UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WALTER MENDES HASELEIN

EXPLORANDO MODELOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO

PORTO ALEGRE

2013

WALTER MENDES HASELEIN

EXPLORANDO MODELOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Maria Cristina Varriale

PORTO ALEGRE

2013

WALTER MENDES HASELEIN

EXPLORANDO MODELOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Maria Cristina Varriale

Prof. Dr. Evandro Manica

Instituto de Matemática – UFRGS

Profa. Dra. Lúcia Helena Marques Carrasco

Instituto de Matemática – UFRGS

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale

Instituto de Matemática - UFRGS

PORTO ALEGRE

2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por estarem sempre ao meu lado, em todos os momentos. Seus conselhos, orientações e apoio foram fundamentais nessa conquista. Aos meus irmãos por todos esses anos de companheirismo. Ao meu cachorro, Tinga, pela companhia e amor incondicional. Aos meus professores, por toda a contribuição que deram à minha formação. Em especial à professora Maria Cristina, pela orientação e pelo aprendizado que me proporcionou durante a graduação e a realização deste trabalho. Aos meus colegas, que foram sempre companheiros, seja em sessões de estudo, seja em momentos de descontração. Em especial à Jordana, que se tornou uma grande amiga. Sua companhia foi essencial nessa caminhada. Aos professores Evandro e Lucia, pela contribuição como banca examinadora deste trabalho.

RESUMO

HASELEIN, Walter Mendes. **Explorando Modelos que Envolvem Funções Exponenciais no Ensino Médio.** Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2013

Este trabalho apresenta uma abordagem de funções exponenciais a partir da exploração de modelos matemáticos. A prática é baseada nos trabalhos de SKOVSMOSE (2000) e BARBOSA (2001) que propõem a investigação da matemática através de alguns ambientes de aprendizagem. A proposta foi aplicada em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio que ainda não havia tido contato com funções exponenciais. Para explorar os modelos, que descrevem diferentes aplicações, foi introduzido o número de Euler. A prática teve seu enfoque na análise dos gráficos dos modelos explorados, em que os alunos investigaram o comportamento das funções em problemas propostos. Os problemas abordaram algumas aplicações dos modelos em situações de realidade e semi-realidade definidos por Skovsmose (2000).

Palavras-chave: Modelos Matemáticos; Funções Exponenciais; Aplicações da Matemática.

ABSTRACT

In this work we present a way of teaching exponential functions starting from mathematical models which involve these functions. The practical is based on SKOVSMOSE (2000) and BARBOSA (2001) works where some learning environments are proposed. The problems presented have addressed some applications of the models in real and semireal situations, as defined by Skovsmove. The proposal was applied to a class of first year of high school, whose students had never heard of exponential functions. To explore the models that describe different applications, the Euler number has been entered. The main focus of the practice was on the graphics analysis of the explored models, in which students investigated the behavior of the functions in the proposed problems.

Keywords: Mathematical Models, Exponential Functions, Applications of Mathematics

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Sempre considerei a matemática um desafio. Desde o tempo em que frequentava a escola como aluno, buscava realizar o maior número de exercícios possíveis, com a finalidade de encontrar o mais difícil, aquele que me fizesse pensar muito na procura pela resposta. Aprofundar-me nos conteúdos era um prazer e fez com que eu despertasse uma ‘paixão’ pela matemática. Por isso, logo nos meus primeiros dias como acadêmico do curso de licenciatura em matemática, decidi que gostaria de realizar um trabalho que envolvesse muitos conceitos matemáticos, que priorizasse uma grande exploração sobre o conteúdo.

Outro aspecto que considero importante no ensino da matemática é a aplicação de seus conteúdos. Após realizar a disciplina de “Aplicações da Matemática – A”, que é obrigatória na grade curricular de meu curso, passei a interessar-me mais por essa abordagem (com aplicações), bem como pela matemática aplicada como área de pesquisa. Sendo assim, surgiu a ideia de trabalhar com algumas dessas aplicações, visando mostrar a presença da matemática em situações do cotidiano e aproximar a matemática do ensino básico à do ensino superior.

Dessa forma, elaborei uma prática que buscasse essa aproximação. O conteúdo escolhido foi o de funções, mais especificamente funções exponenciais, que seria estudado por meio da exploração de alguns modelos matemáticos que descrevem diferentes fenômenos. Tais modelos são descritos por Equações Diferenciais Ordinárias, o que inviabilizaria uma exploração destes no Ensino Médio. No entanto, a proposta deste trabalho é explorar apenas as soluções dessas Equações Diferenciais, contando com uma análise gráfica. Para isso, foi necessário introduzir no Ensino Médio o número de Euler, denotado pelo caractere e, base das funções exponenciais presentes nos modelos que serão trabalhados. A importância dessa constante também se percebe na possível continuidade dos estudos, já que ela é trabalhada como base não só de funções exponenciais, como também de logaritmos, logo nas primeiras disciplinas de cálculo na maioria dos cursos na área das exatas.

A experiência foi realizada com alunos do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Protásio Alves, em Porto Alegre. Os estudantes ainda não haviam estudado funções exponenciais, o que tornou a prática ainda mais desafiadora.

Os objetivos deste trabalho:

- Propor o ensino de funções exponenciais a partir de uma exploração de modelos matemáticos;

- Introduzir o número e, mostrando sua importância como base de funções exponenciais em modelos que descrevem distintas aplicações;

- Estimular o aprendizado dos alunos mostrando aplicações do conteúdo que está sendo trabalhado, ampliando seus conhecimentos sobre funções e suas habilidades na interpretação de gráficos;

No próximo capítulo abordarei o uso de modelos no ensino de matemática, baseado nos autores SKOVSMOSE (2000), BIEMBENGUT (2007), BASSANEZI (2002) e BARBOSA (2001), pelos quais fundamentarei teoricamente a prática realizada. Logo após, mostrarei o surgimento do número de Euler a partir de um modelo de juros compostos continuamente. No capítulo seguinte, será apresentada a experiência prática realizada, contando com os planejamentos, observações e análises feitas durante esses encontros. Para finalizar, haverá uma discussão acerca da validade deste trabalho apoiando-se em um questionário de avaliação da prática respondido pelos alunos, a fim de se detectar os pontos positivos e negativos dessa experimentação.

A questão norteadora deste trabalho é: o ensino de funções exponenciais a partir de modelos matemáticos que as envolvam pode ser uma alternativa ao estudo desse conteúdo?

A escolha de funções exponenciais como conteúdo a ser abordado na prática deste trabalho se deu em virtude da importância que ele apresenta no ensino superior. Desde as primeiras disciplinas dos cursos da área das exatas, lidamos com esse tipo de função, sendo necessário que conheçamos suas propriedades e o comportamento do seu gráfico. No entanto, tanto em minha formação na escola básica como em minha experiência docente nos estágios e laboratórios de ensino no curso de licenciatura em matemática, percebi que este conteúdo vem sendo pouco trabalhado, ou não recebe a devida importância.

Outro aspecto que chama atenção é o fato de que não se trabalha com uma das principais bases das funções exponenciais (e também logarítmicas), o número de Euler. Além disso, o estudo do gráfico desse tipo de funções fica muito restrito a dois comportamentos, a saber, as funções são sempre do tipo $f(x) = b^x$, com $b > 1$ ou $0 < b < 1$. Essa restrição desconsidera alguns casos de translação e reflexão, ocasionando a consideração de apenas um tipo de crescimento ou decrescimento (no caso, crescimento cada vez mais rápido e decrescimento cada vez mais lento).

Sendo assim, busquei elaborar uma prática que levasse em conta todas essas propriedades, que são importantes, principalmente no complemento dos estudos no Ensino Médio. Também procurei familiarizar os alunos envolvidos no experimento com o número de Euler, utilizando-o como base das funções exponenciais estudadas. Para isso, procurei abordar esse conteúdo por meio de aplicações, explorando alguns modelos matemáticos descritos por funções exponenciais.

As aplicações podem ser importantes ferramentas para gerar interesse nos alunos. Contextualizar o conteúdo que está sendo trabalhado pode motivar os estudantes, pois mostra a utilidade daquilo que está sendo estudado. Além disso, algumas aplicações podem estar relacionadas com a realidade de alguns alunos, o que possibilita um melhor entendimento dos conceitos envolvidos e justifica ainda mais esta abordagem. Sobre o ensino de funções por meio de aplicações, os *Parâmetros Curriculares do Ensino Médio* recomendam:

> Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a

> mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. (PCN +, 2002, p.121)

Na disciplina de "Aplicações da Matemática – A", estudamos alguns modelos descritos por Equações Diferenciais, cujas soluções envolvem funções exponenciais. Então, passei a vislumbrar uma maneira de levar essas aplicações ao Ensino Médio. Assim, através da exploração desses modelos, elaborei a prática que será descrita nos próximos capítulos desta monografia.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A elaboração da prática foi pensada a partir de pesquisas no campo da modelagem matemática. Aproximar a realidade à escola por meio da matemática pode ser uma importante ferramenta para o ensino, sendo alternativa para o estudo dos conteúdos matemáticos. Nesse sentido, acredito que a modelagem pode ser eficaz, auxiliando os alunos na compreensão e na construção dos conceitos envolvidos. Essa foi a proposta do projeto executado: explorar alguns modelos matemáticos que descrevem diferentes fenômenos, a fim de que os alunos aprendam o conteúdo abordado através de uma investigação sobre eles. BASSANEZI define um Modelo Matemático como:

> "[...] um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – este pode ser, físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo um outro modelo matemático". (BASSANEZI, 2002, p.174)

A base da prática através da exploração de Modelos está fundamentada nos trabalhos de BARBOSA (2001) e SKOVSMOSE (2000). Skovsmose propõe uma divisão das aulas de matemática em seis ambientes, vistos sob dois paradigmas, o do exercício e o da investigação. Cada um deles possui três etapas, as quais estão representadas na tabela abaixo:

Tabela 1 – Ambientes de Aprendizagem

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referência à matemática pura	1	2
Referência à semi-realidade	3	4
Referência à realidade	5	6

Fonte: Skovsmose (2000, p.8)

O primeiro ambiente é aquele em que predomina o exercício no contexto da matemática pura. Pode ser simplesmente a resolução de equações algébricas do tipo $7x - 25 = 2x$.

O ambiente número 2 caracteriza-se por envolver números e figuras em um cenário de investigação. A manipulação de peças do Tangram para abordar áreas de polígonos ou então as relações matemáticas presentes no jogo Torre de Hanói são exemplos de atividades de investigação sem contextualização. Nesses exemplos, os alunos participam da busca pelas relações matemáticas presentes.

No terceiro ambiente, os exercícios abordam uma situação de semi-realidade, cuja natureza pode ter sido inventada pelo professor. Pode ser um problema com dados não reais, mas com a matemática já contextualizada, diferentemente das etapas anteriores. Este caso está inserido no paradigma do exercício. Assim, um simples problema de juros compostos se encaixa nesse ambiente. Por exemplo, uma pessoa aplica uma quantia de R$ 20.000,00 em uma poupança com rendimentos de 0,5% ao mês. Se a pessoa não movimentar a poupança, qual será o rendimento após um ano de aplicação? Notamos nesse caso uma contextualização da matemática, ainda que o problema acima não contenha dados verídicos.

O ambiente 4 retrata a mesma situação de semi-realidade, porém desta vez com investigação. Trata-se de problemas que contenham dados não necessariamente verídicos, em que os alunos exploram a matemática presente nesse ambiente, participando da construção dos conceitos matemáticos envolvidos. Há um convite para que os alunos façam as explorações e criem explicações para as observações realizadas. O exemplo dado por Skovsmose em seu texto é sobre uma “corrida de cavalos” simulada pelo professor, cuja soma dos pontos de dois dados lançados indicam o movimento do “cavalo” de mesmo número dessa soma. Por exemplo, se o total de pontos dos dois dados for igual a 6, o cavalo de número 6 andaria uma casa. Venceria a corrida o cavalo que andasse mais casas. Nesse exemplo, os alunos podem investigar a probabilidade de cada cavalo movimentar-se, para que façam apostas mais certeiras.

A partir do ambiente 5, a matemática já aparece inserida em uma realidade, conforme definiu o autor. Nessa etapa, o professor utiliza-se de dados verídicos para abordar os distintos conteúdos matemáticos através dos exercícios. Esses dados podem ser retirados de jornais ou revistas, por exemplo, que trazem gráficos e tabelas, em cima dos quais se pode fazer um estudo de funções. O professor também pode utilizar escalas de mapas para abordar proporcionalidade. No entanto, nesse ambiente as atividades estão estabelecidas no paradigma do exercício, sem que haja investigação dos alunos.

O último ambiente se desenvolve a partir de uma investigação em situações da realidade. Os alunos podem pesquisar as taxas de empréstimo de agências financeiras para investigar qual delas oferece melhores condições. Podem estudar qual o melhor plano de telefonia, levantando informações sobre as ofertas das operadoras. Nesses dois casos, pode-se formar grupos, onde cada um representa uma agência ou operadora, para no final analisar os resultados e discutir qual vale mais a pena. Nos dois exemplos, pode-se explorar conteúdos matemáticos distintos, como funções e porcentagem.

O trabalho que realizei flutuou entre os ambientes 2, 3, 4 e 5. O ambiente dois esteve presente quando os alunos investigaram o comportamento dos gráficos de acordo com os parâmetros envolvidos. Foi uma atividade que trabalhou apenas com a matemática pura, mas que contou com a participação da turma na investigação e construção dos conceitos. Os ambientes 3, 4 e 5 envolveram a maior parte da prática. Embora os alunos não tenham participado da obtenção dos modelos, os problemas que foram utilizados para explorar os modelos continham dados em contexto de realidade e semi-realidade, sendo este último o mais usado. As investigações, nos problemas propostos, ocorreram na análise do comportamento dos gráficos e o que esse comportamento indicava.

BARBOSA (2001) também apresenta três tipos de abordagem para a modelagem em sala de aula. Na primeira, o professor apresenta o problema, fornecendo todas as condições necessárias para que o aluno o resolva. A investigação limita-se à resolução do problema. Na segunda, o professor sugere um tema e supervisiona os estudantes no levantamento de dados necessários para a sua resolução. Nessa etapa, há uma participação maior dos alunos. Na terceira, os próprios alunos formulam a questão e buscam coletar os dados necessários para simplificar e resolver o problema. Eles participam de todas as etapas da modelagem. A tabela abaixo resume as ideias de BARBOSA (2001) sobre abordagem da modelagem.

Tabela 2 – O aluno e o professor nos casos de modelagem

	CASO 1	**CASO 2**	**CASO 3**
Elaboração	Professor	Professor	Professor/Aluno
Simplificação	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Coleta de Dados	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Resolução	Professor/Aluno	Professor/Aluno	Professora/Aluno

Fonte: Barbosa (2001, p.9)

A prática que propus esteve inserida no caso 1 da metodologia descrita por BARBOSA (2001). Visto que os modelos envolvidos são descritos por Equações Diferenciais, os alunos não participaram das etapas de elaboração, simplificação e coleta de dados dos modelos. Assim, essas etapas contaram apenas com a participação do professor. Aos alunos, coube explorar os modelos, sem que houvesse o processo chamado de Modelação Matemática. Esse processo, segundo BIEMBENGUT e HEIN (2007, p.18), “norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um modelo matemático e orientar o aluno na realização do seu próprio modelo”. Os modelos já chegaram prontos aos alunos, e a partir deles se desenvolveu o conteúdo, com as investigações presentes apenas na resolução dos problemas.

3. JUROS COMPOSTOS CONTINUAMENTE E O NÚMERO e

Durante toda a graduação em Licenciatura em Matemática, operamos com um número de extrema importância na matemática e que desempenha um papel fundamental em outras ciências como Biologia, Química, Física, Economia, Engenharia e Astronomia. O número de Euler, ou número exponencial, representado pelo caractere e, tem muitas aplicações nessas áreas de conhecimento. No entanto, sua origem e aplicação são pouco estudadas nas disciplinas do curso, o que pode, em minha opinião, influenciar no desempenho do aluno e na sua visão do papel da matemática. A situação é ainda mais delicada quando pensamos no Ensino Médio, já que essa importante constante é sequer apresentada na maioria das escolas de educação básica, mesmo que se trabalhe com ela logo nos primeiros semestres de boa parte dos cursos do Ensino Superior.

O número de Euler pode ser definido de diversas maneiras. Podemos dizer que é a base dos logaritmos naturais, por exemplo. Também é base da função exponencial e^x, que tem a intrigante propriedade de ser igual à sua derivada. Isso significa que, em um determinado ponto $x = t$, a derivada de e^x equivale a e^t. Essa característica faz com que o número e assuma um papel fundamental no ramo da matemática conhecido como análise.

A origem do número e não está clara, mas há indícios de que seu surgimento esteja ligado ao cálculo de juros compostos (MAOR, 2008). Seu valor é corresponde ao limite da sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, quando n tende a infinito. Para calcularmos o seu valor, utilizaremos um modelo de juros compostos continuamente. Consideremos o seguinte exemplo:

Seja P um determinado capital inicial que sofre juros de 10% ao ano, compostos trimestralmente. No final do primeiro trimestre, o novo capital P_1 será dado pela expressão:

$$P_1 = P\left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4}\right)$$

Após o segundo trimestre, teremos um capital:

$$P_2 = P_1\left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4}\right)$$

Substituindo a expressão P_1 nessa equação, concluímos que:

$$P_2 = P\left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4}\right) = P\left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4}\right)^2$$

Se mantivermos o processo sucessivamente, chegaremos, ao final do ano, na seguinte equação:

$$P_4 = P\left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4}\right)^4$$

Generalizando o cálculo dos juros compostos para uma taxa constante r ao ano, em um número n de períodos de composição desses juros ao longo do ano, obtemos a seguinte expressão:

$$P_n = P\left(1 + r \cdot \frac{1}{n}\right)^n$$

Reescrevendo a equação na forma:

$$P_n = P\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{n \cdot \frac{r}{r}}$$

Tomamos $h = \frac{n}{r}$ e temos:

$$P_n = P\left(1 + \frac{1}{h}\right)^{hr}$$

Vamos calcular o valor de $\lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$ atribuindo valores cada vez maiores para *h*.

Tabela 3 – Quadro de valores de *h* para calcular $\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$

Valor de *h*	Valor de $\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$
12	2,6130352....
20	2,6532977...
100	2,7048138...
1000	2,7169239...
5000	2,7180100...
10000	2,7181459...
50000	2,7182546...
100000	2,7182682...
500000	2,7182791...
1000000	2,7182804...
5000000	2,7182815...
10000000	2,7182816...
50000000	2,7182818...
100000000	2,7182818...

Notamos que se atribuirmos valores ainda maiores a *h*, o valor da expressão quase não será afetado, pois as alterações serão em dígitos cada vez menos significativos. Este valor recebeu a notação e em homenagem a um dos primeiros matemáticos a estudar suas propriedades, o suíço Leonhard Euler.

Voltando ao exemplo do cálculo de juros, podemos expressar P_n do seguinte modo:

$$P_n = P_o e^r$$

4. PRÁTICA – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentarei os planejamentos e a aplicação do experimento, contando com observações e análises realizadas durante essa prática. Foi elaborada uma sequência didática que ocorreu em quatro encontros, definidos da seguinte forma: No primeiro encontro, foi apresentado aos alunos o conteúdo de funções exponenciais, abordando suas propriedades e o comportamento de seus gráficos, dependendo dos parâmetros envolvidos. No segundo, foi utilizada uma das aplicações deste conteúdo (exponenciais) para mostrar aos alunos a origem do número de Euler, uma das bases mais importantes das funções exponenciais. Também foram apresentados aos alunos alguns modelos que envolvem funções exponenciais. O terceiro encontro desenvolveu-se a partir da exploração desses modelos apresentados anteriormente, resolvendo problemas a partir de análises dos gráficos que os representam. Na última parte do encontro, foram exibidas algumas aplicações que são estudadas e pesquisadas no campo da matemática aplicada, afim de que os alunos tenham conhecimento desse ramo da matemática.

Para a elaboração da sequência didática, foram utilizados os livros de CONNALY (2009), que foi um importante suporte na preparação dos planos de aula e de exercícios na forma de problemas que abordam funções exponenciais, e de ZILL (2011), que foi bastante útil na etapa da sequência didática em que foi feita a exploração dos modelos. A utilização dessa bibliografia também teve sua relevância quanto à aproximação dos alunos com a matemática de ensino superior, que é um dos objetivos deste trabalho, uma vez que ambos têm foco nesse nível de ensino.

Cada encontro contou com uma preparação particular, com objetivos específicos e uma avaliação de caráter individual. A próxima seção deste capítulo descreverá detalhadamente os planejamentos.

4.1 Planejamentos

Foram elaborados quatro planos de aula, um para cada encontro do experimento. As atividades envolveram exposição de conteúdos e realização de exercícios, além da exibição de algumas pesquisas no campo da Matemática Aplicada que envolve o conteúdo abordado.

4.1.1 Primeiro Encontro

Tema: Funções exponenciais

Objetivos: Analisar e compreender os conceitos que estão envolvidos no estudo de funções exponenciais, considerando a construção do seu gráfico de acordo com os parâmetros envolvidos.

Conteúdos Envolvidos: Potenciação, equações de uma variável e construção de gráficos no plano cartesiano.

Metodologia: Para introduzir o estudo de funções exponenciais, será analisada com os alunos a diferença entre uma variação que ocorre a uma taxa constante, como no caso das funções lineares, e uma que ocorre a uma taxa percentual constante, que é o caso das funções exponenciais. Para ilustrar a diferença, utilizar-se-á o seguinte exemplo:

<u>1º Caso: Variação constante:</u> Um trabalhador recebe uma oferta de trabalho, na qual receberá, inicialmente, um salário de R$ 15.000,00 por ano. Para reforçar a proposta, a empresa promete um aumento de R$ 1.000,00 ao final de cada ano trabalhado. Vamos calcular o seu salário nos primeiros anos:

A variação do salário deste trabalhador ocorre a uma taxa constante de R$ 1.000,00 por ano. Então, temos:

Após o 1º ano de trabalho: $S(1) = 15000 + 1000 = 16000$

Após o 2º ano de trabalho: $S(2) = 16000 + 1000 = 17000$

Após o 3º ano de trabalho: $S(3) = 17000 + 1000 = 18000$

Após o 4º ano de trabalho: $S(4) = 18000 + 1000 = 19000$

Assim, o trabalhador receberá, a cada ano, o mesmo aumento que recebera no ano anterior, o que mostra uma função que varia a uma taxa constante.

A partir dos cálculos acima, é fácil ver que a expressão que nos fornece o salário, $S(t)$, em reais, após t anos de trabalho, sabendo que o salário inicial é de R$ 15.000,00 e que a taxa de variação é de R$ 1.000,00 por ano, é dada por $S(t) = 15000 + 1000t$

Em uma tabela, estes dados estariam visualizados como segue:

Tabela 4 – Variação do Salário a uma taxa constante

Salário Inicial $t = 0$	Após 1 ano $t = 1$	Após 2 anos $t = 2$	Após 3 anos $t = 3$	Após 4 anos $t = 4$
R$ 15.000,00	R$ 16.000,00	R$ 17.000,00	R$ 18.000,00	R$ 19.000,00

A partir de quaisquer dois pares (t, S) da tabela acima, verifica-se que a taxa de variação (razão entre a variação do salário ΔS e a variação do número de anos Δt) é, em reais por ano, constante, isto é:

$$\frac{\Delta S}{\Delta \mathrm{t}} = 1.000$$

Por exemplo:

com os valores em $t = 1$ e em $t = 3$, obtemos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{18000 - 16000}{3 - 1} = \frac{2000}{2} = 1000$$

com os valores em em $t = 0$ e em $t = 3$, obtemos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{18000 - 15000}{3 - 0} = \frac{3000}{3} = 1000$$

e assim por diante.

Agora, analisaremos o outro caso.

<u>2º Caso: Variação a uma taxa percentual constante:</u> Consideremos agora que o mesmo trabalhador receba uma segunda proposta, na qual partindo do mesmo

salário de R$ 15.000 anuais, seu salário seja aumentado a cada ano em 6% do salário anterior. Vejamos qual será o salário deste trabalhador nos primeiros anos.

$$S(1) = 15000 + 6\%\ de\ 15000 = 15000 + 900 = 15900;$$

Este é o salário que o trabalhador receberá ao longo do seu 2º ano de trabalho, após o qual, receberá um novo aumento e seu salário após dois anos de trabalho será:

$$S(2) = 15900 + 6\%\ de\ 15900 = 15900 + 954 = 16854;$$

Após três anos de trabalho, ele recebe um novo aumento, passando a receber:

$$S(3) = 16854 + 6\%\ de\ 16854 = 16854 + 1011{,}24 = 17865{,}24;$$

Repara-se, neste caso, que o aumento que, após o primeiro ano foi de R$ 900,00, passou para R$ 954,00 após o segundo ano, e R$ 1011,24 após o terceiro ano de trabalho.

Dos resultados acima, se quisermos escrever uma fórmula que forneça o salário, em reais, após t anos de trabalho, conhecidos o salário inicial e a taxa de variação de 6% ao ano, temos que:

$$S(1) = 15000 + 0{,}06 \cdot 15000 = 15000 \cdot (1 + 0{,}06) = 15000 \cdot (1{,}06)$$

$$S(2) = S(1) + 0{,}06 \cdot S(1) = S(1) \cdot (1 + 0{,}06) = S(1) \cdot (1{,}06) = 15000 \cdot (1{,}06)^2$$

$$S(3) = S(2) + 0{,}06 \cdot S(2) = S(2) \cdot (1 + 0{,}06) = S(2) \cdot (1{,}06) = 15000 \cdot (1{,}06)^3$$

Ou seja, após t anos de trabalho, temos:

$$S(t) = 15000 \cdot (1{,}06)^t$$

A função que expressa o salário neste segundo caso é um exemplo de função exponencial.

Em uma tabela, estes dados estariam visualizados como segue:

Tabela 5 – Variação do salário a uma taxa percentual constante

Inicialmente $t = 0$	Após 1 ano $t = 1$	Após 2 anos $t = 2$	Após 3 anos $t = 3$	Após 4 anos $t = 4$
R$ 15.000,00	R$ 15.900,00	R$ 16.854,00	R$ 17.865,24	R$ 18.937,15

A partir de quaisquer dois pares (t, S) desta tabela, verifica-se que a taxa de variação percentual (razão entre a variação percentual $\frac{\Delta S}{S}$ no salário e a variação Δt do número de anos) é, em % ao ano, constante, isto é:

$$\frac{\Delta S}{S \cdot \Delta t} = 0{,}06$$

indicando uma taxa de variação percentual de 6% ao ano. Na expressão acima, a variação percentual do salário é representada por $\frac{\Delta S}{S}$, sendo que o ΔS no numerador indica a variação no salário, e o S no denominador representa o salário no início do intervalo de tempo Δt.

Por exemplo:

com os valores em $t = 1$ e em $t = 3$, obtemos:

$$\frac{\Delta S}{S \cdot \Delta t} = \frac{17865{,}24 - 15900}{15900 \cdot (3 - 1)} = 0{,}06;$$

com os valores em $t = 0$ e em $t = 3$, obtemos:

$$\frac{\Delta S}{S \cdot \Delta t} = \frac{17865{,}24 - 15000}{15000 \cdot (3 - 0)} = 0{,}06$$

e assim por diante.

Após, um questionamento será levantado. Qual proposta será mais vantajosa ao longo dos anos? Espera-se que os alunos percebam que no segundo caso, o salário irá aumentar cada vez mais, enquanto que no primeiro esta variação manter-se-á constante.

A seguir, será generalizada a expressão que representa uma função exponencial:

$$f(x) = ab^{x-c} + d, com\ b > 0$$

A próxima etapa será analisar o papel de cada um dos parâmetros envolvidos na expressão de uma função exponencial, a partir da mais simples, com os valores de $a = 1\ e\ c = d = 0$.

Consideraremos, portanto, a função $f(x) = b^x$. Os alunos deverão atribuir valores ao parâmetro b, para esboçar o gráfico da função acima. Eles devem notar que a função assume um comportamento crescente se $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$.

Para ilustrar o comportamento dos gráficos, utilizei o software GeoGebra, que pode ser baixado gratuitamente no site http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/

Figura 1. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = b^x, com\ b > 1}$

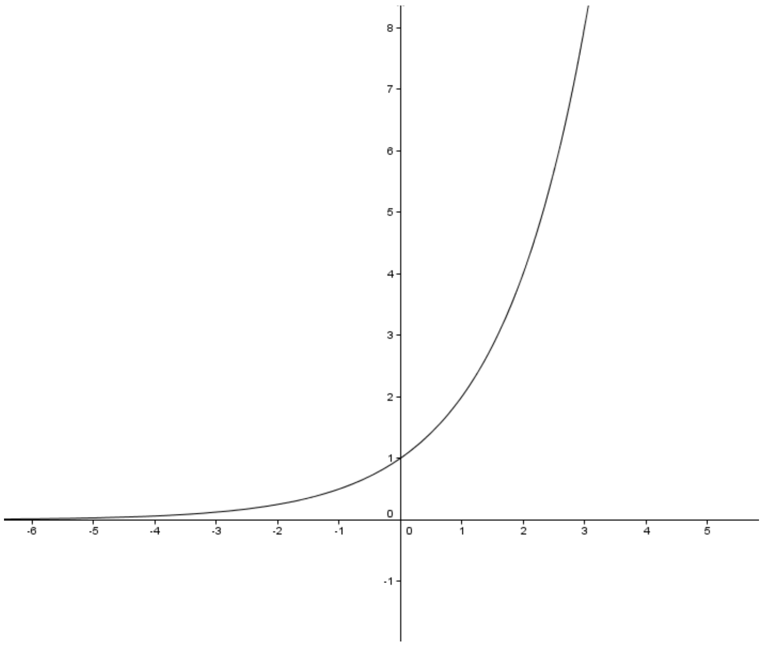
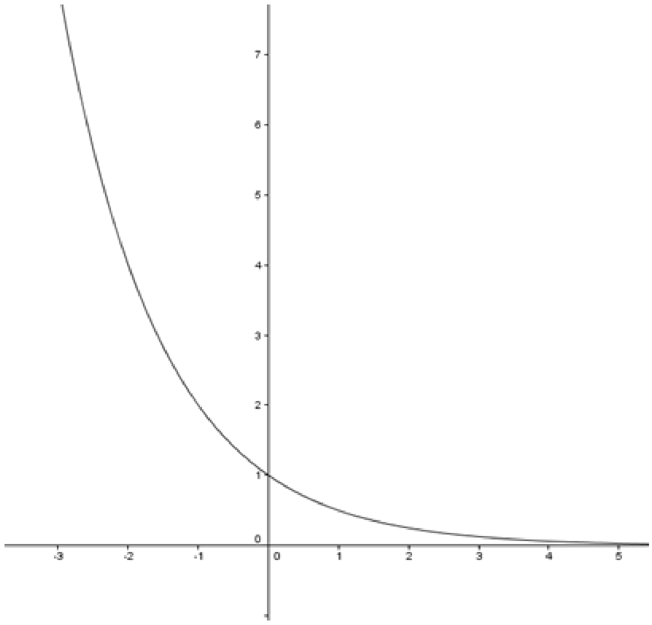


Figura 2. Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = b^x, com\ 0 < b < 1}$



A partir dos gráficos acima, será estudado o papel dos demais parâmetros. Começando pelos valores de *c*. Os estudantes deverão atribuir valores positivos e negativos a esse parâmetro para detectar seu papel no gráfico. Deverão verificar que esses valores indicarão um deslocamento horizontal da função original (no caso, b^x). Caso $c > 0$, o gráfico irá deslocar-se para a direita em c unidades. Para $c < 0$, o deslocamento será de *c* unidades para a esquerda.

Figura 3. Gráficos de $f(x) = 2^x$ e de $f(x) = 2^{x-2}$.

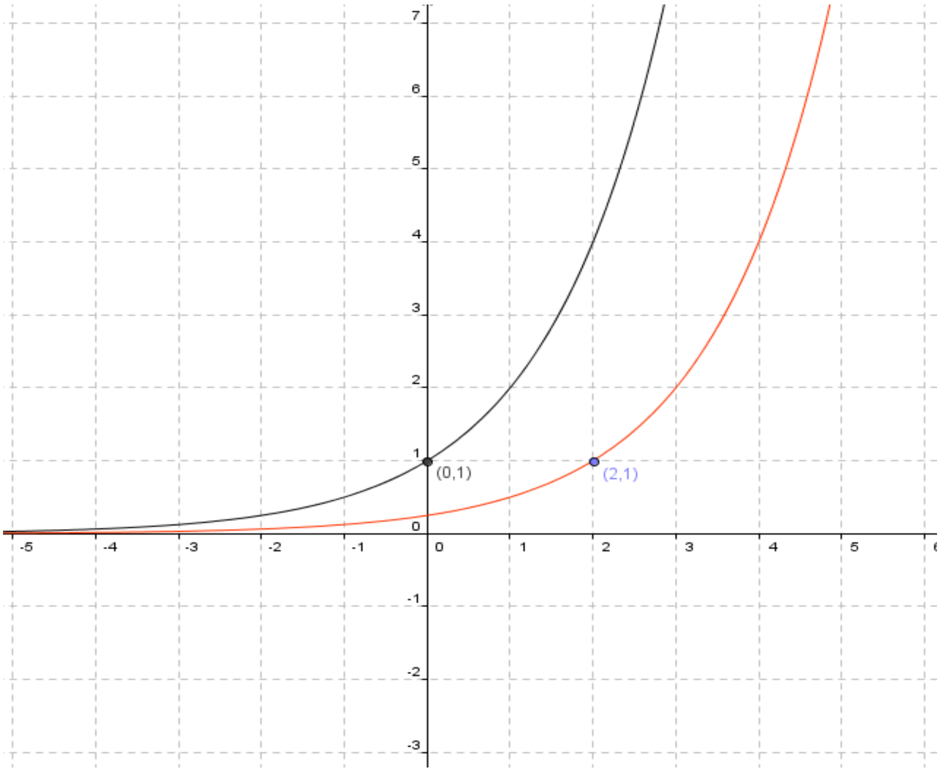
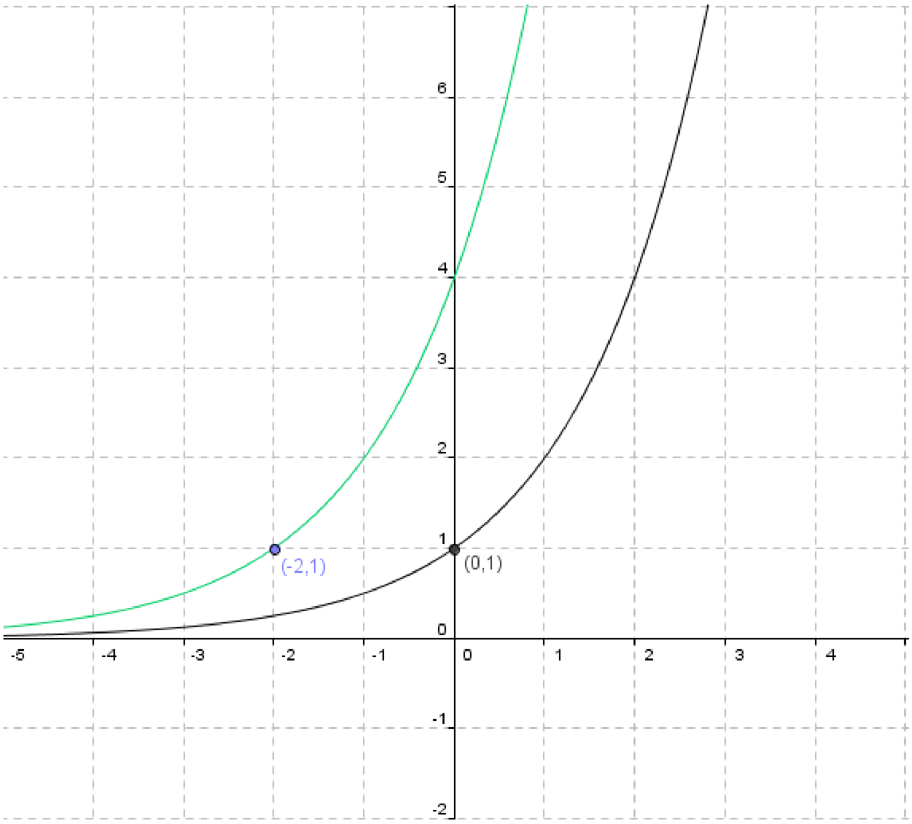


Figura 4. Gráficos de $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$ e de $\boldsymbol{f(x) = 2^{x+2}}$

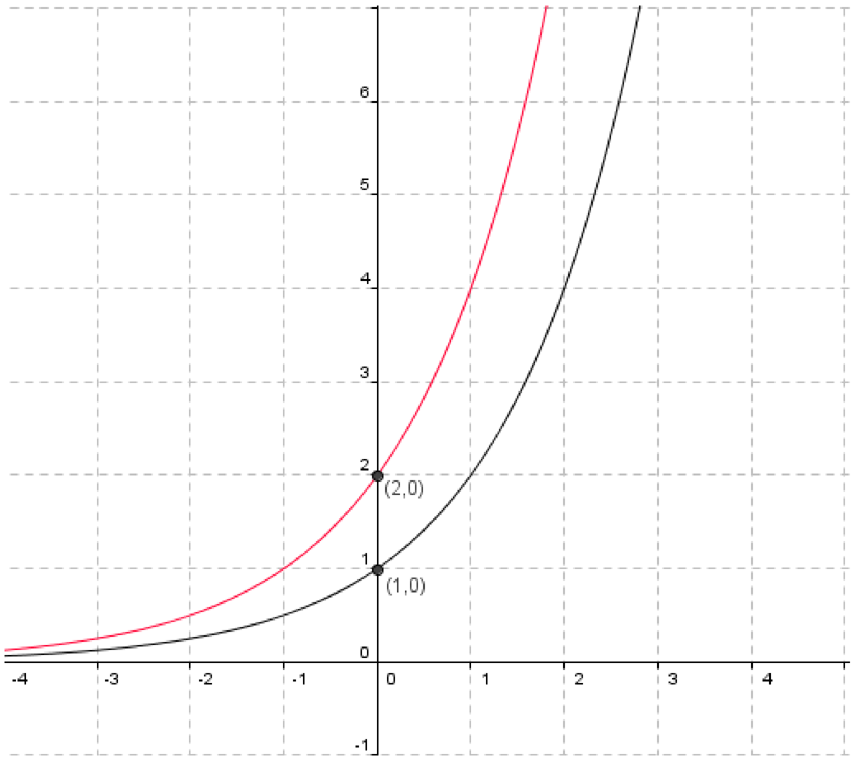


A próxima análise a ser feita refere-se ao papel do a. Esse parâmetro indicará um crescimento ou decrescimento mais ou menos acentuado da função, dependendo do valor atribuído. Podemos considerar quatro casos:

i. $a > 1$: crescimento mais acentuado;
ii. $0 < a < 1$: crescimento menos acentuado;
iii. $-1 < a < 0$: decrescimento menos acentuado;
iv. $a < -1$: decrescimento mais acentuado;

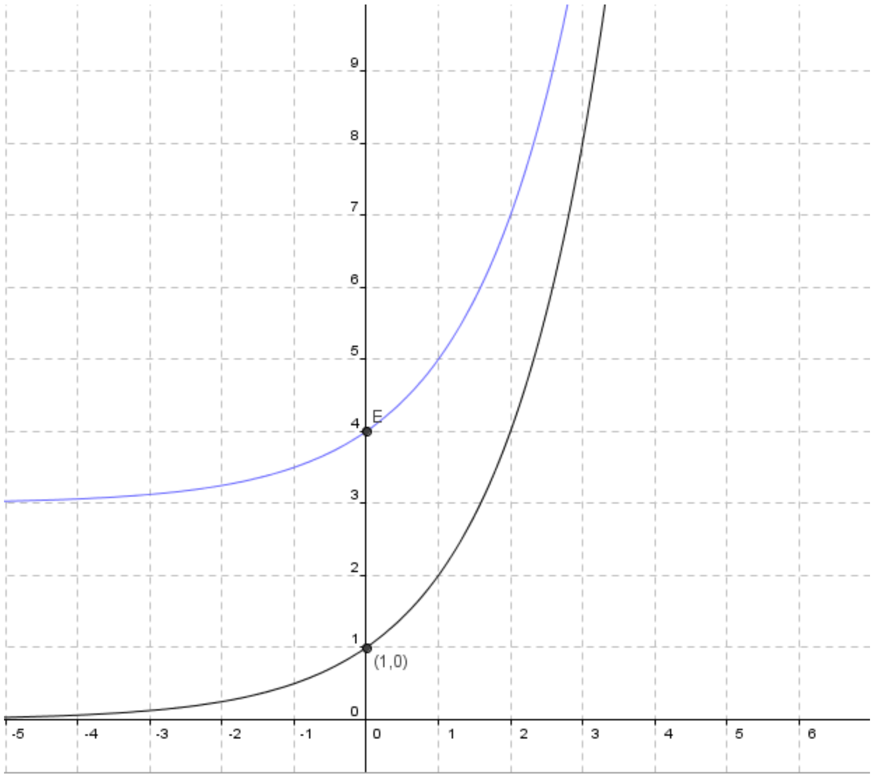
No entanto, o principal papel desse parâmetro é informar em que ponto da função a curva "corta" o eixo dos y. Essa informação será importante quando explorarmos os modelos em encontros posteriores. Outro aspecto importante desse parâmetro é a indicação de uma reflexão sobre o eixo dos x. Se o valor for negativo, o gráfico sofre uma reflexão sobre o eixo das abscissas.

Figura 5. Gráficos de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}$ e de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}$, para $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$



Para finalizar, estudaremos qual o comportamento do gráfico de uma exponencial quando atribuímos diferentes valores ao parâmetro d. Será visto que esse valor representa um deslocamento vertical da função original. Além disso, as assíntotas horizontais também sofrerão um deslocamento, de acordo com o valor dado ao parâmetro. Se $d > 0$, a curva sofrerá um deslocamento vertical para cima, e caso contrário, para baixo.

Figura 6. Gráficos de $\boldsymbol{f(x) = b^x}$ e de $\boldsymbol{f(x) = b^x + 3}$, para $\boldsymbol{b = 2}$



Avaliação: Participação dos alunos nas atividades; Interação com o professor.

4.1.2 Segundo Encontro

Tema: O número de Euler obtido a partir de um modelo de juros compostos continuamente.

Objetivos: Conduzir os alunos à obtenção do número de Euler, através de um modelo matemático de juros compostos, reduzindo cada vez mais o período da composição.

Conteúdos Envolvidos: Funções exponenciais, potenciação e limites;

Metodologia: Será questionado se os alunos têm conhecimento sobre o número de Euler. Embora esta possibilidade exista, dificilmente algum deles terá ouvido falar dessa constante, o que nos levará à obtenção do seu valor.

Para isso, utilizarei do modelo descrito na página 18. Então, solicitarei aos alunos que atribuam valores cada vez maiores para h, a fim de que preencham a tabela:

h	$\left(1+\frac{1}{h}\right)$	$\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$

Espera-se que os alunos cheguem a um valor aproximado a 2,718281... Então, será explicado que esse valor recebeu o nome de *Número de Euler* e que sua representação se dá através do caractere e.

Como o limite de $\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$, com h tendendo a infinito, é igual à constante de Euler, segue que:

$$P_n = Pe^r$$

Avaliação: Envolvimento dos alunos com os cálculos propostos.

4.1.3 Terceiro Encontro

Tema: Modelos Matemáticos que envolvem funções exponenciais

Objetivos: Explorar os modelos matemáticos visando aprimorar a habilidade dos alunos na construção e interpretação de gráficos.

Conteúdos Envolvidos: Funções exponenciais e construção de gráficos.

Metodologia: Inicialmente consideraremos o seguinte modelo:

Dinâmica Populacional: $P(t) = P_0 e^{kt}$ (ZILL, 2011)

onde *P* é a população, P_0 população inicial, k é a taxa percentual de crescimento/decrescimento e *t* é o tempo.

Para explorá-lo, consideraremos os problemas abaixo:

1) A partir do ano 2000, a população do México cresceu a uma taxa percentual de 2% ao ano composta continuamente. Sabendo que em 2000 a população do país era de 100 milhões de habitantes, calcule a população para os próximos 4 anos (até 2004). (CONALLY, 2009, p.95 – Adaptado)

2) Esboce o gráfico que representa a população do México (em milhões de habitantes) através do modelo especificado no problema anterior, projetada para os próximos anos. (CONALLY, 2009, p.95 – Adaptado)

3) A cada ano, um lago torna-se mais poluído, e, consequentemente, o número de peixes que vivem nele diminui a uma taxa de 3% ao ano, composta continuamente. Se, inicialmente, a quantidade de peixes existentes no lago era de 300 mil, calcule a quantidade sobrevivente nos próximos anos. Esboce o gráfico da população de peixes (em milhares de peixes) em função do tempo. (CONALLY, 2009, p.101 – Adaptado)

4) Cada uma das equações abaixo descreve o tamanho de uma população de animais *P*, em *t* anos. Descreva, em palavras, cada uma das equações:

   a) $P = 600e^{0,20t}$
   b) $P = 50e^{-0,17t}$

A seguir, exploraremos o modelo descrito abaixo:

Lei do Aquecimento/Resfriamento: $T(t) = A + (T_0 - A)e^{-kt}$; (ZILL, 2011)

onde *t* é o tempo, em minutos (ou outra unidade de tempo), *T* é a temperatura do corpo em °C, *A* é a temperatura do ambiente em °C, T_0 é a temperatura inicial do corpo em °C, e *k* é uma constante que depende do material com o qual o corpo foi constituído e indica a taxa percentual por unidade de tempo (dependendo da unidade de *t*) composta continuamente, com a qual o corpo aumenta/diminui sua temperatura.

Para explorá-lo, consideraremos os seguintes problemas:

1) Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 150°C. Após 2 minutos em contato com uma temperatura ambiente de 20º, qual será a temperatura do bolo, supondo que sua temperatura varia a uma taxa de 10% por minuto, composta continuamente? (ZILL, 2011, p.88)

2) Uma barra de metal, cuja temperatura inicial é de 20°C, é mergulhada em um recipiente com água fervendo. Após 30 segundos, qual a temperatura dessa barra de metal, se a taxa com a qual o material altera sua temperatura é de 5% por segundo? (ZILL, 2011, p.93)

3) Esboce o gráfico dos dois exemplos acima e responda: O que ocorrerá com a temperatura com o passar do tempo? O que determinará o crescimento ou decrescimento da variável dependente no gráfico que representa o modelo?

Avaliação: Envolvimento na investigação e interpretação dos gráficos propostos.

4.1.4 Quarto Encontro

Tema: Modelos Matemáticos que envolvem funções exponenciais

Objetivos: Explorar os modelos matemáticos visando aprimorar as habilidades dos alunos em construir e interpretar gráficos de funções.

Conteúdos Envolvidos: Funções exponenciais e construção de gráficos

Metodologia: Dando prosseguimento ao estudo dos modelos, consideraremos outros dois modelos matemáticos, que serão explorados através dos problemas abaixo enunciados:

1) Uma certa substância é administrada a um paciente a uma taxa de 0,5mg/h. A substância é metabolizada e sai do corpo continuamente a uma taxa de 2% por hora. Sabendo que inicialmente a quantidade de substância presente no corpo é de *A* mg, pode-se mostrar que a quantidade $Q(t)$ de substância presente, após *t* horas, é dada por:

$$Q(t) = 25 + (A - 25)e^{-0,02t}$$

Esboce o gráfico da função acima para as seguintes situações:

a) Se $A = 35$;
b) Se $A = 25$;
c) Se $A = 15$;
d) Represente os gráficos dos itens a), b) e c) no mesmo plano cartesiano e descreva o que ocorrerá com a quantidade de substância presente no corpo de um paciente ao longo do tempo.

2) O patrimônio *W* de uma empresa varia da seguinte forma: sua taxa de variação tem uma parcela positiva (que faz aumentar seu patrimônio) de 5% ao ano composta continuamente e outra negativa (que faz diminuir seu patrimônio) devido à folha de pagamento, no valor de 200 milhões de dólares por ano. Se o patrimônio inicial em $t = 0$ for de W_0 milhões de dólares, pode-se mostrar que, após *t* anos, o patrimônio será:

$$W(t) = 4000 + (W_0 - 4000)e^{0,05t}$$

Esboce o gráfico da função acima para as seguintes situações:

a) Se $W_0 = 5000$;
b) Se $W_0 = 4000$;
c) Se $W_0 = 3000$;
d) Represente os gráficos dos itens a), b) e c) no mesmo plano cartesiano e descreva o que ocorrerá com o patrimônio da empresa com o passar do tempo.

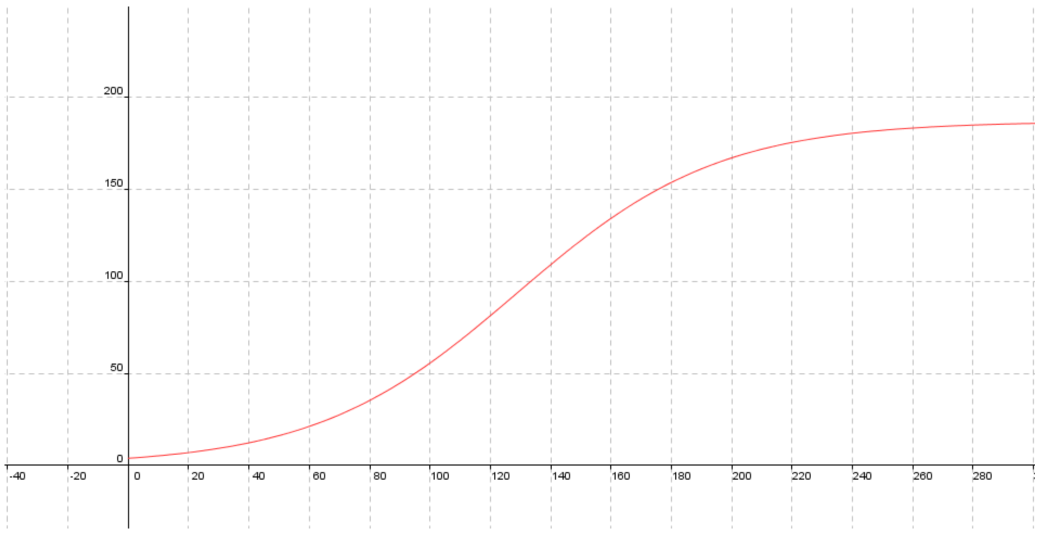
Após a exploração destes problemas, apresentarei aos alunos outros gráficos que podem ser construídos a partir de funções exponenciais mais complexas:

Equação logística: Uma população $P(t)$, cujo comportamento é descrito por:

$$P(t) = \frac{187}{1 + 47e^{-0{,}0318t}}$$

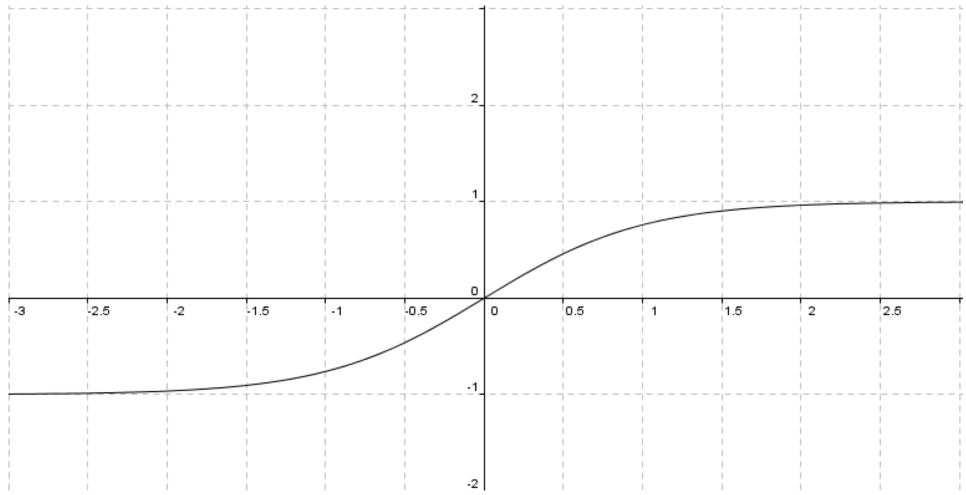
fornece valores, em milhões de habitantes, bastante próximos aos dados do censo da população dos EUA entre os anos de 1790 e 1980, onde t é o número de anos a partir de 1790.

Figura 7. Equação Logística que expressa a população dos EUA entre 1790 e 1980



Tangente Hiperbólica: $f(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$;

Figura 8. Tangente Hiperbólica



4.2 Experimentação

Esta seção apresentará o relato da experiência realizada. A prática ocorreu no Colégio Estadual Protásio Alves, de Porto Alegre, em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. A escolha por esse nível de ensino justificou-se em virtude do conteúdo trabalhado, funções exponenciais, que é componente do currículo dessa etapa da escola básica. O projeto contou com o apoio da professora regente da turma, que auxiliou na coleta de dados e nos registros fotográficos do trabalho dos alunos. O experimento foi realizado nos períodos de aula da turma, já que o conteúdo faz parte do cronograma do primeiro ano e seria abordado futuramente. Cabe ressaltar que os estudantes ainda não possuíam contato algum com o tipo de função trabalhada, uma vez que eles ainda estavam estudando as funções quadráticas, conforme relatou a professora regente. Sendo assim, a aplicação da atividade tornou-se ainda mais desafiadora e motivadora. Os encontros foram realizados na sala da aula habitual da turma, no período da tarde, com o consentimento da direção. A autorização para aplicação do projeto encontra-se no anexo deste trabalho. Os alunos registraram e realizaram as atividades propostas em seus cadernos, tendo algumas de suas anotações capturadas pela câmera fotográfica. Algumas delas serão exibidas no corpo do relato, preservando a identidade do estudante. Todas as atividades propostas foram relatadas na seção anterior, de planejamentos, sendo desnecessário repeti-las durante a descrição dos encontros.

4.2.1 Primeiro Encontro: Funções exponenciais

No primeiro encontro com os alunos, após ser apresentado pela professora regente, expliquei à turma, primeiramente, qual era a proposta do trabalho e como ele seria conduzido. Pedi permissão para fazer os registros fotográficos, deixando claro que a identidade deles seria preservada. Também expliquei os motivos pelos quais estava realizando o projeto e qual a finalidade da proposta. Notei que os estudantes ficaram muito curiosos em relação ao trabalho, pois foram bastante receptivos.

Inicialmente, abordei o exemplo que comparava uma variação a taxa constante com outra variação a uma taxa percentual constante. O primeiro caso ficou bastante claro aos alunos, que responderam aos questionamentos durante a exposição do exemplo. Isso ocorreu quando calculamos o salário nos primeiros anos de trabalho para o primeiro caso. Na formalização da equação que determinava o salário, em reais, em função do tempo, em anos, alguns estudantes conseguiram chegar à expressão esperada. Eles estavam estudando funções lineares antes da realização da prática, o que pode ter facilitado a generalização da função salário. Ao questionar sobre o porquê de dizermos que a taxa de variação do salário ser sempre constante, os alunos responderam: "porque o gráfico é uma reta", e "porque sempre aumenta 1000 reais". Então, mostrei que a taxa de variação do salário poderia ser obtida pela razão entre a variação do salário e a variação do tempo (em anos). Nesse exemplo, o resultado sempre seria 1000 reais, conforme os próprios alunos já haviam detectado. Esse resultado surpreendeu alguns deles, que questionaram se poderiam determinar essa variação sempre dessa forma.

No segundo caso, em que exemplifiquei um salário cujo aumento se dava a uma taxa percentual constante, houve maior dificuldade da turma. Isso porque muitos deles não recordavam o cálculo de porcentagem, o que exigiu um pequeno "parêntese" na prática. Porém, após alguns exemplos desses cálculos, os alunos conseguiram relembrar ou compreender melhor como efetuá-los. Então, apresentei o exemplo e, junto com eles, calculamos o salário para os primeiros anos. No momento em que conduzi a uma generalização da expressão que determina o salário em função do tempo para esse caso, notei bastante dificuldade dos estudantes em operarem com as expressões e em evidenciar fatores em comum. Nesse momento, tive que ser bastante detalhista, indo passo a passo para evitar equívocos e para que ficassem entendidas todas as "manipulações" matemáticas envolvidas. Fiz alguns exemplos de fatoração, como, por exemplo, o cálculo das raízes de uma função quadrática sem fator independente. A professora regente me auxiliou nesse momento, pois informou que os alunos realizavam esse procedimento (colocar em evidência um fator comum) quando se deparavam com equações quadráticas desse tipo. Esse exemplo foi importante para o entendimento dos alunos. Finalmente chegamos à expressão desejada, e então pudemos verificar por que dizemos que nesse caso a variação ocorre a uma taxa percentual constante. Mostrei que, diferentemente do exemplo anterior, a razão entre a variação do salário e a variação do tempo não resultava em um valor constante. Para esse caso, a razão entre a variação percentual e a variação do tempo é constante, conforme calculamos de acordo com os valores encontrados para os primeiros anos.

Após os exemplos, questionei os alunos sobre a proposta mais vantajosa. A maioria afirmou que considerava a primeira mais lucrativa. Porém, um dos alunos percebeu que, no segundo caso, o aumento seria cada vez maior, e que já no terceiro ano já superaria os 1000 reais de reajuste do primeiro exemplo. Os demais concordaram que essa (a segunda) seria realmente mais vantajosa.

A partir dessa questão, apresentei à turma o tipo de função que estudaríamos nesse projeto: as funções exponenciais. Pedi aos alunos que escolhessem uma base para um exemplo de função. A escolhida foi 2. Então, solicitei que calculassem o valor de $f(x) = 2^x$ para diferentes valores de x. De acordo com os valores encontrados, eles deveriam construir o gráfico que representasse a função. Os alunos, em geral, não tiveram problemas em realizar os cálculos, mas ao esboçarem os gráficos, notei uma tendência em tentarem traçar uma reta. Como não estavam conseguindo passar essa reta pelos pontos encontrados, questionaram o que estava errado. Nesse momento, voltei aos exemplos, indagando a diferença entre os casos. Um deles lembrou que, diferentemente do primeiro, o segundo caso não apresentava, conforme palavras dele, uma “constância naquela divisão”. Partindo dessa resposta, os alunos perceberam que, como o aumento não é sempre o mesmo, o gráfico não pode ser uma reta. Então, chegaram à conclusão que deveriam representa-lo por uma “curva”. Na função escolhida, $f(x) = 2^x$, o gráfico apresentava um comportamento crescente.

A seguir, propus aos alunos que realizassem o mesmo procedimento para $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou seja, calculassem o valor da função para distintos valores de x e tentassem esboçar o seu gráfico. Já sabendo que não se tratava de uma reta, os estudantes calcularam e perceberam que o gráfico, neste caso, apresentava um comportamento decrescente. Assim, chegamos juntos à conclusão de que, para bases com valores maiores que 1, a função tem comportamento crescente, e para bases com valores entre 0 e 1, o comportamento é decrescente.

Após estudarmos o comportamento do gráfico de uma exponencial, partimos para um estudo mais aprofundado desses gráficos. A proposta agora era somar ou subtrair alguma constante da variável no expoente. Para facilitar a compreensão, sugeri que os alunos utilizassem como base o número 2, que foi útil na comparação do gráfico que já haviam esboçado com aquele que viriam a esboçar. Portanto, os estudantes deveriam escolher algum valor para $c$na expressão $f(x) = 2^{x-c}$ e atribuir valores a x verificando o que ocorreria no gráfico. Naturalmente, a escolha mais comum foi $c = 1$. Então formaram pares ordenados e esboçaram o gráfico. Pedi então que comparassem com o anterior a fim de que notassem a alteração que esse parâmetro causou. Evidentemente, houve dificuldade nessa análise, o que exigiu uma intervenção. Analisamos ponto a ponto, o que ajudou a percepção de que os valores de $f(x)$ que estavam associados a um determinado x, agora passaram a se associar a outro x, já que a escolha foi $c = 1$.

A próxima etapa consistiu na investigação sobre o papel do parâmetro a na função $f(x) = ab^x$. Mais uma vez, sugeri que adotassem o valor de b que já haviam utilizado, com o intuito de comparar os resultados. Os alunos então atribuíram diferentes valores ao parâmetro a e formaram pares ordenados, de acordo com o x escolhido. A partir dos resultados encontrados, exibi no quadro alguns gráficos obtidos, para que os estudantes analisassem. Considerando algumas dicas dadas por mim, perceberam que o parâmetro estudado determinava o ponto em que a função intercepta o eixo dos y. Como o tempo acabou excedendo o planejado, mostrei aos alunos que esse parâmetro também indicaria um crescimento ou decrescimento mais acentuado, além de uma reflexão, caso o número fosse negativo. Para que entendessem melhor, utilizei como exemplo os gráficos das funções lineares e quadráticas, que também tem essa propriedade se o coeficiente que está associado ao termo de maior grau tem sinal negativo.

O último parâmetro que seria estudado, responsável pelo deslocamento vertical do gráfico de uma função, também foi abordado sem que os estudantes realizassem uma investigação, como fizeram anteriormente. Visto que não seria possível mais um encontro, resolvi não alterar o planejamento, já que a exploração dos modelos é o maior enfoque deste trabalho. Assim, mostrei alguns exemplos, esboçando os gráficos e exibindo o deslocamento que o parâmetro causava. Os exemplos escolhidos foram $f(x) = 2^x - 1$ e $f(x) = 2^x + 1$.

4.2.2 Segundo Encontro: O número de Euler a partir de um modelo de juros compostos continuamente

Iniciei este encontro recordando as atividades realizadas na aula anterior. Procurei enfatizar mais o papel dos parâmetros que não foi possível investigar com os alunos naquele encontro. Assim, retomei os exemplos em que o gráfico sofria uma reflexão e deslocava-se verticalmente. Nessa revisão, aproveitei para salientar o deslocamento da assíntota horizontal para o segundo caso, o que eu não tinha conseguido mostrar no encontro anterior. Os estudantes não conheciam esse termo, mas não tiveram dificuldade em entender seu significado. Como perceberam, no estudo realizado no encontro anterior, que não haveria possibilidade de se interceptar o eixo dos x na função $f(x) = 2^x$, puderam compreender que, quando deslocado uma unidade para cima ou para baixo, o valor que a função não poderia assumir também seria alterado, exatamente por uma unidade.

Após a rápida revisão, perguntei à turma se conheciam o número de Euler. Como esperado, nenhum deles tinha ouvido falar dessa importante constante matemática. Dessa forma, utilizei o exemplo descrito na seção dos planejamentos para chegar até o modelo de juros compostos continuamente. Alguns alunos ainda acusaram uma dificuldade em compreender os passos em que se fez necessário evidenciar algum parâmetro. Mesmo assim, conseguiram acompanhar a passagem de uma composição trimestral para uma mensal e a generalização para n períodos ao ano. Outro momento de dificuldade ocorreu quando fiz uma mudança de variáveis, assumindo $h = \frac{n}{r}$. A dúvida maior, nesse caso, foi o porquê da necessidade dessa mudança. Expliquei que o fiz para deixar uma expressão do tipo $\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$, que viríamos a calcular. Assim, solicitei aos alunos que atribuíssem valores cada vez maiores a h e calculassem o resultado dessa escolha. Para exemplificar, determinei o valor da expressão para $h = 1, 2, 3$, deixando para os alunos o cálculo para valores cada vez maiores.

Como esperado, os estudantes chegaram a um valor próximo de 2,7182..., percebendo que, a partir de certo valor de h, havia alteração apenas em dígitos menos significativos.

A partir dos cálculos que realizaram, justifiquei a atividade que realizaram mostrando que esse valor seria importante na exploração de alguns modelos matemáticos que estudaríamos nos próximos encontros. Tal constante é base das funções exponenciais que descrevem os diferentes modelos que exploraríamos. Informei aos alunos que denotamos essa constante através do caractere e, já que se trata de um número com infinitas casas decimais.

Finalizando o encontro, chegamos ao modelo que descreveria o cálculo dos juros compostos continuamente para n períodos, com n tendendo a infinito (ainda que não tenha dito isso explicitamente, mas sim que os períodos entre as composições fossem ficando cada vez menores).

$$P_n = Pe^r$$

Se levarmos em conta a composição ao longo do tempo em anos, teremos:

$$P_n(t) = Pe^{rt}$$

Este foi o primeiro modelo com o qual os alunos tiveram contato. Aproveitei os minutos finais do encontro para esboçar o gráfico de acordo com o estudo que realizamos, analisando os parâmetros envolvidos. Novamente, os estudantes apresentaram dificuldades, dessa vez em trabalhar, como eles mesmos disseram, “com tantas letras”. Para facilitar, utilizei um exemplo com o capital inicial igual a R$ 150,00 e a taxa percentual de 10% ao ano. Ainda assim, houve problemas em trabalhar com P_n e t como variáveis, e não mais com y e x como estavam acostumados, o que exigiu uma explicação mais detalhada.

4.2.3 Terceiro Encontro: Modelos Matemáticos que envolvem funções exponenciais – parte 1.

Mais uma vez, optei por iniciar este encontro recordando o assunto considerado no encontro anterior. Os estudantes lembraram-se dos cálculos que fizeram, inclusive do nome da constante. Isso facilitou o andamento do encontro, já que não foi necessária uma revisão mais aprofundada, o que ocuparia boa parte do tempo, como ocorreu no encontro anterior. Assim, passamos para os problemas que abordariam a exploração dos modelos que estudaríamos.

O primeiro modelo trabalhado, da dinâmica populacional, foi semelhante ao modelo de juros compostos, o que pode ter facilitado o andamento das atividades. Exibi o problema número 1 no quadro e dei tempo para que os alunos tentassem resolvê-lo, contando com a minha ajuda e com o apoio da professora regente, que também auxiliou os estudantes na realização do problema. Abaixo, exibirei algumas figuras que ilustram a realização dessa atividade pela turma.

Figura 9. Resolução do Aluno X

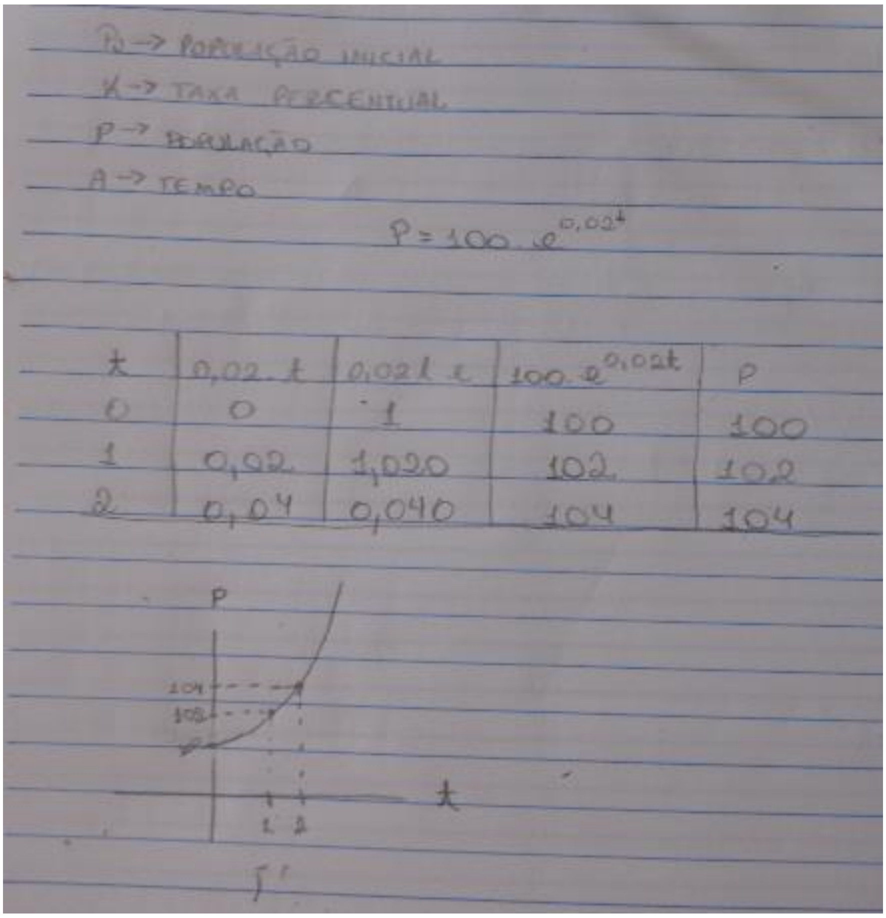
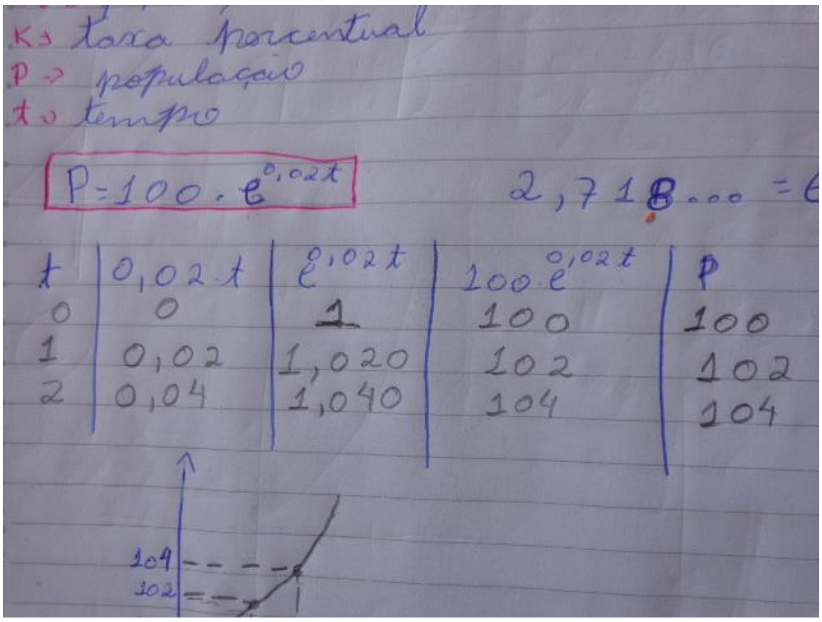


Figura 10. Resolução do Aluno Y



A seguir, a turma deveria esboçar o gráfico que representasse a população do México em função do tempo. Alguns alunos não consideraram o significado da variável, considerando valores negativos para o tempo. No entanto, isso não representou problema, uma vez que não foi difícil para eles compreender que não seria coerente assumir valores menores que zero para o tempo. O próximo problema trataria de um decrescimento populacional ocasionado pela poluição de um lago. O mesmo modelo descreve essa dinâmica, porém um fator novo chamou a atenção dos alunos. Enquanto resolviam o problema, calculando a população de peixes no lago ao longo dos anos, perceberam que, em seus cálculos, a população aumentava, embora o problema indicasse o contrário. Essa dúvida foi geral, o que exigiu que interpretássemos juntos o problema. Lendo atentamente e comparando com o exemplo anterior, notaram que, no primeiro, a população crescia a certa taxa percentual, e neste decrescia de acordo com determinada taxa percentual. Questionando sobre qual mudança isso indicava, propus aos alunos que adotássemos o valor negativo para essa taxa percentual e investigássemos o que ocorreria. Como esperado, o cálculo da turma indicou um decrescimento. Assim, concluímos que se a taxa percentual indicar um crescimento, seu valor mantém-se positivo, mas caso indique um decrescimento, seu sinal será considerado negativo. Com isso, os estudantes esboçaram o gráfico e verificaram o decrescimento dessa população. Nesse problema, já levaram em conta o fato de não haver tempo negativo, tendo condições de construir o gráfico de forma correta.

Para terminar a exploração desse modelo, os alunos deveriam explicar com suas palavras o que cada uma das equações apresentava. Não tiveram problemas em identificar os parâmetros envolvidos. O maior desafio, para os alunos, foi visualizar a taxa percentual, o que foi rapidamente superado, após alguns exemplos de conversão à porcentagem.

A seguir, iniciamos a exploração do segundo modelo. A Lei de resfriamento e aquecimento assustou um pouco os alunos quando apresentada, visto que sua “aparência” continha muitas letras, conforme eles mesmos relataram. Para superar esse obstáculo, ajudei os alunos a montarem o modelo para o primeiro problema. Com os valores substituídos, demonstraram maior confiança para realizar a exploração. A maioria da turma conseguiu realizar o cálculo com sucesso. Os que apresentaram maior dificuldade, contaram com o meu auxílio e com o da professora regente. No segundo problema, já substituíram os valores sem a minha intervenção e calcularam o que se pedia. Bastava à turma esboçar os gráficos. Notei ainda uma pequena dificuldade na interpretação. Apesar de estudarmos os parâmetros, alguns deles ainda construíram gráficos decrescentes que tinham como limite o valor de 0°C, mesmo o parâmetro indicando um deslocamento vertical. Isso exigiu uma nova explicação. Após explicar, um dos alunos se deu conta que não haveria possibilidade de o bolo esfriar a ponto da sua temperatura se aproximar de 0°C, já que a temperatura ambiente era de 20°C. Esse momento foi um dos mais animadores da prática, já que observaram que o parâmetro tinha significado nessa aplicação, e que aquele estudo fazia sentido, como os próprios estudantes expressaram. O mesmo se deu para o segundo gráfico, o qual seria limitado pela temperatura ambiente. Nesse problema, o desafio maior foi identificar qual era a temperatura ambiente, que não foi dita de maneira explícita no enunciado do problema. Nessa hora, questionei à turma sobre a temperatura de fervura da água, ao que me responderam corretamente, 100°C. Assim, perceberam que essa medida representava a temperatura ambiente na questão. Para responder à pergunta sobre o que determinava o crescimento ou decrescimento da temperatura, notaram que isso ocorria de acordo com a temperatura ambiente e que, com o passar do tempo, a temperatura tendia a equilibrar-se com esse valor.

4.2.4 Quarto Encontro: Modelos Matemáticos que envolvem funções exponenciais – parte 2.

Iniciando o último encontro, já exibi o primeiro problema para que resolvessem. Notaram que o modelo era idêntico ao do resfriamento/aquecimento, o que evitou que fosse necessário revisar o modelo visto no encontro anterior. Os alunos substituíram os valores dados no modelo e estranharam no item b que o resultado apresentou apenas uma constante. Alguns deles desconfiaram dos cálculos, mas informei a eles que estavam corretos. Na hora de esboçar o gráfico, também apresentaram dificuldade nesse item, assim como em fazê-lo em um mesmo plano cartesiano. Individualmente, conseguiram realizar as construções, até mesmo a do item b, contando com o meu auxílio. Mostrei que, para quaisquer valores de tempo, o resultado era sempre o mesmo, e isso indicava uma função linear constante, o que eles já haviam estudado. Tratava-se do caso $y = c$, com c constante, caso particular das funções lineares. O esboço no mesmo gráfico gerou receio dos estudantes, pois nunca o haviam feito. No entanto, realizaram o processo e, com base no gráfico, viram que a tendência, com o passar do tempo, era de o gráfico tender ao mesmo valor. Disse aos alunos que nesse caso o 25 indicava um equilíbrio já que a função se estabilizava ao chegar próximo desse valor.

No segundo problema, realizaram o mesmo processo e viram que ocorria o contrário. A função afastava-se do valor de equilíbrio. No primeiro caso, não tiveram dificuldades em perceber que a empresa iria aumentar cada vez mais seu patrimônio. No segundo, que iria permanecer igual. E no terceiro, que o patrimônio iria diminuir. Assim como sabiam que seria inviável considerar valores negativos para o tempo, o mesmo seria válido para população e patrimônio. Então, embora alguns tivessem esquecido essa restrição, boa parte da turma se deu conta dessa impossibilidade e não continuaram o gráfico no eixo negativo do patrimônio. Nesse último caso, não conseguiram responder o que ocorreria com o patrimônio ao longo do tempo, quando perguntei: “o que ocorre quando o patrimônio da empresa é zero?” Eles responderam que a empresa perdeu tudo, ou seja, que a empresa vai à falência.

Para fechar a prática, apresentei aos alunos alguns modelos que também envolvem funções exponenciais com o número de Euler como base. Alguns afirmaram que imaginam ser bem difíceis trabalhar com esse tipo de função, e quiseram saber se existem outros mais complicados. Afirmei que existem muitos e que existe um ramo da matemática que estuda esses modelos. Então, apliquei um questionário sobre a experiência realizada, a fim de validar o trabalho proposto.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo analisará os resultados da prática realizada, baseando-se nas observações feitas durante os encontros e na avaliação da turma sobre o experimento, expressa através da resposta a um questionário. De acordo com a resposta dos alunos, verificaremos a validade da prática quanto ao cumprimento dos objetivos e quanto à resposta da questão norteadora.

5.1 Observações dos encontros

A turma, em sua maioria, apresentou muitas defasagens em relação à matemática básica. Operações que envolviam números não inteiros geraram dificuldade em boa parte dos alunos, o que exigia uma interferência na prática para explicar os conceitos necessários. A abordagem de taxas percentuais também revelou um problema dos estudantes com cálculo de porcentagem. Nesse momento, a recapitulação desse tema se fez necessário. Evidenciar algum fator pareceu ser algo inédito aos alunos, mas ao relacionar com o cálculo de raízes de funções quadráticas sem o termo independente, com o qual eles já estavam familiarizados, eles conseguiram acompanhar as manipulações algébricas realizadas.

Apesar desses obstáculos, a classe participou ativamente das investigações propostas. No primeiro problema que tratava da população do México, cuja descrição está no capítulo 4, eles discutiram a população de outros países, como o Brasil e a China, e indagaram se poderiam usar o modelo para estimar a população destes países nos próximos anos. Disse à turma que se tiverem os dados necessários, podem utilizar esse modelo para este fim. Além disso, a abordagem com aplicações gerou mais facilidade na compreensão. No problema do resfriamento, os alunos intuitivamente e pelo conhecimento da realidade, já sabiam o que ocorreria, com o passar do tempo, com a temperatura do bolo após ser retirado do forno. Mesmo assim, alguns deles não consideraram esse conhecimento no instante em que esboçaram o gráfico, pois o decrescimento da temperatura apresentado por alguns estudantes tendia a aproximar-se de zero e não da temperatura ambiente. Entretanto, não foi difícil para eles compreenderem que o limite de decrescimento seria essa temperatura ambiente, até porque relacionando com os parâmetros estudados na construção de gráficos, chegamos à conclusão de que o estudo correspondia ao comportamento da realidade. Por enxergarem a matemática explicando situações da realidade, alguns alunos apresentaram empolgação, o que me deixou ainda mais motivado para explorar os demais modelos. Essa leitura dos modelos de acordo com os parâmetros foi muito interessante, pois gerou grande participação dos alunos. O problema do patrimônio de uma empresa ilustra isso. A percepção de que ela iria à falência se o fator negativo superar o positivo também gerou discussão.

Evidentemente, alguns alunos não participavam das discussões. Alguns estiveram presentes somente em um ou dois encontros, o que dificultava uma integração ao projeto. Mesmo assim, considero que essa exploração foi positiva para a maioria da turma. Para ratificar essa consideração, apresentarei abaixo o resultado de um questionário de avaliação aplicado no último dia da prática.

5.2 Questionário de Avaliação

Nos quinze minutos finais, entreguei a cada estudante um dos questionários para que expressassem sua opinião acerca da experiência e do meu desempenho na condução do projeto. Nele, encontram-se 33 itens, divididos em 3 aspectos. O primeiro avalia o desempenho do professor, o segundo avalia a prática, e o terceiro contém alguns itens adicionais para analisar o resultado. Cada item apresenta três alternativas que podem expressar a opinião dos alunos sobre as 33 afirmativas, para que estes marcassem com um X naquela que julgassem representar seu pensamento. Ao todo, 23 alunos responderam ao questionário, e o resultado que apresentarei abaixo conta com o número de vezes que cada item foi assinalado. Vale ressaltar que nenhum aluno precisou identificar-se, para que eles ficassem mais a vontade para responder. No final, houve um espaço para críticas e sugestões.

Tabela 6 – Avaliação do Professor

	O professor	Concordo	Indeciso	Discordo
1	Domina o conteúdo	**18**	**5**	
2	Explica com clareza	**16**	**5**	**2**
3	Estimula a participação	**16**	**4**	**3**
4	Destaca aspectos importantes da matéria	**20**	**2**	**1**
5	Exige raciocínio do aluno	**17**	**4**	**2**
6	Responde aos questionamentos do aluno	**22**	**1**	
7	Dispôs-se a ajudar sempre que possível	**23**		
8	Associa a Matemática à realidade	**21**	**2**	
9	Mostrou conhecimento de outras áreas	**15**	**5**	**3**
10	Compareceu aos encontros pontualmente	**23**		
11	Parece planejar as aulas	**21**	**2**	
12	Respeita os alunos	**23**		
13	Demonstrou segurança	**20**	**2**	**1**
14	Propôs atividades interessantes	**16**	**4**	**3**
15	Demonstrou interesse	**17**	**6**	
16	Explicitou os objetivos do trabalho	**17**	**3**	**3**
17	Realizou uma prática de acordo com o nível de ensino da turma	**14**	**7**	**2**
18	Realizou, de modo geral, um desempenho bem-sucedido	**18**	**4**	**1**

Na tabela acima, percebe-se que a maioria dos alunos concorda com as afirmativas sobre o desempenho do professor. Percebi que boa parte dos alunos que discordou de algum item não participou de todos os encontros. Essa constatação foi feita analisando a afirmação número 3 dos itens adicionais. Isso pode justificar a discordância nos itens 2, 3, 14 e 15. O primeiro por ser difícil acompanhar o experimento se alguma parte da prática não foi vista. Por exemplo, se não compareceram no dia em que abordamos a construção dos gráficos, a resolução dos problemas ficou inviável. E talvez, por não entenderem, não se sentiram estimulados a participar e não consideraram a prática interessante. Cabe lembrar também que a turma não havia tido contato nenhum com funções exponenciais, o que tornou a experiência mais desafiadora por tratar de um conteúdo novo. Esse fator pode ter gerado a indecisão em relação ao item 17. Satisfatoriamente, o item 18 apresentou uma concordância quanto ao meu desempenho de modo geral.

Tabela 7 – Avaliação da Prática

	A prática	Concordo	Indeciso	Discordo
1	Mostrou que é viável o uso de Modelos Matemáticos no Ensino	**16**	**5**	**2**
2	Contribuiu para a compreensão do conteúdo	**17**	**4**	**2**
3	Foi bem planejada	**19**	**4**	
4	Apresentou aplicações importantes da Matemática	**19**	**3**	**1**
5	Aprimorou minha habilidade em analisar gráficos	**16**	**4**	**3**
6	Esclareceu a diferença entre função linear e função exponencial	**15**	**5**	**3**
7	Foi investigativa (os alunos participaram da construção do conhecimento)	**16**	**5**	**2**
8	Foi, de modo geral, bem-sucedida	**18**	**4**	**1**

Os resultados apresentados na tabela 7 foram importantes para validar a prática realizada. No item 1 dessa tabela, notamos concordância da maioria da turma em relação ao uso de modelos matemáticos no ensino. Como relatei anteriormente, esses modelos, como descrevem comportamentos de fenômenos reais, tornaram a prática mais interessante aos alunos. Explorá-lo de modo investigativo, analisando graficamente a manipulação de alguns parâmetros mostrou aos estudantes que a matemática está presente em tudo e explica algumas situações que eles já conhecem, mesmo que intuitivamente. O item 2 também apresentou um resultado satisfatório, uma vez que estavam lidando pela primeira vez com o conteúdo, mas fazê-lo com essa abordagem pode ter facilitado a compreensão dessas funções, até então, inéditas para eles. Eles também a consideraram bem planejada, até pela relação de um encontro com outro. A sequência didática mostrou que o que eles viram em um encontro anterior foi importante nos encontros posteriores, o que justifica também a discordância daqueles que não estiveram presentes em todos os encontros. A concordância com o item 4 constatei durante os encontros, já que muitos ficaram espantados com a presença da matemática em alguns dos fenômenos estudados, como o modelo de resfriamento e da quantidade de certa substância no organismo. O exemplo inicial, comparando uma taxa de variação constante a uma taxa de variação percentual constante através de um cálculo do salário de um trabalhador, também fizeram os alunos entender melhor essa diferença, conforme responderam no item 6. A utilização de uma aplicação foi importante nesse sentido. A interpretação de gráficos, questionada no item 5, teve também resultados satisfatórios. A análise do que ocorreria com o gráfico ao longo do tempo ficou mais fácil com o conhecimento da realidade que tinham. Até mesmo para deduzir o domínio e imagem da função, ainda que não tratamos explicitamente dessas questões, os estudantes tiveram boa resposta. Era claro para eles que não havia tempo ou população negativa, por exemplo. E quanto à investigação, que é a proposta de abordagem do conteúdo de funções exponenciais nesta prática, através da exploração dos modelos, os alunos concordaram que participaram da construção dos conceitos. Essa investigação se fez presente em todos os encontros. No primeiro, com a análise do papel dos parâmetros na construção dos gráficos de uma função exponencial. No segundo, no cálculo do valor do número de Euler, a partir de um modelo de juros compostos continuamente. No terceiro, exploraram os modelos para investigar o comportamento de uma população ou de um objeto resfriado ou aquecido ao longo do tempo. E no quarto, exploraram os modelos de acordo com uma condição inicial para saber o que ocorreria com o fenômeno descrito pelo modelo ao longo do tempo. Mais uma vez, os alunos consideraram a prática bem sucedida de um modo geral, de acordo com a resposta do item 8.

Tabela 8 - Avaliação de Itens Adicionais

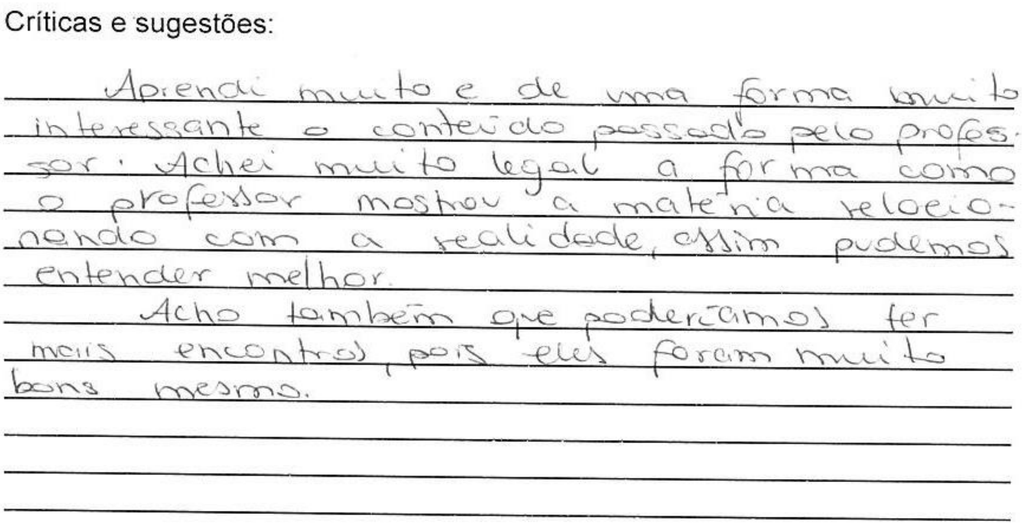
	Itens adicionais	**Concordo**	**Indeciso**	**Discordo**
1	Participei das atividades propostas	**19**	**3**	**1**
2	Dediquei esforço ao projeto	**15**	**5**	**3**
3	Estive presente na maioria dos encontros	**18**		**5**
4	Considero este questionário válido	**21**	**2**	
5	Estou satisfeito com o que aprendi	**20**	**2**	**1**
6	Gosto de Matemática	**1**	**4**	**18**
7	Respondi ao questionário com atenção	**23**		

Na avaliação dos itens adicionais, vemos que a maioria da turma buscou participar das atividades, mesmo que não dedicasse esforço devido ao projeto. A ausência de alguns alunos da maioria dos encontros, como mencionado anteriormente, fez com que a prática ou o desempenho do professor não tenha sido agradável a alguns deles, de certa forma. Praticamente todas as discordâncias de afirmativas foram dos mesmos alunos que não compareceram aos quatro encontros. Os alunos alegaram, após entregarem o questionário, terem gostado da ideia de responder a um questionário avaliando o professor, pois muitos acham, segundo palavras deles mesmo, “injusto só o professor avaliar”. Alguns disseram que gostariam de avaliar os professores da escola, assim como estavam me avaliando.

Isso refletiu a resposta deles no item 4. Também mostraram satisfação com o conteúdo que aprenderam, o que pude constatar pela participação ativa deles na exposição dos conteúdos e na exploração dos modelos. Como esperado, a maioria da turma não gosta de matemática, pois apenas um deles afirmou concordar com o item 6. Sendo assim, fiquei ainda mais satisfeito com os resultados, uma vez que é difícil, em minha opinião, interessar-se por algo que não se gosta. Todos afirmaram responder o questionário com atenção.

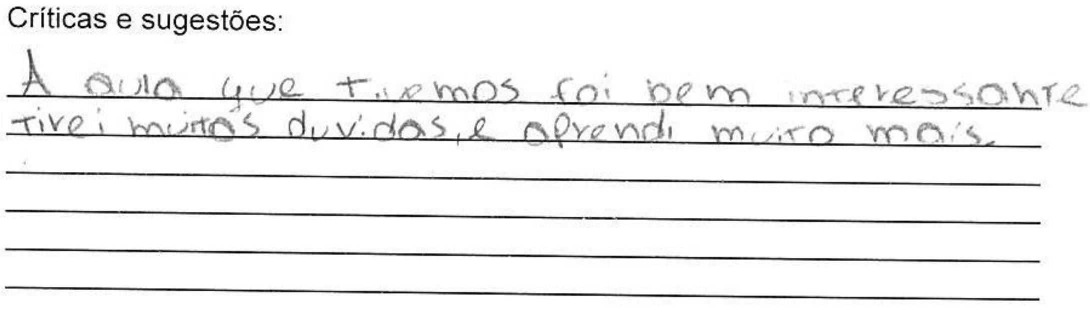
No final do questionário, reservei um espaço para que os alunos contribuíssem com críticas e sugestões sobre o professor e a prática realizada. A maioria dos alunos não preencheu o espaço. Alguns, apenas elogiaram e, como tinha dito que era um trabalho de conclusão de curso, desejaram sucesso no trabalho. Quanto a sugestões ou críticas, destaquei algumas que foram mais positivas á validação do trabalho, as quais apresento abaixo:

Figura 11. Opinião do Aluno A


Críticas e sugestões:

Aprendi muito e de uma forma muito interessante o conteúdo passado pelo profes-sor. Achei muito legal a forma como o professor mostrou a matéria relacio-nando com a realidade, assim pudemos entender melhor.
Acho também que poderíamos ter mais encontros, pois eles foram muito bons mesmo.

Figura 12. Opinião do Aluno B


Críticas e sugestões:

A aula que tivemos foi bem interessante tirei muitas duvidas, e aprendi muito mais.

Portanto, de acordo com as observações realizadas e com o resultado dos questionários de avaliação, considero que a prática tenha sido bem sucedida e que os resultados pretendidos tenham sido alcançados. Houve participação dos alunos na construção dos conhecimentos, através de um ambiente investigativo; e a abordagem com aplicações, pela exploração de modelos, favoreceu o estudo das funções exponenciais.

6. CONSIDERAÇÔES FINAIS

Neste capítulo, tentarei responder à questão norteadora deste trabalho, de acordo com a avaliação da prática realizada. Também analisarei se os objetivos estabelecidos no início do projeto foram alcançados. Os objetivos traçados foram:

- Propor o ensino de funções exponenciais a partir de uma exploração de modelos matemáticos que envolvam esse conteúdo;

- Introduzir o número e, mostrando sua importância como base de funções exponenciais em modelos que descrevem distintas aplicações;

- Estimular o aprendizado dos alunos mostrando aplicações do conteúdo que está sendo trabalhado, ampliando seus conhecimentos sobre funções e suas habilidades na interpretação de gráficos;

Quanto ao primeiro objetivo, considero que tenha sido atingido, uma vez que o estudo realizado contou com a exploração de diferentes modelos. Apesar de não estarem familiarizados com as funções exponenciais, pois tiveram seu primeiro contato com esse conteúdo nos encontros realizados, os alunos apresentaram boa resposta na investigação proposta, conseguindo resolver os problemas de maneira satisfatória. Sendo assim, considero que essa abordagem (explorando modelos) tenha sido válida.

Em relação ao segundo objetivo, acredito que tenha sido alcançado, já que os alunos reconheceram o número de Euler nos modelos explorados e puderam constatar sua importância. Deve ser ressaltado ainda que os próprios alunos chegaram ao seu valor através de um cálculo realizado a partir de um modelo de juros compostos continuamente.

Sobre o terceiro objetivo, considero que tenha sido atingido, já que os estudantes mostraram bastante interesse no projeto, como pude observar durante a prática e de acordo com suas respostas no questionário de avaliação. Além disso, sua interpretação do gráfico foi satisfatória, pois conseguiram resolver os problemas que exigiam essa interpretação e consideraram até mesmo fatores intuitivos como domínio e imagem, sem que se abordasse explicitamente esses fatores.

Analisando os três objetivos acima, podemos responder à questão norteadora: "o ensino de funções exponenciais a partir de modelos matemáticos que as envolvam pode ser uma alternativa ao estudo desse conteúdo?". Concluo que essa exploração de modelos poderia ser uma alternativa para o estudo de funções exponenciais, já que possibilita uma abordagem diferente, com investigação e aproximação dos alunos à realidade, proporcionando uma melhor compreensão do conteúdo que está sendo trabalhado.

Para finalizar, considero que o projeto teve resultados satisfatórios por permitir aos alunos uma investigação do conteúdo. A Modelagem Matemática trabalha com essa investigação, por isso considero uma importante ferramenta para o ensino de Matemática. Acredito que essa abordagem se torna interessante aos alunos, exigindo raciocínio e auxiliando na compreensão dos conceitos. E também é interessante ao professor, uma vez que o desafia a conduzir os alunos à construção do conhecimento, contrariando o estilo mais tradicional de exposição de conteúdos e de fórmulas prontas.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J.C; **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico.** Reunião Anual da ANPED, 24., 2001, Caxambu – MG.

BASSANEZI, R.C; **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo, Contexto, 2002

BIEMBENGUT, S.M; HEIN, N; **Modelagem Matemática no Ensino.** 4ª Edição. São Paulo, Contexto, 2007.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** / PCN+: Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

CONNALY, E. A. et al. **Funções para Modelar Variações: Uma preparação para o cálculo.** 3ª Edição. RJ, LTC, 2009.

MAOR, E. ***e*****: A História de um Número.** 4ª Edição. Rio de Janeiro, RJ, Record, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação.** Bolema, Rio Claro – SP, n.14, p.66-91, 2000.

ZILL, D.G; **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem.** Tradução da 9ª Edição Norte-Americana. São Paulo, Cencage Learning, 2011.

ANEXOS

Anexo 1 – Questionário de Avaliação

Questionário de avaliação do professor e da prática

O objetivo deste questionário é verificar a opinião dos alunos sobre o desempenho do professor e a importância da experiência realizada, visando validar as atividades propostas. Não é necessário identificar-se. Expresse sua opinião livremente. Esta avaliação não influenciará no desempenho escolar do aluno; portanto, não se preocupe em favorecer o professor.

Nas tabelas abaixo, você encontrará uma série de afirmativas que indicam possíveis características do professor e do trabalho realizado. Ao lado, encontram-se três alternativas que podem expressar sua opinião sobre as afirmativas. Assinale com um X aquela que você pensa expressar melhor a sua opinião. No fim da página, há um espaço para críticas e sugestões.

	O professor	**Concordo**	**Indeciso**	**Discordo**
1	Domina o conteúdo			
2	Explica com clareza			
3	Estimula a participação			
4	Destaca aspectos importantes da matéria			
5	Exige raciocínio do aluno			
6	Responde aos questionamentos do aluno			
7	Dispôs-se a ajudar sempre que possível			
8	Associa a Matemática à realidade			
9	Mostrou conhecimento de outras áreas			
10	Compareceu aos encontros pontualmente			
11	Parece planejar as aulas			
12	Respeita os alunos			
13	Demonstrou segurança			
14	Propôs atividades interessantes			
15	Demonstrou interesse			
16	Explicitou os objetivos do trabalho			
17	Realizou uma prática de acordo com o nível de ensino da turma			
18	Realizou, de modo geral, um desempenho bem-sucedido			

	A prática	**Concordo**	**Indeciso**	**Discordo**
1	Mostrou que é viável o uso de Modelos Matemáticos no Ensino			
2	Contribuiu para a compreensão do conteúdo			
3	Foi bem planejada			
4	Apresentou aplicações importantes da Matemática			
5	Aprimorou minha habilidade em analisar gráficos			
6	Esclareceu a diferença entre função linear e função exponencial			
7	Foi investigativa (os alunos participaram da construção do conhecimento)			
8	Foi, de modo geral, bem-sucedida			

	Itens adicionais	Concordo	Indeciso	Discordo
1	Participei das atividades propostas			
2	Dediquei esforço ao projeto			
3	Estive presente na maioria dos encontros			
4	Considero este questionário válido			
5	Estou satisfeito com o que aprendi			
6	Gosto de Matemática			
7	Respondi ao questionário com atenção			

Críticas e sugestões:

Anexo 2 – Autorização da Escola

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Consentimento Informado

O COLÉGIO ESTADUAL PROTÁSIO ALVES, com endereço nesta capital, na Avenida Ipiranga, 1090, CNPJ – 92941681/000100, neste ato representado por sua diretora PATRICIA LADY WOLF, por intermédio do presente instrumento, **autoriza** Walter Mendes Haselein, brasileiro, solteiro, estudante, residente na Avenida José de Alencar, 295 – Ap 4, em Porto Alegre, RS, CPF 006.447.040-71, a utilizar o projeto "Explorando Modelos que Envolvam Funções Exponenciais" em seu trabalho de conclusão de curso na Faculdade de Matemática na Universidade Federal do Rio Grande dos Sul.

O autorizado, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram do referido projeto.

Porto Alegre, 3 de DEZEMBRO de 2013

Patrícia Lady Wolf

Direção da Escola

Patrícia Lady Wolf
Diretora
Matrícula 2434709/01
Colégio Protásio Alves

De acordo:

Walter Mendes Haselein