

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO DE MATERIAIS DE ALTA CONDUTIVIDADE COM A FORMA DE UM  
“T” PARA RESFRIAMENTO DE CORPOS GERADORES DE CALOR

por

Felipe Lewgoy Dalpiaz

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2013

ESTUDO NUMÉRICO DE MATERIAIS DE ALTA CONDUTIVIDADE COM A FORMA DE UM  
“T” PARA RESFRIAMENTO DE CORPOS GERADORES DE CALOR

por

Felipe Lewgoy Dalpiaz

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dra. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Energia e Fenômenos de Transporte**

Orientador: Prof. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Bardo E. Joseff Bodmann

Prof. Dr. Nattan Roberto Caetano

Prof. Dra. Thamy Cristina Hayashi

Porto Alegre, 04, dezembro de 2013.

DALPIAZ, F. L. **Estudo Numérico de Materiais de Alta Condutividade com a forma de um “T” para Resfriamento de Corpos Geradores de Calor**. 2013. 21 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## **RESUMO**

Este trabalho desenvolve um estudo numérico em duas direções espaciais com o objetivo de descobrir a configuração de materiais de alta condutividade térmica em forma de “T” que resultam na menor resistência ao fluxo de calor, quando inseridos em corpos geradores de calor com baixa condutividade térmica. Como restrição as áreas de ambos os materiais, são mantidas constantes. A equação diferencial da difusão do calor, aplicadas às condições de contorno, foram solucionadas pelo método dos elementos finitos utilizando o programa MATLAB, mais precisamente a ferramenta PDETOOL. O intuito deste estudo é facilitar o fluxo do calor gerado por meio de caminhos com o formato de T com material de condutividade térmica elevada e volume constante. Em outras palavras, minimizar a resistência térmica ao fluxo de calor gerado para uma melhora na refrigeração, variando somente os comprimentos e larguras dos dois retângulos que formam o T. Foram analisadas várias configurações geométricas, respeitando o formato em T. Os resultados mostram que existe uma geometria que minimiza a resistência térmica.

**PALAVRAS-CHAVE:** Material de alta condutividade térmica, resfriamento, geradores de calor.

DALPIAZ, F. L. **Numerical study of T-shaped High Conductivity Materials for cooling a heat generating bodies**. 2013. 21 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## **ABSTRACT**

This work develops a numerical study trying to find out the best configuration of T-shaped materials of high thermal conductivity to improve the heat transfer between the heat generating body, which is a low heat conductor, and the environment. As a restriction, both areas are kept constant. The differential equations of heat diffusion and their boundary conditions were solved numerically using the MATLAB program, specifically the PDETOOL tool. The objective of this work is to improve the flux of heat through the T-shaped materials of high thermal conductivity, in other words, minimize the thermal resistance to improve the refrigeration, changing only the values of the lengths and widths of the two rectangles that setup the "T". Many geometric possibilities were evaluated, keeping the T-geometry. The results show that there is a geometry that minimizes the thermal resistance.

**KEYWORDS:** Material of high conductivity, cooling, heat generating.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Romanas

A	Área, m <sup>2</sup>
D	Espessura, m
k	Condutividade térmica, W/mK
L	Largura, m
q'''	Taxa de geração volumétrica de calor, W/m <sup>3</sup>
T	Temperatura, K
x, y	Coordenadas espaciais, m
H	Altura, m
q̇	Taxa de geração de energia, W
w	Profundidade, m

### Símbolos Gregos

∅	Fração de area
θ	Temperatura adimensional

### Subscritos

max	Máximo
m	Uma vez minimizado
mm	Duas vezes minimizado
mmm	Três vezes minimizado
o	Uma vez otimizado
oo	Duas vezes otimizado
ooo	Três vezes otimizado
p	Referente ao material de alta condutividade térmica
0	Referente às variáveis do ramo inferior do T
1	Referente às variáveis do ramo superior do T

### Sobrescritos

(~)	Variáveis adimensionais
-----	-------------------------

## ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO .....	1
2 OBJETIVOS .....	1
2.1 Objetivos Específicos .....	1
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	1
4 METODOLOGIA .....	2
4.1 Modelo Matemático .....	2
4.1.1 Condições de Contorno.....	4
4.2 Método Numérico .....	5
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	7
6 CONCLUSÕES .....	11
7 PROPOSTAS DE CONTINUIDADE.....	12
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	12
Apêndice I .....	13

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico, especialmente na área digital, com a produção de equipamentos cada vez mais compactos, tornou indispensável o estudo de técnicas mais eficazes para transferência de calor. A dificuldade em se obter resultados satisfatórios usando o tradicional método de convecção forçada para remover calor de placas onde há geração de calor, devido à diminuição da área, acelerou os estudos na busca de métodos mais eficientes.

As aplicações das tecnologias avançadas e das respectivas pesquisas sobre transferência de calor se expandiram dos campos tradicionais da indústria, como os setores de engenharias química, mecânica, de energia e outras, para os novos campos da indústria, tais como tecnologia eletrônica, espacial e biomecânica. Assim, os problemas de transferência de calor com condições convencionais para aqueles setores aparecem atualmente como problemas com condições extremas, alta densidade de fluxo de calor em micro e nano-escala, micro gravidade, entre tantas outras.

Atualmente, os aparelhos eletrônicos estão cada vez mais solicitados, trabalhando em condições severas, em contrapartida estes estão cada vez mais compactos. Essa miniaturização, juntamente com processadores cada vez mais rápidos, como computadores, chegando a processar dados em GHz, exige uma forma rápida e precisa no resfriamento dos componentes eletrônicos. A má refrigeração prejudica o desempenho de equipamentos, podendo ocasionar falhas, ou até danificar os circuitos por superaquecimento. Além de ser uma condição necessária para o bom funcionamento, é uma forma de garantir a segurança das máquinas. O estudo de novas formas de resfriamento de dispositivos eletrônicos surge como peça indispensável para o desenvolvimento tecnológico destes microcomponentes de alto desempenho.

A inserção de materiais de alta condutividade térmica nestes componentes geradores de calor aparece como uma solução viável para solucionar este problema. A utilização de programas de simulação auxilia neste campo de pesquisa para a determinação da forma ideal de aplicação deste método.

## 2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo descobrir a configuração que facilita o acesso do fluxo de calor que escoar por meio de caminhos de materiais de alta condutividade com a forma de um "T" inseridos dentro de uma placa quadrada visando ao seu resfriamento. O objetivo é minimizar o máximo excesso de temperatura de todo o sistema, isto é, os pontos quentes, independente de onde estão localizados. Para tanto, são variados os comprimentos e as larguras dos dois ramos que formam o T, mantendo-se fixas as áreas da placa e do material de alta condutividade térmica.

### 2.1 Objetivos Específicos

A seguir são listados os objetivos específicos apresentados nesta monografia:

- Aplicar um modelo numérico para cálculo da distribuição de temperatura para o sistema apresentado;
- Validar o modelo numérico;
- Simular diversas configurações geométricas na forma de T, utilizando método numérico;
- Selecionar as configurações que facilitem o fluxo de calor, isto é, que minimizem a resistência térmica global.

## 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O uso de materiais de alta condutividade térmica para resfriamento de corpos com geração de calor pelo princípio da condução térmica vem sendo amplamente estudado

nos últimos anos, conforme descrito a seguir. Dentre estes estudos pode-se ressaltar Bejan, 1996a e 2000 e Bejan e Lorente, 2008, que propuseram uma forma eficiente de retirada de calor por condução do volume aquecido. Esta consiste no preenchimento com uma pequena quantidade de material de alta condutividade térmica, para a formação de canais, com o intuito de reduzir a resistência térmica global entre o corpo gerador de calor e o ambiente, melhorando a refrigeração. O seu princípio básico é de manter fixo o volume ocupado pelo material de alta condutividade, otimizando sua configuração para que tenha a menor resistência térmica global. Outros trabalhos aplicaram esta técnica com inserção de materiais de alta condutividade em sólidos onde há geração de calor para facilitar sua troca térmica. Em Ledezma et al., 1997, foi assumido que todo o volume foi atravessado pelo material de condutividade térmica elevada, resfriando o domínio através de um ponto que foi mantido a temperatura constante inferior a do restante do material.

Várias são as formas que já foram estudadas para os caminhos preenchidos com material de alta condutividade. Almogbel e Bejan, 1999, inseriram material de alta condutividade térmica em um canal na forma de I. Horbach et al., 2013, otimizaram caminhos na forma de Y, utilizando um modelo que simula mais próximo o que acontece na realidade. Assim como acontece na natureza, a transferência de calor segue o caminho mais fácil, ou seja, o fluxo segue o trajeto que oferece a menor resistência térmica possível [Bejan e Lorente, 2008]. Geometrias mais complexas foram abordadas por Lorenzini et al., 2013a e 2013b, e os resultados obtidos foram favoráveis, melhorando a distribuição da temperatura máxima.

#### 4. METODOLOGIA

##### 4.1 Modelo Matemático

A Figura 4.1 apresenta genericamente o domínio a ser analisado.

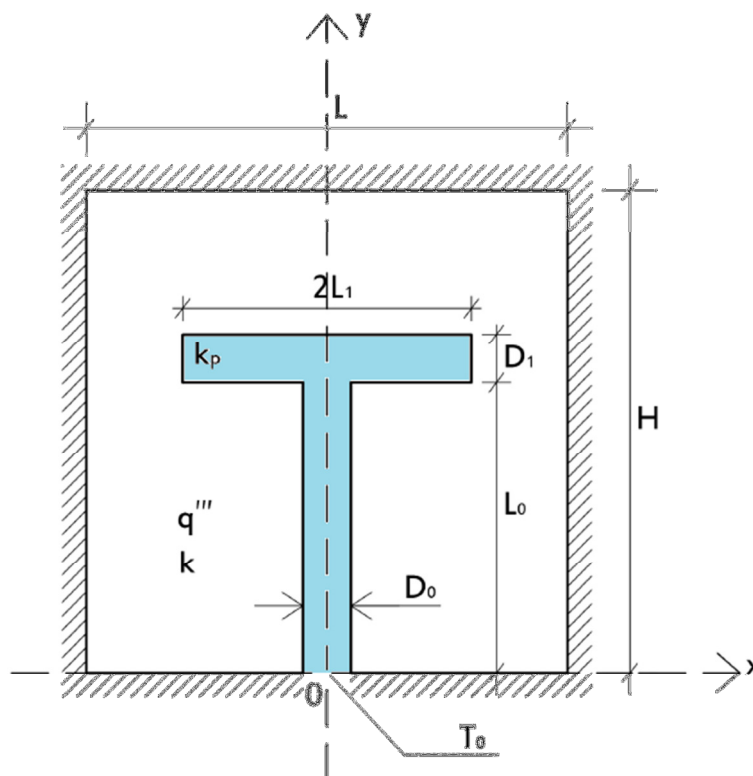


Figura 4.1 - Representação de material de alta condutividade térmica na forma de "T" inserido em corpo com geração de calor.



O material gerador de calor tem menor condutividade térmica,  $k$ , e área fixa  $A$  [ $m^2$ ], definida pelo produto do comprimento da base,  $L$  [m], e pela altura,  $H$  [m]. Sobre esta área há um material de alta condutividade térmica,  $k_p$ , na forma de T. A área total do T é composta pela soma da área da base, definida pelo produto dos comprimentos  $D_0$  [m] e  $L_0$  [m], e da área superior, definida pelo produto do comprimento  $D_1$  [m] e  $L_1$  [m] (multiplicado por 2). Os graus de liberdade escolhidos para essa análise são:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $D_0$ .

Para simplificar o estudo a geometria é assumida bidimensional, com a hipótese da terceira dimensão ser suficientemente longa em comparação com as outras duas dimensões. A geração de calor na região de baixa condutividade térmica  $k$  é uniforme a taxa volumétrica  $q'''$  [ $W/m^3$ ]. As superfícies exteriores do sólido são perfeitamente isoladas. A taxa de energia gerada  $q'''(Aw)$  é removida pelos dissipadores de calor localizados na borda do corpo à temperatura  $T_0$ . A função objetivo é temperatura máxima em excesso,  $(T_{\max} - T_0)/(q'''A/k)$ , que também é a resistência térmica. O objetivo é determinar a configuração geométrica da via em T que forneça a menor resistência ao fluxo de calor.

O volume é limitado pelas dimensões  $H$  e  $L$  nos eixos  $x$  e  $y$ . As condutividades térmicas de ambos os materiais são uniformes ao longo da placa e a geração de calor uniforme é conhecida. A seguir, têm-se as duas restrições obtidas a partir das áreas constantes.

Área total:

$$A = HL \quad (4.1)$$

Área do material de alta condutividade:

$$A_p = (D_0L_0 + 2L_1D_1) \quad (4.2)$$

onde  $A_p$  [ $m^2$ ] é a área da região preenchida pelo material de alta condutividade na forma de um T.

A análise que proporciona o valor de temperatura máxima em excesso em função da geometria consiste em resolver numericamente a equação de condução com geração de calor constante ao longo da região de menor condutividade térmica  $k$ . O campo de temperaturas do material com baixa condutividade térmica é obtido a partir da equação da difusão, dada pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica [ $W/mK$ ],  $q'''$  é o calor gerado por unidade de volume [ $W/m^3$ ],  $\rho$  é a massa específica [ $kg/m^3$ ] e  $c_p$  é o calor específico a pressão constante [ $J/kgK$ ].

Para o problema que está sendo resolvido são apresentadas as seguintes hipóteses simplificativas:

- Transferência de calor em regime permanente,  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ;
- Taxa de geração de calor por unidade de volume uniforme  $q'''$  constante;
- Problema bidimensional nas direções  $x$  e  $y$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$ ;
- Propriedades termofísicas constantes.

Assumindo tais hipóteses simplificativas, a equação da difusão de calor que será resolvida neste trabalho para a região de baixa condutividade  $k$  é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (4.4)$$

A equação (4.4) pode ser adimensionalizada usando os grupos adimensionais abaixo:

$$\theta = \frac{T-T_0}{q'''A/k} \quad \tilde{k}_p = \frac{k_p}{k} \quad (4.5)$$

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{L}, \tilde{H}, \tilde{L}_0, \tilde{D}_0, \tilde{L}_1, \tilde{D}_1 = \frac{x,y,L,H,L_0,D_0,L_1,D_1}{\sqrt{A}} \quad (4.6)$$

onde  $\theta$  é a temperatura adimensional e  $T_0$  é a temperatura do material de alta condutividade em contato com o ambiente. O símbolo “~” representa os comprimentos adimensionais.

A equação da difusão do calor (4.4) na sua forma adimensional, é mostrada na equação (4.7):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \quad (4.7)$$

De forma análoga, porém sem geração de calor, a equação da difusão do calor (4.3) para a região de alta condutividade térmica na sua forma adimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} = 0 \quad (4.8)$$

Dividindo-se a equação (4.1) pela área A, tem-se a forma adimensional:

$$1 = \tilde{H}\tilde{L} \quad (4.9)$$

onde  $\tilde{H}$  e  $\tilde{L}$  representam a forma adimensional dos comprimentos H [m] e L [m].

Utiliza-se o mesmo processo para a equação (4.2), divide-se pela área A e obtém-se a fração de área  $\phi$ , representada na equação (4.10):

$$\phi = \frac{A_p}{A} \quad (4.10)$$

onde  $\phi$  representa a fração de área preenchida pela forma “T”.

Reescrevendo a equação (4.10) na forma adimensional, tem-se:

$$\phi = 2\tilde{L}_1\tilde{D}_1 + \tilde{L}_0\tilde{D}_0 \quad (4.11)$$

onde  $\tilde{L}_1$ ,  $\tilde{D}_1$ ,  $\tilde{L}_0$  e  $\tilde{D}_0$  representam as formas adimensionais dos comprimentos  $L_1$  [m],  $D_1$  [m],  $L_0$  [m] e  $D_0$  [m].

A resistência térmica ou excesso de temperatura máximo adimensional,  $\theta_{max}$ , pode ser expresso de forma adimensional conforme a equação (4.12):

$$\theta_{max} = \frac{T_{max}-T_0}{q'''A/k} \quad (4.12)$$

onde  $T_{max}$  é a temperatura máxima do componente.

#### 4.1.1 Condições de Contorno

Determina-se a distribuição de temperatura do meio em questão a partir da resolução da equação do calor apropriada para cada superfície, ou seja, resolvem-se as equações (4.7) e (4.8), submetidas às condições de contorno mostradas na Figura 4.2.

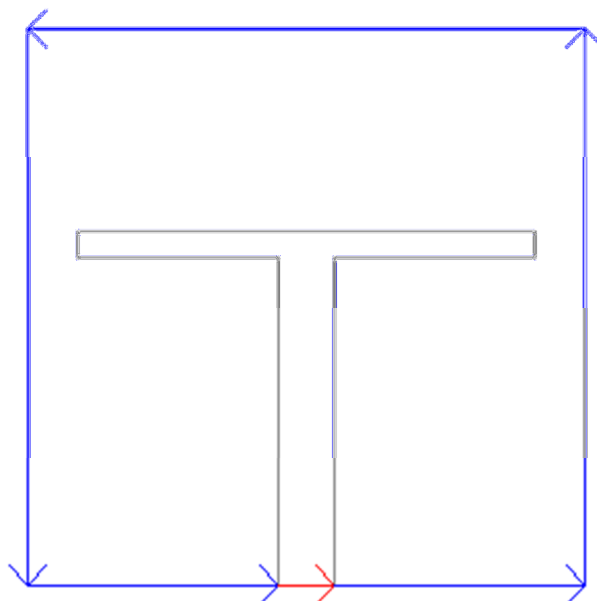


Figura 4.2. Representação das condições de contorno do problema.

As superfícies externas apresentam comportamento adiabático, representadas pelas linhas azuis na Figura 4.2. Então, para as superfícies exteriores isoladas tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{n}} = 0 \quad (4.13)$$

onde “n” é a componente normal às quatro superfícies isoladas.

Para a superfície em contato com o dissipador de calor, representada pela linha vermelha na Figura 4.2, a condição de contorno é dada por uma temperatura constante:

$$\theta_0 = 0 \quad (4.14)$$

## 4.2 Método Numérico

O método numérico foi elaborado para uma configuração na forma de T com valor de  $k_p$  constante em toda sua região. Esta configuração é representada genericamente na Figura 4.1, sendo necessárias para desenhá-la as dimensões  $L$ ,  $H$ ,  $D_0$ ,  $L_0$ ,  $D_1$ ,  $L_1$ .

Têm-se duas restrições: uma é dada pela equação (4.9) e a outra pela equação (4.11) e os quatro graus de liberdade foram definidos de forma adimensional como:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\tilde{D}_0$ .

A função definida pela equação (4.12) pode ser encontrada resolvendo-se as equações (4.7) e (4.8) para o campo de temperaturas para cada configuração da Figura 4.1, dependendo dos valores assumidos pelos graus de liberdade  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\tilde{D}_0$ , e calculando-se  $\theta_{max}$  para saber se o valor encontrado pode ser minimizado quando variada a configuração de T. Para tanto, as equações (4.7) e (4.8) foram resolvidas utilizando um código de elementos finitos, com base em elementos triangulares, desenvolvido no programa MATLAB, mais precisamente na ferramenta PDETOOL.

A malha adotada é não-uniforme em  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , variando de uma geometria para a posterior. O tamanho de malha apropriado foi determinado por refinamentos sucessivos com aumento do número de elementos de quatro vezes o tamanho da malha corrente para o tamanho de malha seguinte, até que o critério  $|(\theta_{max}^j - \theta_{max}^{j+1})/\theta_{max}^j| \leq 5 \times 10^{-5}$  estivesse satisfeito.

O  $\theta_{max}^j$  representa o excesso de temperatura máximo adimensional calculado utilizando o tamanho de malha corrente, e o  $\theta_{max}^{j+1}$  corresponde ao excesso de temperatura máximo adimensional usando a malha seguinte, onde o número de elementos foi aumentado em quatro vezes.

A seguir, na Tabela 4.1, é apresentado como foi alcançada a independência de malha, recuperação do limite contínuo.

Tabela 4.1 - Testes para encontrar os resultados numéricos independentes do número de elementos de malha com  $\phi = 0,1$ ,  $H/L = 1$ ,  $\tilde{D}_0 = 0,1$ ,  $D_1/D_0 = 0,5$ ,  $L_1/L_0 = 0,69$ .

Número de elementos	$\theta_{max}^j$	$ (\theta_{max}^j - \theta_{max}^{j+1})/\theta_{max}^j  \leq 5 \times 10^{-5}$
443	0,085679	3,27E-04
1772	0,085707	2,57E-04
7088	0,085729	1,40E-05
28352	0,085743	-

A validação do método numérico foi obtida a partir da comparação com o código desenvolvido com os resultados numéricos obtidos por Almogbel e Bejan, 1999. O domínio estudado por Almogbel e Bejan, 1999, no caso tem a forma de I (isto é, somente um caminho correspondente à área  $A_p$ , onde os ramos do T foram degenerados fazendo com que os graus de liberdade  $L_1/L_0$  e  $D_1/D_0$  tendessem a zero). Para que os resultados pudessem ser comparados com Almogbel e Bejan, 1999, a equação (4.7) foi substituída pela (4.15).

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{1-\phi} = 0 \quad (4.15)$$

A Tabela 4.2 mostra que os resultados concordaram dentro de 0,1%.

Tabela 4.2 - Comparação entre os resultados deste trabalho com o trabalho de Almogbel e Bejan, 1999, ( $H/L = 1$ ,  $L_1/L_0 \approx 0,01$ ,  $\tilde{D}_0 = 0,1082$ ,  $D_1/D_0 \approx 0,01$ ).

$\phi$	$\tilde{k}_p$	$(D_0/L_0)^1$	$(D_0/L_0)^2$	$\theta_{max,m}^1$	$\theta_{max,m}^2$
0,1	300	0,111	0,110	0,125	0,125

<sup>1</sup> Este trabalho

<sup>2</sup> Almogbel e Bejan, 1999

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A simulação consiste em determinar numericamente o campo de temperatura de diferentes configurações geométricas, semelhantes aquelas da Figura 4.1.

Como mostrado no modelo matemático, as equações (4.7) e (4.8), aplicadas as condições de contorno das equações (4.13) e (4.14) e respeitadas as restrições das equações (4.9) e (4.11), conduzem ao resultado. Também citado anteriormente, os quatro graus de liberdade foram definidos de forma adimensional como:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\tilde{D}_0$ . Para este trabalho assume-se  $H/L = 1$ , ou seja, considera-se sempre um corpo quadrado.

Inicialmente é investigado o comportamento da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade  $L_1/L_0$ , mantendo-se fixos os parâmetros  $\phi = 0,1$ ,  $\tilde{k}_p = 300$  e  $\tilde{D}_0 = 0,1$  e variando-se a razão  $D_1/D_0$ . Para cada uma destas configurações existe uma razão ótima  $(L_1/L_0)_o$  que corresponde à temperatura máxima mínima  $(\theta_{max})_m$ , onde os subscritos “o” e “m” significam ótimo e mínimo, respectivamente.

A Figura 5.1 mostra as curvas da temperatura máxima,  $\theta_{max}$ , em função da razão  $L_1/L_0$ , obtidas para as várias configurações a partir da variação da razão  $D_1/D_0$ .

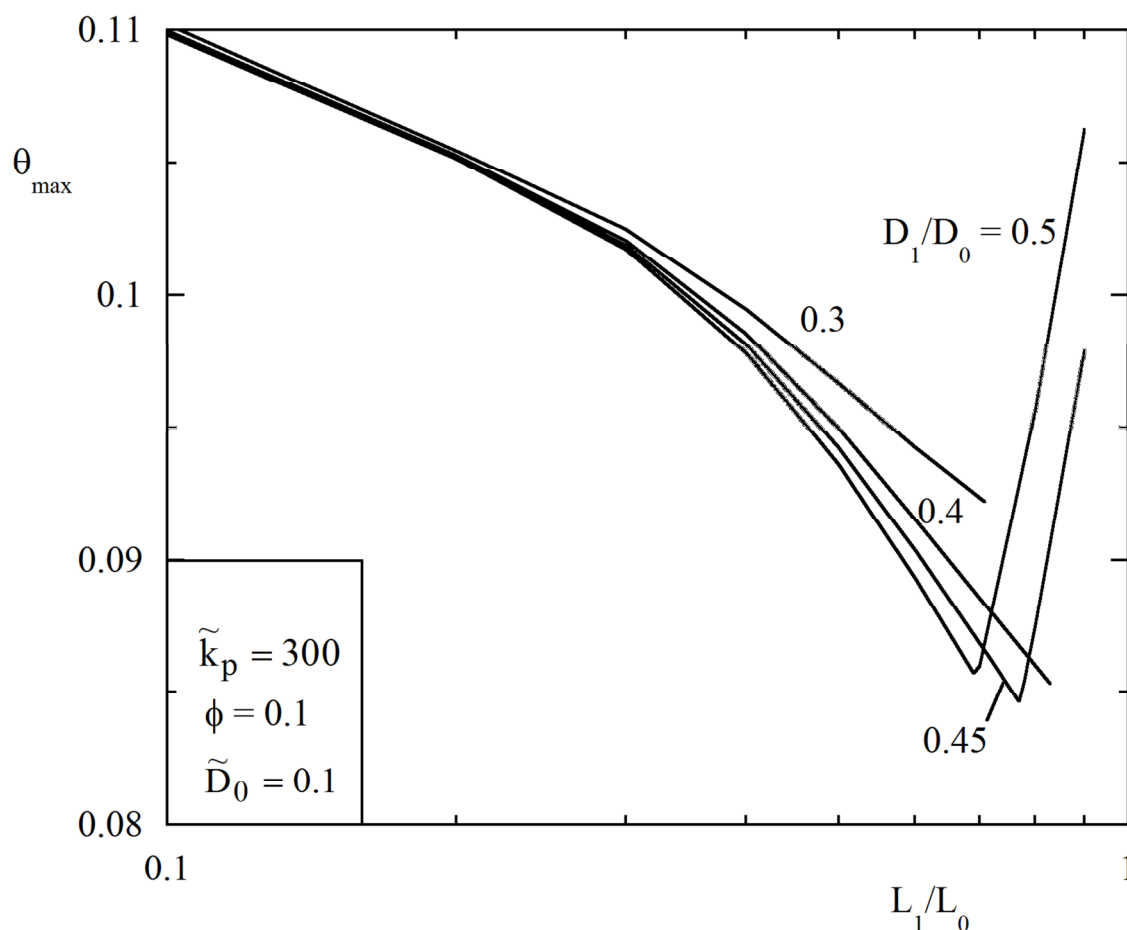


Figura 5.1 - Efeito da razão  $L_1/L_0$  no excesso máximo de temperatura,  $\theta_{max}$ , para cada razão  $D_1/D_0$ .

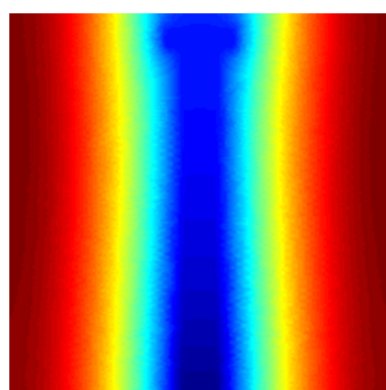
Para uma melhor visualização, os valores de  $\theta_{max}$  obtidos para diferentes valores de  $D_1/D_0$ , variando a razão  $L_1/L_0$  de 0,1 a 1, os quais foram utilizados para traçar o gráfico da Figura 5.1, são listados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores de  $L_1/L_0$  e  $\theta_{max}$  para diferentes valores de  $D_1/D_0$ , com  $\phi = 0,1$ ,  $\tilde{k}_p = 300$  e  $\tilde{D}_0 = 0,1$ .

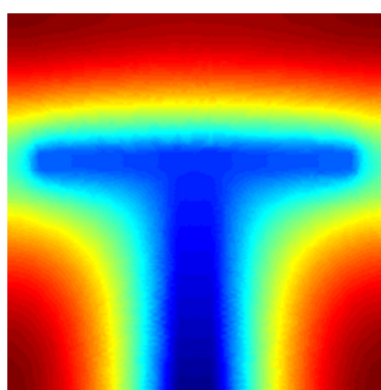
D1/D0 = 0,3		D1/D0 = 0,4		D1/D0 = 0,45		D1/D0 = 0,5	
L1/L0	$\theta_{max,m}$	L1/L0	$\theta_{max,m}$	L1/L0	$\theta_{max,m}$	L1/L0	$\theta_{max,m}$
0,10	0,110207	0,10	0,109989	0,10	0,109887	0,10	0,109831
0,20	0,10545	0,20	0,105268	0,20	0,105196	0,20	0,105142
0,30	0,102508	0,30	0,102074	0,30	0,101898	0,30	0,101744
0,40	0,099482	0,40	0,098542	0,40	0,098157	0,40	0,097813
0,50	0,096673	0,50	0,094947	0,50	0,094229	0,50	0,093585
0,60	0,094252	0,60	0,091559	0,60	0,090388	0,60	0,089336
0,70	0,092369	0,70	0,088552	0,70	0,084865	0,69	0,085729
0,71	0,092207	0,80	0,086012	0,77	0,084633	0,70	0,085994
0,80	-	0,83	0,085325	0,80	0,087463	0,80	0,095615
0,90	-	0,90	-	0,90	0,097908	0,90	0,106266

A partir dos pontos ótimos mostrados na Figura 5.1, ou seja, onde a razão  $L_1/L_0$  corresponde ao menor valor de  $\theta_{max}$  para cada valor de  $D_1/D_0$ , é possível traçar o gráfico com as curvas de  $(\theta_{max})_m$  e de  $(L_1/L_0)_o$  em função de  $D_1/D_0$ . Assim, o grau de liberdade  $D_1/D_0$  é otimizado pela primeira vez, como se mostra na Figura 5.3.

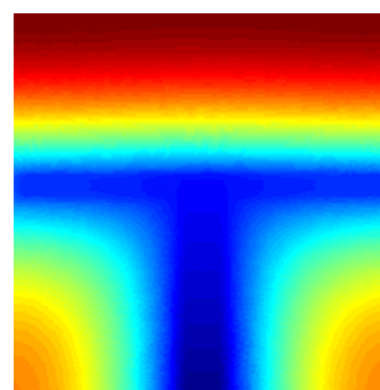
A Figura 5.2 mostra algumas formas encontradas na Figura 5.1 para o campo de temperaturas  $\theta$ .



$L_1/L_0 = 0,1$   
 $\theta_{max} = 0,109831$



$(L_1/L_0)_o \approx 0,69$   
 $(\theta_{max})_m = 0,085729$



$L_1/L_0 = 0,9$   
 $\theta_{max} = 0,106266$

Figura 5.2 – Representação gráfica de algumas geometrias encontradas na Figura 5.1, com  $D_1/D_0 = 0,5$ , para diferentes valores de  $L_1/L_0$ .

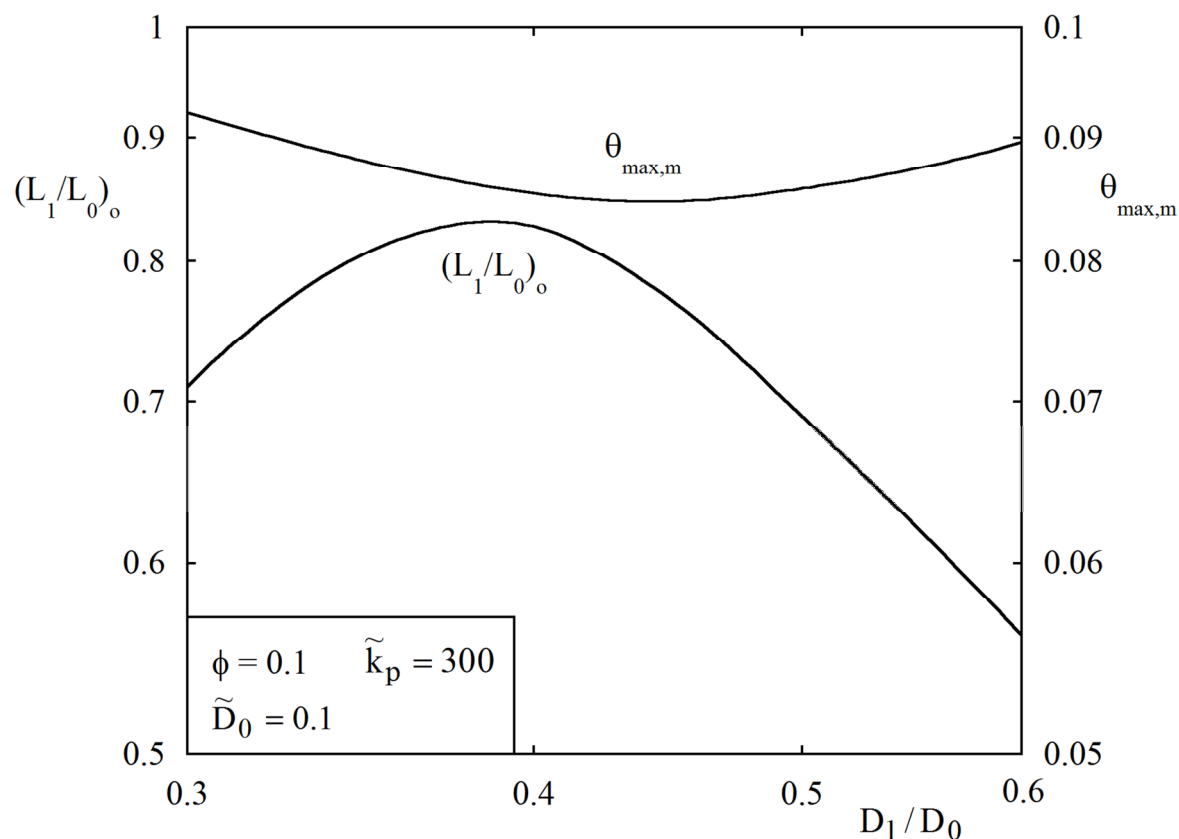


Figura 5.3 - Excesso de temperatura máxima mínima  $(\theta_{max})_m$  e a correspondente ótima razão  $(L_1/L_0)_o$  em função da razão  $D_1/D_0$ .

A Figura 5.3 mostra que o melhor desempenho dentre estas configurações ocorre quando a razão  $(D_1/D_0)_o \approx 0,45$ , onde o subscrito “o” indica que a razão  $D_1/D_0$  foi otimizada uma vez. Os valores correspondentes a esta razão ótima,  $(L_1/L_0)_{oo} \approx 0,77$  e  $(\theta_{max})_{mm} \approx 0,084633$ , recebem o subscrito “oo” e “mm” indicando que foram otimizados duas vezes. Nesta segunda otimização, observa-se a influência de  $D_1/D_0$  sobre os outros graus de liberdade. Enquanto o  $(\theta_{max})_m$  sofre uma pequena variação para demais valores,  $(L_1/L_0)_o$  tem uma grande variação. A Figura 5.4 mostra algumas geometrias encontradas na Figura 5.3.

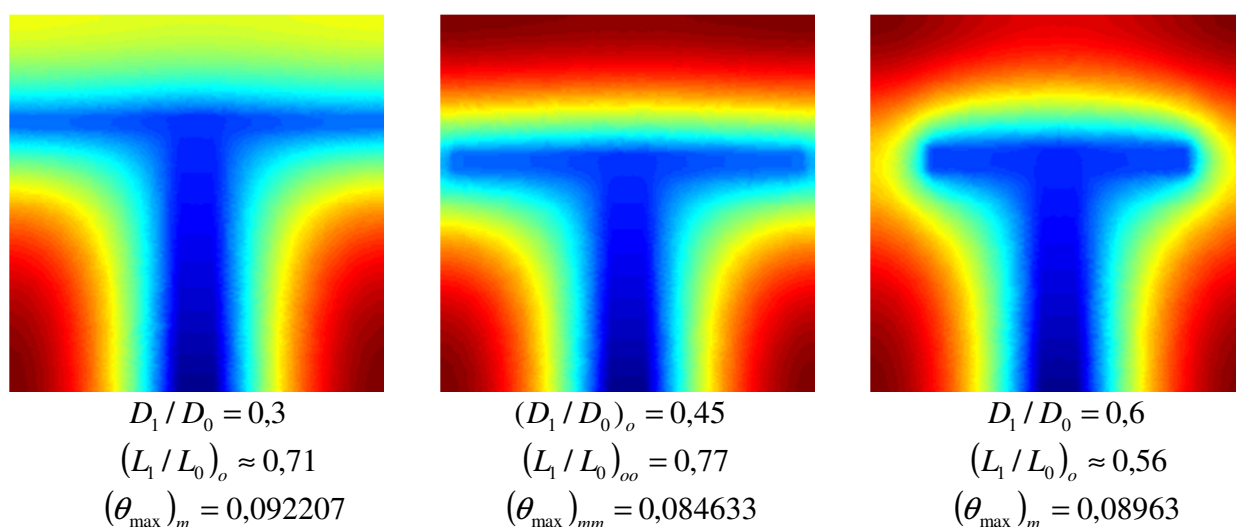


Figura 5.4 – Geometrias ótimas obtidas na Figura 5.3.

Repetindo todo o processo mostrado até agora para diferentes valores do grau de liberdade  $\tilde{D}_0$ , ou seja, mantendo-se fixos nesta análise somente  $\phi = 0,1$  e  $\tilde{k}_p = 300$ , encontram-se valores ótimos para a razão  $(D_1/D_0)_o$  e valores otimizados duas vezes para a razão  $(L_1/L_0)_{oo}$  correspondentes às respectivas temperaturas máximas mínimas  $(\theta_{max})_{mm}$  para cada configuração. O subscrito “mm” significa duas vezes minimizada. A tabela 5.2 mostra estes valores.

Tabela 5.2 – Melhores configurações para diferentes valores de  $\tilde{D}_0$ .

$\tilde{D}_0$	$(\theta_{max})_{mm}$	$(L_1/L_0)_{oo}$	$(D_1/D_0)_o$
0,10	0,084633	0,77	0,45
0,11	0,083738	0,74	0,35
0,12	0,083042	0,74	0,25
0,13	0,082320	0,79	0,15
0,15	0,094046	0,74	0,05
0,20	0,161267	0,98	0,05
0,30	0,265510	1,00	0,05

Assim, tem-se todos os valores para que seja plotado o gráfico com os melhores resultados obtidos para cada configuração, como se mostra na Figura 5.5.

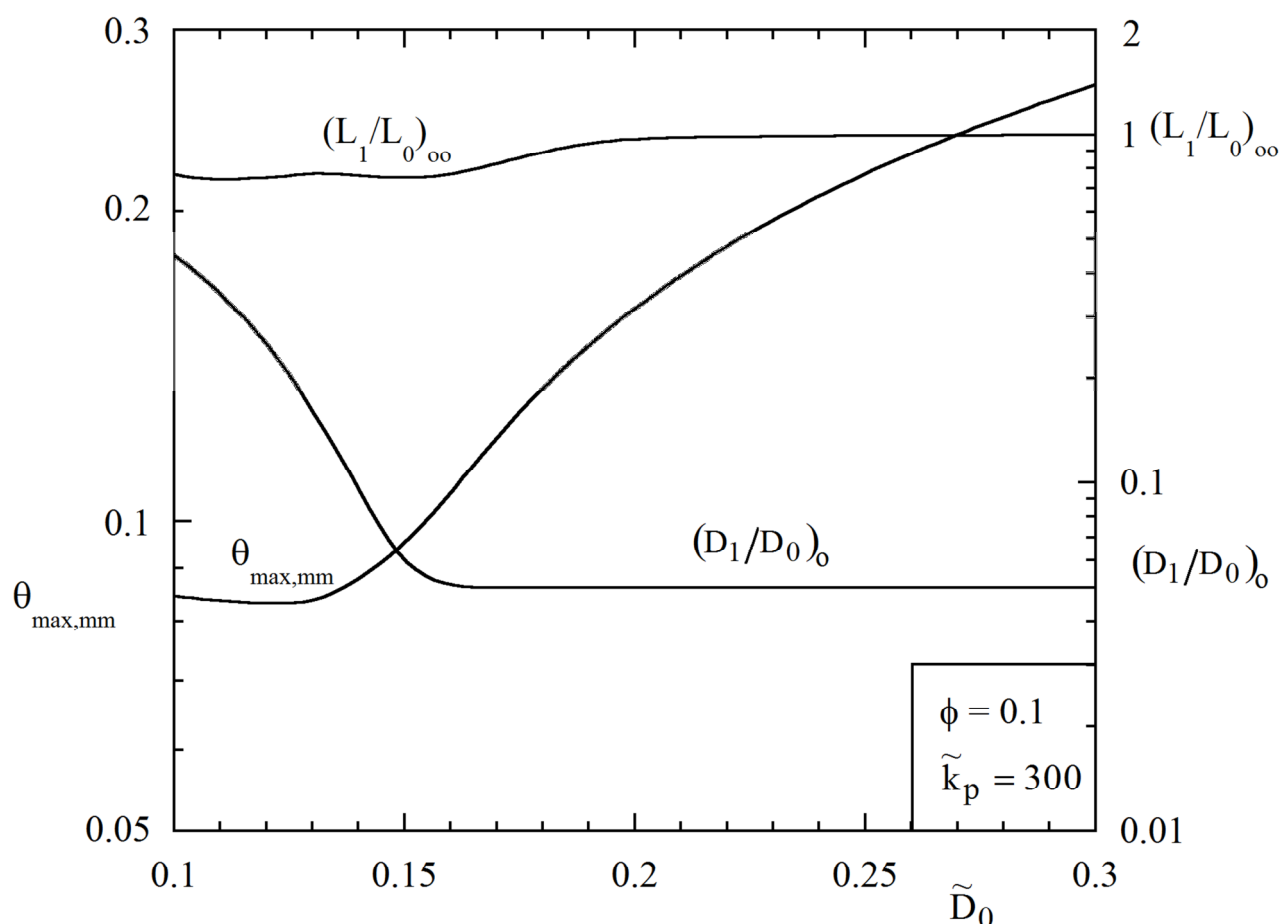


Figura 5.5 - Efeito do grau de liberdade  $\tilde{D}_0$  em  $(\theta_{max})_{mm}$  e suas respectivas geometrias.



A Figura 5.5 fornece uma última otimização, pode-se observar que o melhor desempenho foi obtido para  $(\tilde{D}_0)_o \approx 0,13$ , o qual foi otimizado uma vez, atingindo um resultado de temperatura máxima mínima de  $(\theta_{max})_{mmm} \approx 0,082320$ , este otimizado três vezes. Os outros graus de liberdade correspondentes a esta configuração ótima são dados pela razão  $(D_1/D_0)_{oo} \approx 0,15$ , otimizada duas vezes e para a razão  $(L_1/L_0)_{ooo} \approx 0,79$ , otimizada três vezes. Também é possível concluir que para valores de  $\tilde{D}_0$  superiores ao valor ótimo há uma piora significativa de  $(\theta_{max})_{mm}$ , chegando a valores próximos de 0,3. Em contrapartida, a influência exercida pelo grau de liberdade  $\tilde{D}_0$  em  $(D_1/D_0)_o$  não é tão significativa, tendo uma queda logo após o valor ótimo e mantendo-se fixa em  $(D_1/D_0)_o = 0,05$  para o restante do domínio analisado. Por fim, observando-se a curva do grau de liberdade  $(L_1/L_0)_{oo}$ , percebe-se que a variação em relação ao grau de liberdade  $\tilde{D}_0$  é mínima. A Figura 5.6 mostra algumas geometrias encontradas na Figura 5.5.

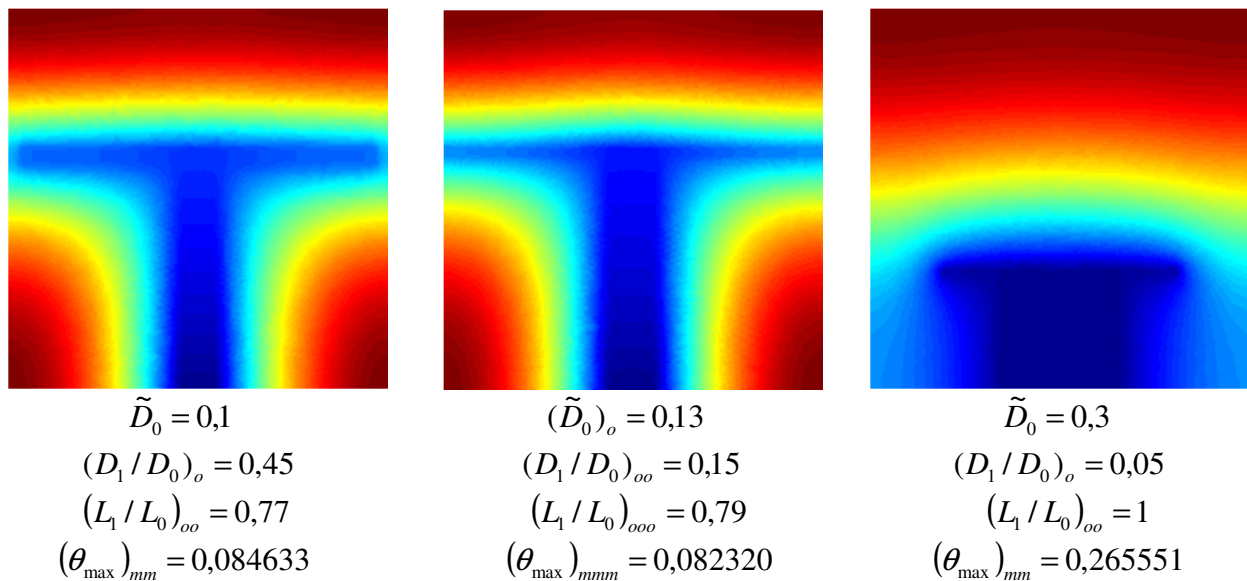


Figura 5.6 – Melhores configurações para os valores de  $\tilde{D}_0 = 0,1$ ,  $\tilde{D}_0 = 0,13$  e  $\tilde{D}_0 = 0,3$ .

## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho propôs a minimização da resistência térmica do sistema com geração de calor, com volume fixo e baixa condutividade térmica, por meio da utilização de materiais de alta condutividade térmica na forma de um T, também com volume fixo. Esta forma é inserida dentro do volume gerador de calor e mantida em uma temperatura constante através de uma das suas bordas. As superfícies exteriores do corpo onde há geração de calor foram perfeitamente isoladas. A proposta é descobrir a configuração que maximiza a transferência de calor através da variação dos comprimentos que formam os retângulos da base e superior do T.

Foram analisadas inúmeras possibilidades geométricas possíveis, respeitando a forma em T e o domínio prescrito, fixando o grau de liberdade  $H/L = 1$  (placa quadrada) e respeitando as condições de contorno. A geometria que resultou no melhor desempenho, otimizada três vezes, foi a configuração que apresentou o menor valor para a função objetivo que é o excesso de temperatura máxima. O formato resultante foi aquele que melhor distribuiu os pontos quentes, como apresentado na imagem central da Figura 5.6, com valores de  $\phi = 0,1$ ,  $\tilde{k}_p = 300$ ,  $(D_0)_o = 0,13$ ,  $(D_1/D_0)_{oo} = 0,15$ ,  $(L_1/L_0)_{ooo} \approx 0,79$  e  $(\theta_{max})_{mmm} \approx 0,082320$ . Percebe-se também, analisando a Figura 5.5, que  $(\theta_{max})_{mm}$  sofre grande influência do grau de liberdade  $\tilde{D}_0$ , enquanto os outros graus de liberdade, quando otimizados, se mantêm praticamente constantes em todo domínio.

## 7. PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Como trabalhos futuros são feitas as seguintes sugestões:  
Utilizar materiais de condutividade térmica diferentes para a base e a parte superior do T;  
Estudar a influência do grau de liberdade H/L.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almogbel, M.; Bejan, A. Conduction trees with spacings at the tips, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, p. 3739-3756, 1999.

Bejan, A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume, ***International Journal of Heat and Mass Transfer***, v. 40, p. 799–816, 1996.

Bejan, A. Shape and structure from engineering to nature, **Cambridge University Press**, Cambridge, UK, 2000.

Bejan, A.; Lorente, S. Design with Constructal Theory, Wiley, Hoboken, 2008.

Horbach, C. S. ; dos Santos, E. D. ; Isoldi, L.A. ; Rocha, L. A. O. , Constructal design of Y-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body. *Diffusion and Defect Data, Solid State Data. Part A, Defect and Diffusion Forum*, 2013 (aceito para publicação).

Ledezma, G. A.; Bejan, A.; Errera, M. R. Constructal tree networks for heat transfer, **Department of Mechanical Engineering and Material Science**, Box 90300, Duke University, Durham, North Caroline, 27708-0300, 1997.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Rocha, L. A. O. Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body, ***International Journal of Heat and Mass Transfer***, v. 58, p. 513-520, 2013a.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Rocha, L. A. O. Constructal design of non-uniforme X-shaped conductive pathways for cooling, ***International Journal of Thermal Sciences***, v. 71, p. 140, 2013b.

## APÊNDICE I

## Códigos em Matlab:

## (Código secundário)

```
clear
    for L1dL0 = 0.1:0.1:1
        L1dL0
        Tuniforme(L1dL0)
    end
```

## (Código principal)

```
function Tuniforme(L1dL0)

fi = 0.1;
HdL = 1;
D1dD0 = 0.5;
%L1dL0 = 0.5;
D0 = 0.1;
L = (1/HdL)^0.5;
H = 1/L;
Ld2 = L/2;
L0 = fi / (D0*(1+2*L1dL0*D1dD0));
L1 = L0*L1dL0;
D1 = D0*D1dD0;
D0d2 = D0/2;

[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',9);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[874.40000000000009 582.82666666666671
485.68888888888893]);
set(ax,'XLimMode','auto');
set(ax,'YLim',[-0.10000000000000001 2]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');

% Geometry description:
pdepoly([-Ld2,...
    Ld2,...
    Ld2,...
    -Ld2,...
],...
[ 0,...
    0,...
    H,...
    H,...
],...
'P1');
pdepoly([-D0d2,...
    D0d2,...
    D0d2,...
    L1,...
    L1,...
    -L1,...
```

```

-L1, ...
-D0d2, ...
], ...
[ 0, ...
 0, ...
 L0, ...
 L0, ...
 L0+D1, ...
 L0+D1, ...
 L0, ...
 L0, ...
], ...
'P2');
set(findobj(get(pde_fig, 'Children'), 'Tag', 'PDEEval'), 'String', 'P1+P2')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode', 0)
pdesetbd(11, ...
'neu', ...
1, ...
'0', ...
'0')
pdesetbd(10, ...
'dir', ...
1, ...
'1', ...
'0')
pdesetbd(9, ...
'neu', ...
1, ...
'0', ...
'0')
pdesetbd(3, ...
'neu', ...
1, ...
'0', ...
'0')
pdesetbd(2, ...
'neu', ...
1, ...
'0', ...
'0')
pdesetbd(1, ...
'neu', ...
1, ...
'0', ...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig, 'Hgrad', 1.3);
setappdata(pde_fig, 'refinemethod', 'regular');
setappdata(pde_fig, 'jiggle', char('on', 'mean', ''));
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')
pdetool('refine')

% PDE coefficients:

pdeseteq(1, ...

```

```

'1.0!300.0',... %trocar o kp nesta linha
'0!0',...
'(1.0)+(0).*(0.0)!(0)+(0).*(0.0)',...
'(1.0).*(1.0)!(1.0).*(1.0)',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig, 'currparam', ...
['1.0!1.0  '];...
'1.0!1.0  '];...
'1.0!300.0';... %trocar o kp quando for o caso
'1.0!0  '];...
'0!0  '];...
'0.0!0.0  '])

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig, 'solveparam', ...
str2mat('0', '8448', '10', 'pdeadworst', ...
'0.5', 'longest', '0', '1E-4', '', 'fixed', 'Inf'))

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig, 'plotflags', [1 1 1 1 1 1 7 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1]);
setappdata(pde_fig, 'colstring', '');
setappdata(pde_fig, 'arrowstring', '');
setappdata(pde_fig, 'deformstring', '');
setappdata(pde_fig, 'heightstring', '');

% Solve PDE:
pdetool('solve')
T=get(findobj(get(pde_fig, 'Children'), 'flat', 'Tag', 'PDEPlotMenu'), ...
'UserData');
y = max(T)
%closereq

```