaço recíproco, são dados por

$$\tilde{f}_{l\pm m-q} \equiv \frac{\sin[(l \pm m - q)\Delta_k l_{int}/2]}{(l \pm m - q)\Delta_k l_{int}/2} . \quad (3.10)$$

Tais fatores são gerados por integrais do tipo

$$\frac{1}{L} \int_{-l_{int}/2}^{+l_{int}/2} e^{i\Delta_k x} dx = \frac{l_{int}}{L} \frac{\sin(\Delta_k l_{int}/2)}{\Delta_k l_{int}/2} , \quad (3.11)$$

onde consideramos sempre modos centrais, tais que,  $k_{10} = k_{20} + k_{30}$ . Assim, como  $\Delta_k$  é a distância entre dois modos contíguos, tomada igual para os três pentes, temos,  $\Delta k = k_{2l} + k_{3m} - k_{1q} = (l + m - q)\Delta_k$ , para os modos do primeiro pente ( $p = 1$ ),  $\Delta k = k_{1l} - k_{3m} - k_{2q} = (l - m - q)\Delta_k$ , para os modos do segundo pente ( $p = 2$ ) e  $\Delta k = k_{1l} - k_{2m} - k_{3q} = (l - m - q)\Delta_k$ , para os modos do terceiro pente ( $p = 3$ ). Note-se que, se não houvesse o fator de forma, as integrações da transformada de Fourier, Eq.(3.11), extenderiam-se por toda a região  $l_{int} \rightarrow L$ , o que levaria a uma seleção de modos ressonantes, tais que  $\Delta k = 0$ . Trataremos deste caso no Cap.4, no presente momento estamos interessados na situação oposta, aquela na qual a meia largura dos pentes envolvidos é muito menor que o inverso da largura em que se dá a interação,  $\Delta_n \ll 2\pi/l_{int}$ . Neste caso, podemos incluir todos os possíveis termos de interação bilinear entre os pentes, pois seus respectivos fatores de forma,  $\tilde{f}$ , são não nulos. Além disto, como a meia largura dos pacotes é muito menor que o ponto de primeiro zero de  $\tilde{f}$ , o qual se dá em  $(\Delta k)_{Max} l_{int}/2 = \pi$ , todos os fatores de forma que envolvem os três pentes, Eq.(3.10), podem ser aproximados a um. Por fim, a distância entre modos contíguos, no intervalo  $L$ , é dada por  $2\pi/L$ , sendo que, no espaço recíproco, a região de interação corresponde a uma largura máxima, dada por  $(\Delta k)_{Max} = 2\pi/l_{int}$ . Portanto, o número de modos contidos na região de

interação,  $N$ , é tal que, o coeficiente  $l_{int}/L = 1/N$  corresponde ao coeficiente comum aos somatórios das Eq.(3.2)-(3.4). Frisamos que, a condição  $\Delta_n \ll 2\pi/l_{int}$  é suficiente, para a aplicabilidade do modelo de interações de campo médio, também chamado de modelo democrático. Numa situação experimental isto pode corresponder a uma resolução espectral limitada.

Vamos analisar, portanto, um modelo no qual a evolução de um dado modo,  $a_{12}$ , por exemplo, depende explicitamente de todos modos presentes nos outros dois pentes. Os produtos  $a_{2l}a_{3m}$ , presentes na Eq.(3.2), envolvem todas as possíveis combinações,  $-n \leq l \leq +n$  e  $-n \leq m \leq +n$ . Note-se, ainda em relação às Eqs.(3.2)-(3.4) que,  $\omega_{p0} = \omega_p$  e  $k_{p0} = k_p$  são, respectivamente, a frequência angular e o número de onda dos modos centrais do pente  $p$ . No presente capítulo, além do já usual casamento perfeito entre os número de onda centrais,  $k_1 = k_2 + k_3$ , consideraremos frequências angulares centrais, tais que,  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ . Portanto, o parâmetro de defasagem angular do Cap.2, aqui definido em relação aos modos centrais, é sempre tomado como nulo,  $\Omega = 0$ . Esta escolha maximiza a ressonância da interação do tripleto de pentes. Tem-se, então,  $k_1 = (1 + k_3)/2$  e  $k_2 = (1 - k_3)/2$ . Portanto, dado  $k_3 = 1$ , temos  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0$ .

Quando os pentes são muito estreitos,  $\Delta_n \ll 1$ , recupera-se o caso de um tripleto monocromático. Para tanto, tomam-se amplitudes independentes do sub-índice  $q$ , o que nos permite efetuar as somas sobre os modos de um dado pente. Assim as equações de um tripleto com bandas largas, Eqs.(3.2)-(3.4), reduzem-se às do caso monocromático, Eqs.(2.10)-(2.12). Como partimos das equações de Zakharov, a evolução dos modos íon-acústicos,  $p = 3$  na Eq.(3.4), envolve derivação de segunda ordem no tempo. Isto a faz diferir do que se tem mais usualmente na literatura, MARTINS & MENDONÇA (1985) e ROBINSON & DRYSDALE (1996), onde a derivada é de primeira ordem. No entanto, analogamente ao caso monocromático do Cap.2, podemos obter uma redução na ordem temporal íon-acústica, aplicando uma aproximação adiabática. Neste regime, os campos  $a_{3q}$  são descritos modulacionalmente como o produto de uma fase rápida com uma amplitude de variação lenta,  $a_{3q} = e^{-i\omega_{3q}t}\tilde{a}_{3q}$ , supondo-se que  $|d^2\tilde{a}_{3q}/dt^2| \ll |\omega_{3q}d\tilde{a}_{3q}/dt|$ . Tomadas as derivadas temos,

$$\frac{da_{3q}}{dt} = -i\omega_{3q}a_{3q} + e^{-i\omega_{3q}t}\frac{d\tilde{a}_{3q}}{dt}, \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2a_{3q}}{dt^2} \approx -\omega_{3q}^2 a_{3q} - 2i\omega_{3q}e^{-i\omega_{3q}t}\frac{d\tilde{a}_{3q}}{dt}, \quad (3.13)$$

sendo que, na segunda das equações acima, um termo  $e^{-i\omega_{3q}t} d^2 \tilde{a}_{3q} / dt^2$  foi desprezado, tendo em vista a aproximação adiabática. Com isto, a equação de evolução dos modos íon-acústicos, Eq.(3.4), reduz-se à

$$i\dot{a}_{3q} = \omega_{3q}a_{3q} + \frac{k_3^2}{2\omega_{3q}N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{2m}^* . \quad (3.14)$$

Nos referiremos ao sistema de equações Eqs.(3.2)-(3.4) como sendo o sistema completo. Quando utilizarmos a Eq.(3.14) no lugar da Eq.(3.4) usaremos o termo sistema adiabático. É a mesma terminologia que usamos no caso monocromático. A seguir estudaremos a dinâmica do sistema segundo uma aproximação de modo teste, a qual consiste num método em que o campo médio é tomado como coerente.

## 3.2 Coerência segundo a aproximação de modo teste

Uma maneira de estudar a coerência dos sistemas de muitos modos, conforme PAKTER et al. (1995) e ROBINSON & DRYSDALE (1996), se dá por um teste de consistência. Supõe-se que todos os modos, em cada um dos pentes, evoluem coerentemente, ou seja, seguem em conjunto sua dinâmica, sem se afastarem uns dos outros. Esta condição inicial é, então, explicitamente tomada na equação de um dado modo, ao qual chamamos modo teste. Portanto, na evolução do modo teste todos os outros modos envolvidos entram como um campo coerente dado, pré-estabelecido conforme os resultados do Cap.2, o qual inserimos na equação do modo teste. A integração numérica deste particular modo indica-nos, por fim, se a suposição de coerência é ou não consistente. Tal procedimento pode ser realizado com o sistema completo ou com o adiabático. O sistema será coerente, quando o modo teste se mantiver estável, ou seja, se sua evolução seguir qualitativamente a pré-estabelecida. Em geral, ao desenvolvermos o método numericamente, tomamos o modo teste como sendo um pertencente ao primeiro pente,  $a_{1q}$ , indicando-o com um super-índice  $T$ . Equacionando,

$$i\dot{a}_{1q}^T = \omega_{1q}a_{1q}^T + Na_2a_3 , \quad (3.15)$$

sendo que  $a_2 = a_{2l}$  e  $a_3 = a_{3m}$  para  $-n \leq l, m \leq +n$ , os quais são, respectivamente, os campos comuns aos pentes 2 e 3. Note-se o fator  $N$ , presente no acoplamento

bilinear. Ele surge, porque o somatório possui  $N^2$  termos que se tornam idênticos, quando tomamos campos comuns para os pentes dois e três. Disto resulta o fator  $N^2/N$ , conforme a Eq.(3.2). Reescalando os campos, com  $a = A/N$ , tem-se

$$i\dot{A}_{1q}^T = \omega_{1q}A_{1q}^T + A_2A_3. \quad (3.16)$$

Para estimar a transição entre coerência e incoerência, extraem-se as fases rápidas,  $A_p = \tilde{A}_p e^{-i\omega_p t}$ ,  $p = 2, 3$  e  $A_{1q}^T = \tilde{A}_{1q}^T e^{-i(\omega_2 + \omega_3)t}$ . Definimos, também,

$$\delta_{1q} \equiv \omega_{1q} - \omega_2 - \omega_3 = \omega_{1q} - \omega_1 \quad (3.17)$$

$S \equiv \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 = S_R + iS_I$  e  $\tilde{A}_{1q}^T \equiv X_q + iY_q$ . Com isto, derivando a Eq.(3.16) no tempo, chega-se a uma forma mais adequada:

$$\ddot{X}_q + \delta_{1q}^2 X_q = \dot{S}_I - \delta_{1q} S_R \equiv \hat{S}_R, \quad (3.18)$$

$$\ddot{Y}_q + \delta_{1q}^2 Y_q = -\dot{S}_R - \delta_{1q} S_I \equiv \hat{S}_I. \quad (3.19)$$

Estas são equações de um oscilador harmônico forçado, e o comportamento do modo teste pode ser analisado segundo esta perspectiva. A dinâmica dependerá essencialmente da evolução das fontes,  $\hat{S}_R$  e  $\hat{S}_I$ . Note-se que, dada a forma das Eqs.(3.18) e (3.19), os resultados a serem obtidos inserem-se na teoria geral de osciladores não-lineares acoplados, KURAMOTO & NISHIKAWA (1987). Estudaremos, a seguir, os casos adiabático e completo.

### 3.3 Modo teste na aproximação adiabática

A dinâmica adiabática, supondo-se movimento sincrônico dos modos em cada um dos três pentes, segue as seguintes equações ,

$$i\dot{\tilde{A}}_1 = \tilde{A}_2 \tilde{A}_3, \quad (3.20)$$

$$i\dot{\tilde{A}}_2 = \tilde{A}_1 \tilde{A}_3^*, \quad (3.21)$$

$$i\dot{\tilde{A}}_3 = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2^*, \quad (3.22)$$

onde, de forma similar a definições anteriores,  $A_p = \tilde{A}_p e^{-i\omega_p t}$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Consideraremos, a partir de agora, que  $k_1 = 1 = k_3$  e  $k_2 = 0$ . Este é o sistema adiabático e regular que estudamos no Cap.2, e que possui três constantes de movimento, entre



as quais, a hamiltoniana, dada por

$$\mathcal{H}_{ad} = 2\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3} \cos \phi , \quad (3.23)$$

onde  $\phi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ , sendo que utilizamos a transformação de variáveis,  $\tilde{A}_p \equiv \sqrt{\rho_p} e^{i\phi_p}$ . As outras duas constantes são as de Manley-Rowe,  $A = \rho_1 + \rho_2$  e  $B = \rho_1 + \rho_3$ , o que nos leva a hamiltoniana unidimensional analisada no Cap.2, Eq.(2.25). Neste caso ela é restrita ao caso  $\Omega = 0$ , assumindo, portanto, a forma

$$\mathcal{H}_{adr} = 2\sqrt{\rho_1(A - \rho_1)(B - \rho_1)} \cos \phi . \quad (3.24)$$

O espaço de fase já foi analisado e sua representação gráfica encontra-se na Fig.2.1(a). Quanto ao que nos concerne no momento, localizam-se pontos de equilíbrio estável em  $E_l \Rightarrow (\phi_l, \rho_0) = ([2l + 1]\pi, A/3)$ , pontos instáveis residindo em  $I_l \Rightarrow (\phi_l^{(I)}, \rho_1^{(I)}) = (2l\pi, A)$ . Aqui tomamos, como já é usual,  $A = B$ . A região  $\mathcal{R}_0$ , a qual já nos referimos no Cap.2, é centrada no ponto  $E_0$ , sendo seus limites as retas  $\rho_1$  que passam por  $\phi = \pi/2$  e  $\phi = 3\pi/2$ . Sobre  $E_l$  a fase relativa entre os modos é constante,  $\dot{\phi} = d/dt(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) = 0$ , .

Sobre o ponto de equilíbrio, a frequência das fontes  $\hat{S}_R$  e  $\hat{S}_I$  do modo teste, Eq.(3.18) e (3.19), respectivamente, podem ser facilmente calculadas. As equações de Hamilton para as fases  $\phi_2$  e  $\phi_3$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{ad}}{\partial \rho_2} , \\ \dot{\phi}_3 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{ad}}{\partial \rho_3} , \end{aligned}$$

nos fornecem,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= \sqrt{\frac{\rho_3\rho_1}{\rho_2}} \cos \phi , \\ \dot{\phi}_3 &= \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3}} \cos \phi . \end{aligned}$$

Ora, sobre o ponto fixo temos  $\rho_1 = A/3$ ,  $\rho_2 = 2A/3 = \rho_3$  e  $\cos \phi = -1$ , consequentemente  $\dot{\phi}_p = -\sqrt{A/3}$  e  $S = \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 = \sqrt{\rho_2 \rho_3} e^{i(\phi_2 + \phi_3)} = 2A/3 e^{-2i\sqrt{A/3}t}$ . Portanto, sob o ponto de equilíbrio, temos uma frequência de fonte dada por  $\omega_0 = 2\sqrt{A/3}$ .

Supondo que o modo teste responde harmonicamente com a frequência do ponto fixo,  $\omega_0$ , teremos, simplifcadamente, uma dinâmica do tipo

$$\ddot{X}_q + \delta_{1q}^2 X_q = C \cos(\omega_0 t), \quad (3.25)$$

o que nos dá, para a parte real do modo teste,  $X_q = [C/(\delta_{1q} - \omega_0)] \cos \omega_0 t$ . Note-se, então, que estarão em fase com o modo central todos os modos que satisfazem  $\delta_{1q} < \omega_0$ . Por outro lado, um modo do pente que tiver esta desigualdade revertida, irá se encontrar defasado de  $\pi$  em relação ao modo central, devido à troca de sinal do coeficiente  $[C/(\delta_{1q} - \omega_0)]$ . Com isto, o referido modo desacopla-se de seus companheiros de pente, o que caracteriza incoerência. De fato, como já se demonstrou, ROBINSON & DRYSDALE (1996), a coerência é perdida quando o modo mais externo do pente evolui fora da ressonância, o que se dá quando

$$\delta_{1,q=n} > \omega_0, \quad (3.26)$$

onde, como definido anteriormente,  $\delta_{1,q} \equiv \omega_{1,q} - \omega_{1,0}$  é a diferença, no primeiro pente, entre as frequências do modo  $q$  e do modo central,  $q = 0$ . Mais exatamente, o critério de Robinson se aplica ao modo mais externo que reside à direita do pacote. Aí temos a maior diferença em relação à frequência central, visto que  $\delta_{1,q=-n} < \delta_{1,q=+n}$ . O processo de perda de coerência é tão rápido, que pode ser encarado como uma transição de fase, de um estado de interação coerente, a outro, de fase incoerente e, praticamente, randômica, ROBINSON & DRYSDALE (1996). Este último estado é analisado, usualmente, via “random-phase-approximation” (RPA) MARTINS & MENDONÇA (1985).

Voltando à Fig.2.1(a), vamos nos aproximar da separatriz, seguindo ao longo da linha  $\phi = \pi$ , tendo-se  $\rho_1(t = 0) \equiv \rho(0)$  e  $A/3 \leq \rho(0) \leq A$ . A medida que nos afastamos do entorno do ponto de equilíbrio, a dinâmica vai se tornando mais complexa, pois o termo de fonte adquire mais uma frequência característica, além da considerada no parágrafo anterior. Esta outra frequência origina-se da oscilação da amplitude  $\rho_1$ , a qual não exerce papel relevante na dinâmica da fonte quando o sistema repousa no ponto de equilíbrio. Entretanto, na vizinhança da separatriz, é possível fazer algumas estimativas. As trajetórias, nesta região, passam próximas ao máximo

de amplitude,  $\rho(0) = (1 - \epsilon)A$  ( $\epsilon \ll 1$ ), o que leva os termos de fonte, Eq.(3.18) e (3.19), a valores muito pequenos, incapacitando o “phase-locking” necessário à coerência. Nestas condições, o modo teste move-se, praticamente, só sob a ação da força  $\delta_{1q}^2 X_q$ . Além disto, as trajetórias passam a maior parte de seu tempo neste trecho, que pode ser caracterizado por um parâmetro pequeno,  $\epsilon \equiv A - \rho(0)$ . O tempo de percurso neste trecho é tão longo, que praticamente pode ser tomado como igual ao período da trajetória inteira. A frequência da separatriz pode, então, ser aproximada à  $\omega_{sep} = 2\pi/T$ , onde  $T$  é o tempo dispendido no trecho em consideração. O critério de coerência pode, assim, ser estimado como,

$$\omega_{sep} \gg \delta_{1n} . \quad (3.27)$$

Com a aproximação do período, um rápido cálculo nos leva à

$$\omega_{sep} = -\frac{\sqrt{3}\pi\omega_0}{\log \epsilon} , \quad (3.28)$$

o que indica, como se espera de uma separatriz, frequência assintoticamente nula, visto que  $\rho(0) \rightarrow A$  implica em  $\epsilon \rightarrow 0$ . Há, portanto, divergência logarítmica do denominador de  $\omega_{sep}$ . A mesma aproximação é obtida, se tomamos expansões assintóticas envolvendo as soluções analíticas BYRD & FRIEDMAN (1971), as quais são as funções elípticas dadas na Eq.(2.38). Note-se que, próximo à separatriz, a qual é a região do processo de decaimento, a condição para transição coerência-incoerência é radicalmente diferente da que se tem nas proximidades do ponto de equilíbrio. A seguir, iremos apresentar algumas simulações, validando as estimativas analíticas até agora feitas.

### 3.4 Simulações do sistema adiabático

Iniciaremos com simulações do sistema adiabático, tomando o seguinte conjunto de condições iniciais:  $a_{1q}(t = 0) = \sqrt{\rho(0)}/N$ ,  $a_{2q}(t = 0) = \sqrt{(A - \rho(0))}/N$ ,  $a_{3q} = \sqrt{(A - \rho(0))}/N$ , onde  $\rho(0) < A$ ; sendo os coeficientes  $a_{pq}$  todos reais, as respectivas fases anulam-se. Para simulações do sistema completo, as condições iniciais, acima dadas, foram complementadas com uma condição inicial para  $\dot{a}_{3q}(t = 0)$ , utilizando a Eq.(3.14), visto que a equação de evolução do terceiro pente envolve derivada temporal de segunda ordem. Utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo

temporal variável, cada pente contendo  $N = 401$  componentes, sendo  $\Delta_k = 0,035$ . A acuidade foi testada positiva, até o fator de  $10^{-5}$ , com ajuda da extensão multimodal das constantes obtidas em deOLIVEIRA et al. (1997) e FRICHEMBRUDER et al. (2000).

Para diagnose de coerência utilizamos duas quantidades. A primeira delas é o “bunching-factor”, definido na forma

$$b = \left| \langle \langle e^{i\Delta\phi_{1q}} \rangle \rangle \right| \equiv \left| \frac{1}{T} \int_{t=0}^T dt \left( \frac{1}{N} \sum_{q=-n}^{+n} e^{i\Delta\phi_{1q}} \right) \right|, \quad (3.29)$$

sendo que  $\Delta\phi_{1q} \equiv \phi_{1q} - \phi_{10}$ . As fases foram definidas a partir da forma trigonométrica das amplitudes,  $a_{pq} \equiv |a_{pq}| e^{i\phi_{pq}}$ , onde  $\phi_{pq} \pmod{2\pi}$ . Note-se que o “bunching-factor” foi definido para o pente 1, no entanto, para efeitos de análise, qualquer um dos três pentes poderia ser igualmente usado. O “bunching factor” envolve uma média temporal e outra, sobre os modos do pente, o que fornece uma medida simples, indicando, grosso modo, o grau de coerência. Quando  $b$  é muito pequeno, a coerência é baixa, enquanto que, para  $b \approx 1$ , há um alto grau de coerência.

A segunda quantidade a ser definida nos dá um panorama mais detalhado, indicando a taxa média com a qual se dá a perda de coerência de um dado modo do pente. Definimos,

$$\Delta\tilde{\phi}_{1q} = \Delta\phi_{1q} + 2\pi N_{2\pi}. \quad (3.30)$$

Nossa condição inicial corresponde à  $\Delta\phi_{1q} = 0 = 2\pi N_{2\pi}$ . A partir daí,  $N_{2\pi}$  sofre um incremento de  $+1$  ou  $-1$ , conforme  $\Delta\tilde{\phi}_{1q}$  torna-se maior que  $+2\pi$ , ou menor que  $-2\pi$ , respectivamente. Contamos o número de vezes em que este processo se dá,  $N_q(T)$ , ao longo de um tempo longo de computação  $T$ , e definimos a taxa com que a coerência do modo  $q$  é quebrada em relação ao modo central,  $R_q \equiv N_q(T)/T$ . A taxa total é a média sob todos os modos do pente,

$$R \equiv \frac{\sum_{q \neq 0} R_q}{N}. \quad (3.31)$$

Veremos, adiante, que as taxas de decoerência,  $R_q$  e  $R$ , nos dão uma visão mais detalhada sobre a transição coerência-incoerência.

Primeiros resultados podem ser vistos na Fig.3.1, onde representamos graficamente o valor assintótico de  $b$  ( $T = 10^5$ ), para vários valores de  $A$ . Quando  $A$  é tão pequeno que  $\omega_0 < \delta_{1n}$ , como em  $A = 0,005$ , onde  $\omega_0 = 0,057735 < \delta_{1n} = 0.071225$ , tem-se  $b \rightarrow 0$ , o que denota incoerência. Se o valor de  $A$  cresce, a ponto de reverter a desigualdade, a dinâmica torna-se coerente, como em  $A = 0,04$ , onde  $\omega_0 = 0,1633 > \delta_{1n}$ . Ambos os resultados são compatíveis com as previsões obtidas a partir do modo teste, exposto na seção anterior, e originalmente obtidos em ROBINSON & DRYSDALE (1996).

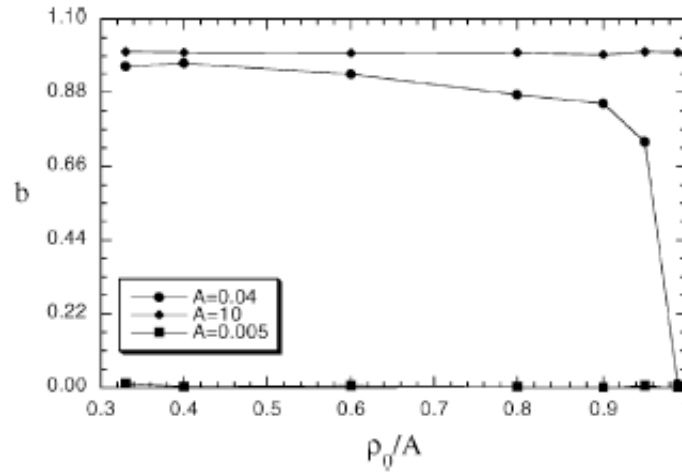


Figura 3.1: Valores assintóticos de  $b$  contra  $\rho(0)/A$ , calculados a partir do sistema adiabático. Tempo de simulação,  $T = 10^5$

Quando as condições iniciais são levadas em direção à separatriz da Fig.2.1,  $\rho(0) \rightarrow A$ , afastando-se do ponto de equilíbrio, a coerência pode ser perdida. Portanto, a coerência do sistema depende fortemente das condições iniciais, o que é consequência direta do decrescimento da frequência, à medida em que o sistema é levado em direção à separatriz. Para  $A = 0,04$ , a expressão de  $\omega_{sep}$ , Eq.(3.28) prediz uma transição próxima a  $\rho(0) = 0,99A$ . De fato, os resultados numéricos indicam que a transição já ocorreu em  $\rho(0) = 0,9A$ . Apesar da diferença, a Eq.(3.28) fornece um bom ponto de partida para análise da perda de coerência nas proximidades da separatriz.

Estados coerentes podem ser obtidos, mesmo nas proximidades da separatriz, desde que as amplitudes de campo sejam elevadas a valores suficientemente altos, como se pode ver na Fig.3.1, caso  $A = 10$ . Esta é uma informação relevante, já

conjecturada em ROBINSON & DRYSDALE (1996), onde os autores suspeitaram que, à medida em que o sistema afasta-se do ponto de equilíbrio, as amplitudes de bifurcação para coerência tornam-se maiores. Vemos, aqui, que esta é realmente uma característica do sistema. Salientamos, novamente, que a região próxima à separatriz é, precisamente, o estado que descreve o processo de decaimento, no qual uma intensa amplitude de “pump”, pente 1, cede energia aos pentes 2 e 3, que crescem a partir de níveis de ruído. Finalmente, plotamos na Fig.3.2 a trajetória do modo mais externo do pente no espaço de fase, tanto na aproximação de modo teste quanto na simulação adiabática completa. Nas Fig.3.2(a) e (b), tem-se o estado coerente correspondente ao gráfico  $b \approx 0,9$ , que foi lançado na Fig.3.1, calculado segundo a aproximação de modo teste e segundo a simulação adiabática auto-consistente, respectivamente. Nas Fig.3.2(c) e (d) tem-se o estado incoerente o qual, na Fig.3.1, corresponde ao gráfico que, começando com  $b \approx 0,89$ , vai à  $b = 0$ . Os dois gráficos foram obtidos nas simulações de modo teste e adiabática completa, respectivamente. Note-se a concordância qualitativa, o que indica a utilidade do modo teste como boa aproximação tendo em vista sua concordância com a simulação autoconsistente, na qual a dinâmica de todos os  $3N$  modos é integrada, com o uso completo das Eq.(3.2), (3.3) e (3.14).

Vamos, a seguir, considerar o caso completo, no qual o pente três depende de derivação segunda no tempo o que nos levará a uma dinâmica caótica.

### 3.5 Simulações do sistema completo

A interação completa de três pentes de ondas, segundo as equações de Zakharov, envolve derivação de segunda ordem dos modos íon-acústicos que compõem o terceiro pente. Devido a isto, a dinâmica do sistema pode tornar-se não integrável, apresentando uma evolução caótica. Tal comportamento pode ser observado na Fig.3.3, onde o histórico de duas condições iniciais foi lançado num mapa de Poincaré para o caso monocromático, no qual  $N = 1$ . No ítem (a) temos  $A = 0,1$  e  $\rho(0) = 0,7A$  e no (b)  $A = 10$  e  $\rho(0) = 0,9A$ , ambos com valores relativamente altos para  $\rho(0)$ , o que representa bem uma interação de decaimento. Nesta figura, gravamos as coordenadas do espaço de fase, indicadas nos eixos, cada vez que  $|a_3|$  atinge um mínimo local. Na Fig.3.3(a), onde  $A = 0,1$ , a trajetória obtida é bastante regular e não difere muito do que se obteve na Fig.2.1, o que indica um regime onde a aproximação adiabática é justificável. Este foi o caso analisado no Cap.2, onde concluímos que a dinâmica

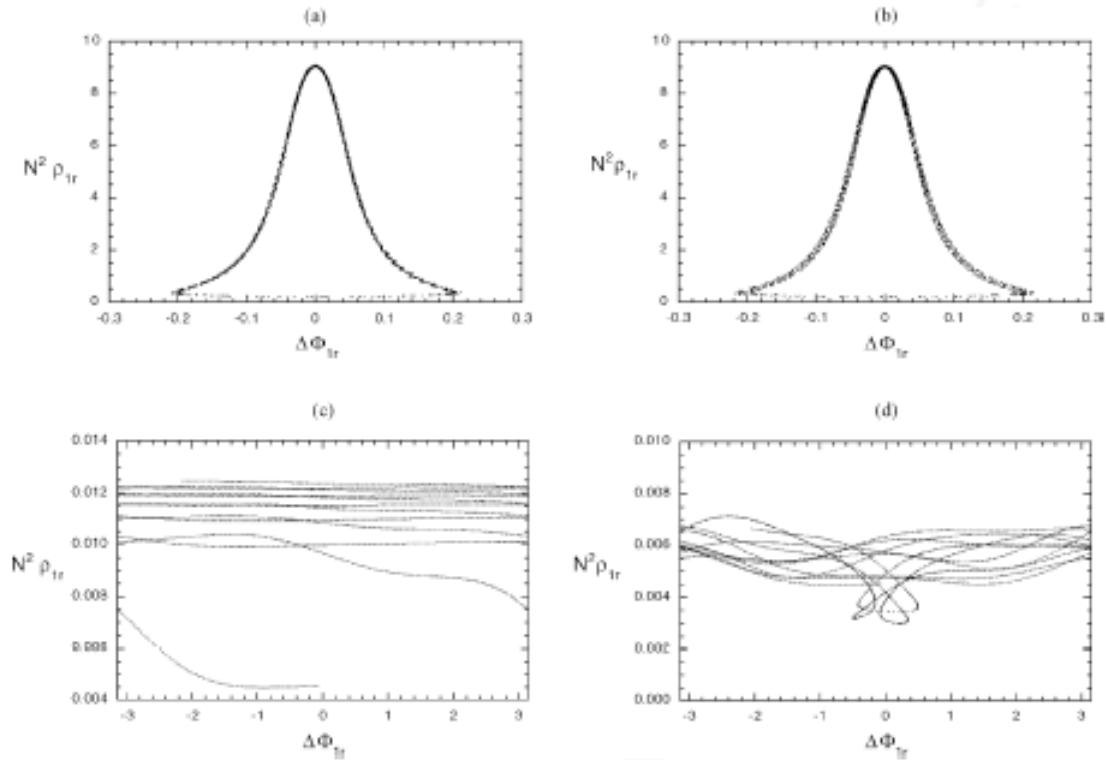


Figura 3.2: Espaço de fase do modo mais externo ( $1, q = n$ ) obtido de simulações do sistema adiabático. Em (a) e (b)  $A = 10$  e  $\rho(0) = 0,9A$ , com (a) obtido por simulação do modo teste e (b) por simulação autoconsistente. Em (c) e (d)  $A = 0,04$  e  $\rho(0) = 0,9A$ , com (c) obtido por simulação do modo teste e (d) por simulação autoconsistente. A diferença de fase entre o modo mais externo e o central,  $\Delta\phi_{1n}$ , está em radianos.

torna-se mais caótica à medida em que o valor da constante  $A$  aumenta; os campos envolvidos, portanto, devem tornar-se maiores, para que se desenvolva o caos.

O que ocorre no caso de um sistema apresentando múltiplos modos, descritos por pentes? Para obter respostas lançamos mão, novamente, do “bunching factor”, representado graficamente nas Fig.3.4(a) e (b). Em ambos os itens tem-se valores de  $b$ , tanto para o sistema completo quanto para o adiabático, tomadas condições iniciais no intervalo  $0 < \rho(0) < A$ . Resultados similares aos da Fig.3.1 estão presentes na Fig.3.4(a), onde tomamos amplitudes baixas,  $A = 0,04$ . Portanto, se  $A$  é pequeno, a dinâmica completa é semelhante à da aproximação adiabática. Para campos altos,  $A = 10$ , observe-se a Fig.3.4(b), o “bunching factor” é significativamente menor para a dinâmica completa, em comparação ao que se obtém na aproximação adiabática. Neste caso, onde  $A = 10$ , a aproximação adiabática nos deu  $b$  pouco abaixo de um,

sendo que o modo mais externo manteve-se acoplado ao modo central, conforme vimos nos espaços de fase graficados nas Fig.2.4(a) e (b). No caso da dinâmica completa, se consideramos o mesmo tipo de espaço de fase, somos levados à Fig.3.4(c) onde estão lançadas as coordenadas do modo mais externos à direita do modo central do pente 1, tendo-se  $A = 10$  e  $\rho(0) = 0,9A$ . A quebra de coerência é vista na forma como os pontos obtidos estão espalhados, resultado que não é surpreendente, tendo em vista o baixo valor de  $b$  obtido neste caso.

É importante ressaltar que o “bunching factor” não fornece uma diagnose plenamente confiável. O valor obtido na dinâmica completa,  $b \approx 0,4$  no ítem (b), parece indicar que algum grau de coerência é mantido. Se, conjuntamente ao “bunching factor”, lançamos mão do espaço de fase do modo  $(1, n)$ , Fig.3.4, podemos ser levados a concluir que apenas os modos mais externos desacoplaram-se do modo central. Tal conclusão pode ser enganosa, como veremos a seguir, considerando a taxa de quebra de coerência, definida na Eq.(3.31).

No caso de um dinâmica adiabática e incoerente, podemos calcular explicitamente a taxa  $R$ : passado um tempo  $T$ , a fase relativa de um modo  $(1, q)$  é dada por  $\delta_{1q}T$ . A taxa na qual a coerência é quebrada é, então, igual a  $\delta_{1q}T/(2\pi T) = \delta_{1q}/2\pi$ , a média por modos sendo

$$R = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_{1n} + \delta_{10}}{2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_{1n} + 0}{2} = \frac{\delta_{1n}}{4\pi} \equiv R_{ad}. \quad (3.32)$$

Tomando o presente caso, tem-se,  $\delta_{1n} = (1 + \Delta_n)^2 - 1$ , o que fornece  $R_{ad} = 0,0056$ , valor que coincide com os resultados assintóticos da simulação, graficados na Fig.3.5(a). Considerando o caso de decaimento de altas amplitudes,  $A = 10$  e  $\rho(0) = 0,9A$ , obtemos  $R_{ad} = 0$ , para o caso adiabático e  $R_{comp} \sim 0,06$  para a dinâmica completa, o que está dispostos na Fig.3.5(a). Este é um resultado bem mais elevado do que poderia ser gerado a partir da dinâmica adiabática e exemplifica o que ocorre para o caos em altas amplitudes:  $R_{comp}$  é uma ordem de grandeza maior que  $R_{ad}$ . Além disto, o perfil de  $R_q$ , como função de  $q$ , é completamente diferente, conforme tomamos o caso adiabático ou o completo. Esta função toma, no caso adiabático, uma dependência linear em  $\delta_{1q}$ , conforme vimos na Eq.(3.32), veja-se a Fig.3.5(b). Na presença de caos, ítem (c) da mesma figura, esta função toma um aspecto errático. Portanto, enquanto que no caso caótico a coerência é globalmente destruída, no caso adiabático é sempre possível encontrar, para qualquer tempo, modos que se mantêm em fase com o modo modo central. Para tanto, basta considerar modos com frequências lineares,  $\omega_{pq}$  que



difiram suficientemente pouco do central. As taxas  $R$  e  $R_q$  fornecem bons indicadores para a presença de caos, uma vez que seus formatos são sensíveis às condições iniciais. Até mesmo modos próximos uns aos outros acabam por distanciar-se, devido aos efeitos do caos. Contudo, resta entender o que leva a dinâmica completa a um estado totalmente incoerente. Embora não tenhamos feito, até agora, uma estimativa analítica, podemos dizer, sob o ponto de vista do modo teste, que cada um dos modos sofre um processo estocástico, induzido pela fontes estocásticas presente nas Eq.(3.18)-(3.19), conforme LICHTENBERG & LIEBERMAN (1991).

Investigamos o que ocorre em baixas e moderadamente elevadas amplitudes. Para amplitudes extremamente grandes, como, por exemplo,  $A = 10^3$ , com  $\rho(0) = 0,9A$ , nota-se, na Fig.3.6, um retorno ao estado coerente. Isto ocorre tanto na dinâmica completa, representada em termos de coordenadas relativas, indicadas nos eixos do gráfico da Fig.3.6, quanto na aproximação adiabática. O estado altamente coerente, visto no gráfico, manteve-se estável até tempos de simulação da ordem de  $10^3$  e  $10^4$ . No entanto, para tais valores de amplitude, é possível que seja necessária a inclusão, nas equações de evolução, de termos não-lineares de ordem mais alta. Esta última consideração permanece em aberto. De qualquer modo, ao que parece, a escala de tempo da dinâmica completa é tão longa que torna irrelevante as diferenças entre as frequências lineares dos modos presentes no pente. Este seria um quadro semelhante ao que se tem na dinâmica adiabática, tomados valores suficientemente altos para  $A$ .

### 3.6 Conclusões do capítulo

Neste capítulo estudamos a interação entre três grupos discretos de modos, os quais denominamos pentes. Para tanto, utilizamos aproximações, WEILAND & WILHELMSSON (1977) e ROBINSON & DRYSDALE (1996), aplicáveis quando a largura dos pentes é relativamente pequena, frente à distância entre os modos centrais destes pentes, o que exclui interações entre modos de um mesmo pente. Fizemos uso, também, da condição  $\Delta_n \ll 2\pi/l_{int}$ , onde  $\delta_n$  é a meia largura dos pentes e,  $l_{int}$ , a região onde se dá a interação não linear entre estes, limitada pelo fator de forma, Eq.(3.9). Isto nos levou a um modelo que denominamos de democrático, visto que os modos de um dado pente interagem com todos os modos presentes nos outros dois pentes. As somas de termos bilineares nas Eqs.(3.2)-(3.4) é irrestrita.

Aplicamos, em seguida, uma aproximação adiabática aos modos íon-acústicos, o que torna simétrico e de primeira ordem o sistema de equações da modelagem. Para analisar a transição entre coerência-incoerência, utilizamos o método do modo teste, o que nos levou a um sistema de osciladores lineares forçados e acoplados por termos não lineares. O essencial, neste ponto, é a forma das fontes de forçamento. Numa primeira avaliação do caso adiabático, analisamos a situação de equilíbrio, o que nos levou ao critério de transição dado pela Eq.(3.26). Este critério nos diz que o pente torna-se incoerente quando a diferença entre as frequências do modo mais externo e do modo central torna-se maior que a frequência de fonte.

A seguir, estudamos a interação de decaimento, que ocorre próximo a separatriz, obtendo uma aproximação para a frequência não linear. O critério para incoerência foi, então, comparado aos resultados obtidos por simulação do sistema adiabático, em sua forma completa, e segundo a aproximação de modo teste. A diagnose de coerência foi obtida com a definição do “bunching factor” e da taxa de decoerência. Os resultados a que chegamos confirmaram a validade dos critérios obtidos pelo modo teste. O critério de coerência do pente, na interação de decaimento, é estimado na forma da Eq.(3.27), sendo severamente reduzido frente a situação de equilíbrio

Por fim, estudamos a dinâmica completa, na qual os modos íon-acústicos dependem de derivação de segunda ordem no tempo. Para baixas amplitudes, obtivemos concordância com o quadro obtido a partir da aproximação adiabática. Quando aumentamos as amplitudes, chegamos a uma situação caótica, que apresenta um “bunching factor” bem menor que o do caso adiabático. Na dinâmica completa, a transição para incoerência ocorre de forma global, para todos os modos envolvidos. No caso adiabático, é sempre possível encontrar, a qualquer tempo, modos, que estando suficientemente próximos ao modo central, mantém-se em fase com este. Para campos altos a coerência é reduzida, mas, para campos ainda maiores a coerência ressurge criando um movimento altamente sincronizado.

No próximo capítulo, trataremos do caso no qual os pentes são largos demais para que seja válida a interação democrática. Esta é, de fato, um tipo de aproximação. Para tanto, lançaremos mão de um modelo no qual as interações não lineares se dão segundo um critério de seleção, no qual deve haver perfeito casamento entre os números de onda dos modos envolvidos. Tal modelo, como veremos, será aplicável quando a região de interação não linear se estender a todo espaço disponível.

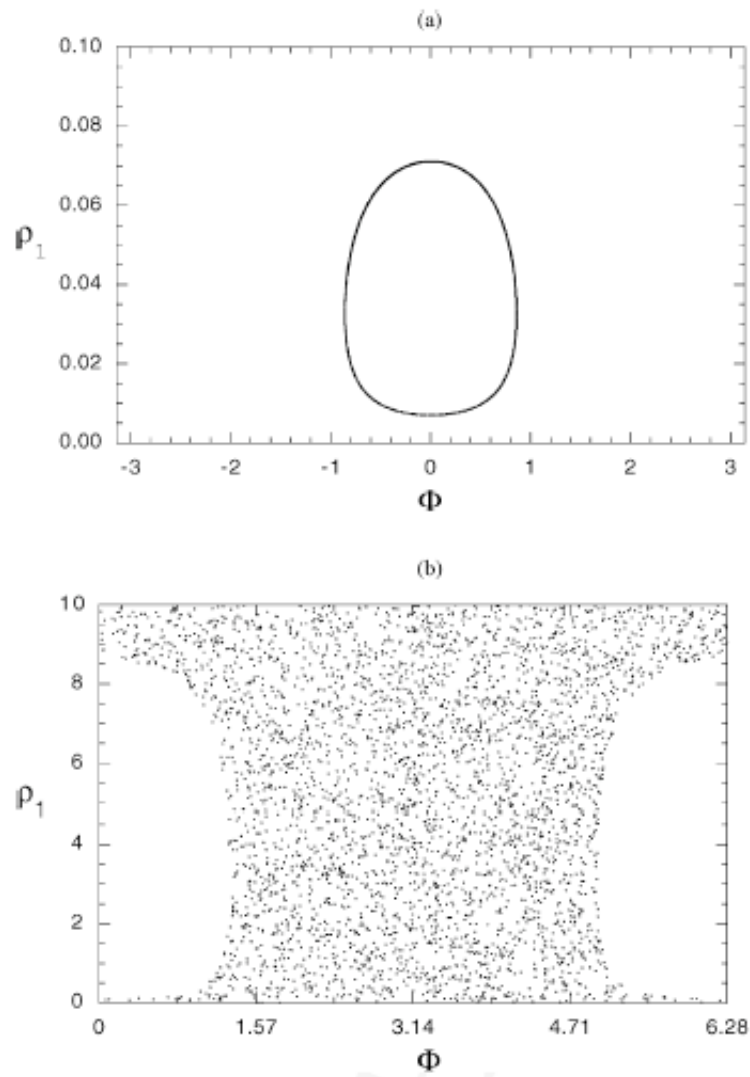


Figura 3.3: Mapas de Poincaré para a dinâmica do tripleto monocromático segundo o sistema de equações completo, não adiabático. Em (a)  $A = 0,1$  e  $\rho(0) = 0,7A$ , em (b)  $A = 10$  e  $\rho(0) = 0,9A$ ,  $\phi$  em radianos.

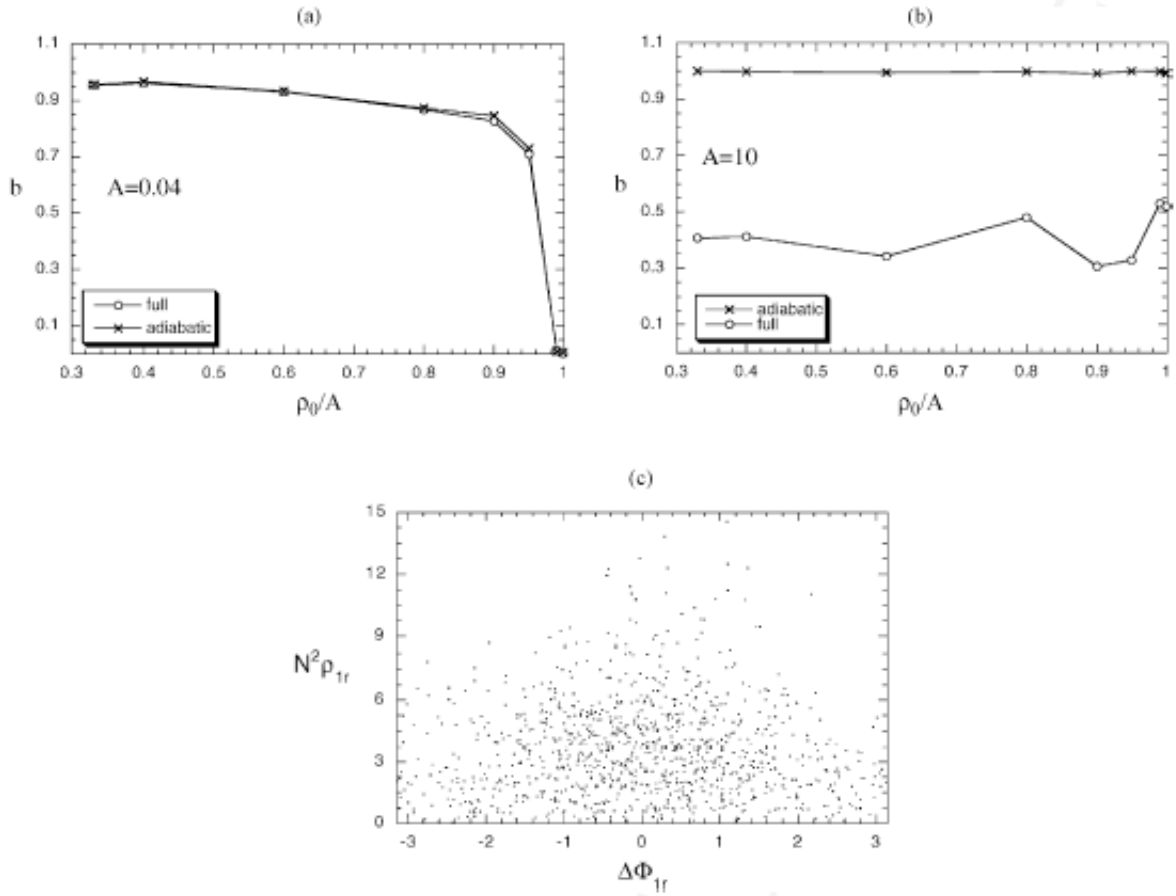


Figura 3.4: Comparação envolvendo os sistemas adiabático e completo. Valores assintóticos de  $b$  contra  $\rho(0)/A$  para  $A = 0,04$  em (a) e para  $A = 10$  em (b). No ítem (c) tem-se o mapa do diagrama de fase do modo mais à direita do primeiro pente, obtido por simulação auto-consistente do sistema completo, onde  $A = 10$  e  $\rho(0) = 0,9A$ .  $\Delta \phi_{1n}$  em radianos, tempo de simulação= $10^5$ .

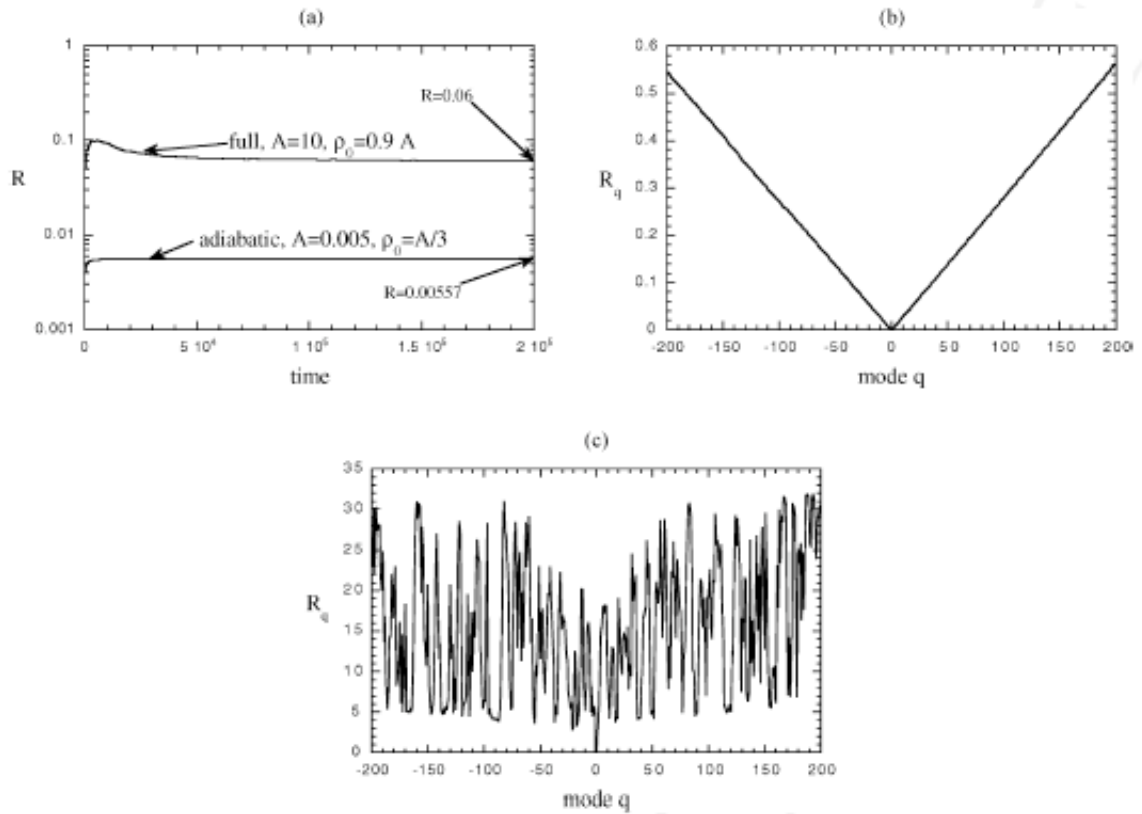


Figura 3.5: Ítem (a), taxa  $R$  obtida dos sistemas adiabático e completo. Ítem (b), valor assintótico de  $R_q$  contra  $q$  em um tempo  $T = 2 \times 10^5$  conforme o sistema adiabático. Ítem (c), valor assintótico de  $R_q$  contra  $q$  em um tempo  $T = 2 \times 10^5$  conforme o sistema completo.

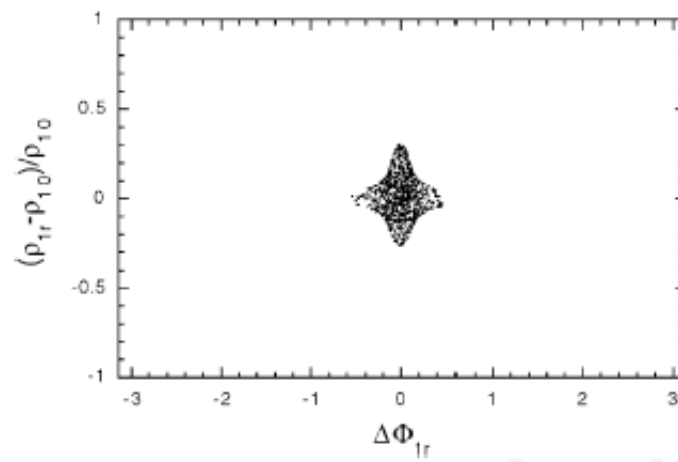


Figura 3.6: Dinâmica relativa normalizada para o modo mais externo à direita do modo central conforme a simulação auto-consistente do sistema completo. Caso de campos extremamente elevados,  $A = 10^3$  e  $\rho(0)/A = 0,9$ .  $\Delta\phi_{1n}$  em radianos.

## Capítulo 4

# O Tripleto com Interações Seletivas

No presente capítulo introduziremos um modelo no qual a interação do tripleto de pentes se dá com uma regra de seleção na qual são mantidos apenas os acoplamentos exatamente ressonantes. Para tanto, estenderemos a região onde se dá a interação não linear à todo espaço real, tomando, no fator de forma da Eq.(3.9),  $l_{int} \rightarrow L$ . Isto implica em tomar de forma rigorosamente correta todas as transformadas de Fourier envolvidas. Por exemplo, a evolução do primeiro pente envolverá termos não lineares tais que  $\dot{a}_{1q} \sim \sum' a_{2l} a_{3m}$  deverá respeitar a regra de seleção  $q = l + m$ , o que, aqui, é indicado pela apóstrofe no somatório. Conseqüentemente haverá, como veremos, a inclusão gradual de novos modos na dinâmica. Teremos, portanto, como será mostrado, um alargamento dos pentes, o que não ocorre no Cap.3 onde o número de modos é mantido fixo.

Partindo das equações de evolução do tripleto em campo médio, obteremos as correspondentes equações para a interação com regra de seleção ressonante. Para tanto, faremos duas aproximações nos coeficientes do sistema de equações de campo médio. Passaremos, então, ao espaço real, mediante uma transformada inversa de Fourier, obtendo um sistema de equações diferenciais parciais. Este sistema envolverá derivadas parciais espaciais de primeira ordem, e não mais altas, pois tomaremos relações de dispersão linearizadas. Esta é uma das aproximações tomadas, e, a partir delas, as velocidades de grupo dos pentes surgirão como parâmetros importantes. Além disto, os termos não lineares poderão ser interpretados como interações locais no espaço real. Isto é consequência da outra aproximação, onde desprezamos a largura

do espectro de frequências  $\omega_{3q}$ , presente nos coeficientes dos termos não lineares dos modos do pente três.

Analisaremos o caso em que os três pentes possuem a mesma velocidade de grupo. Com isto, poderemos aplicar uma transformação de coordenadas que transforma as equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias no tempo. Consideraremos, então, soluções estacionárias. Utilizando o método da fase estacionária, faremos estimativas analíticas, que nos levarão a algumas conclusões. Veremos que, assintoticamente, todos os modos envolvidos deverão tender a vibrar com a mesma frequência não linear. Haverá a inclusão de novos modos, até que seja atingida uma condição ressonante, a partir da qual a coerência deverá ser perdida. No entanto, se o modo ressonante estiver inicialmente presente, o pente deverá ser incoerente desde o princípio.

Apresentaremos os resultados de simulações para o sistema de ondas, nos limitando ao caso em que as velocidades de grupo dos pentes dois e três são iguais. Veremos, então, que as estimativas analíticas feitas são consistentes com os resultados numéricos que exporemos. Veremos, então, que as principais características da transição coerência-incoerência mantem-se inalteradas em relação ao que se obteve para o modelo de interações democráticas. Ou seja, se as frequências não lineares mantiverem-se muito maiores que as frequências dos modos lineares envolvidos teremos acoplamentos das fases e a dinâmica será coerente. Por outro lado, se as frequências lineares se tornarem da mesma ordem ou maiores que as frequências não lineares, o acoplamento entre as fases cessará, observando-se a transição para incoerência. A passagem para incoerência se dará quando o alargamento do pente atingir um modo ressonante que passa a crescer de modo independente dos outros.

## 4.1 Acoplamento Seletivo de Modos

Apresentamos, nos capítulos anteriores desta tese, aproximações e modelos para integração numérica e diagnose dos estados coerentes e incoerentes, seguindo trabalhos anteriormente publicados na literatura, ROBINSON & DRYSDALE (1996), deOLIVEIRA et al. (1997), FRICHEMBRUDER et al. (2000) e deOLIVEIRA et al. (2002). No tocante aos pentes de ondas, ao tomarmos a transformação de Fourier das equações de Zakharov, obtivemos acoplamentos bilineares entre vários modos de Fourier distintos. A princípio, o procedimento mais correto consiste em manter todos os possíveis acoplamentos. No entanto, verificamos, já no Cap.2, que alguns destes termos são



não ressonantes, o que os torna irrelevantes para a evolução do sistema. No início do Cap.2, vimos que a evolução dos modos eletrostáticos de Langmuir possuía dois termos, que gerados pelo membro não linear  $n\vec{E}$  da Eq.(2.1), possuem vetores de onda  $k_2 - k_3$  e  $k_1 + k_3$ . Estes termos, devido à condição de ressonância,  $k_1 = k_2 + k_3$ , permanecem em nível de ruído. Cabe, aqui, colocar o mesmo tipo de questão quando tratamos da interação de três pentes de ondas. A argumentação de ressonância, utilizada no caso monocromático, pode ser estendida ao caso de banda larga, fazendo-nos concluir que é desnecessário levar em conta termos de interação entre dois modos de um mesmo pente. Estes modos estão presentes na dinâmica, pois sua evolução envolve acoplamentos bilineares não nulos. No entanto, devido a falta de ressonância, permanecem em nível de ruído.

E quanto às interações entre modos de pentes distintos? Já analisamos o modelo democrático de ROBINSON & DRYSDALE (1996), no qual cada modo de um dado pente interage com todos os possíveis produtos bilineares de modos dos dois pentes restantes. Tal procedimento encontra-se também na literatura mais antiga. Citemos, por exemplo, WEILAND & WILHELMSSON (1977) e MARTINS & MENDONÇA (1985), sendo que neste último desenvolve-se um método de operadores de projeção. Este critério democrático é justificável no caso de pentes com bandas muito menores que a distância entre os pontos centrais dos pentes eletrostáticos um e dois. É necessário, também, que a largura de banda seja muito menor que o vetor de onda característico do sistema, dado por  $k_C = 2\pi/L$ , onde  $L$  é a dimensão do sistema. Lembrando que os pentes têm meia largura comum, dada por  $\Delta_n = n\Delta_k$  e que os vetores de onda centrais são  $k_{p0} = k_p$ , onde  $p = 1, 2, 3$ , deve-se ter  $\Delta_n \ll |k_2 - k_1|$  e  $\Delta_n \ll k_C$ . Portanto, o critério democrático só é aplicável quando a resolução espacial é baixa. Sob estas condições, obtivemos um sistema de  $3N$  equações de evolução para as amplitudes complexas dos modos do tripleto. Na aproximação modulacional, estas eram as Eq.(3.2), (3.3) e (3.14) as quais, por conveniência, reproduzimos aqui,

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{1q} &= \omega_{1q}a_{1q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{2l}a_{3m} , \\ i\dot{a}_{2q} &= \omega_{2q}a_{2q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{3m}^* , \\ i\dot{a}_{3q} &= \omega_{3q}a_{3q} + \frac{k_3^2}{2\omega_{3q}N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{2m}^* . \end{aligned}$$

Note-se que a interação do pente três com os pentes um e dois depende da largura do próprio pente três, via as componentes de frequência  $\omega_{3q}$ , presentes nos denominadores dos coeficientes  $k_3^2/(2\omega_{3q}N)$ . No presente capítulo, iremos desprezar o efeito de alargamento nestes coeficientes, tomando  $\omega_3 \rightarrow \omega_{3q}$  nos respectivos denominadores. Com isto, estes coeficientes se simplificarão, de  $k_3^2/(2\omega_{3q}N)$  para  $k_3/2N$ . Aplicaremos, também, uma reescala nos modos de Langmuir, definindo  $b_{pq} = (k_3/2)^{1/2}a_{pq}$ , para  $p = 1, 2$ . Redenominando os  $b$ 's como  $a$ 's, o sistema de equações da dinâmica com interações democráticas fica na seguinte forma,

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{1q} &= \omega_{1q}a_{1q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{2l}a_{3m} , \\ i\dot{a}_{2q} &= \omega_{2q}a_{2q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{3m}^* , \\ i\dot{a}_{3q} &= \omega_{3q}a_{3q} + \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{2m}^* . \end{aligned}$$

Usando as relações de dispersão, Eq.(2.5) e (2.6), as frequências dos modos podem ser expressas, de acordo com a notação do Cap.3, como,  $\omega_{pq} = \omega_p + 2q\Delta_k + (q\Delta_k)^2$ , para  $q = 1, 2$  e  $\omega_{3q} = \omega_3 + q\Delta_k$ . Desprezando os termos de segunda ordem presentes na relação de dispersão dos modos de Langmuir, podemos tomar, como regra geral,

$$\omega_{pq} = \omega_p + v_{gp}k_q , \quad (4.1)$$

onde

$$v_{gp} = \left( \frac{d\omega_{pq}(k_q)}{dk_q} \right)_{k_q=0} , \quad (4.2)$$

é a velocidade de grupo do pente  $p$ , sendo  $k_q \equiv k_{pq} - k_{p0} = q\Delta_k$  a variável de número de onda centrada no seu respectivo pente. Note-se que esta é a aproximação de primeira ordem para uma relação de dispersão genérica,  $\omega = \omega(k)$ . Feito isto, as equações para o tripleto em campo médio ficam na seguinte forma

$$i\dot{a}_{1q} - (\omega_1 + v_{g1}k_q) a_{1q} = \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{2l}a_{3m} , \quad (4.3)$$

$$i\dot{a}_{2q} - (\omega_2 + v_{g2}k_q) a_{2q} = \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{3m}^* , \quad (4.4)$$

$$i\dot{a}_{3q} - (\omega_3 + v_{g3}k_q) a_{3q} = \frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{2m}^* . \quad (4.5)$$

Vamos estender, agora, a região de interação à todo espaço disponível para as ondas, tomando  $l_{int} \rightarrow L$  na definição do fator de forma, Eq.(3.9). Neste caso, uma rápida consideração, envolvendo a transformada de Fourier dos acoplamentos entre os campos de pentes diferentes, nos mostra que o critério democrático inclui produtos que não correspondem ao mesmo modo de Fourier que é tomado nos termos lineares das equações de Zakharov. Por exemplo, consideremos o modo central do primeiro pente, cujo número de onda é  $k_{10} = k_1$ . Se, na equação de evolução deste modo, incluímos todos os termos bilineares,  $a_{2l}a_{3m}$ , estaremos pareando duas funções periódicas possivelmente distintas, quicá ortogonais entre si;  $\exp(ik_1x)$  e  $\exp[i(k_{2l} + k_{3m})x] = \exp i[k_1 + (l + m)\Delta_k]x$ . Para excluir estas possíveis incongruências, impusemos um critério de seleção, que, no caso considerado, implica  $l = -m$ . Em campo médio, a equação de evolução do modo  $a_{10}$  inclui o somatório  $\sum_{l,m} a_{2l}a_{3m}$ , para  $-n \leq l \leq +n$  e  $-n \leq m \leq +n$ . Nós seguiremos, a partir de agora, uma regra de seleção que nos parece natural às transformações de Fourier. Segundo ela, o somatório relevante para a evolução do modo  $a_{10}$  reduz-se à,  $\sum_l a_{2l}a_{3,-l}$ , onde  $-n \leq l \leq +n$ . Obviamente a mesma regra se aplica às equações de evolução de todos os outros modos. Por exemplo, na equação de evolução do modo  $a_{12}$ , incluímos apenas acoplamentos bilineares,  $a_{2l}a_{3m}$ , nos quais  $l + m = 2$ , visto que só assim é satisfeita uma perfeita condição de ressonância entre números de onda;  $k_{12} = k_1 + 2\Delta_k = k_{2l} + k_{3m} = k_2 + k_3 + (l + m)\Delta_k$ .

A imposição da regra de seleção, que desfaz as aproximações que levam às Eqs.(4.3)-(4.5), corresponde a tomar  $l_{int} \rightarrow L$  no fator de forma, Eq.(3.9). Portanto, o modelo com regra de seleção ressonante é apropriado, quando a região de interação das ondas se estende a todo espaço a elas disponível. Com isto os termos não lineares transformam-se, de acordo com as seguintes regras,

$$\frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{2l}a_{3m} \rightarrow \sum_{k_l+k_m=k_q} a_{2l}a_{3m}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{3m}^* \rightarrow \sum_{k_l-k_m=k_q} a_{1l}a_{3m}^*, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{l,m} a_{1l}a_{2m}^* \rightarrow \sum_{k_l-k_m=k_q} a_{1l}a_{2m}^*. \quad (4.8)$$

Note-se que os somatórios com regra de seleção não apresentam denominador em  $N$ , o que é necessário para que se mantenha a ordem de termos, visto que, sem seleção tem-se  $N^2$  termos, enquanto que, com seleção, tem-se apenas  $N$ . De forma mais

rigorosa, podemos concluir que, com  $l_{int} \rightarrow L$  no fator de forma da Eq.(3.9), tem-se  $l_{int}/L = 1/N \rightarrow 1$ .

Tomadas as transformações nos termos não lineares, Eq.(4.6)-(4.8), as equações que governam o tripleto em interação seletiva ressonante tomam a forma,

$$i\dot{a}_{1q} - (\omega_1 + v_{g1}k_q) a_{1q} = \sum_{k_l+k_m=k_q} a_{2l}a_{3m}, \quad (4.9)$$

$$i\dot{a}_{2q} - (\omega_2 + v_{g2}k_q) a_{2q} = \sum_{k_l-k_m=k_q} a_{1l}a_{3m}^*, \quad (4.10)$$

$$i\dot{a}_{3q} - (\omega_3 + v_{g3}k_q) a_{3q} = \sum_{k_l-k_m=k_q} a_{1l}a_{2m}^*, \quad (4.11)$$

Note-se que, nos somatórios bilineares envolvidos na evolução dos modos  $p = 2, 3$ , o sub-índice indica subtração entre  $k_l$  e  $k_m$ . Isto ocorre porque uma das amplitudes envolvidas no produto é conjugada e a outra não. Como no Cap.3, tomaremos frequências centrais perfeitamente casadas, de modo que  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ , o que torna mais efetiva a interação entre os pentes. Além disto, os termos lineares  $\omega_p a_{pq}$  podem ser removidos mediante as redefinições  $a_{pq} \rightarrow a_{pq} e^{-i\omega_p t}$ , o que leva as Eq.(4.9)-(4.11) à forma

$$i\dot{a}_{1q} - v_{g1}k_q a_{1q} = \sum_{k_l+k_m=k_q} a_{2l}a_{3m}, \quad (4.12)$$

$$i\dot{a}_{2q} - v_{g2}k_q a_{2q} = \sum_{k_l-k_m=k_q} a_{1l}a_{3m}^*, \quad (4.13)$$

$$i\dot{a}_{3q} - v_{g3}k_q a_{3q} = \sum_{k_l-k_m=k_q} a_{1l}a_{2m}^*, \quad (4.14)$$

Antes de nos lançarmos às simulações e seus resultados, é conveniente ressaltar que o sistema de equações, acima exposto, pode ser usado para estudar o possível alargamento dos pentes envolvidos. Para tanto, consideremos três pentes que, inicialmente, possuem um baixo número de modos, por exemplo,  $N = 5$ , havendo, portanto, cinco modos distintos por pente, com números de onda  $k_{pq}$ ,  $p = 1, 2, 3$  e  $q = -2, -1, 0, 1, 2$ . Se, nesta situação, consideramos o modo  $(p, q) = (1, 3)$ , ele principia nulo,  $a_{1,3}(t = 0) = 0$ , contudo, sua equação diferencial contém os produtos  $a_{23}a_{30} + a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32} + a_{20}a_{33}$ . Entre estes, dois são inicialmente nulos,  $a_{23}a_{30}$  e  $a_{20}a_{33}$ , o que, no entanto, não ocorre com os termos  $a_{22}a_{31}$  e  $a_{21}a_{32}$ . Abre-se, assim, a possibilidade de crescimento de um modo que inicialmente era nulo; um mecanismo não-linear de excitação de modos. O mesmo se aplica a todos os modos que ficam

imediatamente vizinhos às bordas iniciais dos três pentes, o que, no presente caso, envolve os campos  $a_{p,\pm 3}$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Uma vez que este processo entra em ação, a evolução do sistema pode dar origem ao surgimento dos modos  $a_{p,\pm 4}$ ,  $a_{p,\pm 5}$  e assim por diante. Podemos pensar, portanto, em toda uma multitude de modos que, inicialmente nulos, estão, na realidade, potencialmente presentes na dinâmica, gerando um alargamento dos pentes. Veremos, adiante, que este é um caminho evolutivo que realmente se processa no modelo aqui exposto. Note-se, entretanto, que esta forma de alargamento não é possível no caso do tripleto puro,  $N = 1$ , pois os produtos envolvendo a excitação do modo  $a_{11}$  são todos nulos,  $a_{21}a_{30} + a_{20}a_{31}$ , o que impede o crescimento deste campo. A mesma situação ocorre para os modos  $a_{1,-1}$ ,  $a_{2,\pm 1}$  e  $a_{3,\pm 1}$ . Portanto, no modelo com acoplamentos seletivos, uma condição inicial dada por um tripleto estritamente monocromático não gera outros modos. O modelo que estamos considerando aqui é, portanto, consistente com os resultados obtidos no Cap.2.

Com o modelo de interações ressonantes, os termos não lineares das Eqs.(4.12)-(4.14) podem ser interpretados como a transformada de Fourier de uma interação local, pois são a forma discretizada de uma integral de convolução. Será conveniente, portanto, usar a transformação de Fourier do espaço real, onde funções espacialmente limitadas,  $g = g(x, t)$  são representadas por  $g(x, t) = \sum_{j=-n}^{+n} g_j(t)e^{ik_j x}$ . Com isto, as Eqs.(4.12)-(4.14), definidas no espaço recíproco, podem ser levadas ao espaço real,  $\alpha_p(x, t) \equiv \sum_{q=-n}^{+n} a_{pq}(t)e^{ik_q x}$ . Obtém-se, então, as seguintes equações diferenciais parciais,

$$i(\partial_t + v_{g1}\partial_x)\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3, \quad (4.15)$$

$$i(\partial_t + v_{g2}\partial_x)\alpha_2 = \alpha_1\alpha_3^*, \quad (4.16)$$

$$i(\partial_t + v_{g3}\partial_x)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2^*. \quad (4.17)$$

Ressaltamos, novamente, que a regra de seleção, aplicada nos acoplamentos bilineares, nos levou, naturalmente, ao uso do teorema da transformada de Fourier de uma convolução. Portanto, matematicamente falando, esta é a abordagem correta, uma vez que, originalmente, partimos das equações de Zakharov, cujos termos não lineares envolvem, justamente, produtos bilineares de funções definidas no espaço real.

## 4.2 O Caso de velocidades de grupo idênticas

Principiaremos nossa abordagem tomando o caso de velocidades de grupo idênticas,  $v \equiv v_{g1} = v_{g2} = v_{g3}$ . Neste caso, como veremos adiante, o sistema apresenta sempre uma dinâmica coerente, o que não ocorre, necessariamente, quando se tomam velocidades de grupo distintas. Havendo uma única velocidade de grupo, podemos aplicar a transformação de variáveis na qual o sistema de referência move-se junto com os três pentes,  $v - xt \equiv \xi$ . As Eqs.(4.15)-(4.17) normalizam-se, então, às formas,

$$i\dot{\alpha}_1(t, \xi) = \alpha_2\alpha_3, \quad (4.18)$$

$$i\dot{\alpha}_2(t, \xi) = \alpha_1\alpha_3^*, \quad (4.19)$$

$$i\dot{\alpha}_3(t, \xi) = \alpha_1\alpha_2^*. \quad (4.20)$$

Esta situação é muito conveniente, pois fomos capazes de transformar equações diferenciais parciais em diferenciais ordinárias. Estamos, novamente, utilizando a notação de Newton,  $\dot{g}(t, \xi) \equiv dg/dt$ , portanto, a variável  $\xi \equiv v - xt$  entra nas equações como um mero parâmetro. Este caso mais simples pode ser usado como ponto de partida para métodos perturbativos, quando as velocidades de grupo diferem pouco entre si. Nesta situação, um tanto mais complicada, as soluções das Eqs.(4.18)-(4.20) fornecem um campo de ordem zero, o qual determina a evolução das perturbações, devidas às diferenças entre as velocidades de grupo. Quando as soluções de ordem zero são semelhantes às soluções perturbadas, é de se esperar que a dinâmica seja, basicamente, a desenvolvida pelas Eqs.(4.18)-(4.20). Quando isto não ocorre, deve-se esperar mudanças no comportamento qualitativo do tripleto de pentes. Voltamos, portanto, a uma situação semelhante à da Sec.3.2, Cap.3, onde utilizamos o método do modo teste, ROBINSON & DRYSDALE (1996) e de OLIVEIRA et al. (2002), aqui representado pelas perturbações, devidas às diferenças entre as velocidades de grupo.

Como ponto de partida, na análise das Eqs.(4.18)-(4.20), nos restringiremos à situação na qual a amplitude dos campos,

$$\alpha_p(t, \xi) \equiv \rho_p(t, \xi)e^{i\phi_p(t, \xi)}, \quad (4.21)$$

é estacionária,  $\dot{\rho}_p = 0$ . Esta, é claro, não é a situação mais geral, mas fornece todos os ingredientes típicos da análise de modo teste, realizada no capítulo anterior. A

estacionariedade das amplitudes implica em,

$$\sqrt{2}\rho_1(\xi) = \rho_2(\xi) = \rho_3(\xi) , \quad (4.22)$$

$$\phi_1(t, \xi) - \phi_2(t, \xi) - \phi_3(t, \xi) \equiv \Phi(t, \xi) = 0 , \quad (4.23)$$

sendo que as soluções das fases dos três pacotes são dadas por,

$$\phi_1(t, \xi) = -2\rho_1(\xi)t , \quad (4.24)$$

$$\phi_2(t, \xi) = -\rho_1(\xi)t = \phi_3(t, \xi) . \quad (4.25)$$

Não desenvolvemos explicitamente os cálculos que levam a estes resultados, pois são absolutamente similares aos realizados para a obtenção da frequência de fonte, Sec.3.3.

Consideraremos, agora, as componentes de Fourier do campo  $\alpha_1(t, \xi)$ ,

$$a_{1q}(t) = \frac{1}{L} \int \alpha_1(\xi, t) e^{-ik_{1q}\xi} d\xi = \frac{1}{L} \int \rho_1(\xi) e^{-i[2\rho_1(\xi)t+k_{1q}]\xi} d\xi , \quad (4.26)$$

onde  $L$  é a dimensão física do sistema. Podemos, também, colocar esta transformada na forma de uma derivada parcial no tempo, donde obtemos,

$$a_{1q}(t) = i \frac{1}{2L} \partial_t \int e^{-i(2\rho_1(\xi)t+k_{1q})\xi} d\xi . \quad (4.27)$$

Esta situação é semelhante à que se tem na Sec.3.2 do Cap.3, onde a evolução do modo teste, Eq.(3.15), se dá sob a presença de um campo  $a_2 a_3$ , dado, sobre o ponto de equilíbrio. No presente caso, as fases estacionárias se dão em  $\phi_1(t, \xi) - \phi_2(t, \xi) - \phi_3(t, \xi) = \Phi(t, \xi) = 0$ , mas poderíamos tomar, igualmente, outra condição estacionária, dada em  $\phi_1(t, \xi) - \phi_2(t, \xi) - \phi_3(t, \xi) = \Phi(t, \xi) = \pi$ , (*mod*  $2\pi$ ), o que acaba por levar aos mesmos resultados.

Voltemos à transformada de Fourier, posta na forma da Eq.(4.27). Tomando os campos em um tempo dado,  $t = t_d$ , estes apresentarão diferentes valores para cada ponto espacial que seja considerado. Podemos, então, formar a imagem de um conjunto contínuo de pontos do espaço real  $\Xi$ , cada qual associado a um dos campo  $\alpha_p = \alpha_p(\xi_a, t_d)$ ,  $\xi_a \in \Xi$ , que oscila de uma forma que é independente dos campos tomados em outro ponto,  $\alpha_p(\xi_b, t_d)$ , onde  $\xi_b \neq \xi_a$ , mesmo que este seja infinitesimalmente próximo ao ponto  $\xi_a$ . Esta é a grande vantagem da abordagem que escolhemos: campos de pontos diferentes se desacoplam quando analisamos a dinâmica a partir

do espaço real  $\Xi$ . No entanto, o valor numérico do acoplamento é diferente para diferentes pontos do espaço, o que mantém a complexidade da evolução do tripleto de pentes. A evolução do sistema depende do perfil inicial das amplitudes dos campos,  $\rho_p^{(0)}(\xi) \equiv \rho_p(\xi, t = 0)$ . Tomaremos casos nos quais estes perfis iniciais são gaussianos. Antes, porém, obteremos uma série de resultados analíticos, aplicáveis a toda uma gama de pacotes localizados. Para tanto, utilizamos o método da fase estacionária, a partir de agora denominado *MFE*, no qual é feita uma expansão em série assintótica do integrando da Eq.(4.27). Após uma integração termo a termo da série obtida, pode-se obter vários resultados, os quais envolvem algumas condições necessárias à validade da expansão, como, por exemplo, a exigência de que os perfis iniciais possuam apenas um máximo local, decaindo assintoticamente a zero. Condições suficientes para a aplicabilidade do método encontram-se em BLEISTEIN & HANDELSMAN (1975). Para nós, que teremos uma integral do tipo  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{itf(x)}dx$ , com  $t \rightarrow \infty$ , basta que  $f(x)$ , e todas as suas derivadas, tendam a zero quando  $x \rightarrow \infty$ . No presente contexto, utilizaremos o *MFE*, comparando-o com a simulação numérica do tripleto de pentes.

A seguir, listaremos os resultados da integração envolvida na Eq.(4.27). O primeiro termo da expansão de um integrando do tipo  $I = \int e^{if(x)}dx$ , é dado por,  $I_0 = e^{if(x_0)}\sqrt{2\pi i/f''_{x_0}}$ , onde  $x_0$  é o ponto estacionário da função  $f(x)$ , localizado pela equação  $df/dx|_{x=x_0} = 0$ . Assim, em primeira ordem, temos

$$a_{1q}(t) \sim e^{i3\pi/4} \frac{d}{dt} \frac{\sqrt{\pi}}{2L} \frac{e^{-i[2\rho_1(\xi_0)t + k_q \xi_0]}}{\sqrt{-\rho_1''(t=0)t}}, \quad (4.28)$$

onde  $\xi_0$  é a coordenada do ponto estacionário, determinado pela equação

$$2\rho_1'(\xi_0)t + k_1 = 0. \quad (4.29)$$

Em termos de pacotes de ondas, para a maioria das aplicações, a curva  $a_{pq}(k_q)$  apresenta um formato que lembra uma gaussiana com um máximo em  $k_p = 0$ . Neste tipo de situação a curva  $\rho_p = \rho_p(\xi)$  também é semelhante a uma gaussiana, que tomamos como simétrica e centrada em  $\xi = 0$ , com um valor máximo para  $\rho_p'$  em cada lado da origem. No caso do primeiro pente, para qualquer tempo que satisfaça  $t > t_q \equiv |k_q|/(2|\rho_1'|_{max})$ , haverá um ponto  $\xi_0$  para o qual a condição estacionária é satisfeita em  $k_q$ . À medida em que o tempo aumenta, o ponto estacionário irá mover-se, de modo que  $\xi_0 \rightarrow 0$  e  $\rho_1' \rightarrow 0$ . Com isto, a forma assintótica do modo  $a_{1q}$  assume



a forma

$$a_{1q}(t) \sim a_{1q}^{(0)}(t) \equiv \rho_1(0) \frac{\sqrt{\pi} e^{-i[2\rho_1(0)t - \frac{\pi}{4}]} }{L \sqrt{|\rho_1''(0)|} t} \equiv a_{analitica} . \quad (4.30)$$

O apóstrofe, usado como superíndice, indica derivação na variável  $\xi$ ,  $f' \equiv df/d\xi$ . Este resultado é formalmente assintótico no tempo,  $t \rightarrow \infty$ , mas também é satisfatório para tempos relativamente baixos, como veremos na comparação com os resultados numéricos. O resultado obtido indica que, assintoticamente, todos os modos do primeiro pente tendem a vibrar com a mesma frequência não linear,

$$\Omega_1^{(nl)} = -2\rho_1(0) . \quad (4.31)$$

Note-se, em particular, que a função  $a_{analitica}$  independe do índice dos modos,  $q$  e, portanto, do número de onda tomado inicialmente na Eq.(4.30).

Esperamos que o sistema mantenha sua coerência, desde que os termos lineares, responsáveis pelo alargamento do pacote, não prevaleçam. Voltamos, aqui, a nos referir ao critério de transição para incoerência, obtido na forma da Eq.(3.26). De fato, esperamos que o acoplamento de fases mantenha-se operativo, desde que a magnitude absoluta da frequência não-linear,  $\Omega_1^{(nl)}$ , seja bem maior que o termo linear  $v_{g1}k_{max}$ , onde o índice  $max$  indica o maior modo teste ativo,  $k_{max} = max(k_{1q})$ . Por outro lado, quando a condição,

$$\Omega_1^{(nl)} = -v_{g1}k_r , \quad (4.32)$$

é atingida por algum modo ressonante,  $q = r$ , o sistema perderá sua coerência. Esperamos, portanto, que a dinâmica siga as seguintes linhas gerais:

(i) Quando todos os modos inicialmente presentes estão aquém da condição de ressonância,  $\Omega_1^{(nl)} \geq -v_{g1}k_{1q}$ , deverá ocorrer a inclusão de novos modos, sendo estes excitados a partir do momento em que a regra linear da Eq.(4.29) é satisfeita, o que implica em

$$k_q = \pm 2 \left| \rho'_{1q}(\xi_q) \right|_{max} t , \quad (4.33)$$

onde o sub-índice denota o valor máximo da derivada espacial no instante  $t = t_q$ . Estamos desprezando os efeitos da dissipação e da dispersão, esta última devida à presença de derivadas espaciais de ordem mais alta. Portanto, o primeiro pacote de ondas continuará alargando-se no espaço recíproco,  $(k_{1q})$ , até que seja excitado um modo  $k_r$  que satisfaça condição de ressonância dada na Eq.(4.32). A partir daí, os modos passam a variar de forma independente, levando o pacote a perder sua

coerência. Na perspectiva da aproximação do modo teste,  $a_{1j}^{(T)}$ , temos a seguinte equação:

$$i\dot{a}_{1q}^{(T)} = v_{g1}k_{1q}a_{1q}^{(T)} + \left(a_2^{(0)}a_3^{(0)}\right)_{k_{1q}}, \quad (4.34)$$

onde o sub-índice  $k_{1q}$ , presente no produto  $a_2^{(0)}a_3^{(0)}$ , indica o seu correspondente componente da transformada de Fourier. Os superíndices (0) indicam os campos de ordem zero dos pacotes dois e três, os quais são soluções das Eqs.(4.18)-(4.20), tomando-se  $v_{g1} = 0 = v_{g2} = v_{g3}$ . Se desta equação subtraímos a correspondente equação sem alargamento, obtemos

$$i\delta\dot{a}_{1q} = v_{g1}k_{1q}\delta a_{1q} + v_{g1}k_{1q}a_{1q}^{(0)}, \quad (4.35)$$

sendo que  $\delta a_{1q} \equiv a_{1q}^{(T)} - a_{1q}^{(0)}$ . Quando a frequência do termo de fonte torna-se igual a frequência linear do modo teste da Eq.(4.34), com a condição de ressonância satisfeita ( $q = r$ ), podemos utilizar uma aproximação modulacional lenta, na qual  $\delta a_{1r} \equiv \delta\tilde{a}_{1r} \exp(-iv_{g1}k_{1r}t)$ , o que leva à  $\dot{\tilde{a}}_{1r} \sim v_{g1}k_{1r}\tilde{a}_{1r}^{(0)}$ , onde o termo oscilatório da fonte foi fatorado para fora. Portanto, este termo de fonte fatorado cresce linearmente, por um breve período de tempo, após sua excitação. Tal fato está, como veremos adiante, em concordância com os resultados numéricos. Podemos concluir, então, que o modo ressonante, depois de excitado, acompanha a fonte, crescendo monotonicamente. Este crescimento cessa, quando a dinâmica desvia-se apreciavelmente do comportamento coerente, visto no caso anterior. Por outro lado, se os termos de dissipação e dispersão estiverem presentes, o alargamento poderá ser eventualmente detido.

(ii) Se um dos modos já satisfaz a condição de ressonância, dada pela Eq.(4.32), não há coerência, mesmo se considerarmos tempos pequenos. Este é o caso que temos chamado, nos capítulos anteriores, de incoerente. Quando, pelo contrário, o modo ressonante não está inicialmente presente, o tempo em que é mantida a coerência é semelhante ao tempo de trânsito do primeiro pente, relativo aos outros dois pentes. Portanto, quando  $k_{1r} \neq k_{1q}(t = 0)$ ,  $\forall q$ , a duração da coerência é dada pelo instante de inclusão do modo ressonante,  $t = t_r$  conforme as Eq.(4.29) e Eq.(4.33). Note-se que, sendo  $d$  o desvio padrão das gaussianas, tem-se  $k_r/2 \left| \rho'_{1q}(\xi_q) \right|_{max} \sim (\rho_0/v_{g1})/(\rho_0/d) = d/v_{g1}$ , donde concluímos que  $t_r v_{g1} \sim d$ , o que indica que a ressonância surge quando o primeiro pente move-se para fora da região em que ocorre interação.

Todas as considerações, feitas nos itens do parágrafo anterior, formam uma visão teórica simplificada do tripleto de pentes e devem, é claro, ser corroboradas por uma análise numérica apropriada. O que nos leva à próxima seção onde trataremos do

caso (i). O caso (ii) pode ser obtido como o limite no qual o vetor de onda ressonante  $k_r$  é muito pequeno.

### 4.3 Simulações de ondas

Vamos agora analisar os resultados das simulações que realizamos para o sistema completo de equações de ondas descrito pelas Eqs.(4.15)-(4.17). As simulações foram realizadas com um método pseudo-espectral envolvendo  $N = 2^{15}$  modos, sendo que sempre tomamos  $v_{g2} = 0 = v_{g3}$ . Portanto, nos restringimos ao caso no qual os pentes dois e três possuem a mesma velocidade de grupo, tendo sido tomado um sistema de referências no qual esta velocidade se anula. Isto implica numa transformação de variáveis do tipo que nos levou às Eqs.(4.15)-(4.17), na qual  $t \rightarrow t$  e  $x - v_g t \rightarrow \xi$ , agora com  $v_{g2} = v_g = v_{g3}$ . Neste caso,  $v_{g1}$  representa a velocidade de grupo do primeiro pente em relação aos pentes dois e três, o que será suficiente para nossa análise. A teoria produz os mesmos resultados físicos, tanto nas variáveis originais quanto nas transformadas.

Como condições iniciais utilizamos perfis gausseanos para os pentes, de modo que

$$a_1(x, t = 0) = \rho_0 e^{-x^2/d^2}, \quad (4.36)$$

$$a_2(x, t = 0) = a_3(x, t = 0) = \sqrt{2}\rho_0 e^{-x^2/d^2}. \quad (4.37)$$

As correspondentes distribuições espectrais iniciais, dadas por  $a_{pq} = (1/L) \int a_p e^{-ik_q x} dx$ , tomam, então, a seguinte forma:

$$a_{1q} = \sqrt{\pi}\rho_0 \frac{d}{L} e^{-k_q^2 d^2/4}, \quad (4.38)$$

$$a_{2q} = a_{3q} = \sqrt{2\pi}\rho_0 \frac{d}{L} e^{-k_q^2 d^2/4}, \quad (4.39)$$

sendo que em todas as simulações usamos  $L/60 = d = \rho_0 = 1$ . A partir das condições iniciais, Eq.(4.36) e Eq.(4.37), a frequência não linear, Eq.(4.31), é estimada como sendo  $-2\rho_0$ . Por outro lado, a distribuição espectral inicial do primeiro pente, Eq.(4.38), nos permite estimar o que convencionamos ser seus números de onda extremos,  $k_d = \pm 2\pi/d$ , os quais correspondem aos pontos de inflexão do espectro inicial, onde  $(da_{1q}^2/dk_q^2)_{k_q=k_d}$ . Estes são, também, os números de onda nos quais a amplitude

espectral cai por um fator de  $1/e$ , de modo que  $a_{1q=d}/a_{1q=0} = 1/e$ . À tais números de onda correspondem frêquências lineares extremas, dadas por  $\omega_d = v_{g1}k_d = \pm v_{g1}2\pi/d$ .

Começemos com o caso  $v_{g1} = 0$ . Esta é a situação na qual não há alargamento linear de frequências e é crucial para testar as estimativas que fizemos sobre acoplamento de fases e coerência, na Sec.4.2. Uma maneira de abordar tal situação é produzindo um gráfico tridimensional dos valores absolutos das amplitudes,  $|a_{1k}|$ , contra o tempo e contra o vetor de número de onda  $k$ . Tal gráfico encontra-se na Fig.4.1(a), nele podemos ver o alargamento que o pente sofre no espaço  $k$  ao longo do tempo, como predito por nossos cálculos por *MFE*. O alargamento é linear, seguindo a lei  $k \sim \pm 2(\rho_0/d)t$ , e apresenta também um decaimento na amplitude, o qual corresponde ao fator numérico  $(|\rho_1''(x=0)|t)^{-1/2}$  que obtivemos na função  $a_{analitica}$ , Eq.(4.30). Na Fig.4.1(b) comparamos a parte real da função  $a_{analitica}$  com os modos simulados  $a_{1j=1}$ , e  $a_{1j=[k_d/k_b]}$ , onde  $[k_d/k_b]$  é a parte real da razão entre o número de onda estimado como extremo,  $k_d$ , e o número de onda base do sistema,  $k_b = 2\pi/L = 2\Delta/N$ . Os modos simulados começam com condições iniciais distintas, o que é consequência da diferença considerável entre seus índices, um sendo primeiro vizinho do modo central ( $j = 1$ ), o outro residindo na borda do grupo de vetores de onda original ( $j = [k_d/k_b]$ ). Mas, mesmo assim, eles acabam tendendo ao mesmo comportamento assintótico o qual corresponde ao da função  $a_{analitica}$ . A medida que o tempo passa mais e mais modos vão surgindo, todos com o mesmo regime oscilatório previsto em  $a_{analitica}$ .

Com a introdução de um pequeno alargamento linear, representado pela velocidade de grupo  $v_{g1}$ , a evolução temporal do pacote muda. Se, inicialmente, não há um modo ressonante presente, o pacote mantém sua coerência, alargando-se até que surja um modo ressonante, o qual satisfaz a condição dada pela Eq.(4.32). Se tomamos, por exemplo,  $v_{g1} = 0.1$  temos um vetor de onda ressonante em  $k_r \approx 20$ , visto que  $2\rho_0 = 2$ . Esta ressonância se dará em um tempo  $t_r \sim 20$ . Na Fig.4.2(a) temos um gráfico tridimensional de  $|a_{1q}(t)|$ , similar ao da Fig.4.1(a), mas agora para  $v_g = 0,1$ . Vê-se claramente que o aspecto simétrico da Fig.4.1(a) foi perdido. Agora modos com  $k$  positivo são mais intensamente excitados que os modos com  $k$  negativo, o que ocorre devido ao sinal de  $\Omega_{nl}$  na Eq.(4.32). A partir do momento em que se atinge e ultrapassa o tempo de ressonância  $t_r$  o gráfico tridimensional da Fig.4.2(a) sofre mudanças drásticas se comparado ao da Fig.4.1(a). Após a excitação de modos ressonantes o alargamento cessa, o que é resultado do afastamento relativo dos pentes, conforme havíamos observado antes. No entanto, de acordo com

nossas previsões anteriores, a distribuição espectral é pouco afetada por efeitos ressonantes enquanto  $t \ll t_r$ . Para complementar as informações contidas na Fig.4.2(a) representamos graficamente, na Fig.4.2(b), a parte real das amplitudes dos modos  $a_{1j=1}$ ,  $a_{1j=[k_d/3k_b]}$  e  $a_{1j=[k_r/k_b]}$ . Além do modo  $j = 1$  e do modo ressonante  $k_r$ , tomamos outro modo, representado na Fig.4.1(b), o qual é mais interno,  $j = [k_d/3k_b]$ , que o modo relativo à borda,  $j = [k_d/k_b]$ . Isto torna mais claro o mecanismo de acoplamento-desacoplamento das fases. Na Fig.4.2(b) é fácil observar o crescimento linear do modo ressonante e a conseqüente perda de coerência e desacoplamento das fases, quando o modo ressonante é fortemente excitado. Para tempos pequenos e anteriores à ressonância, todos os modos tendem a permanecer em fase, mas a coerência é perdida quando os efeitos ressonantes começam a se impor. Repetimos a mesma análise das partes reais das amplitudes para o caso  $v_{g1} = 0,05$  na Fig.4.2(c), onde o modo ressonante agora é o associado a esta outra velocidade de grupo. Note-se que, tanto a ressonância quanto a defasagem se dão para um tempo que é o dobro do que se tinha para o caso de  $v_{g1} = 0,1$ . Por fim, convém ressaltar que este tipo de comportamento de acoplamento-desacoplamento de fases é radicalmente diferente do que se tem em sistemas lineares onde os modos nunca tendem a estados com fases acopladas. Em casos lineares com alargamento de frequências, o desacoplamento das fases está presente a qualquer tempo.

## 4.4 Conclusões do capítulo

Introduzimos um modelo de interação do tripeto de pentes no qual os acoplamentos bilineares envolvem apenas modos ressonantes. Na equação do primeiro pente, Eq.(4.12), os somatórios restringem-se, então, aos termos não lineares que satisfazem a condição ressonante  $k_q = k_l + k_m$ . Para os pentes dois e três, Eq.(4.13) e (4.14), devido à conjugação complexa do campo de modo  $m$ , tem-se  $k_q = k_l - k_m$  como regra de seleção para os termos não lineares. Tal modelo é conveniente, quando a interação não linear das ondas se estende a todo espaço a elas disponível. Na perspectiva do Cap.3, isto corresponde a tomar  $l_{int} \rightarrow L$  no fator de forma, Eq.(3.9).

Para tomar os coeficientes dos termos não lineares da Eq.(4.14) como constantes, foi necessário desconsiderar a dispersão das frequências  $\omega_{3q}$ . Por outro lado, as frequências dos modos,  $\omega_{pq}$ , inicialmente presentes nos termos lineares em  $a_{pq}$ , foram expandidas até primeira ordem em  $k_q$ , Eq.(4.1), passando a depender explicitamente das velocidades de grupo dos pentes, Eq.(4.2).

Passamos ao espaço real, mediante uma transformada inversa de Fourier. O sistema de Eq.(4.12)-(4.14) corresponde às Eq.(4.15)-(4.17), que são *EDP's* de primeira ordem no tempo e no espaço. A ausência de derivadas espaciais de ordem mais alta se deve à expansão das relações de dispersão, que foi levada só até primeira ordem. Os termos não lineares das *EDP's* correspondem a uma interação local, o que, na Eq.(4.17), só é possível mediante a desconsideração da dispersão das frequências  $\omega_{3q}$ .

Principiamos a análise com o caso de três pentes com a mesma velocidade de grupo. Aplicamos, então, uma transformação de coordenadas, que transformou as equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias no tempo, onde as coordenadas espaciais atuam como parâmetros. Consideramos soluções estacionárias e, com o método da fase estacionária, fizemos estimativas analíticas. Concluímos, então, que deve haver coerência pois, assintoticamente, todos os modos tendem a vibrar com a mesma frequência não linear, dada pela Eq.(4.31). Novos modos deverão ser incluídos até ser atingida a condição ressonante, determinada pela Eq.(4.32). A partir deste ponto, o pente deve tornar-se incoerente. As estimativas analíticas indicam, ainda, que, se o modo ressonante estiver presente desde o início, então o pente deverá ser incoerente, para quaisquer tempos, por menores que sejam.

Apresentamos os resultados de simulações para o sistema de ondas, nos limitando ao caso em que as velocidades de grupo dos pentes dois e três são iguais. Elas foram, então, tomadas como nulas, o que pode ser feito mediante uma transformação de coordenadas na qual o sistema de referências move-se junto com os pentes dois e três. Tomamos, primeiramente, o caso  $v_{g1} = 0$ , no qual não há alargamento das frequências lineares do primeiro pente. Esta é a condição na qual fizemos as estimativas analíticas por *MFE*, as quais mostraram-se compatíveis com os resultados numéricos. Os resultados da simulação foram representados graficamente na Fig.4.1(a). Houve um alargamento linear do primeiro pente,  $k \sim \pm 2 (\rho_0/d) t$ , que está aproximadamente de acordo com a condição analítica, dada pela Eq.(4.33). O módulo das amplitudes apresentou, ainda, um decaimento conforme o fator numérico  $(|\rho_1''(x=0)| t)^{1/2}$ , presente na expressão assintótica da Eq.(4.30). Ainda em relação ao caso  $v_{g1} = 0$ , na Fig.4.1(b) tem-se gráficos de dois modos simulados que tendem, de uma maneira relativamente rápida, a seguir o modo assintótico e analítico da Eq.(4.30). Convém, portanto, salientar que o *MFE* é de grande utilidade no contexto em que os três pacotes possuem a mesma velocidade de grupo, fornecendo resultados condizentes com as simulações numéricas.

Consideramos, a seguir, simulações com  $v_{g1} = 0, 1$  e  $0, 05$ , o que nos permitiu testar a validade do critério de ressonância, dado pela Eq.(4.32), o qual é uma simples extensão da condição para transição coerência-incoerência, Eq.(3.26). Considerando a Fig.4.2(b) e (c) vimos que, de fato: os modos ressonantes são dados pela Eq.(4.32), os tempos de ressonância seguem a Eq.(4.33) e que a excitação de um modo ressonante leva à quebra da coerência entre as fases. Após a excitação do modo ressonante cessa o alargamento do primeiro pente, o que pode ser compreendido como efeito do afastamento dos pentes, conforme discussão feita ao final da Sec.4.2.

Nossa principal conclusão, neste capítulo, é que a condição que localiza a transição coerência-incoerência mantém-se inalterada em relação ao que obtivemos para o modelo de interações democráticas. De fato, a diferença de fases,  $\delta_{1q} = \omega_{1q} - \omega_1$ , Eq.(3.17), corresponde ao termo linear  $v_{g1}k_q$ , da Eq.(4.1) com  $p = 1$ , se desprezamos contribuições de ordem mais alta para a relação de dispersão. Isto indica a similaridade dos critérios dados pelas Eq.(3.26) e Eq.(4.32). Portanto, se as frequências não lineares são muito maiores que as frequências dos modos lineares envolvidos, as fases mantem-se acopladas e a dinâmica é coerente. Por outro lado, quando as frequências lineares se tornam da mesma ordem ou maiores que as frequências não lineares, o acoplamento entre as fases é interrompido e ocorre uma transição para incoerência. Esta passagem para incoerência ocorre quando o alargamento do pente atinge um modo ressonante que passa a crescer de modo independente dos outros. A amplitude do crescimento do modo ressonante, inicialmente, é linear, o que pode ser observado na Fig.4.2(b), estando de acordo com as estimativas analíticas feitas a partir da Eq.(4.35). Note-se, observando a mesma figura, que a este crescimento segue-se uma saturação da amplitude do modo ressonante. Ao longo deste processo, os outros modos, representados graficamente nos itens (b) e (c), tiveram suas fases desacopladas. Portanto, podemos afirmar que a excitação do modo ressonante é o critério que demarca a perda de coerência no modelo do tripleto com interações seletivas ressonantes, sendo tal critério equivalente ao do modelo com interações de campo médio.

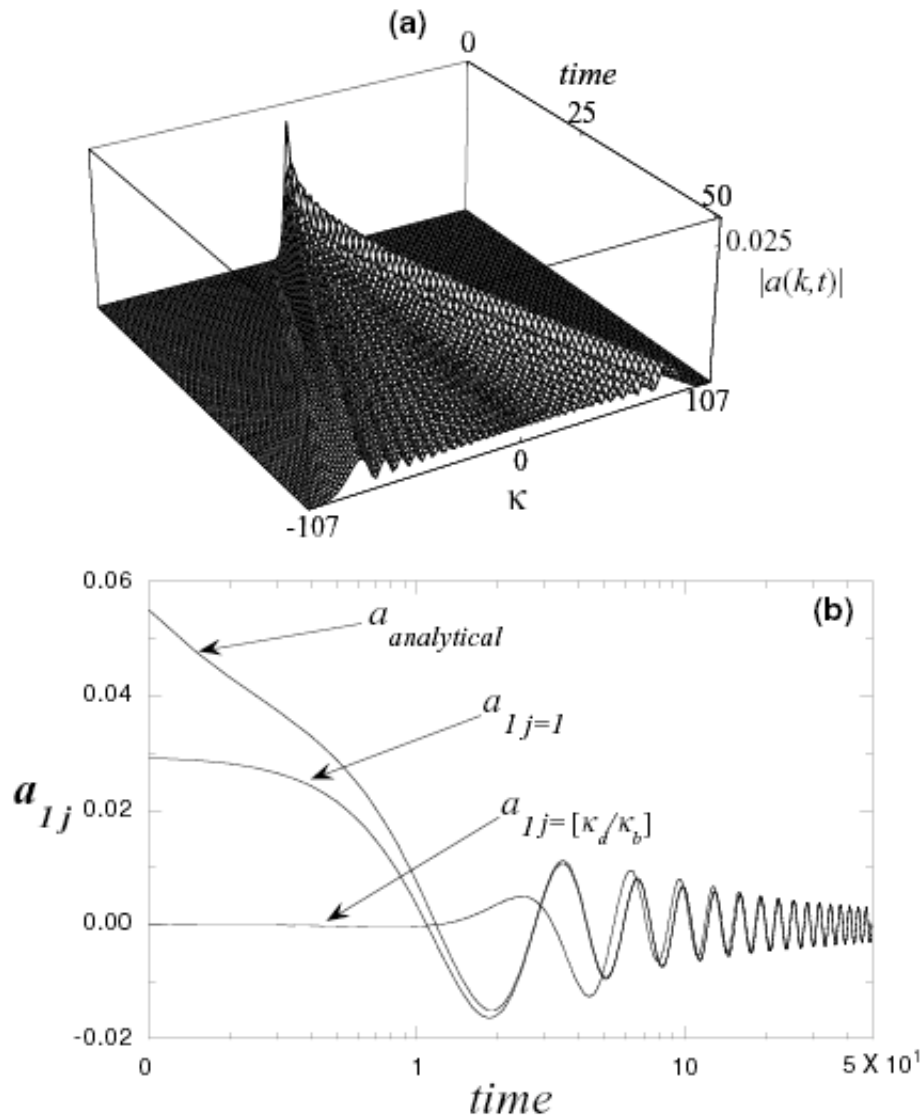


Figura 4.1: (a) Valor absoluto da amplitude transformada  $|a(k, t)|$  em função do tempo e do número de onda. Vê-se claramente o alargamento da onda. (b) comparação entre a parte real da função  $a_{analitica}$ , obtida pelo método da fase estacionária, e as partes reais dos modos simulados  $a_{1j=1}$  e  $a_{1j=[k_d/k_b]}$ . Na segunda amplitude  $[k_d/k_b]$  é a parte inteira da razão entre o vetor tomado como extremo do pente  $k_d$  e o vetor de base  $k_b$ . Os dois modos acabam por acoplar-se, seguindo o comportamento de  $a_{analitica}$ . Em ambos os ítems a velocidade de grupo é  $v_{g1} = 0$ .



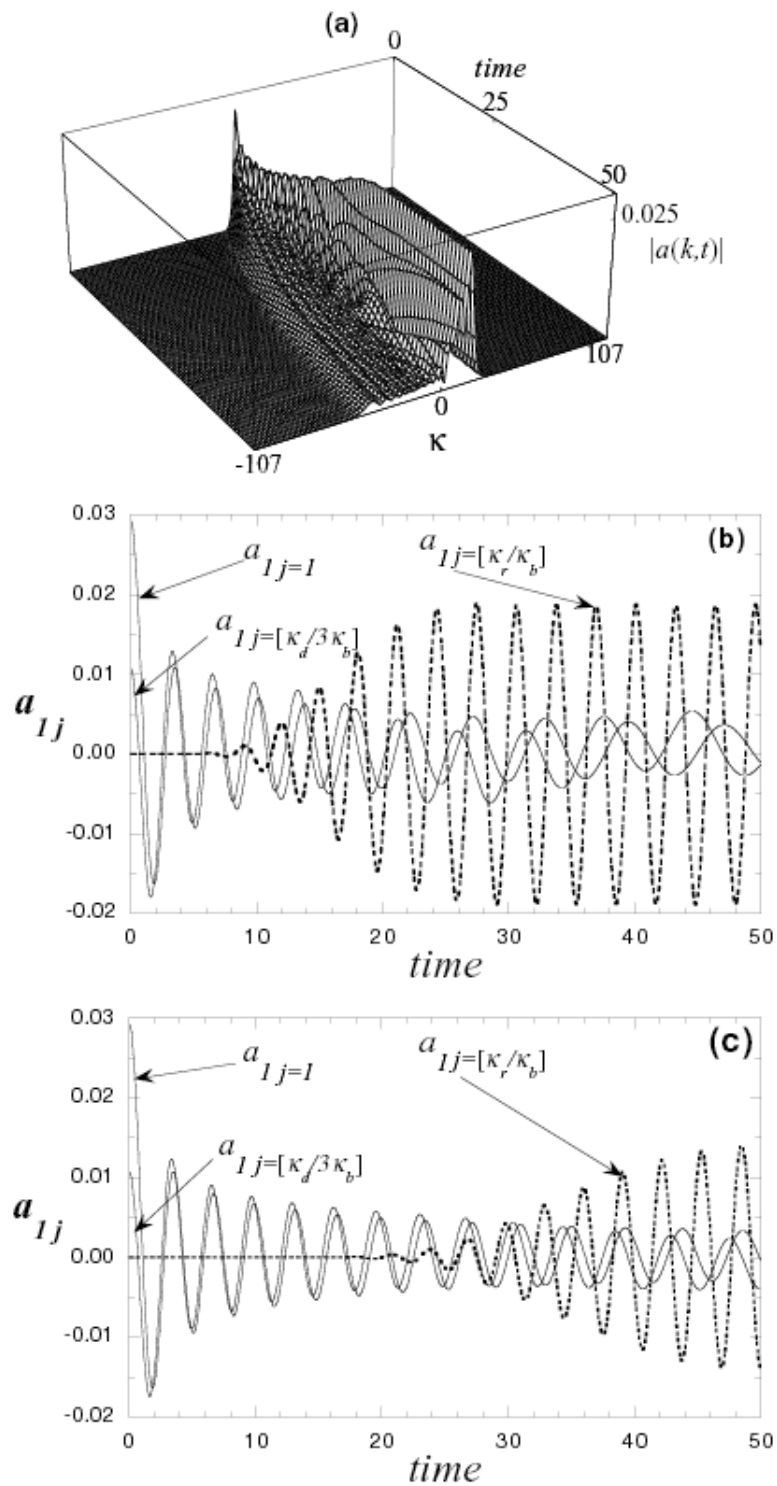


Figura 4.2: (a) Valor absoluto da amplitude transformada  $|a(k, t)|$  em função do tempo e do número de onda. O alargamento regular nos vetores de onda é interrompido pela ressonância. (b) Comparação entre as partes reais dos modos simulados  $a_{1j=1}$ ,  $a_{1j=[k_r/k_b]}$  e  $a_{1j=[k_d/3k_b]}$ . Na segunda amplitude  $[k_r/k_b]$  é a parte inteira da razão entre o vetor onda ressonante  $k_r$  e o vetor de base  $k_b$ , na terceira amplitude  $[k_d/3k_b]$  é a parte inteira da razão entre o terço do vetor de onda tomado como extremo do pente  $k_d$  e o vetor de base  $k_b$ . No ítem (b) tem-se  $v_{g1} = 0, 1$  e observa-se o desacoplamento das fases, causada pelo excitação do modo ressonante. (c) Mesma coisa que em (b), agora com  $v_{g1} = 0,05$ .

# Capítulo 5

## Conclusão

Analisamos, nesta tese, a interação não linear entre tripletos de ondas, gerada pelas equações de Zakharov. Tratamos de três possíveis situações : o tripleto puro clássico, o tripleto de pentes sob interações de campo médio e o tripleto de pentes sob interações com regra de seleção ressonante. Em todos estes casos, nosso principal objetivo foi o de desenvolver critérios para determinação de estados coerentes e incoerentes, procurando definir as condições sob as quais se dão transições da coerência para a incoerência. Tendo em mãos estas condições, pode-se escolher, de modo consistente, qual a abordagem que se deve utilizar na descrição de um tripleto de pentes, se a de fase fixa ou a de fase randômica.

Tratamos, no Cap.2, do tripleto puro, constituído de três modos espacialmente harmônicos e modulados no tempo, cada modo apresentando um único número de onda, os três satisfazendo a relação de ressonância dada pela Eq.(2.7). A linearização das equações de Zakharov, Eq.(2.1) e (2.2) nos forneceu as relações de dispersão, Eq.(2.5)-(2.6), donde introduzimos um fator de defasagem angular,  $\Omega = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ , para as respectivas frequências angulares.

Distinguímos dois regimes para o tripleto puro. No mais simples deles, dito adiabático, o modo íon-acústico apresenta um fator temporal harmônico, advindo da forma linearizada da Eq.(2.2), multiplicado por uma modulação temporal não linear lenta. Expressando a dependência temporal do modo íon-acústico como,  $a_3(t) = \tilde{a}_3(t)e^{-i\omega_3 t}$ , o regime adiabático implica em,  $|d^2\tilde{a}_3/dt^2| \ll |\omega_3 (d\tilde{a}_3/dt)|$ , onde  $\tilde{a}_3(t)$  é a modulação não linear lenta e  $e^{-i\omega_3 t}$  o fator temporal harmônico linearizado. Neste caso, expressamos as amplitudes complexas dos modos em forma trigonométrica, donde concluímos que a dinâmica é hamiltoniana e integrável, pois possui um único grau de liberdade.

Analisamos o espaço de fase da hamiltoniana adiabática, para os casos  $\Omega = 0$ ,  $\Omega > 0$  e  $\Omega < 0$ ; neles os modos sempre evoluem de forma periódica. O caso de defasagem angular nula mostrou-se coerente, pois a fase relativa do tripleto,  $\phi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ , manteve-se dentro do intervalo  $\mathcal{R}_0$ , definido em  $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ . Portanto, não utilizamos um conceito de coerência totalmente restrito, no sentido de três fases,  $\phi_p$ , que evoluem juntas. Isto só ocorre no ponto de equilíbrio, no centro de  $\mathcal{R}_0$ , onde  $\phi = \pi$  e  $\dot{\phi} = 0$ . O caso de defasagem angular negativa apresentou um espaço de fase mais reduzido e mais coerente que o que se tem para  $\Omega = 0$ . Para defasagens angulares positivas, abriu-se um canal de escape para fora da região  $\mathcal{R}_0$  e o espaço de fase dividiu-se, de forma regular, em dois sub-espacos: um coerente e outro, incoerente. As trajetórias coerentes são libracionais, apresentando uma variação em  $\phi$ , que se limita ao interior da região  $\mathcal{R}_0$ . As trajetórias incoerentes são rotacionais, apresentando variações ilimitadas em  $\phi$ . Para  $\Omega > 0$  não há uma transição brusca de coerência para incoerência, visto que é sempre possível encontrar estados coerentes. Contudo, quando  $\Omega > \Omega_{bif} = \mathcal{A}^{1/2}$ , as trajetórias incoerentes tornam-se mais numerosas. O parâmetro  $\mathcal{A}$ , Eq.(2.26), é uma constante de movimento do sistema e, sendo uma soma dos quadrados das amplitudes dos modos, é uma medida da energia total do tripleto. Este tipo de processo, que leva à incoerência, no qual as frequências lineares se tornam maiores que as não lineares, irá se reproduzir, novamente, quando o tripleto puro for substituído por um tripleto com alguma largura de banda.

Ainda no Cap.2, investigamos a interação do tripleto fora da aproximação adiabática, denominando o correspondente sistema de completo. Por meio de uma série de transformações canônicas chegamos a uma hamiltoniana com dois graus de liberdade, sendo que o grau adicional surgiu devido à derivada de segunda ordem, presente na equação de evolução do modo íon-acústico. Tratamos, então, apenas da interação de decaimento, na qual uma onda de Langmuir decai, gerando outras duas ondas que inicialmente encontravam-se a nível de ruído: uma onda de Langmuir e uma íon-acústica. Neste caso, o espaço de fase apresentou curvas limite, consistentes com as condições iniciais características do processo de decaimento. Tais curvas apresentaram uma dependência em  $\Omega$ , que definiu regiões de acessibilidade semelhantes ao caso integrável. Para defasagem angular nula, reobtivemos a região  $\mathcal{R}_0$ , a defasagem negativa levou à redução do espaço acessível e a defasagem positiva abriu um canal de escape, para fora da região  $\mathcal{R}_0$ , o que leva à incoerência. Apesar destas similaridades, a transição entre coerência e incoerência mostrou-se distinta no caso do sistema completo, não adiabático. Quantificamos a perda de coerência, usando duas

grandezas apropriadas, que envolvem conjuntos de condições iniciais: o "bunching factor" e a fração de escape. Vimos, então, que grande parte das condições iniciais corresponde a estados incoerentes, o que fica particularmente claro na representação gráfica da fração de escape, Fig.2.4(a). A conclusão mais importante, aqui, é a de que a incoerência impõe-se, mesmo quando a defasagem angular encontra-se abaixo do valor de bifurcação próprio do sistema adiabático,  $0 < \Omega < \Omega_{bif}$ . Isto ocorre porque a presença do caos torna mais provável que uma dada trajetória acabe por alcançar o canal de escape, mesmo que este canal seja estreito, como no caso  $0 < \Omega \ll \Omega_{bif}$ . Entretanto, isto só ocorre para amplitudes de "pump" suficientemente altas. De fato, a dinâmica do sistema completo é tal que, para amplitude de decaimento baixa, reobtemos o caso adiabático. Só quando a amplitude de decaimento aumenta é que o caos vai tomando o espaço de fase. Para amplitudes suficientemente altas, impõe-se a ergodicidade e, neste último caso, todo espaço de fase se torna incoerente.

No Cap.3, analisamos a situação na qual o tripleto puro é substituído por um tripleto de pacotes de ondas, os quais interagem por meio de um campo médio. Os pacotes foram discretizados e os denominamos de pentes. Para tanto, foi necessário impor duas condições. Primeiro, para manter a forma de interações de tripleto, consideramos pentes cuja meia largura,  $\Delta_n = n\Delta_k$ , comum aos três, é bem menor que a distância espectral entre os centros dos pentes eletrostáticos. Isto se manifestou na desigualdade  $\Delta_n \ll k_1 - k_2$ , e, com isto, foi possível desprezar interações não lineares entre modos do mesmo pente. Em segundo lugar, a largura espectral dos pacotes foi limitada à  $\Delta_n \ll 2\pi/l_{int}$ , onde  $l_{int}$  é a região onde se dá a interação, restringida por um fator de forma. Nestas condições, foi-nos possível desprezar as variações das transformadas de Fourier envolvendo o fator de forma, as quais foram tomadas como iguais a um. Imposta esta segunda condição, obtivemos uma teoria de campo médio, na qual as interações não lineares, dos modos de um dado pente, são geradas por todos os possíveis termos bilineares formados pelos modos dos dois pentes restantes. Este é o modelo que analisamos no Cap.3.

De modo análogo ao Cap.2, aplicamos uma aproximação adiabática aos modos íon-acústicos, reduzindo as equações diferenciais destes modos à primeira ordem no tempo. Consideramos a situação na qual, sob um dado modo teste, atuam termos de interação não lineares, nos quais todos os outros modos são coerentes, apresentando uma evolução comum e idêntica a do tripleto puro. Isto nos levou a um sistema de dois osciladores lineares, sobre os quais atuam termos de forçamento, devidos aos modos coerentes, Eq.(3.18)-(3.19). Considerando a situação na qual os modos

coerentes encontram-se em equilíbrio, obtivemos um termo de forçamento harmônico com apenas uma frequência angular. Supondo que os osciladores lineares respondem harmonicamente com a mesma frequência, chegamos a um critério para coerência, dado por  $\delta_{1n} < \omega_0$ . Segundo este critério, o pente torna-se incoerente quando a diferença entre as frequências angulares do modo mais externo e do modo central,  $\delta_{1n}$ , torna-se maior que a frequência da fonte,  $\omega_0$ .

Tomamos, em seguida, a situação na qual os modos coerentes, que atuam sob o modo teste, seguem a condição de decaimento. Os termos de fonte possuem, então, uma frequência não linear assintótica, pois os modos coerentes seguem uma trajetória próxima a separatriz, conforme o espaço de fase do tripleto puro. A maior parte da trajetória da separatriz se dá na região onde a amplitude tende a zero, o que torna desprezível o termo de forçamento do modo teste. Isto causa um desacoplamento do modo teste que passa a mover-se com sua frequência linear característica. Com isto, obtivemos o critério de coerência na interação de decaimento, dado por  $\delta_{1n} \ll \omega_{sep}$ . O parâmetro relevante para a determinação da transição para incoerência, dado pela diferença entre as frequências angulares do modo mais externo e do modo central,  $\delta_{1n}$ , é drasticamente reduzido, uma vez que  $\omega_{sep} \ll \omega_0$ .

Testamos os critérios obtidos para transição que leva à incoerência, realizando simulações numéricas do sistema adiabático autoconsistente, na qual integramos todas as equações de evolução do tripleto de pentes. A diagnose foi feita mediante o uso do “bunching factor” e da taxa de quebra de coerência, sendo válidos os critérios de quebra de coerência, obtidos mediante a aproximação por modo teste.

Analisamos, por fim, a dinâmica completa, na qual não aplicamos a aproximação modulacional. Semelhantemente ao tripleto puro, para baixas amplitudes, obtivemos concordância com os resultados obtidos para a aproximação adiabática. Com o aumento das amplitudes, chegamos a uma situação caótica, onde o “bunching factor” foi bem menor que no caso adiabático. A conclusão mais importante, no que se refere ao sistema completo, é que, nele, a transição para incoerência ocorre de forma global, para todos os modos envolvidos. No caso adiabático, ao contrário, é sempre possível encontrar, a qualquer tempo, modos que, estando suficientemente próximos ao modo central, mantêm-se em fase com este. Portanto, para campos altos, a coerência do sistema completo é reduzida, se comparada ao sistema adiabático. No entanto, para campos ainda maiores, a coerência ressurgue, criando um movimento altamente sincronizado.

No Cap.4 introduzimos um modelo de interação do tripleto de pentes com acoplamentos bilineares envolvendo apenas modos ressonantes. Na notação utilizada no Cap.3 isto implica em considerar apenas as interações entre modos com números de onda ressonantes,  $k_{1q} = k_{2l} + k_{3m}$ , o que corresponde, simplesmente, à  $q = l + m$ . A imposição de tal regra de seleção foi obtida extendendo-se a região de interação das ondas a todo espaço em que estas estão presentes. O fator de forma foi, portanto, extendido a todo espaço real disponível para as ondas, de modo que  $l_{int} \rightarrow L$  na Eq.(3.9). Com isto, é possível considerar pentes com banda mais larga. Para as interações ressonantes, nos restringimos à aproximação adiabática.

Partimos do modelo de campo médio, tomando duas aproximações nas Eq.(3.2), (3.3) e (3.14). Em primeiro lugar, desprezamos a dispersão das frequências angulares, tomando como constantes os coeficientes dos termos bilineares das equações dos modos íon-acústicos, Eq.(3.14). Em segundo lugar, tomamos, em todos os termos lineares nas amplitudes, uma expansão de primeira ordem das relações de dispersão, em torno das frequências angulares centrais dos três pentes. Os coeficientes destes termos lineares passaram a depender, então, das velocidades de grupo de seus respectivos pentes.

A passagem do modelo de campo médio, para o modelo com interações seletivas ressonantes, foi feita mediante as regras de correspondência dadas pelas Eq.(4.6)-(4.8), as quais mantém a ordem relativa de termos, mediante a supressão de um fator  $1/N$ . Tal regra de correspondência pode, também, ser compreendida, se extendemos o fator de forma, Eq.(3.9), a todo espaço real, de modo que  $l_{int} \rightarrow L$  e  $l_{int}/L = 1/N \rightarrow 1$ . Com isto, obtivemos as equações de evolução das amplitudes dos modos espaciais de Fourier, Eq.(4.12)-(4.14). Estas equações foram levadas ao espaço real, mediante uma transformada inversa de Fourier, tomando a forma de um sistema de três *EDP's* de primeira ordem no tempo e no espaço, Eq.(4.15)-Eq.(4.17). Nesta passagem ao espaço real, utilizamos o teorema da convolução, o que só foi possível graças à primeira das aproximações referida no parágrafo anterior. Os termos não lineares das *EDP's* tomaram, então, a forma de interações locais. Por outro lado, devido à expansão em primeira ordem das relações de dispersão, as *EDP's* não apresentaram derivadas parciais espaciais de ordem superior a um. Também devido a esta expansão, os coeficientes das derivadas espaciais primeiras são dados pelas velocidades de grupo.

Analisamos o caso de três pentes com a mesma velocidade de grupo, onde foi possível aplicar uma transformação de coordenadas que nos levou à equações diferenciais ordinárias no tempo. Nestas equações, as coordenadas espaciais atuam como meros parâmetros. Tomamos, então, soluções com amplitudes estacionárias e, usando o método da fase estacionária, fizemos estimativas analíticas de suas respectivas transformadas de Fourier. Nestas condições, deve haver coerência, visto que, assintoticamente, conforme a Eq.(4.30), todos os modos do primeiro pente vibram com a mesma frequência não linear,  $\Omega_1^{(nl)} = -2\rho_1(0)$ , onde  $\rho_1(0)$  é a amplitude inicial máxima do pente um no espaço real. Novos modos vão sendo incluídos, à medida em que é satisfeita a condição dada pela Eq.(4.33). Quando for incluído o modo ressonante, que satisfaz a Eq.(4.32), nossas estimativas indicam que o pente deverá perder sua coerência. Além disto, se o modo ressonante estiver presente, desde o início, o pente deverá ser sempre incoerente.

Verificamos a validade das estimativas analíticas, comparando-as com os resultados de simulações, nas quais tomamos, sempre, velocidades de grupo idênticas para o segundo e o terceiro pente. Esta velocidade de grupo comum foi levada à zero, mediante uma transformação de coordenadas conveniente, na qual o sistema de referências move-se junto com os dois pentes. Investigamos, primeiramente, o caso no qual não há alargamento das frequências lineares do primeiro pente, ou seja, o caso no qual  $v_{g1} = 0$ . Estas são as condições nas quais fizemos as estimativas analíticas do *MFE*, as quais mostraram-se compatíveis com os resultados numéricos obtidos. Houve, nos resultados numéricos, um alargamento linear do primeiro pente,  $k \approx \pm 2\rho_0 t/d$ , aproximadamente de acordo com a regra analítica para inclusão de novos modos, Eq.(4.33). Os resultados de simulação apresentaram, ainda, um decaimento dos módulos das amplitudes, o qual seguiu o fator  $(|\rho_1''(x=0)|t)^{1/2}$ , presente na expressão assintótica para os modos analíticos, Eq.(4.30). Tanto o alargamento linear, quanto o decaimento das amplitudes, pode ser observado na Fig.4.1(a). Por fim, quanto ao caso  $v_{g1} = 0$ , representamos graficamente, na Fig.4.1(b), dois modos simulados, os quais tendem, de maneira relativamente rápida, a expressão analítica e assintótica para os modos do pente, Eq.(4.30). Dadas todas estas concordâncias, entre resultados analíticos e numéricos, podemos concluir que o *MFE* é de grande valia na realização de estimativas, para o caso no qual os pentes não apresentam alargamento de suas frequências lineares, onde  $v_{gp} = 0$  ( $p = 1, 2, 3$ ).

Testamos a validade do critério de ressonância, Eq.(4.32), realizando simulações para  $v_{g1} = 0, 1$  e  $0,05$ . Vimos, então, conforme as Fig.4.2(a) e (b), que os

modos ressonantes surgem nos tempos dados pela Eq.(4.33), sendo localizados conforme a Eq.(4.32), o que leva à perda de coerência. Portanto, a excitação do modo ressonante coincide com a transição para incoerência, e a transição para incoerência se dá quando a Eq.(4.32) é satisfeita. Além disto, com a excitação do modo ressonante, o primeiro pente para de alargar-se. Isto ocorre, conforme vimos no final da Sec.4.2, quando o primeiro pente afasta-se dos outros dois, deixando de interagir com eles.

A conclusão mais relevante, em relação ao Cap.4, é que a condição que localiza a transição coerência-incoerência, no modelo com interações seletivas ressonantes, é a mesma que a do modelo com interações de campo médio. As Eq.(3.26) e Eq.(4.32) correspondem-se entre si pois:

(a) desprezadas contribuições de ordem mais alta para a relação de dispersão, o termo linear  $v_{g1}k_q$ , do modelo seletivo, Eq.(4.1), equivale à diferença de fases  $\delta_{1q} = \omega_{1q} - \omega_1$ , do modelo de campo médio, Eq.(3.17).

(b) no modelo seletivo,  $\Omega_1^{(nl)}$  é a frequência não linear de um campo coerente estacionário, que atua sobre o modo ressonante. Isto equivale, no modelo de campo médio, ao campo coerente, de frequência  $\omega_0$ , que atua sobre o modo teste.

Portanto, se as frequências não lineares são muito maiores que as frequências lineares dos modos envolvidos, as fases mantém-se acopladas e a dinâmica é coerente. No entanto, quando as frequências lineares se tornam da mesma ordem ou maiores que as frequências não lineares, cessa o acoplamento entre as fases, ocorrendo a transição para incoerência. No que tange ao modelo de interações ressonantes, a passagem para incoerência ocorre, quando o alargamento do primeiro pente atinge um modo ressonante, que passa a crescer de modo independente dos outros. Este crescimento, inicialmente, é linear, conforme pode ser observado na Fig.4.2(b), o que está de acordo com as estimativas analíticas obtidas da Eq.(4.35). Na mesma figura vê-se que este crescimento é seguido de uma saturação da amplitude do modo ressonante, criando-se, concomitantemente, um desacoplamento entre as fases dos outros modos. Isto indica, mais uma vez, que a excitação do modo ressonante é o critério que demarca a perda de coerência no modelo do tripleto de pentes com interações seletivas ressonantes.

Encerramos as conclusões desta tese, indicando alguns possíveis caminhos a se seguir nesta linha de pesquisa. No modelo de interações seletivas, será conveniente estudar os efeitos devidos a termos de ordem mais alta na expansão da relação de dispersão. Esperamos que, no espaço real, com a correspondente presença de derivadas espaciais de ordem mais alta, seja possível obter estados onde o alargamento dos pentes seja saturado. Talvez, assim, seja possível obter-se pentes de onda coerentes.



Quanto à região efetiva de interação,  $l_{int}$ , da qual tratamos no Cap.3, esperamos, através dela, criar um modelo com interações ponderadas. Com a conveniente introdução de pesos nos termos bilineares, dados como função das diferenças em número de onda,  $k_{1q} - k_{2l} - k_{3m}$ , poder-se-á tomar uma modelagem intermediária entre os dois extremos: de um lado a ausência de regra de seleção do campo médio, do outro, a seleção rigorosa da ressonância. Isto equivalerá a tomar regiões de interação efetiva, entre os limites  $l_{int}/L \ll 1$ , do campo médio, e  $l_{int}/L = 1$ , do modelo de interações ressonantes. Os pesos dos diferentes acoplamentos bilineares poderão ser introduzidos, de forma consistente, a partir da transformada do fator de forma. Nesta nova perspectiva, pode-se abordar a questão de critérios de coerência bem como do possível alargamento dos pacotes.

# Referências Bibliográficas

- [1] BLEISTEIN, N., HANDELSMAN, R.A. **Asymptotic Expansion of Integrals**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975.
- [2] BYRD, P.F., FRIEDMAN, M.D. **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists**. Berlin: Springer, 1971.
- [3] CHIAN, A.C.L., ALVES, M.V. Nonlinear generation of the fundamental radiation of interplanetary type-iii radio-bursts. **Astrophysical Journal**, v. 330, n. 2, p. L77–L80, jul. 1988.
- [4] DEOLIVEIRA, G.I., DEOLIVEIRA, L.P.L., RIZZATO, F.B. Nonintegrable three mode interaction in the zakharov equations. **Physica D**, v. 104, p. 119–126, fev. 1997.
- [5] DEOLIVEIRA, G.I., FRICHEMBRUDER, M., RIZZATO, F.B. Time dependence, chaos and coherence in broad-band triplet interaction. **Physica D**, v. 164, p. 59–70, mar. 2002.
- [6] FRICHEMBRUDER, M., PAKTER, R., GERHARDT, G., RIZZATO, F.B. Chaos and coherence in the conservative three-mode decay interaction. **Physical Review E**, v. 62, n. 6, p. 7861–7866, dez. 2000.
- [7] FRICHEMBRUDER, M., PAKTER, R., RIZZATO, F.B. Coherence-incoherence transition in nonlinear wave interactions. **Journal of Plasma Physics**, v. 71, p. 11–21, fev. 2005.
- [8] GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. London: Addison-Wesley, 1980.

- [9] GRATTON, F.T., GNAVI, G., GALVÃO, L., R.M. E GOMBEROFF. Self-modulation of a strong electromagnetic wave in a positron-electron plasma induced by relativistic temperatures and phonon damping. **Physical Review E**, v. 55, p. 3381–3392, mar. 1997.
- [10] KIVSHAR, Y.S., MALOMED, B. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 61, p. 763–915, out. 1989.
- [11] KURAMOTO, Y., NISHIKAWA, I. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. case of phase transition in oscillator communities. **Journal of Statistical Physics**, v. 49, n. 3, p. 569–605, nov. 1987.
- [12] LANCZOS, L. **The Variational Principles of Mechanics**. New York: Dover, 1970.
- [13] LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M. **Mechanics, vol.1 of Course of Theoretical Physics**. Oxford: Pergamon Press, 1960.
- [14] LICHTENBERG, A., LIEBERMAN, M.A. **Regular and Stochastic Dynamics**. New York: Springer Verlag, 1991.
- [15] MARTINS, A.M., MENDONÇA, J.T. Projection-operator method for the nonlinear three-wave interaction. **Physical Review A**, v. 31, n. 6, p. 3898–3906, jun. 1985.
- [16] MELROSE, D.B. **Instabilities in space and laboratory plasmas**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [17] PAKTER, R., COUTO, F.O., RIZZATO, F.B. Self-consistent chaos and Arnold diffusion in a cyclotron-maser wave-particle system. **Physical Review E**, v. 52, n. 5, p. 4793–4803, nov. 1995.
- [18] ROBINSON, P.A. Nonlinear wave collapse and strong turbulence. **Reviews of Modern Physics**, v. 69, n. 2, p. 507–573, abr. 1997.
- [19] ROBINSON, P.A., DRYSDALE, P. Phase transition between coherent and incoherent three-wave interactions. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 13, p. 2698–2701, set. 1996.
- [20] SHUKLA, P.K., RAO, N.N., YU, M.Y., TSINTSADZE, N.L. Relativistic nonlinear effects in plasmas. **Physics Reports**, v. 138, p. 1–149, maio 1986.

- [21] WEILAND, J., WILHELMSSON, H. **Coherent Non-Linear Interaction of Waves in Plasmas**. Oxford: Pergamon Press, 1977.
- [22] ZAKHAROV, V.E. Collapse of langmuir waves. **Soviet Physics JETP**, v. 35, n. 5, p. 908–914, nov. 1972.