

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

**Estudo de processos de geração de correntes
em tokamaks por meio de interações
onda-partícula[†]**

Clésio Ismério de Oliveira

Tese realizada sob a orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, Novembro de 2006.

[†]Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*”Ora em silêncio e confia em Deus,
esperando pela Divina Providência, porque
Deus tem estradas, onde o mundo não tem caminhos.*

*É por isso que a tempestade pode rugir à noite,
mas não existem forças na Terra que impeçam, cada
dia a chegada de novo amanhecer.”*

AMIZADE - Francisco Cândido Xavier,
pelo Espírito de Meimei.

Às Estrelas do Meu Caminho:
Vlândia Cristina e Vítor Francisco.

Resumo

Este trabalho constitui-se numa monografia¹ para ser apresentada como requisito para o título de Doutor em Ciências dentro do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faz parte da pesquisa teórica desenvolvida pelo Grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, e tem por objetivo participar do esforço de tornar comercialmente viável a tecnologia de fusão termonuclear como fonte geradora de energia elétrica. Conhecimento científico e tecnológico que é imprescindível para um país em desenvolvimento como o Brasil.

Dentro deste contexto, o trabalho desenvolvido segue a linha de pesquisa do estudo de processos de geração de correntes em tokamaks por meio de interações onda-partícula. Assim, estudamos os efeitos devido a ocorrência de transporte radial de partículas em um tokamak na eficiência de geração de corrente devido a ondas de radio frequência (RF), na presença de barreiras internas de transporte (ITB - *Internal Transport Barriers*). Para isso, considerou-se dois casos: no primeiro, a geração de corrente ocorre devido somente a ondas do tipo híbrida inferior (LH - *Lower Hybrid*), e no segundo, a geração com ação combinada das ondas LH e do tipo eletrônica de cíclotron (EC - *Electron Cyclotron*).

Os resultados foram obtidos por solução numérica da equação de Fokker-Planck que rege a evolução da função distribuição de elétrons. Nós consideramos que o transporte radial de partículas pode ser devido a flutuações magnéticas ou eletrostáticas. Considerando ambos os tipos de flutuações, a eficiência da geração de corrente mostrou um crescimento com o crescimento das flutuações que originam o transporte. A dependência da eficiência da geração de corrente na profundidade e posição da barreira também foi investigada.

¹Esta monografia foi escrita com o abnTeX.

Abstract

This work constitutes a monograph to be presented as requirement to the title of PhD at the Physics Graduate Program at Federal University of Rio Grande do Sul. It is part of a theoretical research developed by the Plasma Physics Group of the IF-UFRGS, and it have the purpose to participe on the effort to make feasible the thermonuclear fusion technology as a source of electric energy. Scientific and technological knowledge that are indispensable to a developing country as the Brazil.

In that context, the work under development follows the research line of the study of the process of current drive in tokamaks by means of wave-particle interaction. Therefore, we studied the effects due to the occurrence of radial transport of particles in a tokamak on the efficiency of current drive due the radio frequency waves (RF), in the presence of an Internal Transport Barrier (ITB). For this, we consider two cases: at first, the current drive occur due to Lower Hybrid waves (LH) only, and at second case, the current drive with combined action of LH and Electron Cyclotron (EC) waves.

The present results are obtained by numerical solution of the Fokker-Planck equation which rules the evolution of the electron distribution function. We assume that the radial transport of particles can be due to magnetic or to eletrostatic flutuations. It considering both the flutuations types, the efficiency of current drive is shown to increase with the increase of the flutuations which originate the transport. The dependence of the current drive efficiency on the depth and position of the barrier is also investigated.

Sumário

Lista de Símbolos

Lista de Figuras

Introdução	p. 18
1 Conceitos básicos	p. 28
1.1 Fusão	p. 28
1.2 Tokamak	p. 30
1.3 Geração de corrente	p. 33
1.3.1 Geração de corrente por ondas LH	p. 34
1.3.2 Geração de corrente por ondas EC	p. 36
1.4 Superfícies magnéticas, fator de segurança e 'shear'	p. 38
1.5 Transporte em tokamaks	p. 41
2 Revisão Bibliográfica	p. 43
2.1 Introdução	p. 43
2.2 Trabalhos prévios em geração de corrente por ondas de rádio-freqüência	p. 43
2.3 Trabalhos prévios em barreiras internas de transporte	p. 52
3 Teoria Quase-Linear	p. 55
3.1 Introdução	p. 55
3.2 Teoria quase-linear	p. 56
3.3 Equação de evolução temporal da função distribuição	p. 58

3.4	Teoria quase-linear da onda de cíclotron eletrônica	p. 63
3.5	Teoria quase-linear da onda híbrida inferior	p. 74
3.6	Algumas considerações sobre a teoria quase-linear para as ondas EC e LH	p. 77
3.7	Teoria quase-linear com colisões	p. 79
3.8	Teoria quase-linear com campo elétrico	p. 80
3.9	Teoria quase-linear com transporte	p. 81
4	Emissão de radiação de cíclotron	p. 85
4.1	Modelo utilizado	p. 85
4.2	Intensidade da radiação	p. 86
5	Metodologia	p. 90
5.1	Introdução	p. 90
5.2	Caso I - Somente ondas do tipo híbrida inferior	p. 91
5.3	Caso II - Ondas do tipo híbrida inferior e eletrônica de cíclotron	p. 100
6	Resultados numéricos	p. 103
6.1	Caso I - LH	p. 103
6.2	Caso II - LH + EC	p. 119
	Conclusão	p. 146
	Introdução	p. 146
	Sumário da pesquisa	p. 146
	Contribuições	p. 147
	Recomendações para trabalhos futuros	p. 148
	Apêndice A – Efeito das colisões na Teoria Quase-Linear	p. 149
	A.0.1 Algumas aproximações	p. 156
	Apêndice B – Cálculo do tensor dielétrico para ondas do tipo EC	p. 159

B.1	Componentes do tensor dielétrico	p. 159
B.2	Cálculo das integrais $I(n, m, h, s)$	p. 161
B.2.1	Propagação perpendicular	p. 165
B.3	Cálculo de ε_{330}	p. 166
Apêndice C – Cálculo do tensor correlação para ondas do tipo EC		p. 167
C.1	Cálculo das componentes G_{ij} do tensor correlação	p. 167
C.1.1	Propagação perpendicular	p. 172
Apêndice D – Método implícito em direções alternadas (ADI)		p. 173
D.1	Diferenças finitas	p. 173
D.2	Método explícito e método implícito	p. 174
D.3	Método implícito em direções alternadas	p. 177
Apêndice E – Lista de Anexos		p. 180
E.1	Lista de trabalhos publicados originados no desenvolvimento deste projeto que se encontram em Anexo	p. 180
Referências		p. 181

Lista de Símbolos

B_ϕ	campo magnético toroidal
B_θ	campo magnético poloidal
s_m	<i>shear</i> magnético
q	fator de segurança
ϕ	ângulo toroidal
E_r	campo elétrico radial
u_{\parallel}	componente da velocidade na direção paralela ao campo magnético ambiente
I	corrente total
γ_{max}^{lin}	taxa de crescimento linear máxima
f	função distribuição de elétrons
f_0	função distribuição de fundo
f_1	função distribuição que interage com as ondas, perturbação
\vec{F}	força que age sobre os elétrons
γ	fator relativístico
m	massa do elétron
\vec{x}	posição
\vec{p}	momentum
t	tempo
$\langle \dots \rangle$	representa a média espacial
$-e$	carga do elétron
\vec{E}	campo elétrico
\vec{B}_0	campo magnético estático
J_n	função de Bessel de ordem n

ρ	raio de Larmor das partículas
\vec{k}''	parte imaginária do vetor de onda
\vec{k}	vetor de onda
P_0	potência total liberada pelas antenas
Γ	função que representa a forma do pacote de ondas
α	coeficiente de difusão de cíclotron
h	grandeza que apresenta as propriedades dielétricas do meio de polarização da onda
N_{\parallel}	índice de refração paralelo ao campo magnético para ondas LH
n_{\parallel}	índice de refração paralelo ao campo magnético para ondas EC
D_{EC}	coeficiente de difusão de cíclotron
\vec{u}	velocidade normalizada
ν_e	freqüência de colisões dos elétrons
n_e	densidade de elétrons
T_e	temperatura eletrônica
A_r	seção reta da trajetória do feixe de raios
S	densidade de energia
ω_{ci}	freqüência de cíclotron de íons
D_{LH}	coeficiente de difusão da onda LH
μ	cosseno do ângulo de <i>pitch</i>
$s = x/a$	coordenada radial ao longo da direção perpendicular ao campo magnético ambiente normalizada
a	raio menor do tokamak
ω	freqüência de propagação da onda
ω_c	freqüência cíclotron de elétrons
ω_h	freqüência híbrida inferior
ω_{EC}	freqüência angular das ondas EC

ω_{LH}	freqüência angular das ondas LH
$\Lambda(s)$	logaritmo de Coulomb
D_m	coeficiente de transporte devido a flutuações magnéticas
D_e	coeficiente de transporte devido a flutuações eletrostáticas
\tilde{b}_0	nível de turbulência magnética
\tilde{e}_0	nível de turbulência eletrotática
s_b	posição do centro da barreira
β	meia-largura adimensional
α	profundidade da barreira
J	densidade de corrente
P_0	potência total dissipada em um tokamak
η	eficiência de geração de corrente
R_0	raio maior do tokamak
T_{e0}	temperatura central de elétrons em $\tau = 0$
c	velocidade da luz
$P_{EC}(1)$	potência entregue por antenas na borda do plasma
N_0	número total de partículas no plasma

Lista de Figuras

1	Cenários de demanda e suprimento de energia no Mundo. A esquerda "melhor-cenário-plausível" e a direita "cenário-da-economia-usual" (GENERAL ATOMICS, 2006).	p. 19
2	Consumo de energia em ExaJoules (10^{18} J) por regiões: 1980-1999 (Fonte: U.S. Energy Information Administration) (LUDWIG et al., 2002). . . .	p. 19
3	População mundial (à esquerda) no período 1950-2050 (Fonte: U.S. Bureau of the Census International Data Base). Consumo previsto de energia (à direita) nas próximas décadas (Fonte: U.S. Energy Information Administration) (LUDWIG et al., 2002).	p. 20
4	Projeção da demanda e produção de energia para a Europa até 2030 (MTOE - Million Tons of Oil Equivalent) - EU Energy Green Paper (POWER CLEAN THEMATIC NETWORK, 2004).	p. 21
5	Esquema de uma usina termonuclear para gerar eletricidade através da fusão (JET-FEAT, 1999).	p. 24
6	Energia de ligação liberada em reações nucleares (JET-FEAT, 1999). . . .	p. 28
7	Esquema de um <i>tokamak</i> . Disponível em: http://www.plasma.inpe.br	p. 31
8	Vista do interior do JET mostrando o MkIIA <i>divertor</i> e a parede interior (JET-FEAT, 1999).	p. 32
9	Concepção artística do ITER-FEAT (Fonte:www.iter.org) (LUDWIG et al., 2002).	p. 33
10	Esquema de métodos de aquecimento em plasmas do JET (MLYMAR, 2006).	p. 34
11	Esquema do sistema LHCD do JET (MLYMAR, 2006).	p. 35
12	Complexo de antenas conhecido como "multijunction grill"(MLYMAR, 2006).	p. 36

13	Conecção do sistema de guia de ondas do LHCD com vaso de vácuo do JET (MLYMAR, 2006).	p. 37
14	Antenas LHCD e ICRH no JET. O "grill" LHCD está a esquerda próximo dos quatro lançadores de ICRH (MLYMAR, 2006).	p. 37
15	Antena "mockup" (Oak Ridge National Laboratory). Aquecimento e geração de corrente por ondas do tipo EC são técnicas importantes em experimentos no tokamak DIII-D (EUA) e em outros países (MLYMAR, 2006).	p. 38
16	Superfícies de fluxo magnéticas formando um conjunto de toróides aninhados (WESSON, 2004).	p. 39
17	Linhas de campo magnéticas e linhas de corrente estão em superfícies magnéticas (WESSON, 2004).	p. 39
18	Linha de campo na superfície $q = 2$ (WESSON, 2004).	p. 40
19	Variação do <i>shear</i> de velocidade na direção y , perpendicular ao campo magnético B (WESSON, 2004).	p. 41
20	Correspondência entre geometria real do plasma e modelo de lâmina.	p. 96
21	Representação da barreira através do nível de turbulência.	p. 96
22	Representação dos perfis de campo magnético, densidade de elétrons e temperatura de elétrons utilizados no modelo.	p. 98
23	Limites do domínio de propagação para ondas LH no espaço N_{\parallel} . Os parâmetros são característicos de um tokamak de tamanho médio. $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 3,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 2,65 \text{ T}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $R_0 = 1,0 \text{ m}$. Para as ondas LH, $N_{\parallel 0} = 2,3$, $f_{LH} = 3,37 \times 10^9 \text{ Hz}$, e $n_L = 6,5$	p. 104
24	Intervalo de velocidades na qual as partículas são ressonantes com as ondas LH, como uma função da posição na lâmina de plasma. Na curva superior, temos u_1 e na inferior, u_2 - observe-se que $u_1 = \sqrt{\mu}/n_2$. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 23.	p. 104
25	Potência de ondas LH como uma função do tempo e posição na lâmina de plasma. A potência da onda LH é $P_{LH}(a, t) = 0,5 \text{ MW}$. A barreira é localizada em $s_b = 0,5$, com $\alpha = 0,125$, e $\beta = 3,0 \text{ cm}$. Os outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 24.	p. 105

- 26 Evolução no tempo de J vs. s como uma função de τ . (a) O caso de transporte magnético com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. (b) O caso sem transporte. Os outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25 p. 106
- 27 Densidade de corrente J vs. posição na lâmina de plasma s , em $\tau = 60$. (a) $\tilde{e}_0 = 0$, e vários valores de \tilde{b}_0 : $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. (b) $\tilde{b}_0 = 0$, e vários valores de \tilde{e}_0 : $\tilde{e}_0 = 0,2 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,4 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,6 \times 10^{-3}$, $\tilde{e}_0 = 0,8 \times 10^{-5}$, e $\tilde{e}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. p. 108
- 28 Corrente I vs. tempo normalizado τ . (a) $\tilde{e}_0 = 0$, e vários valores de \tilde{b}_0 : $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. (b) $\tilde{b}_0 = 0$, and several values of \tilde{e}_0 : $\tilde{e}_0 = 0,2 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,4 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,6 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,8 \times 10^{-5}$, e $\tilde{e}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. p. 109
- 29 (a) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação magnética \tilde{b}_0 , para $\tilde{e}_0 = 0$, em $\tau = 60$. (b) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação eletrostática \tilde{e}_0 , para $\tilde{b}_0 = 0$, em $\tau = 60$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. p. 110
- 30 Eficiência de geração de corrente η vs. tempo normalizado τ , para três valores diferentes de densidade central do plasma, $n_{e0} = 4,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, e $n_{e0} = 8,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, comparando com o caso de somente flutuações magnéticas, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, e o caso sem transporte. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. p. 111
- 31 Eficiência de geração de corrente η vs posição da barreira de transporte, em $\tau = 60$; a curva superior é para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0$. A curva inferior é para $\tilde{e}_0 = 0,50 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. p. 112
- 32 Eficiência de geração de corrente η vs. potência da onda LH MW, em $\tau = 60$. A curva superior é para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0$. A curva inferior é para $\tilde{e}_0 = 0,50 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. p. 113

- 33 η vs. α (a profundidade da barreira diminui para a direita), em $\tau = 60$; curva superior, flutuações magnéticas, curva inferior, flutuações eletrostáticas. p. 113
- 34 Intensidade de emissão vs. frequência da onda, em $\tau = 60$, no intervalo do harmônico $n = 2$ da frequência de cíclotron, para vários valores de \tilde{b}_0 . $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. (a) Modo ordinário; (b) Modo extraordinário. p. 116
- 35 Intensidade de emissão vs. frequência da onda, em $\tau = 60$, no intervalo do harmônico $n = 2$ da frequência de cíclotron, para vários valores de posição da barreira. $s_b = 0,4$, $s_b = 0,5$, $s_b = 0,6$, $s_b = 0,7$. O nível de flutuação é tal que $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{e}_0 = 0$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. (a) Modo ordinário; (b) Modo extraordinário. p. 117
- 36 ρ_{th} vs. s como uma função de τ , para um tokamak grande, considerando transporte devido a flutuações magnéticas com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Os parâmetros são característicos de um tokamak grande, $n_{e0} = 3,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 5,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 3,0 \text{ T}$, $a = 1,2 \text{ m}$, $R_0 = 3,0 \text{ m}$. Para ondas LH, nós consideramos $P_{LH}(a, t) = 1,0 \text{ MW}$, $N_{||0} = 1,8$, e $f_{LH} = 9,95 \times 10^9 \text{ Hz}$. A barreira é localizada em $s_b = 0,5$, com $\alpha = 0,125$, e $\beta = 3,0 \text{ cm}$ p. 118
- 37 Densidade de corrente J vs. s como uma função de τ , para um tokamak grande, considerando transporte devido a flutuações magnéticas com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36. p. 118
- 38 I vs. τ para $\tilde{e}_0 = 0$ e vários valores de \tilde{b}_0 , para um tokamak grande. $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36. p. 119
- 39 Eficiência de geração de corrente η vs. posição da barreira de transporte, em um tokamak grande, para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0$, em $\tau = 60$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36. p. 120
- 40 Densidade de corrente J vs. posição na lâmina de plasma, em um tokamak grande, para vários valores de s_b , a posição da barreira de transporte, para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, em $\tau = 60$. $s_b = 0.4$, $s_b = 0.5$, $s_b = 0.6$, $s_b = 0.7$, and $s_b = 0.8$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36. p. 120

- 41 ρ_{EC} vs s , para $P_{LH}(a, t) = 0,5$ MW e $P_{EC}(a, t) = 0,5$ MW. O caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. A ITB está localizada em $s_b = 0,5$, com $\alpha = 0,125$, e $\beta = 0,15$. As curvas mostradas são: ρ_{LH} em $\tau = 0,0$; ρ_{LH} em $\tau = 50$; ρ_{LH} em $\tau = 80$ e ρ_{EC} em $\tau = 80$. Os parâmetros são característicos de tokamaks de tamanho médio. $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 3,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 2,65 \text{ T}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $R_0 = 1,0 \text{ m}$. Para as ondas LH, $N_{||0} = 2,3$, $f_{LH} = 3,37 \times 10^9 \text{ Hz}$, e $n_L = 6,5$ p. 122
- 42 ρ_{EC} vs s , para $P_{LH}(a, t) = 0,5$ MW e $P_{EC}(a, t) = 0,5$ MW. O caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. Sem presença de ITB. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. . . . p. 123
- 43 ρ_{EC} vs s , para $P_{LH}(a, t) = 0,5$ MW e $P_{EC}(a, t) = 0,5$ MW. Caso sem efeitos de transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 123
- 44 J vs s como função de τ . (a) Caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. (b) Caso de transporte eletrostático - $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. (c) Caso sem efeitos de transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 126
- 45 (a) Corrente I vs. tempo normalizado τ . (b) Eficiência de geração de corrente η vs. tempo normalizado τ . As curvas mostradas para cada painel são: o caso sem transporte; caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$; caso de transporte eletrostático - $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 127
- 46 (a) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação magnética \tilde{b}_0 , para $\tilde{e}_0 = 0,0$, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. (b) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação eletrotática \tilde{e}_0 , para $\tilde{b}_0 = 0,0$, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 129

- 47 Eficiência de geração de corrente η vs. posição da barreira de transporte s_b , em $\tau = 50$ e $\tau = 80$; as curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 130
- 48 Eficiência de geração de corrente η vs. profundidade da barreira de transporte α , em $\tau = 50$ e $\tau = 80$ (a profundidade da barreira diminui para a direita); as curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 131
- 49 Eficiência de geração de corrente η vs. potência EC em MW, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$; as curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 132
- 50 Eficiência de geração de corrente η vs. tempo normalizado τ , para vários valores de potência EC, no caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. $P_{EC} = 0,25$ MW, $P_{EC} = 0,50$ MW, $P_{EC} = 0,75$ MW, e $P_{EC} = 1,00$ MW. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 133
- 51 Evolução no tempo da eficiência relativa de geração de corrente, η_{relat} , para vários valores de potência EC, no caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. $P_{EC} = 0,25$ MW, $P_{EC} = 0,50$ MW, $P_{EC} = 0,75$ MW, e $P_{EC} = 1,00$ MW. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 134
- 52 Evolução no tempo da eficiência relativa de geração de corrente, η_{relat} , no caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. Foram obtidas as curvas para $P_{LH} = 0,50$ MW, e mostra os casos para $\alpha = 0,125$ e $\alpha = 1,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 135

- 53 Densidade de elétrons como função da posição na lâmina de plasma, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. As curvas mostram os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$. O perfil inicial também é mostrado. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 136
- 54 Temperatura de elétrons como função da posição na lâmina de plasma, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. As curvas mostram os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$. O perfil inicial também é mostrado. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 137
- 55 Visão ampliada da variação relativa da densidade de elétrons, $\delta n_e = (n_e(\tau) - n_e(\tau = 0))/n_e(\tau = 0)$, para posições próximo a borda do plasma, em $\tau = 80$. As curvas mostradas são para os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$, e sem transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 138
- 56 Visão ampliada da variação relativa da temperatura de elétrons, $\delta T_e = (T_e(\tau) - T_e(\tau = 0))/T_e(\tau = 0)$, para posições próximo a borda do plasma, em $\tau = 80$. As curvas mostradas são para os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$, e sem transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 138
- 57 Intensidade de emissão (kev/m²) no modo O na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. (a) Sem transporte. (b) Transporte magnético, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. (c) Transporte eletrostático, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 140
- 58 Intensidade de emissão (kev/m²) no modo X na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. (a) Sem transporte. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. (b) Transporte magnético, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$; (c) Transporte eletrostático, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. p. 141

59	Intensidade de emissão (kev/m^2) no modo O na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), para várias posições da barreira de transporte. (a) $\tau = 50$. (b) $\tau = 80$. As figuras mostram os casos para $s_b = 0, 4, 0, 6, 0, 8$, e também mostram a emissão devido à distribuição Maxwelliana. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.	p. 143
60	Intensidade de emissão (kev/m^2) no modo X na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), para várias posições da barreira de transporte. (a) $\tau = 50$. (b) $\tau = 80$. As figuras mostram os casos para $s_b = 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 8$. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.	p. 144
61	Intensidade de emissão (kev/m^2) nos modos O e X na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), para vários valores de potência da onda EC. (a) Modo O. (b) Modo X. As figuras mostram os casos para $P_{EC} = 0, 25$ MW, 0, 50 MW, e 1, 00 MW. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.	p. 145
62	Disposição dos pontos de grade.	p. 174
63	Esquema ilustrativo do método ADI	p. 178

Introdução

Neste Capítulo, vamos apresentar o tema da Tese fazendo antes algumas considerações sobre ENERGIA num contexto de Mundo e de Brasil, não a fim de fazer uma análise criteriosa do assunto, mesmo porque só isso já é assunto de uma tese, mas sim para realçar que a pesquisa, seja ela qual for, desde que bem feita, tem alcances que vão muito além do laboratório, computador ou papel em que foi gerada. Essa é uma atitude que deve estar sempre presente na mente do pesquisador.

Energia é fundamental não só para o desenvolvimento da humanidade, mas para o bem-estar de cada indivíduo. Mas as questões envolvendo energia vão muito além de sua geração, transmissão e distribuição. A tecnologia gerada nessas três áreas pode definir o quanto um país influenciará ou será influenciado por outro.

Os gráficos abaixo (Fig. 1) mostram claramente o quanto essa situação deverá ficar crítica no futuro, em que mesmo no cenário mais otimista em relação a crescimento populacional, conservação de energia e fornecimento de combustível fóssil, grandes fornecimentos de "energia nova" (no sentido de forma de geração) devem ser criados para o futuro (GENERAL ATOMICS, 2006).

Esse crescimento já é evidenciado hoje pelo forte e contínuo aumento no consumo mundial de formas primárias de energia ocorrido em praticamente todas as regiões do mundo, durante as últimas décadas, com excessão do bloco constituído pelas economias em transição (Leste Europeu), como mostra a Fig. 2 que é citada em (LUDWIG et al., 2002). Esse aumento de consumo de energia é inevitável, não só pelo aumento populacional, mas também pela necessidade de industrialização e desenvolvimento de economias emergentes na Ásia e na América Latina, ver Fig. 3 de (LUDWIG et al., 2002).

Os gráficos da Fig. 4, embora se referindo somente à Europa, mostram que apesar da demanda por energia estar aumentando, a produção está diminuindo, criando um vazio muito grande entre estas tendências para 2030. Segundo o WETO *report* (POWER CLEAN THEMATIC NETWORK, 2004), a geração nuclear (fissão) deverá diminuir significativamente comparado com os níveis do ano de 2000, enquanto que os renováveis cresceram mas não de forma a preencher esta queda. Entretanto, mesmo com os esforços

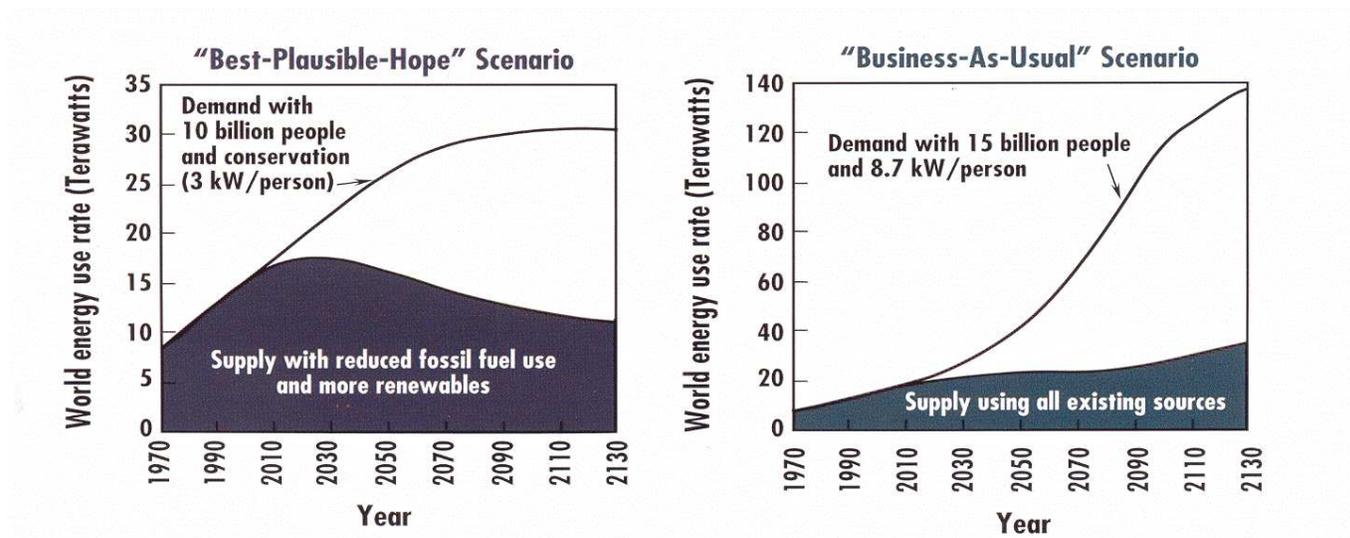


Figura 1: Cenários de demanda e suprimento de energia no Mundo. A esquerda "melhor-cenário-plausível" e a direita "cenário-da-economia-usual" (GENERAL ATOMICS, 2006).

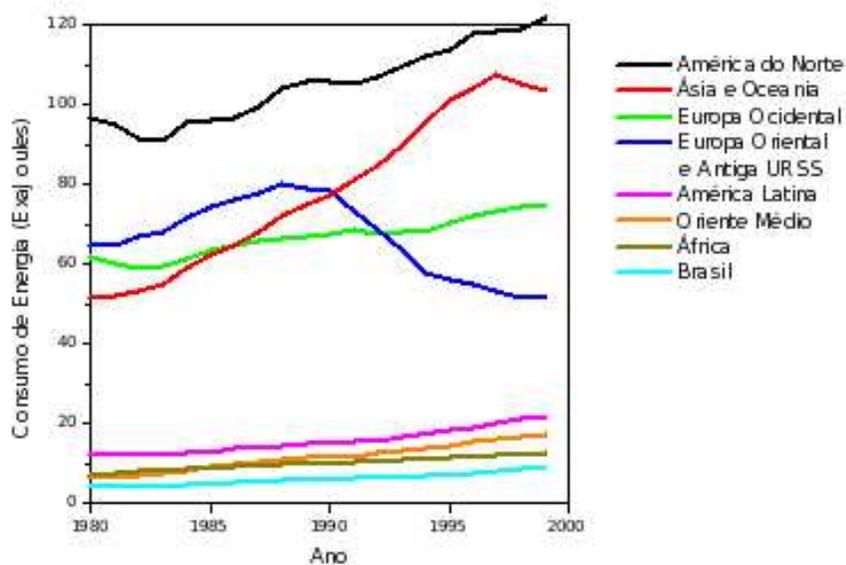


Figura 2: Consumo de energia em ExaJoules (10^{18} J) por regiões: 1980-1999 (Fonte: U.S. Energy Information Administration) (LUDWIG et al., 2002).

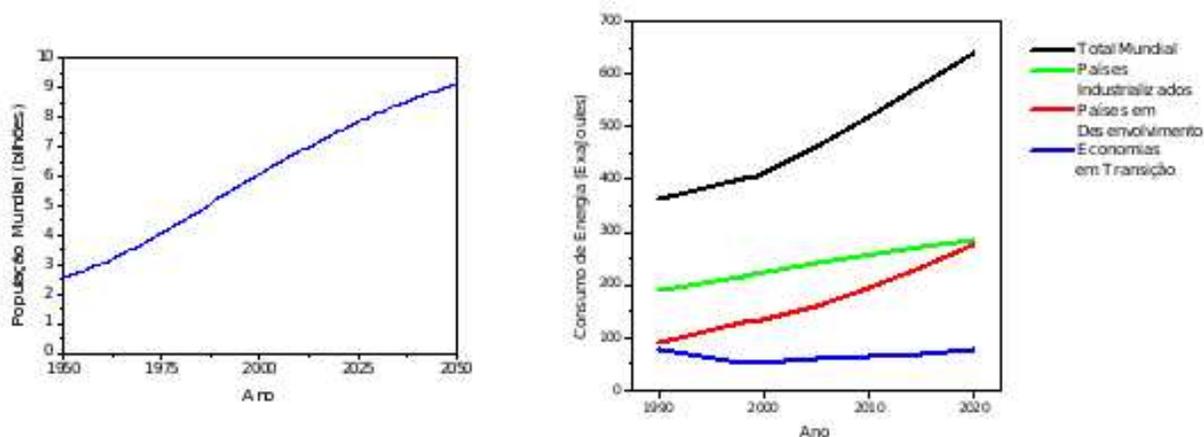


Figura 3: População mundial (à esquerda) no período 1950-2050 (Fonte: U.S. Bureau of the Census International Data Base). Consumo previsto de energia (à direita) nas próximas décadas (Fonte: U.S. Energy Information Administration) (LUDWIG et al., 2002).

que estão sendo feitos para contornar isso, que vão desde ações de P&D,D (Pesquisa, Desenvolvimento e Demonstração) para geração de potência limpa a partir de combustíveis fósseis (POWER CLEAN THEMATIC NETWORK, 2004) até esforços inovadores que estão desenvolvendo reatores de fissão com os conceitos de segurança inerente e resfriamento passivo (SEFIDVASH, 2006) como proposta para os reatores nucleares (fissão) de IV Geração (DOE, 2006a, 2006b), o espaço para a geração de energia à fusão está reservado e, mais do que nunca, os investimentos e a pesquisa devem se aliar de forma que reatores a fusão sejam uma realidade no seu momento devido.

Embora o suprimento global de energia consista primordialmente de combustíveis fósseis, como carvão, petróleo e gás, e em alguns países como Lituânia e França, o nuclear (fissão), o Brasil aparentemente apresenta uma condição diferente, por ter seu suprimento de energia elétrica baseado em usinas hidrelétricas, cerca de 90%. Mas as hidrelétricas não podem ser a única solução energética de um país, o que já ficou demonstrado com o racionamento de 2001.

Apesar do Brasil possuir 15% dos recursos mundiais em água doce dentro do seu território, esses recursos não se encontram bem distribuídos: 70% encontram-se na região Norte (Amazônia) e pouco mais que 15% no Centro-Oeste. As regiões Sul e Sudeste dispõem de apenas cerca de 12% destes recursos (ELETROBRÁS - ELETROBRÁS TERMONUCLEAR S.A., 2004). Acrescente-se que os rios que oferecem condições para a exploração hidrelétrica ficam muito distantes dos centros de grande demanda por energia.

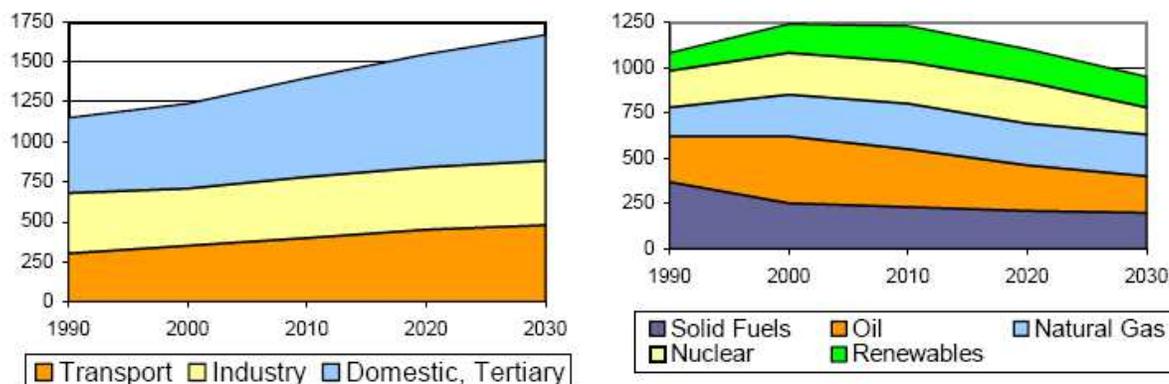


Figura 4: Projeção da demanda e produção de energia para a Europa até 2030 (MTOE - Million Tons of Oil Equivalent) - EU Energy Green Paper (POWER CLEAN THEMATIC NETWORK, 2004).

Trazer a eletricidade para o Rio e São Paulo implica em um custo de transmissão elevado que praticamente não compensa economicamente, já que é grande a perda de energia numa transmissão de longa distância ¹.

Deve ser ressaltado que é grande o impacto ambiental que uma hidrelétrica causa a curto, médio e longo prazos: é necessário inundar uma grande área onde vivem centenas de espécies da fauna e da flora, além do próprio homem, perdendo-se muitas vezes vastas extensões de terra cultivável. Os investimentos necessários para compensar os impactos sofridos pela população local e pelo meio ambiente são muito altos.

Além disso, estudos recentes mostram que a grande reserva de biomassa depositada no fundo dos reservatórios deteriora-se liberando gases como o dióxido de carbono e o metano, que contribuem para o aumento do efeito estufa (ELETRONUCLEAR - ELETROBRÁS TERMONUCLEAR S.A., 2004).

Nenhuma fonte se constituindo numa panacéia para o problema energético, deve-se ter em mente a necessidade de diversificar a matriz energética por motivos até estratégicos. Necessidade que apesar de hoje não ser uma realidade, dentro de poucos anos se tornará de grande importância.

Investimentos em novas Centrais Hidrelétricas e em Termoelétricas (fósseis e fissão)

¹Praticamente toda a energia gerada no Brasil é distribuída por uma grande rede interligada de dimensões continentais chamada Sistema Interligado Nacional (SIN), que é operado pelo Operador Nacional do Sistema (ONS) (CGEE - MCT, 2002). De fato, hoje é muito difícil se dizer de onde provém a energia elétrica que abastece SP e RJ, mesmo assim, a construção de hidrelétricas em regiões afastadas dos centros de consumo ainda é mais cara do que seria se essa produção fosse feita em regiões próximas a esses centros.

além de Fontes Renováveis no Brasil são uma solução necessária num primeiro momento. Entretanto, não se deve prescindir da pesquisa na área de fusão por oferecer a melhor perspectiva como fonte duradora de energia, simplificando consideravelmente as questões de disponibilidade de energia, eliminação de resíduos e segurança.

O Brasil está estabelecendo um novo modelo energético baseado na competição, através dos leilões de energia ² (CCEE, 2005), onde o Governo deixou a sua condição de Estado empresário, para assumir, diretamente, apenas o papel de agente orientador e fiscalizador dos serviços de energia elétrica. Dentro deste contexto, o País deve ter por meta a participação ativa nas pesquisas para tornar a fusão controlada uma fonte de geração de energia economicamente aceita, a fim de poder beneficiar-se, além de sua utilização, de ser um dos países detentores dessa alta tecnologia. Esse caminho pode começar a ser trilhado pela criação, ao molde do PROINFA (MME-CCPE, 2002)(Programa de Incentivo às Fontes Alternativas de Energia Elétrica (Biomassa, Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCHs), Eólica e Solar) de um Programa Nacional de Energia por Fusão que tenha por objetivo estratégico capacitar o País para o desenvolvimento, e futuro domínio, da tecnologia de geração de energia por fusão. Em (LUDWIG et al., 2002), Ludwig apresenta as ações básicas que podem direcionar o estabelecimento desse programa. Não podemos deixar de destacar que no caso da geração por fusão, como o "combustível", hidrogênio, é abundante no planeta, o que distinguirá quem lucrará mais com essa forma de energia será indubitavelmente, quem detiver sua tecnologia. A melhor forma de se possuir uma tecnologia é desenvolvê-la ou participar junto com outros países de seu desenvolvimento. Um programa sério de pesquisa nesta área é um primeiro passo que não pode ser dado muito tardiamente.

Desta forma apresentemos aqui as principais vantagens de reatores a fusão (JET-FEAT, 1999):

- **Combustíveis para fusão têm uma densidade de energia muito grande.**

Um grama de combustível de Deutério-Trítio completamente consumido gera em torno de 26000 kWh de eletricidade, o bastante para atender a cerca de 5000 casas por um dia, enquanto um quilograma de carvão completamente queimado fornece cerca de 3 kWh de eletricidade (i.e. 10 mil vezes menos).

- **Combustíveis de fusão são abundantes e bem difundidos geograficamente.**

O deutério (extraído da água do mar) é suficiente para 300 bilhões de anos. O Trítio

²Já ocorreram dois leilões de energia, no decorrer de um ano, e um leilão de "energia nova" no final de 2005. Leilão de "energia nova" refere-se à venda de energia elétrica que será gerada por usinas a serem construídas, tornando sua construção um empreendimento viável.

é feito do Lítio usado na reação de fusão e o Lítio, por sua vez, é abundante na terra e nos oceanos, sendo suficiente para cerca de 2000 anos.

- **Combustíveis de fusão são "limpos"**. A fusão não dá origem a poluição atmosférica conduzindo à chuva ácida (SO_2 , NO_2) ou ao "efeito estufa" (CO_2).
- **Reações de fusão são inerentemente seguras**³. Uma quantidade muito pequena de combustível é mantida na região do reator (somente o bastante para poucas dezenas de segundos de operação). Situações "críticas" ou de "derretimento" (*meltdown*) associadas com a Fissão Nuclear são fisicamente impossíveis. Acidentes são auto-limitados e não há necessidade de evacuação do público.
- **Combustíveis de fusão não estão envolvidos com problemas de proliferação nuclear**. Não há plutônio e o trítio permanece no local no ciclo de combustível.
- **Reatores de fusão liberam resíduos radioativos que não possuem longa vida**. Não há resíduos radioativos de longa vida do ciclo de combustível, de modo que depois de 100 anos o reator de fusão, usando materiais selecionados, deixaria um baixo nível de radioatividade nos seus componentes estruturais.

Entretanto, a energia de fusão possui algumas desvantagens:

- **Reações de fusão são difíceis de iniciar**. Altas temperaturas (milhões de graus) em um ambiente de alto vácuo são requeridas. É, portanto, necessário uma complexidade técnica e um alto custo de capital para os reatores.
- **É necessário que haja mais pesquisa e desenvolvimento, para fazer com que esse conceito frutifique**. A física está bem avançada mas requer desenvolvimento sustentável por um período de longa escala (20 a 40 anos).

Uma breve descrição a respeito de como está a pesquisa em fusão, bem como fundamentos, progressos em ciência e tecnologia, perspectivas sócio-econômicas e aplicações dessa área, podem ser encontrados em (INTERNATIONAL FUSION RESEARCH COUNCIL, 2005). Uma descrição da história da pesquisa em fusão, por sua vez, pode ser encontrada em (HERMAN, 1990). Em (DECKER, 2003), são apresentadas considerações sobre aplicações não-elétricas da fusão. Cabe destacar ainda que, como a própria General

³Diz-se que um sistema tem SEGURANÇA INERENTE quando o seu mau funcionamento causa o desligamento.

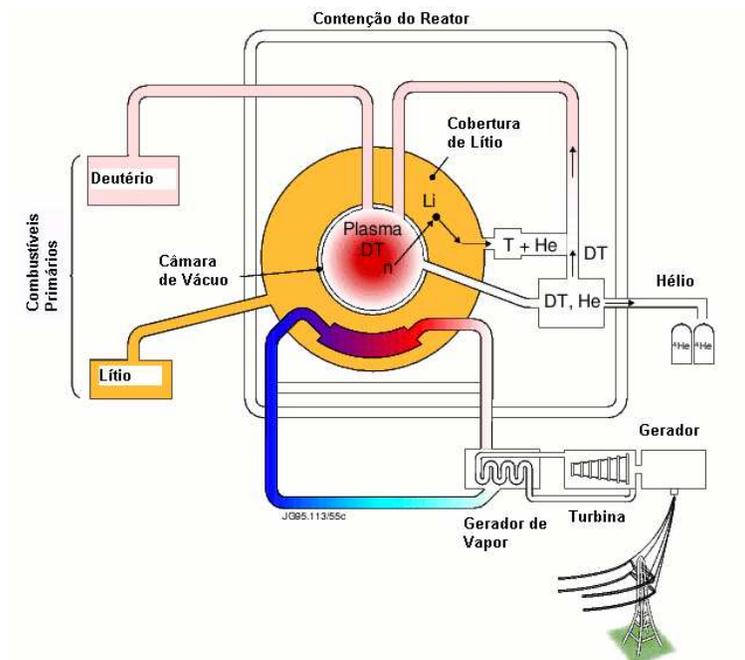


Figura 5: Esquema de uma usina termonuclear para gerar eletricidade através da fusão (JET-FEAT, 1999).

Atomics divulga em (CALLIS, 2006), só a pesquisa em fusão já traz grandes benefícios em diversas outras áreas, como: semicondutores, melhor entendimento da Física do Universo, inovações em Medicina e Saúde, desenvolvimento de materiais melhores e avanços na navegação espacial que vão desde satélites com propulsão a plasma até veículos para viagens interplanetárias com propulsão a fusão (algo para um futuro ainda muito distante).

A energia nuclear é liberada, na fusão, na forma de calor e energia cinética, provenientes da energia de ligação entre partículas constituintes de núcleos atômicos. Dentre os vários tipos de esquemas propostos para a geração termonuclear de eletricidade, o que surge como um dos mais promissores é o *tokamak*. Desta forma, esse tipo de reator operando para gerar eletricidade, conforme vemos no esquema da Fig. 5, as reações de fusão que ocorrem no plasma liberam energia que aquece a água em um circuito primário. Essa água gera vapor em gerador de vapor e, este vapor, por sua vez, move uma turbina que aciona um gerador fornecendo energia a rede.

O *tokamak* consiste em uma armadilha magnética de forma toroidal que funciona de forma pulsada. Para aumentar a eficiência do processo e aproximar a operação do tokamak dos regimes de densidade, temperatura e tempo de confinamento de partículas e energia necessários para chegar à situação em que o sistema opere como um reator de fusão, existe interesse em aumentar a intensidade e o tempo de duração da corrente, ou até mesmo

atingir um estado estacionário de operação, fazendo uso de meios auxiliares do processo indutivo. Entre esses meios, tem papel de destaque o uso de ondas eletromagnéticas que podem interagir com as partículas do plasma, transmitindo momentum e/ou energia.

A injeção de ondas de rádio frequência (RF) em tokamaks com o objetivo de geração de corrente tem sido proposta e estudada como uma forma efetiva de estender a duração da descarga no tokamak. Para a geração de corrente (*Current Drive* ou CD) por ondas de rádio frequência, empregam-se ondas de Alfvén (onde a corrente resulta da quebra de simetria da função distribuição eletrônica através da transferência de momentum paralelo a elétrons de baixa velocidade em relação à velocidade térmica), ondas do tipo híbrida inferior (*Lower Hybrid* ou LH - essas ondas entram em ressonância com os elétrons via amortecimento de Landau⁴, transferindo momentum paralelo para os elétrons com velocidade próxima à velocidade de fase da onda) e ondas do tipo eletrônica de cíclotron (*Electron Cyclotron* ou EC - essas transferem momento perpendicular, diminuindo a colisionalidade dos elétrons com alta velocidade na direção paralela), paralelo e perpendicular se referindo ao campo magnético toroidal. Para maiores esclarecimentos sobre a geração de corrente por ondas RF, sugerimos a leitura do artigo de Fisch (FISCH, 1987).

Por outro lado, a descoberta de um melhoramento no regime de confinamento em tokamaks revela a existência de barreiras de transporte (*Transport Barriers* ou TB) na borda do plasma (*Edge Transport Barriers* ou ETB), caracterizadas por um gradiente íngreme nos perfis de temperatura e densidade nessa região. Mais recentemente, foi mostrada por vários tokamaks a presença de barreiras internas de transporte (*Internal Transport Barriers* ou ITB's) em configurações de *shear*⁵ reverso⁶. Essas ITB's são caracterizadas por uma redução significativa e localizada do coeficiente de transporte de calor, partículas e momentum. As ITB's aparecem em plasmas aquecidos por diversas espécies de esquemas de aquecimento: ôhmico, híbrida inferior, cíclotron iônica, cíclotron eletrônica e injeção de feixe neutro. O mecanismo geral de formação de ITB's não é bem entendido, mas existem evidências de que o principal mecanismo agindo para formar essas barreiras em tais configurações é a existência de um campo elétrico radial causado pela resposta diferente de elétrons e íons a instabilidades que ocorrem na borda do plasma, campo elétrico esse que é proporcional à razão de massa entre elétrons e íons (m_e/m_i). Na presença desse campo elétrico o mecanismo $\vec{E} \times \vec{B}$ atua a fim de diminuir a turbulência na superfície magnética,

⁴Uma analogia que explica o significado do amortecimento de Landau pode ser encontrada em (CHEN, 1974).

⁵No próximo capítulo vamos procurar dar uma explicação sobre o significado dessa expressão.

⁶Reverso quer dizer que o perfil do *shear* tem um comportamento (por exemplo, decrescente) em função do raio menor do tokamak e depois muda esse comportamento com o crescimento do raio (fica crescente - tem um ponto de inflexão).

portanto diminuindo o transporte entre superfícies vizinhas. Como uma consequência da formação da barreira há um acúmulo de partículas e energia na região do tokamak interna à região da barreira, com o correspondente crescimento no tempo de confinamento de energia (OLIVEIRA; ZIEBELL; ROSA, 2005; ZIEBELL; OLIVEIRA; ROSA, 2004; ROSA et al., 2005).

É nesse contexto que se insere o presente trabalho, que tem por objetivo a obtenção de um maior entendimento da influência do transporte de partículas na eficiência da geração de corrente em plasmas de tokamaks. Este trabalho vem em continuidade ao que foi desenvolvido no Mestrado do autor (OLIVEIRA, 2002), em que se estudou como uma variação espacial no transporte de partículas (com perfis diferentes para o termo de transporte radial) pode influenciar a corrente gerada, tendo sido considerado o caso em que a corrente é gerada por ondas LH. Naquele momento, estava-se ciente de que a difusão espacial pode ser atribuída a diferentes causas, como a turbulência eletrostática ou a turbulência magnética. Mas não se questionou qual é a mais influente.

Agora, considera-se um termo de transporte que pode ter sua origem eletrostática ou magnética, para, então, neste momento, se discutir o efeito desses diferentes mecanismos causadores do transporte radial, juntamente com a presença de ITB e ETB, sobre a potência absorvida devido a ondas LH e EC e a consequente geração de corrente, bem como na emissão de ondas de cíclotron eletrônica (*Electron Cyclotron Emission* ou ECE) como uma ferramenta auxiliar no diagnóstico. Esses cálculos são feitos dentro da estrutura da Teoria Quase-Linear pela resolução da equação de Fokker-Planck em uma geometria de lâmina.

Esta monografia está estruturada da seguinte forma: No Capítulo 1, fazemos uma revisão de conceitos básicos referentes ao trabalho desenvolvido que vão desde a fusão até barreiras de transporte. Posteriormente, no Cap. 2, apresentamos alguns artigos importantes para a pesquisa nas áreas de geração de corrente em tokamaks e em barreiras de transporte. A base do estudo, que é a Teoria Quase-Linear, é apresentada no Cap. 3. No Cap. 4, temos a derivação da intensidade da emissão de radiação de cíclotron. Discutimos como se desenvolveu a pesquisa e apresentamos o modelo numérico no Cap. 5. Finalmente, no Cap. 6, são apresentados e discutidos os resultados obtidos. Temos, então, a Conclusão onde fazemos uma discussão final de toda a pesquisa, apresentando suas contribuições e recomendações para trabalhos futuros. Algumas derivações importantes e mais trabalhosas são deixadas para os Apêndices, bem como um breve discorrer sobre o método numérico empregado e uma lista de trabalhos publicados originados por esta

pesquisa.

Note-se que boa parte desta monografia consiste em uma revisão bibliográfica em que procurou-se apresentar noções sobre a importância da fusão num contexto energético⁷, conceitos básicos relacionados com a pesquisa, alguns artigos atuais pertinentes ao assunto e a teoria propriamente dita que foi usada para o estudo. Essa preocupação em trazer um pouco de toda essa "gama" de conceitos se deve basicamente a dois fatos: primeiro, realçar que uma pesquisa que pode ser muito específica está relacionada com diversos outros assuntos e pode ter uma influência abrangente, e, segundo, fornecer subsídios para pessoas que estejam iniciando na área a fim de auxiliá-las no entendimento do assunto e motivá-las no caminho da pesquisa em fusão. Esse último aspecto é uma contribuição que pode estar além dos objetivos estabelecidos.

⁷Esta preocupação em falar no contexto energético, em que este trabalho está inserido em última análise, deve-se também ao fato de que o autor atualmente trabalha como Engenheiro Mecânico no Setor Elétrico.

1 *Conceitos básicos*

1.1 Fusão

A fusão ocorre numa reação nuclear quando duas partículas se unem formando um estado ligado. No caso de núcleos leves, esse processo é exotérmico, i.e., há liberação de energia na forma de calor e energia cinética. Para uma melhor discussão sobre o assunto, indicamos as referências (SCHEIDER, 2000), (SCHEIDER, 2001) e (FLORES, 2004). Na fusão nuclear de hidrogênio, as principais reações envolvem os isótopos deste elemento, quais sejam, deutério (${}^2\text{H} = \text{D}$) e trítio (${}^3\text{H} = \text{T}$). Essas e outras reações de fusão são mostradas na Tabela 1. A Fig. 6 mostra o gráfico comparativo da energia de ligação liberada nos processos de fusão e fissão.

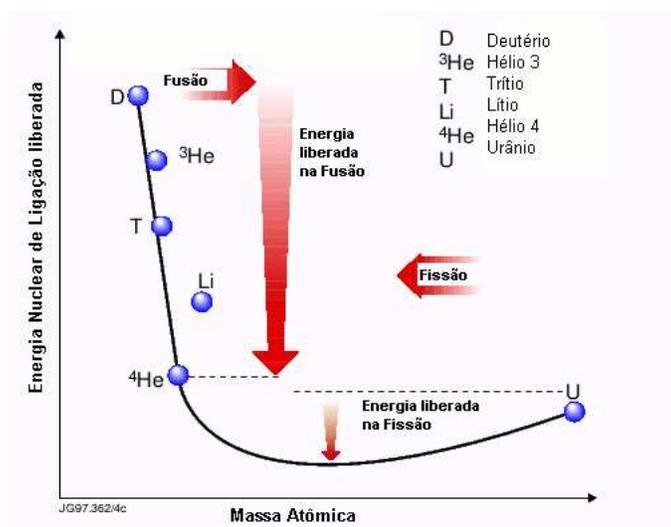


Figura 6: Energia de ligação liberada em reações nucleares (JET-FEAT, 1999).

Para se ter uma noção de o quanto é promissor o uso da fusão como fonte de energia nuclear, basta citar (WESSON, 2004) que na reação de deutério com trítio, com liberação de 17,6 MeV por reação, corresponde, em termos macroscópicos, ao fato de que apenas

1 kg liberaria 10^8 kWh de energia¹, i.e., corresponderia à geração de 1 GW (elétrico) por um dia. Em (KAMMASH, 1993; WILLIAMS et al., 2002; SANTARIUS, 2004) (entre outras referências), podemos ver que a fusão pode ser uma abertura de novos caminhos para as estrelas através da propulsão por fusão. A Tabela 2 apresenta uma comparação com outras fontes de energia.

Tabela 1: Algumas Reações de Fusão(KAMMASH, 1993).

Reações	Cíclós de Combustível,(MeV)	Temperatura de Ignição
1a	$D+D \xrightarrow{50\%} T(1,01)+p(3,02)$	300×10^6
1d	$D+D \xrightarrow{50\%} He^3(0,82)+n(2,45)$	
2	$D+T \rightarrow He^4(3,5)+n(14,1)$	50×10^6
3	$D+He^3 \rightarrow He^4(3,6)+p(14,7)$	500×10^6
4	$T+T \rightarrow He^4+2n+11,3$	
5a	$He^3+T \xrightarrow{51\%} He^4+p+n+12,1$	
5b	$He^3+T \xrightarrow{43\%} He^4(4,8)+D(9,5)$	
5c	$He^3+T \xrightarrow{6\%} He^3(2,4)+p(11,9)$	
6	$p+Li^6 \rightarrow He^4(1,7)+He^3(2,3)$	
7a	$p+Li^7 \xrightarrow{\sim 20\%} 2 He^4+17,3$	
7a	$p+Li^7 \xrightarrow{\sim 20\%} Be^3+n-1,6$	
8	$D+Li^6 \rightarrow 3 He^4+22,4$	
9	$p+B^{11} \rightarrow 3 He^4+8,7$	
10	$n+Li^6 \rightarrow T+He^4+4,8$	
10	$n+Li^7 \rightarrow T+He^4-2,5$	

Tabela 2: Comparação de vários combustíveis para produção de 1GWe(GENERAL ATOMICS FUSION EDUCATIONAL OUTREACH TEAM, 2004).

Combustível	Massa (toneladas)	Comparação
carvão	2.000.000	21.010 vagões de trem
óleo	1.300.000	10.000.000 barris
fissão (UO ₂)	30	1 vagão de trem
fusão	0,6	1 pickup truck

¹Dissemos na Introdução que 1 g de D-T produziria 26.000 kWh de energia elétrica, e portanto, 1 kg $\implies 26 \times 10^6$ kWh_e (o subscrito refere-se a energia elétrica). Pode parecer estranho agora falar que 1 kg de D-T corresponde a 100×10^6 kWh. A contradição desaparece quando percebemos que essa última é energia térmica. Energia elétrica corresponde a aproximadamente 1/3 da energia térmica. Ainda, 1 GW (elétrico) por um dia corresponde a 10^6 kW \times 24 h ou 24×10^6 kWh_e.

1.2 Tokamak

O problema básico em obter reação de fusão controlada é gerar um plasma com temperatura muito alta (com energias no mínimo de 10 keV, o que corresponde a cerca de $116.000.000\text{K}^2$) e manter as partículas juntas o bastante até que um número substancial de reações de fusão aconteçam.

A necessidade de temperaturas tão altas vem do fato de que para que ocorra fusão, é necessário que os núcleos carregados positivamente fiquem muito próximos (uma distância de cerca de 10^{-15} m), onde efeitos quânticos tornam-se importantes, o que requer energia cinética suficiente para superar a repulsão eletrostática Coulombiana (BITTENCOURT, 2003).

Existem muitos esquemas que foram sugeridos e construídos para se obter fusão controlada, entre eles destaca-se o *TOKAMAK*³, proposto por Sakharov e Tamm (HERMAN, 1990). Essa denominação vem do russo *toroidalnaya kamara i magnitnaya katushka* que significa câmara toroidal e bobina magnética, i.e., o *tokamak* consiste de uma câmara de vácuo na forma de um toróide em que um plasma⁴ é confinado por um **campo magnético helicoidal** que é a combinação de um **campo magnético toroidal** (B_ϕ), que é gerado (Lei de Ampère) por uma corrente em um enrolamento externo envolvendo o tórus, ou por uma corrente num condutor orientado ao longo de um eixo perpendicular ao plano do toróide, e um **campo magnético poloidal** (B_θ), que é produzido através de uma corrente toroidal no plasma (Lei de Ampère). Essa corrente é induzida por um transformador que varia o fluxo magnético através do toróide (Lei de Faraday). Além de contribuir para o confinamento, o campo toroidal é necessário para que ocorra um equilíbrio entre a pressão do plasma e as forças magnéticas. Uma visualização da geometria de um *tokamak* típico e dos campos pode ser vista na Fig. 7.

Em experimentos atuais, a corrente do plasma é gerada por um campo elétrico toroidal induzido pela ação de um transformador, o qual muda o fluxo através do toróide; desta forma, a corrente é pulsada. Entretanto, já existem experimentos em que uma parte da corrente é fornecida por meios não-indutivos, como ondas LH, por exemplo. Apesar de não essencial na geração de corrente por meios indutivos, freqüentemente usa-se um

²1eV= 11.600K.

³A descrição de outros dispositivos para fusão pode ser encontrada em (HAGLER; KRISTIENSEN, 1977).

⁴Plasma (CHEN, 1974) é um gás quase-neutro de partículas carregadas e neutras, o qual exibe um comportamento coletivo. Esse é o conceito clássico que encontra-se bem discutido por Francis Chen em sua obra e não será apresentado aqui pois isso já foi feito na própria Dissertação de Mestrado do autor (OLIVEIRA, 2002)

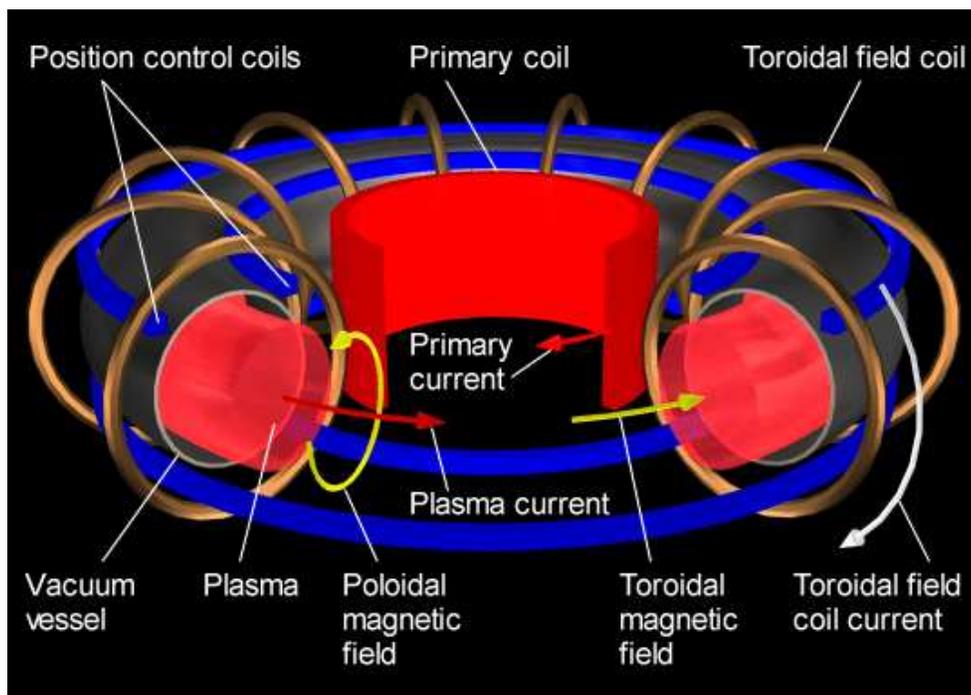


Figura 7: Esquema de um *tokamak*. Disponível em: <http://www.plasma.inpe.br>.

transformador com núcleo de ferro, reduzindo a potência necessária e tendo a vantagem de reduzir perturbações no campo magnético.

Os processos limitando o confinamento de plasma em tokamaks ainda não são bem entendidos. Contudo, foram encontrados experimentalmente melhoramentos de confinamento esperados com o aumento do tamanho do tokamak. Um tempo de confinamento de energia maior que um segundo tem sido obtido no JET (*Joint European Torus* - Vide Fig. 8)(WESSON, 2004). Tem sido encontrado que o tempo de confinamento de energia cresce com a corrente e decresce com a pressão de plasma. A pressão do plasma é o produto da densidade de partículas pela temperatura. O fato de que a reatividade do plasma cresce com essas duas quantidades implica que no reator a pressão deve ser bastante alta. A pressão a que pode ser confinado o plasma é determinada por considerações de estabilidade e cresce com a intensidade do campo magnético. Contudo, a magnitude do campo toroidal é limitada por fatores tecnológicos.

Plasmas de tokamaks são aquecidos a temperaturas de poucos keV por aquecimento ôhmico da corrente do plasma. As temperaturas requeridas de aproximadamente 10 keV são então atingidas por aquecimento adicional por feixe de partículas ou ondas eletromagnéticas.

A dificuldade de se obter um reator de fusão se deve às energias dispendidas no

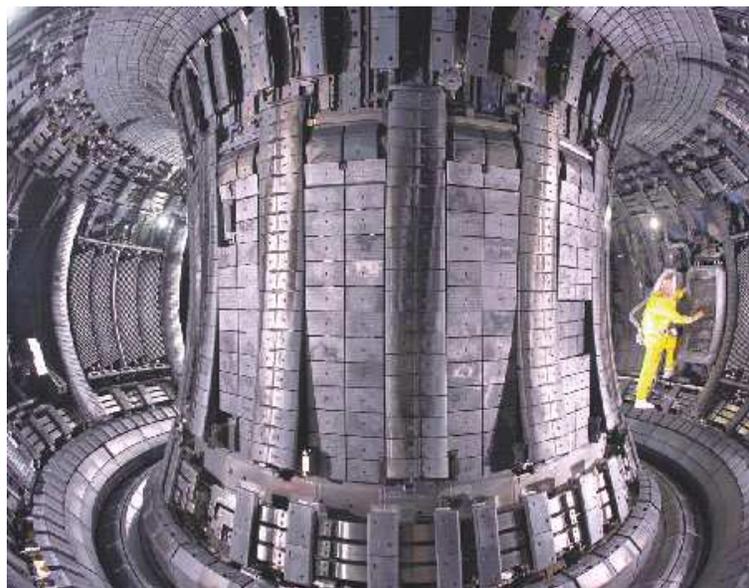


Figura 8: Vista do interior do JET mostrando o MkIIA *divertor* e a parede interior (JET-FEAT, 1999).

aquecimento e confinamento do plasma. Surge, então, um "problema" que não é único somente à fusão. Todas as tecnologias de geração devem liberar mais energia do que usam no processo de geração. No JET, e anteriormente no TFTR (*Tokamak Fusion Test Reactor*), deutério e trítio foram usados em experimentos para produzir potência de fusão. O recorde é cerca de 15 MW, mas somente por um ou dois segundos.

Durante esses experimentos a planta experimental inteira consumiu mais de 100 MW. O problema é que esses experimentos são muito pequenos para gerar suficiente potência para fazer uma fonte comercial de geração de energia, ao passo que o ITER⁵ (*International Tokamak Experimental Reactor*), mostrado na Fig. 9, deverá ter um tamanho no intervalo que um reator poderá operar. Baseado em extrapolação de experimentos existentes, o ITER deverá gerar 500 MW de potência de fusão em intervalos da ordem de centenas de segundos de operação contínua. Em princípio, pode-se conectar a uma turbina a vapor e gerar eletricidade com esse calor (ITER não irá fazer isso por razões de eficiência, custo e confiabilidade), o que poderia resultar em cerca de 150 MW de potência elétrica. A potência consumida no ITER para gerar energia seria de cerca de 110 MW elétrica, assim o ITER poderia vender 40 MW para a rede. De fato, um reator em escala comercial necessitaria ser um tanto maior, tal que um reator a fusão deveria ter tipicamente 4000 MW de potência de fusão (1300 MW de potência elétrica) e portanto, vender cerca de 1000 MW para a rede (ITER, 2004).

⁵*iter* quer dizer caminho em latim.

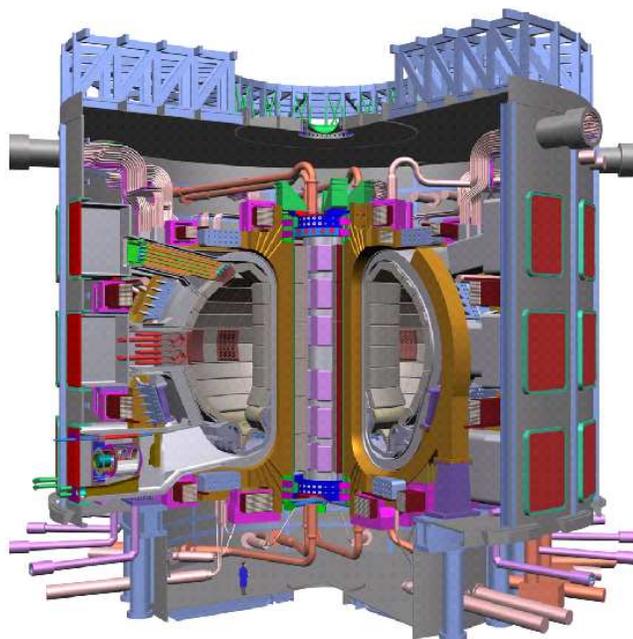


Figura 9: Concepção artística do ITER-FEAT (Fonte:www.iter.org) (LUDWIG et al., 2002).

1.3 Geração de corrente

Apesar de já termos dado alguns comentários sobre geração de corrente em plasmas por ondas RF na Introdução, vamos colocar aqui mais algumas considerações a respeito desse e de outros métodos não-indutivos de geração de corrente baseados em (WESSON, 2004).

O tokamak é um dispositivo de regime pulsado, como já vimos, e, portanto, possui as desvantagens relacionadas com tensões de fadiga produzidas por variação térmica e interrupção na geração de potência. Procura-se resolver esses problemas com sistemas de geração de corrente não-indutivos que poderiam tornar a operação contínua viável. Os sistemas não-indutivos também são importantes porque permitem controlar o perfil da densidade de corrente a fim de evitar ou controlar instabilidades MHD e para otimizar o confinamento do plasma.

Existem vários processos não-indutivos para geração de corrente, como esquematizado na Fig. 10, mas vamos nos ater aqui àqueles dois que usam ondas LH e ondas EC.

Destaque-se ainda que os métodos de geração de corrente se confundem com os de aquecimento do plasma do tokamak. Senão vejamos, a corrente toroidal no tokamak é gerada indutivamente. Essa corrente contribui para o confinamento, gerando o campo

magnético poloidal, e para o aquecimento do plasma por efeito Joule. Entretanto, a milhões de graus ou acima, o plasma oferece pouca resistência à corrente e, portanto, não produz bastante calor por efeito Joule. A fim de se atingir as altas temperaturas necessárias para fusão, é necessário um aquecimento adicional, que, por sua vez, é obtido pelos mesmos métodos de geração de corrente: Aquecimento por Ondas RF (Cíclotron de íons - IC, cíclotron de elétrons - EC e híbrida inferior - LH) e Feixe de Partículas Neutras - NB.

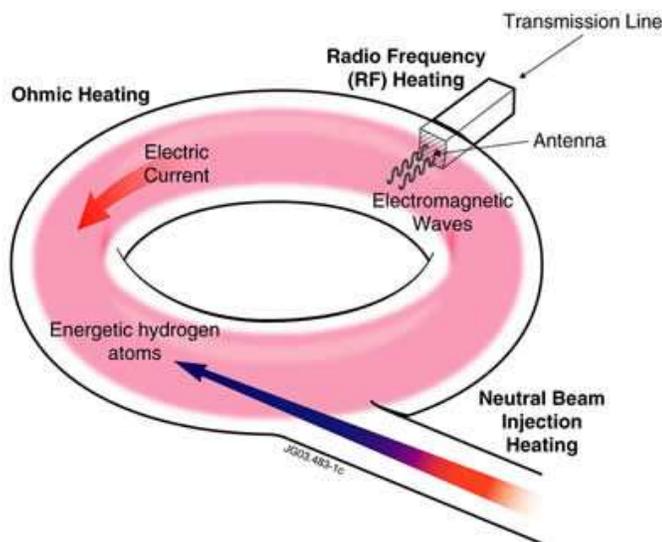


Figura 10: Esquema de métodos de aquecimento em plasmas do JET (MLYMAR, 2006).

Nas próximas seções, falaremos um pouco sobre geração de corrente por ondas de rádio-frequência EC e LH. A título de ilustração, apresentamos nas Figs. 11 à 15, um esquema e fotos de dispositivos usados na geração de corrente por RF.

1.3.1 Geração de corrente por ondas LH

Um esquema não-indutivo, que é considerado um dos mais efetivos nos tokamaks atuais, gera corrente pela passagem de ondas no intervalo de frequências híbrida inferior (0,8 a 8 GHz em experimentos atuais) no plasma. Através de antenas se incide ondas LH com alta velocidade de fase paralelas ao campo magnético, as quais entram em ressonância com elétrons de alta energia que tenham velocidade paralela comparável à velocidade de fase da onda, ocorrendo a absorção de energia/momentum através do amortecimento de Landau. Os elétrons que recebem momentum diretamente das ondas LH produzem uma corrente determinada pelo balanço entre seu momentum original, o transmitido pelas ondas, e o perdido para os íons. Contudo, destaque-se que esses elétrons se tornam menos

colisionais e a taxa de perda de momentum é pequena.

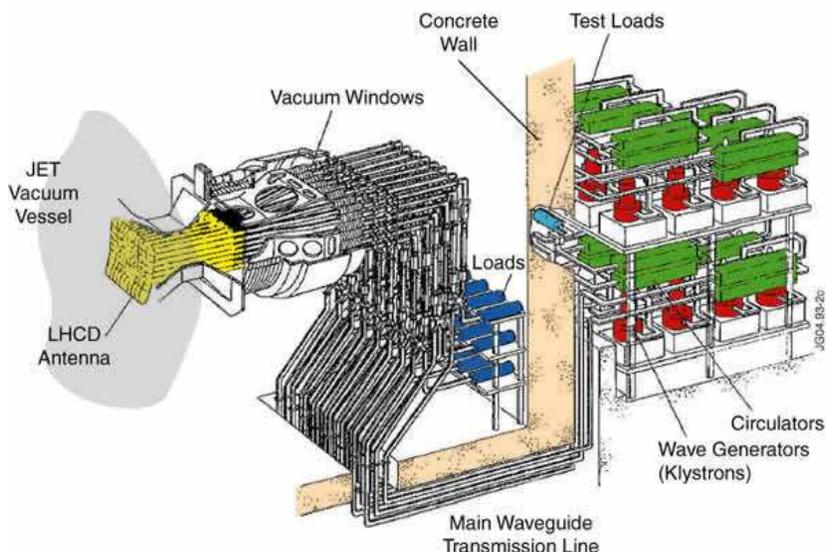


Figura 11: Esquema do sistema LHCD do JET (MLYMAR, 2006).

É possível gerar a corrente completa do plasma por ondas LH. Atingiu-se correntes de 3,6 MA, no JT-60U, e 3 MA, no JET, completamente sustentadas por geração de correntes por ondas LH. Atingiu-se nesses dispositivos a "figura de mérito" de $\eta > 0,3 \text{ AW}^{-1}\text{m}^{-2}$.

Em experimentos atuais, as ondas LH percorrem o plasma várias vezes antes de serem completamente absorvidas. Essa situação será considerada no presente trabalho fazendo restrições à propagação como em (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000). Para parâmetros característicos de plasmas de reatores de fusão, a absorção de ondas LH ocorre em uma simples passagem, mas espera-se que restrições como amortecimento de Landau e conversão de modo limitem a penetração para a metade exterior do plasma.

No JET, o sistema de geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior (LHCD - *Lower Hybrid Current Drive*) trabalha com frequências de 3,7 GHz com comprimento de onda correspondente de 1 m no vácuo. O LHCD instalado no JET tem uma capacidade de 12 MW de potência adicional e, graças a esse sistema, já foram geradas correntes de vários MW. Ondas eletromagnéticas são geradas em *klystrons* (MLYMAR, 2006) (tubos que podem produzir as frequências acima por modulação ressonante de um feixe de elétrons). No JET, 24 *klystrons* são instalados em 6 módulos independentes. Transmite-se as ondas eletromagnéticas através de um sistema complexo de guias de ondas⁶ (vide Fig. 13) para

⁶Guias de ondas (*waveguides*) são condutores metálicos retangulares ocos com seção transversal do tamanho correspondente ao comprimento de onda transmitido.

a antena do LHCD. A antena do LHCD corresponde ao chamado "multijunction grill" que é um dispositivo sofisticado que permite estabelecer a fase da onda (*correct phasing*) antes de lançá-la ao plasma.



Figura 12: Complexo de antenas conhecido como "multijunction grill" (MLYMAR, 2006).

1.3.2 Geração de corrente por ondas EC

Ondas com momentum desprezível, tais como as ondas EC, também podem gerar corrente aquecendo somente elétrons que circulam em uma direção (sentido) particular do toróide. Assim, esses elétrons colidem com menor frequência com íons que os elétrons circulando no sentido oposto. Portanto, a população de elétrons transfere momentum paralelo líquido para os íons e as duas espécies derivam em direções toroidais opostas gerando corrente.

A condição de ressonância eletrônica de cíclotron para interações na vizinhança do ℓ -ésimo harmônico de cíclotron é dado por

$$\omega - \ell\omega_{ce} = k_{\parallel}v_{\parallel},$$

onde ω_{ce} é a giro-frequência do elétron. A mudança da frequência de ressonância, representada pelo termo do lado direito da equação acima, surge devido ao efeito Doppler. Da condição de ressonância temos, que para um dado sinal de k_{\parallel} , a velocidade paralela ressonante muda de sinal em lados opostos da ressonância "não-alterada" ("*unshifted*" resonance), $\omega = \ell\omega_{ce}$, dando origem a correntes toroidais opostas. Portanto, para uma alta eficiência de geração de corrente, requer-se uma absorção forte em uma simples passagem da onda EC, o que é o caso dos tokamaks atuais.

A "figura de mérito" excedendo $0,03 \text{ AW}^{-1}\text{m}^{-2}$ foi registrada no T-10. Ondas EC são efetivas para gerar corrente tanto no centro do plasma como fora do eixo, e espera-se



Figura 13: Conexão do sistema de guia de ondas do LHCD com vaso de vácuo do JET (MLYMAR, 2006).



Figura 14: Antenas LHCD e ICRH no JET. O "grill" LHCD está a esquerda próximo dos quatro lançadores de ICRH (MLYMAR, 2006).

atingir uma "figura de mérito" em geração de corrente no centro do plasma no intervalo de 0,2 a 0,3 $\text{AW}^{-1}\text{m}^{-2}$, dependendo da temperatura dos elétrons e de parâmetros do sistema de cíclotron.



Figura 15: Antena "mockup" (Oak Ridge National Laboratory). Aquecimento e geração de corrente por ondas do tipo EC são técnicas importantes em experimentos no tokamak DIII-D (EUA) e em outros países (MLYMAR, 2006).

1.4 Superfícies magnéticas, fator de segurança e 'shear'

Nesta seção, apresentaremos parte de um texto retirado de (WESSON, 2004) a fim de tornar claros três conceitos básicos interligados (superfície magnética, fator de segurança e *shear*) que são muito importantes para o estudo de barreiras internas de transporte que, por sua vez, são caracterizadas por alto *shear* de velocidade e baixo *shear* magnético s_m ⁷: o último está relacionado com o gradiente do fator de segurança q (ITB's freqüentemente ocorrem próximo a um mínimo em q) (EURATOM UKAEA, 2004).

O campo magnético completo de um tokamak constitui-se em um conjunto de superfícies magnéticas toroidais aninhadas (ver Fig. 16) para um equilíbrio axi-simétrico, i.e., equilíbrios que são independentes do ângulo toroidal ϕ . As linhas de campo seguem um caminho helicoidal em suas superfícies magnéticas quando elas enrolam-se em torno do toróide.

A condição básica para o equilíbrio é que a força sobre o plasma seja zero em todos

⁷Na literatura usa-se s para *shear*, mas colocamos o sub-índice m para diferenciar de s que, neste trabalho, representa a coordenada radial normalizada.

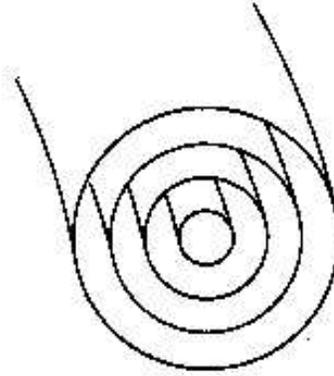


Figura 16: Superfícies de fluxo magnéticas formando um conjunto de toróides aninhados (WESSON, 2004).

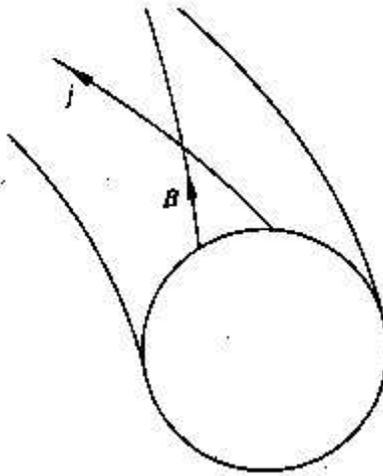


Figura 17: Linhas de campo magnéticas e linhas de corrente estão em superfícies magnéticas (WESSON, 2004).

os pontos. Essa condição requer que a força magnética balance a força devido à pressão do plasma, i.e.,

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p. \quad (1.1)$$

É claro dessa equação que $B \cdot \nabla p = 0$. Assim, não há um gradiente de pressão ao longo das linhas de campo magnético e as superfícies magnéticas são superfícies de pressão constante. Mais ainda, da Eq. (1.1) temos que $\vec{j} \cdot \nabla p = 0$, e conseqüentemente, as linhas de corrente também estão nas superfícies magnéticas, como mostrado na Fig. 17.

O fator de segurança (*safety factor*), q , tem esse nome pelo seu papel determinante na estabilidade do plasma. Em termos gerais, altos valores de q conduzem a grande estabilidade. Ele também aparece como um fator importante na teoria de transporte,

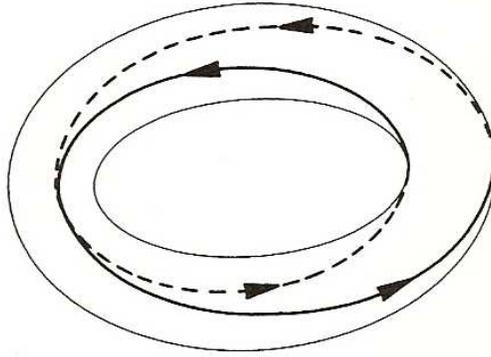


Figura 18: Linha de campo na superfície $q = 2$ (WESSON, 2004).

motivo pelo qual vamos nos deter mais nessa grandeza.

Como já percebido no texto acima, em um equilíbrio axi-simétrico cada linha de campo magnético tem um valor de q . A linha de campo segue um caminho helicoidal enquanto gira em torno do toróide em sua superfície magnética associada. Se em um ângulo toroidal, ϕ , a linha de campo tem uma certa posição no plano poloidal, ela irá retornar a essa posição no plano poloidal depois de percorrer um ângulo toroidal $\Delta\phi$. O valor de q dessa linha de campo é definido por

$$q = \frac{\Delta\phi}{2\pi}. \quad (1.2)$$

Assim, se a linha de campo magnético retorna a sua posição inicial depois de percorrer exatamente uma rotação em torno do toróide e uma rotação poloidal, então $q = 1$. Se $q = 2$, como na Fig. 18, então a linha dá duas voltas em torno do toróide e uma em torno do eixo poloidal. Caso mova-se mais lentamente em torno da direção poloidal, tem um alto valor de q até que quando não há campo poloidal (sem rotação poloidal), apenas toroidal, $q = \infty$. Valores racionais de q desempenham um importante papel na estabilidade. Se $q = m/n$, onde m e n são inteiros, a linha de campo irá se unir a ela mesma após m rotações toroidais e n rotações poloidais em torno do toróide.

A direção do campo magnético muda de superfície para superfície. O *shear* significa cisalhamento ou tesoura, assim, o *shear* de um campo magnético consiste no fato de ocorrer uma mudança de direção do campo magnético quando se vai de uma superfície magnética para outra. O "cisalhamento" médio do campo magnético em cada superfície pode ser caracterizado pelo fator de segurança, o qual é medido pelo *pitch*⁸ das linhas de campo helicoidais. O *shear* é determinado pela taxa de mudança radial de q e isso pode

⁸*pitch* é o ângulo entre o momentum do elétron e o campo magnético ambiente.

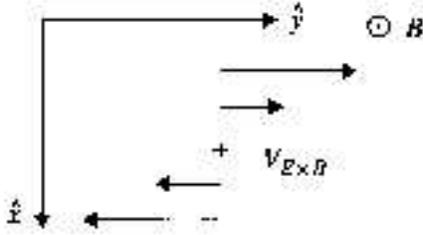


Figura 19: Variação do *shear* de velocidade na direção y , perpendicular ao campo magnético B (WESSON, 2004).

ser expresso por:

$$s_m = \frac{s}{q} \frac{dq}{ds} \quad (1.3)$$

onde s_m é o *shear* magnético médio da superfície.

O *shear* de velocidade $\vec{E} \times \vec{B}$ surge da variação radial de E_r (campo elétrico radial) e constitui-se no fato que a velocidade $V_{\vec{E} \times \vec{B}}$ varia radialmente numa direção perpendicular ao campo magnético, conforme a Fig. 19.

Em suma, *shear* refere-se tanto à variação do fluxo de plasma (*velocity shear*) quanto do fator de segurança (*magnetic shear*) com o raio menor (EURATOM UKAEA, 2004).

1.5 Transporte em tokamaks

Vejam algumas considerações básicas sobre transporte em plasmas de tokamaks segundo (HINTON; HAZELTINE, 1976) e (ITER PHYSICS EXPERT GROUPS, 1999). Um mecanismo inevitável de perda de confinamento que possui grande interesse é a difusão e condução de calor através do campo magnético confinante devido a flutuações térmicas presentes em plasmas perfeitamente estáveis e quiescentes. O efeito de tais colisões é descrito pelo operador colisão na forma de Fokker-Planck. Tem-se, então, o termo transporte "colisional" referindo-se aos processos de transporte resultantes.

O transporte colisional em um plasma magnetizado (plasma no qual a frequência de Larmor⁹ é muito maior que qualquer outra frequência de interesse) pode ser pensado como segue. Desde que cada partícula carregada em um tal plasma encontra-se "amarrada" à linha de campo na qual ela gira, difusão através das linhas magnéticas somente é possível devido a colisões, que permitem que as partículas migrem de uma linha de campo para

⁹Frequência em que as partículas carregadas giram em torno das linhas de campo magnéticas.

outra.

Entretanto, esse transporte é bastante lento para oferecer impedimentos sérios à fusão controlada. Isso se deve ao fato de que a frequência de colisões de Coulomb varia com o inverso do cubo da velocidade típica de uma partícula, mais ainda em temperaturas termonucleares onde os efeitos colisionais são bastante fracos.

Distinguem-se duas fases no desenvolvimento da teoria de transporte de plasma magnetizado: clássica (plasma cilíndrico) e neoclássica (campo magnético toroidal não-homogêneo axissimetricamente). Na primeira, temos o estabelecimento do operador colisão de Fokker-Planck, e na segunda, que iniciou depois dos trabalhos pioneiros de Galeev e Sagdeev (1960), como está citado na referência (HINTON; HAZELTINE, 1976), temos a separação da teoria clássica, pela consideração de que o campo toroidal não é necessariamente uniforme. Apesar disso, a teoria de transporte neoclássica também é baseada no operador de colisão de Fokker-Planck.

O transporte neoclássico, mesmo com seus altos valores, normalmente não explica o transporte perpendicular em tokamaks. Turbulência no plasma é provavelmente o efeito dominante para causar transporte através de campos em plasmas. Contudo, para alguns regimes de confinamento melhorado e em regiões localizadas do plasma, o transporte pode ser reduzido a níveis neoclássicos.

Uma forma de diminuição do transporte real é o surgimento de barreiras de transporte (TB). Retornaremos a este assunto na Seção (2.3) onde abordamos um pouco da física das barreiras de transporte.

No presente trabalho, usamos, de certa forma, a teoria clássica de transporte (plasma cilíndrico e localmente homogêneo) em que adicionamos um modelo para a TB (ROSA; GIRUZZI, 2000) e analisamos sua influência na corrente do plasma dando continuidade a outros trabalhos da literatura, como (ROSA; ZIEBELL, 2002).

2 *Revisão Bibliográfica*

2.1 Introdução

Apresentaremos aqui uma breve explanação sobre trabalhos que abordam os dois "assuntos chave" em que está baseada a presente pesquisa, quais sejam, o estudo da geração de corrente por ondas RF através da Teoria Quase-Linear, e barreiras de transporte em tokamaks. Na primeira seção, temos basicamente artigos publicados pelo Grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS durante os últimos anos, e outros trabalhos publicados que motivaram este estudo, já incluindo alguns que consideram barreiras de transporte. Na segunda seção, apresentamos uma pequena abordagem sobre o tema barreiras de transporte e o paradigma *shear* $\vec{E} \times \vec{B}$. Embora, o presente trabalho consista em usar um modelo para a ITB com o fator de segurança q em um perfil reverso e estudar como parâmetros desse modelo influenciam na geração de corrente, optamos por apresentar tais considerações para dar uma idéia da física envolvida no estudo de barreiras de transporte.

2.2 Trabalhos prévios em geração de corrente por ondas de rádio-freqüência

Começemos com a publicação (ROSA; ZIEBELL, 1992). Neste trabalho, Rosa e Ziebell estudam a evolução no tempo da função distribuição de elétrons sob a ação de ondas LH. Eles consideraram um modelo de espectro para as ondas LH, e investigaram a dependência do coeficiente de difusão LH resultante na temperatura eletrônica, densidade de elétrons, e no campo magnético ambiente.

Retomemos mais de perto o modelo de espectro de ondas LH. O coeficiente de difusão é dependente do espectro do fluxo de energia. Essa quantidade em uma dada posição do plasma depende de processos muito complicados. Pode-se considerar que o resultado líquido desses processos é uma quantidade de energia distribuída num intervalo de números

de onda. Rosa e Ziebell adotaram um modelo para essa distribuição, baseados no seguinte raciocínio: ondas com número de onda n_{\parallel}^1 entram em ressonância com partículas com $u_{\parallel} = \sqrt{\mu}/n_{\parallel}$, onde $\mu = m_e c^2/T_e$ e u_{\parallel} é o componente da velocidade normalizada $\vec{u} = \vec{p}/\sqrt{mT_{e0}}$ na direção paralela ao campo magnético ambiente. Consideraram que ondas com n_{\parallel} maior que n_2 (portanto, que entram em ressonância com u menor que $u_1 = \sqrt{\mu}/n_2$) serão fortemente amortecidos pelo amortecimento de Landau e não estarão presentes no espectro. O espectro cresce em intensidade para $n_{\parallel} = n_1$ e então vai rapidamente a zero. Foi usada uma expressão matemática muito simples que representa bem esse comportamento

$$S(n_{\parallel}) = \begin{cases} 0, & n_{\parallel} \leq n_0 \\ S_0 \frac{2}{n_2 - n_0} \left(\frac{n_{\parallel} - n_0}{n_1 - n_0} \right) & n_0 < n_{\parallel} < n_1 \\ S_0 \frac{2}{n_2 - n_0} \left(\frac{n_2 - n_{\parallel}}{n_2 - n_1} \right) & n_0 < n_{\parallel} < n_1 \\ 0, & n_{\parallel} > n_2, \end{cases}$$

onde $S_0 = \int dn_{\parallel} S(n_{\parallel})$. Com o uso dessa expressão na equação do coeficiente de difusão das ondas LH, esse coeficiente torna-se aproximadamente constante entre u_1 e u_2 , sem mudança abrupta nas extremidades.

Neste trabalho é usado um conjunto de parâmetros típicos de tokamaks de pequeno porte para a análise numérica e a investigação da dinâmica de formação da cauda da distribuição. O resultado foi uma dependência aproximadamente linear entre a densidade de corrente e a potência da onda.

Em (GIRUZZI; FIDONE; GARBET, 1992a), Giruzzi e colaboradores investigaram a teoria cinética de elétrons de um plasma de tokamak na presença de turbulência magnética. A evolução da função distribuição sob o efeito de campos magnéticos turbulentos, um campo elétrico de corrente direta e colisões de Coulomb é governada por uma equação cinética 3-D (2-D no espaço de velocidade e 1-D no espaço ordinário). A turbulência é descrita por um operador difusão radial. A evolução da equação cinética é feita numericamente, por meio de um código Fokker-Planck 3-D. Como resultado, teve-se que em um plasma turbulento em equilíbrio a função distribuição de elétrons na região central é aproximadamente Maxwelliana, mas em uma região de gradiente de temperatura uma cauda supratérmica anisotrópica desenvolve-se devido à difusão radial de elétrons quentes. Isso afeta a condutividade elétrica local e a resistência global do plasma.

Mais especificamente, a difusão radial tende a alargar o perfil de corrente e, assim,

¹Aqui fala-se em número de onda, mas escreve-se n (ou N) que representa na literatura o índice de refração. Isso não deve causar problemas já que $\vec{n} = c\vec{k}/\omega$.

o perfil de condutividade. Desde que a densidade de corrente diminui na região central, mas cresce para $r > a/2$ (r - distância radial até o centro do plasmas, a - raio menor do tokamak), a corrente total I pode, em princípio, diminuir ou aumentar. Encontrou-se, neste caso, que I cresce na presença de turbulência magnética. Isso significa que a turbulência magnética não causa somente um alargamento do perfil de densidade de corrente mas, também, uma redução moderada na resistência do plasma.

Em (GIRUZZI, 1993), Giruzzi dá continuidade aos estudos de geração de corrente por RF através da teoria cinética considerando em detalhe o impacto do transporte anômalo no perfil de corrente gerado e na eficiência. Como um possível candidato para explicar o transporte anômalo em tokamaks, a turbulência magnética apresenta-se tendo forte influência na dinâmica de elétrons supertérmicos, e isso foi considerado como o mecanismo básico responsável pela difusão radial da corrente gerada por radio-freqüência. As propriedades foram primeiramente estudadas pela técnica da função de resposta não-local. Tanto o formalismo adjunto quanto o método de equações de Langevin foram estendidos para o caso de elétrons se difundindo radialmente.

Em 1993 (ROSA; ZIEBELL, 1993), Rosa e Ziebell publicaram um artigo em que empregaram a Teoria Quase-Linear para estudar a evolução no tempo do coeficiente de absorção de ondas EC, no modo extraordinário², por uma cauda estendida de elétrons gerada por ondas LH. Os resultados mostraram que o coeficiente de absorção para raios centrais do espectro de ondas de cíclotron cresce com a largura do espectro, e também que o coeficiente de absorção assintótico pode ser maior que o valor no início da incidência de ondas EC, para ângulos de injeção relativos à normal ao campo magnético suficientemente grandes.

Em (ROSA; ZIEBELL, 1996), Rosa e Ziebell estudam a evolução do coeficiente de absorção das ondas de cíclotron eletrônicas extraordinárias em um plasma magnetizado sob a influência de ondas LH e EC, como função do ângulo de injeção das ondas EC. Novamente foi usada uma equação quase-linear com colisões descritas por uma simplificação do operador de Fokker-Plank. Os espectros das ondas LH³ e EC são descritos por

²Vamos apresentar algumas considerações sobre os modos de propagação ordinário e extraordinário. Consideremos a propagação perpendicular de ondas em um plasma frio magnetizado, sendo que perpendicular se refere à direção em relação ao campo magnetostático ambiente \vec{B}_0 . O modo ordinário é o modo de propagação em que o campo elétrico ($E_{\parallel} \neq 0$) da onda é paralelo a \vec{B}_0 , de modo que influencia somente a velocidade de elétrons na direção \vec{B}_0 . Nesse modo, ondas com freqüência longe das freqüências de ressonância ($n|\Omega_e|$) propagam-se como em um plasma frio não magnetizado. Para o modo extraordinário, o campo elétrico E_t é perpendicular ao campo magnético ambiente e tem em geral um componente longitudinal (ao longo de \vec{k}) e um componente transversal (normal a \vec{k}). Portanto, essas ondas são parcialmente longitudinais e parcialmente transversais (BITTENCOURT, 2003).

³mesmo modelo do artigo anterior

modelos e considerados constantes com o tempo. O coeficiente de absorção é obtido da solução numérica da relação de dispersão, o que incorpora efeitos autoconsistentes devido à evolução quase-linear.

Os resultados da análise apresentada na Ref. (ROSA; ZIEBELL, 1996) demonstraram que o aplainamento quase-linear da distribuição de elétrons causado pelas ondas EC não conduz necessariamente à diminuição do coeficiente de absorção. Para ângulos de injeção das ondas EC suficientemente grandes, o coeficiente de absorção não somente tem um crescimento local, mas a absorção integrada pode crescer como um todo. Esse efeito já havia sido demonstrado para o caso de absorção para distribuições Maxwellianas, e para absorção local pela cauda de elétrons, para potência constante de ondas EC. Os resultados que aparecem neste estudo mostram que o crescimento na absorção integrada pode também ocorrer num perfil de tokamak, quando a variação autoconsistente local da potência EC é levada em conta ao longo da evolução no tempo da função distribuição. A magnitude do efeito observado está no intervalo de poucos por cento para os parâmetros utilizados, e cresce com o crescimento da razão entre potências EC e LH.

No artigo (ROSA; ZIEBELL, 1999), fez-se o estudo do efeito do transporte radial no coeficiente de absorção. Novamente, foi considerado o modelo de um plasma de tokamak sob a ação de ondas LH, EC, colisões e transporte espacial de elétrons através das superfícies magnéticas.

Na equação quase-linear é acrescido o termo de transporte (PEETERS; WESTERHOF, 1996) $(\partial_\tau f)_t = \partial_x(D\partial_x f)$ onde D é o coeficiente de difusão espacial de partículas. Esse termo pretende introduzir no tratamento quase-linear, numa forma simplificada, processos que podem ser devidos a aspectos complexos, como não-homogeneidades, flutuações do campo magnético e flutuações eletrostáticas. Portanto, postulou-se uma forma simples satisfazendo essas considerações, nominalmente um coeficiente de difusão com a seguinte dependência radial

$$D(x) = D_0 \left(1 - x^2/a^2\right)^p$$

onde $p = 1$ ou $p = 2$ denotando, respectivamente, um coeficiente de difusão proporcional ao perfil de densidade inicial e à temperatura. Devido a simplicidade do modelo do coeficiente, o qual é considerado independente da velocidade das partículas, particularidades dos mecanismos do transporte de partículas não podem ser discutidos e particularmente alguns fenômenos induzidos por ondas EC, como os assim chamados "pump-out", não podem ser descritos em detalhes.

Os resultados mostraram que a modificação local da densidade é muito pequena e não

é significativa para o perfil de densidade. Contudo, com o modelo utilizado, partículas de alta velocidade são mais afetadas pelo transporte espacial que partículas de baixa velocidade, com a consequência de que uma modificação significativa pode ser observada no perfil de corrente radial. O perfil de corrente torna-se mais alargado e de menor intensidade à medida que cresce D_0 .

Essa modificação espacial na população de elétrons de alta velocidade pode ter importantes consequências na absorção de ondas EC se uma significativa população de elétrons de alta velocidade estiver presente no plasma. Os resultados mostraram de fato uma forte influência do transporte radial na absorção de ondas EC por cauda supratérmica formada por irradiação LH. Para o raio central do espectro de cíclotron o transporte radial produz um deslocamento da máxima absorção EC para direções externas do tokamak. À medida que o valor do coeficiente de difusão D_0 é aumentado, o perfil de absorção inicialmente assimétrico é modificado para o perfil aproximadamente simétrico (no espaço de configuração) em torno da posição onde o pico de absorção de cíclotron está localizado.

A absorção integrada cresce com o crescimento do coeficiente de difusão. Também foi mostrado que uma mudança na dependência radial do coeficiente de difusão pode resultar em efeitos equivalentes àqueles devidos a uma significativa modificação no módulo do coeficiente de absorção.

Em (ZIEBELL, 2000), apresenta-se uma análise quase-linear numérica da interação entre ondas LH e íons energéticos criados por aquecimento por ondas de rádio em um ambiente de tokamak, discutindo condições que são favoráveis a uma interação significativa, e a consequente localização radial da deposição de energia.

Foram usadas equações quase-lineares para a evolução no tempo das distribuições de elétrons e íons e considerados parâmetros típicos de tokamaks grandes. Ao longo da evolução no tempo de íons e elétrons, calculou-se autoconsistentemente a potência dissipada em ambas as populações. Os resultados indicaram que a potência dissipada por ondas LH na distribuição iônica pode ser uma fração significativa da potência dissipada pela distribuição de elétrons, e portanto dão suporte à idéia de que a presença de íons energéticos pode contribuir para a redução da eficiência da geração da corrente LH, em concordância qualitativa com resultados experimentais. Os exemplos que foram considerados enfatizaram a interação entre ondas LH e íons da chamada "cauda próxima", que se movem com poucas velocidades térmicas. Para a criação dessa população considerou-se um modelo de coeficiente muito simples, o qual é responsável pela introdução do efeito das ondas de cíclotron de íons. Nenhuma atenção foi feita para uma descrição precisa

dessas ondas e suas interações com íons. Particularmente, um coeficiente de difusão fixo para ondas IC (*Ion Cyclotron*) foi considerado, sem autoconsistência entre a potência dissipada e a potência incidente.

Em outra aplicação da teoria quase-linear, Rosa e Giruzzi (ROSA; GIRUZZI, 2000) estudaram a influência da presença de ilhas magnéticas, e a conseqüente modificação da topologia da superfície magnética do tokamak, na geração de corrente de cíclotron eletrônica. Na equação quase-linear foram consideradas apenas as colisões e a ação das ondas de cíclotron. No termo de cíclotron (FIDONE; GRANATA; MEYER, 1982; KRIVENSKI et al., 1987; ROSA; ZIEBELL, 1999) temos o coeficiente de cíclotron dado por

$$D_{EC} = \frac{4\pi}{e^2} \frac{P_0}{S n_e \Lambda \omega} \frac{h\Gamma(n_{\parallel})}{\gamma |u_{\parallel}|}. \quad (2.1)$$

O efeito da ilha magnética é introduzido através do cálculo da grandeza S , que é a área da superfície magnética onde o coeficiente de cíclotron é calculado. A equação (2.1) foi resolvida autoconsistentemente no tempo. Para esse fim foi necessário calcular em cada passo de tempo o valor de n_{\perp} da relação de dispersão, levando em consideração efeitos térmicos e relativísticos (GRANATA; FIDONE, 1991). Para o cálculo da parte Hermitiana usou-se a função distribuição Maxwelliana relativística, ao passo que para o cálculo da parte anti-Hermitiana usou-se a função distribuição eletrônica real. Levou-se em conta efeitos de correção da geometria toroidal no índice de refração paralelo sem resolver equações de "traçado de raio" (*ray-tracing*). Para um dado raio entrando no plasma com índice de refração paralelo n_0 , o índice de refração paralelo na posição r é dado por

$$n_{\parallel} = n_0 \frac{R_0 + a}{R_0 + r},$$

onde R_0 e a são, respectivamente, o raio maior e menor do tokamak.

Na solução de (2.1) a presença de elétrons aprisionados e seus efeitos na distribuição foram levados em conta como se segue. Como os autores consideraram o caso no qual a absorção da onda ocorre no lado do campo magnético menos intenso e no plano equatorial, o principal efeito das partículas aprisionadas se constitui na manutenção da simetria da função distribuição de elétrons em momentum paralelo, para elétrons satisfazendo a condição de aprisionamento

$$\frac{\mu}{(1 - \mu^2)^2} < \left(\frac{2r}{R_0}\right)^{1/2}.$$

No caso, foi imposta a seguinte condição de simetria

$$f(u, \mu, r, \tau) = f(u, -\mu, r, \tau).$$

Foi encontrado que a largura do perfil de corrente gerada diminui na presença de ilhas paradas, mas cresce com ilhas rotantes, por uma quantidade significativa, até permanecer suficientemente menor que a largura da ilha para o caso considerado nas simulações. Outro efeito que foi difícil de prever *a priori* é a quantidade significativa de corrente gerada apenas na parte externa da ilha, devido a efeitos de rotação. Por outro lado, estimativas da geração de corrente global não são suficientemente mudadas, exceto no caso de ilhas paradas. Entretanto, alguns desses resultados devem ser modificados na presença de um substancial transporte térmico de elétrons.

Em (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000), Dumont, Giruzzi e Barbato desenvolvem um modelo numérico para prever simulações de geração de corrente por RF em plasmas confinados magneticamente. O modelo encontra sua aplicação completa em estudos preditivos de cenários complexos de controle de perfil de corrente em tokamaks, dirigidos para o estabelecimento de barreiras internas de transporte pelo uso simultâneo de vários métodos de geração de corrente por RF.

Esse modelo é simplificado o quanto possível, contudo, mantém as dependências essenciais e não-linearidades que tornam o problema complexo. Por exemplo, a propagação e absorção de ondas LH, que geralmente requer *ray-tracing*, foi tratada somente como um regime multipasso, usando um modelo simples baseado em domínios de propagação, ainda mantendo a dependência da propagação e absorção de onda com a temperatura e perfil q . O modelo de propagação das ondas LH que este artigo apresenta serviu de inspiração para nossa abordagem.

A propagação de ondas no intervalo de frequência LH, apesar de ainda governada pela óptica geométrica, geralmente segue padrões mais complicados que no intervalo de frequência EC. O amortecimento de Landau sendo muito fraco, a onda realiza várias passagens através do plasma até que sua absorção seja completa, exceto para valores muito altos da temperatura de elétrons T_e e/ou do índice de refração paralelo inicial $n_{\parallel 0}$ ($T_e^2 n_{\parallel 0} > 50$, aproximadamente, onde T_e é em keV). Contudo, uma vez que as ondas cruzam uma camada evanescente fina na borda do plasma, e antes dessas ondas serem completamente absorvidas, uma fraca propagação de onda é sujeita a determinados vínculos⁴ que definem um domínio de propagação da onda no espaço $n_{\parallel} - r$ no qual os raios podem se propagar.

Em (ROSA; ZIEBELL, 2001), estudou-se os efeitos do transporte radial nos perfis de deposição EC e LH, e na eficiência de geração de corrente. Os autores consideraram o plasma do tokamak sob a ação de ondas LH, ondas EC, colisões e transporte de elétrons

⁴Esses vínculos serão apresentados no Capítulo 4.

através das superfícies magnéticas, e consideraram situações nas quais não é a mesma a localização espacial dos picos do perfil de deposição de potência para ondas EC e LH.

O espectro de energia foi o mesmo utilizado em (ROSA; ZIEBELL, 1992), sendo que considerou-se que a potência total que chega na superfície magnética na posição x é $P_{lh}(x) = P_{lh}(a) - P_{lh}(a, x)$ e, portanto, $P_0(x) = P_{lh}(x)/S$, onde P_{lh} é a potência dissipada da onda LH, a o raio menor e $S = 4\pi^2 R_0 r$ é a área da superfície magnética de raio $r = |x|$. O termo de ciclotron é o mesmo utilizado nas Refs. (FIDONE; GRANATA; MEYER, 1982; KRIVENSKI et al., 1987; ROSA; ZIEBELL, 1999), sendo também considerado o efeito toroidal.

Os autores introduziram no tratamento quase-linear uma forma simplificada de processos que podem ser mais complexos, tais como campos magnéticos não-homogêneos, instabilidades, flutuações no campo magnético e flutuações eletrostáticas. Para o modelamento do coeficiente de difusão, consideraram quatro tipos de dependência do coeficiente com a coordenada radial, pretendendo simular diferentes regimes de transporte

$$\begin{aligned}
 D(x) &= d_0, & \text{perfil } 1 \\
 D(x) &= d_0 \left(x^2/a^2 \right), & \text{perfil } 2 \\
 D(x) &= d_0 \left(x^2/a^2 \right) \left(1 - x^2/a^2 \right), & \text{perfil } 3 \\
 D(x) &= d_0 [\sin (2\pi x/a)]^2, & \text{perfil } 4.
 \end{aligned}$$

Os resultados mostraram que para diferentes espécies de perfis para o coeficiente de difusão espacial, na escala de tempo necessária para atingir um estado estacionário efetivo entre ondas LH, ondas EC, e colisões, o transporte de partículas pode ter um importante papel na potência de absorção EC e LH e geração de corrente, movendo uma fração de elétrons do plasma mais interno para mais externo. O perfil de densidade local quase não é afetado. Contudo, com o modelo utilizado, partículas de alta velocidade são consideravelmente mais afetadas por transporte espacial que partículas de baixa velocidade, com uma conseqüente modificação significativa observada no perfil para ondas LH e na eficiência de geração de corrente LH+EC.

O crescimento total da corrente ocorre como um resultado do sinergismo de ondas EC e LH mesmo quando no início não há superposição dos picos de absorção de potência das duas ondas, devido ao transporte de partículas energéticas de partes mais internas para mais externas do plasma, onde as ondas LH são mais absorvidas durante o início da simulação. Como uma conseqüência, ocorre uma alta absorção de ondas LH em posições mais externas e conseqüentemente um crescimento na corrente total gerada por uma ação

combinada das duas ondas.

A geração de corrente por ondas EC desempenha um importante papel na sustentação do perfil de corrente toroidal e suprimindo instabilidades em tokamaks de alta performance. Ferramentas computacionais, tais como o código Fokker-Planck CQL3D, foram largamente aplicadas para prever e interpretar experimentos. Em (HARVEY et al., 2002a), Harvey e seus colaboradores mostram que concordância entre teoria e experimentos nos tokamaks DIII-D e TCV é obtida pela inclusão nos cálculos de um modelo razoável de transporte radial em um nível consistente com o confinamento global de energia dos estudos da base de dados do ITER.

Neste artigo, a corrente no TCV é inteiramente gerada por potência EC, removendo ambigüidades de corrente Ôhmica e corrente de elétrons "fugitivos" (*runaway electrons*), e para o modelo numérico CQL3D para absorção EC e geração de corrente, extensivamente, tomou-se como referência o tokamak DIII-D, já bem diagnosticado. O efeito de transporte no TCV é esmagador, reduzindo a corrente RF calculada de 550 para o valor experimental de 110 kA.

Apesar de haver uma pequena dúvida se a turbulência do plasma é responsável pelo transporte radial observado com nível colisional, permanece uma incerteza se a turbulência eletrostática (ES) ou magnética domina sobre o efeito na corrente toroidal. Os autores mostraram uma boa concordância entre experimento e modelo baseados em difusão radial devido a turbulência do tipo ES, entretanto, mostram uma concordância pobre com um coeficiente de difusão puramente do tipo turbulência magnética.

Em (ROSA; ZIEBELL, 2002), estudou-se os efeitos da presença de uma barreira interna de transporte (ITB) na eficiência de geração de corrente e no perfil de deposição de potência no caso de ondas eletrônicas de cíclotron interagindo com uma cauda estendida gerada por ondas LH.

Os resultados mostraram que para um dado nível de perturbação magnética e profundidade da barreira, a influência do nível de potência EC é muito importante, principalmente no perfil de deposição de potência das ondas LH. Como a potência EC cresce, o pico de absorção de ondas move-se para a região da barreira. Como consequência existe um crescimento forte na geração combinada de corrente, e efeitos de sinergia produzem maior eficiência de geração de corrente do que poderia ser atingida se as eficiências de geração de corrente LH e EC fossem independentes uma da outra, e fossem apenas adicionadas para produzir a eficiência total.

O efeito da profundidade da barreira não mostrou-se muito importante, sendo mais importante o nível da perturbação magnética. À medida que esse nível cresce, o perfil de corrente muda com a redução da densidade de corrente na parte central do plasma e conseqüente crescimento da densidade de corrente em pontos mais externos, fora da região da barreira.

O nível de potência EC foi outro parâmetro muito importante desde que não muda somente o valor do pico do perfil da densidade de corrente, mas também a forma do pico, mudando desta forma as propriedades de estabilização do perfil de corrente gerado.

Para terminar temos a apresentação da Dissertação de Mestrado (OLIVEIRA, 2002), em relação à qual este trabalho de Doutorado representa uma continuidade. Nesse trabalho, fez-se um estudo da influência de cinco diferentes perfis do termo de transporte radial na eficiência da geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior (LH). Considerou-se a equação de difusão quase-linear com três termos, a saber, de ação das ondas LH, de colisões e de transporte.

Com a análise dos resultados obtidos para os cinco perfis testados, concluiu-se que os perfis que apresentam valor máximo no centro da lâmina foram os que tiveram maior efeito sobre a geração de corrente. Entretanto, a intensidade desse efeito foi muito pequena, para os valores utilizados do coeficiente de difusão.

2.3 Trabalhos prévios em barreiras internas de transporte

Nesta Seção, a fim de ilustração, colocamos algumas citações sobre ITB's retiradas da literatura, mas para um maior aprofundamento no assunto, que está fora do escopo deste texto, sugerimos a leitura dos artigos citados aqui bem como de (WESSON, 2004; ITER PHYSICS EXPERT GROUPS, 1999; HINTON; HAZELTINE, 1976; CONNOR; WILSON, 1994; GARBET et al., 2004; WOOTTON et al., 1990; WALTZ; KERBEL; MILOVICH, 1994; HAHM, 2002; CHALLIS, 2004; BARANOV et al., 2001; HUGILL, 1983; MINARDI, 2002; QUIGLEY et al., 2004; CONNOR, 1993)

Barreiras de Transporte Internas (ITB - *Internal Transport Barriers*) podem prover um alto confinamento em plasmas de tokamak. Isso é desejável para a operação com a maioria dos processos de geração de corrente não-indutiva por mecanismo de *bootstrap*, como correntemente visado para plantas de potência com estado estacionário (CHALLIS, 2004).

Em um plasma confinado magneticamente, as partículas movem-se livremente ao longo das linhas de campo magnético, enquanto o movimento perpendicular a essas linhas está restrito pelo giro em torno das linhas de campo. Colisões binárias são o mecanismo básico pela qual partículas e energia são transportadas através das linhas magnéticas.

Em geral, contudo, o transporte neoclássico não pode explicar o transporte entre as linhas de campo magnéticas observado experimentalmente em tokamaks. O transporte real é maior que o neoclássico, sendo essa diferença entre o transporte real entre linhas de campo e as previsões neoclássicas atribuída à turbulência do plasma, denominada de transporte anômalo⁵. A turbulência é gerada por fontes de energia livre de um grande número de instabilidades, essencialmente iniciadas por gradientes de temperatura e densidade (WOLF, 2003).

A turbulência propicia o transporte de partículas, mas o *shear* magnético estabiliza a turbulência do plasma contribuindo para a formação da barreira, sendo a principal ferramenta atual para se produzir ITB. Temos, então, o paradigma *shear* $\vec{E} \times \vec{B}$: o melhoramento do confinamento durante um evento de barreira de transporte é tal que o *shear* magnético baixo ou negativo atua como um facilitador para o *shear* $\vec{E} \times \vec{B}$ que suprime a turbulência. A turbulência é suprimida se a taxa de *shearing* $\omega_{\vec{E} \times \vec{B}}$ exceder a taxa de crescimento linear máxima γ_{max}^{lin} do modo dominante ou mais instável (WALTZ; KERBEL; MILOVICH, 1994; WOLF, 2003).

$$\omega_{\vec{E} \times \vec{B}} > \gamma_{max}^{lin} \approx \frac{v_T}{L_T} f(s_m), \quad (2.2)$$

onde s_m é o *shear magnético*.

Existe uma forte ligação com outros mecanismos de estabilização, em particular o *shear* magnético, uma vez que eles influenciam na magnitude da taxa de crescimento. Na relação acima, isso é expresso por $f(s_m)$, que é adicionado à dependência principal em v_T , velocidade térmica, ou ao raio de Larmor nela contido, e à dependência no comprimento característico do gradiente de temperatura, L_T .

A taxa de fluxo de *shearing* $\omega_{\vec{E} \times \vec{B}}$ é dada por

$$\omega_{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{RB_\theta}{B} \frac{d}{dr} \left(\frac{E_r}{RB_\theta} \right). \quad (2.3)$$

Aqui B_θ é o campo magnético poloidal e E_r é o campo elétrico radial.

Encontrou-se que a razão $\omega_{\vec{E} \times \vec{B}}/\gamma_{max}^{lin}$ varia com o raio normalizado, ρ_* . Essa razão

⁵Transporte irregular.

é pequena nos tokamaks atuais e deverá permanecer pequena nos próximos dispositivos. Portanto, fluxo de *shear* usualmente não pode constituir um disparador de uma ITB na ausência de torque. Uma redução na taxa de crescimento linear é necessária (GARRET et al., 2004).

Barreiras de transporte de elétrons aparecem quando o *shear* é negativo. Mas esse mecanismo não explica todas as barreiras observadas no JET. Há duas razões ao menos para isso: o papel do q_{min} racional e a coexistência de várias barreiras (GARRET et al., 2004). Segundo (QUIGLEY et al., 2004), temos também que o *shear* não desempenha um papel único na formação da ITB, é necessário baixa densidade para formar a barreira.

O paradigma *shear* do $\vec{E} \times \vec{B}$ não está completo, desde que, como vemos em (QUIGLEY et al., 2004), algumas descargas com ITB apresentam γ_{max}^{lin} aproximadamente quatro vezes maior que $\omega_{\vec{E} \times \vec{B}}$, contradizendo a condição de supressão de turbulência. É provável que efeitos globais não tenham sido considerados no cálculo de γ_{max}^{lin} , superestimando o seu valor.

Destaquemos, ainda, que o transporte anômalo em tokamaks é usualmente explicado em termos de flutuações turbulentas, não havendo concordância sobre o tipo de flutuações que gera tal transporte, eletrostática ou magnética. Connor (CONNOR, 1993) discute as evidências e argumentos existentes que poderiam auxiliar a resolver a questão, estabelecendo que não existe uma distinção real e que as flutuações são verdadeiramente eletromagnéticas, já que a turbulência eletrostática 'esconde' algumas características da turbulência magnética, por exemplo, transporte de partículas rápidas, e alternativamente, flutuações eletrostáticas poderiam ser geradas por ilhas magnéticas.

3 Teoria Quase-Linear

3.1 Introdução

Neste trabalho, como já foi bastante realçado, estuda-se como o comportamento do plasma em um tokamak pode influenciar a geração de corrente não-indutiva, considerando-se efeitos de ondas de rádio-freqüência, colisões entre as partículas e a presença de uma condição especial de confinamento que é a existência de barreira de transporte.

Na abordagem da Teoria Cinética¹, pode-se escrever uma equação que determina a evolução de uma função distribuição que, por sua vez, descreve o sistema em questão e permite determinar variáveis de interesse físico para uma determinada espécie de partícula do plasma. Tal equação teria um termo para cada fenômeno. Assim, temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{LH} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{EC} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{COL} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_T + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_E. \quad (3.1)$$

Desta forma, a variação da função distribuição² de elétrons do plasma em função do tempo f é regida pela ação da interação das ondas RF (ondas LH para o primeiro termo à direita e EC para o segundo) com os elétrons, colisão entre essas partículas e outras que não sofreram influência das ondas e entre si (terceiro termo), e, finalmente, o efeito do transporte radial de partículas, incluindo a possibilidade de existir uma dificuldade no transporte entre superfícies magnéticas dada pela presença da ITB (penúltimo termo). O último termo representa a ação de um campo elétrico radial, que não consideraremos neste trabalho.

O tratamento do efeito das ondas, realizado aqui pela aproximação Quase-Linear, é derivado através da equação de Vlasov ou equação de Boltzmann sem colisões que

¹Descrição microscópica baseada no caráter estatístico onde se trata com configuração existente no espaço de fase, envolvendo conceitos como distribuição no espaço de velocidades, correlações entre as partículas e os microcampos produzidos por estas.

²A função distribuição no espaço de fase é definida como a densidade de pontos representativos de partículas do tipo α no espaço de fase (BITTENCOURT, 2003).

estabelece a conservação da densidade de pontos representativos no espaço de fase no tempo, i.e., é um resultado do teorema de Liouville³. Assim, leva-se em conta o efeito das interações entre as partículas sem derivar explicitamente qualquer expressão particular para o termo de colisões.

Ao acrescentar um termo de colisões à equação de Vlasov, tem-se a equação de Fokker-Planck que consiste em um modelo de difusão derivado a partir do fato de que defleções de grandes ângulos de uma partícula carregada em um plasma ocorrem por uma sucessão de espalhamentos de pequenos ângulos, e não de um espalhamento binário simples (AKHIEZER et al., 1975).

No último termo, temos o transporte induzido por turbulência em que a energia livre liberada por uma instabilidade gera um nível estacionário de flutuações em quantidades perturbadas associadas. Nesse estado turbulento as flutuações resultam em um transporte radial de partículas e energia (WESSON, 2004). Nesta abordagem, considera-se que o nível de turbulência não é constante ao longo da distância radial, mas possui uma redução na posição da barreira, caracterizando assim a presença de barreira interna de transporte (ITB).

3.2 Teoria quase-linear

A aproximação Quase-Linear consiste em considerar-se o efeito da interação das ondas com as partículas sobre a função distribuição de fundo do plasma em tempos assintoticamente longos. Considera-se, nessa teoria, que as taxas de crescimento e amortecimento das oscilações presentes no plasma são pequenas, embora sejam levadas em conta as interações dessas oscilações com a função distribuição de fundo, que denotaremos por f_0 . As oscilações do plasma serão descritas pela parte da função distribuição que chamaremos de f_1 . Essa hipótese permite desprezar as interações entre ondas e a violação do princípio de superposição⁴, desconsiderando os termos de ordem dois ou maior nas quantidades perturbadas. Os fenômenos de crescimento ou amortecimento das oscilações do plasma, descritos por f_1 , ocorrem devido à ressonância de ondas (LH ou EC) com as partículas do plasma. As partículas não-ressonantes não trocam energia com as ondas e podemos supor que não são afetadas pelas oscilações do plasma em escalas curtas de tempo. A influência das ondas na distribuição de fundo só se dará através de colisões

³O teorema de Liouville garante que os pontos do espaço de fase se movem como um fluido incompressível (SALINAS, 1990).

⁴O princípio da superposição estabelece a independência da propagação das oscilações com diferentes vetores de onda e frequências.

entre partículas ressonantes e não-ressonantes. Formalmente escrevemos:

$$f = f_0 + f_1,$$

onde $f_0 = \langle f \rangle$ é a função distribuição de fundo e f_1 é a parte da função distribuição que interage com as ondas.

Vamos, então, partir da equação de Vlasov e das equações de Maxwell para derivar, conforme a literatura, uma expressão para a evolução temporal da função distribuição de partícula única, f , na ausência de colisões, onde essa espécie de partícula presente no plasma é o elétron. Aquela equação é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} f = 0, \quad (3.2)$$

onde \vec{p} é o momentum dos elétrons, \vec{F} é a força que age sobre os elétrons, γ é o fator relativístico, m a massa do elétron e $\nabla_{\vec{x}}, \nabla_{\vec{p}}$ são os operadores gradiente nos espaços de configuração e de momentum respectivamente. A função distribuição de elétrons depende de posição \vec{x} , momentum \vec{p} e tempo t , $f = f(\vec{x}, \vec{p}, t)$.

Linearizemos a equação de Vlasov, separando a função distribuição em termos de uma função distribuição do plasma de fundo, f_0 , que é a parte não oscilante, $f_0 \equiv \langle f \rangle$, e a parte oscilante f_1 ,

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) = f_0(\vec{p}, t) + f_1(\vec{x}, \vec{p}, t). \quad (3.3)$$

O símbolo $\langle \dots \rangle$ representa a média espacial e f_0 é homogênea. Fazendo a média espacial da equação (3.2) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = - \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} f \rangle. \quad (3.4)$$

Para nosso problema a força \vec{F} que atua sobre as partículas é a força de Lorentz:

$$\vec{F} = -e \left[\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc} \vec{p} \times \vec{B} \right], \quad (3.5)$$

onde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ são os campos elétrico e magnético e $-e$ é a carga do elétron. Esses campos correspondem ao campo elétrico \vec{E} da onda presente e o campo magnético estático \vec{B}_0 e o da onda. Assim, podemos escrever

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (3.6)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{x}, t).$$

Substituindo a expressão da força de Lorentz com esses campos na equação (3.2), supondo \vec{B}_0 ao longo da direção z , temos

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}}f + \frac{\omega_c}{\gamma}(\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}}f - e[\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}\vec{p} \times \vec{B}_1] \cdot \nabla_{\vec{p}}f = 0, \quad (3.7)$$

onde $\omega_c = |e|B_0/(mc)$ é a frequência de ciclotron de elétrons.

Fazendo a mesma substituição na equação (3.4) linearizada, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}f_0 = -\frac{\omega_c}{\gamma}(\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}}f_0 + e \langle [\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}(\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}}f_1 \rangle. \quad (3.8)$$

Considerando a linearização de (3.7) e substituindo (3.8), obtemos a equação para a evolução da função distribuição que oscila rapidamente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}f_1 + e \langle [\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}(\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}}f_1 \rangle \\ & + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}}f_0 + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}}f_1 + \frac{\omega_c}{\gamma}(\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}}f_1 - e[\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}(\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}}f_0 \\ & - e[\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}(\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}}f_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Desprezando os termos de segunda ordem nessa equação (aproximação Quase-Linear) e lembrando que $f_0 = f_0(\vec{p}, t)$, ficamos com a seguinte equação para f_1 :

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1 + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}}f_1 + \frac{\omega_c}{\gamma}(\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}}f_1 - e[\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}(\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}}f_0 = 0. \quad (3.10)$$

As equações (3.8) e (3.10) são as principais equações da Teoria Quase-Linear. Essas equações, juntamente com as equações de Maxwell, dão a evolução temporal da função distribuição de fundo, e de uma forma auto-consistente, os campos \vec{E} e \vec{B} . Senão vejamos, a (3.10) apresenta a influência das ondas na parte perturbada da distribuição, esta evolui no tempo rapidamente e se modifica. O resultado dessa modificação afeta a evolução temporal da distribuição de fundo através da (3.8) e, por sua vez, os campos.

3.3 Equação de evolução temporal da função distribuição

Nesta seção, vamos a partir das equações (3.8) e (3.10) derivar uma expressão para a evolução temporal da função distribuição de elétrons de acordo com a Teoria Quase-

Linear.

Para facilitar, repetiremos abaixo essas duas equações:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = -\frac{\omega_c}{\gamma} (\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_0 + e \langle [\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc} (\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}} f_1 \rangle. \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}} f_1 + \frac{\omega_c}{\gamma} (\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_1 - e [\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc} (\vec{p} \times \vec{B}_1)] \cdot \nabla_{\vec{p}} f_0 = 0. \quad (3.12)$$

Estamos interessados em situações onde as propriedades do plasma variam lentamente no espaço e no tempo, enquanto as oscilações possuem grande frequência (pequenos comprimentos de onda). Desta forma, podemos escrever o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ da onda na aproximação eikonal (BERNSTEIN, 1975; SHARMA; SOMERFORD, 1990)

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_{0y} dk_{0z} \vec{E}_{\vec{k}}(\vec{k}_0, \vec{x}, t) e^{i \int \vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (3.13)$$

onde consideramos apenas a parte real do campo. $\vec{k} = \vec{k}(\vec{k}_0, \vec{x}, t)$ é o vetor de onda local e \vec{k}_0 é o vetor de onda na borda do plasma, com os componentes k_{0x} , k_{0y} e k_{0z} , respectivamente, nas direções dadas pelos versores \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 .

Aplicando a aproximação eikonal a (3.12), obtemos a expressão abaixo em que faremos alguns procedimentos conforme (AKHIEZER et al., 1975).

$$\frac{\partial f_{1\vec{k}}}{\partial t} - i\omega f_{1\vec{k}} + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot (i\vec{k} f_{1\vec{k}}) + \frac{\omega_c}{\gamma} (\vec{p} \times \hat{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{1\vec{k}} - e \left[\vec{E}_{\vec{k}} + \frac{(\vec{p} \times \vec{B}_{\vec{k}})}{\gamma mc} \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} f_0 = 0. \quad (3.14)$$

Usando a relação

$$\nabla \cdot (\vec{A}f) = \vec{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{A}, \quad (3.15)$$

e escrevendo \vec{p} em coordenadas esféricas, podemos escrever o quarto termo da equação (3.14) como segue

$$+\frac{\omega_c}{\gamma} (\vec{p} \times \hat{e}_3) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{1\vec{k}} = -\frac{\omega_c}{\gamma} p \sin \theta (\hat{e}_\phi) \cdot \partial_p f_{1\vec{k}} = -\frac{\omega_c}{\gamma} \partial_\phi f_{1\vec{k}}, \quad (3.16)$$

onde usamos o versor $-\hat{e}_\phi = \hat{e}_1 \sin \phi - \hat{e}_2 \cos \phi$.

Definindo o sistema de coordenadas de maneira a ter \vec{k} no plano $x - z$,

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = (k_{\parallel} \hat{k} + \vec{k}_{\perp}) \cdot (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) = k_{\parallel} v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp} \cos(\phi - \theta). \quad (3.17)$$

Seja $\psi = \phi - \theta$;

$$\frac{\partial f_{1\vec{k}}}{\partial t} + i \left[k_{\parallel} v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp} \cos \psi - \omega_{\vec{k}} \right] f_{1\vec{k}} - \frac{\omega_c}{\gamma} \frac{\partial f_{1\vec{k}}}{\partial \psi} = R(\vec{k}, \vec{p}, t), \quad (3.18)$$

onde

$$R(\vec{k}, \vec{p}, t) = e \left[\vec{E}_{\vec{k}} + \frac{1}{\gamma m c} (\vec{p} \times \vec{B}_{\vec{k}}) \right]. \quad (3.19)$$

Seja agora

$$f_{1\vec{k}} = u_{\vec{k}}(\vec{p}, t) e^{i\lambda \sin \psi}, \quad (3.20)$$

temos

$$\frac{\partial u_{\vec{k}}}{\partial t} + i \left[k_{\parallel} v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp} \cos \psi - \omega_{\vec{k}} \right] u_{\vec{k}} - \frac{\omega_c}{\gamma} \frac{\partial u_{\vec{k}}}{\partial \psi} - i \frac{\omega_c}{\gamma} \lambda \cos \psi u_{\vec{k}} = R(\vec{k}, \vec{p}, t) e^{-i\lambda \sin \psi}, \quad (3.21)$$

onde para haver cancelamento do termo $\cos \psi$ então $\lambda \equiv k_{\perp} p_{\perp} \gamma / \omega_c$.

Seja agora a expansão em série de Fourier

$$u_{\vec{k}}(\vec{p}, t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u_{\vec{k}}^{\ell}(p_{\perp}, p_{\parallel}, t) e^{i\ell \psi}, \quad (3.22)$$

ficamos com a expressão abaixo onde também multiplicamos por $e^{-i\ell' \psi}$ e integramos em ψ .

$$\frac{\partial u_{\vec{k}}^{\ell}}{\partial t} + i \left[k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}} \right] u_{\vec{k}}^{\ell} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi R e^{-i\lambda \sin \psi - i\ell \psi} = P^{(\ell)}. \quad (3.23)$$

A solução da equação (3.23) é dada por

$$u_{\vec{k}}^{\ell} = e^{-i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}})t} \left[u_{\vec{k}}^{\ell}(0) + \int_0^t dt' P^{(\ell)}(t') e^{i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}})t'} \right]. \quad (3.24)$$

Portanto, usando (3.20) e (3.22), podemos escrever

$$f_{\vec{k}1} = f_{\vec{k}1}(1) + f_{\vec{k}1}(2), \quad (3.25)$$

onde

$$f_{\vec{k}1}(1) \equiv \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u_{\vec{k}}^{\ell}(0) e^{i[\ell \psi + \lambda \sin \psi - (k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}})t]}, \quad (3.26)$$

$$f_{\vec{k}1}(2) \equiv \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{[\ell \psi + \lambda \sin \psi]} \int_0^t dt' P^{(\ell)} e^{-i[k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}](t-t')}. \quad (3.27)$$

Entretanto, $f_{\vec{k}1}(1)$ depende da perturbação inicial $u_{\vec{k}}^{\ell}(0)$, não depende dos campos. A perturbação inicial pode ser nula, ou pode desaparecer com o tempo, devido ao termo $e^{i\omega_{\vec{k}} t} \rightarrow e^{-\Im \omega_{\vec{k}} t} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. Desta forma, podemos considerar apenas a contribuição devido as ondas.

Vamos discutir agora a integral temporal

$$\int_0^t dt' P^{(\ell)}(t') e^{-i[k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}](t-t')}. \quad (3.28)$$

O integrando só resultará em contribuição significativa para a integral se $|\left[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}\right](t - t')| \ll 1$. Se esta contribuição não for satisfeita, o integrando oscila muito rapidamente.

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' P^\ell(t') e^{-i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}](t-t')} \\ & \sim P^\ell(t) \int_{t-\Delta t}^t dt' e^{-i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}](t-t')} \\ & = P^\ell(t) \int_{-\Delta t}^0 du e^{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]u} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora, podemos fazer $\Delta t \rightarrow \infty$, pois a parte decrescente representa um integrando oscilante que não contribui significativamente para integral, então:

$$\begin{aligned} & P^\ell(t) \left[\frac{e^{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]u}}{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]} \right]_{-\infty}^0 = \\ & -iP^\ell(t) \left[\frac{1}{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]} - \lim_{\Delta t \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]\Delta t} e^{\Im\omega_{\vec{k}}\Delta t}}{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

O termo $\frac{1}{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]}$ dá origem a uma parte principal e uma parte ressonante, quando colocado em uma integração, i.e.,

$$\frac{1}{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]} \rightarrow \wp \frac{1}{i[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]} + i\pi\delta[k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - \omega_{\vec{k}}]$$

A parte principal dá origem à chamada "difusão não-ressonante", que é uma "falsa difusão" reversível, enquanto o termo ressonante representa a "verdadeira" difusão irreversível.

Basicamente com as equações (3.20), (3.22), (3.24) e o exposto acima, além de trabalhar o termo P^ℓ , chegamos a uma expressão para a amplitude de Fourier de f_1 , $f_{\vec{k}1}$ (GIRUZZI, 1985)

$$\tilde{f}_{1\vec{k}} = ie \sum_{s,n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\rho) e^{i\phi(n-s)}}{\omega + \frac{s\omega_c}{\gamma} - k_{\parallel}v_{\parallel}} \left[\vec{E}_{0\perp} \cdot \vec{\Pi}_{s\perp} \hat{L} + \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \vec{E}_{0\parallel} \cdot \vec{\Pi}_{s\parallel} \tilde{L}_s \right] f_0. \quad (3.31)$$

onde na equação acima, J_n é a função de Bessel de ordem n , $\phi = \arctan(p_y/p_x)$ e $\vec{v} = \vec{p}/(\gamma m)$ é a velocidade das partículas.

Os operadores \hat{L} , \tilde{L}_ℓ e o vetor $\vec{\Pi}_\ell$ são dados abaixo

$$\begin{aligned}\hat{L} &= \left[1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega}\right] \partial_{p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega} \partial_{p_{\parallel}}; \\ \tilde{L}_\ell &= -\frac{\ell\omega_c}{\gamma\omega} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \partial_{p_{\perp}} + \left[1 - \frac{\ell\omega_c}{\gamma\omega}\right] \partial_{p_{\parallel}}; \\ \vec{\Pi}_\ell &= \frac{\ell J_\ell(\rho)}{\rho} \vec{e}_1 + i J'_\ell(\rho) \vec{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_\ell(\rho) \vec{e}_3.\end{aligned}\tag{3.32}$$

onde $\rho = -k_{\perp}p_{\perp}/(m\omega_c)$ é o raio de Larmor das partículas e a linha denota que a função de Bessel deve ser derivada em relação ao seu argumento.

Observe-se que nessa derivação foram usadas as seguintes relações

$$\begin{aligned}e^{ibsen\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b) e^{in\theta}, \\ \cos\theta e^{ibsen\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{b} J_n(b) e^{in\theta}, \\ \text{sen}\theta e^{ibsen\theta} &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(b) e^{in\theta},\end{aligned}\tag{3.33}$$

e $b = -\lambda$ e $\theta = \psi$.

Observando a equação (3.31), percebemos que $\tilde{f}_{1\vec{k}}$ apresenta uma estrutura ressonante dada pelo denominador

$$\omega + \frac{\ell\omega_c}{\gamma} - k_{\parallel}v_{\parallel} = 0$$

Posteriormente, iremos tratar da relação de dispersão a ser satisfeita por ω , mas cabe aqui notar que o termo $k_{\parallel}v_{\parallel}$ indica o deslocamento Doppler na frequência da onda como vista pelas partículas à medida que essas últimas movem-se ao longo das linhas do campo magnético.

Existe uma distribuição aleatória dos momenta das partículas em termos do ângulo ϕ (ângulo do vetor momentum com o campo magnético) em função da rápida rotação dos elétrons em torno das linhas de campo magnético - rotação de Larmor. Em virtude desse movimento devemos fazer uma média sobre o ângulo ϕ na equação que fornece a evolução temporal para a função distribuição, de modo a torná-la dependente apenas dos componentes perpendicular e paralelo do momentum referente ao campo magnético. Procedendo dessa forma, o termo $\frac{\omega_c}{\gamma} (\vec{p} \times \vec{e}_3) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} f_0$ desaparece na equação (3.8), e f_0 passa a ser apenas função de p_{\perp} , p_{\parallel} e do tempo t .

A substituição de (3.31) em (3.8) conduz a uma nova forma para a evolução temporal

de f_0 (AKHIEZER et al., 1975; GIRUZZI, 1985; ROSA, 1993):

$$\partial_t f_0 = \frac{\pi e^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{0y} dk_{0z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{p_{\perp}} \hat{R} \frac{p_{\perp}}{\gamma} |\vec{E} \cdot \vec{\Pi}_{\ell}|^2 e^{-2 \int_{x_0}^x \vec{k}'' \cdot d\vec{x}} \delta(\omega + \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}) \hat{R} f_0, \quad (3.34)$$

$$\hat{R} = -\frac{\ell \omega_c}{\gamma \omega} \partial_{p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \partial_{p_{\parallel}}, \quad (3.35)$$

em que Π_{ℓ} já está definido em (3.32).

Nessas equações, \vec{k}'' é a parte imaginária do vetor de onda \vec{k} e descreve as propriedades de absorção do plasma. S representa a área da superfície magnética.

3.4 Teoria quase-linear da onda de cíclotron eletrônica

A equação (3.34) possui a forma de uma equação de difusão no espaço de *momentum*, sendo o coeficiente de difusão proporcional à energia que chega ao ponto do plasma onde a função f_0 está sendo calculada:

$$D \sim |\vec{E}_0 \cdot \vec{\Pi}_{\ell}|^2 \exp[-2 \int_{x_0}^x \vec{k}'' \cdot d\vec{x}]. \quad (3.36)$$

Para apresentar a obtenção dessa forma final, adotaremos um procedimento que pode ser encontrado na literatura (FIDONE; GRANATA; MEYER, 1982; ROSA, 1993), reproduzindo aqui alguns detalhes que visam facilitar o entendimento do texto e do desenvolvimento dos cálculos. Embora sigamos basicamente a forma de desenvolvimento apresentada na tese de Paulo Rosa (ROSA, 1993), optamos por reproduzir aqui esses detalhes em vez de simplesmente fazer uma citação, visando facilitar o entendimento do leitor que possa não ter acesso à referida tese.

Primeiramente, necessitamos obter as expressões para \vec{E}_0 e \vec{k}'' consistentes com a equação (3.34). Para tanto, vamos partir das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Escrevemos a densidade de corrente \vec{J} , induzida pelo campo \vec{E} dado por (3.13), a partir da teoria da resposta linear (BERNSTEIN, 1975),

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = [\vec{\sigma} \cdot \vec{E}_0 + \vec{Q}(\vec{E}_0)] e^{i \int \vec{k} \cdot d\vec{x} - i\omega t} \quad (3.37)$$

onde $\vec{\sigma}$ é o tensor condutividade e $\vec{Q}(\vec{E}_0)$ é dado por

$$\begin{aligned}\vec{Q}(\vec{E}_0) = & -\frac{i}{2} \left(\partial_{\vec{x}} \cdot (\partial_{\vec{k}} \vec{\sigma}) \right) \cdot \vec{E}_0 - i[(\partial_{\vec{x}} \vec{E}_0)^T \cdot \partial_{\vec{k}}] \cdot \vec{\sigma}^T \\ & + \frac{i}{2} [\partial_t (\partial_{\omega} \vec{\sigma})] \cdot \vec{E}_0 + i \partial_{\omega} \vec{\sigma} \cdot \partial_t \vec{E}_0.\end{aligned}$$

Escrevemos agora \vec{E}_0 na forma de uma expansão nos parâmetros $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ e $\frac{t}{t_0}$, onde λ_0 e t_0 são grandezas características que denotam variações espaciais e temporais típicas do plasma em consideração:

$$\vec{E}_0 = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \dots \quad (3.38)$$

Após equacionar ordem por ordem nas equações de Maxwell, obtemos:

$$\vec{D}(\vec{k}, \vec{x}, \omega, t) \cdot \vec{a}_0 = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}i\omega \vec{D} \cdot \vec{a}_1 = & \partial_{\omega}(\omega \vec{D}) \cdot \partial_t \vec{a}_0 + \frac{1}{2} [\partial_t \partial_{\omega}(\omega \vec{D})] \cdot \vec{a}_0 \\ & - [(\partial_{\vec{x}} \vec{a}_0)^T \cdot \partial_{\vec{k}}] \cdot (\omega \vec{D})^T - \frac{1}{2} [\partial_{\vec{x}} \cdot (\partial_{\vec{k}} \omega \vec{D})] \cdot \vec{a}_0\end{aligned} \quad (3.40)$$

onde:

$$\vec{D} = \vec{n}\vec{n} - n^2 \vec{I} + \vec{\epsilon}. \quad (3.41)$$

\vec{I} é o tensor identidade $I_{ij} = \delta_{ij}$ e $\vec{\epsilon}$ é o tensor dielétrico

$$\vec{\epsilon} = \vec{I} + \frac{4i\pi}{\omega} \vec{\sigma}, \quad (3.42)$$

que tem a sua forma explícita dada por:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij} = & \delta_{ij} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_{\perp} \Pi_{i\ell}^* \Pi_{j\ell}}{\gamma + \frac{\ell\omega_c}{\omega} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m\omega}} \hat{L} f_0 \\ & + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \delta_{i3} \delta_{j3} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} [\partial_{\parallel} - \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \partial_{p_{\perp}}] f_0.\end{aligned} \quad (3.43)$$

Podemos reescrever o tensor dielétrico na forma de uma soma de uma parte hermitiana e outra anti-hermitiana⁵

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}' + i \vec{\epsilon}'', \quad (3.44)$$

onde $\vec{\epsilon}'$ denota a parte hermitiana e $\vec{\epsilon}''$, a parte anti-hermitiana. Essas grandezas são

⁵Entenda-se que de uma quantidade complexa \vec{a} dada por $\vec{a} = \vec{a}' + i \vec{a}''$, a parte hermitiana é $\vec{a}' = (\vec{a} + \vec{a}^{*T})/2$ e a parte anti-hermitiana é dada por $\vec{a}'' = (\vec{a} - \vec{a}^{*T})/2i$. O símbolo * denota o complexo conjugado de \vec{a} e T denota a matriz transposta.

dadas por

$$\epsilon' = \vec{I} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \wp \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_{\perp} \Pi_{i\ell}^* \Pi_{j\ell} \hat{L} f_0}{\gamma + \frac{\ell\omega_c}{\omega} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m\omega}} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \vec{e}_3 \vec{e}_3 \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} [\partial_{\parallel} - \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \partial_{p_{\perp}}] f_0, \quad (3.45)$$

$$\epsilon'' = -\pi \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum \int d^3p p_{\perp} \vec{\Pi}_{-n}^* \vec{\Pi}_{-n} \delta(\gamma - \frac{n\omega_c}{\omega} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m\omega}) \hat{L} f_0. \quad (3.46)$$

Nessas expressões o símbolo $\wp f$ denota o valor principal da integral e na expressão para a parte anti-hermitiana n assume apenas valores positivos para que haja ressonância.

A partir de (3.41) obtemos explicitamente a relação de dispersão, a relação funcional entre ω e \vec{k} . Como vemos a partir da equação (3.39), para que tenhamos uma solução não trivial para \vec{a}_0 devemos ter que

$$D \equiv \det \vec{D} = (D_{11}D_{22}D_{33} + D_{12}D_{23}D_{31} + D_{13}D_{21}D_{32}) - (D_{31}D_{22}D_{13} + D_{11}D_{23}D_{32} + D_{12}D_{21}D_{33}) = 0, \quad (3.47)$$

Com o uso da equação (3.41), as componentes D_{ij} podem ser escritas explicitamente em termos das componentes do tensor dielétrico, resultando

$$D = \epsilon_{11}n_{\perp}^4 + 2n_{\parallel}\epsilon_{13}n_{\perp}^3 + n_{\perp}^2[\epsilon_{13}^2 + n_{\parallel}^2\epsilon_{11} - \epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2 + n_{\parallel}^2\epsilon_{33} - \epsilon_{11}\epsilon_{33}] + 2n_{\parallel}n_{\perp}[n_{\parallel}^2\epsilon_{13} - \epsilon_{22}\epsilon_{13} + \epsilon_{12}\epsilon_{23}] + \epsilon_{11}\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22}\epsilon_{13}^2 + 2\epsilon_{12}\epsilon_{13}\epsilon_{23} + n^2(\epsilon_{13}^2 - \epsilon_{23}^2) + n_{\parallel}^2\epsilon_{33}(n_{\parallel}^2 - \epsilon_{11} - \epsilon_{22}) + \epsilon_{33}(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{11}\epsilon_{22}) = 0. \quad (3.48)$$

A etapa a seguir consiste no cálculo de \vec{a}_0 . Escrevemos o tensor \vec{D} em termos de dois conjuntos de vetores base que diagonalizam a matriz, de modo que se $\vec{\sigma}_N, \vec{\sigma}_M^{-1}$ são esses conjuntos, temos que $\vec{\sigma}_N \cdot \vec{\sigma}_M^{-1} = \delta_{NM}$ com $N, M = I, II, III$. A relação de dispersão pode ser escrita em termos desses vetores como:

$$D = d_I d_{II} d_{III},$$

$$\vec{D} = \sum_N d_N \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_M^{-1}$$

onde d_I, d_{II} e d_{III} são elementos da diagonal, os quais são soluções da equação cúbica

$$d^3 - (D_{11} + D_{22} + D_{33})d^2 + (D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} + D_{11}D_{33} - D_{13}D_{31} + D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32})d - D = 0. \quad (3.49)$$

Podemos fatorar essa expressão para D tendendo a zero. Uma das raízes será zero

(d_I por exemplo) enquanto que as outras duas satisfazem a

$$d_{II}d_{III} = D_{11}D_{12} - D_{12}D_{21} + D_{11}D_{33} - D_{13}D_{31}D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32} \neq 0. \quad (3.50)$$

Os vetores base $\vec{\sigma}_N$, $\vec{\sigma}_M^{-1}$ são dados por (FIDONE; GRANATA; MEYER, 1982)

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_N = A_N^{1/2} \{ & [D_{12}(D_{33} - d_N) - D_{13}D_{32}]\vec{e}_1 \\ & + [D_{13}D_{31} - (D_{11} - d_N)(D_{33} - d_N)]\vec{e}_2 \\ & + [(D_{11} - d_N)D_{32} - D_{12}D_{31}]\vec{e}_3 \}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_M^{-1} = A_M^{-1/2} \{ & [D_{21}(D_{33} - d_M) - D_{31}D_{23}]\vec{e}_1 \\ & + [D_{13}D_{31} - (D_{11} - d_M)(D_{33} - d_M)]\vec{e}_2 \\ & + [(D_{11} - d_M)D_{23} - D_{13}D_{21}]\vec{e}_3 \}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} A_N = [D_{12}(D_{33} - d_N) - D_{13}D_{32}] & [D_{21}(D_{33} - d_N) - D_{31}D_{23}] \\ & + [D_{13}D_{31} - (D_{11} - d_N)(D_{33} - d_N)]^2 \\ & + [(D_{11} - d_N)D_{32} - D_{12}D_{31}][(D_{11} - d_N)D_{23} - D_{13}D_{21}]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Escrevendo \vec{a}_0 em função dos vetores base $\vec{\sigma}_N$ teremos $\vec{a}_0 = \sum_N \alpha_N \vec{\sigma}_N$. Lembrando que $\vec{D} \cdot \vec{a}_0 = 0$ obtemos: $\alpha_{II} = \alpha_{III} = 0$. Portanto, $\vec{a}_0 = \alpha_I \vec{\sigma}_I$. Escrevendo $\vec{\Pi}_\ell$ também em termos desses vetores base obtemos: $\vec{\Pi}_\ell = \sum_M \vec{\Pi}_{\ell M} \vec{\sigma}_M^{-1}$. Logo, a quantidade $|\vec{a}_0 \cdot \vec{\Pi}_\ell|^2$ será dada por

$$|\vec{a}_0 \cdot \vec{\Pi}_\ell|^2 = |\alpha_I|^2 |\vec{\Pi}_{\ell I}|^2 = |\alpha_I|^2 |\vec{\Pi}_\ell \cdot \vec{\sigma}_I|^2. \quad (3.54)$$

Uma forma conveniente de escrever-se a relação de dispersão é dada por (FIDONE; GRANATA; MEYER, 1982; ROSA, 1993):

$$F = \frac{D}{\epsilon_{11}} = n_\perp^4 + \frac{P}{\epsilon_{11}} = 0. \quad (3.55)$$

Sob a hipótese de que exista propagação do raio dentro do plasma, ou seja $|\vec{k}''| \ll |\vec{k}'|$, segue de (3.55) que

$$\begin{aligned} |n_\perp''| & \ll |n_\perp'|, \\ \Im \frac{P}{\epsilon} & \ll \Re \frac{P}{\epsilon_{11}}, \\ F'' & \ll F'. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nessa última expressão \Im e \Re denotam as partes imaginária e real das grandezas, respectivamente. A partir disso podemos expandir F como

$$F(\vec{k}, \vec{x}, \omega, t) \simeq F'(\vec{k}', \vec{x}, \omega, t) + iF''(\vec{k}', \vec{x}, \omega, t) + i\vec{k}'' \cdot \partial_{\vec{k}'} F' = 0, \quad (3.57)$$

de onde se obtém que

$$\begin{aligned} F'(\vec{k}', \vec{x}, \omega, t) &= 0, \\ \vec{k}'' \cdot \partial_{\vec{k}'} F' &= -F''. \end{aligned}$$

A partir do conhecimento da primeira dessas equações podemos construir a trajetória do raio dentro do plasma

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v}_g = -\frac{\partial_{\vec{k}' F''}}{\partial_{\omega F'}}, \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= -\frac{\partial_{\vec{x} F'}}{\partial_{\omega F'}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde \vec{v}_g é a velocidade de grupo da onda.

Usando essas equações podemos calcular a quantidade

$$\vec{k}'' \cdot \frac{\vec{v}_g}{v_g} = \frac{|F''|}{|\partial_{\vec{k}' F'}|}, \quad (3.59)$$

cuja integração ao longo da trajetória do raio nos dá a taxa de absorção de energia pelo meio

$$\int_l \vec{k}'' \cdot \frac{\vec{v}_g}{v_g} dl' = \int_{t_0}^t \vec{k}'' \cdot \vec{v}_g dt'. \quad (3.60)$$

Voltando à equação (3.40), essa pode ser escrita como

$$\partial_{\omega}(\omega d_I) d_t \alpha_I = -\beta \alpha_I, \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \beta &= \overleftrightarrow{\sigma}^{-1} \cdot \left(\partial_{\omega}(\omega \overleftrightarrow{D}) \cdot \partial_t \overleftrightarrow{\sigma}_I + \frac{1}{2} \left[\partial_t [\partial_{\omega}(\omega \overleftrightarrow{D})] \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_I \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [(\partial_{\vec{x}} \overleftrightarrow{\sigma})^T \cdot \partial_{\vec{k}}] \cdot (\omega \overleftrightarrow{D})^T - \frac{1}{2} \left[\partial_{\vec{x}}(\partial_{\vec{k}} \omega \overleftrightarrow{D}) \right] \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_I \right), \right. \\ &\quad \left. d_t = \partial_t + \vec{v} \cdot \partial_{\vec{x}}, \right. \\ &\quad \left. \vec{v} = -[\partial_{\omega}(d_I)]^{-1} \partial_{\vec{k}}(d_I). \right. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Considerando $|\epsilon''_{ij}| \ll |\epsilon'_{ij}|$, então

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -(\partial_\omega F)^{-1} \partial_{\vec{k}} F \simeq -(\partial_\omega F')^{-1} \partial_{\vec{k}'} F' = \vec{v}_g, \\ \vec{\beta}(\vec{k}) &\simeq \vec{\beta}(\vec{k}'), \\ \vec{\sigma}_M^{-1} &= \vec{\sigma}_M^*.\end{aligned}\tag{3.63}$$

A equação (3.61) pode ser escrita como

$$\partial_t U + \partial_{\vec{x}}(\vec{v}_g U) = 0,\tag{3.64}$$

onde

$$U = \frac{1}{16\pi} |\alpha_I|^2 \partial_\omega(\omega d_I)$$

é a densidade de energia.

Sob a hipótese de que a absorção é pequena a derivada temporal em (3.64) pode ser desprezada e podemos aproximar aquela equação por

$$\partial_t U + \partial_{\vec{x}}(\vec{v}_g U) \sim \partial_{\vec{x}} \cdot (\vec{v}_g U) = 0.\tag{3.65}$$

Podemos escrever para um ponto l da trajetória, após integrar (3.65) ao longo da trajetória de um feixe de seção reta A_r :

$$(A_r v_g U)_l = \text{constante} = P_0(k_{0y}, k_{0z}).\tag{3.66}$$

Aqui $P_0(k_{0y}, k_{0z})$ representa o espectro de potência presente na borda do plasma, o qual pode ser escrito na seguinte forma:

$$P_0(k_{0y}, k_{0z}) = P_0 \Gamma(k_{0y}, k_{0z}),\tag{3.67}$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_{0y} dk_{0z} \Gamma(k_{0y}, k_{0z}) = 1,$$

e onde P_0 é a potência total liberada pelas antenas e $\Gamma = \Gamma(k_{0y}, k_{0z})$ é a função que representa a forma do pacote de ondas.

Disso segue que

$$\begin{aligned}(A_r v_g U)_l &\simeq \frac{16\pi}{v_g \partial_\omega(\omega d_I)} P_0 \Gamma(k_{0y}, k_{0z}) \\ &\simeq \frac{16\pi}{\omega} \frac{d_{II} d_{III}}{|\partial_{\vec{k}} D|} P_0 \Gamma(k_{0y}, k_{0z}).\end{aligned}\tag{3.68}$$

Podemos fazer aqui uma hipótese adicional: a de que todas as quantidades de interesse variam pouco sobre a superfície magnética, ou seja, o movimento de translação das partículas ao longo das linhas do campo magnético é tão rápido que existe uma homogeneização de todas as quantidades sobre essa superfície, embora a interação onda-partícula seja localizada espacialmente. Devemos então realizar outra média sobre a equação que nos dá a evolução temporal para f_0 , agora sobre a superfície magnética na qual a energia é depositada. Então: $S = (2\pi)^2 R_0 r$ onde R_0 é o raio maior do toro e r o raio da superfície. Assim, as médias calculadas sobre a superfície podem ser escritas na forma:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{S} \int dS X \simeq \frac{A_r}{S} X. \quad (3.69)$$

No modelo de lâmina utilizado, o pacote de ondas permanece no plano XOZ , sem dispersão na direção Y . Portanto, em um dado ponto sobre a lâmina, temos que: $\Gamma(k_{0y}, k_{0z}) = \delta(k_{0y})\Gamma(k_{\parallel})$ e, pela lei de Snell, o componente paralelo do vetor de onda é constante: $k_{\parallel} = k_{0z}$. Então, a equação para a evolução temporal da função distribuição f_0 pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \partial_t f_0 = & \frac{8\pi^2 e^2 P_0}{\omega S} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} \Gamma(k_{\parallel}) e^{-2 \int_{x_0}^x k'_{\perp} dx'} \left[\frac{d_{II} d_{III}}{\partial_{\vec{k}} D} \right]_{f_{rio}} \\ & \times \frac{\gamma}{p_{\perp}} \hat{R} \frac{p_{\perp}}{\gamma} |\vec{\Pi}_{-\ell} \cdot \vec{\sigma}_I|^2 \delta(\omega - \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}) \hat{R} f_0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

A equação acima pode ser escrita, para um dado harmônico ℓ , como

$$\partial_t f_0 = \frac{1}{\vartheta_{\perp}} L' [\vartheta_{\perp} D_{EC} L f]. \quad (3.71)$$

Os operadores L , L' e o coeficiente de difusão de cíclotron são dados por

$$\begin{aligned} L' &= y \partial_{\vartheta_{\perp}} + \vartheta_{\perp} \partial_{\vartheta_{\parallel}} n_{\parallel}, \\ L &= y \partial_{\vartheta_{\perp}} + n_{\parallel} \vartheta_{\perp} \partial_{\vartheta_{\parallel}}, \\ D_{EC} &= \frac{\alpha h \Gamma}{\gamma |\vartheta_{\parallel}|}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{\vartheta} &= \frac{\vec{p}}{mc}, \\ n_{\parallel} &= \frac{(\gamma - y)}{\vartheta_{\parallel}}, \\ \gamma &= (1 + \vartheta^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$y = \frac{\ell\omega_c}{\omega}.$$

Na expressão do coeficiente de difusão de cíclotron α é uma constante e h apresenta as propriedades dielétricas do meio de polarização da onda.

Uma forma explícita para o coeficiente de difusão da equação (3.70) pode ser obtida através da análise de seus termos.

A forma do pacote de ondas pode ser a de um pacote do tipo gaussiano, ou seja,

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta n_{\parallel}} \exp \left[- \left(\frac{n_{\parallel} - \hat{n}_{\parallel}}{\Delta n_{\parallel}} \right)^2 \right]. \quad (3.72)$$

Explicitemos, também, o termo de polarização (FIDONE; GRANATA; MEYER, 1982; ROSA, 1993),

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{-\ell} \cdot \vec{\sigma}_I = & \left\{ \left[\epsilon_{12}(\epsilon_{33} - n_{\perp}^2 + \epsilon_{23}(\epsilon_{13} + n_{\perp}n_{\parallel})) \right] \Pi_{1,-\ell} \right. \\ & + \left[(\epsilon_{13} + n_{\perp}n_{\parallel})^2 - (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2)(\epsilon_{33} - n_{\perp}^2) \right] \Pi_{2,-\ell} \\ & \left. - \left[\epsilon_{23}(\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2) + \epsilon_{12}(\epsilon_{13} + n_{\perp}n_{\parallel}) \right] \Pi_{3,-\ell} \right\} \\ & \times \left\{ \left[(\epsilon_{13} + n_{\perp}n_{\parallel})^2 - (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2)(\epsilon_{33} - n_{\perp}^2) \right]^2 \right. \\ & \left. - \left[\epsilon_{12}(\epsilon_{33} - n_{\perp}^2) + \epsilon_{23}(\epsilon_{13} + n_{\perp}n_{\parallel}) \right]^2 \right. \\ & \left. - \left[\epsilon_{23}(\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2) + \epsilon_{12}(\epsilon_{13} + n_{\perp}n_{\parallel}) \right]^2 \right\}^{-1/2}. \quad (3.73) \end{aligned}$$

Usando a aproximação de pequeno raio de Larmor podemos tomar apenas o primeiro termo nas expansões assintóticas das funções de Bessel. Então, tomando apenas a contribuição do harmônico fundamental ($\ell = 1$), por ser o de contribuição mais importante, podemos escrever os componentes do vetor $\vec{\Pi}_{-\ell}$ como

$$\Pi_{1,-\ell} = -\frac{\ell J_{-\ell}(\rho)}{\rho} \Rightarrow \Pi_{1,-1} = -\frac{J_{-1}(\rho)}{\rho} = -(-1)^{\ell} \frac{J_1(\rho)}{\rho} = \frac{J_1(\rho)}{\rho}. \quad (3.74)$$

Ou seja,

$$\Pi_{1,-1} \sim \frac{\rho}{2\rho} = \frac{1}{2}. \quad (3.75)$$

Analogamente, temos as seguintes expressões para os componentes do vetor $\vec{\Pi}_{-\ell}$

$$\vec{\Pi}_{2,-1} \sim -\frac{i}{2}, \quad (3.76)$$

$$\vec{\Pi}_{3,-1} \sim \frac{\vartheta_{\parallel}\vartheta_{\perp}}{2y}. \quad (3.77)$$

Com a substituição de (3.75), (3.76) e (3.77) em (3.73), ficamos com

$$\begin{aligned}
\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\epsilon_{12}(\epsilon_{330} - n_{\perp}^2(1 - \chi_{33})) + in_{\perp}^2 \chi_{13}(\chi_{13} + n_{\parallel}) \right] \right. \\
&\quad \left. - i \left[n_{\perp}^2(\chi_{13} + n_{\parallel}) - (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2)(\epsilon_{330} - n_{\perp}^2(1 - \chi_{33})) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\vartheta_{\parallel} \vartheta_{\perp}^2}{y} \left[i\chi_{13}(\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2) + \epsilon_{12}(\chi_{13} + n_{\parallel}) \right] \Pi_{3,-\ell} \right\} \\
&\times \left\{ \left[n_{\perp}^2(\chi_{13} + n_{\parallel})^2 - (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2)(\epsilon_{330} - n_{\perp}^2(1 - \chi_{33})) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - \left[\epsilon_{12}(\epsilon_{330} - n_{\perp}^2(1 - \chi_{33})) + i\chi_{13}n_{\parallel}^2(\chi_{13} + n_{\parallel}) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - n_{\perp}^2 \left[i\chi_{13}(\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2) + \epsilon_{12}(\chi_{13} + n_{\parallel}) \right]^2 \right\}^{-1/2}. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Nesse procedimento foi usado que

$$\begin{aligned}
\epsilon_{13} &= n_{\perp} \chi_{13}, \\
\epsilon_{33} &= \epsilon_{330} + n_{\perp}^2 \chi_{33}, \\
\epsilon_{23} &= i\epsilon_{13}.
\end{aligned}$$

onde os termos χ_{13} , χ_{33} e ϵ_{330} são dados por

$$\begin{aligned}
\chi_{13} &= -\frac{\omega_{pe}^2/\omega\omega_c}{4mc} \sum_{+,-}^{\pm} \int d\vec{p} p_{\parallel}^2 p_{\perp} L^{\pm} f_0, \\
\chi_{33} &= \frac{\omega_{pe}^2 \omega_c^2}{4m^2 c^2} \sum_{+,-}^{\pm} \int d\vec{p} p_{\parallel}^2 p_{\perp} L^{\pm} f_0, \\
\epsilon_{330} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2}.
\end{aligned}$$

Passemos agora ao cálculo de $\left[\frac{d_{II} d_{III}}{|\partial_{\vec{k}} D|} \right]_{frio}$. O índice '*frio*' aqui indica que devemos utilizar a relação de dispersão de plasma frio ao calcular essa expressão. Começemos pelo cálculo da quantidade $\partial_{\vec{k}} D$.

Como já vimos, a relação de dispersão é dada pela Eq. (3.48). Usando a aproximação de plasma frio,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} = \epsilon_{22} &= 1 - \frac{X}{1 - y^2}, \\
\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} &= iy \frac{X}{1 - y^2}, \\
\epsilon_{33} &= 1 - X, \\
\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} &= 0,
\end{aligned}$$

$$X = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2},$$

podemos obter

$$\begin{aligned} |\partial_{\vec{k}} D| &= \left| \frac{c}{\omega} [\partial_{n_{\perp}} D \vec{e}_1 + \partial_{n_{\parallel}} D \vec{e}_3] \right|, \\ |\partial_{\vec{k}} D| &= \frac{2c}{\omega} \left\{ n_{\perp}^2 [2n_{\perp}^2 \epsilon_{11} + n_{\parallel}^2 (\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) - \epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{33}]^2 \right. \\ &\quad \left. + n_{\parallel}^2 [n_{\perp}^2 (\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) - 2\epsilon_{33} (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2)]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

O produto $d_{II} d_{III}$ pode ser expresso de (3.50) como

$$\begin{aligned} d_{II} d_{III} &= (\epsilon_{11} - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2) [(\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2) + (\epsilon_{33} - n_{\perp}^2)] \\ &\quad + (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2)(\epsilon_{33} - n_{\perp}^2) + \epsilon_{12}^2 - n_{\perp}^2 n_{\parallel}^2. \end{aligned} \quad (3.80)$$

A delta de Dirac que aparece na integral da equação (3.70) pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \delta\left(\omega - \frac{\omega_c}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}\right) &= \frac{1}{\omega} \delta\left(1 - \frac{y}{\gamma} - \frac{n_{\parallel} v_{\parallel}}{c}\right), \\ &= \frac{\gamma}{\omega} \delta(\gamma - y - n_{\parallel} \vartheta_{\parallel}), \\ &= \frac{\gamma}{\omega} \delta\left[\vartheta_{\parallel} \left(n_{\parallel} - \frac{\gamma - y}{\vartheta_{\parallel}}\right)\right] \\ \text{ou } \delta\left(\omega - \frac{\omega_c}{\gamma} - k_{\parallel} v_{\parallel}\right) &= \frac{\gamma}{\omega |\vartheta_{\parallel}|} \delta(n_{\parallel} - n_{\parallel}^*) \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde $n_{\parallel}^* = (\gamma - y)/\vartheta_{\parallel}$ e $dk_{\parallel} = (\omega/c)dn_{\parallel}$. Cabe destacar que neste texto usaremos os símbolos N_{\parallel} e n_{\parallel} para ondas LH e EC, respectivamente.

A partir desse resultados e usando a relação

$$\int dk f(k) \partial_y [g(k) h(y) \delta(k - y)] = \partial_y [f(x) g(y) h(y)],$$

podemos escrever a equação que governa a evolução temporal da função distribuição de fundo, f_0 , como

$$\begin{aligned} \partial_t f_0 &= \frac{2\pi^2 e^2 P_0}{S\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dn_{\parallel} \frac{\omega}{c} \Gamma(n_{\parallel}) e^{-2 \int_{x_0}^x k'_{\perp} dx'} \left[\frac{d_{II} d_{III}}{|\partial_{\vec{k}} D|} \right]_{frio} \\ &\quad \times \frac{1}{p_{\perp}} L_{-1}^* p_{\perp} |2\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I|^2 \frac{\gamma}{\omega |\vartheta_{\parallel}|} \delta(n_{\parallel} - n_{\parallel}^*) L_{-1} f_0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Usando a delta de Dirac

$$\partial_t f_0 = \left\{ \frac{2\pi^2 e^2 P_0}{S\omega} \frac{1}{p_\perp} L_{-1}^* \Gamma(n_\parallel) e^{-2 \int_{x_0}^x k'_\perp dx'} \left[\frac{d_{II} d_{III}}{|\partial_{\vec{k}} D|} \right]_{frio} \right. \\ \left. \times p_\perp |2\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I|^2 \frac{\gamma}{\omega |\vartheta_\parallel|} L_{-1} f_0 \right\}_{n_\parallel = n_\parallel^*}. \quad (3.83)$$

Os operadores L_{-1} e L_{-1}^* são dados por

$$L_{-1} = \frac{1}{\gamma mc} [y \partial_{\vartheta_\perp} + n_\parallel \vartheta_\perp \partial_{\vartheta_\parallel}], \\ = \frac{1}{\gamma mc} L; \\ L_{-1}^* = \frac{1}{\gamma mc} [y \partial_{\vartheta_\perp} + \vartheta_\perp \partial_{\vartheta_\parallel} n_\parallel], \\ = \frac{1}{\gamma mc} L'. \quad (3.84)$$

Com isso, obtemos a expressão para a evolução temporal da função distribuição de fundo em termos dos operadores L e L'

$$\partial_t f_0 = \left[\frac{8\pi^2 e^2 P_0}{\omega^2 S m^2 c^2} \frac{1}{\vartheta_\perp} L' \Gamma(n_\parallel) e^{-2 \int_{x_0}^x k''_\perp dx'} \frac{|b| \vartheta_\perp |\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I|^2}{|\vartheta_\parallel| \gamma} L f_0 \right]_{n_\parallel = n_\parallel^*}, \quad (3.85)$$

onde $|b| \equiv \left[\frac{d_{II} d_{III}}{|\partial_{\vec{k}} D|} \right]_{frio}$.

Comparando a equação (3.85) com a equação (3.71), temos que o coeficiente de difusão de cíclotron D_{EC} é dado por

$$D_{EC} = \left[\frac{8\pi^2 e^2 P_0}{\omega^2 S m^2 c^2} \Gamma(n_\parallel) e^{-2 \int_{x_0}^x k''_\perp dx'} \frac{|b| \vartheta_\perp |\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I|^2}{|\vartheta_\parallel| \gamma} \right]_{n_\parallel = n_\parallel^*}, \\ e \quad \alpha = 8\pi^2 \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{P_0}{\omega S c}, \\ h = \frac{c}{\omega} |b| |\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I|^2 \exp(-2 \int_{x_0}^x k''_\perp dx'). \quad (3.86)$$

Podemos, finalmente, escrever a equação para o termo de cíclotron em termos das variáveis normalizadas τ e \vec{u} definidas por: $\tau = t\nu_e$ e $\vec{u} = \vec{p}/(mT_e)^{1/2}$, onde ν_e é a frequência de colisões dos elétrons dada por $n\nu_e = 2\pi e^4 \Lambda / (m_e^{1/2} T_e^{3/2})$. n_e é a densidade de elétrons no centro da lâmina ($s = 0$), T_e a temperatura eletrônica em ($s = 0$), e é a carga dos elétrons e Λ o logaritmo coulombiano calculado no centro da lâmina. Em

termos dessas variáveis o termo de ciclotron é escrito como (ROSA, 1993)

$$\begin{aligned}\partial_\tau f_0 &= \frac{1}{u_\perp} L' [u_\perp D_{EC} L f_0], \\ L &= y \partial_{u_\perp} + n_\parallel \frac{u_\perp}{\sqrt{\nu}} \partial_{u_\parallel}, \\ L &= y \partial_{u_\perp} + \frac{u_\perp}{\sqrt{\nu}} \partial_{u_\parallel} n_\parallel.\end{aligned}\tag{3.87}$$

e $\nu = m_e c^2 / T_e$. O termo α que aparece na expressão do coeficiente de difusão de ciclotron será dado por

$$\alpha = \frac{4\pi}{e^2} \frac{P_0}{S n_e \Lambda \omega}.$$

3.5 Teoria quase-linear da onda híbrida inferior

Nesta secção, obteremos uma equação para a evolução temporal quase-linear da função distribuição f_0 sob a ação da onda híbrida inferior a partir da equação (3.34), repetida aqui por conveniência

$$\partial_t f_0 = \frac{\pi e^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_{0y} dK_{0z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{p_\perp} \hat{R} \frac{p_\perp}{\gamma} |\vec{E} \cdot \vec{\Pi}_\ell|^2 e^{-2 \int_{x_0}^x \vec{K}'' \cdot d\vec{x}} \delta(\omega + \frac{\ell \omega_c}{\gamma} - K_\parallel v_\parallel) \hat{R} f_0, \tag{3.88}$$

$$\vec{\Pi}_\ell = \frac{\ell J_\ell(\rho)}{\rho} \vec{e}_x + i J'_\ell(\rho) \vec{e}_y + \frac{p_\parallel}{p_\perp} J_\ell(\rho) \vec{e}_z, \tag{3.89}$$

$$\hat{R} = -\frac{\ell \omega_c}{\gamma \omega} \partial_{p_\perp} + \frac{K_\parallel v_\perp}{\omega} \partial_{p_\parallel} \tag{3.90}$$

Supomos que as ondas LH não tenham propagação na direção Y , de modo que o pacote de ondas possa ser considerado proporcional a $\delta(K_y)$. Dessa forma a integração em K_y se torna trivial, restando executar a integração em K_z . Observemos que temos no elemento de integração K_{0y} e K_{0z} , pois queremos o valor na borda do plasma nas direções Y e Z . O processo de absorção via amortecimento de Landau é descrito por $\ell = 0$. Além disso, $\vec{E} \simeq E_\parallel \vec{e}_3$.

O componente de \vec{E} paralelo a \vec{B}_0 é obtido de

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = 0 \tag{3.91}$$

o que nos leva a

$$E_\parallel = E \frac{D_{11} D_{22} - |D_{12}|^2}{A^{1/2}}, \tag{3.92}$$

onde E é a amplitude do campo elétrico,

$$A = |D_{13}D_{22} - D_{12}D_{23}|^2 + |D_{23}D_{11} - D_{12}^*D_{13}|^2 + |D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2|^2, \\ D_{ij} = N_i N_j - N^2 \delta_{ij} + \epsilon_{ij}.$$

Nessas equações foi usada a aproximação de plasma frio.

O espectro do fluxo de energia em um determinado ponto é dado por

$$E^2 \simeq \frac{16\pi}{\omega} \left[\frac{d_{II}d_{III}}{|\partial_{\vec{K}}D|} \right]_{frio} \frac{P_0(K_{0y}, K_{0z})}{A_r} \quad (3.93)$$

onde E é a amplitude da onda e A_r é a seção reta da trajetória do feixe de raios.

No processo de propagação da onda híbrida podemos considerar que existe uma distribuição uniforme da energia da onda sobre uma determinada superfície magnética.

Se definirmos como S a densidade espectral de energia

$$S(K_y, K_z) \equiv \frac{P_0(K_y, K_z)}{A_r} \quad (3.94)$$

com $\int S(K_y, K_z) dK_y dK_z = S_0$, onde S_0 é a densidade de energia no espaço real, para um espectro descrito por uma $\delta(K_y)$ na direção y e por uma função $S(N_{\parallel})$ em z , teremos que

$$S(N_{\parallel}) \equiv \frac{P_0(K_y, K_z)}{A_r} = \frac{c}{16\pi} \left[\frac{|\partial_{\vec{K}}D|}{d_{II}d_{III}} \right]_{frio} E^2. \quad (3.95)$$

Nessa expressão o produto $d_{II}d_{III}$ é dado pela equação (3.80), dentro da aproximação de plasma frio,

$$B \equiv d_{II}d_{III} = D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2 + D_{11}D_{33} - |D_{13}|^2 + D_{22}D_{31} + D_{22}D_{33} - |D_{23}|^2. \quad (3.96)$$

A substituição de (3.96) e (3.92) em (3.95) nos leva a uma expressão para o componente paralelo do vetor campo elétrico da onda em termos da densidade de energia presente em uma dada posição da lâmina e das propriedades dielétricas do meio

$$|E_{\parallel}|^2 = \frac{16\pi}{c} S(N_{\parallel}) \frac{B}{A} \frac{|D_{11}D_{22} - |D_{12}|^2|^2}{|\partial_{\vec{N}}D|}. \quad (3.97)$$

A delta de Dirac que aparece na equação (3.88) pode ser reescrita como

$$\delta(\omega - K_{\parallel}v_{\parallel}) = \frac{c}{\omega|u_{\parallel}|} \delta(N_{\parallel} - \frac{\nu^{1/2}}{u_{\parallel}}). \quad (3.98)$$

Aqui foi tomado $\gamma \simeq 1$, $u_{\parallel} = p_{\parallel}/(mT_e)^{1/2}$ e $\nu = mc^2/T_e$. Analisando o termo que inclui a função delta de Dirac na equação (3.88), concluimos que o único valor de ℓ que satisfaz a frequência da onda na faixa da híbrida inferior ($\omega_{ci} \ll \omega_h \ll |\omega_c|$) é $\ell = 0$, restando somente os termos para esse valor, onde ω_{ci} e ω_c são as frequências de ciclotron de íons e de elétrons, respectivamente. Ao fazer a aproximação de pequeno raio de Larmor⁶,

$$|\rho_e| = \frac{K_{\perp} v_{\perp}}{|\omega_c|} \gamma \ll 1, \quad (3.99)$$

as funções de Bessel serão

$$J_0(|\rho|) \simeq 1 + O(|\rho|), \quad (3.100)$$

$$J'_0(|\rho|) = -J_1(|\rho|) \simeq O(|\rho|). \quad (3.101)$$

Assim, o operador diferencial que aparece em (3.88) se resume a

$$\hat{R} = \frac{K_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \partial_{p_{\parallel}}. \quad (3.102)$$

A substituição de (3.97), (3.98), (3.102) em (3.88) resulta em

$$\partial_t f_0 = \partial_{p_{\parallel}} \left[\frac{\pi e^2}{2} \left(\frac{K_{\parallel}}{\omega} \right)^2 \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} |E_{\parallel}|^2 \frac{1}{\omega |u_{\parallel}|} \right]_{N_{\parallel} = \frac{\nu^{1/2}}{u_{\parallel}}} \partial_{p_{\parallel}} f_0. \quad (3.103)$$

Calculando o produto $\frac{K_{\parallel}^2 p_{\parallel}^2}{\omega^2 m^2}$ na ressonância, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{K_{\parallel}^2 p_{\parallel}^2}{\omega^2 m^2} &= \frac{c^2 K_{\parallel}^2}{\omega^2} \frac{1}{c^2} \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} \\ &= \frac{N_{\parallel}^2}{c^2} \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} = \frac{\nu}{u_{\parallel}^2} \frac{p_{\parallel}^2}{(mc)^2} \\ &= \frac{mc^2}{T_e} \frac{1}{u_{\parallel}^2} \frac{p_{\parallel}^2}{(mc)^2} = \frac{p_{\parallel}^2}{mT_e u_{\parallel}^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

A equação (3.103) é, portanto, reescrita como

$$\partial_t f_0 = \partial_{p_{\parallel}} \left[\frac{\pi e^2}{2\omega} \frac{1}{|u_{\parallel}|} |E_{\parallel}|^2 \right]_{N_{\parallel} = \frac{\nu^{1/2}}{u_{\parallel}}} \partial_{p_{\parallel}} f_0. \quad (3.104)$$

⁶Estamos considerando que o raio de órbita das partículas é bem menor que o comprimento de onda das ondas incidentes.

Em termos do tempo normalizado τ a equação (3.104) tem seguinte forma

$$\partial_\tau f_0 = \partial_{u_\parallel} [D_{LH} \partial_{u_\parallel} f_0] \quad (3.105)$$

onde D_{LH} é o coeficiente de difusão da onda híbrida inferior e é dado por (FIDONE et al., 1984)

$$D_{LH}(u_\parallel) = \frac{4\pi}{e^2 n_e \omega \Lambda |u_\parallel|} \left[\left| \frac{B}{A} \right| \frac{|D_{11} D_{22} - |D_{12}|^2|^2}{|\partial_{\vec{N}} D|} S(N_\parallel) \right]_{N_\parallel = \frac{v^{1/2}}{u_\parallel}}. \quad (3.106)$$

3.6 Algumas considerações sobre a teoria quase-linear para as ondas EC e LH

Como vimos nas seções anteriores, a variação temporal da função distribuição pode ter duas formas diferentes de equação de difusão: uma para ondas eletrônicas de cíclotron (EC) e outra para ondas híbridas inferiores (LH).

Isso se deve evidentemente às propriedades de propagação dos dois tipos de onda. Vamos, retomando as derivações acima, listar as principais diferenças:

- O pacote de ondas LH pode ser descrito por uma delta na direção \vec{e}_2 :
Podemos definir $\tilde{S}(N_\parallel) \delta(K_y)$, ou seja, $S_0 = \int S(K_y, K_z) dK_y dK_z = \frac{\omega}{c} \int S(N_\parallel) dN_\parallel$.
Com isso, a integral na equação (3.88) é tomada apenas na direção \vec{e}_3 .
- No amortecimento de Landau (caso da onda LH), a ressonância ocorre para partículas com velocidade paralela próxima a velocidade de fase da onda, não importando o movimento que a partícula executa em torno das linhas de campo magnético (movimento de cíclotron): $\ell = 0$; para ondas EC esse movimento tem influência na ressonância.
- As ondas LH têm polarização predominantemente ao longo da direção do campo magnético ambiente, de modo que podemos tomar $|\vec{E}_0 \cdot \vec{\Pi}_s|^2$ como sendo proporcional a E_\parallel^2 .

O exposto acima trata mais da diferença que ocorre durante a derivação das equações de difusão. Entretanto, a diferença real entre os dois tipos de ondas está no fenômeno que determina a frequência em que a onda entra em ressonância com a partícula transmitindo-lhe energia/momentum. A fim de tentar esclarecer melhor isso vamos colocar algumas considerações tiradas de (LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1981).

No caso da onda LH, temos o mecanismo do amortecimento de Landau (*Landau damping*): transferência de energia do campo eletromagnético da onda para partículas movendo-se em fase com a onda⁷. Uma boa explicação para o significado de *Amortecimento de Landau* pode ser visto em (CHEN, 1974) como vemos no texto que segue.

As "partículas ressonantes" são as partículas da distribuição que possuem velocidade próxima a velocidade de fase da onda. Essas partículas viajam junto com a onda e não vêem a rápida flutuação do campo elétrico. Desta forma, tais partículas podem trocar energia com a onda eficientemente. Para entender melhor essa troca de energia imaginamos um surfista tentando pegar uma onda no oceano. Se a prancha não se move, o surfista meramente sobe e desce enquanto a onda passa e não ganha nenhuma energia em média. Da mesma forma, um barco propelido que navegue mais rápido que a onda não pode trocar muita energia com a onda. Contudo, se a prancha tiver quase que a mesma velocidade que a onda, ela pode ser capturada e empurrada pela onda; isto é, depois de tudo, o principal propósito do exercício. Nesse caso, a prancha ganha energia, e portanto, a onda perde energia e é amortecida. Por outro lado, se a prancha estiver se movendo levemente mais rápido que a onda, ela poderá empurrar a onda quando se move para cima dela. Em um plasma, existem elétrons com velocidades tanto mais rápidas como mais lentas que a onda. No caso de uma distribuição Maxwelliana, existem mais elétrons lentos do que rápidos. conseqüentemente, há mais partículas recebendo energia da onda que vice-versa, e a onda é amortecida.

Agora falemos um pouco de outro amortecimento de Landau que ocorre em plasmas magnetizados. Nesses plasmas, há um mecanismo a mais de dissipação sem colisão devido à rotação de Larmor das partículas. Em um referencial movendo-se com a partícula à velocidade v_z ao longo do campo \vec{B}_0 , as partículas movem-se em órbita circular com frequência ω_B . Desta forma, essas partículas são eletrodinamicamente um oscilador radiando na frequência ω_B (radiação de *synchrotron*). Quando um oscilador é colocado em um campo externo variável, este oscilador absorve nessa frequência. A frequência da onda eletromagnética em um referencial movendo-se em relação ao plasma é modificada pelo efeito Doppler e é $\omega' = \omega - k_z v_z$. As partículas que absorveram energia da onda serão aquelas para as quais $\omega - k_z v_z = \ell \omega_B$, onde ℓ é qualquer inteiro positivo ou negativo. Esse mecanismo de dissipação é chamado de amortecimento cíclotron de Landau (*Landau cyclotron damping*) e a ressonância de cíclotron é simples ($\ell = \pm 1$) ou múltipla de acordo com o valor de ℓ .

⁷O amortecimento envolve partículas para as quais $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$, i.e. o componente da velocidade \vec{v} na direção de \vec{k} é igual à velocidade de fase ω/k da onda.

3.7 Teoria quase-linear com colisões

Colisões entre partículas geram difusão no plasma e outros processos de transporte além da transferência de energia entre partículas. Nesta seção, vamos apresentar algumas considerações sobre o termo de colisões de Fokker-Planck, utilizado neste trabalho, deixando sua derivação para o apêndice (A).

Citando Wesson (WESSON, 2004), o cálculo desses processos de colisão é complexo devido a:

- O conceito de colisão em um plasma é bastante sutil;
- Colisões entre partículas dependem de suas velocidades relativas e o resultado global da colisão é o efeito integrado de interações entre partículas de todas as velocidades;
- A frequência de colisão efetiva depende do processo em consideração.

Retomemos, agora, a equação de Vlasov (3.2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} f = 0. \quad (3.107)$$

Esta é uma equação que governa o comportamento de um plasma na ausência de colisões. A inclusão de colisões requer a adição de um termo $(\partial f / \partial t)_c$ no lado direito da equação (3.107). Se as colisões em um plasma fossem colisões fortes, localizadas no espaço e no tempo, seria apropriado usar a forma do termo de colisão de Boltzmann. A equação cinética colisional própria para um plasma é a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \frac{e_j}{m_j} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{COL} \quad (3.108)$$

na qual o termo de colisões é derivado com base em colisões múltiplas de pequenos ângulos.

No apêndice (A), partimos de uma expressão para o termo de colisões de Fokker-Planck derivada por Landau (LANDAU, 1937) e, então, derivamos a expressão mais comumente usada na literatura (KRIVENSKI et al., 1987).

3.8 Teoria quase-linear com campo elétrico

Vamos fazer um breve comentário sobre a formulação para descrever o efeito do campo elétrico toroidal indutivo⁸, baseados em (PARAIL; POGUTSE, 1966). Destaque-se que no presente trabalho não será considerado este efeito.

A presença desse campo é uma propriedade importante de dispositivos como os tokamaks e inevitavelmente conduz à fuga de elétrons do plasma do tokamak (*runaway electrons*). O fenômeno de fuga de elétrons é um dos efeitos clássicos da Teoria Cinética de Gases Ionizados, pois constitui-se numa conseqüência direta do longo alcance para o espalhamento de pequenos ângulos das colisões de Coulomb de partículas carregadas. Esse aspecto específico das interações de Coulomb causa uma rápida diminuição na seção de choque (*cross section*)⁹ para espalhamento de partículas carregadas, σ , com crescimento da velocidade, $\sigma \sim v^{-4}$. Assim, a força de fricção dinâmica para elétrons rápidos não consegue compensar a aceleração induzida pelo campo elétrico e tais partículas são continuamente aceleradas.

Tokamaks, geralmente, operam em regimes de campo elétrico fraco onde a desigualdade $E \ll E_D$ se aplica. E_D é chamado campo de Dreicer¹⁰ ($E_D = 4\pi e^3 \frac{n_e}{T_e} \ln \lambda$) e E/E_D aproximadamente menor que 0,1. Neste caso, uma considerável fração exponencialmente pequena de elétrons é acelerada continuamente.

Dentro dessas condições, somente elétrons super-térmicos com $v \gg v_{Te}$ são continuamente acelerados, assim, para uma dada função distribuição de tais elétrons, é suficiente usar uma equação cinética simplificada com uma integral de colisão linearizada, que não leve em conta as colisões mútuas entre elétrons rápidos. Em um plasma completamente ionizado e infinito com $Z = 1$ colocado em um campo elétrico homogêneo e constante E , pode-se escrever a seguinte equação para a evolução da função distribuição em coordenadas esféricas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{COL} \quad (3.109)$$

Aqui θ é o ângulo entre \vec{E} e \vec{v} . O termo do lado direito representa o efeito de colisões.

⁸Este campo elétrico indutivo é o que gera a corrente que flui ao longo da coluna do plasma produzindo os efeitos de aquecimento e confinamento do plasma em tokamaks, mencionados nos capítulos anteriores.

⁹É definida como o número de partículas espalhadas por unidade de tempo, por unidade de fluxo incidente e por unidade de ângulo sólido em uma determinada direção.

¹⁰O campo de Dreicer é o campo em que um elétron com energia $mu^2/2 = T_e$ dobra a sua velocidade em um tempo livre médio (*mean free time*) entre duas colisões.

Introduzindo-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$\mu = \cos \theta, \quad u = \frac{v}{\sqrt{T_e/m}}, \quad \tau = \nu_e \left(\sqrt{\frac{T_e}{m}} \right) t,$$

pode-se chegar à forma

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{E}{E_D} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1 - \mu^2}{u} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{COL} \quad (3.110)$$

A expressão acima foi colocada aqui com o intuito de ilustrar a formulação da Teoria Quase-Linear com a presença de campo elétrico e elétrons *runaway*, mas não será empregada neste trabalho.

3.9 Teoria quase-linear com transporte

Nesta secção, vamos fazer uma apresentação do termo de transporte devido a flutuações. Acredita-se que o transporte anômalo (irregular) é devido à difusão turbulenta causada por flutuações no plasma. Estas flutuações podem ser eletrostáticas ou eletromagnéticas, e espera-se que apareçam como um estado não-linear saturado de uma ou mais microinstabilidades que são previstas em tokamaks (WESSON, 2004).

A quantidade líquida total da grandeza $\chi(\vec{x}, \vec{v}, t)$ das partículas do tipo α que passa por uma unidade de área em uma unidade de tempo, é o fluxo na direção \hat{n} (normal à área) $\Phi_{\alpha n}(\chi)$ dado por

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = \int_v \chi(\vec{x}, \vec{v}, t) f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) \hat{n} \cdot \vec{v} d^3v \quad (3.111)$$

Lembrando-se que o valor médio da propriedade $\chi(\vec{x}, \vec{v}, t)$ para partículas do tipo α é:

$$\langle \chi(\vec{x}, \vec{v}, t) \rangle_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}(\vec{x}, t)} \int_v \chi(\vec{x}, \vec{v}, t) f_{\alpha} d^3v, \quad (3.112)$$

podemos escrever

$$\Phi_{\alpha n}(\chi) = n_{\alpha}(\vec{x}, t) \langle \chi(\vec{x}, t) \hat{n} \cdot \vec{v} \rangle_{\alpha} = n_{\alpha} \langle \chi v_n \rangle_{\alpha}, \quad (3.113)$$

onde $v_n = \hat{n} \cdot \vec{v}$ denota a componente de \vec{v} ao longo da direção especificada pelo vetor unitário \hat{n} (BITTENCOURT, 2003).

O fluxo de partículas (densidade de corrente de partículas) é definido como o número de partículas que passam através de uma dada superfície, por unidade de área e por uni-

dade de tempo. Desta forma, tomando-se $\chi(\vec{x}, \vec{v}, t) = 1$, obtém-se o fluxo de partículas¹¹ na direção \hat{n} .

$$\Gamma(\vec{x}, t) = \langle nv_n \rangle. \quad (3.114)$$

As flutuações turbulentas produzem uma velocidade de deriva (*drift velocity*) $\vec{E} \times \vec{B}$

$$\delta v_{\perp} = \frac{\delta E_{\perp}}{B}, \quad (3.115)$$

que combinando com a densidade de flutuações δn fornece o fluxo de partículas

$$\Gamma = \langle \delta v_{\perp} \delta n \rangle \quad (3.116)$$

onde as flutuações do campo elétrico podem ser tanto eletrostáticas como eletromagnéticas (WESSON, 2004).

No caso de existirem flutuações magnéticas δB com uma mudança associada na topologia magnética, a velocidade paralela perturbada δv_{\parallel} , paralela ao campo magnético, combina-se com o campo magnético radial δB_r , para fornecer o fluxo

$$\Gamma = \frac{n}{B} \langle \delta v_{\parallel} \delta B_r \rangle. \quad (3.117)$$

A abordagem teórica do transporte induzido por turbulência é que a energia livre liberada por uma instabilidade gera um nível estável de flutuações em uma quantidade associada perturbada. Neste estado turbulento flutuações resultam em um transporte radial de partículas e energia.

Faz-se, então, uma descrição teórica em um de dois níveis (WESSON, 2004). No primeiro, o comportamento que forma a base da instabilidade pode ser tomado como dado, e calcula-se o transporte formado das flutuações eletromagnéticas δE e δB . Neste procedimento, a caminhada aleatória (*random walk*) é estimada pelo transporte turbulento surgido da flutuação δv_{\perp} da velocidade de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ e pelo movimento paralelo ao longo das linhas de campo magnético estocásticas que são dados.

No segundo, é possível tentar calcular um estado não-linear saturado das micro-instabilidades e, então, o transporte resultante. Existem vários procedimentos possíveis disponíveis dos quais podemos citar o uso da invariância de escala - teoria de turbulência forte em que considera-se que a saturação ocorre quando o gradiente perturbado $\nabla \delta n$ é comparável ao gradiente de equilíbrio ∇n , entre outros procedimentos. Uma abordagem

¹¹A partir daqui não usaremos o subscrito α para especificar o tipo de partícula desde que estará sendo sempre considerado elétrons a menos que se especifique.

alternativa é o balanço entre o crescimento linear de turbulência fraca de um comprimento de onda particular contra o seu decaimento devido a espalhamento não-linear para outros comprimentos de onda. Ainda, a simulação computacional do transporte turbulento baseado em equações fundamentais de plasma oferece um procedimento mais exato.

Em termos de uma descrição cinética temos a equação de difusão quase-linear dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial}{\partial x} \right) f, \quad (3.118)$$

onde $D_T = D_E + D_M$, e o fluxo de partículas é dado por

$$\Gamma = -D_\perp \frac{\partial}{\partial x} n, \quad (3.119)$$

onde $n = \int f d^3v$.

Assim, temos as seguintes expressões para os coeficientes de transporte eletrostático e magnético, respectivamente

$$D_E = \sum_k \left(\frac{k_\perp \delta\phi_k}{B} \right)^2 \tau_k = \sum_k \left(\frac{\delta E_k}{B} \right)^2 \tau_k, \quad (3.120)$$

$$D_M = \sum_k \left(\frac{\delta B_{r,k}}{B} \right)^2 |v_\parallel| L_{c,k}. \quad (3.121)$$

Observe-se que as flutuações foram escritas em termos de seus componentes de Fourier $\delta\phi = \sum_k \delta\phi_k e^{ik \cdot x}$. O subscrito r em $B_{r,k}$ significa radial.

O tempo de correlação τ_k pode ser expresso por $\tau_k = L_{c,k}/|v_\parallel|$, e (3.120) fica

$$D_E = \sum_k \left(\frac{\delta E_k}{B} \right)^2 \frac{L_{c,k}}{|v_\parallel|}, \quad (3.122)$$

Usando a definição $L_{c,k} = 2\pi q R_0$ para expressar o comprimento de correlação, podemos escrever as equações (3.122) e (3.121) como segue.

$$D_e = \frac{2\pi q R_0 c^2}{|v_\parallel|} \tilde{e}^2, \quad (3.123)$$

$$D_m = 2\pi q R_0 |v_\parallel| \tilde{b}^2, \quad (3.124)$$

em que ainda foi usado

$$\tilde{e}^2 = \sum_k \left(\frac{\delta E_k}{cB} \right)^2, \quad (3.125)$$

$$\tilde{b}^2 = \sum_k \left(\frac{\delta B_{r,k}}{B} \right)^2. \quad (3.126)$$

Tomando as definições $u_{\parallel} = p_{\parallel}/(m_e T_{e0})^{1/2}$ e a relação $|v_{\parallel}| = c|u_{\parallel}|/(\gamma\mu_{e0}^{1/2})$, temos:

$$D_e = \frac{2\pi q R_0 \gamma \mu_{e0}^{1/2}}{c|u_{\parallel}|} \tilde{c}^2, \quad (3.127)$$

$$D_m = \frac{2\pi q R_0 c |u_{\parallel}|}{\gamma \mu_{e0}^{1/2}} \tilde{b}^2. \quad (3.128)$$

Normalizando ao tempo de colisões, $\tau = t\nu_{e0}$, podemos escrever os coeficientes de transporte na forma que usamos neste trabalho (RECHESTER; ROSENBLUTH, 1978; DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000; GIRUZZI et al., 1996)

$$D_e = \frac{2\pi q R_0 \gamma \mu_{e0}^{1/2}}{\nu_{e0} c |u_{\parallel}|} \tilde{c}^2, \quad (3.129)$$

$$D_m = \frac{2\pi q R_0 c |u_{\parallel}|}{\nu_{e0} \gamma \mu_{e0}^{1/2}} \tilde{b}^2, \quad (3.130)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_{e0} &= \frac{m_e c^2}{T_{e0}}, \\ \nu_{e0} &= \frac{2\pi e^4 n_{e0} \Lambda_0}{\sqrt{m_e} T_{e0}^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

4 *Emissão de radiação de cíclotron*

Uma derivação da intensidade de radiação de cíclotron emitida por um plasma finito e não-homogêneo, conforme o que usamos em nosso modelo, pode ser encontrada na tese de Doutorado de Ziebell (ZIEBELL, 1983). Não cabe, aqui, fazer uma revisão detalhada desse desenvolvimento, de modo que apresentaremos apenas alguns passos importantes que permitam o entendimento das grandezas envolvidas e o estabelecimento da notação e nomenclatura.

4.1 Modelo utilizado

No nosso modelo o plasma se constitui de uma lâmina que é considerada infinita nas direções dos eixos OY e OZ e se estende de $-a$ a $+a$ na direção X . O campo magnético é paralelo às faces. O sistema de referência é tomado de modo que o eixo OZ fique paralelo ao campo magnético e o eixo OX perpendicular às faces da lâmina.

O meio é suposto estacionário e homogêneo nas direções Y e Z . Já na direção X , supomos que o campo magnético e outros parâmetros do plasma podem apresentar não-homogeneidades suaves, i.e., as distâncias típicas de variação dos parâmetros são muito maiores do que os comprimentos de onda envolvidos.

A propagação das ondas eletromagnéticas obedece a lei de Snell, de modo que a componente do vetor de onda paralelo ao campo magnético (k_{\parallel}) se mantém constante ao longo do trajeto¹. Os modos de propagação são encontrados através de uma relação de dispersão que fornece o componente perpendicular do vetor de onda (k_{\perp}) como função de ω e dos demais parâmetros relevantes.

¹Segundo a Lei de Snell, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Lembrando que $n = ck/\omega$, fica claro de ver que $k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = k_{\parallel} = \text{constante}$.

4.2 Intensidade da radiação

O valor médio do vetor de Poynting é igual à intensidade da onda eletromagnética e é dado por

$$\vec{S}_m(\vec{r}_1) = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}(\vec{r}_1, t) \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) \rangle. \quad (4.1)$$

onde $\vec{r}_1 = (\pm a, Y, Z)$ e os campos \vec{E} e \vec{B} são obtidos das equações de Maxwell, $\langle \dots \rangle$ representa uma média de *ensemble*² sobre as flutuações microscópicas dos campos.

Das equações de Maxwell, temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Supomos que \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} e \vec{J} podem ser escritos da seguinte forma:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \vec{A}(k_y, k_z, \omega, x) e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (4.3)$$

onde $\vec{A}(k_y, k_z, \omega, x)$ representa uma amplitude cuja dependência predominante em posição é da forma $\exp(i \int^x k_x dx')$, com $k_x = k_x(k_y, k_z, \omega, x)$ obtida a partir de uma relação de dispersão.

O que nos permite escrever

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B} \rightarrow \vec{B} = c \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}. \quad (4.4)$$

Assim, o produto vetorial que está na equação (4.1) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{E}(\vec{r}_1, t) \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) = \frac{c}{\omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{c}{\omega} [(\vec{E} \cdot \vec{k})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{E})\vec{k}] = \frac{c}{\omega} (\vec{E} \cdot \vec{E})\vec{k}, \quad (4.5)$$

onde o último passo se justifica desde que o campo elétrico é perpendicular ao vetor de onda na borda da lâmina ($\vec{r} = \vec{r}_1$).

Aplicando-se a expressão 4.3 para o campo \vec{E} , temos

$$\begin{aligned} \vec{S}_m(\vec{r}_1) &= \frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk'_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \\ &\quad \times \frac{\vec{k}(\vec{k}'_y, \vec{k}'_z, \omega', x_1)}{\omega'} \langle \vec{E}(\vec{k}_y, \vec{k}_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}(\vec{k}'_y, \vec{k}'_z, \omega', x_1) \rangle \end{aligned}$$

²Conjunto de estados dinâmicos possíveis para um sistema.

$$\times \exp \left\{ i \left[(k_y + k'_y)y + (k_z + k'_z)z - (\omega - \omega')t \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Como $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é real, podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{E}^*(k_y, k_z, \omega, x) &= \vec{E}(-k_y, -k_z, -\omega, x), \\ \vec{k}^*(k_y, k_z, \omega, x) &= -\vec{k}(-k_y, -k_z, -\omega, x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Desta forma, considerando também que o meio é homogêneo nas direções Y e Z , \vec{S}_m não deve depender de t , y ou z , e temos

$$\begin{aligned} \vec{S}_m(\vec{r}_1) &= \frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk'_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \\ &\times \left[-\frac{\vec{k}^*(-\vec{k}'_y, -\vec{k}'_z, -\omega', x_1)}{\omega'} \right] \left\langle \vec{E}(\vec{k}_y, \vec{k}_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}^*(-\vec{k}'_y, -\vec{k}'_z, -\omega', x_1) \right\rangle \\ &\times \exp \left\{ i \left[(k_y + k'_y)y + (k_z + k'_z)z - (\omega - \omega')t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde aqui foi usado que $\vec{k}(\vec{k}_y, \vec{k}_z, \omega, x_1)$ é real.

Vamos definir

$$\left\langle \vec{E}(\vec{k}_y, \vec{k}_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}^*(\vec{k}'_y, \vec{k}'_z, \omega', x_1) \right\rangle = \left\langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \right\rangle \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z) \delta(\omega - \omega'). \quad (4.9)$$

Usando as propriedades das funções delta e mudando de coordenadas cartesianas para esféricas, após alguma álgebra chegamos à potência irradiada por unidade de área da lâmina ($d\sigma$), por unidade de ângulo sólido ($d\Omega_{\vec{k}}$), por unidade de frequência angular ($d\omega$), nas posições $x_1 = a$ ou $x_1 = -a$, dada por

$$\frac{d^3 P(x_1)}{d\sigma d\Omega_{\vec{k}} d\omega} = \frac{2}{\mu_0} \frac{\omega^2}{c^2} \left\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \right\rangle \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]. \quad (4.10)$$

Com a introdução da forma explícita do operador ∇ , reduzimos as equações (4.2) a:

$$\begin{aligned} B_x &= 0, \\ E_x &= -\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} E_y - \frac{4\pi i}{\omega} \frac{J_x}{\varepsilon_{xx}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} E_z &= -i \frac{\omega}{c} B_y, \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y &= i \frac{\omega}{c} B_z, \\ \frac{\partial}{\partial x} B_z &= i \frac{\omega}{c} [-\varepsilon_{xy} E_x + \varepsilon_{xx} E_y] - \frac{4\pi}{c} J_z, \\ \frac{\partial}{\partial x} B_y &= -i \frac{\omega}{c} [\varepsilon_{zz0} + N^2 \chi_{zz}] E_z - \frac{4\pi}{c} J_z, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde usamos a notação $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz0} + N^2\chi_{zz}$, com $N^2 = c^2k^2/\omega^2$ e ficou subentendido que os E_i , B_i e J_i são funções de ω e x .

Sabemos que $B_x = 0$. Como supusemos anteriormente que as amplitudes dos campos e correntes têm uma dependência em x predominantemente da forma $\exp(i \int^x k_x dx')$, podemos desprezar o efeito do operador $N = -i(c/\omega)(\partial/\partial x)$ sobre χ_{zz} . Manipulando, então, as equações acima, chega-se a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + \frac{\omega^2}{c^2} N_O^2 E_z &= S_O, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \frac{\omega^2}{c^2} N_X^2 E_y &= S_X,\end{aligned}\tag{4.12}$$

onde

$$\begin{aligned}N_O^2 &= \frac{\varepsilon_{zz0}}{(1 - \chi_{zz})}, \\ N_X^2 &= \frac{(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2)}{\varepsilon_{xx}}, \\ S_O &= -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \frac{J_z}{(1 - \chi_{zz})}, \\ S_X &= -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \left(J_y + J_x \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \right).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Os símbolos N_O^2 e N_X^2 representam os quadrados dos índices de refração dos dois modos propagantes no plasma: $N_O^2 = \sqrt{N_O^2}$ representa o modo ordinário e $N_X^2 = \sqrt{N_X^2}$ o modo extraordinário, propagando-se no sentido de x crescente enquanto que as raízes negativas representam os mesmos modos propagando-se no sentido de x decrescente.

Supondo que N_O e N_X satisfaçam às condições de validade da aproximação WKB (as quais, para propagação perpendicular, se reduzem a $(c/\omega)|(1/N_\alpha)(dN_\alpha/dx)| \ll 1$), escrevemos as soluções das equações (4.12):

$$\begin{aligned}E_z(\omega, x) &= \left[-\frac{ic}{2\omega} \int_{-a}^x dx' \frac{S_O(x')}{N_O^{1/2}(x')} \exp\left(-i\frac{\omega}{c} \int^{x'} N_O(x'') dx''\right) \right] \\ &\quad \times \frac{\exp(+i\frac{\omega}{c} \int^x N_O(x') dx')}{N_O^{1/2}} \\ &\quad \left[+\frac{ic}{2\omega} \int_a^x dx' \frac{S_O(x')}{N_O^{1/2}(x')} \exp(+i\frac{\omega}{c} \int^x N_O(x'') dx'') \right] \\ &\quad \times \frac{\exp\left(-i\frac{\omega}{c} \int^x N_O(x') dx'\right)}{N_O^{1/2}}\end{aligned}\tag{4.14}$$

com uma expressão similar para E_y , onde aparecem S_X e N_X no lugar de S_O e N_O .

Observe-se que a solução dada por (4.14) supõe que não haja irradiação incidente sobre a lâmina de plasma.

Após certa manipulação algébrica podemos escrever

$$\langle |E_z(\omega, x_1)|^2 \rangle = \frac{8\pi^3}{c^2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{G_{zz}}{|N_O||1 - \chi_{zz}|^2} \exp \left[-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} N_O''(x') dx' \right] \quad (4.15)$$

onde usou-se a definição de Shafranov (SHAFRANOV, 1966) do tensor de correlação de correntes

$$\langle J_\alpha(\omega, \vec{k}) J_\beta(\omega', \vec{k}') \rangle = G_{\alpha\beta} \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.16)$$

Finalmente, usando a equação (4.10) para a propagação perpendicular, temos a potência irradiada no modo ordinário

$$I_O = \frac{4\pi^2}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{G_{zz}}{|N_O||1 - \chi_{zz}|^2} \exp \left[-2\frac{\omega}{c} \int_x^{x_1} dx' N_O''(x') \right]. \quad (4.17)$$

Procedendo analogamente, é possível chegar a uma equação que corresponde à potência irradiada no modo extraordinário,

$$I_X = \frac{4\pi^2}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{|\varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}|^2 G_{xx}}{|N_X||\varepsilon_{xx}|^2} \exp \left[-2\frac{\omega}{c} \int_x^{x_1} dx' N_X''(x') \right]. \quad (4.18)$$

As expressões para o tensor correlação de corrente para ondas do tipo EC são dadas no Apêndice C.

5 *Metodologia*

5.1 Introdução

O objetivo maior deste projeto é fazer um estudo que auxilie a entender os processos que ocorrem num plasma de tokamak quando se está incidindo ondas de rádio-freqüência (RF) a fim de aumentar a eficiência na geração de corrente, que, por sua vez, contribui para melhorar o confinamento e aquece o plasma para gerar fusão. O estudo estruturou-se na Teoria Quase-Linear, discutida no Capítulo 3, através da equação de Fokker-Planck onde se considerou a influência de ondas RF, colisões e transporte de partículas. Tratamos com dois tipos de ondas RF - híbrida inferior (LH) e eletrônica de cíclotron (EC). Desta forma, dividimos o estudo em dois casos: Caso I - consideramos somente a ação das ondas LH, e no Caso II - a ação combinada das ondas LH e EC.

No termo de transporte, estudou-se a ação de barreiras de transporte que auxiliam no confinamento de energia e partículas. Como será mostrado no modelo, esse termo de transporte permite analisar a influência de propriedades da barreira na geração de corrente. Essas propriedades são profundidade e posição da barreira, propriedades de transporte, como nível de turbulência e, ainda, o estudo da presença da barreira com transporte de origem eletrostática ou eletromagnética. Como ferramenta de diagnóstico desses processos, estudou-se a emissão de radiação de ondas EC.

Desenvolveu-se, então, um código numérico em FORTRAN 77 baseado no Método ADI (Implícito em Direções Alternadas) (CARNAHAN; LUTHER; WILKES, 1969)¹. Na seção seguinte vamos descrever o modelo teórico sobre o qual esse programa foi construído.

¹Este método é apresentado com sua aplicação ao problema em (TOZAWA, 1998) e (OLIVEIRA, 2002).

5.2 Caso I - Somente ondas do tipo híbrida inferior

Nós começamos com uma função distribuição Maxwelliana e resolvemos a equação de Fokker-Planck obtida pela teoria quase-linear. Se levarmos em consideração colisões, ondas LH e transporte de partículas, a equação de Fokker-Planck pode ser escrita simbolicamente como segue

$$\partial_\tau f = (\partial_\tau f)_{LH} + (\partial_\tau f)_{COL} + (\partial_\tau f)_T \quad (5.1)$$

onde os subscritos no lado direito da equação denotam, da esquerda para a direita, o efeito de ondas LH, colisões e transporte de partículas. $f = f(u, \mu, s, \tau)$ é a função distribuição de elétrons, τ é o tempo normalizado ao tempo de colisões no centro da lâmina, u é o momentum de elétron normalizado ao momentum térmico central em $\tau = 0$, $\mu = \cos \theta$ é o cosseno do ângulo de *pitch* e $s = x/a$ é uma coordenada radial ao longo da direção perpendicular ao campo magnético ambiente $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, normalizada ao raio menor a . A Fig. 20 apresenta de forma esquemática a correspondência entre a geometria real do plasma no tokamak e o modelo de lâmina.

O termo relacionado com ondas LH pode ser dado por,

$$(\partial_\tau f)_{LH} = \partial_{u_\parallel} (D_{LH} \partial_{u_\parallel} f) \quad (5.2)$$

onde D_{LH} é o coeficiente de difusão no espaço de momentum, conforme vimos no Capítulo 3

$$D_{LH}(u_\parallel) = \frac{4\pi}{e^2 n_{e0} \omega_h \Lambda |u_\parallel|} \left(\left| \frac{B}{A} \right| \frac{|D_{11} D_{22} - |D_{12}|^2|^2}{|\partial D / \partial \vec{N}|} S(N_\parallel) \right)_{N_\parallel = \mu_e^{1/2} / u_\parallel}. \quad (5.3)$$

Na expressão acima $-e$ é a carga do elétron, n_{e0} é a densidade de elétrons no centro da lâmina, ω_h é a frequência das ondas LH², Λ_0 é o logaritmo de Coulomb no centro da lâmina, $\mu_e \equiv m_e c^2 / T_{e0}$, e $u_\parallel = u \mu$ é o componente do momentum normalizado paralelo ao campo magnético. Além disso, m_e é a massa de elétron, c é a velocidade da luz e T_{e0} é a temperatura de elétron no centro do plasma, em unidades de energia. A quantidade $\vec{N} = c \vec{K} / \omega_{LH}$ é o índice de refração vetorial para ondas do tipo híbrida inferior e \vec{K} é o vetor de onda. Os D_{ij} são definidos por $D_{ij} = N_i N_j - N^2 \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}$, onde os ε_{ij} são os componentes do tensor dielétrico de plasma frio. Os termos A , B e D são definidos conforme Capítulo 3.

A quantidade $S(N_\parallel)$ aparecendo na equação (5.3) é o espectro do fluxo de energia

²Observe-se que neste trabalho estamos adotando a seguinte notação: ω é a frequência de propagação da onda, ω_c é a frequência cíclotron de elétrons, ω_h é a frequência híbrida inferior, ω_{EC} é a frequência angular das ondas EC, ω_{LH} é a frequência angular das ondas LH.

para ondas do tipo híbrida inferior. Essa quantidade também é dependente do tempo, $S(s, \tau, N_{\parallel})$, e pode ser calculada como segue.

Podemos considerar ondas LH sendo injetadas continuamente no plasma, com potência fixa $P_{LH}(a)$ na borda da lâmina. Durante a progressão das ondas dentro da lâmina, a dissipação é considerada pelo cálculo da densidade de potência absorvida em cada posição na lâmina

$$\rho_{LH} = 1,5 \times 10^{-16} T_{e0} \nu_{e0} \int d^3 u \frac{u^2}{2} (\partial_{\tau} f)_{lh}, \quad (5.4)$$

onde ν_{e0} é a frequência de colisão no centro do plasma. As constantes numéricas são tais que as unidades de ρ_{lh} são W/cm³. Desta forma, temos que

$$P_{LH}(s, \tau) = P_{LH}(1) \left(1 - 4\pi^2 R_0 a^2 \int_1^s ds' s' \rho_{LH}(s', \tau) \right), \quad (5.5)$$

onde R_0 é o raio maior do tokamak.

Ao longo da lâmina, a propagação das ondas está vinculada a várias limitações (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000), (BARBATO, 1998). Essas limitações são reproduzidas aqui, como descritas no artigo de Dumont et al. (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000), a fim de deixar o trabalho mais completo.

1. O componente radial do vetor de onda (k_r) deve ser positivo. Usando uma aproximação eletrostática, isso significa o seguinte, $N_{\parallel-} < N_{\parallel} < N_{\parallel+}$, onde

$$N_{\parallel\pm} = N_{\parallel 0} \left[1 \mp \frac{s}{q} \frac{a}{R_0} \times \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right)^{1/2} \right]^{-1},$$

onde $\varepsilon_{\parallel} \cong 1 - (\omega_{pe}/\omega_h)^2 - (\omega_{pi}/\omega_h)^2$ e $\varepsilon_{\perp} \cong 1 + (\omega_{pe}/\omega_c)^2 - (\omega_{pi}/\omega_{LH})^2$; $\omega_{pe,pi}$ é a frequência angular de plasma para elétrons (íons), $\omega_{c,ci}$ é a frequência angular de ciclotron para elétrons (íons), ω_{LH} é a já mencionada frequência angular das ondas LH; $N_{\parallel 0}$ é o componente do índice de refração das ondas LH injetadas, na borda do plasma, R_0 é o raio maior e q o fator de segurança.

2. A condição de acessibilidade, definida pelo ponto de acoplamento entre os modos rápido e lento,

$$N_{\parallel} > N_{\parallel ac} = \frac{\omega_{pe}}{\omega_c} + \left[1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{LH}} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (5.6)$$

3. O limite superior em N_{\parallel} devido ao amortecimento de Landau, aproximadamente dado por

$$N_{\parallel} < N_{\parallel L} = \frac{n_L}{\sqrt{T_e}}. \quad (5.7)$$

onde n_L é um valor em torno de 6 a 7 (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000).

De acordo com esse modelo, várias jornadas de ida e retorno ocorrem antes da completa absorção da onda devido ao amortecimento de Landau. O modelo não é condizente com situações onde ocorre absorção em uma simples passagem da onda, o que pode ocorrer para valores altos de temperatura de elétrons e/ou do índice de refração na borda do plasma $N_{\parallel 0}$ ($T_e N_{\parallel 0}^2 > 50$, T_e em keV). Para $N_{\parallel 0}$ no intervalo usado neste trabalho, a validade é limitada para $T_e \simeq 10$ keV.

Essas condições definem o intervalo em N_{\parallel} o qual está disponível para ondas LH, em cada posição s . Os limites desse intervalo são denotados por N_2 e N_1 , onde N_1 é o máximo entre $N_{\parallel -}$ e $N_{\parallel ac}$, e N_2 é o mínimo entre $N_{\parallel +}$ e $N_{\parallel L}$. Devido à condição de ressonância, há um intervalo correspondente de velocidades paralelas onde as partículas estão em ressonância com as ondas.

Em concordância com esse modelo, nós consideramos que o espectro LH é plano no domínio de propagação,

$$S(s, \tau, N_{\parallel}) = \begin{cases} S_0, & N_1 \leq N_{\parallel} \leq N_2, \\ 0, & N_{\parallel} < N_1, N_{\parallel} > N_2, \end{cases}$$

onde S_0 é a intensidade das ondas LH na posição s no instante t . Essa quantidade pode ser obtida considerando que, devido ao movimento rápido de elétrons na superfície magnética, a energia adquirida pelos elétrons quando passam através da região afetada pelas ondas é rapidamente espalhada por toda a superfície magnética, e a intensidade LH média pode ser dada por $P_{LH}(s, \tau)/(4\pi^2|s|aR_0)$.

Como vimos, o coeficiente de difusão LH depende de u_{\parallel} e é proporcional a $S(s, \tau, N_{\parallel})$, onde N_{\parallel} é o valor ressonante. A fim de evitar discontinuidades que podem ser deletérias à solução numérica, assumimos que as bordas da região ressonante do coeficiente de difusão são conectadas às regiões não ressonantes adjacentes no espaço de velocidade por meio de rampas Gaussianas cuja largura média é a velocidade térmica local (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000).

O efeito de colisões é introduzido pelo segundo termo do lado direito da equação (5.1). Nós usamos uma forma linearizada que descreve a interação de elétrons rápidos com elétrons e íons do corpo da distribuição, para cada posição da lâmina.

$$(\partial_{\tau} f)_{COL} = \frac{n_e(s)\Lambda(s)}{n_{e0}\Lambda_0} \left[\frac{Z^2 + 1}{u^3 \sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta} f) + \frac{2}{u^2} \partial_u \left(\frac{1}{u} \partial_u f + f \right) \right], \quad (5.8)$$

onde $\Lambda(s)$ é o logaritmo de Coulomb na posição s . Observe-se que não foram considerados efeitos relativísticos neste termo. Isso se deve ao fato de que nas temperaturas que estamos considerando, os elétrons tem velocidades fracamente relativísticas, de modo que consideramos adequada a aproximação não-relativística para o termo de colisões. Entretanto, podemos admitir que poderia ser interessante investigar a influência de efeitos relativísticos no termo de colisões, especialmente em situações onde seja criada uma cauda na distribuição bastante longa.

O último termo do lado direito da equação 5.1 descreve o transporte de partículas e tem a seguinte forma

$$(\partial_\tau f)_T = \partial_s(D_T \partial_s f), \quad (5.9)$$

D_T sendo o coeficiente de difusão das partículas, o qual pode ser dado como segue (GIRUZZI; FIDONE; GARBET, 1992b; CASTLE; WOOTTON, 1994; RECHESTER; ROSENBLUTH, 1978; DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000; GIRUZZI et al., 1996),

$$D_T = D_m + D_e = \frac{2\pi q R_0 c}{\nu_{e0}} \left(\frac{|u_\parallel|}{\gamma \mu_{e0}^{1/2}} \tilde{b}^2 + \frac{\gamma \mu_{e0}^{1/2}}{|u_\parallel|} \tilde{e}^2 \right) \quad (5.10)$$

onde D_m é a contribuição do transporte devido a flutuações magnéticas e D_e é a contribuição do transporte quando flutuações eletrostáticas estão presentes. Nessa expressão $\tilde{b} \equiv (B/B_0)$ e $\tilde{e} \equiv (E/cB_0)$ dão, respectivamente, os níveis de perturbação das flutuações magnética e eletrostática, normalizadas à magnitude do campo magnético ambiente, $B_0(s)$. γ é o fator relativístico e a quantidade q é o fator de segurança, considerado constante ao longo da evolução temporal. Essa hipótese é justificada desde que a evolução ocorre em uma escala de tempo cinético, enquanto dados experimentais mostram que mudanças no perfil de q ocorrem em uma escala de tempo maior, da ordem de segundos (CHALLIS et al., 2001; LITAUDON et al., 2001). Seguimos a evolução da distribuição de elétrons ao longo da escala de tempo de processo cinético, o qual é mais rápido que processos MHD. Isso permite se considerar constante o perfil do fator de segurança.

O perfil de q pretende simular os perfis de q reversos tipicamente encontrados em situações onde ocorre a formação de ITB. A conexão entre os perfis do fator de segurança e a formação da ITB tem sido intensamente estudada nos anos recentes. Apesar dos detalhes do mecanismo de formação de ITB não serem completamente claros, tem-se encontrado que as ITB's formam-se próximo da posição do mínimo do perfil do fator de segurança q (CHALLIS et al., 2001, 2002; BARANOV et al., 2001). No presente estudo, simulamos o perfil do fator de segurança por um perfil parabólico, o qual tem um valor mínimo na posição $s = 0,5$, a meio caminho entre o centro do plasma e a borda do plasma.

Consideraremos o centro da barreira de transporte localizado na posição de q mínimo, ou próximo a ela. Apesar de estudos recentes indicarem que a barreira geralmente ocorre na posição de mínimo q ou próximo ao centro do plasma, isso não é uma restrição absoluta (FUJITA et al., 2004), e portanto também consideramos alguns casos onde a barreira é deslocada em direção à borda do plasma, quando investigamos o efeito da posição da barreira na eficiência da geração de corrente.

A ITB é simulada considerando que o nível de turbulência magnética (ou eletrostática) é uniformemente igual a \tilde{b}_0 (ou \tilde{e}_0) em todo lugar exceto na posição da barreira, onde é reduzido para um valor mínimo $\alpha\tilde{b}_0$ (ou $\alpha\tilde{e}_0$). A Figura 21 auxilia na visualização da barreira que é centrada em $s = s_b$, com meia-largura adimensional $\beta = 0,15$. Especialmente, consideramos uma redução do nível de turbulência magnética na posição da barreira (para $s_b - \beta < s < s_b + \beta$), tal que $\tilde{b} = \tilde{b}_0(a_1 + a_2s + a_3s^2)$ e $\tilde{e} = \tilde{e}_0(a_1 + a_2s + a_3s^2)$, onde os a_i são constantes dadas por (ROSA; ZIEBELL, 2002) (aqui substituindo x por sa):

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{b}_0 \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{\beta^2} s_b^2 \right); \\ a_2 &= -2\tilde{b}_0 \left(\frac{1-\alpha}{\beta^2} \right) s_b; \\ a_3 &= \tilde{b}_0 \left(\frac{1-\alpha}{\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como condições de contorno da região da barreira em caso de flutuações magnéticas consideramos $\tilde{b} = \tilde{b}_0$ em $s = s_b \pm \beta$ e $\tilde{b} = \alpha\tilde{b}_0$ em $s = s_b$. No caso de flutuações eletrostáticas, analogamente, consideramos $\tilde{e} = \tilde{e}_0$ em $s = s_b \pm \beta$ e $\tilde{e} = \alpha\tilde{e}_0$ em $s = s_b$. O perfil resultante da turbulência magnética e eletrostática pode ser visto na Fig. 1a de (ROSA; ZIEBELL, 2002), para vários valores de α e $\beta = 0,15$. O modelo descreve a situação onde uma ITB já está formada quando as ondas LH são injetadas no plasma a fim de gerar corrente. Modificações no perfil da barreira devido a ondas LH não são levadas em conta nesse cenário. Aqui cabe ressaltar uma diferença importante entre os dois tipos de transporte. Observe-se que se o transporte for magnético $D \equiv D_m \sim |v_{\parallel}|$, ie., os elétrons de alta velocidade são mais afetados, e se o transporte for eletrostático $D \equiv D_e \sim 1/|v_{\parallel}|$ e, portanto, os elétrons de baixa velocidade são mais afetados.

Em nosso estudo o tokamak é representado por uma lâmina de plasma não-homogêneo, com perfis de campo magnético, densidade inicial e temperatura dados pelas seguintes expressões:

$$B_0(s) = B_0 \left(1 + s \frac{a}{R_0} \right)^{-1};$$

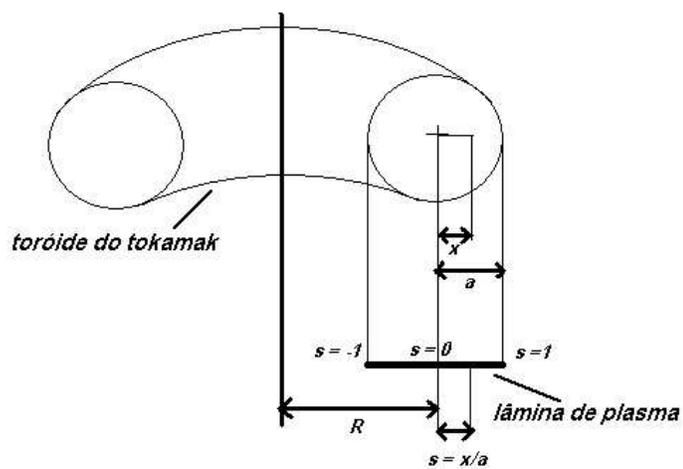


Figura 20: Correspondência entre geometria real do plasma e modelo de lâmina.

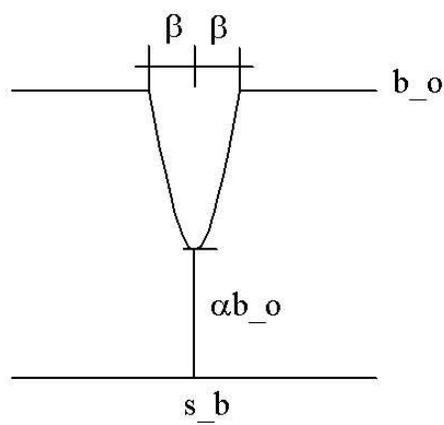


Figura 21: Representação da barreira através do nível de turbulência.

$$n_e(s, \tau = 0) = (n_{e0} - n_{ea})(1 - s^2) + n_{ea};$$

$$T_e(s, \tau = 0) = (T_{e0} - T_{ea})(1 - s^2) + T_{ea},$$

que são largamente usados na literatura. Podemos encontrar na fig. 22 as suas representações gráficas. Nessas expressões os índices 0 e a indicam, respectivamente, valores tomados no centro e na borda do plasma. Ao longo da evolução temporal a densidade é atualizada a cada intervalo do tempo de colisão, levando em conta modificações no perfil de densidade causados pelo transporte radial. Já os perfis de temperatura e campo magnético toroidal são mantidos constantes no Caso I enquanto no Caso II passamos a admitir também variação temporal no perfil de temperatura, mantendo constante o perfil de campo magnético.

Resolvemos numericamente a equação quase-linear, Eq. (5.1), usando o método ADI (implícito em direções alternadas), e obtemos a evolução no tempo da função distribuição de elétrons. Consideramos uma grade de $151 \times 31 \times 81$ pontos no espaço $u \times \mu \times s$, com $0 \leq u \leq 12$, $-1 \leq \mu \leq 1$, $-1 \leq s \leq 1$. A variável tempo é discretizada considerando $\Delta\tau = 0,01$.

Neste modelo, o número de partículas inicialmente presente, N_0 , é mantido constante ao longo dos cálculos. Obtém-se isso através de condições de contorno de Neumann na borda do plasma - derivada nula na borda. Para entender um pouco melhor como isso é feito, vejamos. Em uma situação simples em que o coeficiente de difusão fosse uma contante o termo de transporte teria a formas seguinte:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dx} \left(D \frac{df}{dx} \right).$$

Se integrarmos em dx , entre $-a$ e a , teremos $N = \int dx f$, e

$$\frac{d}{dt} N = \left[D \frac{df}{dx} \right]_{-a}^a.$$

Se $df/dx = 0$ nos limites $-a$ e a , teremos $N = \text{constante}$, que é o que queremos.

Entretanto, na prática mesmo com a condição de Neumann, introduzimos uma re-normalização para garantir que o número de partículas permaneça constante, pois não queremos que pequenos erros numéricos mascarem o efeito de transporte. Desta forma, impomos a seguinte condição de normalização para o perfil de densidade: $\int d^3s n_e(s, \tau) = N_0$.

Apresentamos, abaixo, algumas quantidades auxiliares como:

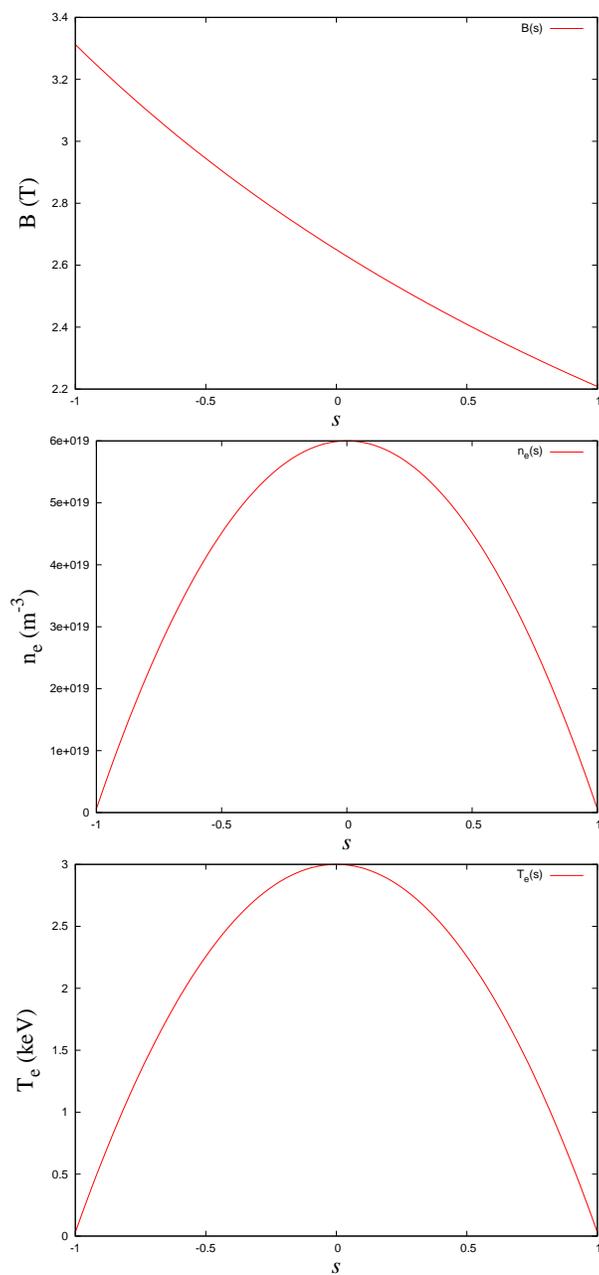


Figura 22: Representação dos perfis de campo magnético, densidade de elétrons e temperatura de elétrons utilizados no modelo.

A densidade de corrente, J , em uma dada posição em um determinado instante, pode ser obtida como segue

$$J(\tau, s) = -\frac{ecn_e}{\sqrt{\mu_{e0}}} \int d^3u u_{\parallel} f_e(u, \mu, \tau_e, s). \quad (5.12)$$

A corrente total, I , pode ser facilmente obtida por integração da densidade de corrente

$$I(\tau) = 2\pi a^2 \int_0^1 ds s J(\tau, s). \quad (5.13)$$

No caso limite de uma densidade de corrente homogênea, J_0 , essa integral resultaria no valor $I = \pi a^2 J_0$, como esperado.

A fim de calcular a potência total dissipada pelas ondas LH, começamos definindo a média da densidade de energia cinética para elétrons,

$$\langle E_e \rangle = \int d^3u \frac{m_e v^2}{2} f_e, \quad (5.14)$$

cuja variação no tempo gera a densidade de potência média dissipada por ondas LH (expressa em W/m³),

$$\rho(s, \tau) \equiv \frac{d}{dt} \langle E_e \rangle = 1,6 \times 10^{-16} T_e(0) \nu_e(0) n_e(s) \int d^3u \frac{u^2}{2} (\partial_{\tau} f_e)_{LH}, \quad (5.15)$$

onde $T_e(0)$ é dado em keV. Da densidade de potência, pode-se obter a potência dissipada em uma casca toroidal,

$$P_s(s, \tau) = \rho(s, \tau) (2\pi s a^2 \Delta s) (2\pi R_0). \quad (5.16)$$

A potência total, P_0 , dissipada em um tokamak com raio maior R_0 pode ser obtida por integração da densidade de potência,

$$P_0(\tau) = \int_0^1 ds a (2\pi R_0) (2\pi s a) \rho(s, \tau). \quad (5.17)$$

É importante destacar que o objetivo inicial deste trabalho foi o de investigar o efeito de transporte e de uma barreira interna de transporte na eficiência de geração de corrente (η) em situações onde a perda de partículas na borda do plasma pode ser considerada desprezível. Por exemplo, experimentos com tais condições na borda têm sido relatados no tokamak DIII-D (DOYLE et al., 2001) e no tokamak Alcator C-Mod, em um experimento de barreira de transporte dupla (WUKITCH et al., 2002). Foi mostrado que a perda de elétrons rápidos em experimentos de geração de corrente no JT60U seria desprezível,

em condições muito similares às consideradas nesse trabalho (USHIGUSA et al., 1992). Nesse mesmo artigo de Ushigusa, extrapolações para condições de um tokamak tipo ITER indicaram pequena perda de partículas rápidas.

A fim de implementar tais condições de bom confinamento, consideramos condições de Neumann nos cálculos, como dissemos acima. De fato, em experimentos reais alguma perda de partículas ocorre, e conseqüentemente nossos resultados podem ser considerados como um limite superior para eficiência de geração de corrente, adequados para descreverem experimentos semelhantes àqueles mencionados onde a perda de partículas não é significativa.

Temos que reconhecer que em alguns experimentos as condições de bom confinamento de partícula não são satisfeitas, como naqueles relatados no modo L no tokamak TC (HARVEY et al., 2002b).

Destaquemos ainda que nessa investigação muitos parâmetros foram mudados, tais como nível de turbulência, posição da barreira, e o nível de potência da onda LH. Nós consideramos que uma modificação nas propriedades de transporte na borda do plasma, permitindo perdas de partículas, estaria fora do escopo da presente investigação.

5.3 Caso II - Ondas do tipo híbrida inferior e eletrônica de cíclotron

Novamente iniciamos com uma função distribuição Maxwelliana e resolvemos a equação de Fokker-Planck obtida da Teoria Quase-Linear. Neste caso, além das ondas LH, colisões e transporte de partículas, levamos em conta as ondas EC, e podemos escrever a equação de Fokker-Planck simbolicamente como segue

$$\partial_\tau f = (\partial_\tau f)_{LH} + (\partial_\tau f)_{EC} + (\partial_\tau f)_{COL} + (\partial_\tau f)_T, \quad (5.18)$$

onde os subscritos do lado direito denotam, da esquerda para a direita, os efeitos de ondas LH e EC, colisões e transporte de partículas.

O modelo é praticamente o mesmo que o da seção anterior, exceto pela introdução do efeito das ondas EC. O procedimento numérico é como segue. No início o plasma evolui sob a ação de colisões, ondas LH e transporte. Essa fase termina em $\tau = 50$ quando o estado estacionário é atingido, entendido como a estabilização do valor da corrente. Neste ponto a potência das ondas EC é ligada e o sistema evolui até 80 tempos de colisão.

Para nossos parâmetros, esse instante corresponde à transição entre a escala de tempo cinética e a escala de tempo MHD (da ordem de 10^{-3} s). Os resultados são apresentados no Capítulo 6.

Vejamos, então, o modelo utilizado para ondas EC. O termo EC, calculado para cada posição da lâmina, pode ser escrito como

$$(\partial_\tau f)_{EC} = \frac{1}{u_\parallel} \left(y_l \partial_{u_\perp} + \frac{u_\perp}{\sqrt{\mu_{e0}}} \partial_{u_\parallel} n_\parallel \right) \times \left[u_\perp D_{EC} \left(y_l \partial_{u_\perp} + n_\parallel \frac{u_\perp}{\sqrt{\mu_{e0}}} \partial_{u_\parallel} \right) f \right], \quad (5.19)$$

onde como vimos no Capítulo 3 o coeficiente de difusão de cíclotron, D_{EC} , é dado por

$$D_{EC} = \frac{\alpha h \Gamma(n_\parallel)}{\gamma |u_\parallel|}, \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4\pi}{e^2} \frac{P_0}{S n_e \Lambda \omega_{EC}}; \\ h &= \frac{c}{\omega_{EC}} |b| |\vec{\Pi}_{-1} \cdot \vec{\sigma}_I|^2 \exp(-2 \int_{x_0}^x k''_\perp dx'); \\ \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta n_\parallel} \exp \left[- \left(\frac{n_\parallel - \hat{n}_\parallel}{\Delta n_\parallel} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nesta equação, $n_\parallel = n_\parallel(s)$ é o número de onda paralelo corrigido por efeitos de refração ao longo da propagação por

$$n_\parallel(s) = n_0 \frac{R_0 + a}{R_0 + sa},$$

onde n_0 é o índice de refração na borda do plasma, R_0 o raio maior, a o raio menor e s a posição na lâmina. Aqui, o termo perpendicular significa direção perpendicular ao campo magnético ambiente. $y_l = \ell \omega_c / \omega_{EC}$, onde ω_c é a frequência angular eletrônica de cíclotron, ω_{EC} é a frequência angular das ondas EC, ℓ é o harmônico de cíclotron, e $\mu_{e0} = mc^2 / T_{e0}$, com T_{e0} a temperatura central de elétrons em $\tau = 0$, m a massa do elétron e c a velocidade da luz.

Um ponto a ser enfatizado é que o coeficiente de difusão EC é mediado sobre as superfícies magnéticas, considerando que essas sejam cilíndricas por simplicidade. Embora as ITB's não sejam típicas dessa espécie de geometria, a superfície magnética aparece somente na média superficial do coeficiente de difusão EC, e para esse propósito qualquer forma de superfície com a mesma área de superfície seria igualmente efetiva, ao menos quando o efeito de elétrons aprisionados é considerado como desprezível, como na presente investigação, que trata com um tokamak de grande razão de aspecto. Mais ainda, para os

parâmetros utilizados na investigação numérica, a absorção EC ocorre somente no lado de baixo campo, e portanto, a forma real da área de toda a superfície não é significativa para o cálculo da absorção EC. A aproximação de superfície magnética cilíndrica portanto parece ser apropriada para os propósitos da presente investigação.

O coeficiente de difusão EC depende do espectro de potência EC nas superfícies magnéticas. O espectro é considerado Gaussiano na borda, e leva em conta a absorção calculada auto-consistentemente ao longo da trajetória,

$$P_{EC}(s, \tau, N_{\parallel}) = \frac{P_{EC}(1)}{\sqrt{\pi}\Delta n_{\parallel}} e^{-\frac{(n_{\parallel}-\bar{n}_{\parallel})}{(\Delta n_{\parallel})^2}} \times \exp\left(-\frac{2\omega_{EC}a^2}{c} \int_1^s ds' n_{\perp}''(s')\right). \quad (5.22)$$

onde $P_{EC}(1)$ é a potência entregue por antenas na borda do plasma, \bar{n}_{\parallel} é o índice de refração paralelo do raio central do pacote de ondas, e n_{\perp}'' é a parte imaginária do número de onda perpendicular, obtido pela relação de dispersão para ondas EC.

A equação quase-linear, Eq. (5.18), é resolvida usando o método ADI (implícito em direções alternadas) a fim de obter a evolução temporal da função distribuição de elétrons. Consideramos uma grade com $151 \times 31 \times 81$ pontos no espaço $u \times \mu \times s$, com $0 \leq u \leq 12$, $-1 \leq \mu \leq 1$ e $-1 \leq s \leq 1$. A variável tempo foi discretizada considerando $\Delta\tau = 0,01$. Condições de contorno de Neumann são consideradas na borda do plasma, que implicam que o número total de partículas inicialmente presente, N_0 , é mantido constante durante os cálculos. Essa condição é imposta como uma condição de normalização para o perfil de densidade:

$$\int d^3s n_e(s, \tau) = N_0.$$

Acrescente-se ainda que os perfis iniciais de densidade, temperatura e campo magnético são os mesmos usados na seção anterior, mas que agora consideramos a possibilidade de variação ao longo do tempo tanto do perfil de densidade quanto do perfil de temperatura.

6 *Resultados numéricos*

Nesse capítulo, apresentamos resultados que constam em três trabalhos publicados, que se encontram em anexo, quais sejam, os artigos (OLIVEIRA; ZIEBELL; ROSA, 2005) e (ZIEBELL; OLIVEIRA; ROSA, 2004) que abordam o caso onde a geração de corrente é apenas com ondas LH (Caso I) - e o artigo (ROSA et al., 2005) que aborda o caso em que a geração de corrente ocorre devido à ação simultânea de ondas LH e EC (Caso II).

6.1 Caso I - LH

Para a análise numérica, inicialmente consideramos os seguintes parâmetros, típicos de tokamaks de médio porte, escolhidos a fim de garantir a absorção total da potência LH, para os perfis considerados: $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 3,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 2,65 \text{ T}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $R_0 = 1,0 \text{ m}$. Para as ondas LH, consideramos $P_{LH}(a, t) = 0,5 \text{ MW}$, e escolhemos $N_{||0} = 2,3$ e $f_{LH} = 3,37 \times 10^9 \text{ Hz}$.

Como já discutimos, em cada ponto da lâmina há um intervalo de valores do índice de refração que é calculado para as ondas LH, limitado entre N_1 e N_2 , ver Fig. 23. Existe um intervalo correspondente de velocidades ressonantes, o qual é mostrado na Fig. 24 para os parâmetros listados no parágrafo anterior, como uma função da posição dentro da lâmina.

A Fig. 25 mostra o perfil da potência LH dentro da lâmina do plasma, como uma função do tempo normalizado τ , para $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,0$, $s_p = 0,5$, e $\alpha = 0,125$, até $\tau = 60$. Como pode ser visto, a absorção da onda LH ocorre principalmente na vizinhança da superfície magnética com $s = 0,5$. Nos resultados que aparecem na Ref. (ROSA; ZIEBELL, 2002), uma significativa quantidade de potência LH foi absorvida em regiões mais centrais do tokamak. A razão pela qual maior absorção central foi obtida no caso da Ref. (ROSA; ZIEBELL, 2002) do que no caso presente é o melhor tratamento das condições de acessibilidade das ondas LH que foi empregado no presente trabalho, limitando o acesso de ondas LH à região central.

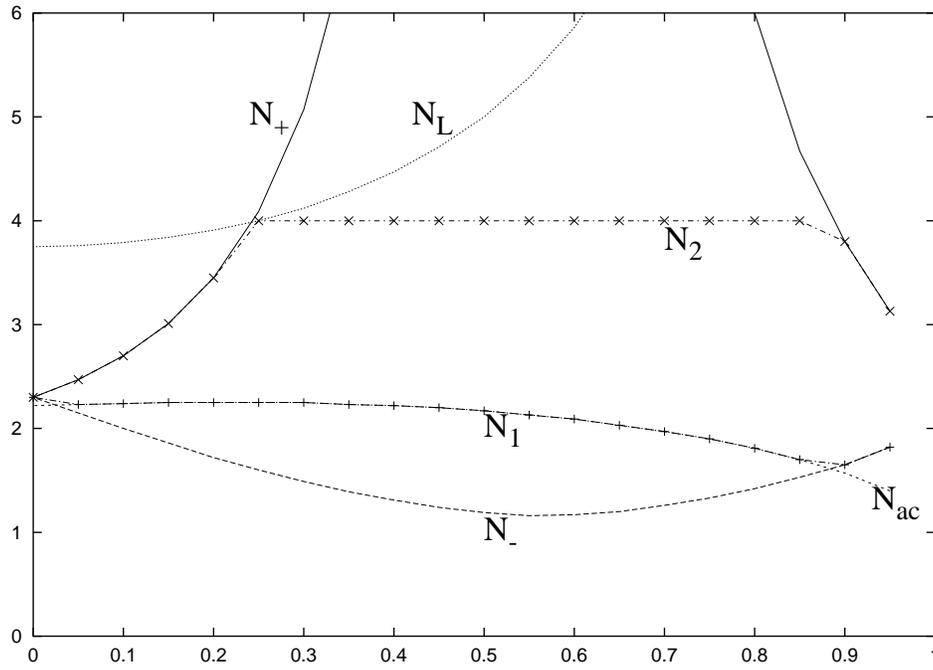


Figura 23: Limites do domínio de propagação para ondas LH no espaço $N_{||}$. Os parâmetros são característicos de um tokamak de tamanho médio. $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 3,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 2,65 \text{ T}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $R_0 = 1,0 \text{ m}$. Para as ondas LH, $N_{||0} = 2,3$, $f_{LH} = 3,37 \times 10^9 \text{ Hz}$, e $n_L = 6,5$.

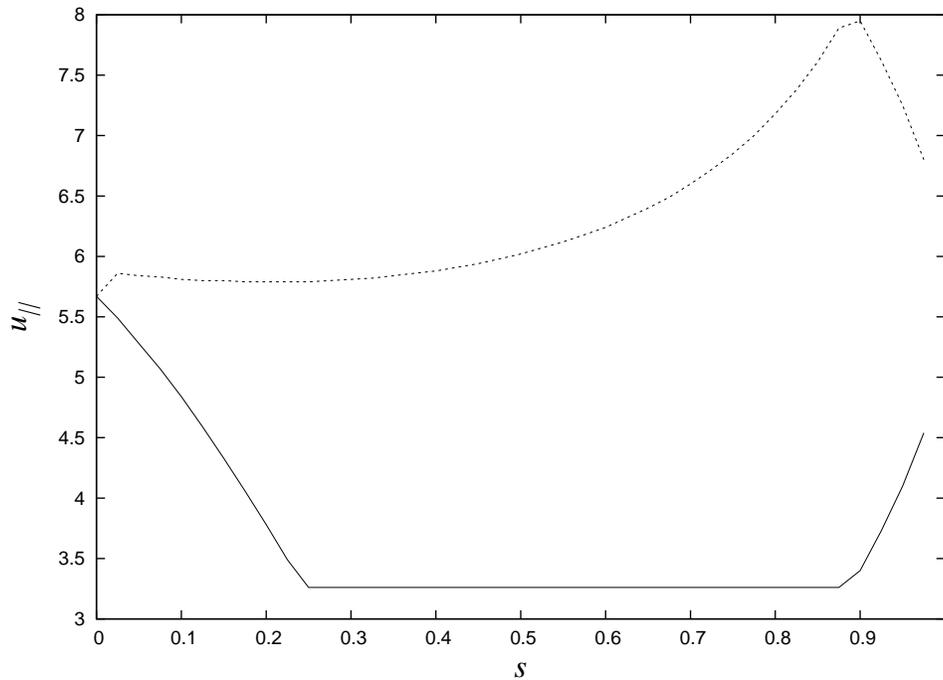


Figura 24: Intervalo de velocidades na qual as partículas são ressonantes com as ondas LH, como uma função da posição na lâmina de plasma. Na curva superior, temos u_1 e na inferior, u_2 - observe-se que $u_1 = \sqrt{\mu}/n_2$. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 23.

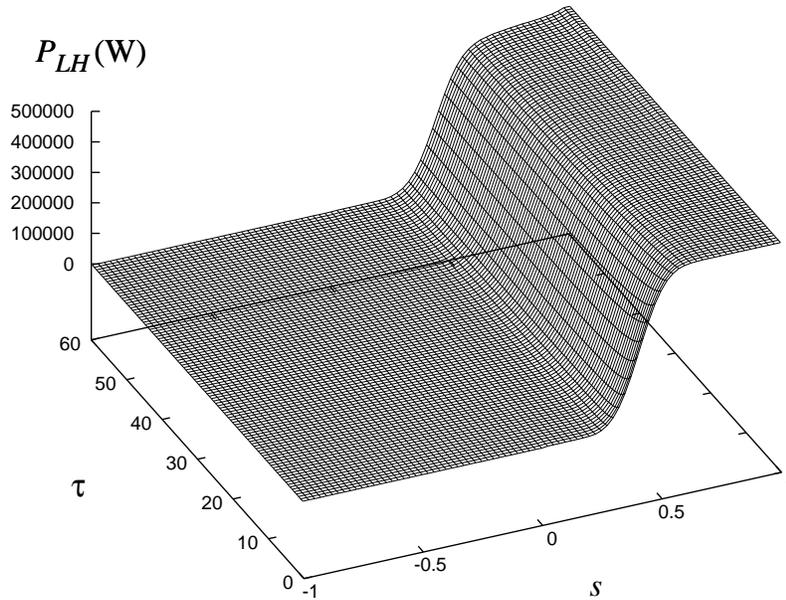


Figura 25: Potência de ondas LH como uma função do tempo e posição na lâmina de plasma. A potência da onda LH é $P_{LH}(a, t) = 0,5$ MW. A barreira é localizada em $s_b = 0,5$, com $\alpha = 0,125$, e $\beta = 3,0$ cm. Os outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 24.

O perfil correspondente de densidade de corrente pode ser visto no painel (a) da Fig. 26, enquanto o painel (b) mostra o caso sem transporte. Pode ser visto que a corrente gerada por ondas LH é altamente concentrada em torno da região de máxima dissipação de energia, e que o transporte contribui para suavizar a distribuição de população, como esperado.

A Fig. 27 (a) mostra o perfil de densidade de corrente em $\tau = 60$, para $\tilde{e}_0 = 0$ e vários valores de \tilde{b}_0 , variando de $1,0 \times 10^{-5}$ até $5,0 \times 10^{-5}$. Pode ser visto que um crescimento de cinco vezes no nível das flutuações magnéticas reduz consideravelmente o pico localizado da corrente, alargando o perfil principalmente em direção à borda. Pode-se concluir que as partículas que se difundem principalmente são as da cauda formada pelas ondas LH, já que a difusão radial virtualmente não é notada no perfil de densidade do plasma. Um gráfico de n_e vs. s em $\tau = 60$ mostra um perfil parabólico que é praticamente o mesmo que o perfil inicial, nada de valor para ser mostrado aqui, indicando que somente uma fração muito pequena das partículas do plasma difundiu-se.

A Fig. 27 (b) mostra o perfil de densidade de corrente em $\tau = 60$, para \tilde{b}_0 e vários valores de \tilde{e}_0 , variando de $0,2 \times 10^{-5}$ até $1,0 \times 10^{-5}$. Isso também representa um crescimento

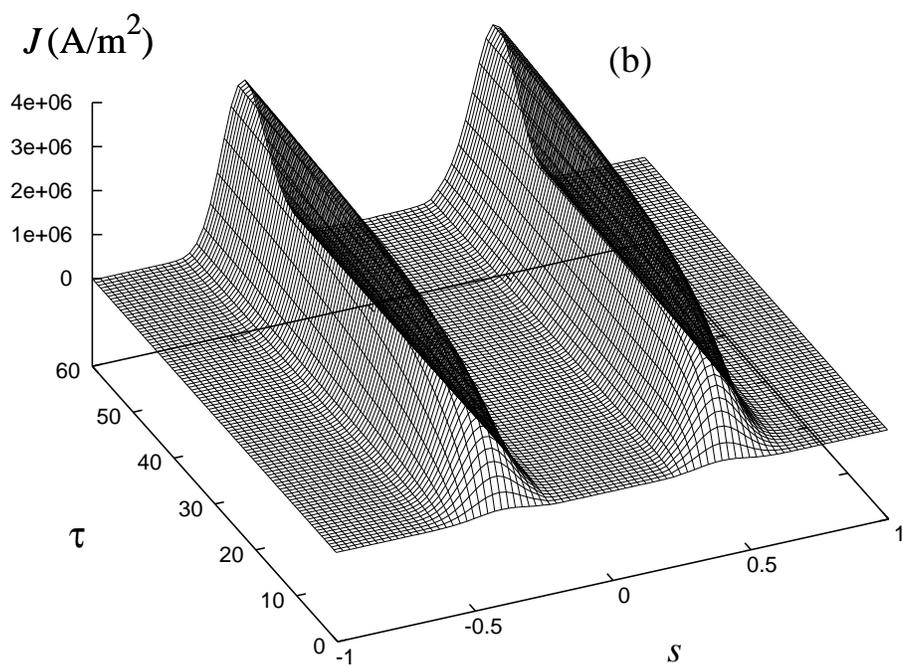
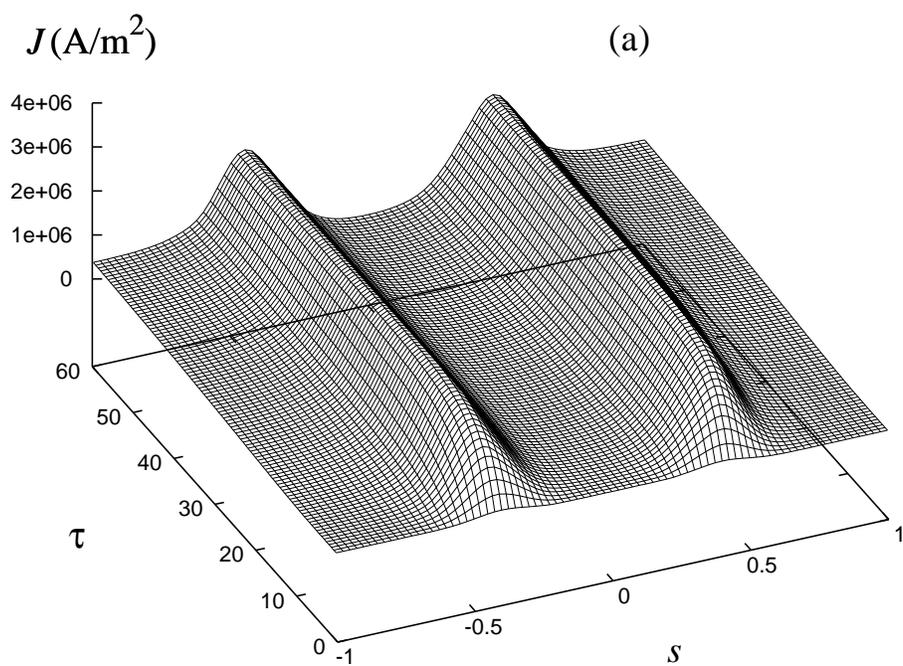


Figura 26: Evolução no tempo de J vs. s como uma função de τ . (a) O caso de transporte magnético com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. (b) O caso sem transporte. Os outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25

de cinco vezes no nível de flutuações. O nível inferior, $\tilde{\epsilon}_0 = 0,2 \times 10^{-5}$, foi escolhido tal que produz sobre a eficiência de geração de corrente o mesmo efeito que o nível inferior utilizado no caso de flutuações magnéticas, $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$. Como pode ser visto no caso de flutuações magnéticas, esse crescimento consideravelmente reduz o pico da densidade de corrente localizada, alargando-a principalmente em direção à borda do plasma. A Fig. 27 (b) é qualitativamente muito similar à Fig. 27 (a). As magnitudes consideradas para os níveis de flutuação eletrostática e magnética estão dentro do intervalo de valores experimentais (CASTLE; WOOTTON, 1994; LIEWER, 1985; KIM, 1991).

A Fig. 28 (a) mostra a corrente gerada como uma função do tempo, para vários valores de \tilde{b}_0 e $\tilde{\epsilon}_0 = 0$, enquanto a Fig. 28 (b) mostra a corrente como uma função do tempo, para vários valores de $\tilde{\epsilon}_0$ e $\tilde{b}_0 = 0$. Os dois resultados são notavelmente similares e não permitem nenhuma conclusão a respeito da natureza do transporte que está presente no plasma. Entretanto, em ambos os casos temos um crescimento da corrente no caso com transporte. Para o caso magnético, isso está de acordo com (GIRUZZI; FIDONE; GARBET, 1992a) e (GIRUZZI, 1993).

A eficiência de geração de corrente pode ser medida pelo parâmetro adimensional

$$\eta = 33 \frac{|I| R_0 n_{ave}}{P_h T_{ave}} \quad (6.1)$$

onde n_{ave} é a densidade de elétrons expressa em unidades de 10^{20} m^{-3} , mediada ao longo da coordenada radial, e T_{ave} é a temperatura eletrônica expressa em keV, também mediada ao longo da coordenada radial (LUCÉ et al., 1999). Na Fig. 29 (a) mostramos o parâmetro η como uma função do nível de flutuação magnética \tilde{b}_0 , para $\tilde{\epsilon} = 0$, em $\tau = 60$. Vê-se que a eficiência de geração de corrente cresce com o nível de turbulência, mas o crescimento não é linear. Para comparação, mostramos na Fig. 29 (b) o parâmetro η como uma função do nível de flutuação eletrostática $\tilde{\epsilon}_0$, para $\tilde{b} = 0$, em $\tau = 60$. A eficiência da geração de corrente também cresce com o nível de turbulência eletrostática, similarmente ao que acontece com o caso magnético, mostrado na Fig. 6(a). Contudo, a diferença não é significativa.

O crescimento da eficiência de geração de corrente com o crescimento do nível de turbulência pode ser explicado pelo seguinte mecanismo. Partículas rápidas são radialmente deslocadas por efeito do transporte em direção a regiões menos densas do tokamak onde o tempo de moderação¹ devido a colisões é aumentado, portanto crescendo o nível de corrente gerada. A população aumentada na cauda de elétrons melhora a absorção de

¹Tempo que as partículas levam para diminuir de velocidade devido a colisões.

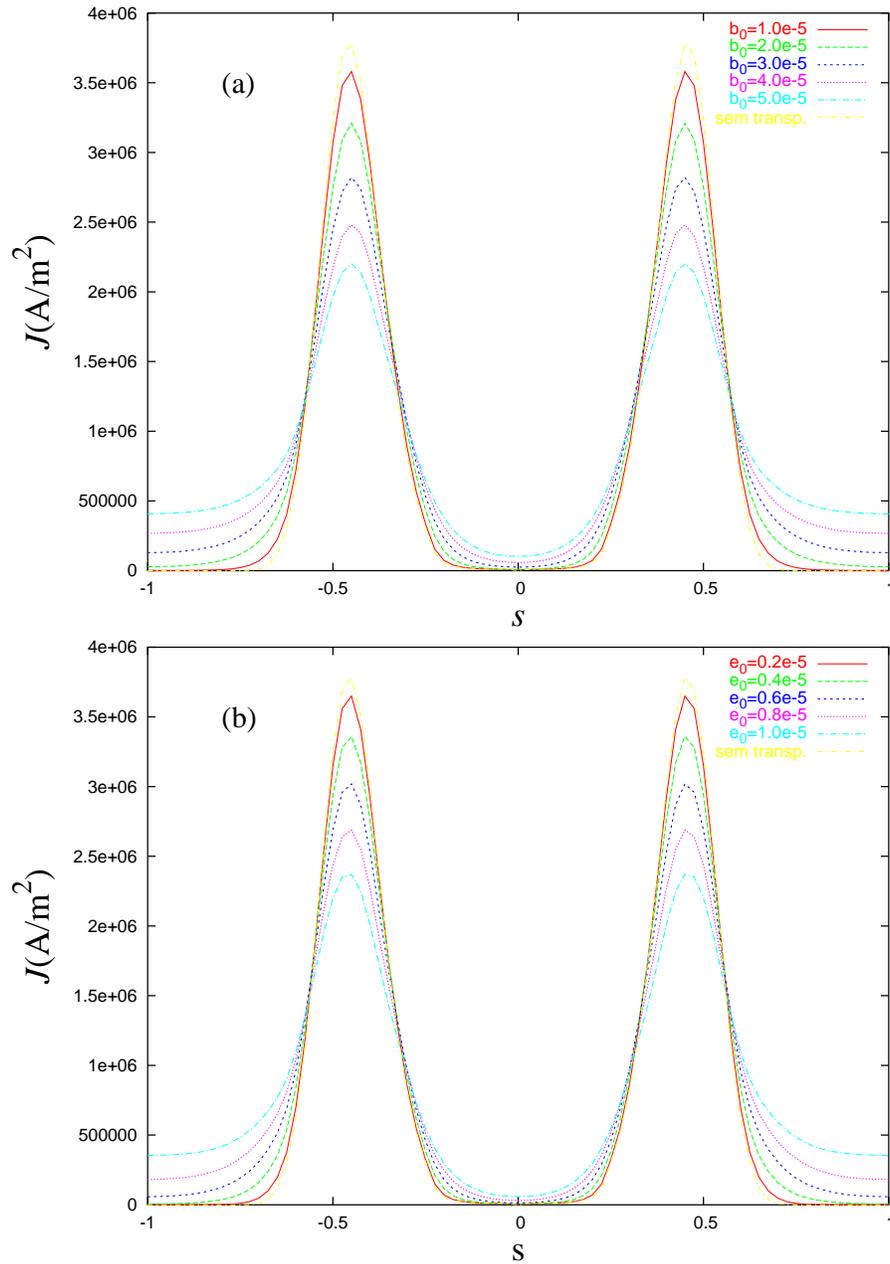


Figura 27: Densidade de corrente J vs. posição na lâmina de plasma s , em $\tau = 60$. (a) $\tilde{e}_0 = 0$, e vários valores de \tilde{b}_0 : $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. (b) $\tilde{b}_0 = 0$, e vários valores de \tilde{e}_0 : $\tilde{e}_0 = 0,2 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,4 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,6 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,8 \times 10^{-5}$, e $\tilde{e}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25.

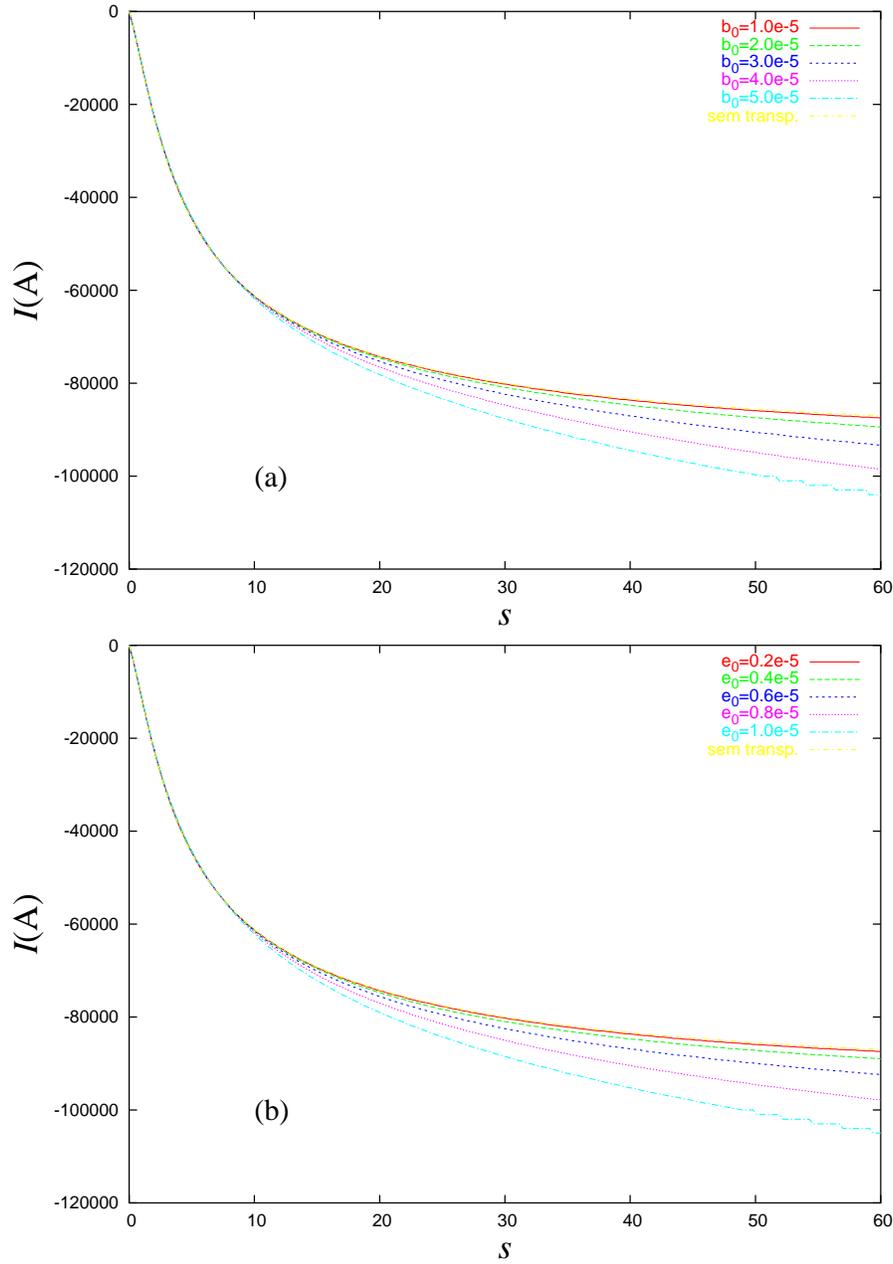


Figura 28: Corrente I vs. tempo normalizado τ . (a) $\tilde{e}_0 = 0$, e vários valores de \tilde{b}_0 : $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. (b) $\tilde{b}_0 = 0$, and several values of \tilde{e}_0 : $\tilde{e}_0 = 0,2 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,4 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,6 \times 10^{-5}$, $\tilde{e}_0 = 0,8 \times 10^{-5}$, e $\tilde{e}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25.

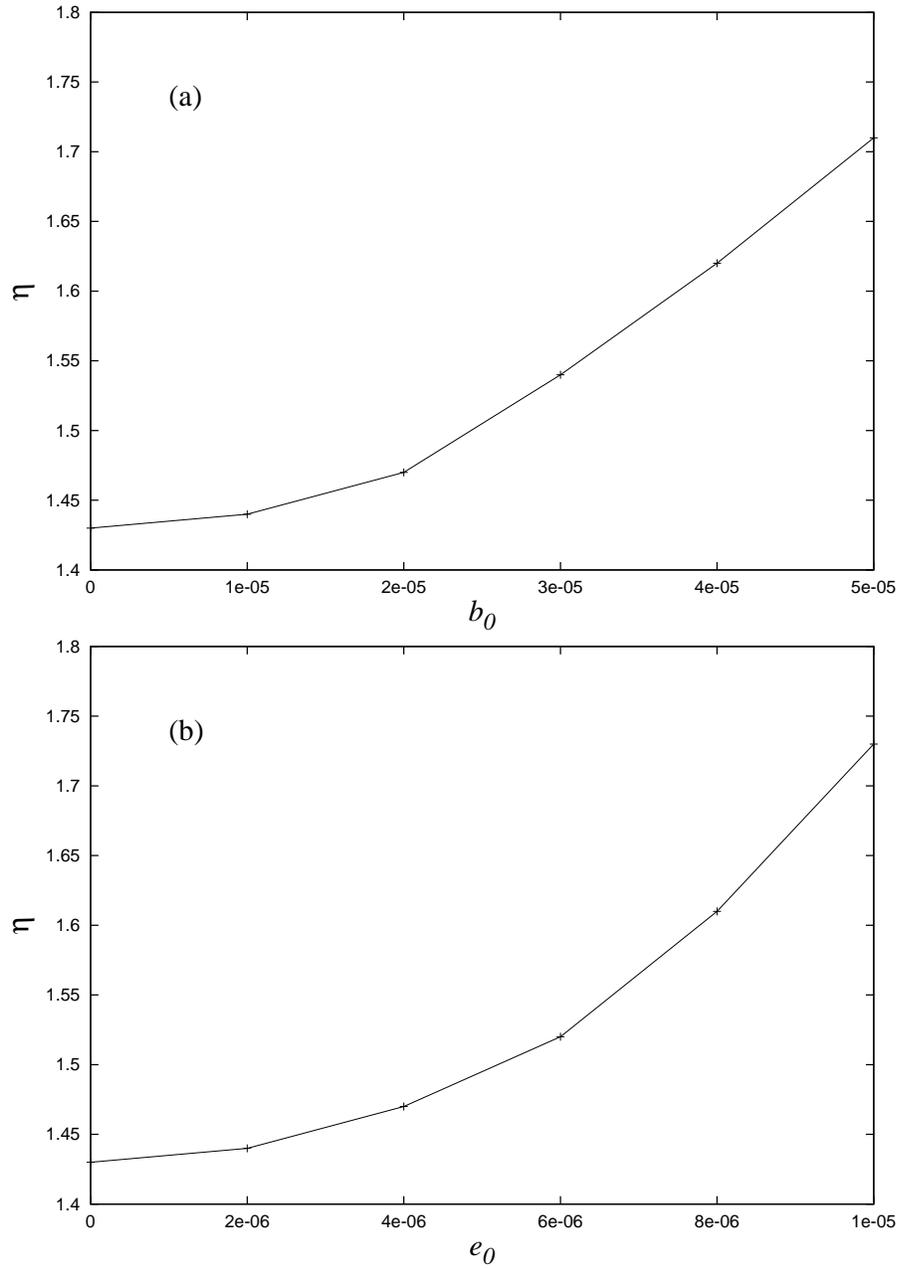


Figura 29: (a) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação magnética \tilde{b}_0 , para $\tilde{e}_0 = 0$, em $\tau = 60$. (b) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação eletrostática \tilde{e}_0 , para $\tilde{b}_0 = 0$, em $\tau = 60$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25.

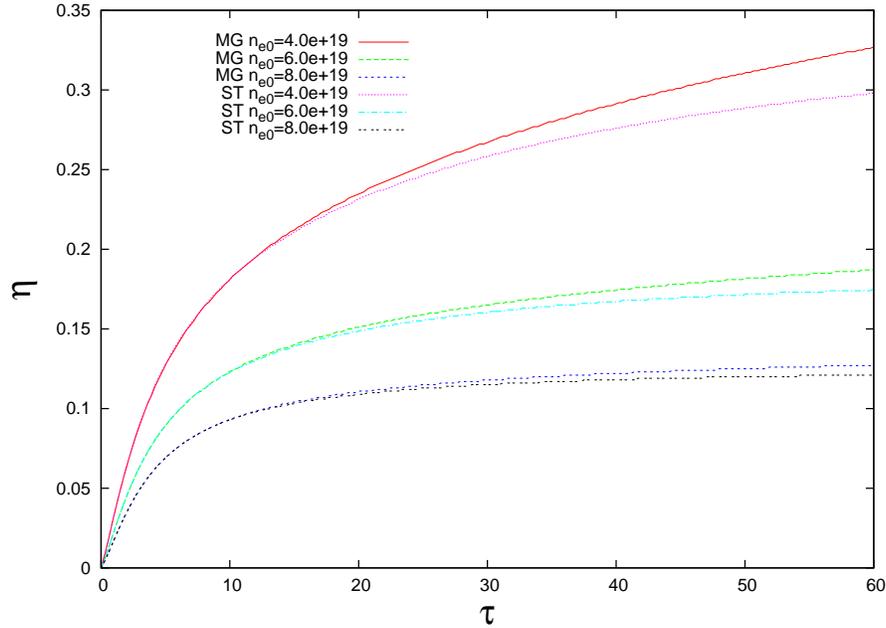


Figura 30: Eficiência de geração de corrente η vs. tempo normalizado τ , para três valores diferentes de densidade central do plasma, $n_{e0} = 4,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, e $n_{e0} = 8,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, comparando com o caso de somente flutuações magnéticas, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, e o caso sem transporte. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25.

potência LH em regiões mais externas, portanto melhorando mais a eficiência da geração de corrente. O deslocamento resultante do pico de deposição de potência LH também foi encontrado em outros estudos da literatura (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000).

Tal explicação pode ser verificada considerando uma situação com diferente densidade de plasma, mantendo os perfis e todos os outros parâmetros. Na Fig. 30 nós mostramos o parâmetro η como uma função do tempo normalizado τ , para flutuações magnéticas com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e para o caso sem transporte, considerando três diferentes valores da densidade no centro do plasma, $n_{e0} = 4,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ e $n_{e0} = 8,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Disso se vê que com o crescimento da densidade de elétrons a eficiência da corrente é reduzida. Mais ainda, para cada valor de densidade eletrônica, a comparação entre as curvas obtidas com e sem transporte mostra que, quanto menor a densidade eletrônica, maior é a contribuição positiva do transporte para a eficiência de geração de corrente. Ambos os achados estão em concordância com a explicação dada no parágrafo anterior. O efeito da posição do centro da barreira pode ser visto na Fig. 31, em $\tau = 60$. A curva superior mostra o valor de η no caso de flutuações magnéticas, com valor de $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, enquanto a curva inferior mostra o caso de flutuações eletrostáticas, com $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$. Disso se vê que a eficiência apresenta um mínimo para $s_b = 0,6$,

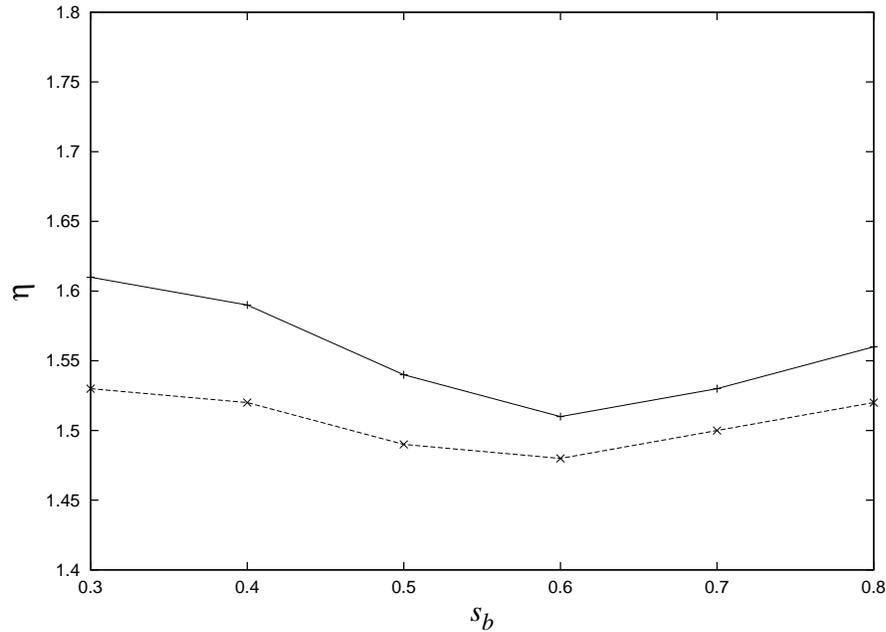


Figura 31: Eficiência de geração de corrente η vs posição da barreira de transporte, em $\tau = 60$; a curva superior é para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0$. A curva inferior é para $\tilde{e}_0 = 0,50 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25.

crecendo quando a barreira está próxima à borda do plasma. A explicação pode ser como segue. Como visto na Fig. 4a, as ondas LH geram corrente em torno de $s_b = 0,5$. A difusão radial em direção à borda do plasma tende a produzir crescimento da corrente. Se a barreira está localizada em $s_b \leq 0,5$, não impede muito a difusão em direção à borda, e a corrente de fato cresce. Se a barreira está localizada próximo de $s_b = 0,6$, isso atrapalha a difusão radial entre a região de deposição de energia de ondas LH e regiões mais externas, e conseqüentemente a eficiência da geração de corrente diminui. Contudo, se a barreira está próxima da borda, seu efeito na difusão de partículas começa a ser menos importante, desde que significativa difusão já ocorreu até a posição da barreira. A eficiência da geração de corrente pode, portanto, crescer por causa do efeito da difusão de partículas de $s \simeq 0,5$ em direção à posição da barreira. A Fig. 31 indica que esse efeito da posição da barreira é mais pronunciado no caso de flutuações magnéticas que no caso de flutuações eletrostáticas.

Na Figura 33 temos o efeito da profundidade da barreira, para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e \tilde{e}_0 , na curva superior, e para $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0$, na curva inferior, em $\tau = 60$, para $s_b = 0,5$. Vê-se que o crescimento de α , que diminui com a profundidade da barreira, contribui para um leve crescimento na eficiência da geração de corrente. No valor limite $\alpha = 1,0$, a barreira é eliminada e o efeito do transporte não é dificultado dentro da lâmina.

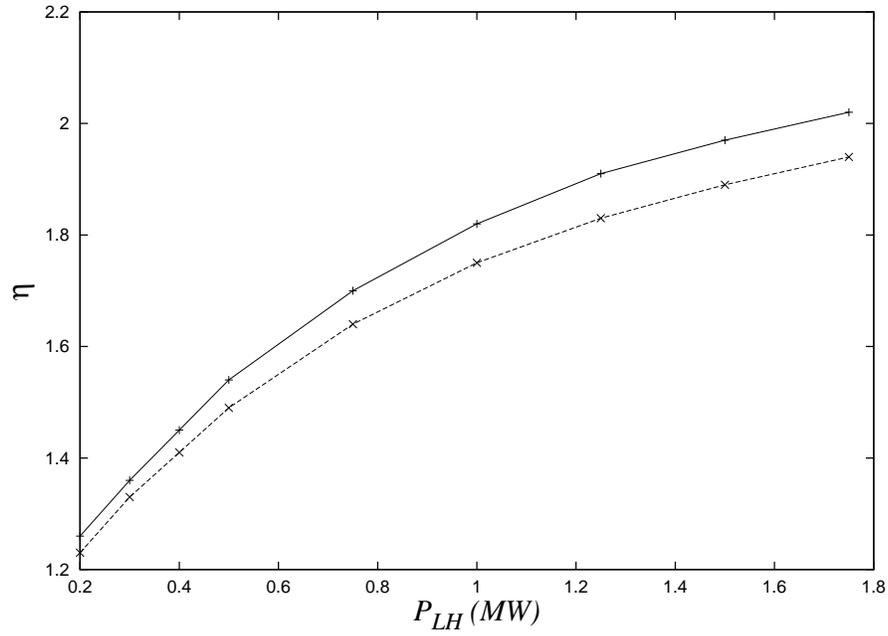


Figura 32: Eficiência de geração de corrente η vs. potência da onda LH MW, em $\tau = 60$. A curva superior é para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0$. A curva inferior é para $\tilde{e}_0 = 0,50 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25.

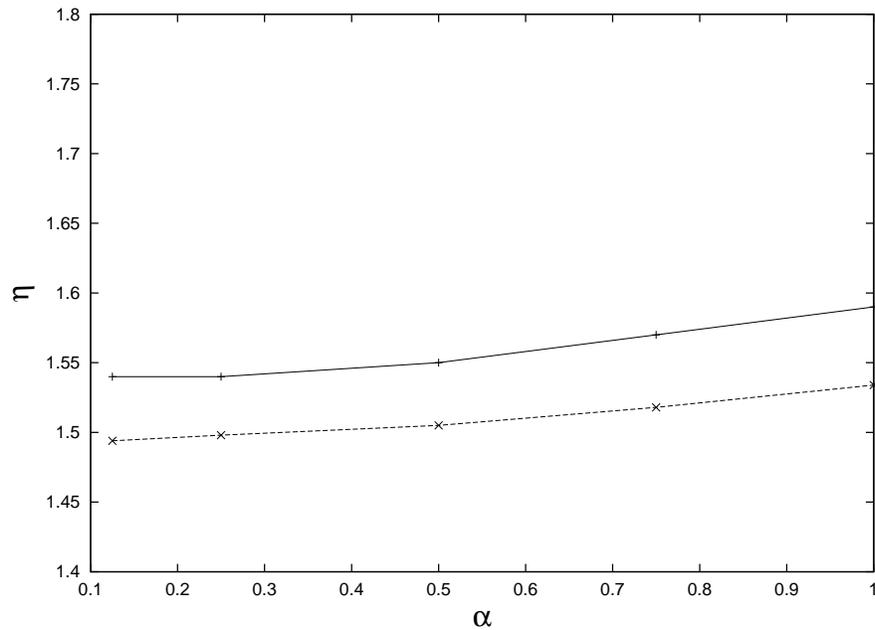


Figura 33: η vs. α (a profundidade da barreira diminui para a direita), em $\tau = 60$; curva superior, flutuações magnéticas, curva inferior, flutuações eletrostáticas.

Outra interessante ferramenta para o diagnóstico da distribuição não-térmica é a radiação EC emitida perpendicularmente do campo magnético, na borda do plasma, ou seja a potência irradiada por unidade de área da lâmina ($d\sigma$), por unidade de ângulo sólido ($d\Omega_{\vec{k}}$), por unidade de frequência angular ($d\omega$) dada em keV/m², que aqui chamaremos simplesmente de "Intensidade de Emissão"

$$I_j = \left(\frac{2\pi\omega_c}{c}\right)^2 \int_{x_0}^{x_1} dx \beta_j(x) \exp\left(-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} n_j'' dx'\right), \quad (6.2)$$

onde $j = X, O$, para modos extraordinário (X) e ordinário (O), correspondendo às equações (4.18) e (4.17), respectivamente, e onde

$$\beta_O = \frac{G_{33}(\omega, k')}{|1 - \chi_{33}|^2 |n_O|},$$

$$\beta_X = \frac{|\epsilon_{11} - i\epsilon_{12}|^2}{|\epsilon_{11}|^2 |n_X|} G_{11}(\omega, k').$$

G_{11} e G_{33} são os componentes do tensor de correlação de corrente localmente homogêneo, os ϵ_{ij} são os componentes do tensor dielétrico para ondas EC, e n_X e n_O são respectivamente o índice de refração para ondas extraordinárias e ordinárias (ZIEBELL; DILLENBURG, 1983), relacionado com o número de onda por $n = ck/\omega$. As partes real e imaginária do número de onda são, respectivamente, k' e k'' , e ω é a frequência angular das ondas EC emitidas.

A análise de emissão EC é similar à análise anterior. A Fig. 34 (a) mostra a intensidade de emissão EC em $x = a$ para vários valores do nível de perturbação magnética \tilde{b}_0 (e $\tilde{\epsilon}_0$), para o modo O e propagação perpendicular, em $\tau = 60$. A emissividade é mostrada como uma função da frequência de onda ν , no intervalo do harmônico $n = 2$ da frequência de cíclotron, para os mesmos valores de α , β e s_b usados na Fig. 27 (a). A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana, antes da injeção de LH. É altamente notado que o aumento da intensidade espectral na região de baixa frequência do espectro é devido à presença de partículas não-térmicas. A emissividade nessas baixas frequências decresce na região da cauda próxima, devido à ocorrência de transporte, e cresce na região da cauda distante. No presente caso, essas regiões ocorrem para $121 \text{ GHz} \leq \nu \leq 129 \text{ GHz}$ e $\nu \leq 121 \text{ GHz}$, respectivamente. Esses aspectos são consequência direta da variação da massa relativística dos elétrons, e permitem que os elétrons emitam em frequência menor que a frequência EC. Em uma dada posição, como as ondas LH empurram elétrons aumentando o momentum deles no espaço de momentum, a emissão devido a esses elétrons é movida em direção a baixas frequências. À medida que o transporte move essas partículas em direção à borda de campo baixo, suas emissões

são deslocadas mais abaixo da frequência dominante. A Fig. 34 (a) também mostra o crescimento da emissão no modo O no lado alto do pico central do espectro, devido à presença de corrente.

A Fig. 34 (b) mostra a emissão EC para o modo X , para as mesmas condições e parâmetros usados no caso da Fig. 34 (a). Similar análise pode ser feita. Uma diferença significativa no espectro é que a emissão não-térmica do modo X é mais intensa relativamente ao pico central que no caso do modo O . O pico central não mostra o crescimento da emissão, que foi visto no caso do modo O . As Figs. 35 (a) e (b) mostram as emissões para os modos O e X para diferentes posições da barreira, para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e \tilde{e}_0 . Vê-se que a mudança na posição da barreira não produz qualquer efeito significativo na emissão de ondas EC.

Consideramos agora um conjunto diferente de parâmetros, no intervalo daqueles característicos de tokamaks grandes dos dias de hoje como o JET ²: $n_{e0} = 3,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 5,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 3,0 \text{ T}$, $a = 1,2 \text{ m}$ e $R_0 = 3,0 \text{ m}$. Para o caso de ondas LH, consideramos $P_{LH}(a, t) = 1,0 \text{ MW}$, e escolhemos $\bar{N}_{||0} = 1,8$ e $f_{LH} = 9,95 \times 10^9 \text{ Hz}$. Essa frequência está acima da frequência realmente usada em alguns experimentos LH no JET (ANDRADE et al., 1994), mas será usada nos cálculos porque proporciona condições de absorção que são similares às aquelas obtidas no conjunto anterior de parâmetros.

Na Fig. 36 mostramos a densidade da potência LH absorvida obtida com esses parâmetros, levando em conta o transporte devido a flutuações magnéticas com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Como no caso de tokamaks de tamanho médio anteriormente considerados, a absorção está localizada e ocorre antes do centro do plasma. A diferença é que no caso de tokamaks grandes atuais a absorção é mais localizada e ocorre um tanto próxima à borda do plasma. A densidade de corrente gerada pode ser vista na Fig. 37 e pode ser comparada com aquela da Fig. 26. Está claramente se vendo que no caso ilustrado na Fig. 37 os picos no perfil de corrente são estreitados (no raio normalizado s) e mais próximos à borda do plasma que no caso da Figura 26.

O efeito do transporte na corrente total é similar ao obtido no caso de pequenos tokamaks, como pode ser visto na Fig. 38 e comparado com a Fig. 45 (a). A Fig. 38 foi obtida considerando $\tilde{e}_0 = 0$ e vários valores de \tilde{b}_0 , com $s_b = 0,5$ e $\alpha = 0,125$. O efeito da posição da barreira na eficiência de geração de corrente pode ser visto na Fig. 39,

²Neste estudo consideramos tokamaks de porte médio, incluindo também um exemplo de tokamak de porte maior, que não mostrou comportamento qualitativamente diferente, exceto pela geração de corrente mais periférica. Desta forma optamos por não considerar parâmetros de máquinas ainda maiores, como o ITER, pois a densidade mais alta tende a dificultar a satisfação das condições de acesso das ondas LH.

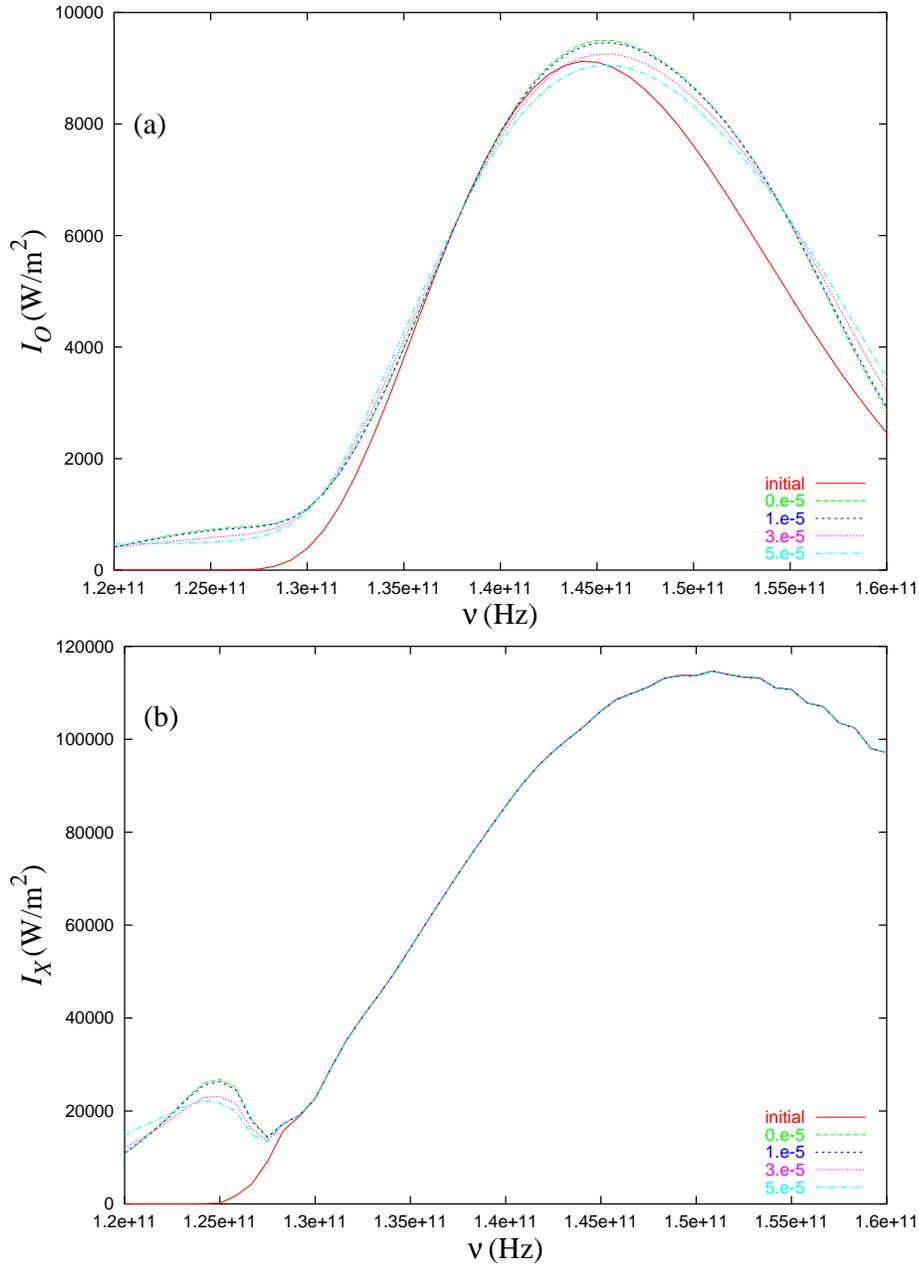


Figura 34: Intensidade de emissão vs. frequência da onda, em $\tau = 60$, no intervalo do harmônico $n = 2$ da frequência de ciclotron, para vários valores de \tilde{b}_0 . $\tilde{b}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. (a) Modo ordinário; (b) Modo extraordinário.

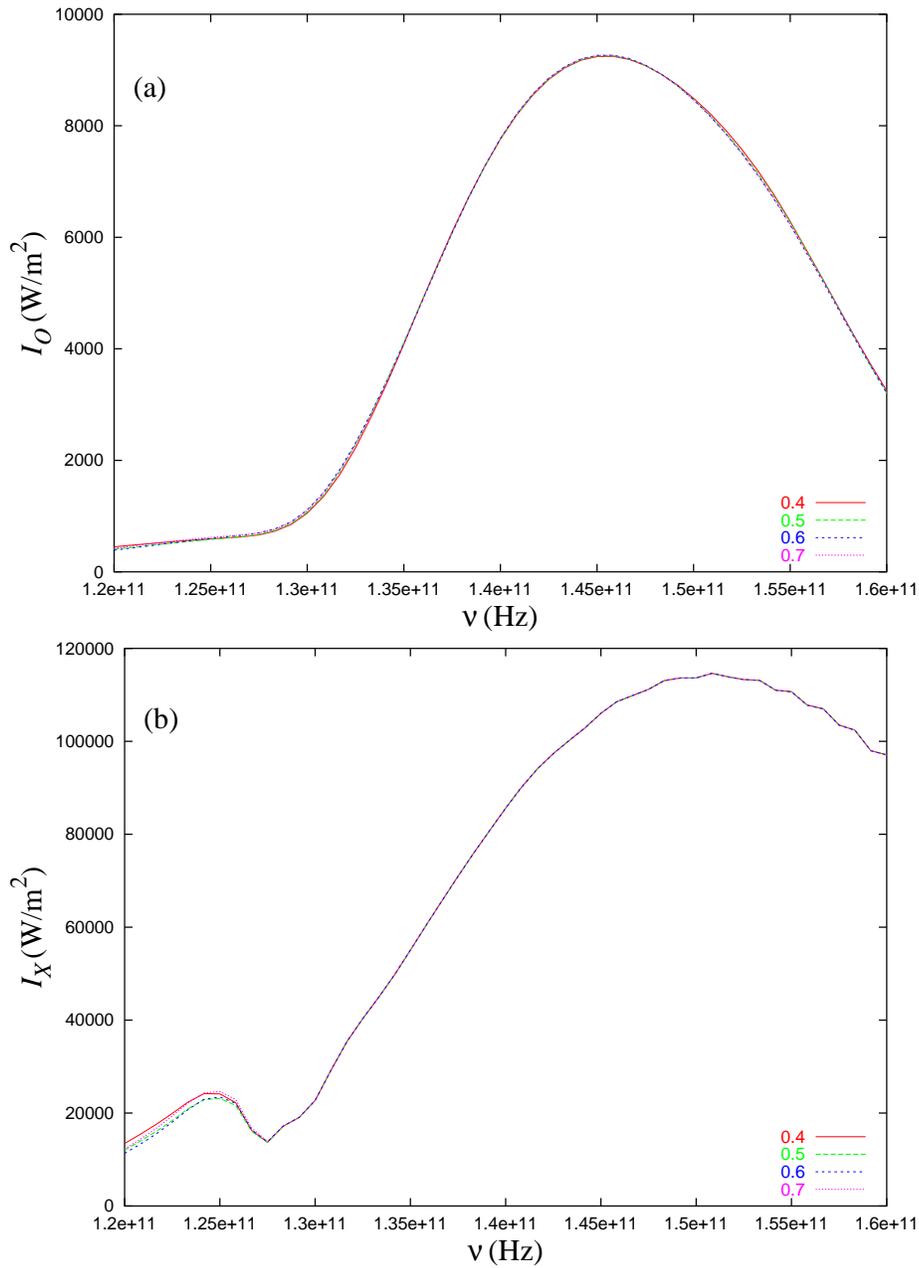


Figura 35: Intensidade de emissão vs. frequência da onda, em $\tau = 60$, no intervalo do harmônico $n = 2$ da frequência de ciclotron, para vários valores de posição da barreira. $s_b = 0,4$, $s_b = 0,5$, $s_b = 0,6$, $s_b = 0,7$. O nível de flutuação é tal que $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{e}_0 = 0$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 25. (a) Modo ordinário; (b) Modo extraordinário.

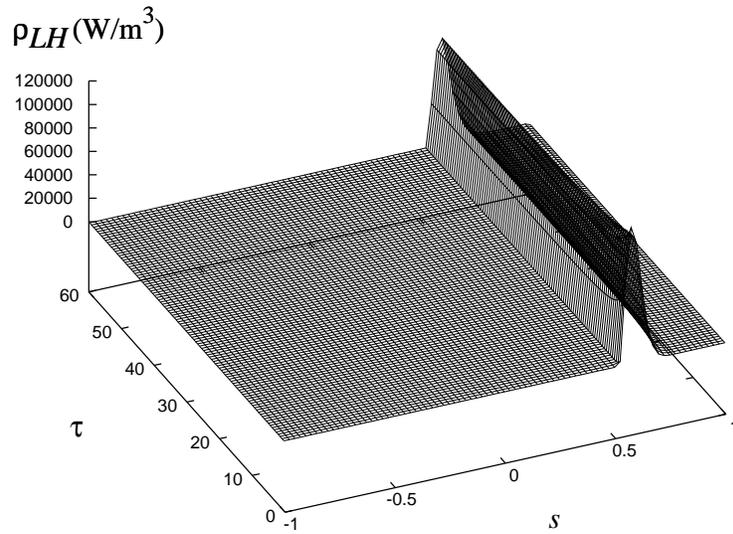


Figura 36: ρ_{th} vs. s como uma função de τ , para um tokamak grande, considerando transporte devido a flutuações magnéticas com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Os parâmetros são característicos de um tokamak grande, $n_{e0} = 3,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 5,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 3,0 \text{ T}$, $a = 1,2 \text{ m}$, $R_0 = 3,0 \text{ m}$. Para ondas LH, nós consideramos $P_{LH}(a, t) = 1,0 \text{ MW}$, $N_{\parallel 0} = 1,8$, e $f_{LH} = 9,95 \times 10^9 \text{ Hz}$. A barreira é localizada em $s_b = 0,5$, com $\alpha = 0,125$, e $\beta = 3,0 \text{ cm}$.

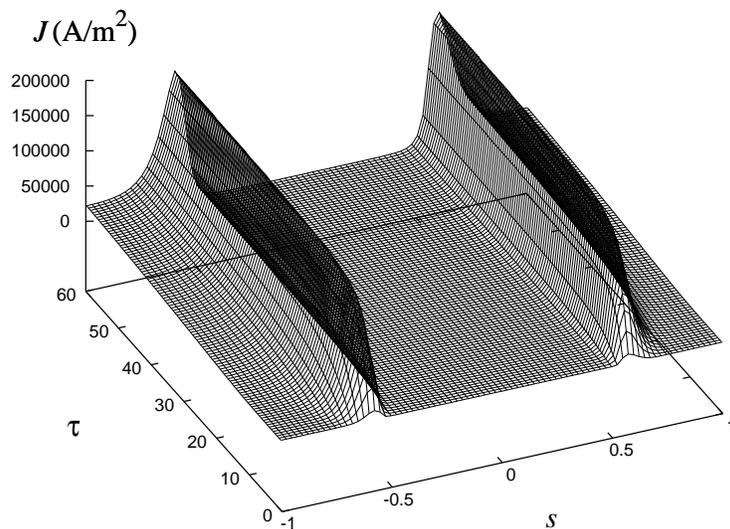


Figura 37: Densidade de corrente J vs. s como uma função de τ , para um tokamak grande, considerando transporte devido a flutuações magnéticas com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36.

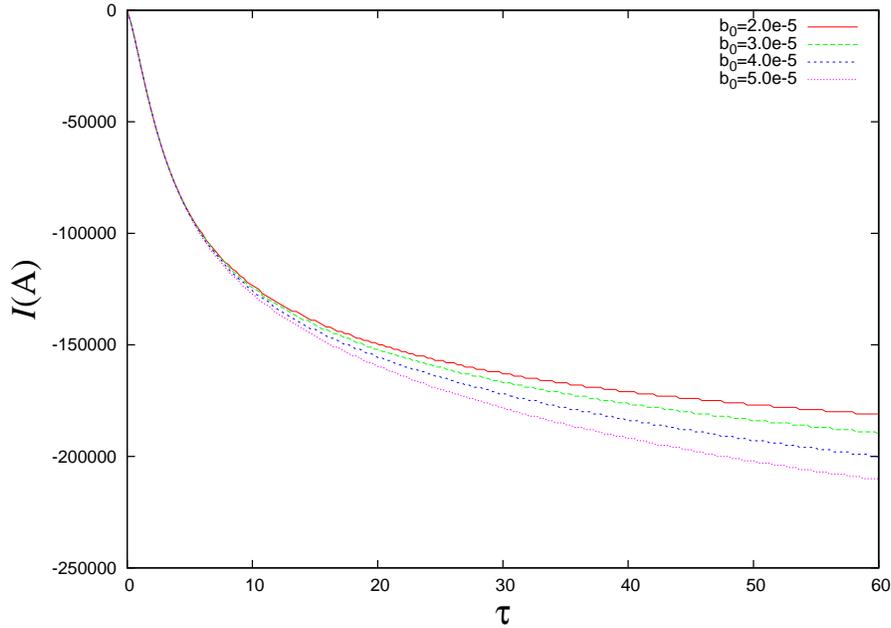


Figura 38: I vs. τ para $\tilde{e}_0 = 0$ e vários valores de \tilde{b}_0 , para um tokamak grande. $\tilde{b}_0 = 2,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$, $\tilde{b}_0 = 4,0 \times 10^{-5}$, e $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36.

obtida assumindo $\tilde{e}_0 = 0$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\alpha = 0,125$. A Fig. 39 é similar à Fig. 31, com a diferença que no caso presente a eficiência mínima ocorre quando a barreira está na posição $s_b = 0,7$ no lugar de $s_b = 0,6$. A razão é que no caso presente a absorção LH ocorre principalmente para $s_b \simeq 0,6$, enquanto que no primeiro caso foi localizada em $s_b \simeq 0,5$.

A diferença em η é dificilmente vista no perfil de densidade de corrente, o qual é similar para diferentes posições do centro da barreira, como na Fig. 40.

6.2 Caso II - LH + EC

Para a análise numérica, consideramos os seguintes parâmetros, típicos de tokamaks de tamanho médio, escolhidos a fim de garantir absorção total de ondas LH, para os perfis considerados: $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 3,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 2,65 \text{ T}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $R_0 = 1,0 \text{ m}$. Para ondas LH, consideramos $P_{LH}(a, t) = 0,5 \text{ MW}$, e escolhemos $N_{||0} = 2,3$ e $f_{LH} = 3,37 \text{ GHz}$. Para a maioria das aplicações, a menos que seja expresso, usamos $s_b = 0,5$, $\alpha = 0,125$ e $\beta = 0,15$.

Como já discutimos, em cada ponto da lâmina há um intervalo de valores para o índice de refração paralelo que é calculado para as ondas LH, limitado a N_1 e N_2 . Existe um

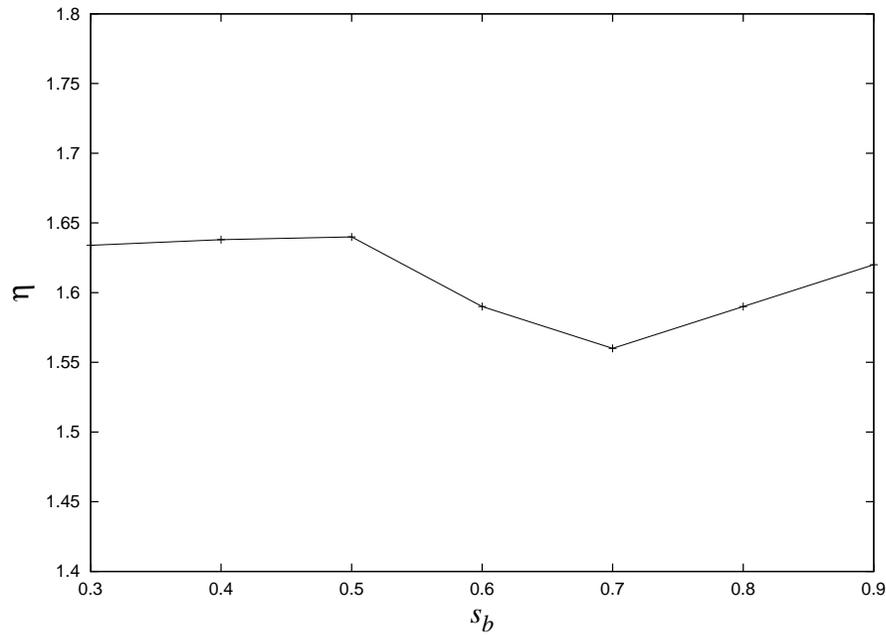


Figura 39: Eficiência de geração de corrente η vs. posição da barreira de transporte, em um tokamak grande, para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0$, em $\tau = 60$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36.

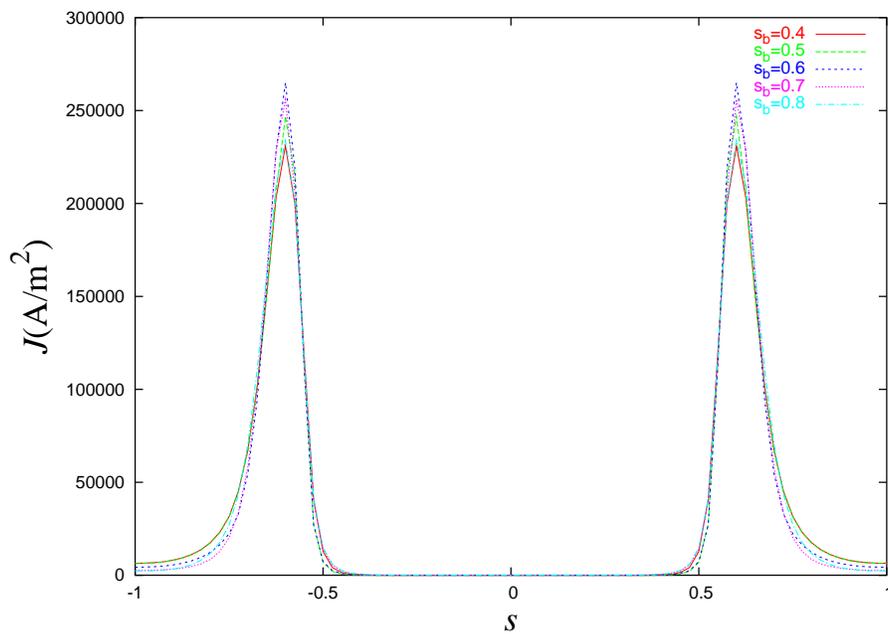


Figura 40: Densidade de corrente J vs. posição na lâmina de plasma, em um tokamak grande, para vários valores de s_b , a posição da barreira de transporte, para $\tilde{b}_0 = 3.0 \times 10^{-5}$, em $\tau = 60$. $s_b = 0.4$, $s_b = 0.5$, $s_b = 0.6$, $s_b = 0.7$, and $s_b = 0.8$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 36.

intervalo correspondente de velocidades ressonantes, que pode ser visto, por exemplo, na Fig. 24 da seção anterior, para os parâmetros listados no parágrafo anterior, como uma função da posição dentro da lâmina. O intervalo de velocidades ressonantes é dependente da posição, apesar de praticamente uniforme em uma parte significativa da lâmina. Por exemplo, para os parâmetros listados no parágrafo anterior, as velocidades ressonantes aproximadamente varrem o intervalo entre $u_{\parallel} = 3,3$ e $u_{\parallel} = 6,0$, na região da lâmina onde a maior parte da potência LH é depositada, em torno de $s = 0,5$ (OLIVEIRA; ZIEBELL; ROSA, 2005).

Para ondas EC, consideramos o modo extraordinário, com frequência $f_{EC} = 140$ GHz³, injetada em um ângulo $\Psi = 20^\circ$ relativo à perpendicular ao campo magnético ambiente, com $\Delta\Psi = 3^\circ$ como meia largura do espectro. Como uma consequência, $\bar{n}_{\parallel} = \sin\Psi \simeq 0,342$, e $\Delta n_{\parallel} \simeq 0,052$. Para a maioria das aplicações, a menos que mencionado, usamos $P_{EC} = 0,5$ MW.

Na Fig. 41 temos a densidade de potência LH e EC absorvida como uma função da posição na borda do plasma, em $\tau = 80$, para o caso do transporte magnético com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{\epsilon}_0 = 0,0$, e profundidade da barreira dada por $\alpha = 0,125$. Também é mostrada a densidade da potência LH em $\tau = 50$ e em $\tau = 0$, para o mesmo caso. A curva para $\tau = 50$ mostra que no fim da fase LH a potência LH é principalmente depositada próximo à posição $s = 0,4$, levemente deslocada em direção à borda do plasma quando comparada ao perfil inicial de deposição. Em $\tau = 80$, a deposição de ondas LH moveu-se mais externamente, em direção à posição $s = 0,5$, com o perfil levemente alargado quando comparado à situação $\tau = 50$. A absorção EC ocorre em uma região mais estreita se comparada com a absorção LH, em torno de $s = 4,5$.

A Fig. 42 mostra curvas correspondendo às curvas da 41, mas obtidas considerando a ausência de ITB. Os resultados mostrados na Fig. 42 da figura são muito similares àqueles mostrados na Fig. 41, com a única diferença de que os perfis de absorção LH em $\tau = 50$ e em $\tau = 80$ são muito levemente mais alargados no caso com ausência de barreira que no caso com barreira.

A Fig. 43 mostra curvas correspondendo àquelas das Figuras 41 e 42, mas obtidas ignorando efeitos de transporte. Observamos que o pico de absorção LH move-se para fora entre $\tau = 0$ e $\tau = 50$, mesmo com a ausência de transporte. Isso ocorre devido à

³Em (NSCL MICHIGAN STATE UNIVERSITY, 2004), temos que em *Electron Cyclotron Resonance Source* elétrons são excitados por micro-ondas com frequência de 5 GHz através de ressonância eletrônica de cíclotron, portanto, mesmo fenômeno de excitação usado para gerar corrente em tokamaks. Essa diferença de frequência utilizada em ressonância EC deve-se à intensidade do campo e à existência de harmônicos.

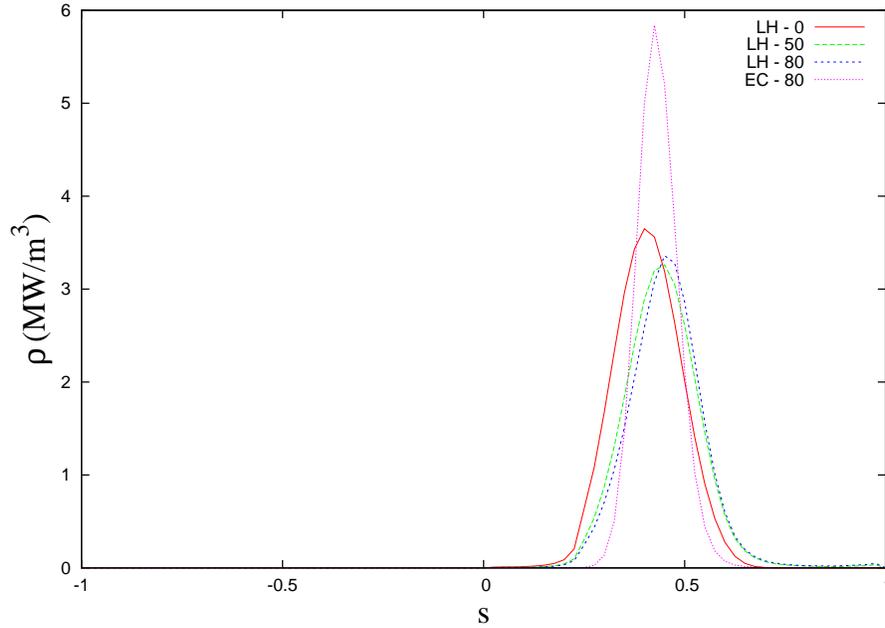


Figura 41: ρ_{EC} vs s , para $P_{LH}(a, t) = 0,5$ MW e $P_{EC}(a, t) = 0,5$ MW. O caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. A ITB está localizada em $s_b = 0,5$, com $\alpha = 0,125$, e $\beta = 0,15$. As curvas mostradas são: ρ_{LH} em $\tau = 0,0$; ρ_{LH} em $\tau = 50$; ρ_{LH} em $\tau = 80$ e ρ_{EC} em $\tau = 80$. Os parâmetros são característicos de tokamaks de tamanho médio. $n_{e0} = 6,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 3,0 \text{ keV}$, $B_0(0) = 2,65 \text{ T}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $R_0 = 1,0 \text{ m}$. Para as ondas LH, $N_{\parallel 0} = 2,3$, $f_{LH} = 3,37 \times 10^9 \text{ Hz}$, e $n_L = 6,5$.

formação da cauda de elétrons na distribuição e a conseqüente modificação da absorção da onda. Esse processo já atingiu o estado estacionário em $\tau = 50$, e não é afetado por ondas EC, desde que as curvas para absorção LH em $\tau = 50$ e $\tau = 80$ são aproximadamente as mesmas.

Contudo, quando compara-se o caso sem transporte mostrado na Fig. 43 com os casos com transporte mostrados nas Figs. 41 e 42, observamos que o efeito do transporte é revelado no alargamento do perfil LH (ρ_{LH}). A presença de transporte também é levada em conta pelos efeitos de sinergismo entre LH e EC, revelados por uma leve modificação no perfil de absorção LH que ocorre entre $\tau = 50$ e $\tau = 80$, aparecendo nas Figs. 41 e 42.

Os resultados obtidos no Caso II, assim como no Caso I, mostram que a eficiência da geração de corrente **crece** com o nível de flutuações. Entretanto, esse resultado parece contradizer a literatura (HARVEY et al., 2002a). O que ocorre é que no caso relatado por (HARVEY et al., 2002a) para o modo L no tokamak TCV, não existem boas condições de confinamento de partículas - o que freqüentemente é observado em experimentos em tokamaks - sendo essa a principal razão para uma substancial diminuição na eficiência de geração de corrente por ondas EC (ECCD).

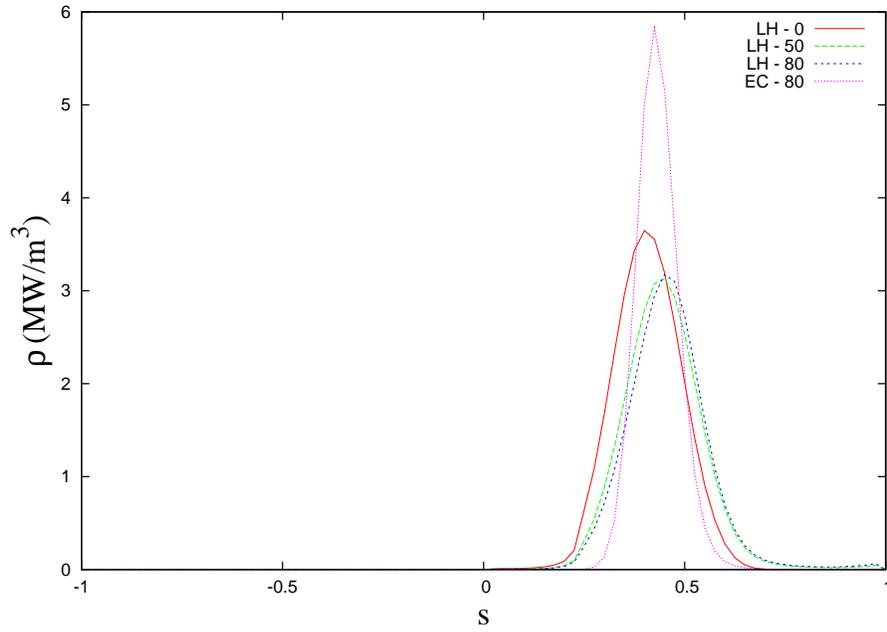


Figura 42: ρ_{EC} vs s , para $P_{LH}(a,t) = 0,5$ MW e $P_{EC}(a,t) = 0,5$ MW. O caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. Sem presença de ITB. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

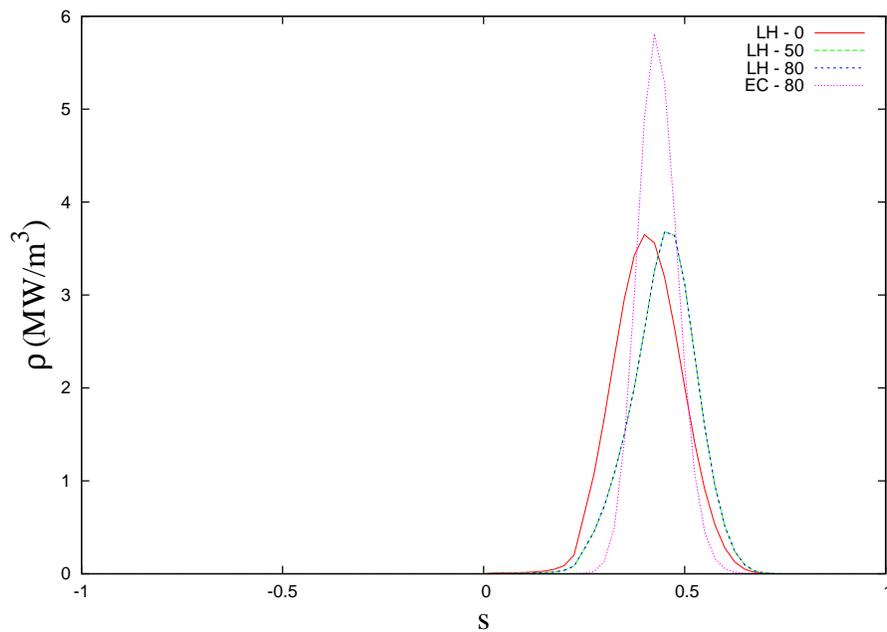


Figura 43: ρ_{EC} vs s , para $P_{LH}(a,t) = 0.5$ MW e $P_{EC}(a,t) = 0.5$ MW. Caso sem efeitos de transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

Enfatizamos que no estudo do Caso II, assim como tínhamos feito no Caso I, implementamos boas condições de confinamento ao considerar condições de contorno de Neumann em nossos cálculos numéricos. Desta forma, nossos resultados podem ser considerados como um limite superior para a eficiência de geração de corrente, podendo ser repetidos aqui os mesmos comentários já feitos ao final de seção 5.2.

A Fig. 44 mostra a densidade de corrente J vs. posição na lâmina de plasma s em função de τ . O painel (a) mostra o caso de transporte magnético com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, o painel (b) mostra o caso de transporte eletrostático com $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, e o painel (c) o caso sem transporte. Outros parâmetros são os mesmos que os da Fig. 41. É notável o rápido crescimento da densidade de corrente depois do início das ondas EC, que ocorre em $\tau = 50$. Também é notável nos painéis (a) e (b) o alargamento do perfil de densidade de corrente devido a transporte radial, quando comparado com o caso sem transporte no painel (c).

O alargamento é levemente mais pronunciado no caso de transporte magnético, painel (a), que no caso de transporte eletrostático, painel (b). Em ambos os casos, transporte magnético e transporte eletrostático, a posição do pico de densidade de corrente não se move, de forma muito notável, pela introdução de ondas EC, e não se move pelo efeito de transporte. Uma análise quantitativa aproximada pode ser como segue. No caso sem transporte, mostrado no painel (c), o pico de densidade de corrente em $\tau = 80$ é aproximadamente $6,1/3,7 \simeq 1,65$, ou 65% maior que o pico no final da fase com somente LH, em $\tau = 50$. Levando em conta o efeito do transporte de origem magnética, como no painel (a), ocorre um alargamento significativo, mas a razão entre os picos de densidade de corrente em $\tau = 80$ e em $\tau = 50$ permanece aproximadamente a mesma, dada por $4,5/2,8 \simeq 1,61$. No caso de transporte eletrostático, mostrado na Fig. 44 (b), o pico de densidade de corrente em $\tau = 80$ é aproximadamente $4,9/3,1 \simeq 1,58$, ou 58% maior que o pico no fim da fase com somente LH, em $\tau = 50$. Os picos são maiores que os correspondentes picos no painel (a), obtido no caso de transporte magnético, e nota-se menor alargamento em direção à borda do plasma. Parece que o transporte eletrostático nesse nível de turbulência é menos eficiente no alargamento do perfil de densidade de corrente LH que o transporte magnético. A razão é que o transporte magnético é mais efetivo para partículas de alta energia que o transporte eletrostático, de acordo com o modelo utilizado. As magnitudes dos níveis de flutuações eletrostáticas e magnéticas considerados para as Figs. 44 (a) e 44 (b) estão dentro do intervalo de valores experimentais (CASTLE; WOOTTON, 1994; LIEWER, 1985; KIM, 1991), e já foram utilizados em análises prévias dos efeitos de transporte na geração de corrente LH (OLIVEIRA; ZIEBELL; ROSA, 2005).

A Fig. 45 mostra a corrente gerada como uma função do tempo, exibindo o caso sem transporte e os casos de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e o de transporte eletrostático, $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$. Vê-se que a presença de transporte contribui para o crescimento da corrente gerada. Também se vê que o efeito do transporte eletrostático na geração de corrente é extraordinariamente similar ao efeito do transporte magnético. Na Fig. 45 (a) e em muitas das figuras seguintes, o caso de transporte magnético é indicado por MG, e o caso de transporte eletrostático é indicado por ES.

A eficiência da geração de corrente pode ser mensurada pelo parâmetro adimensional

$$\eta = 33 \frac{|I|R_0 n_{ave}}{(P_{LH} + P_{EC})T_{ave}}, \quad (6.3)$$

onde n_{ave} é a densidade de elétrons expressa em unidades de 10^{20}m^{-3} , mediada sobre a coordenada radial, e T_{ave} é a temperatura de elétrons expressa em keV, também mediada sobre a coordenada radial (LUCÉ et al., 1999).

A Fig. 45 (b) mostra a eficiência da geração de corrente como uma função do tempo, exibindo o caso sem transporte e os casos com transporte magnético com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e o de transporte eletrostático, $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$. Vê-se que a presença de transporte contribui para o crescimento da eficiência da geração de corrente, quando comparada com o caso sem transporte. Também se vê que o efeito do transporte eletrostático na eficiência de geração de corrente é extraordinariamente similar ao caso do transporte magnético. Embora a corrente gerada cresça imediatamente depois do início das ondas EC, a eficiência global diminui com a introdução de ondas EC, comparando com a eficiência das ondas LH somente. Depois da súbita diminuição que ocorre no começo das ondas EC, a eficiência levemente cresce novamente, mas para os parâmetros utilizados não atinge o mesmo nível atingido com as ondas LH somente.

A Fig. 46 mostra a eficiência da geração de corrente η vs. o nível de flutuação magnética \tilde{b}_0 variando de $\tilde{b}_0 = 0,0$ a $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$, para $\tilde{e}_0 = 0,0$, em $\tau = 50$ e em $\tau = 80$. A Fig. 46 (b) mostra a eficiência da geração de corrente η vs. flutuações eletrostáticas \tilde{e}_0 variando de $\tilde{e}_0 = 0,0$ a $\tilde{e}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, para $\tilde{b}_0 = 0,0$, em $\tau = 50$ e em $\tau = 80$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 41. As Figs. 46 (a) e 46 (b) mostram que a turbulência eletrostática com $\tilde{e}_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ produz, na eficiência de geração de corrente, efeito similar ao da turbulência magnética com $\tilde{b}_0 = 5,0 \times 10^{-5}$. Em ambos os casos de transporte eletrostático e magnético, a eficiência em $\tau = 80$ é aproximadamente

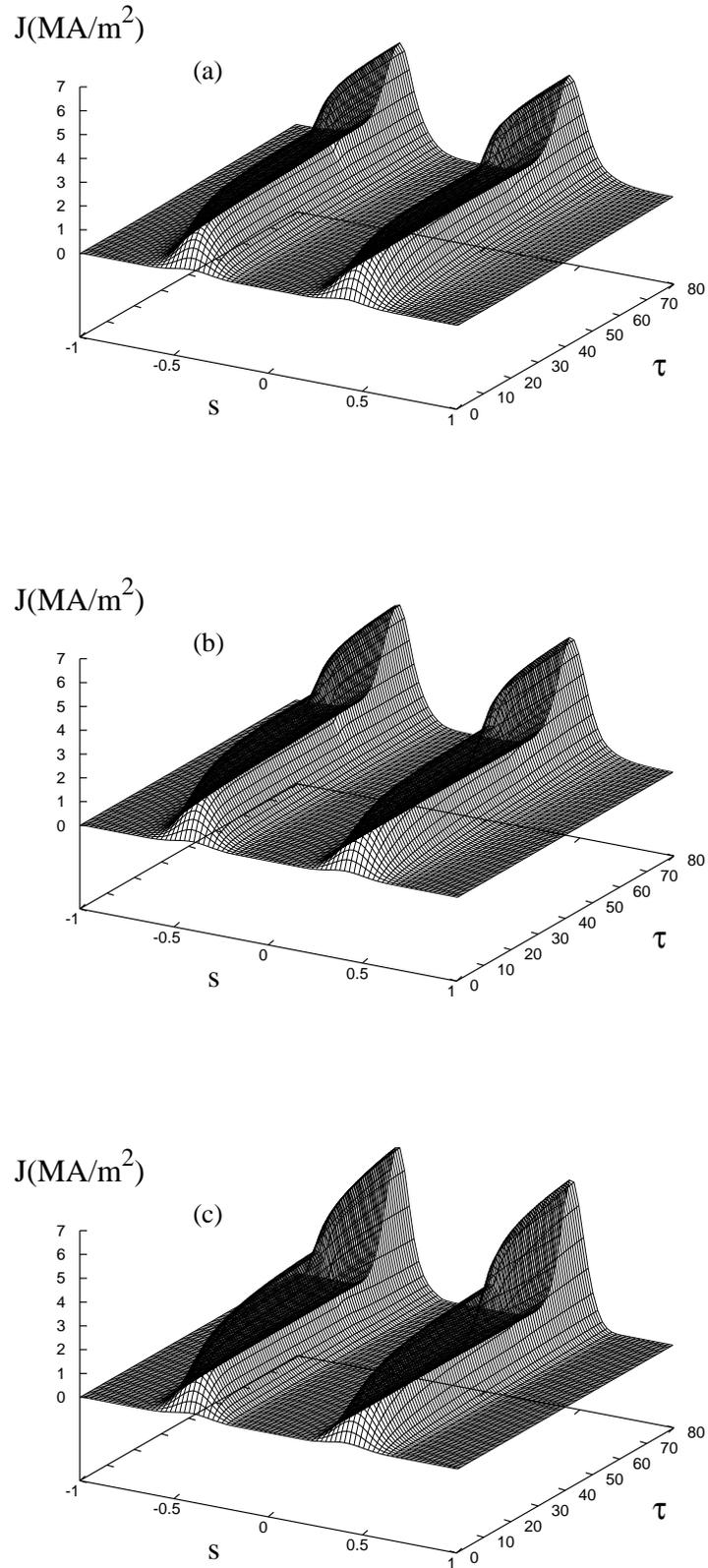


Figura 44: J vs s como função de τ . (a) Caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. (b) Caso de transporte eletrostático - $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. (c) Caso sem efeitos de transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

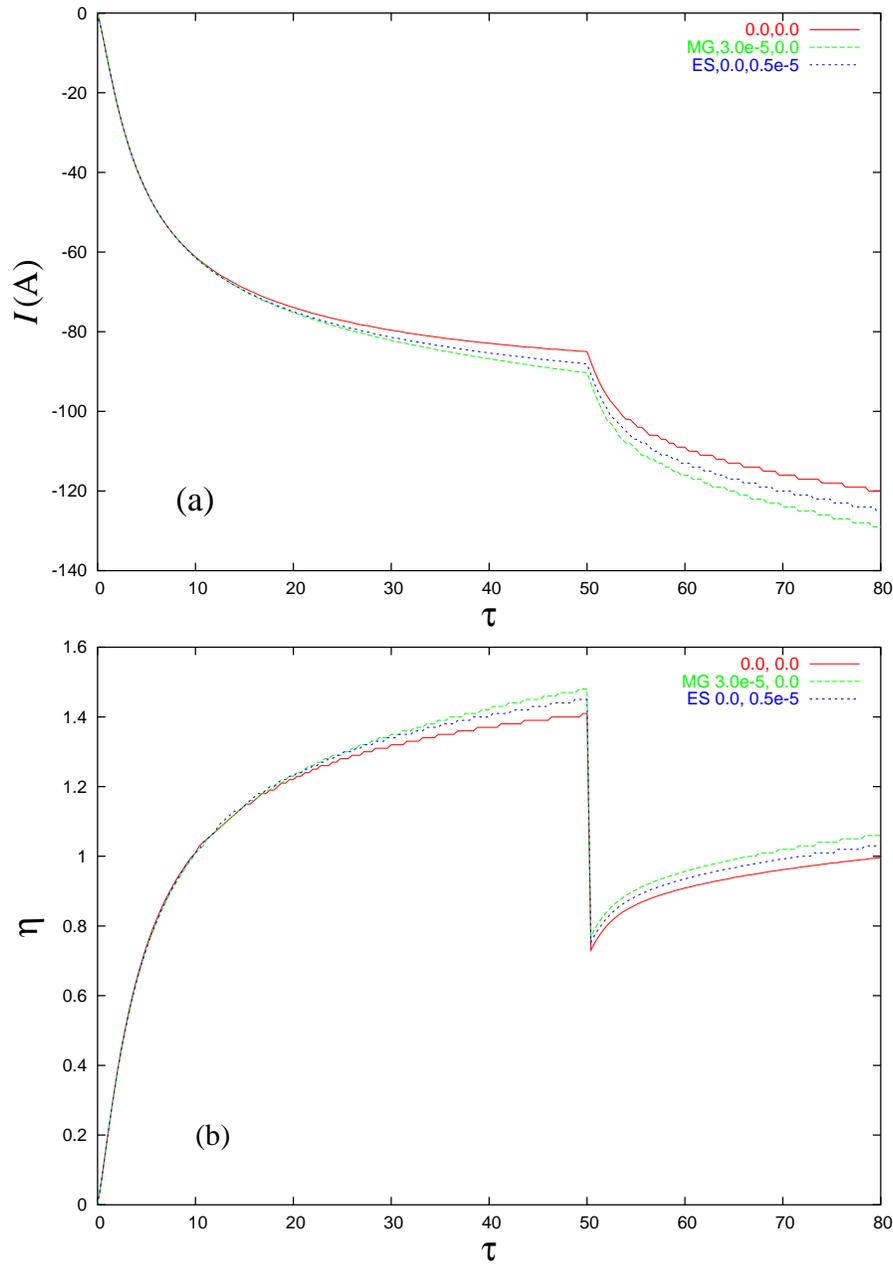


Figura 45: (a) Corrente I vs. tempo normalizado τ . (b) Eficiência de geração de corrente η vs. tempo normalizado τ . As curvas mostradas para cada painel são: o caso sem transporte; caso de transporte magnético - $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$; caso de transporte eletrostático - $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

70% da eficiência no fim da fase LH, em $\tau = 50$. Também se vê que a dependência da eficiência de geração de corrente com o nível de turbulência é aproximadamente a mesma nos casos de transporte magnético e eletrostático. O crescimento da eficiência de geração de corrente com o crescimento do nível de turbulência pode ser explicado pelo seguinte mecanismo. Partículas rápidas são movidas radialmente em direção a regiões menos densas do tokamak pelo efeito de transporte. Nessas regiões o tempo de moderação devido a colisões é aumentado, portanto o nível de corrente gerada é aumentado. Embora no caso eletrostático a difusão de partículas rápidas seja menos eficiente do que no caso de flutuações magnéticas, em ambos os casos ocorre difusão de partículas na região da cauda gerada pelas ondas. Como argumentado anteriormente, essas partículas que difundem tornam-se menos colisionais, resultando em aumento da corrente. Uma vez que os coeficientes de difusão são proporcionais aos níveis de flutuação tanto no caso eletrostático quanto no caso magnético, não é surpreendente que variações semelhantes nos níveis de flutuação tenham produzido efeito semelhante sobre a geração de corrente.

Lembrando a Fig. 30 da seção anterior, verificamos a consistência dessa explicação considerando uma situação com diferentes densidades de plasma, mantendo os mesmos perfis e todos os outros parâmetros. O argumento pode ser ilustrado com os resultados mostrados na Fig. 30 da seção anterior, que mostra que com o crescimento da densidade de elétrons a eficiência da geração de corrente é reduzida. Também mostra que a contribuição positiva do transporte para a eficiência de geração de corrente é mais significativa para densidades de elétrons pequenas. Ambos os achados estão de acordo com a explicação dada nos parágrafos anteriores.

O efeito da posição do centro da ITB pode ser visto na Fig. 47, que mostra a eficiência de geração de corrente η vs. a posição da ITB, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. As duas curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para os mesmos parâmetros, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 41. Vê-se que, tanto no final da fase LH como no final da fase com efeito combinado das ondas LH e EC, a eficiência é um mínimo para $s_b = 0,6$, crescendo quando a barreira se aproxima do centro da lâmina e quando a barreira está próximo à borda da lâmina. A explicação pode ser como segue. Como vimos na Fig. 44, as ondas LH geram corrente em torno de $s_b = 0,5$. A difusão radial em direção à borda do plasma tende a produzir um crescimento da corrente. Se a ITB está localizada em $s_b \leq 0,5$, isso não atrapalha muito a difusão em direção à borda, e a corrente de fato cresce. Se a ITB está localizada próximo de $s_b = 0,6$, está no caminho da difusão radial entre a região de deposição de energia das ondas LH e regiões mais externas,

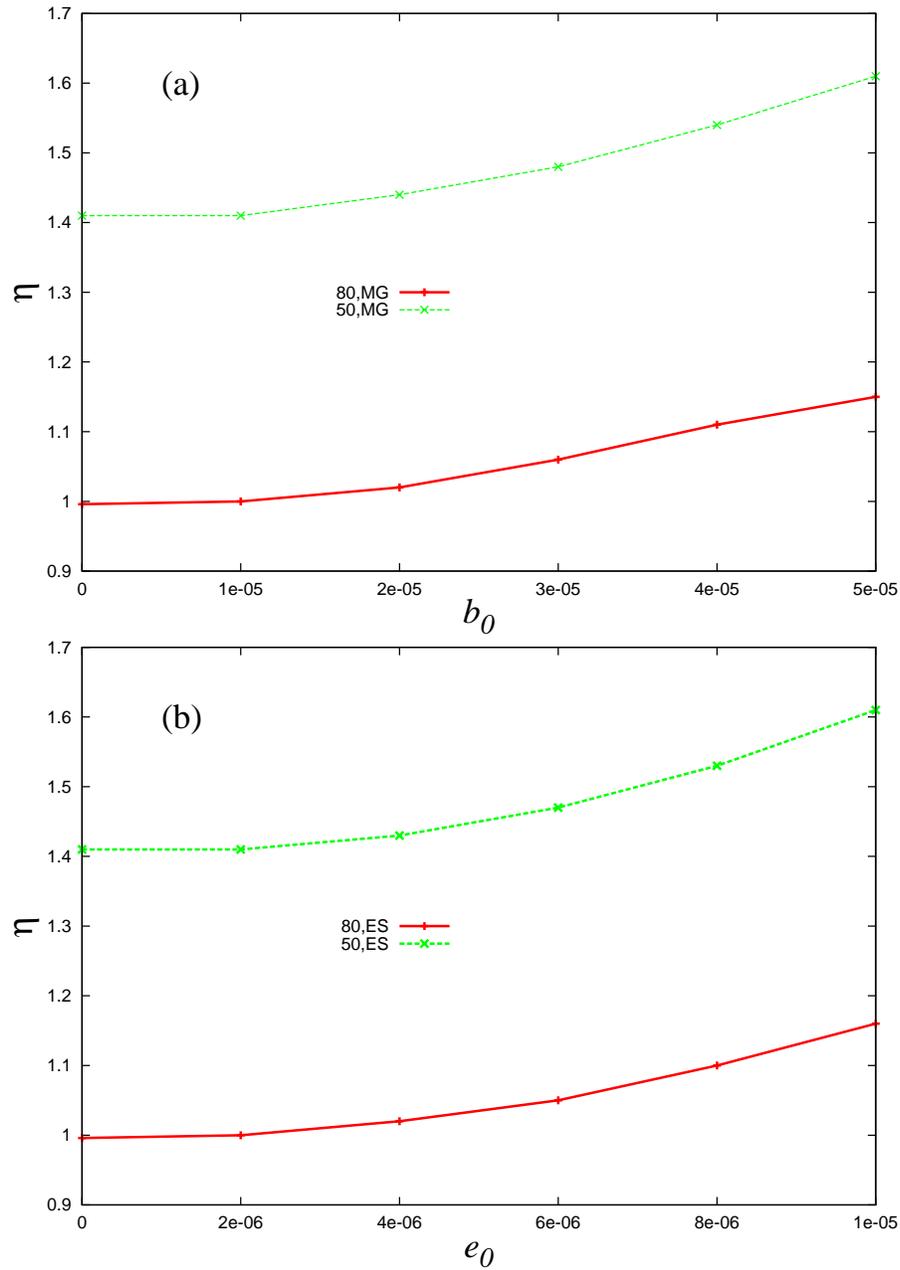


Figura 46: (a) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação magnética \tilde{b}_0 , para $\tilde{e}_0 = 0,0$, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. (b) Eficiência de geração de corrente η vs. nível de flutuação eletrotática \tilde{e}_0 , para $\tilde{b}_0 = 0,0$, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

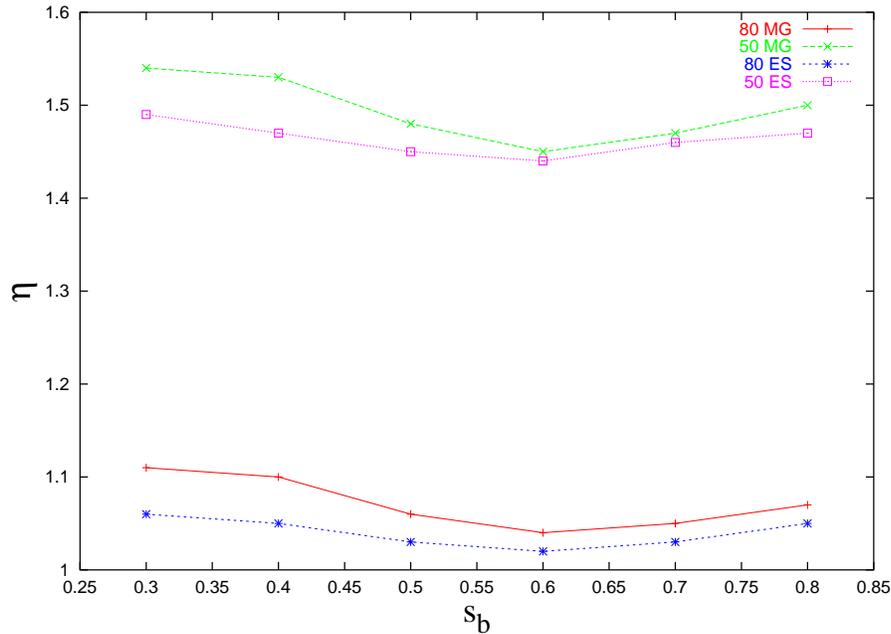


Figura 47: Eficiência de geração de corrente η vs. posição da barreira de transporte s_b , em $\tau = 50$ e $\tau = 80$; as curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

e conseqüentemente a eficiência da geração de corrente diminui. Contudo, se a ITB está próxima da borda, seu efeito na difusão de partículas inicia menos importante, uma vez que significativa difusão já ocorreu antes da posição da barreira. A eficiência de geração de corrente pode portanto crescer pelo efeito da difusão de partículas de $s \simeq 0,5$ em direção à posição da barreira. A Fig. 47 indica que esse efeito da posição da barreira é mais pronunciado no caso de flutuações magnéticas que no caso de flutuações eletrostáticas, ambos em $\tau = 50$ e em $\tau = 80$. Considerando o efeito da posição da barreira, a ação combinada das ondas LH e EC não muda apreciavelmente o comportamento observado com ondas LH sozinhas como mostra a seção anterior.

O efeito da profundidade da barreira é investigado na Fig. 48, que mostra a eficiência de geração de corrente η vs. α , parâmetro relacionado com a profundidade da ITB, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$ ($\alpha = 1$ representa o caso sem barreira). As duas curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para os mesmos parâmetros, em $\tau = 80$. Outros parâmetros são os mesmos que na Fig. 41. Vê-se que a eficiência da geração de corrente é quase independente da profundidade da barreira, apresentando um crescimento muito leve quando a profundidade da barreira é reduzida até desaparecer.

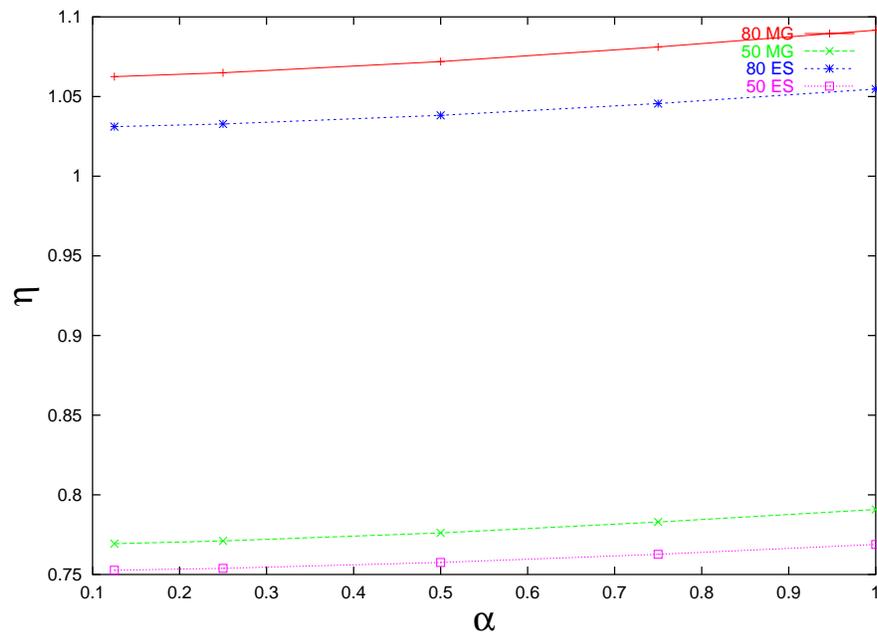


Figura 48: Eficiência de geração de corrente η vs. profundidade da barreira de transporte α , em $\tau = 50$ e $\tau = 80$ (a profundidade da barreira diminui para a direita); as curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

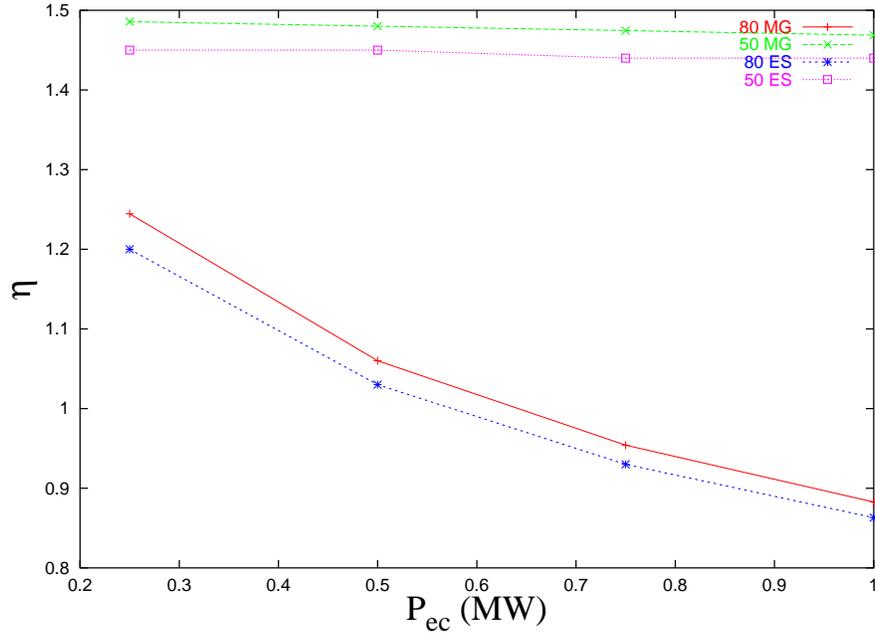


Figura 49: Eficiência de geração de corrente η vs. potência EC em MW, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$; as curvas superiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 50$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, respectivamente, em $\tau = 80$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

A Fig. 49 mostra a eficiência da geração de corrente η vs. a potência EC em MW, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. As curvas inferiores são para $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e para $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$, em $\tau = 80$. As curvas na parte superior do gráfico mostram os valores de η em $\tau = 50$, antes do início das ondas EC. Outros parâmetros são os mesmos que os da Fig. 41. Vê-se que a eficiência de geração de corrente em $\tau = 80$ diminui com o crescimento da potência EC, com a mesma razão de decréscimo nos casos de transporte magnético e eletrostático.

A evolução no tempo da eficiência, que conduz ao resultado que aparece na Fig. 49, aparece na Fig. 50, para τ variando entre 0 e 80, para vários valores da potência EC.

Embora a eficiência da geração de corrente diminua com o crescimento da potência EC, o efeito combinado da potência LH e EC é maior que a soma das eficiências devido a ondas LH e EC em separado, como mostra a Fig. 51, que exhibe a eficiência relativa,

$$\eta_{norm} = \frac{\eta_{LH+EC}}{\eta_{LH} + \eta_{EC}} \simeq \frac{I_{LH+EC}}{I_{LH} + I_{EC}}, \quad (6.4)$$

para o caso de $P_{LH} = 0,5\text{MW}$ e $P_{EC} = 0,25\text{MW}$, $0,50\text{MW}$, $0,75\text{MW}$, e $1,00\text{MW}$. Vê-se que imediatamente depois do início das ondas EC há uma redução na eficiência, mas

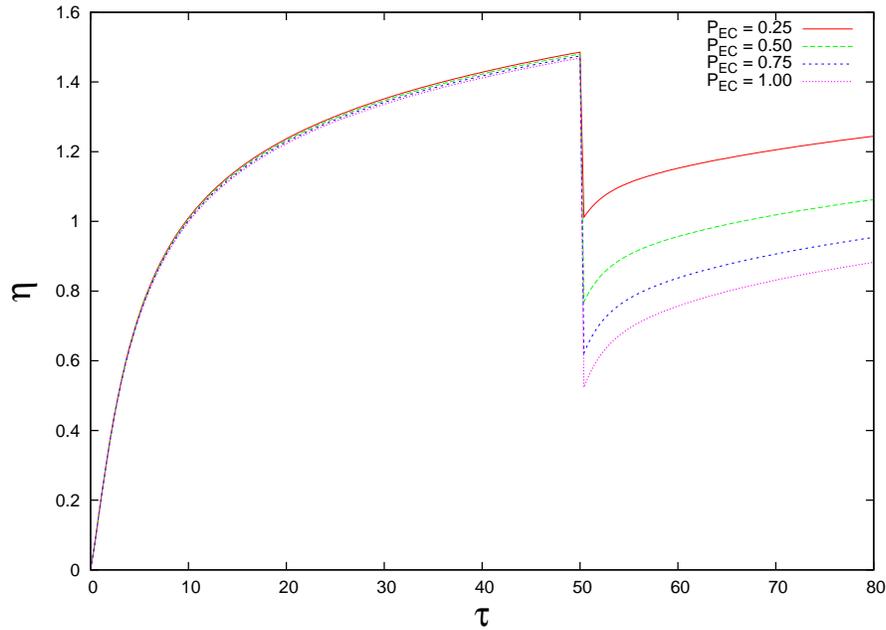


Figura 50: Eficiência de geração de corrente η vs. tempo normalizado τ , para vários valores de potência EC, no caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{\epsilon}_0 = 0,0$. $P_{EC} = 0,25$ MW, $P_{EC} = 0,50$ MW, $P_{EC} = 0,75$ MW, e $P_{EC} = 1,00$ MW. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

depois de alguns tempos de colisão o efeito combinado torna-se maior que as eficiências separadas, indicando um efeito de sinergia⁴ (DUMONT; GIRUZZI; BARBATO, 2000; DUMONT; GIRUZZI, 2004; GIRUZZI, 2004). Em $\tau = 80$, a Fig. 51 mostra que no caso de se considerar uma potência EC maior, que é duas vezes a potência LH, a eficiência combinada tende a um crescimento assintótico de aproximadamente 12%, similar ao crescimento obtido no caso de $P_{EC} = 2P_{LH}$, em (ROSA; ZIEBELL, 2002). Apesar de que em (ROSA; ZIEBELL, 2002), o modelo utilizado para a propagação das ondas LH difere do modelo utilizado aqui, em ambos os casos ocorre alguma superposição espacial entre os perfis de absorção de ondas LH e EC obtidos. A magnitude do efeito de sinergismo obtido é relativamente pequeno. A razão é a seguinte. Embora as regiões espacial de absorção das ondas EC e LH sejam aproximadamente coincidentes, a superposição dos efeitos no espaço de momentum não é muito grande, para os parâmetros utilizados. Na posição de máxima absorção EC, próximo a $s = 0,5$, a extremidade da elipse ressonante para ondas EC, onde a maior parte da potência EC é depositada, ocorre para $u_{\parallel} \simeq 2$, enquanto que a cauda produzida pelas ondas LH aparece para $u_{\parallel} \geq 3$.

A Fig. 52 mostra a eficiência relativa para dois valores diferentes de α , considerando

⁴Sinergia refere-se a associação simultânea de vários fatores que contribuem para uma determinada ação. No caso, os fatores são as ações simultâneas das ondas LH e EC para geração de corrente no plasma.

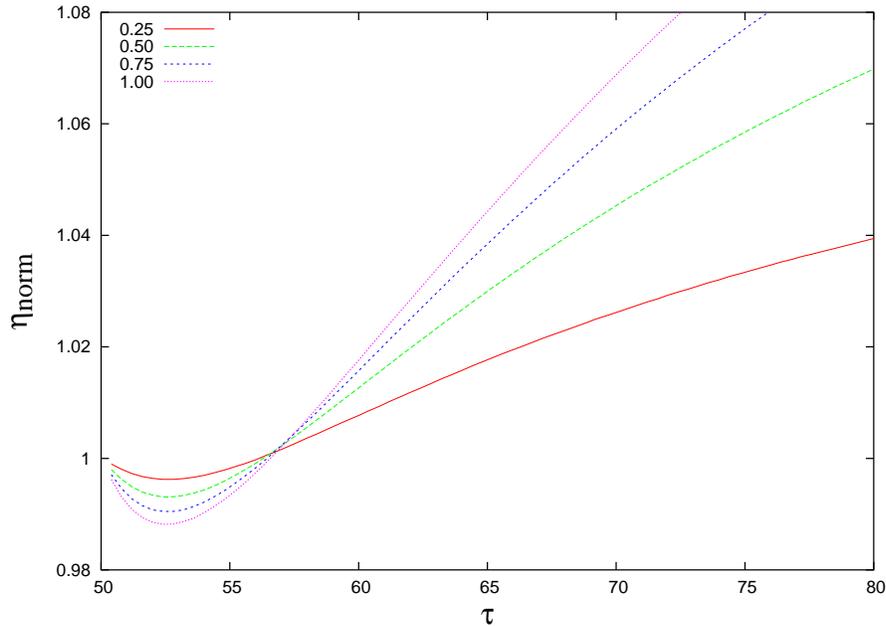


Figura 51: Evolução no tempo da eficiência relativa de geração de corrente, η_{relat} , para vários valores de potência EC, no caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. $P_{EC} = 0,25$ MW, $P_{EC} = 0,50$ MW, $P_{EC} = 0,75$ MW, e $P_{EC} = 1,00$ MW. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

o caso do transporte magnético. Vê-se que a presença da barreira (no caso da figura, com $\alpha = 0,125$) produz uma eficiência relativa levemente acima da eficiência relativa obtida no caso sem barreira ($\alpha = 1,0$). Como vimos nas figuras anteriores, a eficiência da geração de corrente cresce com o efeito de transporte, nas condições propostas de bom confinamento. A presença da barreira com uma profundidade finita, por outro lado, retarda a difusão radial e permite um longo tempo de interação entre as partículas e as ondas, portanto, aumentando a eficiência.

A Fig. 53 mostra a densidade de elétrons como função da posição na lâmina de plasma, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$, para os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$. A Fig. 54 mostra a temperatura de elétrons como função da posição na lâmina de plasma, em $\tau = 50$ e em $\tau = 80$, para o caso $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$. Também é mostrado o perfil inicial em ambos os painéis. Outros parâmetros são os mesmos que da Fig. 41. Na escala da figura não é possível distinguir na Fig. 53 qualquer modificação significativa do perfil de densidade, que em $\tau = 80$ é aproximadamente o mesmo que em $\tau = 0$, tanto para o transporte magnético como para o eletrostático. Por outro lado, na Fig. 54 é possível notar um pequeno decréscimo na temperatura de elétrons no centro do plasma, junto com um pequeno crescimento da temperatura em $s \simeq 0,5$, onde são absorvidas as energias das ondas LH e EC. e um

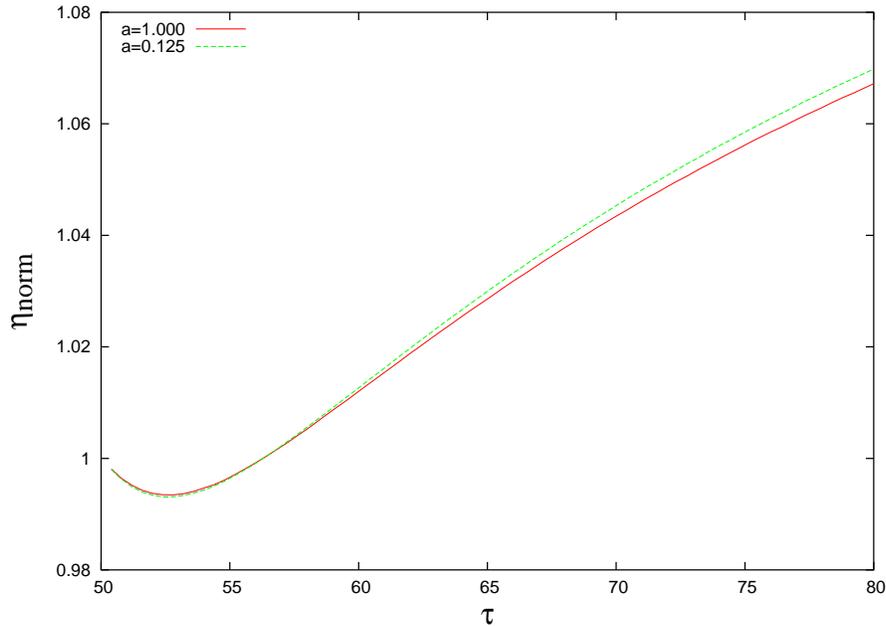


Figura 52: Evolução no tempo da eficiência relativa de geração de corrente, η_{relat} , no caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. Foram obtidas as curvas para $P_{LH} = 0,50$ MW, e mostra os casos para $\alpha = 0,125$ e $\alpha = 1,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

crescimento mais significativo próximo à borda do plasma, no caso com transporte. Uma visão ampliada da região próximo à borda é vista nas Figs. 55 e (56). A Fig. 55 mostra a variação relativa da densidade de elétrons, $\delta n_e = (n_e(\tau) - n_e(\tau = 0))/n_e(\tau = 0)$, em $\tau = 80$, considerando o caso de transporte magnético, com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e o caso de transporte eletrostático, com $\tilde{b}_0 = 0,0$ e $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$. A Fig. 56 mostra as figuras correspondentes para a variação da temperatura de elétrons, $\delta T_e = (T_e(\tau) - T_e(\tau = 0))/T_e(\tau = 0)$, em $\tau = 80$. Vê-se que a variação relativa da densidade próximo à borda é de aproximadamente 2% no caso de transporte magnético, e consideravelmente menor que isso no caso de transporte eletrostático, enquanto a variação da temperatura pode ser aproximadamente 200% no caso de transporte magnético, e menor que 50% no caso de transporte eletrostático. Esses resultados confirmam a expectativa que o transporte devido a flutuações magnéticas efetivamente difunde partículas de alta velocidade mais eficientemente que o transporte devido a flutuações eletrostáticas. Todavia, os resultados obtidos mostram que ambos os tipos de mecanismos de transporte produzem efeitos muito similares na eficiência combinada de geração de corrente.

Como vimos na seção anterior, uma ferramenta interessante de diagnóstico da distribuição não-térmica é a radiação EC emitida perpendicularmente ao campo magnético, na borda do plasma, cuja intensidade pode ser dada pela equação 6.2.

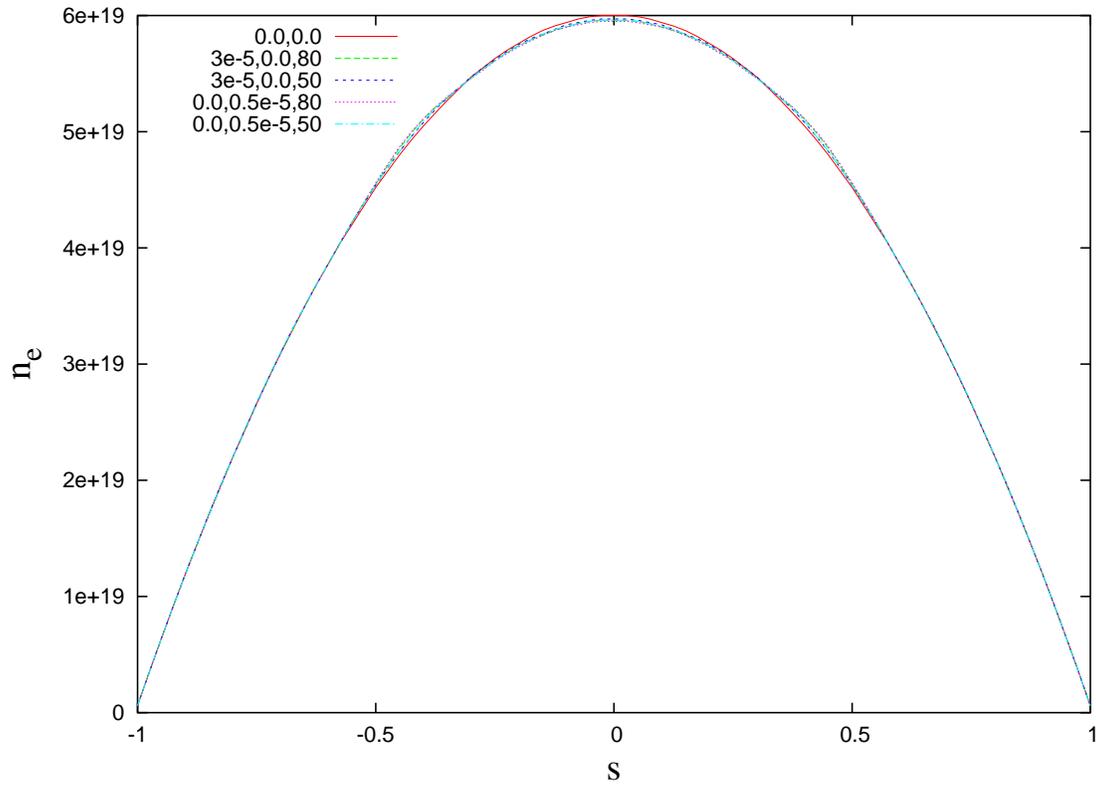


Figura 53: Densidade de elétrons como função da posição na lâmina de plasma, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. As curvas mostram os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$. O perfil inicial também é mostrado. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

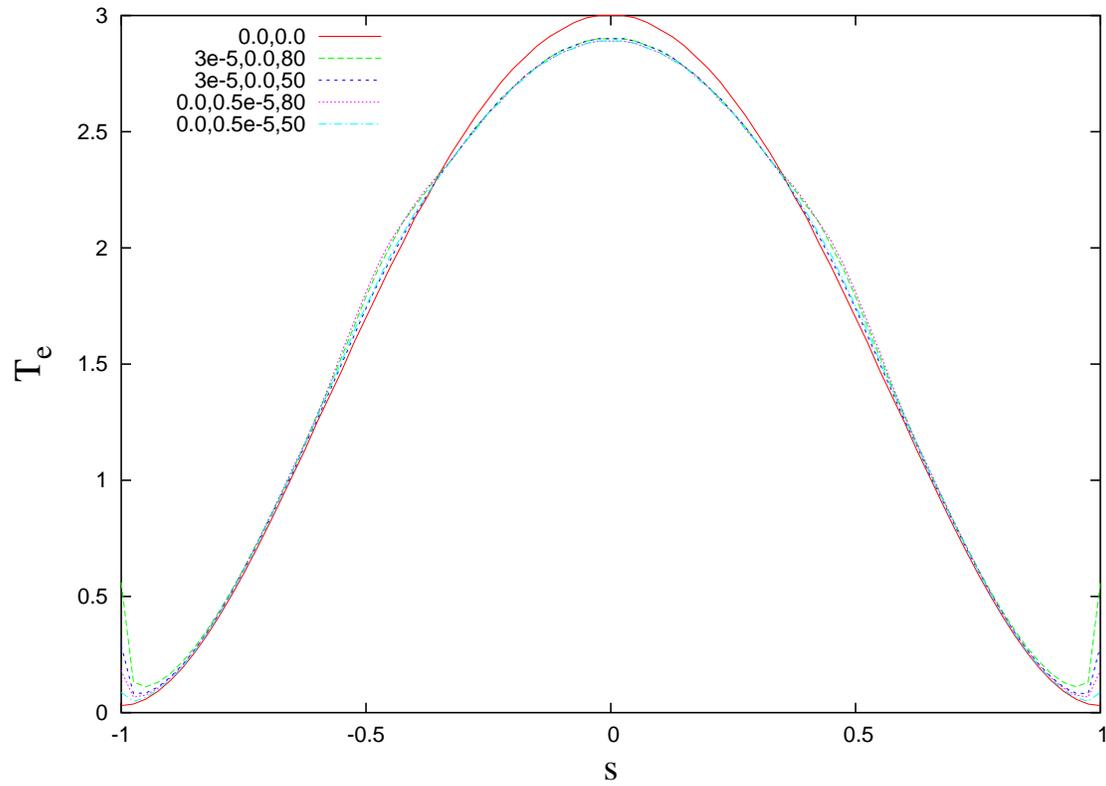


Figura 54: Temperatura de elétrons como função da posição na lâmina de plasma, em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. As curvas mostram os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 50$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$ em $\tau = 80$. O perfil inicial também é mostrado. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

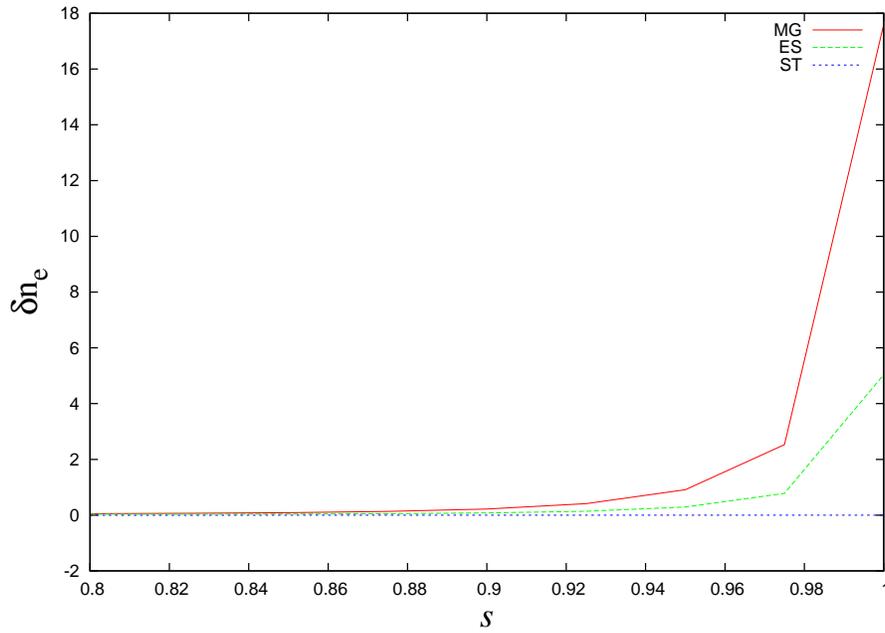


Figura 55: Visão ampliada da variação relativa da densidade de elétrons, $\delta n_e = (n_e(\tau) - n_e(\tau = 0))/n_e(\tau = 0)$, para posições próximo a borda do plasma, em $\tau = 80$. As curvas mostradas são para os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$, e sem transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

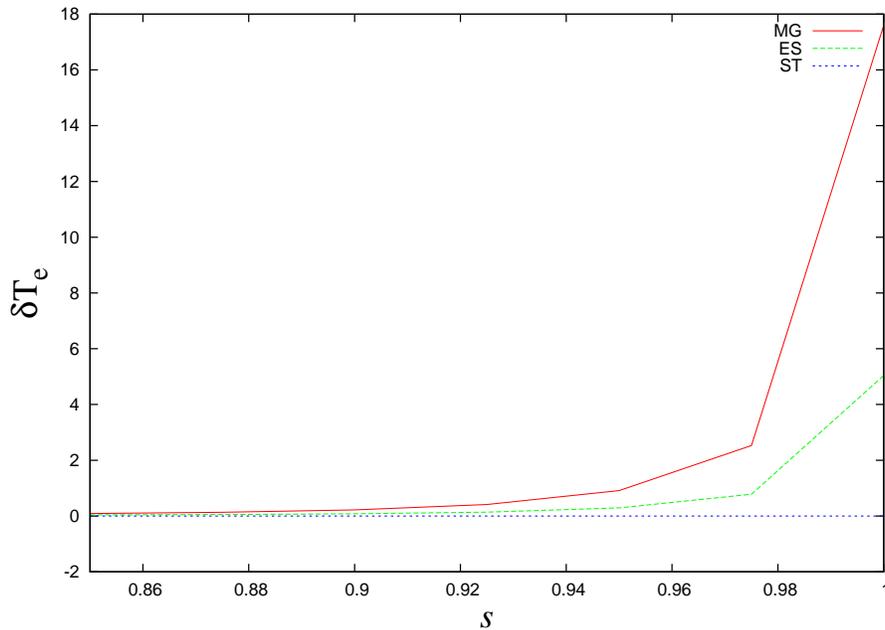


Figura 56: Visão ampliada da variação relativa da temperatura de elétrons, $\delta T_e = (T_e(\tau) - T_e(\tau = 0))/T_e(\tau = 0)$, para posições próximo a borda do plasma, em $\tau = 80$. As curvas mostradas são para os casos $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$, e sem transporte. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

A Fig. 57 mostra a intensidade de emissão EC no modo O na borda de baixo campo, para propagação perpendicular, em $\tau = 50$ (no fim da fase com somente ondas LH) e $\tau = 80$. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana, antes da injeção de ondas LH. A emissividade é mostrada como uma função da frequência da onda ν , e o cálculo foi realizado incluindo harmônicos da frequência de cíclotron acima de $n = 4$, para os mesmos valores de α , β e s_b usados na Fig. 41. A Fig. 57 (a) mostra o caso sem transporte; a Fig. 57 (b) o caso do transporte magnético com $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$, e a Fig. 57 (c) o caso do transporte eletrostático $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$.

Nota-se facilmente o aumento da intensidade espectral na região de baixa frequência dos picos correspondentes aos harmônicos $n = 2$ e $n = 3$, devido à presença de partículas não-térmicas. Nota-se também um crescimento na emissão no lado das frequências altas de cada pico, que torna-se mais pronunciado para valores crescentes no número de harmônicos. O crescimento de emissão no lado das frequências baixas é consequência da variação relativística da massa dos elétrons, que permite que os elétrons emitam em frequência mais baixa que a frequência EC local. Em uma dada posição, como as ondas LH empurram os elétrons da região de baixo momentum para a de alto momentum no espaço de momentum, a emissão devido a esses elétrons move-se para pequenas frequências. Observe-se o "gap" que há nos gráficos do modo extraordinário no primeiro harmônico. Isso se deve que a onda não se propaga porque a sua frequência está acima da frequência de corte.

A Fig. 58 mostra emissão EC para o modo X, para as mesmas condições e parâmetros usados para o caso da Fig. 57. A análise é similar à apresentada para o modo O. As intensidades das emissões correspondentes aos harmônicos $n = 2$ e $n = 3$ são similares, enquanto no caso para o modo O a emissão para $n = 2$ foi significativamente maior que para $n = 3$. Cada pico de harmônico mostra aumento em baixas frequências devido à emissão pela cauda não-térmica. Ocorre também um aumento da emissão no lado de alta frequência de cada pico, mas não é tão pronunciado como no caso mostrado para o modo O na Fig. 57.

Uma investigação do efeito da posição da ITB na emissão EC aparece na Fig. 59, que mostra a intensidade da emissão EC no modo O na borda de baixo campo, para propagação perpendicular, para $s_b = 0,4, 0,6, 0,8$. A Fig. 59 (a) mostra a emissão EC no fim da fase com somente ondas LH, em $\tau = 50$, e a Fig. 59 (b) mostra a emissão para $\tau = 80$. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. As figuras correspondentes para o caso do modo X aparecem na

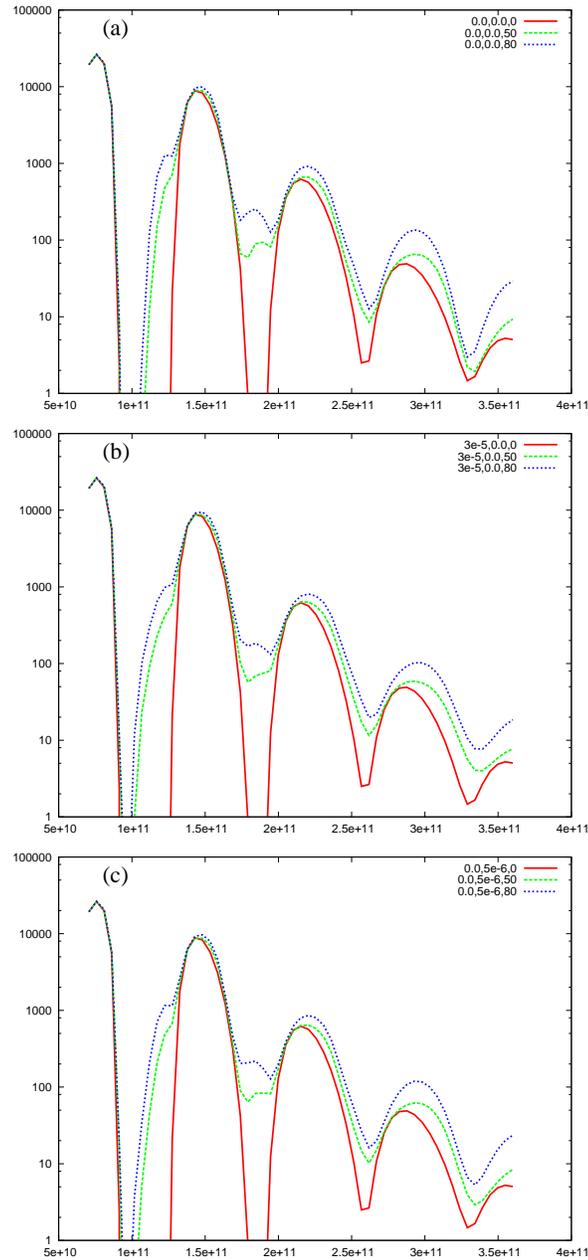


Figura 57: Intensidade de emissão (kev/m^2) no modo O na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. (a) Sem transporte. (b) Transporte magnético, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$. (c) Transporte eletrostático, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

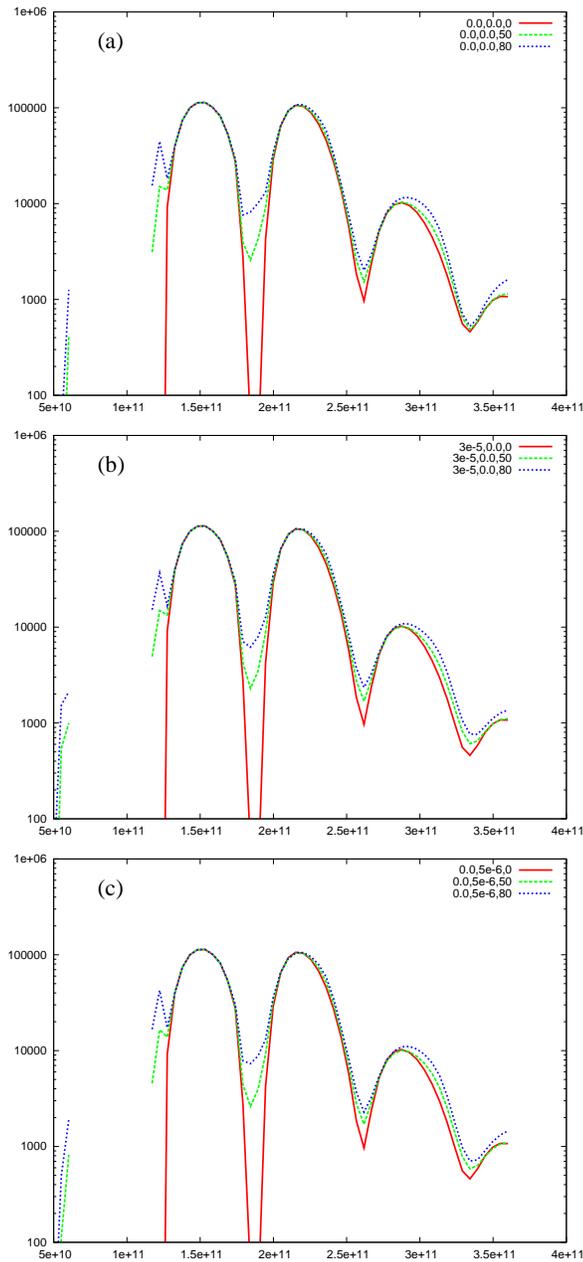


Figura 58: Intensidade de emissão (keV/m²) no modo X na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), em $\tau = 50$ e $\tau = 80$. (a) Sem transporte. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. (b) Transporte magnético, $\tilde{b}_0 = 3,0 \times 10^{-5}$ e $\tilde{e}_0 = 0,0$; (c) Transporte eletrostático, $\tilde{e}_0 = 0,5 \times 10^{-5}$ e $\tilde{b}_0 = 0,0$. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

Fig. 60. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. Os resultados que aparecem nas Figs. 59 e 60 mostram efeito desprezível da posição da ITB no espectro de emissão EC, tanto no fim da fase LH como no final do estado estacionário formado levando em conta as ondas LH e EC.

A emissão depois da injeção de diferentes quantidades de potência EC é analisada na Fig. 61, que mostra a intensidade da emissão EC nos modos O e X na borda de baixo campo, para propagação perpendicular, em $\tau = 80$, para $P_{EC} = 0,25$ MW, 0,50 MW, e 1,00 MW. A Fig. 61 (a) mostra a emissão EC no modo O, e a Fig. 61 (b) mostra a emissão EC no modo X. A figura também mostra a emissão devido a distribuição Maxwelliana, antes da injeção de ondas LH. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41. Vê-se que aspectos não-térmicos do espectro são aumentados com o crescimento da potência EC, sem mudanças qualitativas significativas.

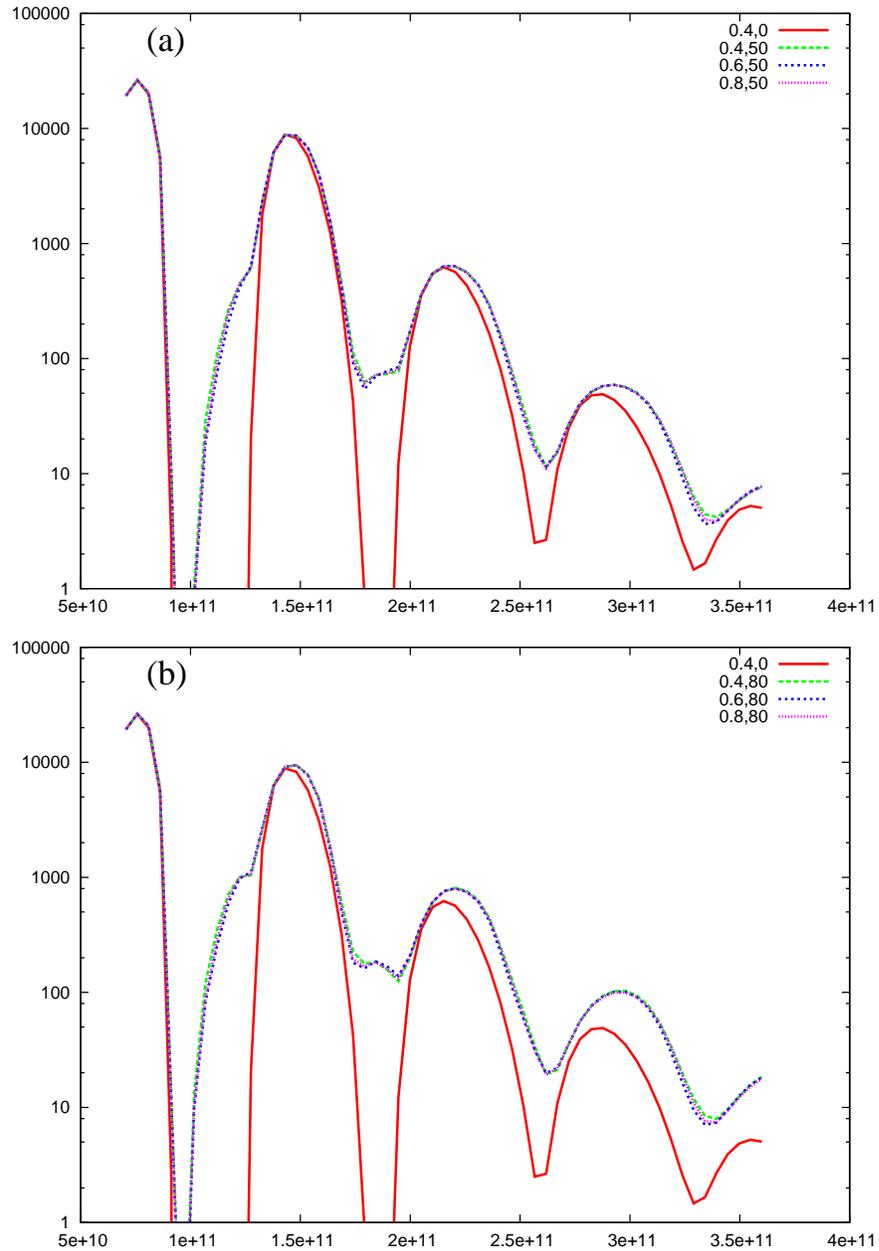


Figura 59: Intensidade de emissão (keV/m²) no modo O na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), para várias posições da barreira de transporte. (a) $\tau = 50$. (b) $\tau = 80$. As figuras mostram os casos para $s_b = 0, 4, 6, 8$, e também mostram a emissão devido à distribuição Maxwelliana. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

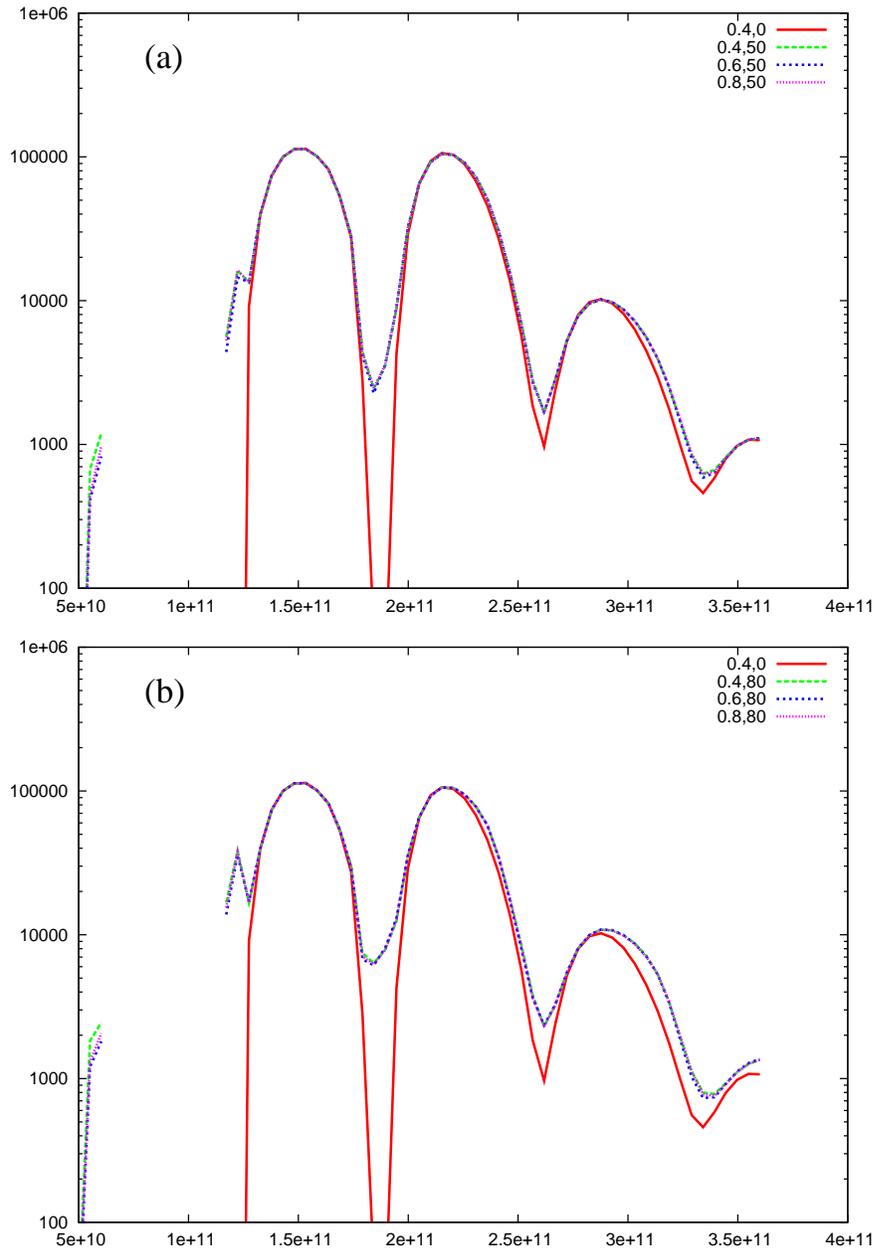


Figura 60: Intensidade de emissão (keV/m²) no modo X na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), para várias posições da barreira de transporte. (a) $\tau = 50$. (b) $\tau = 80$. As figuras mostram os casos para $s_b = 0,4, 0,5, 0,6, 0,8$. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

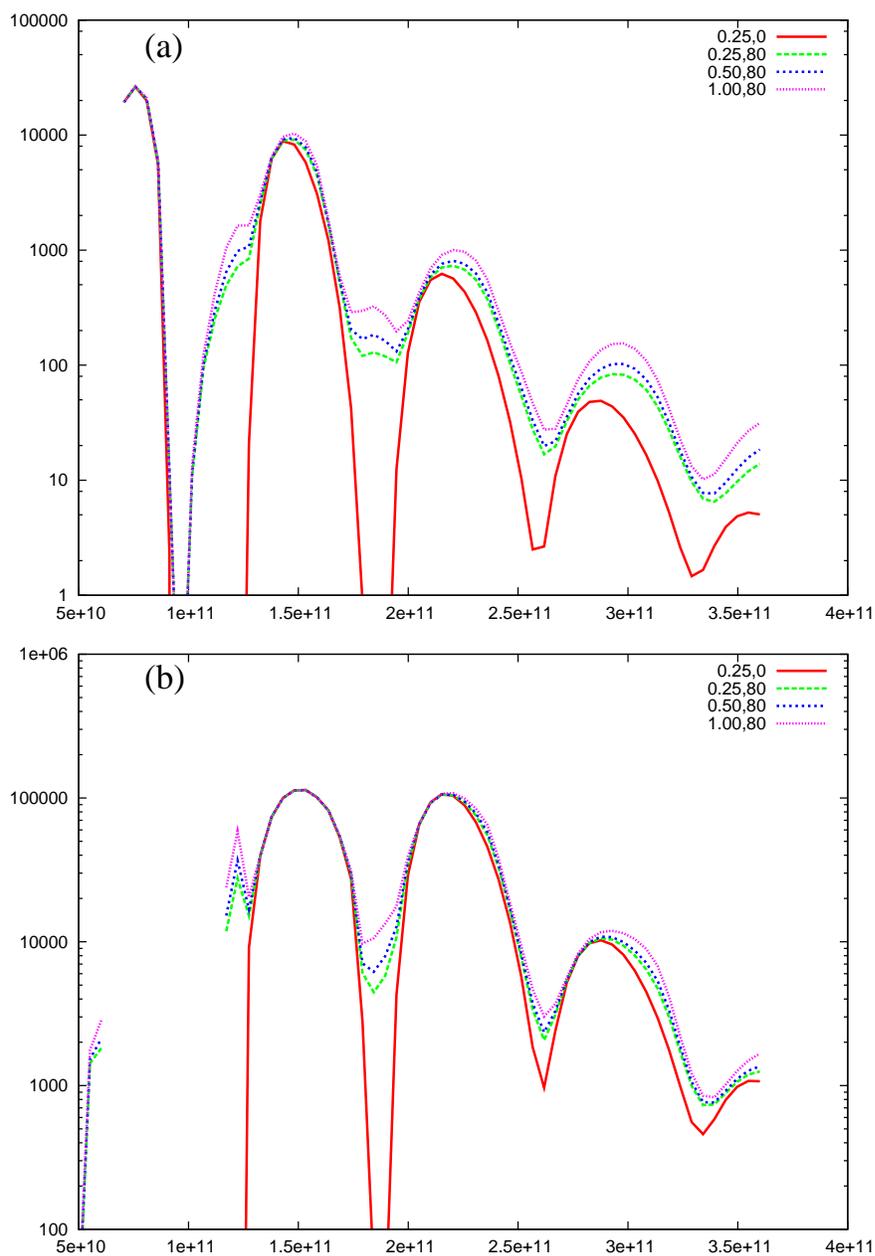


Figura 61: Intensidade de emissão (keV/m^2) nos modos O e X na borda baixo campo, vs. frequência (Hz), para vários valores de potência da onda EC. (a) Modo O. (b) Modo X. As figuras mostram os casos para $P_{EC} = 0, 25$ MW, 0, 50 MW, e 1, 00 MW. A figura também mostra a emissão devido à distribuição Maxwelliana antes da injeção de ondas LH. Os outros parâmetros e dados são os mesmos que na Fig. 41.

Conclusão

Introdução

Neste Capítulo, apresentamos uma breve revisão do trabalho de pesquisa que foi conduzido neste estudo. Sumarizamos os resultados encontrados e descrevemos as contribuições que foram feitas relacionadas com o presente trabalho. Finalmente, fazemos recomendações para trabalhos futuros.

Sumário da pesquisa

No presente trabalho, desenvolveu-se um código numérico em FORTRAN 77 baseado no Método ADI (Implícito em Direções Alternadas) para resolver a equação de Fokker-Planck considerando a influência de ondas (LH e EC), colisões e transporte de partículas. Esse programa determina a evolução temporal da função distribuição de elétrons em certas condições e permite calcular propriedades da corrente gerada, como perfil de densidade de corrente, corrente total, eficiência da geração de corrente, que, por sua vez fornecem os subsídios para um melhor entendimento dos processos de geração de correntes em tokamaks por meio de interações onda-partícula. Também foi considerado neste código o cálculo da radiação EC emitida na borda do plasma, como uma ferramenta adicional de diagnóstico.

Desta forma, investigamos como a ocorrência de transporte radial e a presença de uma barreira interna de transporte afetam a eficiência da geração de corrente somente por ondas LH (Caso I) e por ondas LH e EC (Caso II). Em ambos os casos, consideramos dois possíveis mecanismos para o transporte radial, tanto devido a flutuações magnéticas como devido a flutuações eletrostáticas, e estudamos a influência da profundidade da barreira, da posição da barreira e do nível de perturbação magnética e eletrostática.

O modelo utilizado é limitado por alguns vínculos. As condições de contorno usadas tornam o modelo apropriado para regimes de perda de partículas na borda do plasma muito pequena, e portanto, não apropriado para descrever situações com confinamento

pobre de partículas. A descrição das ondas LH considera um regime de multipassagens, e portanto o modelo não é válido para plasmas de alta temperatura onde pode ocorrer absorção em uma simples passagem da onda.

Consideramos em nosso trabalho dois diferentes conjuntos de parâmetros, um relacionado a um experimento de tokamak de tamanho médio e o outro relacionado com um tokamak semelhante ao JET para o Caso I. Como obteve-se resultados similares no que diz respeito ao efeito de transporte e ao efeito da barreira interna, não apresentamos esse estudo para o Caso II, restringindo-o somente para tokamaks de médio porte. Com relação à utilização desses dois diferentes conjuntos de parâmetros, escolhemos o mesmo critério - otimização da absorção da onda LH.

Contribuições

Nossos resultados foram análogos tanto para o Caso I como para o Caso II e mostraram pouca diferença entre os efeitos dos dois mecanismos de transporte. Mostrou-se que a eficiência da geração de corrente cresce com o nível de flutuação, tanto no caso de turbulência magnética como eletrostática, com aproximadamente a mesma razão de crescimento. Esse resultado é explicado como consequência da difusão de partículas para direções mais externas do tokamak, onde elas encontram menor densidade, e conseqüentemente maior tempo de moderação colisional. Em ambos os casos, de flutuações magnéticas e eletrostáticas, o efeito da barreira foi uma pequena redução na eficiência da geração de corrente, com uma dependência aproximadamente linear com a profundidade da barreira. Mostrou-se que o mínimo da eficiência da geração de corrente ocorre quando a barreira é localizada próximo à posição de absorção da onda LH, mas um pouco deslocada em direção à borda externa do tokamak. A diminuição da profundidade da barreira contribui levemente para o aumento na eficiência na geração de corrente.

Em especial, no Caso II, percebeu-se que apesar de imediatamente após o início das ondas EC haver um redução na eficiência, depois de alguns tempos de colisão o efeito combinado torna-se maior que o efeito das eficiências das ondas atuando em separado.

A radiação EC emitida perpendicularmente ao campo magnético foi calculada tanto para o modo ordinário quanto para o modo extraordinário. Os resultados obtidos da análise dessa radiação podem ser descritos brevemente na forma seguinte. O espectro geral claramente mostrou aspectos não-térmicos devidos à geração de corrente pela ação das ondas eletromagnéticas, tanto no caso em que apenas ondas LH foram levadas em conta

quanto no caso de ondas LH e EC combinadas. Observou-se que a mudança da posição da barreira de transporte não provocou efeitos significativos na emissão. Observou-se também que o aumento da razão P_{EC}/P_{LH} não produziu mudanças qualitativas significativas, embora tenha provocado aumento dos aspectos não térmicos do espectro de emissão.

Recomendações para trabalhos futuros

Além do que foi atingido com o presente trabalho, permanece a oportunidade para melhoramentos. Um desses melhoramentos, constitui na inclusão de ilhas magnéticas, considerando ilhas paradas e em rotação. Também considerar elétrons aprisionados. Outro viria do fato de que os perfis de nosso modelo de lâmina não são auto-consistentes, sendo difícil modificar os perfis sem perder a capacidade de eficiência na absorção LH. Portanto, um trabalho futuro poderia ser melhorar nossa descrição dos perfis do plasma pelo acoplamento com códigos geradores de perfil como o ASTRA (Automatic System of TRansport Analysis). Permanece também a possibilidade de investigação futura de efeitos relativísticos no termo de colisões.

Consideremos, ainda, que em nossa investigação muitos parâmetros foram modificados, como nível de turbulência, posição da barreira, nível de potência da onda. Mas empregamos um modelo em que há bom confinamento, i.e., não ocorrem perdas de partículas rápidas nas bordas, consistindo em um limite superior para a eficiência de geração de corrente. Considerar a modificação das propriedades de transporte na borda do plasma, permitindo perdas de partículas, encontrou-se fora do escopo do presente estudo. Entretanto, é um tópico interessante, que poderia merecer uma investigação em separado em um futuro próximo.

APÊNDICE A – Efeito das colisões na Teoria Quase-Linear

Todos os efeitos das interações entre partículas que não são levadas em conta pelos campos na equação de Vlasov são comprimidos no termo de "colisões". Quando o termo de colisões predomina, é aplicável a descrição de fluido da magneto-hidrodinâmica (MHD) e, quando as colisões são desprezíveis aplica-se a Teoria de Vlasov. Por sua vez, quando as colisões não são desprezíveis, mas relativamente raras, emprega-se correções através do termo de Fokker-Planck dando um tratamento mais realístico para plasmas quentes diluídos.

A influência de colisões entre partículas da espécie i e partículas da espécie j na evolução temporal da função distribuição em uma abordagem feita pela Teoria Quase-Linear pode ser expressa, então, da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_j \theta(f_i, f_j). \quad (\text{A.1})$$

Na equação acima, f_i e f_j são funções distribuição de velocidades de partículas do tipo i e j , respectivamente.

A forma de Landau (1937)(LANDAU, 1937)¹ para o operador colisão de Fokker-Planck é expressa abaixo.

$$\theta(f_i, f_j) = 2\pi e_i^2 e_j^2 \ln \Lambda \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \cdot \int d^3 v_j \vec{\omega} \cdot \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} \right) f_i f_j, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{onde } \vec{\omega} = \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{v}_i \partial \vec{v}_j} = \frac{1}{g^3} \left(g^2 \vec{1} - \vec{g}\vec{g} \right), \quad g = |\vec{g}| = |v_i - v_j| \quad (\text{A.3})$$

é a velocidade relativa e $\ln \Lambda$ é o fator de corte de Coulomb.

¹Em (HAAR, 1965) encontramos uma tradução para o Inglês deste artigo.

A equação de Fokker-Planck é a ferramenta apropriada para descrever partículas que sofrem um grande número de colisões com mudanças muito pequenas de velocidade, como partículas Brownianas. Note-se ainda que Landau não fez uso das fórmulas exatas do espalhamento de Rutherford, mas usou a "aproximação de impacto" para descrever colisões entre dois corpos. Análoga a aproximação de Born em Mecânica Quântica, essa procede da seguinte forma. Substitui-se o caminho hiperbólico da partícula por um movimento retilíneo com velocidade constante e calcula-se a força que cada partícula exerce uma sobre a outra durante esse movimento. A integral no tempo dessa força é então tomada como uma aproximação para a transferência de momentum total. Essa transferência de momentum é adicionada ao vetor momentum inicial para obter o vetor momentum após a colisão (KAMPEN; FELDERHOF, 1967).

Para o presente trabalho, vamos partir de uma forma um pouco mais trabalhada do operador colisão (GAFFEY Jr., 1976):

$$\begin{aligned} \theta(f_i, f_j) = \Gamma_{ij} & \left[\frac{1}{v_i^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_i}{\partial \mu} \right) \left(\Phi(x_{ij}) - \frac{1}{2x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) \right) \right. \\ & + \left(\frac{1}{x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) \right) \frac{1}{v_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial v_i^2} + \left(-\frac{1}{x_{ij}^2} \Psi(x_{ij}) + 2x_{ij} \Phi'(x_{ij}) \right) \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial v_i} \\ & \left. + 2 \frac{m_i}{m_j} \left(\Psi(x_{ij}) \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial v_i} + 2 \frac{x_{ij}^3}{v_i^3} \Phi'(x_{ij}) f_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Nessa equação, temos

$$\Psi(x_{ij}) \equiv \Phi(x_{ij}) - x_{ij} \Phi'(x_{ij}) \quad (\text{A.5})$$

onde Φ é a função erro e Φ' sua derivada,

$$\begin{aligned} \Phi(x_{ij}) & \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp^{-t^2} dt, \\ \Phi'(x_{ij}) & = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp^{-x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A derivação dessa expressão a partir de (A.3) pode também ser encontrada na dissertação do autor (OLIVEIRA, 2002) e em (TOZAWA, 1998).

Consideremos a distribuição de elétrons, colidindo com a população de elétrons térmicos e com os íons,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \theta(f_e, f_e) + \theta(f_e, f_i),$$

onde,

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \Gamma_{ej} \left[\frac{1}{v_e^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi(x_{ej}) - \frac{1}{2x_{ej}^2} \Psi(x_{ej}) \right) \right. \\ & + \left(\frac{1}{x_{ej}^2} \Psi(x_{ej}) \right) \frac{1}{v_e} \frac{\partial^2 f_e}{\partial v_e^2} + \left(-\frac{1}{x_{ej}^2} \Psi(x_{ej}) + 2x_{ej} \Phi'(x_{ej}) \right) \frac{1}{v_e^2} \frac{\partial f_e}{\partial v_e} \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi(x_{ej}) \frac{1}{v_e^2} \frac{\partial f_e}{\partial v_e} + 2 \frac{x_{ej}^3}{v_e^3} \Phi'(x_{ej}) f_e \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Vamos agora definir a velocidade térmica de partículas de uma espécie j ,

$$v_{tj} = \left(\frac{T_j}{m_j} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.8})$$

e a velocidade normalizada

$$w_{ij} = \frac{v_i}{v_{tj}}. \quad (\text{A.9})$$

Por outro lado, na expressão para $\Theta(f_e, f_j)$ aparece a quantidade x_{ej} . Essa quantidade está definida nas Refs. (GAFFEY Jr., 1976; OLIVEIRA, 2002) da seguinte maneira,

$$x_{ij} \equiv v_i \left(\frac{m_j}{2T_j} \right)^{1/2}.$$

Portanto, temos

$$\frac{x_{ej}}{w_{ej}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.10})$$

Desse modo, normalizando as velocidades à velocidade térmica dos elétrons, teremos $v_e = v_{te} w_{ee}$ e $x_{ej} = w_{ej} / \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \Gamma_{ej} \left[\frac{1}{w_{ee}^3 v_{te}^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{w_{ej}^2} \Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \right) \right. \\ & + \left(\frac{2}{w_{ej}^2} \Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \right) \frac{1}{w_{ee} v_{te}^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial w_{ee}^2} + \left(-\frac{2}{w_{ej}^2} \Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) + 2 \frac{w_{ej}}{\sqrt{2}} \Phi'\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \right) \frac{1}{v_{te}^3 w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{v_{te}^3 w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} + 2 \frac{w_{ej}^3}{2\sqrt{2} v_{te}^3 w_{ee}^3} \Phi'\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) f_e \right) \right], \\ \\ \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej}}{v_{te}^3} \left[\frac{1}{w_{ee}^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{w_{ej}^2} \Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \right) \right. \\ & + \left(\frac{2}{w_{ej}^2} \Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \right) \frac{1}{w_{ee}} \frac{\partial^2 f_e}{\partial w_{ee}^2} + \left(-\frac{2}{w_{ej}^2} \Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) + 2 \frac{w_{ej}}{\sqrt{2}} \Phi'\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \right) \frac{1}{w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} + \frac{w_{ej}^3}{\sqrt{2} w_{ee}^3} \Phi'\left(\frac{w_{ej}}{\sqrt{2}}\right) f_e \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Podemos agora escrever

$$w_{ej} = \frac{v_e}{v_{tj}} = \frac{v_e v_{te}}{v_{te} v_{tj}} = w_{ee} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2},$$

assuming $T_j = T_e$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej}}{v_{te}^3} \left[\frac{1}{w_{ee}^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) - \frac{1}{w_{ee}^2 \left(\frac{m_j}{m_e} \right)} \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \right. \\ & + \left(\frac{2}{w_{ee}^2 \left(\frac{m_j}{m_e} \right)} \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{w_{ee}} \frac{\partial^2 f_e}{\partial w_{ee}^2} \\ & + \left(-\frac{2}{w_{ee}^2 \left(\frac{m_j}{m_e} \right)} \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) + 2 \frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \Phi' \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \frac{1}{w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} + \frac{w_{ee}^3}{\sqrt{2} w_{ee}^3} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{3/2} \Phi' \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) f_e \right) \right]. \\ \\ \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej}}{v_{te}^3} \left[\frac{1}{w_{ee}^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) - \frac{1}{w_{ee}^2} \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{m_e}{m_j} \right) \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \\ & + \left(\frac{2}{w_{ee}^2} \left(\frac{m_e}{m_j} \right) \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{w_{ee}} \frac{\partial^2 f_e}{\partial w_{ee}^2} \\ & + \left(-\frac{2}{w_{ee}^2} \left(\frac{m_e}{m_j} \right) \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \Phi' \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} \\ & + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \frac{1}{w_{ee}^2} \frac{\partial f_e}{\partial w_{ee}} + \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{3/2} \Phi' \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) f_e \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Podemos agora definir

$$u = \frac{v_e}{v_{te0}}, \quad (\text{A.13})$$

onde v_{te0} é a velocidade térmica no centro da lâmina de plasma. Dessa forma,

$$w_{ee} = \frac{v_e}{v_{te}} = \frac{v_e v_{te0}}{v_{te0} v_{te}} = u \frac{v_{te0}}{v_{te}} = u \left(\frac{T_{e0}}{T_e} \right)^{1/2}.$$

Retornando ao termo de colisões,

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej} v_{te}^3}{v_{te}^3 v_{te0}^3} \left[\frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{w_{ee}^2} \left(\frac{m_e}{m_j} \right) \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{w_{ee}^2} \left(\frac{m_e}{m_j} \right) \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{u} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\ & \left. + \left(-\frac{2}{w_{ee}^2} \left(\frac{m_e}{m_j} \right) \Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \Phi' \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{3/2} \frac{v_{te0}^3}{v_{te}^3} \Phi' \left(\frac{w_{ee}}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_j}{m_e} \right)^{1/2} \right) f_e \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej} v_{te}^3}{v_{te}^3 v_{te0}^3} \left[\frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{u^2} \left(\frac{T_e m_e}{T_{e0} m_j} \right) \Psi \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \right. \\ & \left. + \left(2 \frac{T_e m_e}{T_{e0} m_j} \right) \Psi \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\ & \left. + \left(-\frac{1}{u^2} \left(2 \frac{T_e m_e}{T_{e0} m_j} \right) \Psi \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \right. \\ & \left. + u \left(2 \frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \Phi' \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{3/2} \Phi' \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_{e0} m_j}{T_e m_e} \right)^{1/2} \right) f_e \right]. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Vamos definir, por simplicidade, a quantidade

$$\xi_{ej} \equiv \left(2 \frac{T_e m_e}{T_{e0} m_j} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.15})$$

de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej}}{v_{te0}^3} \left[\frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left(\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) - \frac{\xi_{ej}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \right) + \xi_{ej}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\ & \left. + \left(-\frac{\xi_{ej}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) + 2 \frac{u}{\xi_{ej}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + 2 \frac{m_e}{m_j} \left(\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{2}{\xi_{ej}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) f_e \right]. \end{aligned}$$

Re-escrevendo os parênteses de forma mais clara,

$$\begin{aligned} \theta(f_e, f_j) = & \frac{\Gamma_{ej}}{v_{te0}^3} \left\{ \frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\xi_{ej}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \right] + \xi_{ej}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\ & \left. + \left[-\frac{\xi_{ej}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) + 2 \frac{u}{\xi_{ej}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \right] \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \right. \\ & \left. + 2 \frac{m_e}{m_j} \left[\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{2}{\xi_{ej}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ej}} \right) f_e \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Agora, tomemos a Eq. (A-1.16) de (OLIVEIRA, 2002),

$$\Gamma_{ij} = \frac{2\pi q_i^2 q_j^2 n_j \ln \Lambda}{m_i^2}, \quad (\text{A.17})$$

onde usamos a notação n_j para designar a densidade de equilíbrio local das partículas da espécie j , ao invés de usar n_{0j} como (OLIVEIRA, 2002). Evitamos o 0 aqui para não confundir com o valor da grandeza no centro da lâmina.

Do mesmo apêndice, Eq. (A-1.30), vemos que a frequência de colisão é definida como

$$\nu_b = \frac{\Gamma_{bb}}{v_{tb}^3} = \frac{2\pi e^4 n_b \ln \Lambda}{m_b^2 v_{tb}^3}, \quad (\text{A.18})$$

onde novamente usamos n_b ao invés de n_0 , pois nos parece mais claro no presente contexto.

Ou seja, a frequência de colisões elétron-elétron é dada por

$$\nu_e = \frac{\Gamma_{ee}}{v_{te}^3} = \frac{2\pi e^4 n_e \ln \Lambda}{m_e^2 v_{te}^3}.$$

Portanto, os fatores que aparecem no termo de colisões são dados por

$$\frac{\Gamma_{ee}}{v_{te0}^3} = \frac{2\pi e^4 n_e \ln \Lambda}{m_e^2 v_{te0}^3} = \frac{2\pi e^4 n_{e0} \ln \Lambda(0)}{m_e^2 v_{te0}^3} \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} = \nu_{e0} \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)},$$

e

$$\frac{\Gamma_{ei}}{v_{te0}^3} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{m_e^2 v_{te0}^3} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_{e0} \ln \Lambda(0)}{m_e^2 v_{te0}^3} \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} = Z^2 \nu_{e0} \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)}.$$

Obs.: Na página 34 do formulário NRL 1998 (HUBA, 1998), encontramos as seguintes expressões aproximadas para o logaritmo de Coulomb:

$$\lambda_{ee} = 24 - \ln(n_e^{1/2} T_e^{-1}), \quad T_e > 10\text{eV}$$

$$\lambda_{ei} = 24 - \ln(n_e^{1/2} T_e^{-1}), \quad T_i m_e / m_i < 10 Z^2 \text{eV} < T_e,$$

sendo n_e dado em cm^{-3} e T em eV. Considerando que estamos interessados em $1 \text{ keV} < T_e < 10 \text{ keV}$, e $T_i = T_e$, consideramos que as ditas aproximações são adequadas, e $\ln \Lambda$ é o mesmo tanto para ee quanto para ei , dependendo apenas da densidade e temperatura.

Retornando ao termo de colisões, podemos definir o tempo normalizado

$$\tau \equiv t\nu_{e0}, \quad (\text{A.19})$$

de modo que

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial f_e}{\partial \tau} = \nu_{e0} \frac{\partial f_e}{\partial \tau}.$$

Portanto, teremos no termo de colisões

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial \tau} = & \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left\{ \frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] + \xi_{ee}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\ & + \left[-\frac{\xi_{ee}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2 \frac{u}{\xi_{ee}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + 2 \left[\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{2}{\xi_{ee}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) f_e \right] \\ & + \frac{Z^2}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right) \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) - \frac{\xi_{ei}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] + \xi_{ei}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \frac{Z^2}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \\ & \left. + \left[-\frac{\xi_{ei}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) + 2 \frac{u}{\xi_{ei}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] \frac{Z^2}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + 2Z^2 \frac{m_e}{m_i} \left[\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{2}{\xi_{ei}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) f_e \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde devemos levar em conta que

$$\xi_{ei} = \xi_{ee} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}.$$

A princípio, poderíamos levar em conta que $m_e \ll m_i$ para desprezar alguns fatores na expressão para o termo de colisões. Entretanto, não deve simplificar muito a forma geral do termo. Mantendo tudo, vemos uma simetria entre os termos devidos a elétrons e os devidos a íons, que vamos manter completa, pelo menos por enquanto.

Entretanto, podemos agrupar os termos correspondentes a cada derivada da f_e .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial \tau} = & \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left\{ \frac{1}{u^3} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] + \xi_{ee}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\ & + \left[-\frac{\xi_{ee}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2 \frac{u}{\xi_{ee}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + 2 \left[\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{2}{\xi_{ee}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) f_e \right] \\ & + \frac{Z^2}{u^3} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) - \frac{\xi_{ei}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] + \xi_{ei}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \frac{Z^2}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \\ & \left. + \left[-\frac{\xi_{ei}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) + 2 \frac{u}{\xi_{ei}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] \frac{Z^2}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + 2Z^2 \frac{m_e}{m_i} \left[\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} + \frac{2}{\xi_{ei}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) f_e \right] \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = & \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left\{ \left[\xi_{ee}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \xi_{ei}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\
+ & \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \Phi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) - Z^2 \frac{\xi_{ei}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] \frac{(1-\mu^2)}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} \\
- & \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \Phi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) - Z^2 \frac{\xi_{ei}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] \frac{2\mu}{u^3} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \\
& + \left[-\frac{\xi_{ee}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2\frac{u}{\xi_{ee}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right. \\
& \left. - Z^2 \frac{\xi_{ei}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) + 2Z^2 \frac{u}{\xi_{ei}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) + 2Z^2 \frac{m_e}{m_i} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \\
& \left. + \left[\frac{4}{\xi_{ee}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \frac{m_e}{m_i} \frac{4}{\xi_{ei}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ei}} \right) \right] f_e \right\}, \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

A.0.1 Algumas aproximações

Até aqui fizemos um desenvolvimento exato a partir da Eq. (A-1.23) da dissertação do autor (OLIVEIRA, 2002)². Vamos agora fazer algumas aproximações. Iniciemos com algumas considerações a respeito de ordem de grandeza.

No argumento das funções Φ , Ψ , Φ' , na parcela correspondente a ee , temos

$$\frac{u}{\xi_{ee}}.$$

Considerando que as colisões, apenas para fim de ordem de grandeza, são significativas para $u \geq 1$, esse argumento é $1/\sqrt{2}$ no centro da lâmina e vai a infinito na borda do plasma. Ou seja, em boa parte da lâmina o argumento não é grande e as ditas funções Φ , etc. não podem ser expandidas.

Por outro lado, para os íons o argumento é

$$\frac{u}{\xi_{ei}} = \frac{u}{\xi_{ee}} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Portanto, mesmo no centro da lâmina, o argumento das funções Φ , etc. é da ordem de $40/\sqrt{2} \simeq 20$, pelo menos (considerando $u \simeq 1$). Ou seja, é um grande argumento e podemos aproximar, nas parcelas correspondentes a íons,

$$\Phi \simeq 1, \quad \Psi \simeq 1, \quad \Phi' \simeq 0.$$

²Expressão essa que tinha sido derivada por J. D. Gaffey (GAFFEY Jr., 1976) e que também já aparecera na dissertação de Lucio Tozawa (TOZAWA, 1998).

A partir de (A.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = & \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left\{ \left[\xi_{ee}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \xi_{ei}^2 \right] \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\
& + \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 - Z^2 \frac{\xi_{ei}^2}{2u^2} \right] \frac{(1-\mu^2)}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} \\
& - \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 - Z^2 \frac{\xi_{ei}^2}{2u^2} \right] \frac{2\mu}{u^3} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \\
& + \left[-\frac{\xi_{ee}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2\frac{u}{\xi_{ee}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right. \\
& \quad \left. - Z^2 \frac{\xi_{ei}^2}{u^2} + 2Z^2 \frac{m_e}{m_i} \right] \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \\
& \left. + \left[\frac{4}{\xi_{ee}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] f_e \right\}. \tag{A.21}
\end{aligned}$$

Agora fazemos mais uma aproximação, que tínhamos evitado fazer quando trabalhávamos com a forma completa do termo, que é desprezar os fatores com m_e/m_i comparados com os fatores correspondentes onde a razão de massas é 1,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = & \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left\{ \left[\xi_{ee}^2 \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\
& + \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \right] \frac{(1-\mu^2)}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} \\
& - \left[\Phi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) - \frac{\xi_{ee}^2}{2u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + Z^2 \right] \frac{2\mu}{u^3} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \\
& + \left[-\frac{\xi_{ee}^2}{u^2} \Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2\frac{u}{\xi_{ee}} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) + 2\Psi \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \\
& \left. + \left[\frac{4}{\xi_{ee}^3} \Phi' \left(\frac{u}{\xi_{ee}} \right) \right] f_e \right\}. \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Fazendo a aproximação, $\Phi \equiv 1$, $\Psi \equiv 1$ e $\Phi' \equiv 0$, notando que $\xi_{ee}^2 = 2T_e/T_{e0}$, e desprezando termos de ordem $O(1/u^5)$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = & \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left\{ \frac{2T_e}{T_{e0}} \frac{1}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} \right. \\
& + (Z^2 + 1) \frac{(1-\mu^2)}{u^3} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} \\
& \left. - (Z^2 + 1) \frac{2\mu}{u^3} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \left(2 - \frac{2T_e}{u^2 T_{e0}} \right) \frac{1}{u^2} \frac{\partial f_e}{\partial u} \Bigg\}. \quad (\text{A.23})$$

Observemos as seguintes simplificações

$$\frac{2}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{T_e}{u T_{e0}} \frac{\partial f_e}{\partial u} + f_e \right) = \frac{2}{u^2} \left[\frac{T_e}{u T_{e0}} \frac{\partial^2 f_e}{\partial u^2} + \left(1 - \frac{T_e}{u^2 T_{e0}} \right) \frac{\partial f_e}{\partial u} \right], \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] = (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial f_e}{\partial \mu}, \quad (\text{A.25})$$

e que podemos escrever a expressão acima da forma

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] = \frac{\partial}{\sin \theta \partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.26})$$

A partir dessas expressões pode-se obter uma forma mais comum que se encontra na literatura (KRIVENSKI et al., 1987), dada por

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = \frac{n_e \ln \Lambda}{n_{e0} \ln \Lambda(0)} \left[\frac{Z^2 + 1}{u^3 \sin \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f_e) + \frac{2}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} f_e + f_e \right) \right], \quad (\text{A.27})$$

onde θ é o ângulo entre o momentum da partícula e o campo magnético do ambiente, Z é a carga iônica efetiva e u é a velocidade adimensional dos elétrons.

APÊNDICE B – Cálculo do tensor dielétrico para ondas do tipo EC

B.1 Componentes do tensor dielétrico

Para o cálculo do tensor dielétrico, vamos partir das Eqs. (2) da Ref. (ZIEBELL, 1988), em cuja obtenção foi feita uma expansão das funções de Bessel que aparecem nas expressões gerais para as componentes ε_{ij} ,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= 1 + X \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n^2 a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s) \\
\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} &= -iX \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n(n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s) \\
\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= N_{\perp} \frac{X}{Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s) \\
\varepsilon_{22} &= 1 + X \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} b(0, m) I(0, m, 0, 0) \\
&\quad + X \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} b(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s) \\
\varepsilon_{23} = -\varepsilon_{32} &= N_{\perp} i \frac{X}{Y} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} m a(0, m) I(0, m, 1, 0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} (n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s) \right] \\
\varepsilon_{33} = \varepsilon_{330} &+ N_{\perp}^2 \frac{X}{Y^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} a(0, m) I(0, m, 2, 0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 2, s) \right],
\end{aligned} \tag{B.1}$$

onde $X = \omega_e^2/\omega^2$ (ω_e é a frequência de plasma eletrônica), $Y = |\omega_c|/\omega$ (ω_c é a frequência de cíclotron eletrônica), e onde (ZIEBELL, 1988; KRIVENSKI et al., 1987)

$$a(n, m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(|n|+m)} \frac{(-1)^m [2(|n| + m)]!}{[(|n| + m)!]^2 (2|n| + m)! m!}$$

$$b(n, m) = \begin{cases} a(1, m-2), & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{4} [a(n-1, m) + a(n+1, m-2) - 2\frac{|n|+m-1}{|n|+m} a(n, m-1)], & \text{para } n > 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(-m)!} = 0, \quad \text{for } m \geq 1,$$

$$I(n, m, h, s) = \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f)}{\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}}$$

$$L = \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right]$$

$$\varepsilon_{330} = 1 + X \int d^3u \frac{u_{\parallel} \partial f / \partial u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}}.$$

Nessas expressões u_{\parallel} e u_{\perp} são respectivamente as componentes paralela e perpendicular do momentum normalizado, $\vec{u} = \vec{p}/(m_e c)$, onde m_e é a massa eletrônica, e $\gamma = (1 + u^2)^{1/2}$ é o fator relativístico.

Na Ref. (ZIEBELL, 1988), a função distribuição era normalizada à unidade, $\int d^3u f = 1$. Em nosso caso, entretanto, vamos usar uma normalização diferente,

$$n_e(x, t) = \int d^3u f(x, \vec{u}, t),$$

de modo que reescrevemos as expressões para os ε_{ij} como segue,

$$\varepsilon_{11} = 1 + \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n^2 a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s)$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -i \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n(n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{N_{\perp}}{Y} \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s)$$

$$\varepsilon_{22} = 1 + \frac{X}{n_e} \left[\sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} b(0, m) I(0, m, 0, 0) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} b(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s) \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23} = -\varepsilon_{32} &= i \frac{N_{\perp}}{Y} \frac{X}{n_e} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} ma(0, m) I(0, m, 1, 0) \right. \\
&+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} (n+m)a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s) \right] \\
\varepsilon_{33} &= \varepsilon_{330} + \frac{N_{\perp}^2}{Y^2} \frac{X}{n_e} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} a(0, m) I(0, m, 2, 0) \right. \\
&+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 2, s) \right],
\end{aligned}$$

onde $X = \omega_e^2/\omega^2$ ($\omega_e(x, t)$ é a frequência de plasma eletrônica), $Y = |\omega_c|/\omega$ (ω_c é a frequência de cíclotron eletrônica), e onde

$$a(n, m) = \left(\frac{1}{2} \right)^{2(n+m)} \frac{(-1)^m [2(n+m)]!}{[(n+m)!]^2 (2n+m)! m!}$$

$$b(n, m) = \begin{cases} a(1, m-2), & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{4} [a(n-1, m) + a(n+1, m-2) - 2 \frac{n+m-1}{n+m} a(n, m-1)], & \text{para } n > 0 \end{cases}$$

$$I(n, m, h, s) = \int d^3 u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f)}{\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}}$$

$$L = \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right]$$

$$\varepsilon_{330} = 1 + \frac{X}{n_e} \int d^3 u \frac{u_{\parallel} \partial f / \partial u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}}.$$

B.2 Cálculo das integrais $I(n, m, h, s)$

Podemos escrever

$$I(n, m, h, s) = I'(n, m, h, s) + i I''(n, m, h, s), \quad (\text{B.3})$$

onde

$$I'(n, m, h, s) = \wp \int d^3 u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f)}{\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}}$$

$$I''(n, m, h, s) = -\pi \int d^3 u u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f) \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

onde o símbolo \wp indica a parte principal da integral.

Vamos nos dedicar inicialmente ao cálculo de $I''(n, m, h, s)$. Para tanto, vamos considerar que a f é uma $f(u, \mu, t)$, onde $\mu = \cos \theta$, onde θ é o *pitch angle*. Nesse caso, sabemos que

$$u_{\parallel} = u\mu, \quad u_{\perp} = u(1 - \mu^2)^{1/2}.$$

A transformação inversa fica dada por

$$u = (u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{1/2}, \quad \mu = \frac{u_{\parallel}}{(u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{1/2}}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} &= \frac{\partial u}{\partial u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{u_{\perp}}{u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{u_{\perp} u_{\parallel}}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} = (1 - \mu^2)^{1/2} \left(\partial_u - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} &= \frac{\partial u}{\partial u_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{u_{\parallel}}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{1}{u} - \frac{u_{\parallel}^2}{u^3} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} = \left(\mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right), \end{aligned}$$

Portanto, o operador L (em I'') é dado por

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[snY (1 - \mu^2)^{1/2} \left(\partial_u - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} \right) + N_{\parallel} u (1 - \mu^2)^{1/2} \left(\mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right) \right] \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\gamma} \left[snY \left(\partial_u - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} \right) + N_{\parallel} u \left(\mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right) \right] \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\gamma} \left[(snY + N_{\parallel} u \mu) \partial_u - snY \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} + N_{\parallel} u \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right] \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\gamma} \left[(snY + N_{\parallel} u \mu) \partial_u - snY \frac{\mu^2}{u \mu} \partial_{\mu} + N_{\parallel} u \mu \frac{(1 - \mu^2)}{u \mu} \partial_{\mu} \right] \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\gamma} \left[(snY + N_{\parallel} u \mu) \partial_u - snY \frac{\mu^2}{u \mu} \partial_{\mu} - N_{\parallel} u \mu \frac{\mu^2}{u \mu} \partial_{\mu} + N_{\parallel} u \mu \frac{1}{u \mu} \partial_{\mu} \right] \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\gamma} \left[(snY + N_{\parallel} u \mu) \partial_u - \frac{\mu^2}{u \mu} (snY + N_{\parallel} u \mu) \partial_{\mu} + N_{\parallel} \partial_{\mu} \right] \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\gamma} \left[\gamma \partial_u - \frac{\mu}{u} \gamma \partial_{\mu} + N_{\parallel} \partial_{\mu} \right] \\ &= (1 - \mu^2)^{1/2} \left[\partial_u + \left(\frac{N_{\parallel}}{\gamma} - \frac{\mu}{u} \right) \partial_{\mu} \right] \end{aligned}$$

Retornando ao cálculo da I'' ,

$$\begin{aligned}
I''(n, m, h, s) &= -\pi \int d^3u u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f) \delta(\gamma - snY - N_{\parallel}u_{\parallel}), \\
&= -\pi \int_0^{\infty} du u^2 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\phi u^h \mu^h u^{2(n+m-1)} (1-\mu^2)^{n+m-1} u (1-\mu^2)^{1/2} L(f) \delta(\gamma - snY - N_{\parallel}u\mu), \\
&= -2\pi^2 \int_0^{\infty} du u^{3+h} u^{2(n+m-1)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m-1} (1-\mu^2) \left[\partial_u f + \left(\frac{N_{\parallel}}{\gamma} - \frac{\mu}{u} \right) \partial_{\mu} f \right] \\
&\quad \times \delta(\gamma - snY - N_{\parallel}u\mu), \\
&= -2\pi^2 \int_0^{\infty} du u^{3+h} u^{2(n+m-1)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} \left[\partial_u f + \left(\frac{N_{\parallel}}{\gamma} - \frac{\mu}{u} \right) \partial_{\mu} f \right] \delta(\gamma - snY - N_{\parallel}u\mu),
\end{aligned}$$

onde levamos em conta o fato de que a $f(u, \mu, t)$ tem simetria azimutal.

Fazendo a integral em μ ,

$$I''(n, m, h, s) = -\frac{2\pi^2}{|N_{\parallel}|} \int_0^{\infty} du u^{h+2(n+m)} \left\{ \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} \left[\partial_u f + \left(\frac{N_{\parallel}}{\gamma} - \frac{\mu}{u} \right) \partial_{\mu} f \right] \right\}_{\mu_*} \Theta(1-|\mu_*|), \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\mu_* \equiv \frac{\gamma - snY}{N_{\parallel}u},$$

e onde Θ é a função *step*.

Vamos então discutir a condição de ressonância.

Para o caso $n = 0$, a condição de ressonância pode ser escrita como

$$N_{\parallel}u_{\parallel} = \gamma \geq \sqrt{1 + u_{\parallel}^2}.$$

Sabemos que N_{\parallel} é o seno do ângulo de incidência da radiação com a normal à superfície do plasma. Logo, $|N_{\parallel}| < 1$. Portanto, a condição de ressonância acima não é satisfeita para nenhum valor de u_{\parallel} .

Considerando $n \neq 0$, teremos

$$N_{\parallel}u_{\parallel} + snY = \gamma \geq \sqrt{1 + u_{\parallel}^2}.$$

Vemos que a ressonância pode ocorrer com $s = 1$. Entretanto, não pode ocorrer com $s = -1$, uma vez que já tínhamos visto acima que não ocorre para $sn = 0$.

Portanto, podemos re-escrever o resultado da integral I'' :

$$I''(n, m, h, s) = -\frac{2\pi^2}{|N_{\parallel}|} \int_0^{\infty} du u^{h+2(n+m)} \left\{ \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} \left[\partial_u f + \left(\frac{N_{\parallel}}{\gamma} - \frac{\mu}{u} \right) \partial_{\mu} f \right] \right\}_{\mu_*} \delta_{s1} \Theta(1 - |\mu_*|) \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\mu_* \equiv \frac{\gamma - nY}{N_{\parallel}u}.$$

Vamos agora tratar das partes principais das integrais. Para isso, vamos considerar o seguinte:

As partes ressonantes dependem criticamente de detalhes da função distribuição sobre a curva de ressonância. Por outro lado, as partes principais dependem de propriedades globais da distribuição, que não devem ser muito afetadas por detalhes da cauda da distribuição, que podem mudar devido ao efeito de ondas, transporte e colisões. Podemos considerar como boa aproximação o tratamento que supõe uma distribuição Maxwelliana.

Vamos então supor uma Maxwelliana relativística, para o cálculo da parte hermitiana das integrais, tomada como caso particular ($l = 0$) da distribuição tipo cone-de-perda usada em (ZIEBELL, 1988),

$$f_M(u, \mu, t) = n_e(x, t) A_0 e^{-\mu_e \gamma},$$

onde $\mu_e = m_e c^2 / T_e$ e onde

$$A_0 = \frac{\mu_e}{4\pi K_2(\mu_e)},$$

onde $K_2(\mu_e)$ é a função de Bessel modificada de ordem n .

De acordo com essa definição, a f_M é normalizada a $n_e(x, t)$, como a f usada no cálculo da I'' , enquanto a distribuição usada em (ZIEBELL, 1988) era normalizada à unidade.

Usando a Eq. (4) da Ref. (ZIEBELL, 1988), já particularizada para o caso $l = 0$ (e multiplicando por n_e , para se ajustar à normalização usada nessas notas, na Eq. (B.2)), temos

$$I'(n, m, h, s) = 2\pi A_0 n_e \sum_{i=0}^{n+m-1} \frac{(n+m-1)!}{i!(n+m-1-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\mu_e \gamma_{\parallel}} (2\gamma_{\parallel})^{n+m-1-i} \times \left[-\mu_e L_{ns}(n+m+1+i) - 2\mu_e \gamma_{\parallel} L_{ns}(n+m+i) \right], \quad (\text{B.6})$$

onde

$$L_{ns}(j) = \frac{1}{\mu_e^j} \left[(1 - \delta_{j,0}) \sum_{m=0}^{j-1} (j-1-m)! x_{ns}^m - x_{ns}^j \exp^{-x_{ns}} \text{Ei}(x_{ns}) \right],$$

$x_{ns} = -\mu_e a_{ns}$, $a_{ns} = \gamma_{\parallel} - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}$, $\gamma_{\parallel} = (1 + u_{\parallel}^2)^{1/2}$, e $\text{Ei}(x_{ns})$ é a função integral exponencial (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964).

B.2.1 Propagação perpendicular

Podemos escrever, para I'' ,

$$I''(n, m, h, s) = -\pi \int d^3u u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f) \delta(\gamma - snY).$$

Vamos considerar que a f é uma $f(u, \mu, t)$, onde $\mu = \cos \theta$, onde θ é o *pitch angle*. Nesse caso, sabemos que

$$u_{\parallel} = u\mu, \quad u_{\perp} = u(1 - \mu^2)^{1/2}.$$

A transformação inversa fica dada por

$$u = (u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{1/2}, \quad \mu = \frac{u_{\parallel}}{(u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{1/2}}$$

Podemos então escrever

$$\frac{\partial}{\partial u_{\perp}} = \frac{\partial u}{\partial u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{u_{\perp}}{u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{u_{\perp} u_{\parallel}}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} = (1 - \mu^2)^{1/2} \left(\partial_u - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} = \frac{\partial u}{\partial u_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{u_{\parallel}}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{1}{u} - \frac{u_{\parallel}^2}{u^3} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} = \left(\mu \partial_u + \frac{(1 - \mu^2)}{u} \partial_{\mu} \right),$$

Portanto, o operador L (em I'') é dado por

$$L = \left[\frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \right] = (1 - \mu^2)^{1/2} \left[\partial_u - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} \right]$$

Retornando ao cálculo da I'' ,

$$\begin{aligned} I''(n, m, h, s) &= -\pi \int d^3u u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(f) \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}), \\ &= -\pi \int_0^{\infty} du u^2 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\phi u^h \mu^h u^{2(n+m-1)} (1 - \mu^2)^{n+m-1} u (1 - \mu^2)^{1/2} L(f) \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u\mu), \\ &= -2\pi^2 \int_0^{\infty} du u^{3+h} u^{2(n+m-1)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m-1} (1 - \mu^2) \left[\partial_u f - \frac{\mu}{u} \partial_{\mu} f \right] \delta(\gamma - snY), \end{aligned}$$

$$= -2\pi^2 \int_0^\infty du u^{3+h} u^{2(n+m-1)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} \left[\partial_u f - \frac{\mu}{u} \partial_\mu f \right] \delta(\gamma - snY),$$

onde levamos em conta o fato de que a $f(u, \mu, t)$ tem simetria azimutal. Re-escrevendo,

$$I''(n, m, h, s) = -2\pi^2 \int_0^\infty du u^{h+2(n+m)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} [u\partial_u f - \mu\partial_\mu f] \delta(\gamma - snY),$$

$$I''(n, m, h, s) = -2\pi^2 \int_0^\infty du u^{h+2(n+m)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} [u\partial_u f - \mu\partial_\mu f] \frac{|snY|}{u} \delta(u-u_*) \delta_{s1},$$

$$I''(n, m, h, s) = -2\pi^2 (nY) \int_0^\infty du u^{h+2(n+m)-1} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} [u\partial_u f - \mu\partial_\mu f] \delta(u-u_*) \delta_{s1}.$$

Fazendo a integração em u ,

$$I''(n, m, h, s) = -2\pi^2 (nY) (n^2 Y^2 - 1)^{n+m+h/2-1/2} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1-\mu^2)^{n+m} G(u_*, \mu) \delta_{s1} \Theta[n^2 Y^2 - 1], \quad (\text{B.7})$$

onde

$$u_* \equiv (n^2 Y^2 - 1)^{1/2},$$

$$G(u_*, \mu) \equiv [u\partial_u f - \mu\partial_\mu f]_{u_*}.$$

B.3 Cálculo de ε_{330}

A partir da Eq. (6) de (ZIEBELL, 1988), para $l = 0$,

$$\varepsilon_{330} = 1 - \frac{\mu_e X}{n_e(x)} 2\pi A_0 \int_{-\infty}^\infty du_{\parallel} u_{\parallel}^2 e^{-\mu_e \gamma_{\parallel}} L_{00}(0), \quad (\text{B.8})$$

onde $L_{00}(j)$ vem de $L_{ns}(j)$ para $n = s = 0$.

APÊNDICE C – Cálculo do tensor correlação para ondas do tipo EC

C.1 Cálculo das componentes G_{ij} do tensor correlação

Da Eq. (17) de (FIDONE et al., 1980), já adaptando para a f normalizada à densidade $n_e(x, t)$ (na Ref. (FIDONE et al., 1980) a f era normalizada à unidade),

$$G_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2}{2m_e \omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_{\perp}^2}{\gamma} f \Pi_{in}^* \Pi_{jn} \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}), \quad (\text{C.1})$$

onde

$$\Pi_{1n} = \frac{nJ_n(\rho)}{\rho}, \quad \Pi_{2n} = iJ'_n(\rho), \quad \Pi_{3n} = \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n(\rho), \quad \rho = -\frac{N_{\perp} u_{\perp}}{Y}.$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis (mantendo a mesma notação para a f),

$$\int d^3p f(\vec{p}) = \int d^3u f(\vec{u}),$$

de modo que

$$G_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} f \Pi_{in}^* \Pi_{jn} \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}), \quad (\text{C.2})$$

Em G_{ij} , teremos

$$\begin{aligned} \Pi_{1n}^* \Pi_{1n} &= \frac{n^2 J_n^2}{\rho^2}, & \Pi_{1n}^* \Pi_{2n} &= \frac{inJ_n J'_n}{\rho}, & \Pi_{1n}^* \Pi_{3n} &= \frac{nJ_n}{\rho} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n, \\ \Pi_{2n}^* \Pi_{1n} &= \frac{-inJ_n J'_n}{\rho} = -\Pi_{1n}^* \Pi_{2n}, & \Pi_{2n}^* \Pi_{2n} &= [J'_n(\rho)]^2, & \Pi_{2n}^* \Pi_{3n} &= -iJ'_n \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n = -i \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n J'_n, \\ \Pi_{3n}^* \Pi_{1n} &= \frac{nJ_n}{\rho} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n = \Pi_{1n}^* \Pi_{3n}, & \Pi_{3n}^* \Pi_{2n} &= \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n (iJ'_n) = i \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n J'_n = -\Pi_{2n}^* \Pi_{3n}, & \Pi_{3n}^* \Pi_{3n} &= \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n^2. \end{aligned}$$

Re-escrevendo,

$$\begin{aligned}\Pi_{1n}^* \Pi_{1n} &= \frac{n^2 J_n^2}{\rho^2}, \quad \Pi_{1n}^* \Pi_{2n} = \frac{in}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (J_n^2), \quad \Pi_{1n}^* \Pi_{3n} = \frac{n}{\rho} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n^2, \\ \Pi_{2n}^* \Pi_{1n} &= -\Pi_{1n}^* \Pi_{2n}, \quad \Pi_{2n}^* \Pi_{2n} = [J'_n(\rho)]^2, \quad \Pi_{2n}^* \Pi_{3n} = -i \frac{u_{\parallel}}{2u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \rho} (J_n^2), \\ \Pi_{3n}^* \Pi_{1n} &= \Pi_{1n}^* \Pi_{3n}, \quad \Pi_{3n}^* \Pi_{2n} = -\Pi_{2n}^* \Pi_{3n}, \quad \Pi_{3n}^* \Pi_{3n} = \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n^2.\end{aligned}$$

Agora, usamos as seguintes expansões em série (ver Ref. (KRIVENSKI et al., 1987))

$$\begin{aligned}J_n^2(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \rho^{2(|n|+m)} \\ [J'_n(\rho)]^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} b(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)}.\end{aligned}\tag{C.3}$$

Usando estes resultados nas Eqs. (C.2),

$$\begin{aligned}G_{11}(\vec{k}, \omega) &= \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{n^2}{\rho^2} J_n^2 f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}), \\ G_{11}(\vec{k}, \omega) &= \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} n^2 a(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),\end{aligned}$$

Trocando n por $-n$, para deixar em forma mais familiar,

$$G_{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} n^2 a(n, m) \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma - nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

Agora, transformando o somatório de n negativo em n positivo,

$$\begin{aligned}G_{11}(\vec{k}, \omega) &= \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} n^2 a(n, m) \sum_{s=\pm 1} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \rho^{2(n+m-1)} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}), \\ G_{11}(\vec{k}, \omega) &= \frac{X}{n_e} \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n^2 a(n, m) \sum_{s=\pm 1} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^{2(n+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}),\end{aligned}$$

Seja

$$J(n, m, h, s) = \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^4} \int d^3 u u_{\parallel}^h \frac{u_{\perp}^{2(n+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}),\tag{C.4}$$

$$G_{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n^2 a(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 0, s),$$

Analogamente,

$$G_{12}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{in}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} J_n^2 f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{12}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{in}{2\rho} \sum_{m=0}^{\infty} 2(|n|+m) a(n, m) \rho^{2(|n|+m)-1} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{12}(\vec{k}, \omega) = i \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} n(|n|+m) a(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{12}(\vec{k}, \omega) = i \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(|n|+m-1)} n(|n|+m) a(n, m) \\ \times \int d^3 u \frac{u_{\perp}^{2(|n|+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{12}(\vec{k}, \omega) = -i \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} n(n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s J(n, m, 0, s),$$

onde o sinal trocou na troca de n por $-n$.

$$G_{13}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{n u_{\parallel}}{\rho u_{\perp}} J_n^2 f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{13}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} n \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \rho^{2(|n|+m)-1} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{13}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \frac{N_{\perp}}{Y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u u_{\parallel} \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} n a(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{13}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \frac{N_{\perp}}{Y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(|n|+m-1)} n a(n, m) \\ \times \int d^3 u u_{\parallel} \frac{u_{\perp}^{2(|n|+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{13}(\vec{k}, \omega) = \frac{X}{n_e} \frac{N_{\perp}}{Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} n a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s J(n, m, 1, s).$$

$$G_{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} J_n \right]^2 f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} b(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(|n|+m-1)} b(n, m) \int d^3 u \frac{u_{\perp}^{2(|n|+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{X}{n_e} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} b(0, m) J(0, m, 0, 0) \\ + \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} b(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 0, s).$$

$$G_{23}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{i u_{\parallel}}{2u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \rho} J_n^2 f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{23}(\vec{k}, \omega) = -i \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{2u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} 2(|n|+m) a(n, m) \rho^{2(|n|+m)-1} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{23}(\vec{k}, \omega) = -i \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u u_{\parallel} \frac{u_{\perp}}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} (|n|+m) a(n, m) \rho^{2(|n|+m)-1} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{23}(\vec{k}, \omega) = i \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(|n|+m)-1} (|n|+m) a(n, m) \\ \times \int d^3 u u_{\parallel} \frac{u_{\perp}^{2(|n|+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{23}(\vec{k}, \omega) = i \frac{N_{\perp}}{Y} \frac{X}{n_e} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} m a(0, m) J(0, m, 1, 0) \\ + i \frac{N_{\perp}}{Y} \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} (n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 1, s),$$

$$G_{33}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n^2 f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

$$G_{33}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \frac{N_{\perp}^2}{Y^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 u u_{\parallel}^2 \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

Trocando n por $-n$, para deixar em forma mais familiar,

$$G_{33}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \frac{N_{\perp}^2}{Y^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \int d^3 u u_{\parallel}^2 \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \rho^{2(|n|+m-1)} f \delta(\gamma - nY - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

Agora, transformando o somatório de n negativo em n positivo,

$$G_{33}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_e^2 m_e c^2}{2\omega n_e(x, t)} (2\pi)^{-4} \frac{N_{\perp}^2}{Y^2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a(0, m) \int d^3 u u_{\parallel}^2 \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \rho^{2(m-1)} f \delta(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} \int d^3 u u_{\parallel}^2 \frac{u_{\perp}^2}{\gamma} \rho^{2(n+m-1)} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}) \right],$$

$$\begin{aligned}
G_{33}(\vec{k}, \omega) &= \frac{N_{\perp}^2 X \omega m_e c^2}{Y^2 n_e 2(2\pi)^4} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} a(0, m) \int d^3 u u_{\parallel}^2 \frac{u_{\perp}^{2m}}{\gamma} f \delta(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} \int d^3 u u_{\parallel}^2 \frac{u_{\perp}^{2(n+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}) \right], \\
G_{33}(\vec{k}, \omega) &= \frac{N_{\perp}^2 X}{Y^2 n_e} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} a(0, m) J(0, m, 2, 0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 2, s) \right], \\
G_{11}(\vec{k}, \omega) &= \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} n^2 a(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 0, s) \\
G_{12}(\vec{k}, \omega) = -G_{21}(\vec{k}, \omega) &= -i \frac{X}{n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} n(n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s J(n, m, 0, s) \\
G_{13}(\vec{k}, \omega) = G_{31}(\vec{k}, \omega) &= \frac{N_{\perp} X}{Y n_e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} n a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s J(n, m, 1, s) \\
G_{22}(\vec{k}, \omega) &= \frac{X}{n_e} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} b(0, m) J(0, m, 0, 0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} b(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 0, s) \right] \tag{C.5} \\
G_{23}(\vec{k}, \omega) &= i \frac{N_{\perp} X}{Y n_e} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} m a(0, m) J(0, m, 1, 0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} (n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 1, s) \right] \\
G_{33}(\vec{k}, \omega) &= \frac{N_{\perp}^2 X}{Y^2 n_e} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} a(0, m) J(0, m, 2, 0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} J(n, m, 2, s) \right].
\end{aligned}$$

Para o cálculo das integrais J procedemos analogamente ao que fizemos para I'' ,

$$\begin{aligned}
J(n, m, h, s) &= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^4} \int d^3 u u_{\parallel}^h \frac{u_{\perp}^{2(n+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u_{\parallel}), \\
&= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^4} \int_0^{\infty} du u^2 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\phi u^h \mu^h \frac{u^{2(n+m)}}{\gamma} (1 - \mu^2)^{n+m} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u\mu), \\
&= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^3} \int_0^{\infty} du u^{2+h} \frac{u^{2(n+m)}}{\gamma} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} f \delta(\gamma - snY - N_{\parallel} u\mu),
\end{aligned}$$

onde levamos em conta o fato de que a $f(u, \mu, t)$ tem simetria azimutal.

Fazendo a integral em μ ,

$$J(n, m, h, s) = \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^3 |N_{\parallel}|} \int_0^{\infty} du \frac{u^{h+2(n+m)+1}}{\gamma} [\mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} f]_{\mu_*} \delta_{s1} \Theta(1 - |\mu_*|), \quad (\text{C.6})$$

onde

$$\mu_* \equiv \frac{\gamma - nY}{N_{\parallel} u}.$$

C.1.1 Propagação perpendicular

$$\begin{aligned} J(n, m, h, s) &= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^4} \int d^3u u_{\parallel}^h \frac{u_{\perp}^{2(n+m)}}{\gamma} f \delta(\gamma - snY), \\ &= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^4} \int_0^{\infty} du u^2 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\phi u^h \mu^h \frac{u^{2(n+m)}}{\gamma} (1 - \mu^2)^{n+m} f \delta(\gamma - snY), \\ &= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^3} \int_0^{\infty} du u^{2+h} \frac{u^{2(n+m)}}{\gamma} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} f \delta(\gamma - snY), \end{aligned}$$

onde levamos em conta o fato de que a $f(u, \mu, t)$ tem simetria azimutal.

Re-escrevendo,

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^3} \int_0^{\infty} du u^{2+h} \frac{u^{2(n+m)}}{\gamma} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} f \frac{\gamma}{u} \delta(u - u_*) \delta_{s1}, \\ &= \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^3} \int_0^{\infty} du u^{1+h} u^{2(n+m)} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} f \delta(u - u_*) \delta_{s1}. \end{aligned}$$

Fazendo a integral em u ,

$$J(n, m, h, s) = \frac{\omega m_e c^2}{2(2\pi)^3} (n^2 Y^2 - 1)^{n+m+(1+h)/2} \int_{-1}^1 d\mu \mu^h (1 - \mu^2)^{n+m} f(u_*, \mu) \delta_{s1} \Theta[n^2 Y^2 - 1], \quad (\text{C.7})$$

onde

$$u_* \equiv (n^2 Y^2 - 1)^{1/2}.$$

APÊNDICE D – Método implícito em direções alternadas (ADI)

Neste Apêndice vamos fazer uma breve revisão de conceitos de Cálculo Numérico a fim de apresentarmos uma noção geral do que consiste o método ADI - "*implícito em direções alternadas*" e de como o mesmo foi usado na resolução numérica do problema tratado neste trabalho.

Entretanto, não vamos apresentar uma derivação completa das equações do método ADI para solução da equação de Fokker-Planck, empregadas aqui, por uma questão de economia, mesmo que, essa derivação pode ser encontrada na literatura e no trabalho de mestrado do autor (OLIVEIRA, 2002).

D.1 Diferenças finitas

Estamos estudando uma função que depende de quatro variáveis, a saber: u o momentum normalizado; $\mu = \cos \theta$, onde θ é o ângulo de inclinação ou *pitch angle*¹; s a coordenada radial normalizada no plano equatorial (varia de 0 a 1) e o tempo normalizado τ . Para calcularmos essa função numericamente, discretizamos as coordenadas definindo uma rede de pontos e transformamos as derivadas parciais em diferenças finitas.

Uma rede de pontos discretizada para uma função de duas variáveis pode ser visualizada conforme a Fig. 62, onde temos o ponto $(i\Delta u, j\Delta \mu)$, também chamado de ponto (i, j) , cercado por sua vizinhança. A derivação da aproximação de derivadas parciais por diferenças finitas pode ser facilmente encontrada na literatura, portanto, não vamos repeti-la aqui. Vamos, sim, nos limitar a apresentar as fórmulas de diferenças finitas para derivadas de primeira e segunda ordem para f no ponto (i, j) .

¹ θ é o ângulo entre o momentum do elétron e o campo magnético ambiente \vec{B}_0

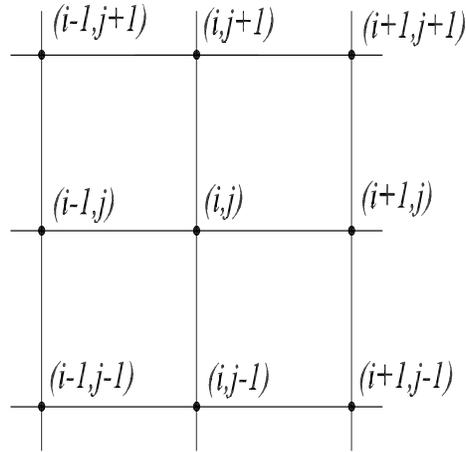


Figura 62: Disposição dos pontos de grade.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta u} + O(\Delta u), \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta u} + O(\Delta u), \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta u} + O[(\Delta u)^2], \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{(\Delta u)^2} + O[(\Delta u)^2]. \quad (\text{D.4})$$

As fórmulas (D.1), (D.2) e (D.3) são conhecidas como diferença finita avançada, recuada e central, respectivamente. Nas expressões acima, $O(\Delta u)$ significa termos de ordem Δu . Veremos na próxima seção uma forma conveniente para se escrever a derivada mista.

D.2 Método explícito e método implícito

Introduziremos, com um pouco mais de detalhe, os conceitos dos métodos explícito e implícito na resolução de equações diferenciais parciais. Para tanto, tomemos como exemplo a seguinte equação diferencial para a função unidimensional $f(u, \tau)$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad (\text{D.5})$$

para $0 < u < 1$, $0 < \tau < T$ com condições de contorno $g_0(\tau)$ e $g_1(\tau)$, e condição inicial $f_0(u)$

$$\begin{aligned} f(0, \tau) &= g_0(\tau), & 0 < \tau \leq T \\ f(1, \tau) &= g_1(\tau), & 0 < \tau \leq T, \\ f(u, 0) &= f_0(u), & 0 \leq u \leq 1. \end{aligned} \tag{D.6}$$

Construímos uma grade de valores para a função f , $(i\Delta u, n\Delta\tau)$ com espaçamento de grade $\Delta u = 1/M$, $\Delta\tau = T/N$, onde M e N são valores inteiros arbitrários. Para pontos de grade (i, n) que não sejam para $i = 0$ ou $i = M$, as derivadas de (D.5) são substituídas por diferenças finitas, (D.4) e análoga a (D.1) em τ). Temos então

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta\tau} = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta u)^2}. \tag{D.7}$$

Podemos, então, calcular **explicitamente** o valor de f_i^{n+1} no instante τ^{n+1} através dos valores de f_i^n no instante τ^n para $1 \leq i \leq M - 1$,

$$f_i^{n+1} = \lambda f_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) f_i^n + \lambda f_{i+1}^n, \tag{D.8}$$

onde

$$\lambda = \frac{\Delta\tau}{(\Delta u)^2}. \tag{D.9}$$

Usando os valores iniciais de f em $\tau = 0$,

$$f_i^0 = f_0(u_i). \tag{D.10}$$

Para os pontos de borda, $i = 0$, $i = M$, usamos as condições de contorno

$$\begin{aligned} f_0^{n+1} &= g_0(\tau^{n+1}) \\ f_M^{n+1} &= g_1(\tau^{n+1}). \end{aligned} \tag{D.11}$$

Cabe, ainda, ressaltar que para assegurar a estabilidade, a seguinte restrição entre o incremento de tempo e o de espaço deve ser seguida (CARNAHAN; LUTHER; WILKES, 1969)

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta u)^2}{2}, \tag{D.12}$$

ou seja, $0 \leq \lambda \leq 1/2$.

Por outro lado, o método implícito trata a equação (D.5), representando a derivada segunda de f em relação a u , como a forma diferencial para um nível de tempo

avanzado τ^{n+1} , em vez de τ^n como no método explícito. Desta forma, podemos expressar a equação (D.5) como

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta\tau} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{(\Delta u)^2}. \quad (\text{D.13})$$

Lembrando a definição (D.9) temos

$$-\lambda f_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)f_i^{n+1} - \lambda f_{i+1}^{n+1} = f_i^n. \quad (\text{D.14})$$

As condições de contorno e a condição inicial são as mesmas que do método explícito, ou seja,

$$\begin{aligned} f_0^{n+1} &= g_0(\tau^{n+1}), \\ f_M^{n+1} &= g_1(\tau^{n+1}), \\ f_i^0 &= f_0(u_i). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

A função f^{n+1} nos pontos $n-1$, n e $n+1$ depende **implicitamente** de f^n , assim, para o nível de tempo τ^n , a equação (D.8) é escrita uma vez para cada ponto $1 \leq i \leq M-1$, resultando em um sistema de $M-1$ equações simultâneas com $M-1$ incógnitas f_i^{n+1} .

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda)f_1^{n+1} - \lambda f_2^{n+1} &= f_1^n + \lambda g_0(\tau^{n+1}), \\ &\dots \\ -\lambda f_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)f_i^{n+1} - \lambda f_{i+1}^{n+1} &= f_i^n \text{ para } 2 \leq i \leq M-2, \\ &\dots \\ -\lambda f_{M-2}^{n+1} + (1 + 2\lambda)f_{M-1}^{n+1} &= f_{M-1}^n + \lambda g_1(\tau^{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Com os coeficientes de f_{i-1}^{n+1} , f_i^{n+1} e f_{i+1}^{n+1} , formamos uma matriz tridiagonal que permite que o sistema (D.16) seja resolvido pelo método de eliminação Gaussiana que é descrito em (CARNAHAN; LUTHER; WILKES, 1969).

Faltou ainda, na seção anterior (não tínhamos os conceitos de derivadas explícita e implícita), apresentar uma forma conveniente de escrever uma derivada mista, a fim de que se continue a ter uma matriz tridiagonal no caso de uma equação em duas dimensões, mais o tempo. Para fazer isso, vamos proceder da seguinte forma. Primeiramente calculamos a derivada em u como a média entre as derivadas centrais explícita e implícita, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n + f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{4\Delta u} \quad (\text{D.17})$$

Posteriormente, calculamos a derivada em μ como a diferença finita avançada da explícita

e recuada da implícita. Ficamos, então, com a seguinte expressão para a derivada mista.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \mu} = \frac{(f_{i+1,j+1}^n - f_{i-1,j+1}^n) - (f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n)}{4\Delta u \Delta \mu} + \frac{(f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}) - (f_{i+1,j-1}^{n+1} - f_{i-1,j-1}^{n+1})}{4\Delta u \Delta \mu} + O[(\Delta u + \Delta \mu)^2]. \quad (\text{D.18})$$

D.3 Método implícito em direções alternadas

Até aqui falamos em uma equação com uma dimensão, mais o tempo. Agora, vamos apresentar um procedimento que pode ser usado para duas ou mais dimensões – método implícito em direções alternadas (ADI). Para um melhor entendimento vamos nos fixar a duas dimensões. Nesse caso, o método consiste basicamente em dividir cada intervalo de tempo $\Delta\tau$ em dois subintervalos $\frac{1}{2}\Delta\tau$ e, no primeiro subintervalo, encontrar a função procurada implicitamente em uma direção, e explicitamente na outra direção. Já no subintervalo seguinte, encontrá-la explicitamente naquela direção e implicitamente nesta direção.

A Fig. 63 procura ilustrar este procedimento, onde no primeiro subintervalo o tempo varia de τ a $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$, correspondendo a uma variação no tempo discretizado dada por: n a $n + 1/2$, e no segundo subintervalo, o tempo varia de $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$ a $\tau + \Delta\tau$, correspondendo a uma variação no tempo discretizado dada por: $n + 1/2$ a $n + 1$.

Em nosso problema, temos uma dimensão espacial que consiste na distância radial ao centro do plasma. Aplicamos o método ADI nas direções u e μ e resolvemos explicitamente na direção s . Assim, construímos um sistema de equações tridiagonal para cada subintervalo, que pode ser resolvido por eliminação Gaussiana. Uma expressão para cada um desses sistemas é dada abaixo, a derivação pode ser encontrada na Dissertação de Mestrado do autor (OLIVEIRA, 2002).

Assim, tomando derivada implícita na coordenada u (correspondente a i) e mantemos explícita as coordenadas μ (correspondente a j) e s (correspondente a k), temos para o primeiro subintervalo,

$$\alpha_1 f_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_1 f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_1 f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \psi_{i,j}^{1,n} \quad (\text{D.19})$$

e, para o segundo subintervalo, vamos considerar implícitas as derivadas na coordenada μ , correspondentes ao índice j , calculando as diferenças finitas no instante $n + 1$, enquanto mantemos explícitas as derivadas nas coordenadas u (correspondentes a i) e s

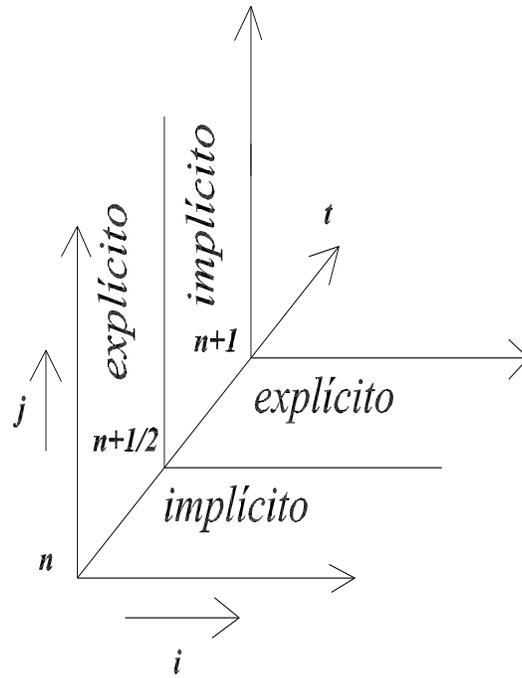


Figura 63: Esquema ilustrativo do método ADI

(correspondentes a k), calculando as diferenças finitas no instante $n + \frac{1}{2}$. Assim, temos

$$\alpha_2 f_{i,j-1,k}^{n+1} + \beta_2 f_{i,j,k}^{n+1} + \gamma_2 f_{i,j+1,k}^{n+1} = \psi_{i,j}^{2,n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.20})$$

Observemos que os sistemas (D.19) e (D.20), na verdade, apresentam três formas de coeficientes α , β , γ e ψ para cada subintervalo, uma para pontos dentro do contorno e uma para cada um dos dois contornos.

Poderíamos ter feito uma generalização do método ADI, fazendo uma divisão em três subintervalos. No primeiro, explícito nas direções s e μ , implícito em u . No segundo subintervalo, explícito em s e u , implícito em μ . Finalmente, no terceiro subintervalo, fazer explícito em u e μ e implícito em s . Esse método, entretanto, apresenta o inconveniente de aumentar o tempo computacional. Como já estávamos obtendo bons resultados com o método ADI mais a resolução explícita na terceira dimensão, não adotamos a generalização com três subintervalos.

Podemos mencionar também que fizemos uma comparação entre duas abordagens para a forma de escrever o termo de difusão radial, para a solução numérica das equações obtidas com o método ADI em duas dimensões mais a resolução explícita na terceira dimensão. Para explicar essas duas abordagens, vamos repetir aqui a forma do termo de

difusão radial.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(D \frac{\partial f}{\partial s} \right). \quad (\text{D.21})$$

Na primeira abordagem, a derivada $(\partial f/\partial s)$ foi escrita usando a Eq. (D.3), sendo essa equação novamente usada para o conjunto $D(\partial f/\partial s)$. Na segunda abordagem, o lado direito da equação de difusão foi escrito como $D(\partial^2 f/\partial s^2) + (\partial D/\partial s)(\partial f/\partial s)$, sendo a Eq. (D.3) usada para as derivadas de primeira ordem, e a Eq. (D.4) usada para as derivadas de segunda ordem. Os resultados dos testes não apresentaram diferença significativa, de modo que empregamos a primeira abordagem para a obtenção dos resultados apresentados nesse trabalho.

APÊNDICE E – Lista de Anexos

E.1 Lista de trabalhos publicados originados no desenvolvimento deste projeto que se encontram em Anexo

Este projeto de Doutorado originou os seguintes trabalhos:

- OLIVEIRA, C. I. de; ZIEBELL, L. F.; ROSA, P. R. da S. **Efficiency of LH current drive in tokamaks featuring an internal transport barrier.** *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v.47,n. 2, p. 249-267, Feb. 2005.
- ZIEBELL, L. F.; OLIVEIRA, C. I. de; ROSA, P. R. da S. **Effect of radial transport on the LH current drive efficiency in tokamaks featuring an internal transport barrier.** *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v. 34, n. 4B, p. 1608-1614, Dec. 2004.
- ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F.; OLIVEIRA, C. I. de; JARDIM, G. N.; BONFIM, A. K. **Efficiency of LH+EC current drive in tokamaks featuring an internal transport barrier.** *Brazilian of Journal Physics*, v. 35, n. 3A, p. 670-679, Sept. 2005.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (Ed.). *Handbook of mathematical functions*. Washington: National Bureau of Standards, 1964.
- AKHIEZER, A. I. et al. *Plasma eletrodynamics*. Oxford: Pergamon Press, 1975.
- ANDRADE, M. C. R. d. et al. Interaction of lower hybrid waves with fast ions in JET. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 36, n. 7, p. 1171–1188, 1994.
- BARANOV, Y. F. et al. On the link between the q-profile and internal transport barriers. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 46, n. 8, p. 1181–1196, 2001.
- BARBATO, E. Recent progress in lower hybrid current drive theory and experiments. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 40, n. 8, p. A63–A76, 1998. Suppl. A.
- BERNSTEIN, I. Geometric optics in space and time varying plasmas. *Physics of Fluids*, New York, v. 18, n. 3, p. 320–324, mar. 1975.
- BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. 3. ed. São José dos Campos: [s.n.], 2003.
- CALLIS, R. *The surprising benefits of creating a star*. Washington, 2006. Disponível em: <<http://www.ofes.science.doe.gov>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- CARNAHAN, B.; LUTHER, H.; WILKES, J. *Applied numerical methods*. New York: John Wiley, 1969.
- CASTLE, G. G.; WOOTTON, A. J. Stochasticity from external magnetic field measurements. *IEEE Transactions on Plasma Science*, New York, v. 22, n. 4, p. 369–375, 1994.
- CCEE. *Câmara de comercialização de energia elétrica*. 2005. Disponível em: <<http://www.ccee.org.br/index.jsp>>.
- CGEE - MCT. *Diretrizes estratégicas para o fundo setorial de energia*. Brasília, 2002. Disponível em: <<http://www.finep.gov.br>>. Acesso em: 10 mar. 2004.
- CHALLIS, C. D. The use of internal transport barriers in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 46, n. 12 B, p. B23–B40, 2004.
- CHALLIS, C. D. et al. Effect of q-profile modification by LHCD on internal transport barriers in JET. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 43, n. 7, p. 861–879, 2001.
- CHALLIS, C. D. et al. Influence of the q-profile shape on plasma performance in JET. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 44, n. 7, p. 1031–1055, 2002.

- CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2. ed. New York: Plenum, 1974.
- CONNOR, J. W. Tokamak turbulence: eletrostatic or magnetic? *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 35, n. 12, p. 293–305, 1993. Suppl. B.
- CONNOR, J. W.; WILSON, H. K. Survey of theories of anomalous transport. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 47, p. 719–795, 1994.
- DECKER, J. F. *Non-eletric applications of fusion*. 2003. Disponível em: <<http://www.ofes.fusion.doe.gov>>. Acesso em: 8 set. 2006.
- DOE. *GEN IV Nuclear Energy Systems*. Washigton, 2006. Disponível em: <<http://nuclear.energy.gov/genIV/neGenIV1.html>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- DOE. *Generation IV International Forum*. 2006. Disponível em: <<http://gif.inel.gov>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- DOYLE, E. J. et al. The quiescent double barrier regime in the DIII-D tokamak. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 43, n. 12 A, 2001.
- DUMONT, R.; GIRUZZI, G.; BARBATO, E. Combined kinetic and transport modeling of radiofrequency current drive. *Physics of Plasmas*, Melville, v. 7, n. 12, p. 4972–4982, 2000.
- DUMONT, R. J.; GIRUZZI, G. Theory of sinergy between electron cyclotron and lower hybrid waves. *Physics of Plasma*, Woodbury, v. 11, p. 3449–3459, 2004.
- ELETRONUCLEAR - ELETROBRÁS TERMONUCLEAR S.A. *Energia nuclear: fontes de energia*. 2004. Disponível em: <<http://www.eletronuclear.gov.br/>>. Acesso em: 8 set. 2004.
- EURATOM UKAEA. *Annual report of the EURATOM UKAEA fusion programme 2003/04*. 2004. Disponível em: <<http://www.fusion.org.uk/culham/annrep0304/index.html>>. Acesso em: 10 fev. 2005.
- FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R. L. Role of the relativistic mass variation in electron cyclotron resonance wave absorption for oblique propagation. *Physics of Fluids*, New York, v. 25, n. 12, p. 2249–2263, 1982.
- FIDONE, I. et al. Electron cyclotron emission from tokamak plasmas with mildly superthermal electrons. *The Physics of Fluids*, New York, v. 23, n. 7, p. 1336–1347, 1980.
- FIDONE, I. et al. Current drive by the combined effects of electron-cyclotron and Landau wave damping in tokamak plasmas. *The Physics of Fluids*, Woodburg, v. 27, n. 10, p. 2468–2476, 1984.
- FISCH, N. J. Theory of current drive in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 59, n. 1, p. 175–234, 1987.
- FLORES, F. *The equivalence of mass and energy*. 2004. Disponível em: <<http://plato.stanford.edu/entries/equivME/>>. Acesso em: 8 set. 2004.

- FUJITA, T. et al. Formation conditions for electron internal transport barriers in JT-60U plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 46, n. 5, maio 2004.
- GAFFEY Jr., J. D. Energetic ion distribution resulting from neutral beam injection in tokamaks. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 16, n. 2, p. 149–169, 1976.
- GARBET, X. et al. Physics of transport in tokamaks. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 46, n. 12, p. 557–575, 2004. Suppl. B.
- GENERAL ATOMICS. *Fusion science: harnessing the energy of the stars*. Washington, 2006. Disponível em: <<http://www.ofes.science.doe.gov>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- GENERAL ATOMICS FUSION EDUCATIONAL OUTREACH TEAM. *Fusion, nature's fundamental energy source*. San Diego: General Atomics Fusion Educational Outreach Team, 2004.
- GIRUZZI, G. *Théorie de l'émission et de l'absorption cyclotronique par une queue d'électrons relativistes dans le plasma d'un tokamak*. Tese (Doutorado) — Universidade Nancy I, Nancy, 1985.
- GIRUZZI, G. Modelling of RF current drive in the presence of radial diffusion. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 35, p. A123–A139, 1993. Suppl. A.
- GIRUZZI, G. Synergy of electron-cyclotron and lower-hybrid current drive in steady-state plasmas. *Physical Review Letters*, New York, v. 93, p. 255002 4p., 2004.
- GIRUZZI, G.; FIDONE, I.; GARBET, X. Kinetic effect of magnetic turbulence in tokamaks. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 32, n. 6, p. 1011–1021, 1992.
- GIRUZZI, G.; FIDONE, I.; GARBET, X. Kinetic effects of magnetic turbulence in tokamaks. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 32, n. 6, p. 1011–1021, 1992. Report EUR-CEA-FC-1440, DRFC, CEN, Cadarache, France, Nov. 1991.
- GIRUZZI, G. et al. Identification and measurement of core plasma turbulence by observation of fast electrons in TEXT-U. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 38, n. 9, p. 1593–1602, 1996.
- GRANATA, G.; FIDONE, I. A new representation of relativistic wave damping above the electron-cyclotron frequency. *Journal of Plasma Physics*, Cambridge, v. 45, n. 3, p. 361–369, 1991.
- HAAR, D. *Collected papers*. Oxford: Pergamon, 1965.
- HAGLER, M. O.; KRISTIANSEN, M. *An introduction to controlled thermonuclear fusion*. Lexington: Lexington Books, 1977.
- HAHM, T. S. Physics behind transport barrier theory and simulations. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Woodbury, v. 44, p. A87–A101, 2002.
- HARVEY et al. Radial transport and electron-cyclotron-current drive in the TCV and DIII-D tokamaks. *Physics Review Letters*, Melville, v. 88, n. 20, p. 205001 4p., maio 2002.

- HARVEY, R. W. et al. Radial transport effects on ECCD in the TCV and DIII-D tokamaks and on ohmic discharges in the MST RFP. In: . França: [s.n.], 2002. p. 13–16.
- HERMAN, R. *Fusion the search for endless energy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- HINTON, F. L.; HAZELTINE, R. D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 48, n. 2, p. 239–308, 1976.
- HUBA, J. D. *NRL plasma formulary*. Washington, 1998.
- HUGILL, J. Transport in tokamaks: a review of experiment. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Woodbury, v. 23, p. 331–373, 1983.
- INTERNATIONAL FUSION RESEARCH COUNCIL. Status report on fusion research. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 10, p. A1–A28, 2005.
- ITER. *Fusion research: frequently asked questions*. 2004. Disponível em: <<http://www.iter.org/ITERPublic/ITER/FAQ.html>>. Acesso em: 8 set. 2004.
- ITER PHYSICS EXPERT GROUPS. Chapter 2: Plasma confinement and transport. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 39, n. 12, p. 2175–2248, 1999.
- JET-FEAT. *JET and fusion energy for the next millenia: JET general lecture*. Abingdon, 1999.
- KAMMASH, T. *Fusion energy in space propulsion*. Ann Arbor: AIAA, 1993.
- KAMPEN, N. G. V.; FELDERHOF, B. U. *Theoretical methods in plasma physics*. Amsterdam: North-Holland, 1967.
- KIM, Y. J. The structure of magnetic fluctuations in tokamaks: observations in the TEXT tokamak. *Physics of Fluids B*, woodbury, v. 3, n. 3, p. 674–687, 1991.
- KRIVENSKI, V. et al. Power dependence of electron cyclotron wave damping in tokamak plasma. *Physics of Fluids*, Woodburg, v. 30, n. 2, p. 438–441, 1987.
- LANDAU, L. D. The transport equation in the case of Coulomb interactions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, Moscow, v. 10, p. 154–162, 1937.
- LIEWER, P. C. Measurements of microturbulence in tokamaks and comparisons with theories of turbulence and anomalous transport. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 25, n. 5, p. 543–621, maio 1985.
- LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Physical Kinetics*. Oxford: Pergamon Press, 1981.
- LITAUDON, X. et al. q-profile evolution and improved core electron confinement in the full current drive operation on Tore Supra. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 43, n. 5, p. 677–693, maio 2001.
- LUCE, T. C. et al. Generation of localized noninductive current by electron cyclotron waves on the DIII-D tokamak. *Physical Review Letters*, Melville, v. 83, n. 22, p. 4550–4553, 1999.

- LUDWIG, G. O. et al. *Programa nacional de energia por fusão*. São José dos Campos, 2002.
- MINARDI, E. Plasma transport in tokamaks. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Woodbury, v. 35, p. 1669–1684, 2002.
- MLYMAR, J. *Focus on: JET plasma heating and current drive*. Culham, 2006. Disponível em: <<http://www.jet.org>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- MME-CCPE. *Sumário executivo do plano decenal de expansão 2003/2012*. 2002. Disponível em: <<http://www.ccpe.gov.br>>.
- NSCL MICHIGAN STATE UNIVERSITY. *Electron Cyclotron Resonance Source (ECR)*. Michigan, 2004. Disponível em: <<http://jrm.phys.ksu.edu/ecr.html>>. Acesso em: 16 set. 2005.
- OLIVEIRA, C. I. d.; ZIEBELL, L. F.; ROSA, P. R. d. S. Efficiency of LH current drive in tokamaks featuring an internal transport barrier. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 47, n. 2, p. 249–267, 2005.
- OLIVEIRA, C. I. de. *Efeito do transporte radial de partículas na eficiência da geração de corrente por ondas do tipo híbrida inferior em tokamaks*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002. 118 f.
- PARAIL, V. V.; POGUTSE, O. P. *Runaway electrons in a tokamak*. New York: Consultants Bureau, 1966.
- PEETERS, A. G.; WESTERHOF, E. Impact of radial transport on the quasilinear plateau formation due to electron cyclotron wave absorption. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 3, n. 5, p. 1628–1633, maio 1996. Pt. 1.
- POWER CLEAN THEMATIC NETWORK. *Fossil fuel power generation in the European Research Area*. Londres, 2004. Disponível em: <<http://www.cleanpowernet.com>>. Acesso em: 16 set. 2005.
- QUIGLEY, E. D. et al. Formation criteria and positioning of internal barriers in ASDEX upgrade. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 44, n. 11, p. 1189–1196, 2004.
- RECHESTER, A. B.; ROSENBLUTH, M. N. Electron heat transport in a tokamak with destroyed magnetic surfaces. *Physical Review Letters*, Melville, v. 40, n. 1, p. 38–41, 1978.
- ROSA, P. R. d. S. *Evolução quase-linear do coeficiente de absorção de cíclotron para plasmas de tokamaks*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Porto Alegre, 1993.
- ROSA, P. R. d. S.; GIRUZZI, G. RF current drive by electron cyclotron waves in the presence of magnetic islands. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 42, n. 7, p. 755–769, 2000.

- ROSA, P. R. d. S. et al. Efficiency of LH+EC current drive in tokamaks featuring an internal transport barrier. *Brazilian Journal Physics*, São Paulo, v. 35, n. 3 A, p. 670–679, 2005.
- ROSA, P. R. d. S.; ZIEBELL, L. F. Quasi-linear effects on the absorption of electron cyclotron waves by lower hybrid produced electron tails in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 38, n. 3, p. 375–388, 1996.
- ROSA, P. R. d. S.; ZIEBELL, L. F. Effects of radial particle diffusion on the electron cyclotron absorption coefficient in tokamak plasmas in the presence of lower hybrid waves. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 41, n. 4, p. 525–540, 1999.
- ROSA, P. R. d. S.; ZIEBELL, L. F. A non-local synergism between electron cyclotron waves and lower hybrid waves induced by transport. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 43, n. 11, p. 1485–1502, 2001.
- ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Quasilinear studies on lower hybrid current generation in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Oxford, v. 34, n. 4, p. 533–548, 1992.
- ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. Quasi-linear evolution of electron cyclotron absorption by an RF-generated extended tail in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 35, n. 4, p. 511–529, 1993.
- ROSA, P. R. da S.; ZIEBELL, L. F. EC + LH current drive efficiency in the presence of an internal transport barrier. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 44, n. 10, p. 2065–2090, 2002.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. São Paulo: Editora USP, 1990.
- SANTARIUS, J. F. *Opening the Solar System Frontier*. Madison, 2004. Disponível em: <<http://fti.neep.wisc.edu/jfs/homepage.html>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- SCHEIDER, W. *Maxwell's conundrum: a serious but not ponderous book about relativity*. Ann Arbor: Cavendish Press, 2000.
- SCHEIDER, W. *A serious but not ponderous book about nuclear energy*. Ann Arbor: Cavendish Press, 2001.
- SEFIDVASH, F. *Reator nuclear a leito fixo*. Porto Alegre, 2006. Disponível em: <<http://www.rcgg.ufrgs.br/fbmr.htm>>. Acesso em: 25 abr. 2006.
- SHAFRANOV, V. D. *Eletromagnetic waves in a plasmas*. New York: Consultants Bureau, 1966.
- SHARMA, S. K.; SOMERFORD, D. J. The eikonal approximation revisited. *Nuovo Cimento D*, Bologna, v. 12, n. 6, p. 719–748, 1990.
- TOZAWA, L. M. *Difusão estocástica de íons energéticos em tokamaks sob a ação de ondas do tipo híbrida inferior*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1998. 84 f.

USHIGUSA, K. et al. Direct loss of energetic electrons during lower hybrid current drive in JT-60U. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 32, n. 11, p. 1977–1983, 1992.

WALTZ, R. E.; KERBEL, G. D.; MILOVICH, J. Toroidal gyro-Landau fluid model turbulence simulation in a nonlinear ballooning mode representation with radial modes. *Physics of Plasmas*, Melville, v. 1, n. 7, p. 2229–2244, 1994.

WESSON, J. *Tokamaks*. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 2004.

WILLIAMS, C. H. et al. Realizing "2001: A space odyssey": piloted spherical torus nuclear fusion propulsion. *Journal of Spacecraft and Rockets*, New York, v. 39, n. 6, p. 874–885, 2002.

WOLF, R. C. Internal transport barriers in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 45, n. 1, p. R1–R91, 2003.

WOOTTON, A. J. et al. Fluctuations and anomalous transport in tokamaks. *Physics of Fluids B*, Bristol, v. 2, n. 12, p. 2879–2903, 1990.

WUKITCH, S. J. et al. Double transport barrier experiments on Alcator C-Mod. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 9, n. 5, p. 2149–2155, maio 2002.

ZIEBELL, L. F. *Amplificação da radiação de cíclotron eletrônica em plasmas termonucleares*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1983. 109 f.

ZIEBELL, L. F. Electron cyclotron absorption for oblique propagation in loss cone plasmas. *Journal of Plasma Physics*, Cambridge, v. 39, n. 3, p. 431–446, 1988.

ZIEBELL, L. F. Interaction between lower hybrid waves and energetic ions in tokamak system. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 42, n. 3, p. 359–375, 2000.

ZIEBELL, L. F.; DILLENBURG, D. Induced electron-cyclotron emission from inhomogeneous anisotropic plasmas with electron population inversion. *Physics of Fluids*, New York, v. 26, n. 1, p. 80–86, 1983.

ZIEBELL, L. F.; OLIVEIRA, C. I. d.; ROSA, P. R. da S. Effect of radial transport on the LH current drive efficiency in tokamaks featuring an internal transport barrier. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v. 34, p. 1608–1614, 2004.