

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CONSTRUCTAL DESIGN DE MATERIAIS DE ALTA CONDUTIVIDADE EM FORMA  
DE “Y” PARA REFRIGERAÇÃO DE CORPO GERADOR DE CALOR

por

Cristina dos Santos Horbach

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, agosto de 2013.

CONSTRUCTAL DESIGN DE MATERIAIS DE ALTA CONDUTIVIDADE EM FORMA  
DE “Y” PARA REFRIGERAÇÃO DE CORPO GERADOR DE CALOR

por

Cristina dos Santos Horbach

Engenheira Mecânica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de:

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Energia

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Aprovada por:

Profa. Dra. Adriane Prisco Petry, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos, PPGMC/FURG

Prof. Dr. Paulo Smith Schneider, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, agosto de 2013.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Noemi e Máximo, pelos exemplos de conduta e conselhos.

Ao meu noivo, Harold, pelo apoio e companheirismo.

Aos meus amigos, Emily, Jean e Rafaela pela parceria e pela amizade sincera.

Aos colegas de mestrado, por toda a informação e experiência trocada.

Ao meu orientador, Prof. Luiz Alberto de Oliveira Rocha, pela confiança e por todo apoio na construção deste trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, aos professores, funcionários e a CAPES pelo suporte financeiro.

## RESUMO

O presente trabalho utiliza o método Constructal Design para desenvolver o estudo numérico da configuração de materiais de alta condutividade térmica em forma de “Y” que minimiza a resistência ao fluxo de calor, quando áreas ocupadas pelos materiais de alta e baixa condutividades são mantidas constantes. Para a solução numérica da equação diferencial da difusão do calor e suas respectivas condições de contorno, foi utilizado o software MATLAB®, mais especificamente a ferramenta PDETOOL, *Partial Differential Equations Tool*. O objetivo deste trabalho é a minimização da resistência térmica do sistema gerador de calor com baixa condutividade térmica com a utilização de vias em formato de Y com material de alta condutividade térmica e volume constante, sendo variáveis os comprimentos e espessuras do material dos ramos simples e bifurcados. Todas as possibilidades geométricas foram avaliadas e a geometria ótima foi aquela que conduziu a menor resistência térmica. Duas condições são apresentadas, a primeira tem os ramos e a base da geometria “Y” com igual condutividade térmica. Os resultados para esta configuração mostram que existem valores específicos para os graus de liberdade que minimizam a resistência térmica. Nesse caso, os ramos se degeneraram e a configuração ótima tem a forma de um “V”. A segunda configuração apresenta combinações de condutividade térmica diferentes, para os ramos e a bases. Para estes casos obteve-se um valor otimizado próximo de 1 para a razão entre os comprimentos dos ramos simples e bifurcados, indicando que a configuração otimizada tem realmente a forma de um “Y” o que demonstra a dependência entre a geometria e as condições impostas pelo meio. Embora o design inicial do Y possa assumir diversas configurações, quando comparado o primeiro design com o design final, no caso do Y com iguais condutividades térmicas se conseguiu uma melhora superior a 28% e no caso do Y com condutividades diferentes mais de 30 %. Finalmente, este trabalho mostra que a geometria otimizada é aquela que melhor distribui as imperfeições, isto é, os pontos quentes (pontos de temperatura máxima), o que está de acordo com o princípio da ótima distribuição das imperfeições.

Palavras-chave: Otimização geométrica; transferência de calor; MATLAB®; teoria constructal.

## ABSTRACT

The present work used the method Constructal Design to develop numerical analyses of pathways of high thermal conductivity in "Y" shape which minimizes the thermal resistance when areas occupied by the materials of high and low conductivities are kept constant. For the numerical solution of the differential equations of heat diffusion and their boundary conditions, we used the MATLAB ® software, specifically the PDETOOL tool. The aim was to minimize the thermal resistance of the heat generator system with low thermal conductivity with the use of Y-shaped pathways with high thermal conductivity and constant volume, with variable lengths and thicknesses of material from stem and forked branches. All geometric possibilities were evaluated and the optimal geometry was that which resulted in lower thermal resistance.

Two conditions were studied. In the first one the stem and branches of the "Y" have equal thermal conductivity. The results for this configuration show that there are specific values for the degrees of freedom to minimize the thermal resistance. In this case, the branches have degenerated and the optimum configuration has the shape of a "V". The second configuration offers different combinations of thermal conductivity, for branches and bases.

For these cases we obtained an optimized value close to 1 for the ratio between the lengths of stem and bifurcated branches, indicating that the optimized configuration actually has the shape of a "Y" which shows the dependency of geometry and condition imposed by the environment. Although the initial design of Y can take various configurations, when compared the first design to the final design, in the case of Y with equal thermal conductivity it this improvement was achieved an improvement greater than 28% and in the case of Y with different conductivities over 30%. Finally, this study showed that the optimized geometry is the one that better distributes imperfections, this is, hot spots (points of maximum temperature), which is in accordance with the principle of the optimal distribution of imperfections.

Keywords: constructal design; high conductivity pathways; heat conduction; constructal theory.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos.....	5
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivos Gerais.....</b>	<b>5</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos .....</b>	<b>6</b>
1.2	Delineamento do Trabalho .....	6
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>8</b>
2.1	Conceitos Fundamentais sobre Teoria Constructal .....	8
2.2	Estado da arte em problemas de condução de calor .....	10
<b>3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>31</b>
3.1	Condições de contorno .....	36
<b>4</b>	<b>MÉTODO NUMÉRICO .....</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>41</b>
5.1	Geometria com condutividades iguais.....	42
5.2	Geometria com condutividades diferentes.....	54
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>66</b>
<b>7</b>	<b>PROPOSTAS DE CONTINUIDADE .....</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>70</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>78</b>
	<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>82</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Esquema de problemas de design de condução de calor: (a) Esquema de projeto de canal de alta condução sob o projeto independente de cargas [Gersborg-Hansen et al., 2006 e Gao et al.,2008]. (b) esquema de layout para projeto de MCM. ....	4
Figura 2.1 – Teoria Constructal prossegue no tempo contra o sentido do empirismo ou sem “reproduzir” a natureza [Bejan, 2000] [Bejan, 2008].....	9
Figura 2.2 – Domínio da geometria otimizada em Ledezma, 1997. ....	11
Figura 2.3 – Aleta em forma de Y otimizada por Lorenzini e Rocha, 2006. ....	12
Figura 2.4 – Aleta em forma de T-Y otimizada por Lorenzini e Rocha, 2009a.....	13
Figura 2.5 – Domínio otimizado em Lorenzini e Moretti, 2007b. ....	14
Figura 2.6 – Domínio de aleta T-Y com extensões otimizada por Lorenzini et al., 2011.....	15
Figura 2.7 – Cavidade em forma de retângulo otimizada por Rocha et al., 2005. ....	16
Figura 2.8 – Cavidade em forma de Y otimizada por Lorenzini et al., 2011. ....	17
Figura 2.9 – Domínio cavidade em forma de H otimizado em Biserni et al., 2007.....	18
Figura 2.10 – Domínios comparados em Rocha et al., 2004.....	19
Figura 2.11 – Domínio de cavidade em forma T-Y otimizado por Lorenzini e Rocha, 2009b. ....	19
Figura 2.12 – Domínios de cavidade em forma T-Y, otimizados por Garcia, 2011: (a) Design 1 e (b) Design 2. ....	20
Figura 2.13 – Distribuição de ramos não uniformes otimizados por Almogbel e Bejan, 2001. ....	22
Figura 2.14 – Fluxo de calor com (a) geometria otimizada em forma de T, (b) árvore otimizada, Bejan, 2001. ....	23
Figura 2.15 – O volume total e o domínio para estrutura tubulares estudadas com modelo “volume ponto” (a) [Rocha et al., 2003] e “disco centro” (b) [Lorente et al., 2003]. ....	24
Figura 2.16 – Fluxo do fluido de entrada (azul) e fluxo de saída (vermelho). Otimização progressiva inicial (a), media (b), final (c), [Bejan e Errera, 2000]. ....	25
Figura 2.17. Domínio otimizado em Wu et al., 2006. (a) primeira ordem da otimização, (b) segunda ordem da otimização e (c) terceira ordem da otimização.....	26
Figura 2.18. Volume tridimensional com formato externo variável estudado por Neagu et al., 1999. ....	27

Figura 2.19. Elemento triangular estudado em Ghodoossi e Egrican, 2004. ....	27
Figura 2.20. Ramo de alta condutividade distribuído em área de formato arbitrário com geração de calor, Eslami e Jafarpur, 2012. ....	28
Figura 2.21. Domínio da geometria otimizada em Lorenzini et al., 2013. ....	29
Figura 3.1. Detalhes das áreas do domínio com diferentes valores de condutividade térmica e principais dimensões para o corpo altamente condutor a ser analisado. ....	31
Figura 3.2. Representação das condições de contorno do problema. ....	36
Figura 4.1. Representação gráfica do número de elementos triangulares de malha. ....	38
Figura 5.1. Esquema do corpo de baixa condutividade com geração de calor e com geometria em forma de Y com grande condutividade térmica. ....	41
Figura 5.2. Detalhes das áreas do domínio quando o corpo altamente condutor apresenta igual condutividade térmica. ....	42
Figura 5.3. Efeito da razão $L_1/L_0$ no excesso máximo de temperatura $\theta_{\max}$ . ....	43
Figura 5.4. Excesso de temperatura máxima $(\theta_{\max})_m$ e a correspondente ótima razão $(L_1/L_0)_o$ em função do ângulo $\alpha$ . ....	44
Figura 5.5. Geometrias ótimas para diferentes valores do ângulo $\alpha$ . ....	45
Figura 5.6. Representação da variação da resistência térmica otimizada, de $(L_1/L_0)_o$ otimizado e do ângulo $\alpha$ otimizado em função da fração de área $\phi$ . ....	46
Figura 5.7. Representação gráfica das melhores configurações encontradas na Figura 5.6 para diferentes valores da fração de área $\phi$ . ....	47
Figura 5.8. Variação da resistência térmica duas vezes otimizada, do parâmetro $(L_1/L_0)_{oo}$ otimizado e do ângulo $\alpha_o$ otimizado em função da condutividade térmica $\tilde{k}_p$ . ....	48
Figura 5.9. Representação gráfica das melhores configurações encontradas na Figura 5.8 para frações de área $\phi = 0,1$ . ....	49
Figura 5.10. Otimização do grau de liberdade $D_1/D_0$ . ....	50
Figura 5.11. Geometrias ótimas obtidas na Figura 5.10. ....	51
Figura 5.12. Efeito do grau de liberdade $\tilde{D}_0$ em $(\theta_{\max})_{mmm}$ e suas respectivas geometrias. ....	52
Figura 5.13. Melhores configurações para valores de $\tilde{D}_0 = 0,1$ , $(\tilde{D}_0)_o = 0,14$ e $\tilde{D}_0 = 0,5$ . ....	53

Figura 5.14. Comparação da geometria em Y estudada neste trabalho com as geometrias em I, estudada por Almogbel e Bejan, 1999, e em X, estudada por Lorenzini et al, 2013, quando a condutividade térmica $\tilde{k}_p = 100$ e $\phi = 0,1$ .....	53
Figura 5.15. Comportamento da resistência térmica em função do parâmetro $L_1/L_0$ para diferentes pares de condutividade térmica.....	55
Figura 5.16. Comportamento da resistência térmica em função do parâmetro $\phi_0$ considerando diferentes pares de condutividade térmica. ....	56
Figura 5.17. Comportamento da resistência térmica e do parâmetro $L_1/L_0$ uma vez otimizados em função do ângulo $\alpha$ . ....	57
Figura 5.18. Melhor geometria encontrada na figura 5.17 para $(L_1/L_0)_{oo} = 1,05$ , $\alpha_o = 51,4^\circ$ , $D_1/D_0 = 0,5$ e $\theta_{max,mm} = 0,1036$ . ....	58
Figura 5.19. Comportamento da resistência térmica otimizada em função do ângulo $\alpha$ para diferentes combinações das frações de área $\phi_0$ e $\phi_1$ quando $\tilde{k}_{p0} = 100$ e $\tilde{k}_{p1} = 50$ .....	59
Figura 5.20. Razão $(L_1/L_0)_{oo}$ correspondente aos valores da Figura 5.19 em função do ângulo $\alpha$ para diferentes combinações das frações de área $\phi_0$ e $\phi_1$ . ....	60
Figura 5.21. Representação de algumas configurações encontradas na Figura 5.19 e 5.19....	61
Figura 5.22. Comportamento do parâmetro $(L_1/L_0)_{oo}$ em função do ângulo $\alpha$ para diferentes combinações das frações de área $\phi_0$ e $\phi_1$ quando $\tilde{k}_{p0} = 20$ e $\tilde{k}_{p1} = 10$ . ....	62
Figura 5.23. Comportamento da resistência térmica otimizada em função do ângulo $\alpha$ para diferentes combinações das frações de área $\phi_0$ e $\phi_1$ quando $\tilde{k}_{p0} = 20$ e $\tilde{k}_{p1} = 10$ .....	63
Figura 5.24. Comportamento da resistência térmica duas vezes otimizada em função do parâmetro $D_1/D_0$ diferentes valores de condutividade, frações de área e ângulo $\alpha$ , conforme as legendas representadas no gráfico.....	64
Figura 5.25. Representação de algumas configurações encontradas na Figura 5.24.....	65

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1. Testes para encontrar os resultados numéricos independentes do número de elementos de malha com $\phi_0 = \phi_1 = 0,05$ , $L_1/L_0 = 1,05$ , $D_1/D_0 = 0,5$ , $\tilde{k}_{p0} = \tilde{k}_{p1} = 100$ , $\alpha = 55^\circ$ .....	40
Tabela 4.2. Comparação entre os resultados deste trabalho com o trabalho de Kuddusi e Denton, 2007, ( $H/L = 1$ , $L_1/L_0 \approx 0,01$ , $\tilde{D}_0 = 0,1082$ $D_1/D_0 \approx 0,01$ , $\alpha \approx 0,1$ ).....	41

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ESO	Otimização Estrutural Evolucionária
MCM	Módulos de Múltiplos Chips
PDETOOL	<i>Partial Differential Equations Tool</i>
PROMECA	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Letras Romanas*

A	Área, m <sup>2</sup>
D	Espessura, m
H	Altura, m
k	Condutividade térmica, W/mK
L	Largura, m
$\dot{q}$	Taxa de geração de energia, W
$q'''$	Taxa de geração volumétrica de calor, W m <sup>-3</sup>
Q	Taxa de transferência de calor, W
T	Temperatura, K
W	Profundidade, m
x, y	Coordenadas espaciais, m

### *Símbolos Gregos*

$\phi$	Fração de área
$\theta$	Temperatura adimensional, $\frac{T - T_0}{q''' A / k}$
A	Ângulo entre o ramo superior da configuração Y e o eixo x
$\beta$	Ângulo auxiliar definido pela eq. (3.6)

### *Subscritos*

max	Máximo
m	Uma vez minimizado
mm	Duas vezes minimizado
mmm	Três vezes minimizado
mmmm	Quatro vezes minimizado

o	Uma vez otimizado
oo	Duas vezes otimizado
ooo	Três vezes otimizado
oooo	Quatro vezes otimizado
p	Referente ao material de alta condutividade térmica
0	Referente às variáveis do ramo simples
1	Referente aos ramos do material inserido

*Sobrescrito*

(~)	Variáveis adimensionais
-----	-------------------------

# 1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento acelerado da tecnologia e da indústria moderna, a importância em aperfeiçoar as técnicas de transferência de calor tornou-se mais notável do que em qualquer momento. As aplicações das tecnologias avançadas e das respectivas pesquisas sobre transferência de calor se expandiram dos campos tradicionais da indústria como os setores de engenharia química, mecânica, de energia e outras, para os novos campos da indústria, tais como tecnologia eletrônica, espacial e biomecânica. Assim os problemas de transferência de calor com condições convencionais para aqueles setores aparecem atualmente como problemas com condições extremas, alta densidade de fluxo de calor, micro e nano-escala, micro gravidade, entre tantas outras. Especificamente no campo da tecnologia dos eletrônicos, a densidade de fluxo de calor de chips aumentou muito devido à miniaturização e até mesmo à frequência e intensidade de trabalho dos mesmos. O desempenho global do sistema é significativamente afetado com a refrigeração dos dispositivos eletrônicos, assim como pela própria segurança do sistema. Os estudos no campo de resfriamento de dispositivos eletrônicos tornou-se a tecnologia essencial na evolução de miniaturizados de alto desempenho.

O progresso em direção a escalas menores em eletrônica faz o resfriamento dos circuitos tornar-se uma questão importante. O método convencional de resfriamento por convecção, muitas vezes utilizado para controlar a temperatura de um sistema, torna-se impraticável porque os canais de transferência de calor ocupam muito espaço. Por isso, é necessário construir estruturas de condução de calor com materiais de elevada condutividade, assim o calor pode ser trocado com o meio ambiente externo de forma automática e rápida [Bejan, 1996a e Bejan, 2000].

Bejan, 1996a, utiliza o conceito de "volume-para-ponto", ou seja, entregar eficientemente o calor do espaço aquecido (volume) para um determinado local da superfície do dispositivo (ponto), por meio da condução de calor. A prática consiste em preencher com uma pequena quantidade de material de condutividade térmica elevada, para formar canais, a fim de alcançar a redução da resistência térmica, bem como melhorar refrigeração. Este método realiza otimizações baseadas no modelo "volume ponto". A sua ideia básica é a de assumir que o volume do material de condutividade térmica elevada, usado para encher a

montagem, é fixo e um elemento retangular é, em primeiro lugar, otimizado para obter a sua construção ideal, tendo resistência térmica mínima como objetivo da otimização. Em seguida, os elementos são montados para receber o conjunto de primeira ordem com a forma e distribuição do material de condutividade térmica elevada. O trabalho pode ser continuado até que o conjunto mais avançado pode cobrir todo o volume dado após uma série de montagens e otimizações. O resultado da otimização constructal é que canais com condutividade térmica elevada são formados gerando uma estrutura que não é pressuposta, mas decorrente da minimização da resistência térmica. Este mesmo problema foi discutido por Ghodoossi e Egrican, 2003, e uma solução exata apontou uma diferença de até 25% ao comparar esta solução com a solução aproximada obtida por Bejan, 1996a. Wu et al., 2007a, analisaram essa diferença, mostrando que ela se devia ao equivalente dos coeficientes de condutividade térmica utilizado na solução aproximada de Bejan, 1996a. Neste trabalho foi ainda encontrado o mesmo resultado de Ghodoossi e Egrican, 2003, ao ser utilizado o valor correto para a condutividade térmica. Em Wu et al., 2007b, um valor ainda menor para a resistência térmica foi encontrado propondo ao problema uma distribuição do canal de alta condutividade, em modelo de ramos distribuídos ao longo do substrato com geração de calor.

Dan e Bejan, 1998 estudaram o problema da condução de calor relacionado com dois materiais em uma montagem. Os resultados confirmaram as vantagens da estrutura em forma de árvore. Eles concluíram que o tempo para arrefecimento por condução de um volume pode ser minimizado fazendo alterações apropriadas na forma exterior do volume, de modo que o tempo de arrefecimento seja mínimo e que seja distribuída otimamente uma quantidade finita de material de alta condutividade através do volume, a fim de facilitar a retirada de calor pelo dissipador.

Um problema-chave é a forma de conceber as estruturas com uma racional distribuição de materiais de alta condutividade, o que beneficia não somente o controle da temperatura, mas pode também reduzir os custos do material usado assim como nos processos de fabricação e ainda trazer a possibilidade de outras miniaturizações [Zhang et al., 2011].

Estudos para projetar estrutura de condução de calor ideal têm atraído muita atenção e muitas conquistas foram obtidas [Shengbin et al., 2007 e Zhang et al., 2011], incluindo modelos matemáticos e os métodos de solução correspondentes. Por exemplo, em Bejan, 1996b e Rocha et al., 2006, são apresentadas estruturas em forma de uma “árvore” como método de construção de redes baseada na teoria constructal. Cheng e Han [Cheng et al., 2002

e Han et al., 2006], propuseram alguns critérios de design prático e desenvolveram a otimização de estruturas de condução de calor com base no princípio de dissipação mínima de capacidade potencial de transferência de calor.

O método de otimização topológica também tem sido aplicada para condução de calor e otimização estrutural [Li et al., 2004 e François et al., 2007]. Em todos estes casos, a natureza do projeto de otimização de estruturas de condução de calor é construir um modelo matemático que maximiza ou minimiza uma função objetivo (por exemplo, o parâmetro de desempenho térmico) submetida a certas restrições.

Os dados estatísticos mostram que 55% dos dispositivos reais falham por causa da elevada temperatura e esta porcentagem aumenta exponencialmente com o aumento da temperatura [Qi et al., 2003 e Liu et al., 2005]. Assim, a temperatura é o fator principal que induz à quebra da estrutura dos sistemas de refrigeração o qual deve ser bem controlado. Na prática, o normal é definir uma temperatura mais alta como uma função objetivo do modelo de otimização. No entanto, a região da temperatura mais elevada geralmente muda com a distribuição de material no processo de otimização da topologia e é uma função descontínua de variáveis que podem introduzir dificuldades numéricas de otimização. Portanto, em lugar de definir uma otimização em função da temperatura mais elevada, é mais conveniente definir outro parâmetro de desempenho térmico adequado como função objetivo em um modelo de otimização para realizar indiretamente o objetivo de minimizar a temperatura [Zhang et al., 2011].

Os módulos de múltiplos chips (MCM - *Multichip modules*) têm sido amplamente aplicados na indústria eletrônica para aumentar o desempenho de circuitos [Gao et al., 2008]. À medida que os chips no MCM dissipam energia isso resulta em temperaturas mais elevadas e todos os mecanismos de falha são acelerados. Em casos mais graves, uma fraca concepção do pacote de MCM como um mau posicionamento dos chips de silício no interior do encapsulamento pode dar origem a tensões térmicas excessivas e problemas de confiabilidade. Por esta razão, várias metodologias [Lee e Chou, 1996, Huang et al., 2002, Lee et al., 2005] foram desenvolvidas para otimizar a colocação de chips que envolvem a distribuição térmica dos mesmos. Zhang et al., 2004, realizaram uma análise de elementos finitos termo-mecânica do pacote de MCM para atender as demandas de funções de alta velocidade e miniaturização do sistema e verificaram que a deformação térmica do pacote é muito sensível ao posicionamento dos chips [Lee, 2005].

Um dos problemas mais populares é o projeto de canal de alta condutividade para componentes eletrônicos onde existe um substrato com material de baixa condutividade de calor onde as cargas são aplicadas e o domínio é preenchido com material de elevada condutividade, [Zhang et al., 2004], como se percebe na Figura 1.1 (a). Li et al., 1999, emprega o método de otimização estrutural evolucionária (ESO) para melhorar o design de topologia em regime constante de condução de calor [Li et al., 1999, Li et al., 2004] e na Figura 1.1 (b).

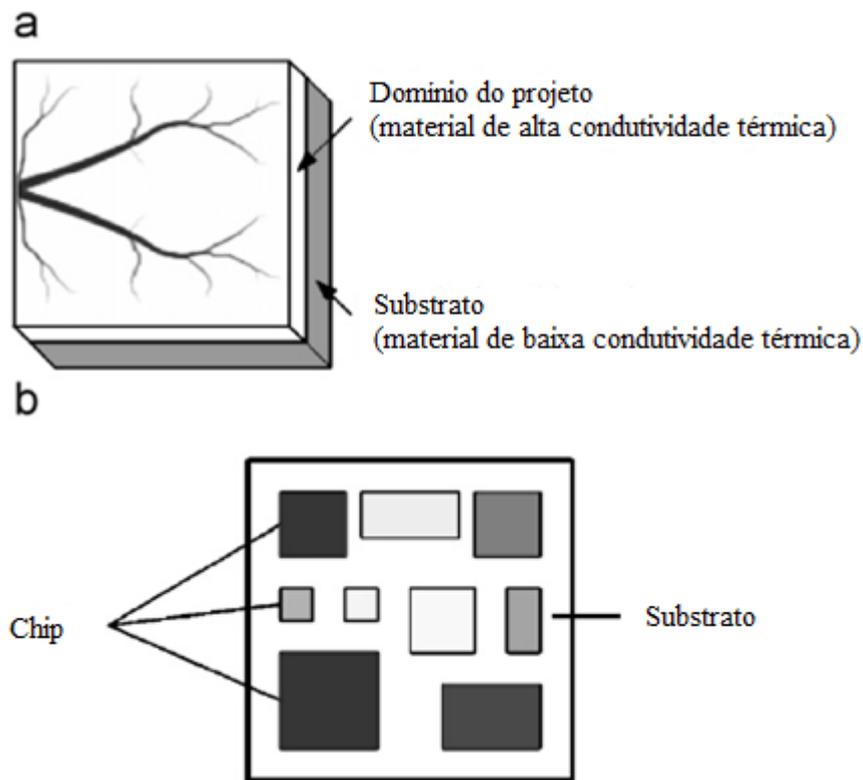


Figura 1.1 – Esquema de problemas de design de condução de calor: (a) Esquema de projeto de canal de alta condução sob o projeto independente de cargas [Gersborg-Hansen et al., 2006 e Gao et al., 2008]. (b) esquema de layout para projeto de MCM.

Existe uma grande variedade de trabalhos dedicados à otimização geométrica de dispositivos condutores de calor para a refrigeração de corpos aquecidos. Dessa maneira também aparecem estudos com relação à escolha adequada do principal mecanismo de transmissão desse calor e nesse aspecto, as vantagens da condução frente à convecção na

retirada de grandes quantidades de calor são bastante significativas. Conforme se percebe, portanto, uma metodologia de otimização desses sistemas consiste em escolher a melhor combinação do meio de transporte do calor e também escolher a melhor forma ou geometria capaz de oferecer o melhor desempenho. Nesse sentido, o método Constructal Design [Bejan, 2000, Ledezma, 1997, Bejan e Lorente, 2008, Wu et al., 2006, Zhou et al., 2006, Wei et al., 2008, Wei et al., 2009b, Wei et al., 2010, Yu e Li, 2006, Wang et al., 2006, Xie et al., 2010] tem sido bastante aplicado, tendo em vista guiar o projeto de engenharia para prosseguir com a estrutura interna, forma externa e ritmo ao longo do tempo com o melhor desempenho global do sistema. Este método é baseado na Teoria Constructal que é o pensamento de que as formas geométricas na natureza são determinísticas e não geradas pela oportunidade e chance. Constructal design é empregado na engenharia para maximização do desempenho de sistemas submetidos a qualquer espécie de fluxo [Bejan, 2000].

É importante ressaltar que cada geometria ótima é indicada especificamente para o problema em estudo, ou seja, se trocarmos as suas condições ou componentes, a configuração passa a não ser mais necessariamente a ideal. Então, cada problema deverá ser pesquisado particularmente para que a configuração geométrica ideal possa ser determinada, conforme Bejan, 2008. Desta maneira, o presente trabalho utilizou o método Constructal Design para desenvolver o estudo numérico da configuração de caminhos de alta condutividade térmica em forma de “Y” que minimiza a resistência ao fluxo de calor quando áreas ocupadas pelos materiais de alta e baixa condutividades são mantidas constantes.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivos Gerais**

O objetivo é a minimização da resistência térmica global,  $(T_{\max} - T_0)/(q''A)$ , entre o sistema estudado e o ambiente, através da variação geométrica de materiais de alta condutividade térmica em forma de Y inseridos em sólido de baixa condutividade, empregando constructal design. As quantidades dos materiais de alta condutividade e do sólido de baixa condutividade são mantidas fixas.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- Apresentar um modelo numérico que calcule a distribuição de temperatura no sistema estudado;
- Validar o modelo numérico;
- Simular numericamente diversas configurações geométricas na forma de Y de acordo com o princípio constructal;
- Selecionar as configurações que facilitem o fluxo de calor, isto é, minimizem a resistência térmica;
- Comparar as melhores configurações obtidas com outras existentes na literatura;
- Avaliar quais graus de liberdade possuem maior contribuição sobre a resistência térmica máxima;
- Comparar os resultados quando utilizado Y de material com condutividades iguais e com condutividades diferentes para os ramos simples e bifurcados, verificar a influência sobre a geometria ótima.

## **1.2 Delineamento do Trabalho**

A estrutura da presente dissertação é composta por seis capítulos, onde os mesmos abordam:

No capítulo 1, denominado introdução, é apresentada a motivação para o estudo de sistemas de alto potencial de condução de calor em engenharia e da otimização destes sistemas. Alguns trabalhos são citados como referência bibliográfica por se tratarem de trabalhos com resultados importantes ou de destaque. Este capítulo é finalizado com a apresentação dos principais objetivos do trabalho e do delineamento do trabalho.

No capítulo 2 é apresentado o contexto teórico que serviu de base para desenvolver a dissertação. Posteriormente, é realizada uma descrição mais minuciosa a respeito das aplicações da teoria constructal na engenharia.

No capítulo 3 apresenta-se a modelagem matemática do problema onde são apresentadas equações governantes bem como as condições de contorno para o modelo. A abordagem numérica é apresentada no capítulo 4 e servirá para a resolução aproximada do modelo matemático proposto. Neste capítulo também é apresentada a validação e o teste de independência de malha.

O capítulo 5 apresenta os principais resultados obtidos a partir do processo de otimização geométrica para as variações do problema em análise.

Os capítulos 6 e 7 apresentam as principais conclusões obtidas pelo autor e propostas para eventuais trabalhos futuros. Em seguida as referências bibliográficas utilizadas na presente dissertação são descritas.

Por fim, os Apêndices A e B apresentam quatro códigos em MatLab ® utilizados neste trabalho, para condutividades iguais dentro do canal e para condutividades diferentes, respectivamente.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Conceitos Fundamentais sobre Teoria Constructal

A teoria constructal originou-se a partir da constatação de que o design das estruturas naturais é um fenômeno físico que ocorre em sistemas de grande e pequeno porte como os flocos de neve, os raios, rios, tecidos vivos vascularizados, o tráfego das cidades, a difusão de novas ideias sobre o mundo, entre outros. Esta teoria é baseada na lei Constructal: “para que um sistema de volume fixo onde existe escoamento possa persistir no tempo (viver) a sua configuração deve evoluir de tal modo que proporcione maior e maior acesso para as correntes que fluem através dele” [Bejan, 1996b]. Exemplos onde este princípio pode ser empregado são encontrados na biofísica, geofísica e sistemas naturais nas quais as geometrias se modificam a fim de alcançar um objetivo, que é a minimização da resistência global para suas correntes internas [Bejan, 2000 e Bejan et al., 2009]. Ao observar a maneira global como os escoamentos ocorrem na natureza, se percebe uma grande semelhança entre seus formatos estruturais. Eles são parecidos devido à tendência universal que possuem os sistemas abertos que escoam de maximizar os acessos aos fluxos ou de diminuir as resistências ao escoamento.

Segundo [Bejan, 2008], o pensamento constructal vai contra a seta do tempo do empirismo. Como a Figura 2.1 mostra [Bejan, 2000], primeiro a lei constructal é invocada e, com isso, teoricamente, a arquitetura é deduzida. Só mais tarde a configuração teórica obtida é comparada com a dos fenômenos naturais e o acordo entre as duas geometrias valida a lei constructal.

Pode-se perceber a tendência dos rios em atingir o oceano, as veias em atingir o coração e até das pessoas em se deslocar para seus locais de trabalho gastando a menor energia [Pepe, 2008]. Os sistemas que se modificam ou se movem são sistemas que escoam. Nesses sistemas onde há escoamento há também resistências e o seu movimento se dá para aperfeiçoar o fluxo, sempre evitando as resistências. Apresentando e firmando o seu ritmo e o seu desenho, passam pelos anos se modificando de forma natural. Esse movimento por sua vez, não é isolado. Interagindo com o meio ao redor, ele evolui no tempo, evitando as resistências ao escoamento, procurando equilibrar-se com seu entorno. A lei Constructal

mostra uma nova maneira de ver como formas e estruturas complexas que vemos ao nosso redor evoluem e se aperfeiçoam. A observação dos projetos do design dos sistemas naturais é um bom ponto de partida para a criação de novos projetos e reformulação de outros, uma vez que esses sistemas naturais refletem em seus designs o processo de evolução e seleção natural de muitos anos.

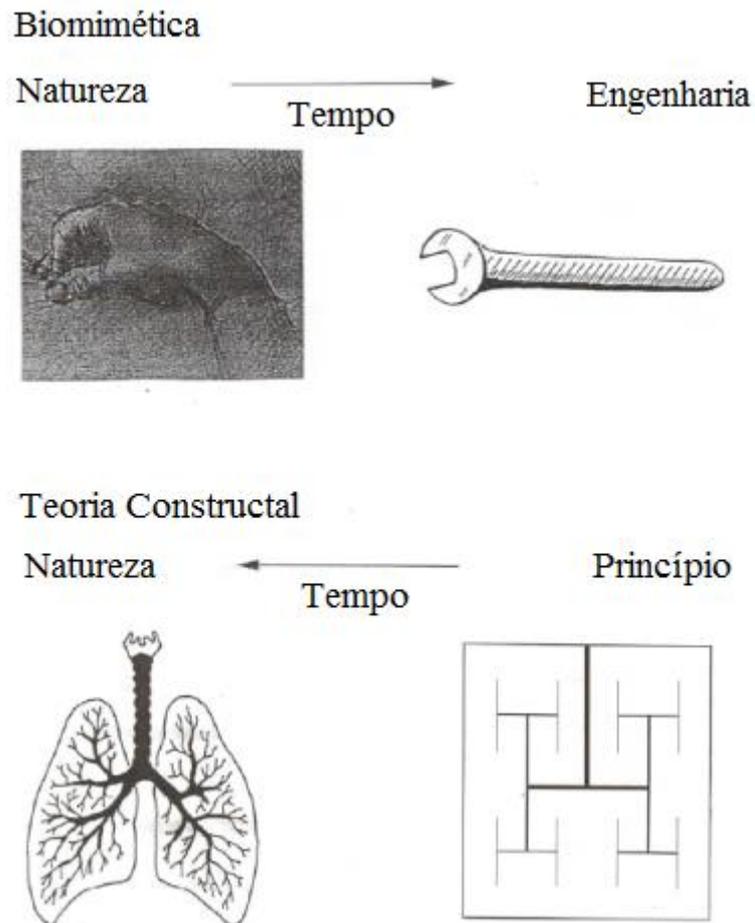


Figura 2.1 – Teoria Constructal prossegue no tempo contra o sentido do empirismo ou sem “reproduzir” a natureza [Bejan, 2000] [Bejan, 2008].

A Teoria Constructal é fundamentada em um princípio de configuração, geração e evolução no tempo na direção do maior acesso de fluxo global em sistemas que podem variar livremente a sua geometria [Bejan, 2000, Bejan et al., 2008]. Segundo Bejan e Lorente, 2004, o método Constructal design é o método baseado na lei Constructal que é empregado na

obtenção das configurações que melhoram o desempenho dos sistemas de fluxo através de uma distribuição ótima das imperfeições ou irreversibilidades nos projetos de engenharia.

A natureza oferece exemplos de que a configuração ideal para os sistemas de fluxo distribui as irreversibilidades naturais como o atrito e transferência de calor entre dois meios com diferenças finitas de temperaturas. Mudanças no design dos leitos de rios de forma a movimentar a água mais e mais facilmente, bifurcação de veias no corpo dos animais a fim de otimizar o fluxo sanguíneo nos tecidos, nos pulmões, entre tantos outros são exemplos de configurações que poderiam ser citadas. Somente a evolução do corpo humano já nos exhibe um quadro gigantesco de exemplos que poderíamos observar, assim como aplicações em áreas de engenharia, ou mesmo organização social ou outra aplicação.

A partir do trabalho de Bejan e Lorente, 2008, pode-se dizer que a Teoria Constructal trata da geração de arquiteturas em sistemas termodinâmicos que geralmente estão em desequilíbrio, ou seja, de sistemas onde se tem existência de escoamento, sempre tendo em foco a maximização do acesso ao escoamento seja ele qual for, de fluido, de massa, de energia, etc.

## **2.2 Estado da arte em problemas de condução de calor**

A maximização da transferência de calor em um sistema de aquecimento ou refrigeração é de grande importância em aplicações práticas, tais como difusores de calor, aletas de refrigeração, moldagem de matrizes e de canais de alta condutividade de componentes eletrônicos [Gao et al., 2008]. Neste âmbito, muitos pesquisadores investigaram a forma e a otimização do tamanho de aletas de refrigeração [Attetkov et al., 2001, Sasikumar et al., 2002, Yang et al., 2006].

Uma área de pesquisa aplicada para a descoberta de arquiteturas via Constructal design é o desenvolvimento de sistemas compactos ou de alta densidade, para transferência de calor e massa. Em Ledezma, 1997, a aplicação da teoria constructal foi para o problema de aumentar a transferência de calor através da inserção de material de alta condutividade no material aquecido, sob o fundo da micro-miniaturização e alto desempenho de componentes eletrônicos. O estudo aborda um sólido com geração de energia sendo resfriado a partir de um material de alta condutividade inserido. Nesse trabalho foi realizada a minimização da

resistência global entre um volume de tamanho finito e um ponto. Para tal foi utilizada uma sequência de blocos de construção cobrindo o volume, que evolui de um volume elementar para conjuntos maiores. O domínio do volume elementar é mostrado na Figura 2.2.

Essa abordagem aperfeiçoa a geometria de cada construção (*construct*), a forma geral do bloco de construção, o número dos seus componentes e a distribuição interna dos caminhos de alta condutividade.

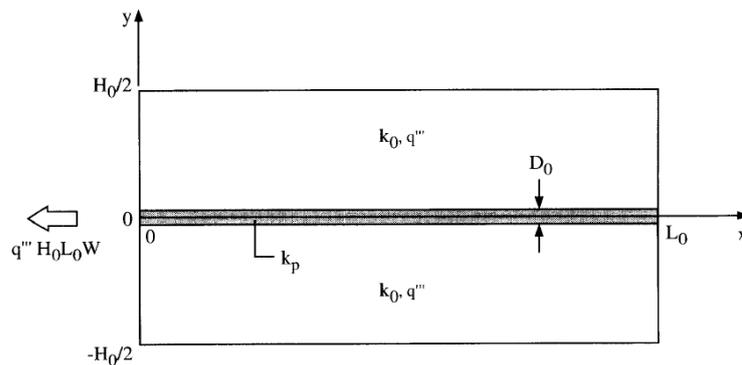


Figura 2.2 – Domínio da geometria otimizada em Ledezma, 1997.

Da otimização de um único canal para escoamento de fluidos [Bejan et al., 2000] para as otimizações de canal com transferência de calor por convecção [Bejan e Errera, 2000], até canais com transferência de calor e massa [Azoumah et al., 2006 e Zhou et al., 2008] e aletas e estruturas mais complexas [Bejan et al., 1999, Alebrahim e Bejan, 1999, Bejan e Almogbel, 2000, Lorenzini e Rocha, 2009, Lorenzini, e Moretti, 2007a, Lorenzini, e Moretti, 2007b, Lorenzini, e Moretti, 2008, Lorenzini, e Moretti, 2007c, Lorenzini, e Moretti, 2009a, Lorenzini, e Moretti, 2009b, Sharqawy e Zubair, 2009, Biserni et al., 2004, Biserni, 2007, Rocha et al., 2004, Rocha et al., 2005, Lorenzini e Rocha, 2009, Xie et al., 2009a, Xie et al., 2009b]. A aplicação da teoria constructal foi ampliada e aprofundada continuamente. Alebrahim e Bejan, 1999, estudaram a otimização constructal da árvore de aletas circulares. Bejan e Almogbel, 2000, estudaram a otimização constructal de aletas em forma de T, em forma de  $\tau$  e em forma de guarda-chuva contendo aletas cilíndricas com base no modelo de condução de calor unidimensional, tendo a maximização da condutividade térmica global, como o objetivo e empregando método analítico. Em Ghodoossi, 2004, é aplicada a segunda lei da termodinâmica para construções de segunda ordem. Com uma comparação da geração

de entropia em geometrias complexas, Ghodoossi conclui que não necessariamente geometrias com maior complexidade são as que fornecerão os melhores resultados com relação à troca térmica, e que a sequência de designs com o método constructal do mais simples para o mais complexo melhora o desempenho do sistema apenas até a construção de primeira ordem. Embora em estudos posteriores como Lorenzini et al., 2011 e 2013a, o aumento na complexidade do sistema melhora os resultados na distribuição da temperatura máxima.

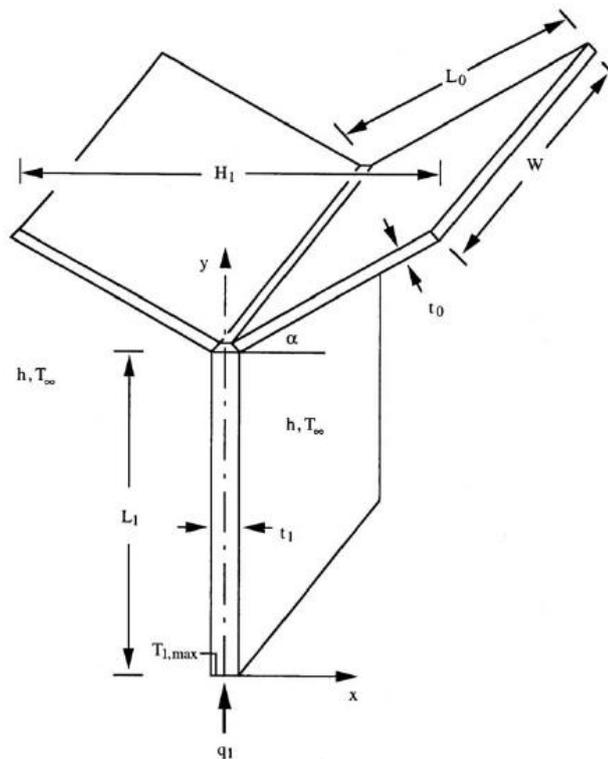


Figura 2.3 – Aleta em forma de Y otimizada por Lorenzini e Rocha, 2006.

Lorenzini e Rocha, 2006, estudaram um conjunto de aletas na forma Y, cujo domínio se apresenta conforme a Figura 2.3, com o objetivo de minimizar a resistência térmica global da aleta com restrição de volume total da geometria. Mostrou-se de forma numérica que a resistência térmica global do conjunto de aletas na forma Y pode ser minimizada sujeita as seguintes constantes: volume total e volume do material da aleta. Esta otimização trabalhou com todos os graus de liberdade,  $t_1/t_0$ ,  $L_1/L_0$ ,  $\alpha$  e  $\phi$ . A mínima resistência térmica global e formas ideais foram correlacionadas por leis de Potência. O estudo de otimização foi tratado

de maneira bidimensional empregando o método de elementos finitos. Os resultados mostram que o desempenho da transferência de calor das aletas em forma de Y é melhor do que a da aleta em forma de T.

Lorenzini e Rocha, 2009a, construíram uma aleta em forma de T-Y através da inserção de uma cavidade entre os dois ramos da aleta em forma de T, como pode ser visto na Figura 2.4, tendo como parâmetros invariáveis o volume total e o volume da aleta e os resultados de otimização constructal mostram que a aleta em forma de T-Y é melhor do que aleta em forma de Y, neste caso o nível de complexidade da aleta foi aumentado e gerou um melhor desempenho térmico para o sistema.

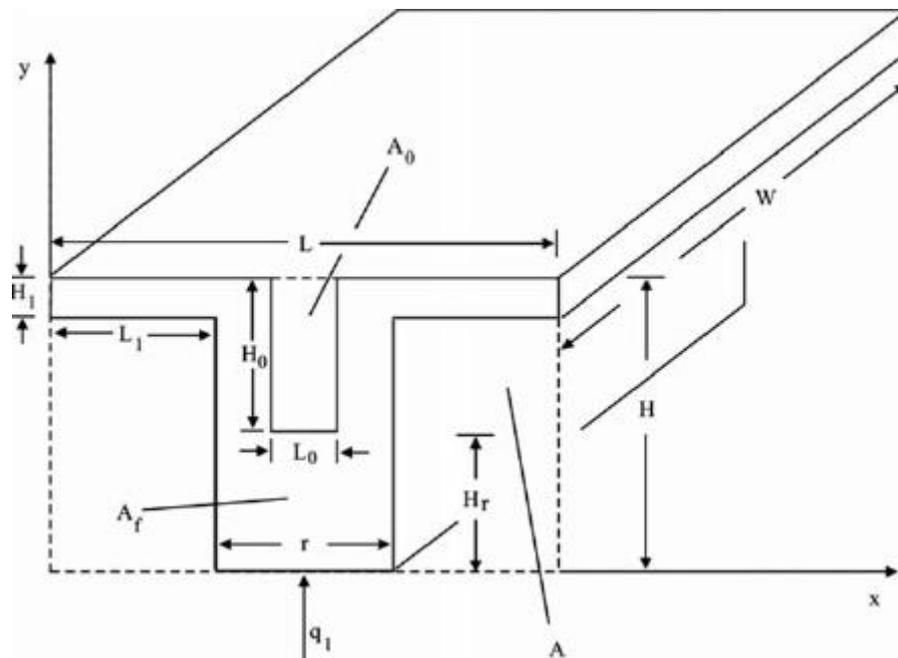


Figura 2.4 – Aleta em forma de T-Y otimizada por Lorenzini e Rocha, 2009a.

Lorenzini e Moretti [2007a, 2007b, 2007c, 2008, 2009a, 2009b] estudaram a otimização constructal de aletas em série, empregando análise numérica CFD, de dinâmica de fluidos computacional. Lorenzini e Moretti, 2007b, cujo domínio otimizado aparece na Figura 2.5, tem o seu método numérico validado por comparação dos resultados de otimização com aqueles de aletas em forma de T de Bejan e Almogbel, 2000. Em Lorenzini e Moretti [2007b, 2007c, 2008] foi comprovada a eficiência de aletas como objetivo a otimização da troca térmica baseada na condutividade térmica. A condutividade térmica adimensional da série de

cinco aletas aumentou 4,034 vezes do que uma aleta em forma de T que ocupou a mesma largura horizontal. Os trabalhos de Lorenzini e Moretti, 2009a e 2009b, calculam e analisam as performances de transferência de calor e escoamento de fluidos das matrizes compostas por aletas de placas retangulares e em forma de Y, com diferentes números de Reynolds, empregando um índice complexo com a soma ponderada de fluxo de calor e queda de pressão para avaliar as suas performances.

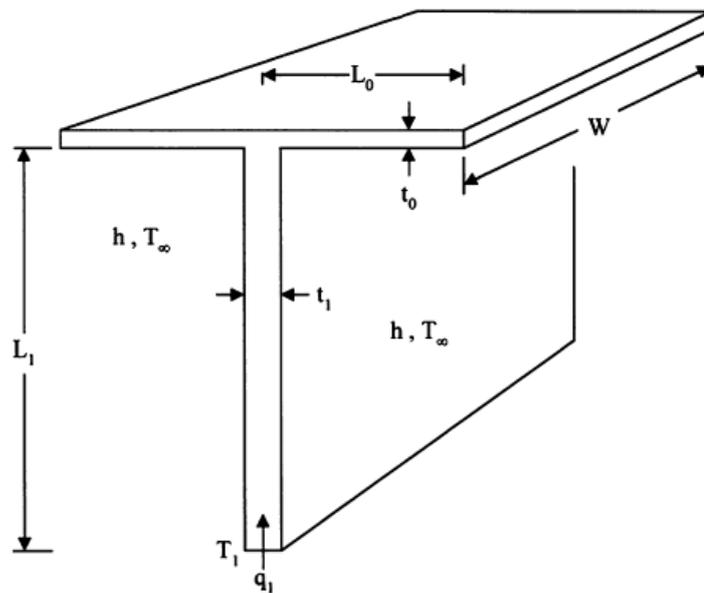


Figura 2.5 – Domínio otimizado em Lorenzini e Moretti, 2007b.

Lorenzini et al., 2011, otimizaram a geometria de uma aleta na forma T-Y da Figura 2.6, com extensões laterais extras a partir do método constructal. A resistência térmica global foi minimizada através da otimização geométrica com volume da aleta, das extensões laterais, da cavidade e o volume total do sólido sendo os parâmetros fixos. Os resultados apresentam um melhor desempenho dessa geometria quando comparada em formato T-Y sem extensões considerando-se as mesmas condições térmicas.

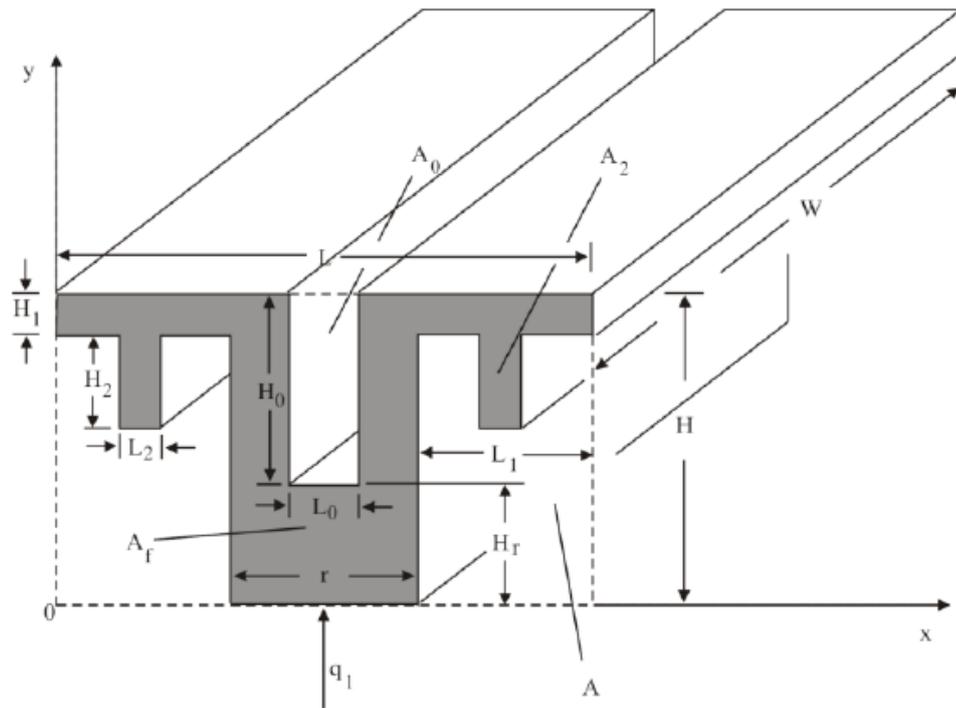


Figura 2.6 – Domínio de aleta T-Y com extensões otimizada por Lorenzini et al., 2011.

A otimização constructal de uma cavidade em forma de retângulo inserido num sólido trapezoidal foi efetuada na sequência [Rocha et al., 2005] e seu domínio é apresentado na Figura 2.7. O objetivo do trabalho é otimizar a troca térmica minimizando a resistência térmica global entre o volume do sistema (cavidade e sólido) e o meio envolvente. Os resultados mostram que o desempenho melhora à medida que a cavidade fica mais delgada, ou seja, quando a relação  $H_0/L_0$  se torna menor.

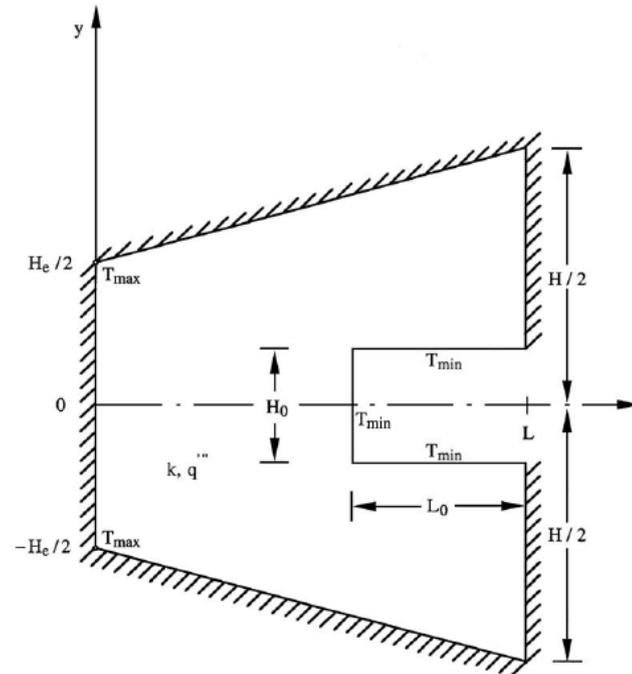


Figura 2.7 – Cavity em forma de retângulo otimizada por Rocha et al., 2005.

Lorenzini et al., 2011, aplicaram o mesmo método na otimização geométrica de uma cavity em forma de Y localizada em um sólido com geração de calor, no intuito de minimizar a resistência térmica global entre o sólido e a cavity, conforme mostra a Figura 2.8. Quatro graus de liberdade foram avaliados. Em comparação com a cavity em forma de C, as cavidades em forma de Y aumentou o desempenho térmico em 109,12%, 84,45%, 59,32% e 20,10% para a  $H/L = 0,5, 1,0, 2,0,$  e  $5,0,$  respectivamente. A partir dos trabalhos desenvolvidos nesse sentido, pode-se dizer que as cavidades em formato de um Y apresentam melhor resposta quanto à troca térmica quando comparadas com as cavidades em formato de um C.

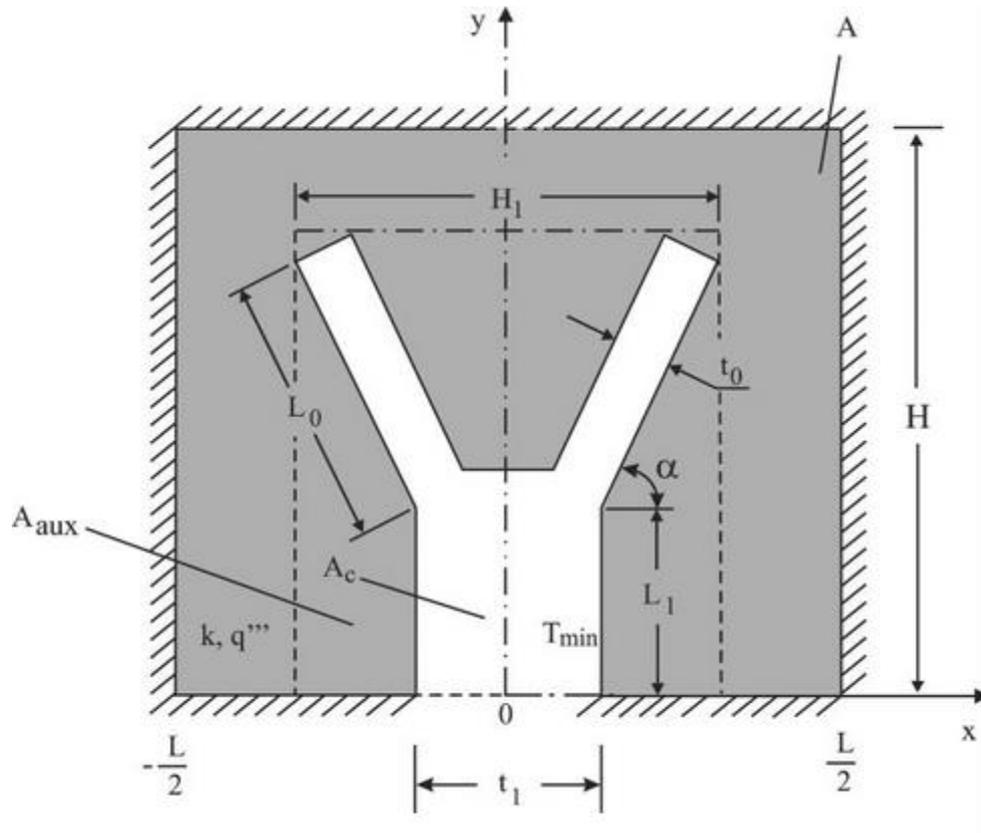


Figura 2.8 – Cavidade em forma de Y otimizada por Lorenzini et al., 2011.

Biserni et al., 2004 e 2007 estudaram as otimizações das aletas invertidas, como cavidade em forma de retângulo e cavidade em forma de H que foram todos inseridos em um sólido retangular. A Figura 2.9 mostra o domínio do problema estudado em Biserni et al., 2007. Os resultados por sua vez, mostraram que aumentam os seus desempenhos de arrefecimento.

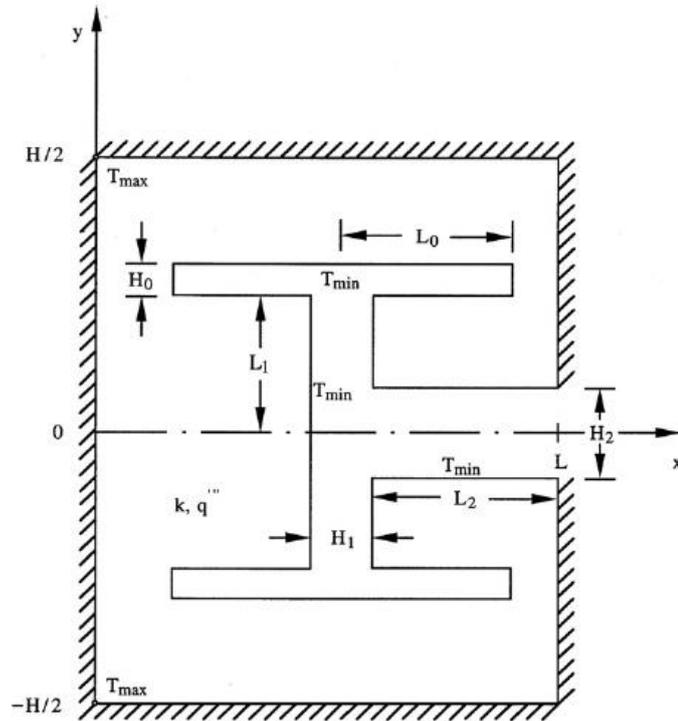


Figura 2.9 – Domínio cavidade em forma de H otimizado em Biserni et al., 2007.

Rocha et al., 2004, compararam os efeitos de arrefecimento da cavidade em forma de retângulo, cavidade elíptica e cavidade em forma de triângulo e os resultados mostraram que o melhor desempenho de arrefecimento ocorre quando a cavidade é retangular, o segundo melhor desempenho é para a cavidade elíptica e o pior ocorre quando a cavidade é triangular. A Figura 2.10 apresenta os domínios estudados. O trabalho também mostra que quando comparada a cavidade retangular com a cavidade em forma de T, a cavidade em T apresenta melhor desempenho.

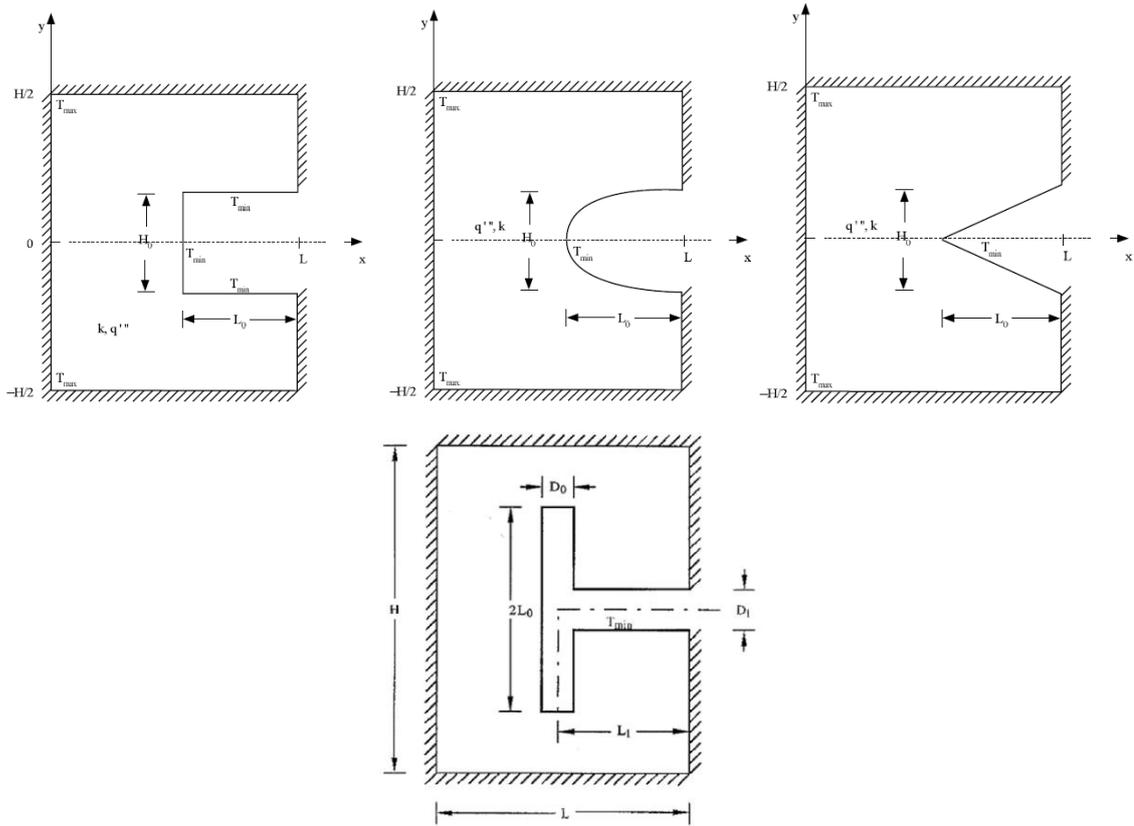


Figura 2.10 – Domínios comparados em Rocha et al., 2004.

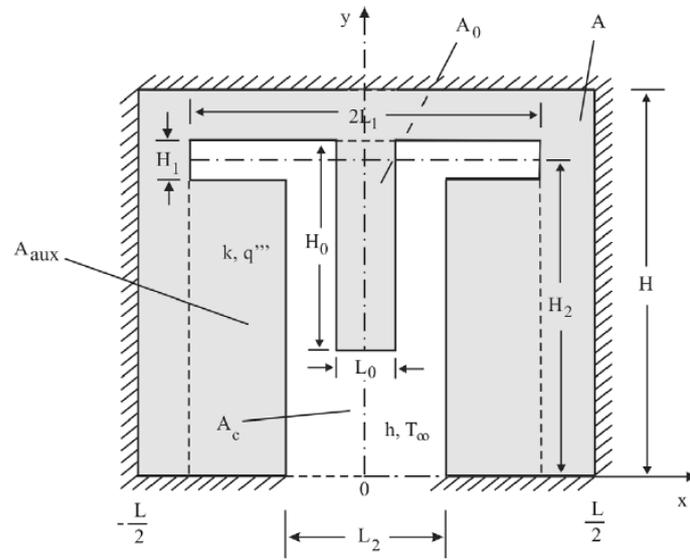


Figura 2.11 – Domínio de cavidade em forma T-Y otimizado por Lorenzini e Rocha, 2009b.

Para o estudo da cavidade T-Y, mostrada na Figura 2.11, localizada em um sólido com geração de calor, Lorenzini e Rocha, 2009b, buscaram a redução da resistência térmica global do sistema. A diferença entre os designs está na posição das duas cavidades extras de altura  $H_3$  como se percebe na Figura 2.11. Como constantes se encontram os volumes total do sólido, da cavidade e a área auxiliar, com uma geração uniforme de calor através do sólido. Como resultado é encontrado a geometria ótima, capaz de minimizar a resistência térmica global quando o volume total e o da cavidade são mantidos fixos. Ao mesmo tempo se concluiu que quando comparada com a cavidade em forma de C, para as mesmas condições térmicas e de volume, a cavidade na forma T-Y apresenta um desempenho de 108% superior. A cavidade estudada por Lorenzini e Rocha, 2009b, recebeu novos detalhes na sua geometria e foi estudada por Garcia, 2011, e em comparativo, a melhor geometria do design 1 é cerca de 15.3% mais eficiente que a melhor geometria obtida por Lorenzini e Rocha, 2009b. E a melhor geometria do design 2 é cerca de 140% superior. Os designs 1 e 2 estudados estão mostrados na Figura 2.12a e 2.12b, respectivamente.

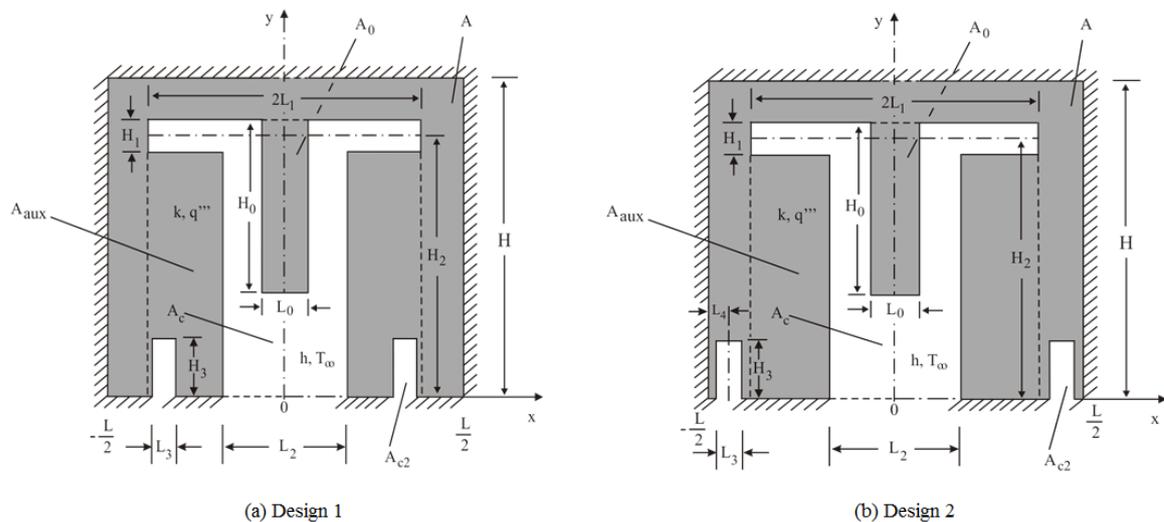


Figura 2.12 – Domínios de cavidade em forma T-Y, otimizados por Garcia, 2011: (a) Design 1 e (b) Design 2.

Outros trabalhos inserem materiais de alta condutividade em sólidos com geração de calor para otimizar sua troca térmica. No estudo de Ledezma, 1997, foi assumido que o material de condutividade térmica elevada do canal atravessou todo o volume e resfriou o

domínio através de um ponto que foi mantido a temperatura constante inferior a do restante do material. Mais tarde, assumiu-se que a extremidade final do material de alta condutividade não alcançasse até a superfície oposta da placa, havendo assim um espaço entre o final do material de alta condutividade e a parede isolada. Pode-se otimizar este espaçamento, reduzir ainda mais a resistência térmica e economizar material de mais alta condutividade térmica [Almogbel e Bejan, 1999].

Os materiais inseridos têm sua geometria estudada e otimizada em forma de ramos. Essas formas existem de uma maneira geral, distribuídas nos sistemas animados e inanimados da natureza. Na área de engenharia, também foi provado que a montagem em forma de ramos é a forma de projeto (evolução) para se perseguir o melhor desempenho global [Bejan, 1996a, Ledezma, 1997, Bejan e Dan, 1999, Bejan et al., 2000, Bejan e Errera, 2000, Wu et al., 2006, Zhou et al., 2006, Azoumah et al., 2006, Bejan e Lorente, 2008, Wei et al., 2008, Zhou et al., 2008, Bejan e Almogbel, 2000, Biserni e Rocha, 2004, Lorenzini e Rocha, 2006, Biserni e Rocha, 2007, Lorenzini e Moretti, 2007a, 2007b e 2007c, Lorenzini e Moretti, 2008, Lorenzini e Rocha, 2009a e 2009b, Xie et al., 2009b, Wei et al., 2010]. Esta é uma idéia muito importante da teoria constructal.

Almogbel e Bejan, 2001, otimizam a distribuição não uniformes para o material de alta condutividade, em forma de ramos com volumes elementares de diferentes proporções. Eles demonstraram que as últimas ordens da configuração não são necessariamente uniformemente distribuídas na montagem da nova ordem, mas que a distribuição ideal do conjunto de primeira ordem apresenta um desvio em relação à sua posição original. Propuseram, ainda, que, se libertando do pressuposto de que as últimas ordens da configuração devem ser uniformemente distribuídas na montagem da nova ordem, a distribuição ideal do conjunto de primeira ordem não era uniforme, mas existia um desvio em relação à sua posição original. As vantagens da distribuição não uniforme se torna mais significativa quanto maior o número de ramos. De acordo com os resultados, se o número dos volumes elementares na montagem de primeira ordem foi  $n_1 = 6$ , a resistência térmica pode ser reduzida em 5,7% apenas redistribuindo de maneira não uniforme os ramos. A Figura 2.13 representa a geometria não uniforme otimizada.

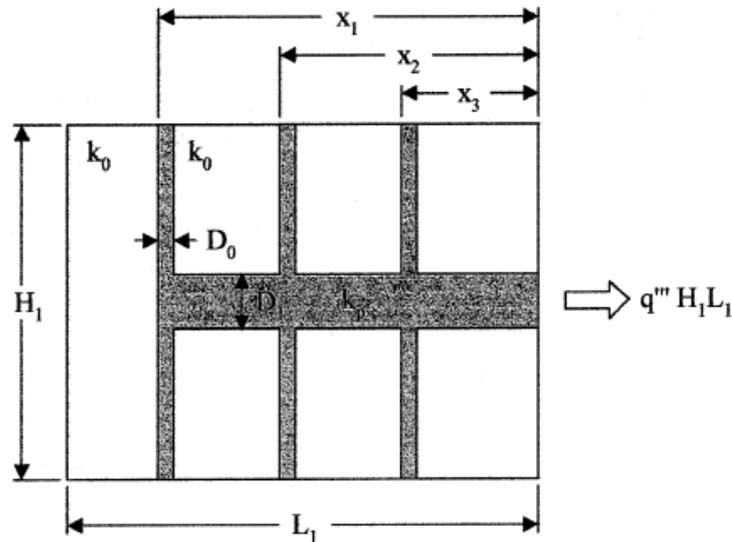


Figura 2.13 – Distribuição de ramos não uniformes otimizados por Almogbel e Bejan, 2001.

A distribuição de temperatura em duas dimensões num retângulo de volume elementar foi obtida analiticamente por Kuddusi e Denton, 2007. Eles combinam dois fluxos exclusivamente unidimensionais em um único fluxo bidimensional e minimizam a resistência térmica através da solução do campo de temperatura do elemento de volume.

Cheng et al., 2006 construíram o canal de alta condutividade do ponto de vista de otimização biônica baseado no princípio da evolução biológica [Cheng et al., 2003]. Bejan et al., 1997, otimizaram redes de micro canais para o resfriamento de circuitos eletrônicos utilizando o modelo da Teoria Constructal. Este estudo permitiu a conclusão de que a distribuição de micro canais em forma de ramos de uma árvore permite a configuração um melhor rendimento ou uma mínima resistência térmica.

Marck et al., 2011, modelaram e avaliaram numericamente um modelo em forma de ramos com diferentes níveis de complexidade em um volume com geração de calor com forma fixa retangular. Em seu modelo eles concluíram que a melhora da refrigeração do sistema depende fortemente da razão de aspecto do sistema e não da sua complexidade. A razão de aspecto é o nome dado pelos autores para a relação entre a largura de material altamente condutor que está em contato direto com o difusor e a largura total do material com geração de calor. Esta conclusão concorda com o trabalho realizado por Ghodoossi, 2004, onde se mostra que o aumento da complexidade do volume de controle nem sempre reduz a

resistência térmica, mas existe uma forma ótima do conjunto que conduz à resistência térmica mínima.

Bejan, 2000, mostrou que no projeto otimizado o material de alta condutividade apresenta uma distribuição geométrica em forma de árvore. Todos os aspectos arquitetônicos da árvore são determinados, as formas das maiores montagens e todos os seus componentes, os números de sucursais em cada nível de montagem, a posição relativa dos blocos em cada conjunto e a espessura relativa de ramos sucessivos. Vale ressaltar que quando se aumentam os graus de liberdade também aumentam os detalhes das configurações. Os ângulos das ramificações apresentam um efeito importante sobre a resistência térmica global. A partir destes estudos é possível concluir que as características do mecanismo são obtidas deterministicamente.

Bejan, 2001, realizou um estudo mostrando que o fluxo de calor por convecção total em uma árvore dupla, mostrada na Figura 2.14, é proporcional ao volume total elevado a 3/4.

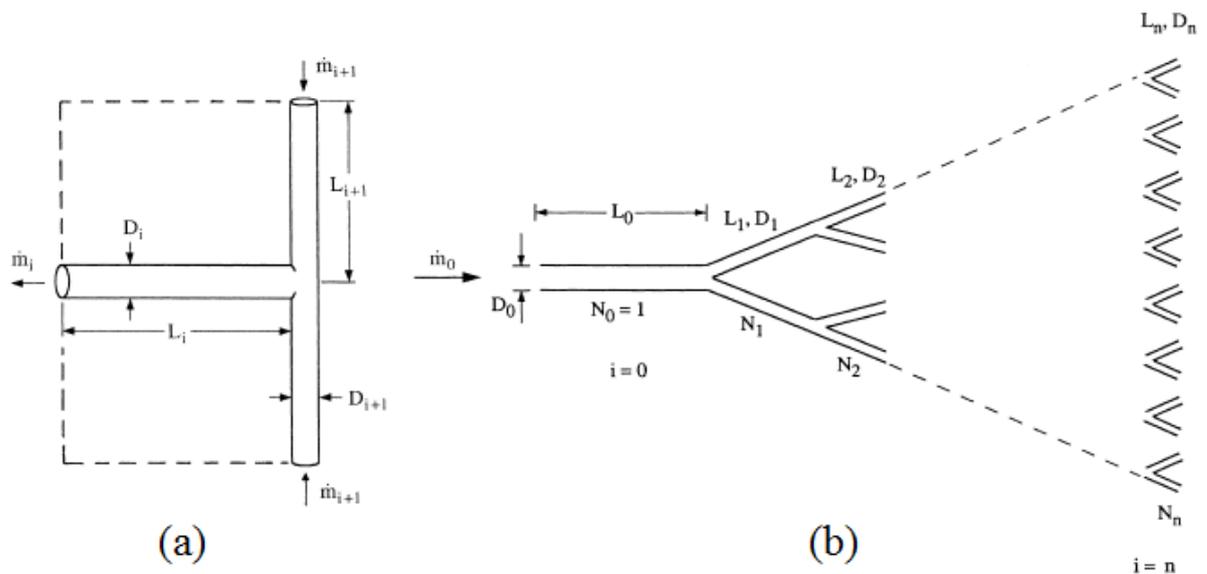


Figura 2.14 – Fluxo de calor com (a) geometria otimizada em forma de T, (b) árvore otimizada, Bejan, 2001.

Rocha et al., 2003, estudaram a otimização de uma estrutura tubular com geração uniforme de energia interna com a inserção de um material de alta condutividade, com o emprego de teoria constructal. O objetivo é a minimização da resistência térmica global. As

restrições adotadas nesse trabalho foram os volumes do material de alta condutividade térmica inserido.

Para a otimização das estruturas tubulares de isolamento [Kalyon e Sahin, 2002] e paredes de isolamento vertical [Lorente e Bejan, 2002], pode-se providenciar algumas cavidades na camada para aumentar o efeito de isolamento de calor utilizando a teoria constructal. O problema de otimização da camada de isolamento também foi considerado em [Pramanick e Das, 2007]. O modelo de extração de calor de "volume ponto" (Figura 2.15a) foi adaptado para modelos como "disco centro" (Figura 2.15b) [Lorente et al., 2003], "circunferência centro" [Rocha et al., 2006], "ponto linha-reta" e "plano ponto" ou "área ponto" [Lorente et al., 2002].

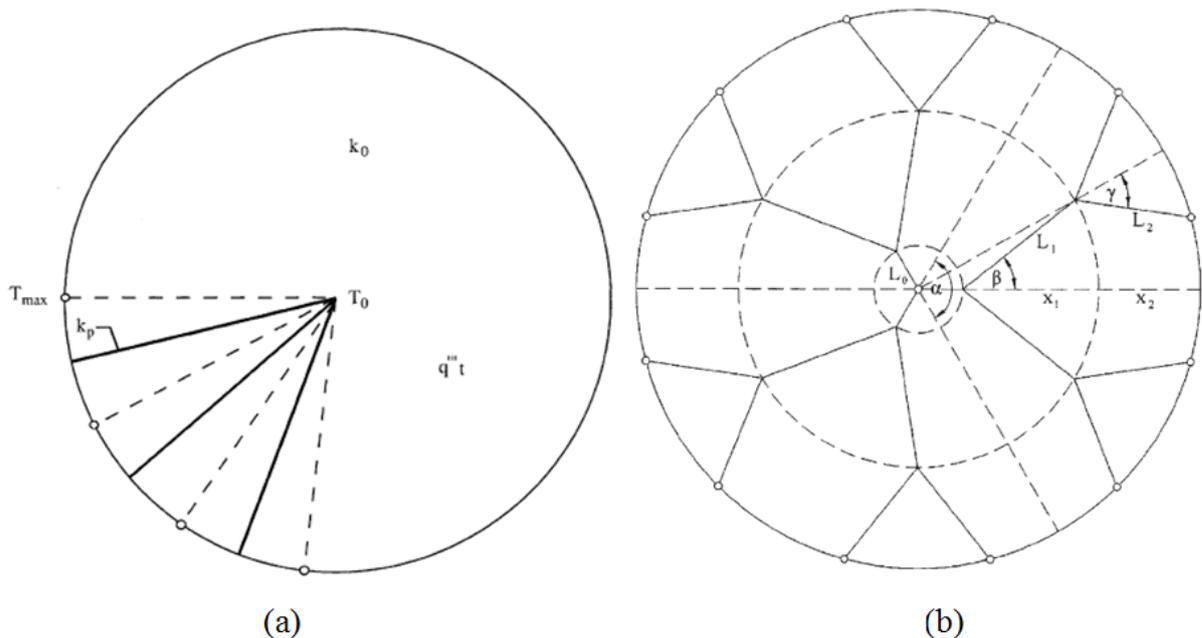


Figura 2.15 – O volume total e o domínio para estrutura tubulares estudadas com modelo “volume ponto” (a) [Rocha et al., 2003] e “disco centro” (b) [Lorente et al., 2003].

Em Bejan e Errera, 2000, foi estudado a otimização geométrica da estrutura interna de um volume que gera calor e é resfriada por um único fluxo, conforme é exibido na Figura 2.16. Esta otimização estrutural consiste em uma sequência de etapas organizadas que começam com o elemento de menor volume e continua com conjuntos maiores de blocos previamente otimizados. O resultado mostra que, no final, os canais de fluido formam uma

rede de árvore que resfriam cada ponto do volume dado. Este tipo de sistema de refrigeração pode ser usado por células combustíveis e bio-reatores onde as reações acontecem dentro de um volume restrito e são alimentadas por um fluxo de fluido de entrada e outro de saída. Reatores também foram pesquisados por Azoumah et al., 2006, combinando métodos de minimização de entropia e teoria constructal.

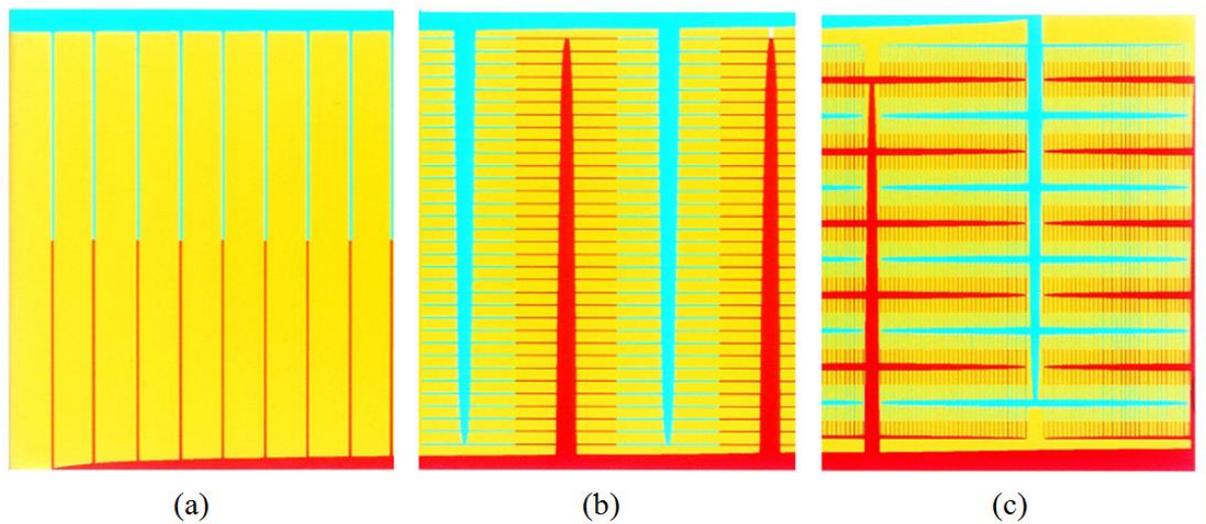


Figura 2.16 – Fluxo do fluido de entrada (azul) e fluxo de saída (vermelho). Otimização progressiva inicial (a), media (b), final (c), [Bejan e Errera, 2000].

A complexidade destes sistemas também foi estudada por Wu et al., 2006, onde redes de árvores constituem o método de construção. O canal de distribuição de condução de calor foi otimizado e se comprovou que o projeto para transferência de calor através de modelos com forma de ramos é um bom método de construção. O processo da nova ordem de otimização deve ser organizado de acordo com a última otimização realizada, e cada parâmetro considerado da última ordem deve ser considerado como um novo grau de liberdade para voltar a realizar otimização. As simulações comprovam que uma rede complexa cumpre com a expectativa da teoria constructal de que quanto mais complexa a construção, menor é a resistência térmica. Comparando-se a forma ideal ou ótima de cada etapa de otimização, com a forma ótima encontrada na etapa anterior, a resistência térmica das montagens aperfeiçoadas para cada ordem foi reduzida em mais de 30%. A Figura 2.17 mostra o domínio inicial que foi objeto de estudo desse trabalho (a) e as formas para a da

primeira ordem (b) e segunda ordem de otimização, identificando os parâmetros avaliados. Percebe-se que entre a segunda e terceira ordem os parâmetros otimizados recebem novo subíndice, passam de 0 para 1 e de 1 para 2.

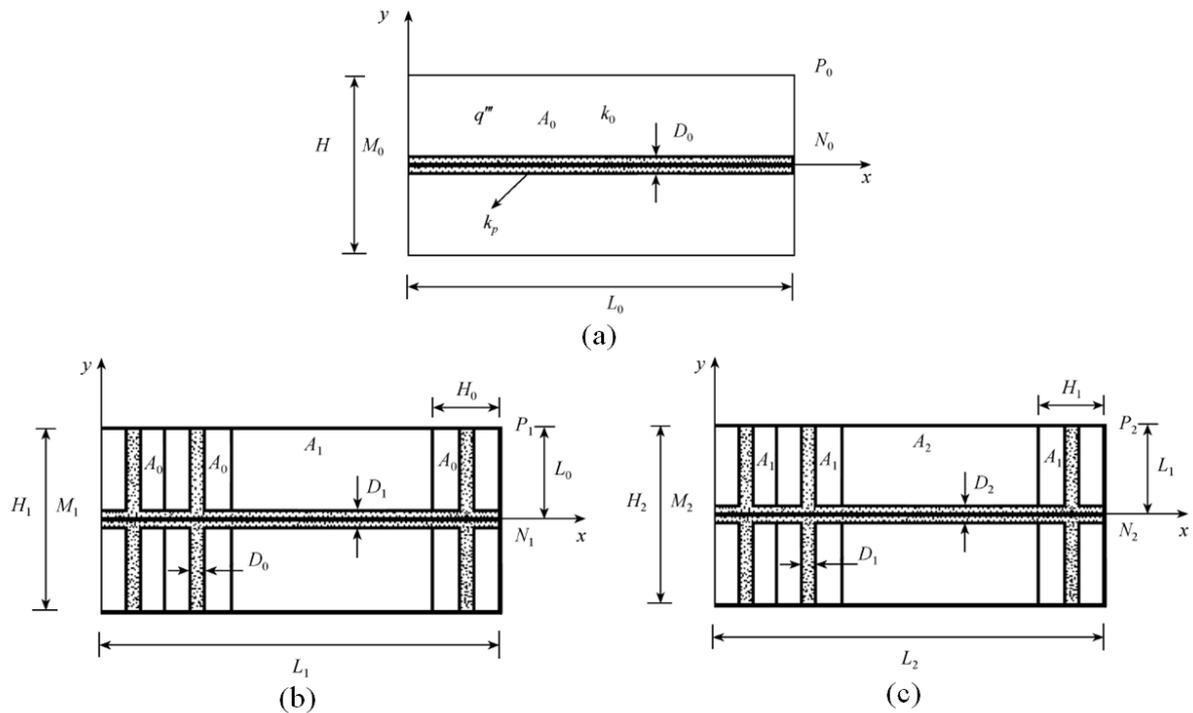


Figura 2.17 – Domínio otimizado em Wu et al., 2006. (a) primeira ordem da otimização, (b) segunda ordem da otimização e (c) terceira ordem da otimização.

Neagu et al., 1999, mostraram que a maior eficiência na condução de calor é obtida quando o formato externo do conjunto se curva e os pontos de alta temperatura são distribuídos uniformemente ao longo da superfície formando assim um gradiente de temperatura uniforme. Comparado com o formato retangular onde a espessura do ramo de alta condutividade permanece a mesma ao longo do domínio, a resistência térmica foi reduzida em 29%. O problema foi avaliado de forma tridimensional e o domínio pode ser visto na Figura 2.18.

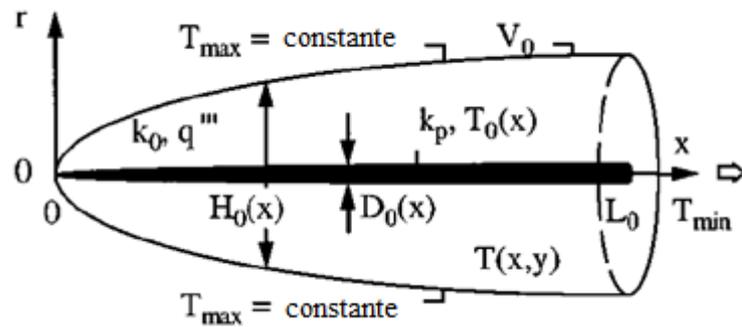


Figura 2.18 – Volume tridimensional com formato externo variável estudado por Neagu et al., 1999.

Ghodoossi e Egrican, 2004, melhoraram a forma do elemento, sendo proposto um elemento triangular, em observação ao elemento retangular com geração de calor, onde os cálculos demonstraram que a temperatura máxima é localizada em dois pontos, nos dois cantos do retângulo longe do dissipador de calor. A Figura 2.19 mostra o conjunto de estudo do artigo. Obteve-se a configuração ótima com conjuntos triangulares de resistência térmica mínima.

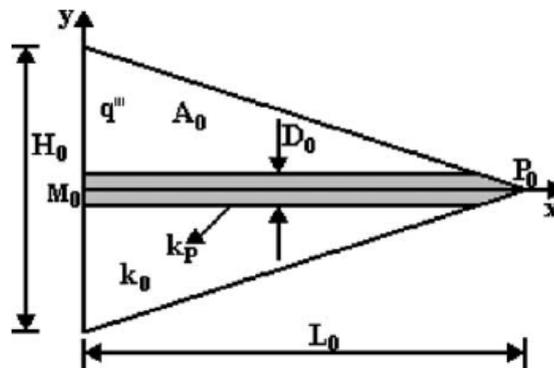


Figura 2.19 – Elemento triangular estudado em Ghodoossi e Egrican, 2004.

Wei et al., 2009a, propõem um método baseado na variação discreta da seção transversal do ramo de alta condutividade. O método consiste em fixar primeiramente o número ótimo de ramos ( $n=4$ ) e depois se concentra na otimização da seção transversal dos ramos de alta condutividade, que deve ser adaptada com base na mudança do fluxo de calor através dele. O trabalho propõe que para minimizar a resistência térmica, dentro do ramo

condutor, deve-se aumentar a sua seção transversal. Foram discutidos os casos de área elementar com ramo condutor de seção transversal constante, e de área elementar com ramo de seção transversal variável. Em seus resultados, a menor resistência térmica foi registrada para os casos onde foi feita a variação da seção transversal do ramo condutor.

Em Eslami e Jafarpur, 2012, é fornecido um método geral para calcular a resistência térmica de caminhos de alta condutividade distribuídos em um material com geração de calor e de configuração arbitrária. Na Figura 2.20 é mostrado que a resistência térmica do material pode ser escrita na forma convencional de uma resistência dimensional de um determinado comprimento considerado. A resistência térmica de todo o conjunto é obtida por uma soma ponderada de todas as resistências térmicas. São apresentados os resultados para diferentes configurações geométricas e o método se mostra consistente com as soluções analíticas e numéricas disponíveis.

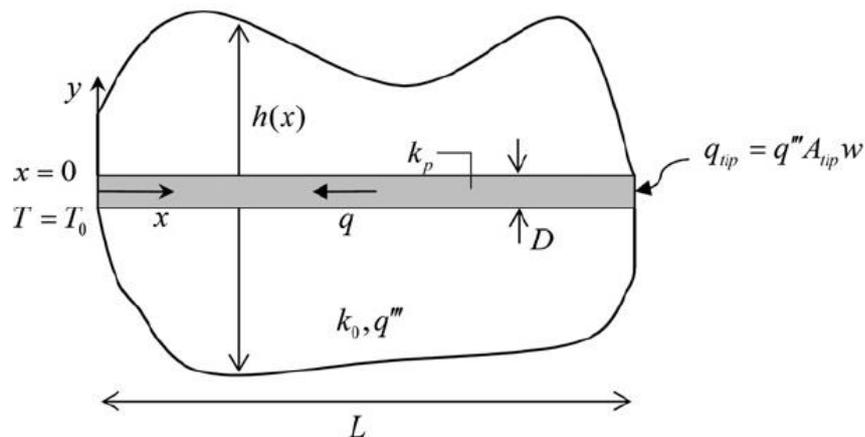


Figura 2.20 – Ramo de alta condutividade distribuído em área de formato arbitrário com geração de calor, Eslami e Jafarpur, 2012.

Lorenzini et al., 2013a, aplicam a teoria constructal para descobrir a configuração que facilita a troca térmica através de vias em forma de X de material de alta condutividade incorporado em um meio com geração de calor em forma de uma chapa quadrada de baixa condutividade. O objetivo é o de minimizar o excesso máximo de temperatura de todo o sistema, independentemente do local em que estão localizados. Novamente o volume total e o volume do material de elevada condutividade térmica são mantidos fixos e os comprimentos podem variar. O domínio está representado na Figura 2.21. A configuração de vias condutoras

em forma de X chega a ser mais do que 50% superior quanto à troca térmica, quando comparados configuração em forma de I. Outra informação interessante deste trabalho é a comprovação de que o volume elementar não é único, mas pode variar dependendo da condutividade térmica dos materiais e/ou da razão entre os volumes dos materiais de alta e baixa condutividade. Lorenzini et al., 2013b, mostraram que uma redução adicional de 10% no excesso de temperatura pode ser obtida quando são diferentes as formas dos ramos simples e bifurcados do material de alta condutividade em X.

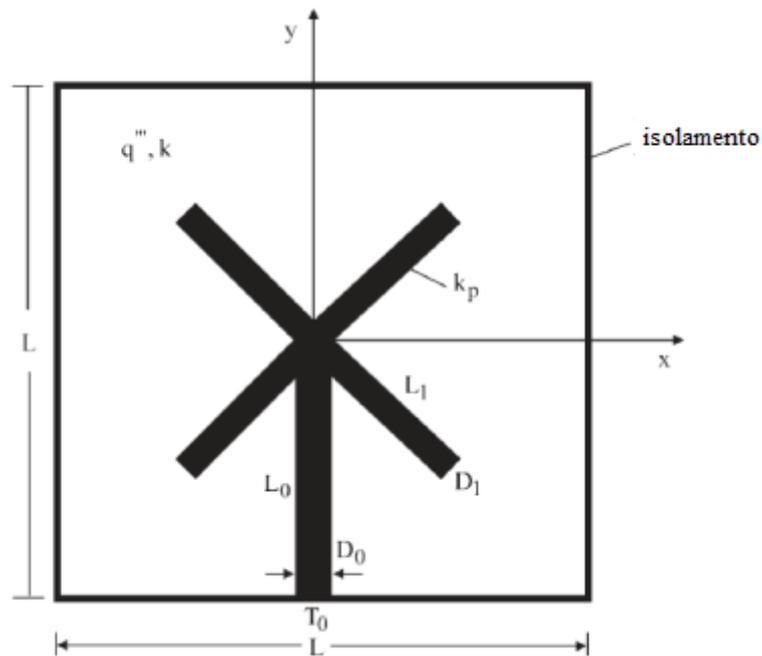


Figura 2.21 – Domínio da geometria otimizada em Lorenzini et al., 2013.

Portanto, este trabalho combina as ideias clássicas de otimização construtiva de aletas das referências [Bejan e Dan, 1999, Alebrahim e Bejan, 1999, Bejan e Almogbel, 2000] com o método de elementos finitos das referências [Lorenzini e Rocha, 2006, Lorenzini e Rocha, 2009, Biserni e Rocha, 2004, Biserni et al., 2007, Rocha et al., 2004, Xie et al., 2009b, Lorenzini e Rocha, 2009, Xie et al., 2009a e 2009b] para estudar os efeitos da otimização de uma geometria de um material de alta condutividade térmica com a forma de um Y inserido em um corpo quadrado onde há geração de calor uniforme.

Embora os formatos desenvolvidos teoricamente para efetuar a troca térmica de sistemas aquecidos possam ser vistos como construções que exigem maiores investimentos, os benefícios na eficiência do conjunto certamente serão sentidos. À medida que se desenvolvem novas tecnologias, as técnicas de fabricação também devem evoluir, especialmente quando o design desempenha uma função térmica na estrutura. Este estudo pode contribuir ainda mais para o conhecimento sobre estes fenômenos e fornecer algumas orientações teóricas para alguns projetos de engenharia desse gênero.

### 3 MODELO MATEMÁTICO

Neste trabalho realiza-se o estudo numérico de um corpo condutor de calor. O objetivo é minimizar a resistência térmica global adimensional do sistema. A geometria está sujeita a duas restrições: o volume total e o volume do material de alta condutividade.

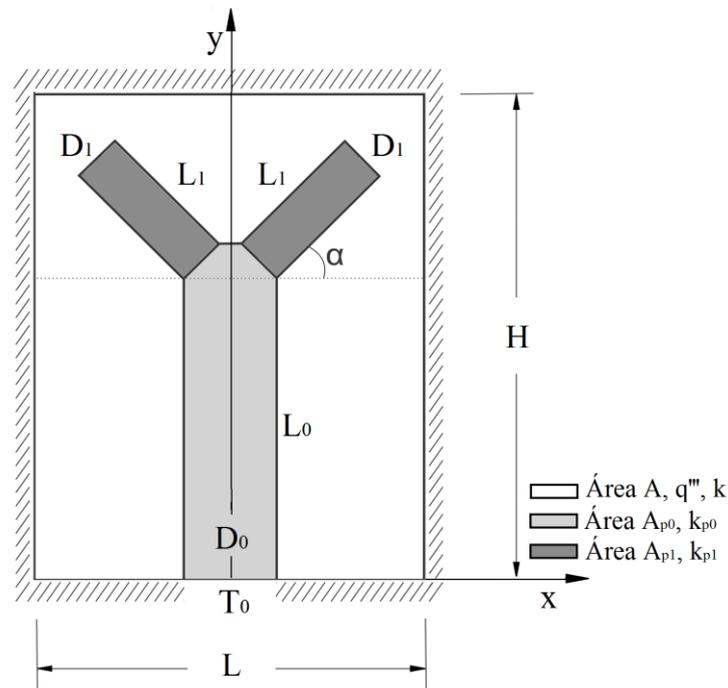


Figura 3.1 – Detalhes das áreas do domínio com diferentes valores de condutividade térmica e principais dimensões para o corpo altamente condutor a ser analisado.

Considere o corpo condutor mostrado na Figura 3.1. Nesta figura se apresenta uma descrição do domínio a ser analisado. O material gerador de calor tem menor condutividade térmica,  $k$ , e área fixa  $A$ , definida pelo produto da base  $L$  pela altura  $H$ . Sobre esta área se tem três vias de material de alta condutividade térmica,  $k_{p0}$  e  $k_{p1}$ , em formato de Y. A área  $A_{p0}$  é composta pela base do Y. Os outros dois ramos de área  $A_{p1}$  têm comprimento  $L_1$  e espessura  $D_1$ . O ângulo formado entre o lado  $L_1$  e a horizontal é  $\alpha$ . A arquitetura ideal é

aquela que maximiza a troca térmica e é definida pelas dimensões ótimas. Os graus de liberdade escolhidos para essa análise são:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\alpha$ .

Para simplificar o estudo a geometria é assumida bidimensional, com a hipótese da terceira dimensão  $w$  ser suficientemente longa em comparação com as outras duas dimensões. A geração de calor na região de baixa condutividade térmica  $k$  é uniforme a taxa volumétrica  $q'''$  ( $W/m^3$ ). As superfícies exteriores do sólido são perfeitamente isoladas. A taxa de energia gerada ( $q'''Aw$ ) é removida pelos dissipadores de calor localizados na borda do corpo à temperatura  $T_0$ .

O objetivo é determinar a configuração geométrica da via em  $Y$  que forneça a menor resistência ao fluxo de calor. A função objetivo é temperatura máxima em excesso,  $(T_{\max} - T_0)/(q'''A/k)$ .

A altura  $H$  (m) e o comprimento  $L$  (m) são os limites do volume nas direções  $x$  e  $y$ . A condutividade térmica dos materiais é uniforme ao longo de suas superfícies. Além disso, a taxa de geração uniforme de calor através do material menos condutor é conhecida. As duas restrições de área podem ser descritas conforme se segue:

A restrição da área total:

$$A = HL \quad (3.1)$$

e a restrição da área ocupada pelos materiais de alta condutividade,

$$A_p = A_{p0} + A_{p1} \quad (3.2)$$

Sendo:

$$A_{p0} = L_0 D_0 + \left( \frac{D_0 + (D_0 - 2X)}{2} \right) Y \quad (3.3)$$

$$A_{p1} = 2L_1 D_1 \quad (3.4)$$

com

$$X = D_1 \cos \beta, \quad Y = D_1 \sin \beta \quad (3.5)$$

Sendo

$$\beta = \pi - \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \quad (3.6)$$

As frações de área,  $\phi_0$  e  $\phi_1$ , podem ser expressa pelas equações (3.7) e (3.8):

$$\phi_1 = \frac{A_{P1}}{A} \quad (3.7)$$

$$\phi_0 = \frac{A_{P0}}{A} \quad (3.8)$$

A análise que proporciona o maior valor de temperatura máxima em excesso em função da geometria consiste em resolver numericamente a equação de condução com geração de calor constante ao longo da região de menor condutividade térmica  $k$ .

O campo de temperaturas é obtido a partir da equação da difusão, dada pela equação (3.9):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.9)$$

Para o problema que está sendo resolvido são apresentadas as seguintes hipóteses simplificativas:

- Transferência de calor em regime permanente,  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ;
- Taxa de geração de calor por unidade de volume uniforme  $q'''$ ;
- Problema bidimensional nas direções  $x$  e  $y$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$ ;

- Propriedades termofísicas constantes.

Assumindo tais hipóteses simplificativas, a equação da difusão de calor que será resolvida neste trabalho para a região de baixa condutividade  $k$  é dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (3.10)$$

Usando os grupos dimensionais abaixo,

$$\theta = \frac{T - T_0}{q''' A / k} \quad \tilde{k}_{p0}, \tilde{k}_{p1} = \frac{k_{p0}, k_{p1}}{k} \quad (3.11)$$

$$\tilde{X} = \tilde{D}_0 \left( \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_0} \right) \cos \beta, \quad \tilde{Y} = \tilde{D}_0 \left( \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_0} \right) \sin \beta \quad (3.12)$$

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{L}, \tilde{H}, \tilde{L}_0, \tilde{D}_0, \tilde{L}_1, \tilde{D}_1 = \frac{x, y, L, H, L_0, D_0, L_1, D_1}{\sqrt{A}} \quad (3.13)$$

a equação (3.10) toma a forma adimensional que se segue:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \quad (3.14)$$

De maneira semelhante, a equação da difusão de calor (3.9) é resolvida para as regiões de alta condutividade térmica,  $k_{p0}$  e  $k_{p1}$  assumindo, além das hipóteses já mencionadas, que não há geração de calor nessa região ( $q''' = 0$ ).

Sendo assim, a equação adimensional a ser resolvida para as regiões de alta condutividade térmica torna-se:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} = 0 \quad (3.15)$$

As formas adimensionais das equações (3.1) e (3.3) e (3.4) são respectivamente:

$$1 = \tilde{H}\tilde{L} \quad (3.16)$$

$$\phi_0 = \frac{\phi_1}{2 \left( \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_0} \right) \left( \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_0} \right)} + \tilde{D}_0 \tilde{Y} - \tilde{X} \tilde{Y} \quad (3.17)$$

$$\phi_1 = 2\tilde{L}_1 \tilde{D}_1 \quad (3.18)$$

A resistência térmica ou excesso de temperatura máximo,  $\theta_{\max}$ , pode ser expresso conforme a equação (3.19):

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max} - T_0}{q''' \frac{A}{k}} \quad (3.19)$$

onde  $T_{\max}$  é a temperatura máxima do componente e aparece inevitavelmente. É um reflexo da segurança do equipamento. Com a  $T_{\max}$  mais elevada, menor é a segurança do equipamento.

Assim, por um lado, a resistência térmica máxima  $\theta_{\max}$  caracteriza a segurança do equipamento, e, por outro lado, reflete a impedância máxima de transferência de calor com a taxa fixa de fluxo de calor na base da geometria, quanto menor o valor, melhor é para o conjunto.

Para desenhar o domínio faz-se necessário a determinação das coordenadas dos pontos da geometria em estudo. A Figura A.1 e a Tabela A.1 em anexo representa e identifica os detalhes das coordenadas dos pontos.

### 3.1 Condições de contorno

Para se encontrar a distribuição de temperatura do meio em questão é necessário resolver a equação do calor apropriada para cada uma das superfícies, neste caso as Equações 3.14 e 3.15.

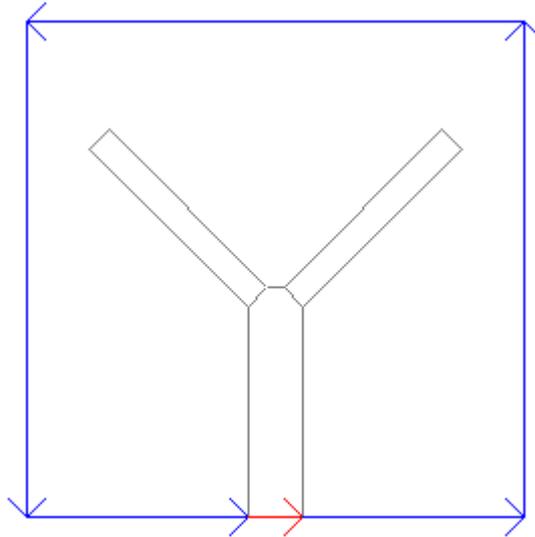


Figura 3.2 – Representação das condições de contorno do problema.

As superfícies externas apresentam comportamento adiabático, representadas pelas linhas azuis na Figura 3.2, enquanto que na linha de cor vermelha ocorre a condição de fluxo prescrito nulo.

Então, para as superfícies exteriores isoladas temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{n}} = 0 \quad (3.20)$$

onde “n” é a coordenada corresponde nas quatro superfícies isoladas.

Para a superfície em contato com o dissipador de calor a condição de contorno é dada por uma temperatura constante:

$$\theta_0 = 0 \quad (3.21)$$

## 4 MÉTODO NUMÉRICO

O método numérico foi inicialmente desenvolvido para uma configuração inicial com a forma de um Y onde o valor de  $k_{p0} = k_{p1}$ . Dessa maneira, a geometria da Figura 3.1 necessita das seguintes dimensões para ser desenhada:  $L$ ,  $H$ ,  $L_0$ ,  $D_0$ ,  $L_1$ ,  $D_1$  e o ângulo  $\alpha$ . Uma primeira restrição é dada pela equação (3.16). A segunda restrição é dada por:

$$\phi = \frac{A_P}{A} \quad (4.1)$$

onde  $A_P$  é a área da região ocupada pelo material de alta condutividade. Essa equação pode ser escrita na forma adimensional por:

$$\phi = 2\tilde{L}_1\tilde{D}_1 + \tilde{L}_0\tilde{D}_0 + \tilde{D}_0\tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{Y} \quad (4.2)$$

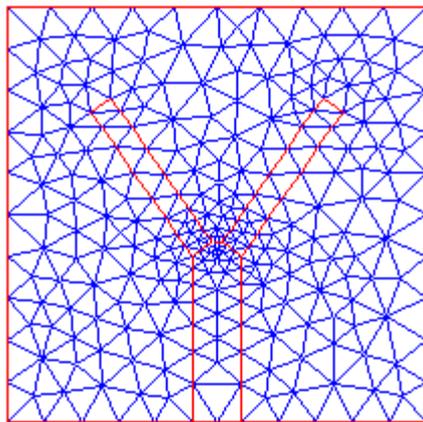
onde  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são definidos pelas equações (3.12). Assim, o domínio pode ser desenhado com o auxílio das equações (3.12) e (4.2) e os cinco graus de liberdades que foram definidos de forma adimensional como:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$ ,  $\tilde{D}_0$  e  $\alpha$ .

A função definida pela eq. (3.19) pode ser determinada resolvendo as equações (3.14) e (3.15) para o campo de temperatura em cada configuração assumida ( $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$ ,  $\tilde{D}_0$  e  $\alpha$ ) e calculando  $\theta_{\max}$  para verificar se o valor encontrado pode ser minimizado variando esta configuração. Para tanto, as equações (3.14) e (3.15) foram resolvidas utilizando um código de elementos finitos, com base em elementos triangulares, desenvolvido em ambiente MATLAB®, precisamente a ferramenta PDE (equações diferenciais parciais), MATLAB®, 2006.

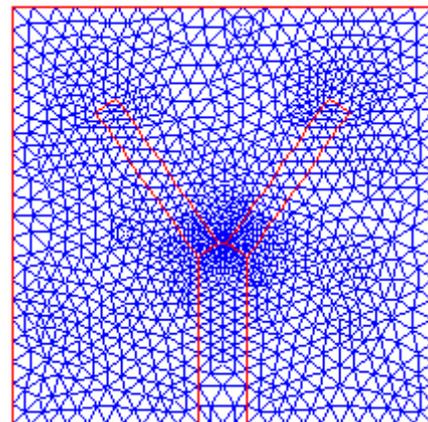
A malha adotada é não-uniforme em  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , e variou de uma geometria para a seguinte. O tamanho de malha apropriado foi determinado por refinamentos sucessivos com aumento do número de elementos de quatro vezes o tamanho da malha corrente para o

tamanho de malha seguinte, até que o critério  $\left| (\theta_{\max}^j - \theta_{\max}^{j+1}) \theta_{\max}^j \leq 5 \times 10^{-5} \right|$  estivesse satisfeito.

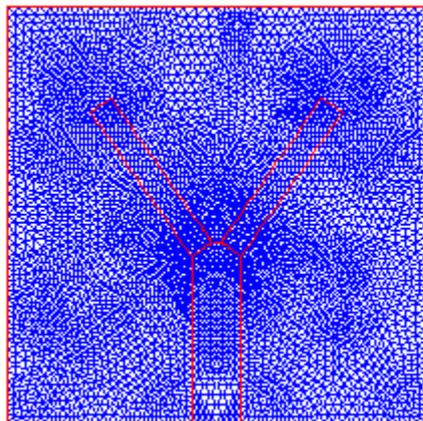
Aqui  $\theta_{\max}^j$  representa o excesso de temperatura máximo adimensional calculado utilizando o tamanho de malha corrente, e  $\theta_{\max}^{j+1}$  corresponde ao excesso de temperatura máximo adimensional usando a malha seguinte, onde o número de elementos foi aumentado em quatro vezes.



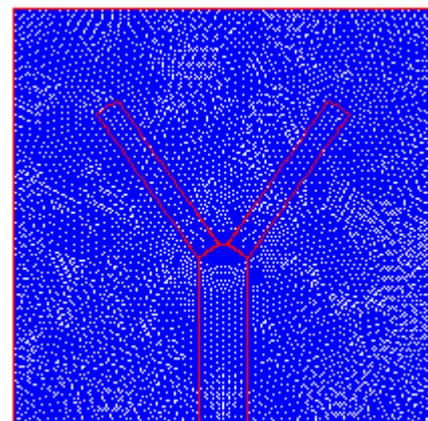
a) 506 elementos triangulares



b) 2.024 elementos triangulares



c) 8.096 elementos triangulares



d) 32.384 elementos triangulares

Figura 4.1 – Representação gráfica do número de elementos triangulares de malha.

A Figura 4.1 foi obtida usando um intervalo entre 500 e 32.400 elementos triangulares. A Tabela 4.1 apresenta como a independência de malha foi alcançada.

Tabela 4.1 – Testes para encontrar os resultados numéricos independentes do número de elementos de malha com  $\phi = 0,1$ ,  $H/L = 1$ ,  $\tilde{D}_0 = 0,1186$ ,  $L_1/L_0 = 1,05$ ,  $D_1/D_0 = 0,5$ ,

$$\tilde{k}_{p0} = \tilde{k}_{p1} = 100, \alpha = 55^\circ.$$

Número de elementos	$\theta_{\max}^j$	$\left  \left( \theta_{\max}^j - \theta_{\max}^{j+1} \right) / \theta_{\max}^j \right $
506	0,101261	$6,0240 \times 10^{-4}$
2024	0,101322	$2,6648 \times 10^{-4}$
8096	0,101349	$1,2827 \times 10^{-4}$
32384	0,101362	$5,9194 \times 10^{-5}$
129536	0.101368	-

O método numérico foi validado comparando o código desenvolvido com os resultados numéricos obtidos por Kuddusi e Denton, 2007. O domínio neste caso tem a forma de um caminho com a forma de I (isto é, somente um caminho correspondente à área  $A_{p0}$ , onde os ramos do Y foram degenerados fazendo com que os graus de liberdade  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\alpha$  tendessem a zero). Para que os resultados pudessem ser comparados com Almogbel e Bejan, 1999, a equação (3.14) foi substituída pela (4.3).

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{1-\phi} = 0 \quad (4.3)$$

A Tabela 4.2 mostra que os resultados concordaram dentro de 0,01%.

Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados deste trabalho com o trabalho de Kuddusi e Denton, 2007, ( $H/L = 1$ ,  $L_1/L_0 \approx 0,01$ ,  $\tilde{D}_0 = 0,1082$   $D_1/D_0 \approx 0,01$ ,  $\alpha \approx 0,1$ ).

$\phi$	$\tilde{k}_p$	$(D_0/L_0)^1$	$(D_0/L_0)^2$	$\theta_{\max,m}^1$	$\theta_{\max,m}^2$
0,1	100	0,1172	0,1170	0,1499	0,1500
0,1	250	0,1130	0,1130	0,1278	0,1280
0,1	300	0,1100	0,1100	0,1252	0,1250
0,1	550	0,1100	0,1100	0,1194	0,1190

<sup>1</sup> neste trabalho

<sup>2</sup> Kuddusi e Denton, 2007

## 5 RESULTADOS

O objetivo do trabalho é determinar numericamente o campo de temperatura de diferentes configurações geométricas, conforme mostra a Figura 5.1.

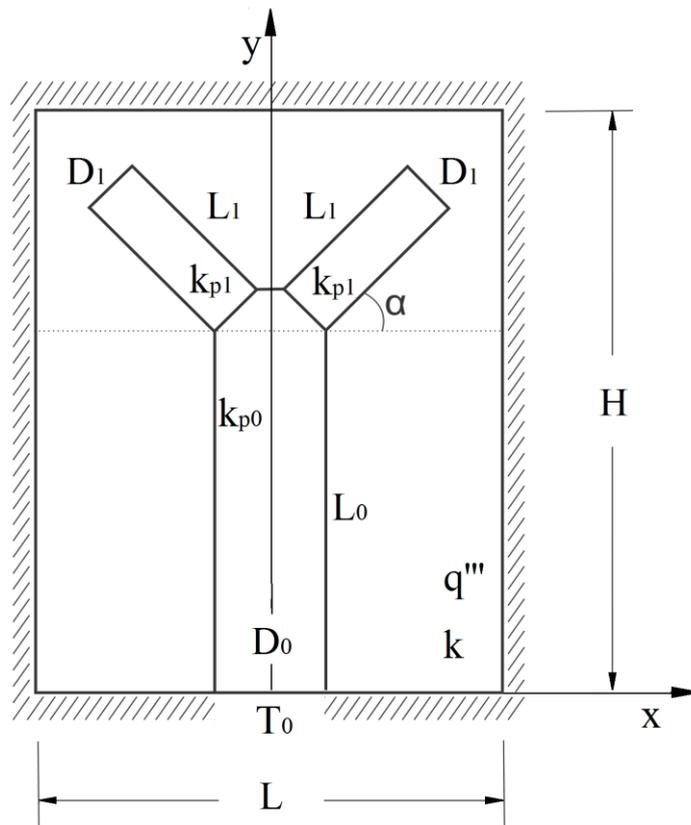


Figura 5.1 – Esquema do corpo de baixa condutividade com geração de calor e com geometria em forma de Y com grande condutividade térmica.

Primeiramente foi feita análise dos parâmetros com  $\tilde{k}_{p0} = \tilde{k}_{p1}$  logo em seguida se avaliou o comportamento para a variação  $\tilde{k}_{p0}$  diferente de  $\tilde{k}_{p1}$ .

## 5.1 Geometria com condutividades iguais

Quando a geometria composta de material altamente condutor apresenta uma única constituição, ou seja, uma condutividade térmica igual para a base e para os ramos do Y, diferente da Figura 3.1, a distribuição das áreas do domínio ficam como na Figura 5.2. Nessas condições o modelo matemático é governado pelas equações (3.14) e (3.15), sujeito às condições de contorno dadas pelas equações (3.20) e (3.21) e às restrições apresentadas nas equações (3.16) e (4.2). Os cinco graus de liberdade foram definidos de forma adimensional como:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$ ,  $\tilde{D}_0$  e  $\alpha$ . Nesta dissertação, se assumiu um corpo quadrado, isto é,  $H/L = 1$ .

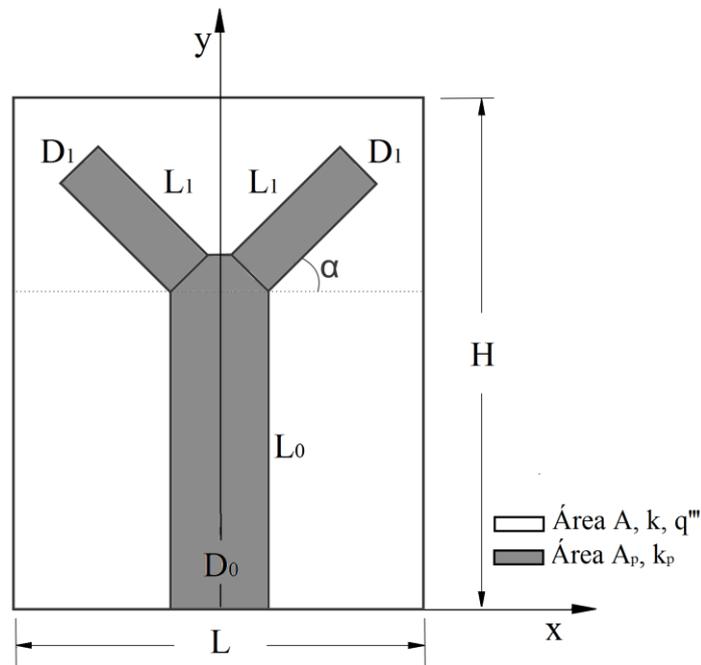


Figura 5.2 – Detalhes das áreas do domínio quando o corpo altamente condutor apresenta igual condutividade térmica.

Inicialmente é investigado o comportamento da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade  $L_1/L_0$ , mantendo fixos os parâmetros  $\phi = 0,1$ ,  $\tilde{k}_p = 100$ ,  $D_1/D_0 = 0,5$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\tilde{D}_0 = 0,1$ , conforme ilustra a Figura 5.3. Esta figura mostra que existe uma razão  $(L_1/L_0)_o \approx 4$ . Este valor receberá o subscrito “o” de ótimo e o

correspondente valor para a temperatura máxima mínima  $(\theta_{\max})_m \approx 0,112$  onde o subscrito “m” significa mínimo.

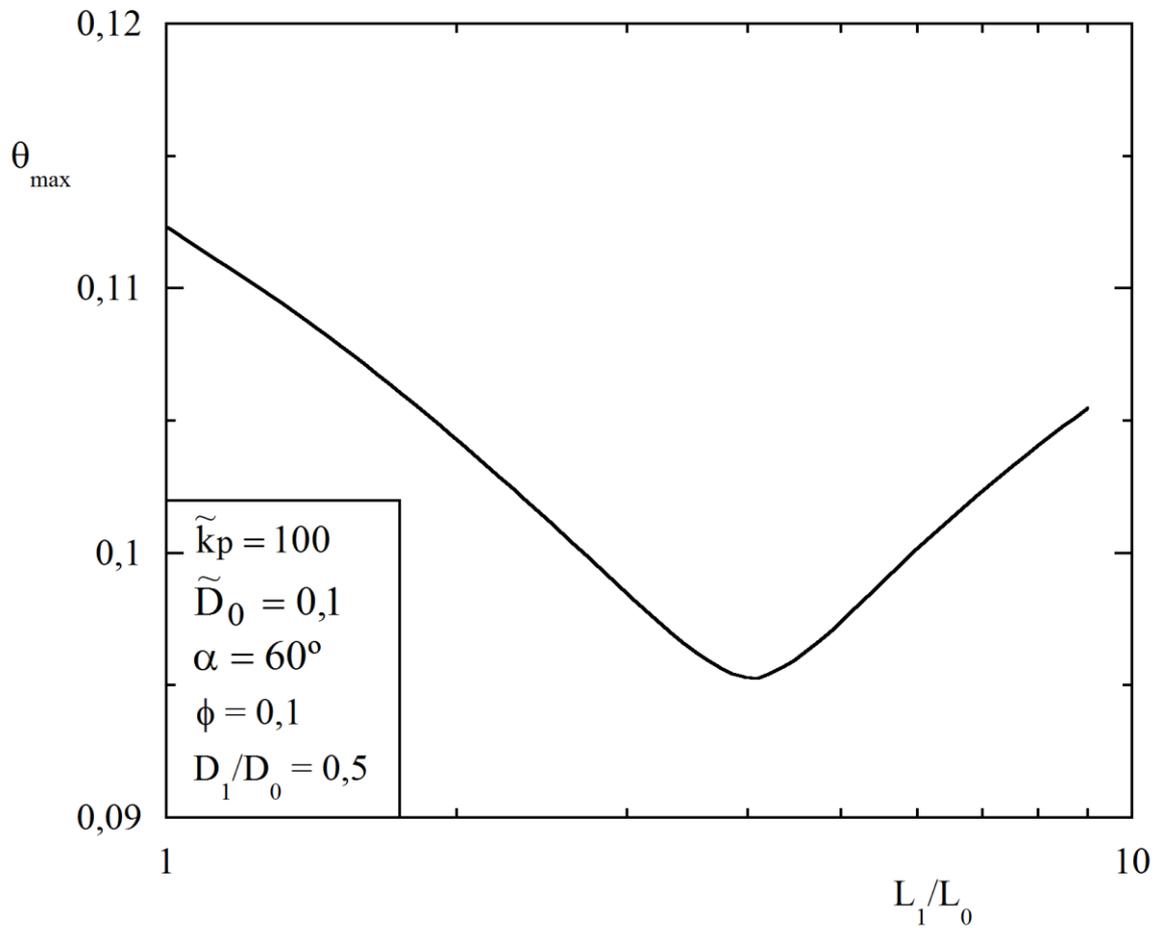


Figura 5.3 – Efeito da razão  $L_1/L_0$  no excesso máximo de temperatura  $\theta_{\max}$ .

O procedimento adotado na Figura 5.3 é repetido para vários ângulos  $\alpha$  e as razões  $(L_1/L_0)_o$  e os correspondentes  $(\theta_{\max})_m$  são mostrados na Figura 5.4 para vários ângulos  $\alpha$ .

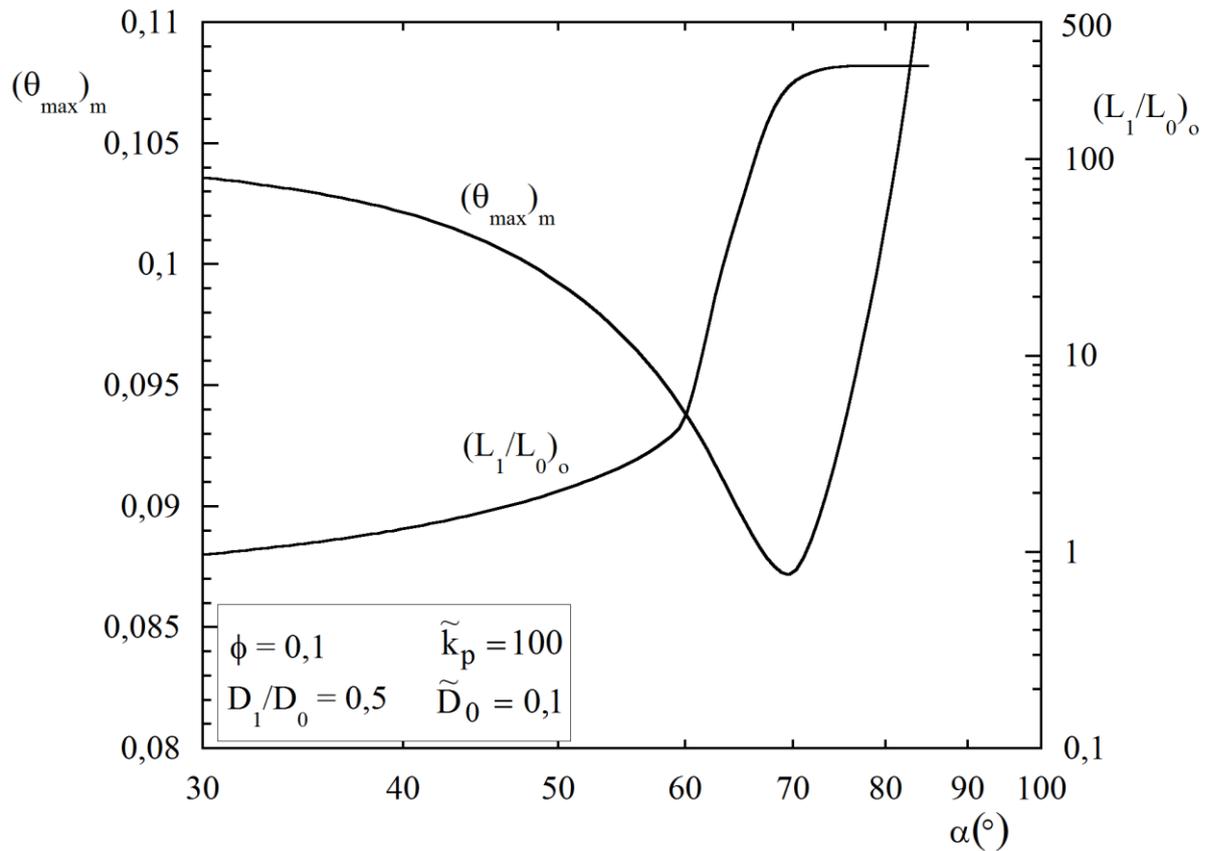
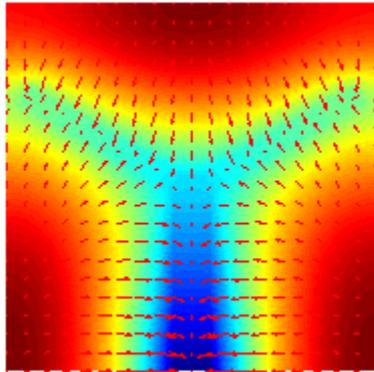


Figura 5.4 – Excesso de temperatura máxima  $(\theta_{\max})_m$  e a correspondente ótima razão  $(L_1/L_0)_o$  em função do ângulo  $\alpha$ .

Pode ser observado que o melhor desempenho foi percebido para ângulo  $\alpha_o = 70^\circ$ , onde “o” é o índice que indica que o ângulo foi otimizado uma vez. Os valores correspondentes a este ângulo ótimo recebem também índices indicando que foram otimizados duas vezes,  $(\theta_{\max})_{mm} \approx 0,0847$  e  $(L_1/L_0)_{oo} \approx 300$ . Na verdade a Figura 5.4 retrata que a relação  $(L_1/L_0)_{oo}$  correspondente a esse desempenho tende a infinito (300 foi o valor máximo simulado), ou seja, o comprimento do ramo simples,  $L_0$ , deve ser muito menor do que o comprimento do ramos bifurcado,  $L_1$ . Dessa forma, os ramos  $L_1$  da configuração em “Y” degeneraram e a melhor configuração na verdade tem uma forma em “V”. Para valores de  $\alpha$  maiores do que  $70^\circ$  o desempenho diminui, mas a relação ótima de  $L_1/L_0$  continua sendo para valores bastante altos, significando que a configuração “V” continua prevalecendo. Para

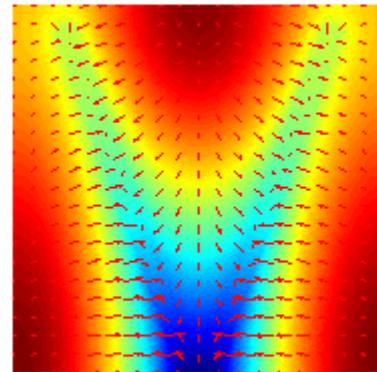
melhor representar a influência do ângulo  $\alpha$ , na Figura 5.5 foram plotadas as geometrias ótimas para os ângulos  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha_o = 70^\circ$ ,  $\alpha = 80^\circ$  e  $\alpha = 85^\circ$ . Nelas é possível perceber que o excesso de temperatura máximo,  $\theta_{\max}$ , aumenta quando ocorre uma diminuição de três para dois pontos de máxima temperatura.



$$(L_1/L_0)_o = 0,97$$

$$\alpha = 30^\circ$$

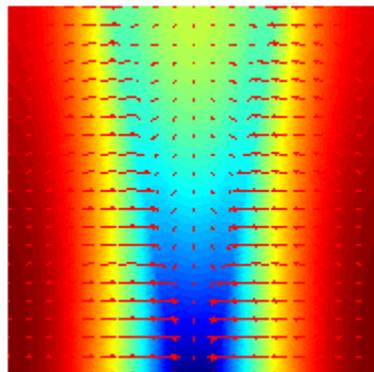
$$(\theta_{\max})_m = 0,1036$$



$$(L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha_o = 70^\circ$$

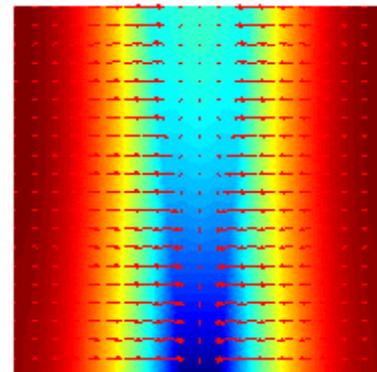
$$(\theta_{\max})_m = 0,0847$$



$$(L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha = 80^\circ$$

$$(\theta_{\max})_m = 0,1011$$



$$(L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha = 85^\circ$$

$$(\theta_{\max})_m = 0,1141$$

Figura 5.5 – Geometrias ótimas para diferentes valores do ângulo  $\alpha$ .

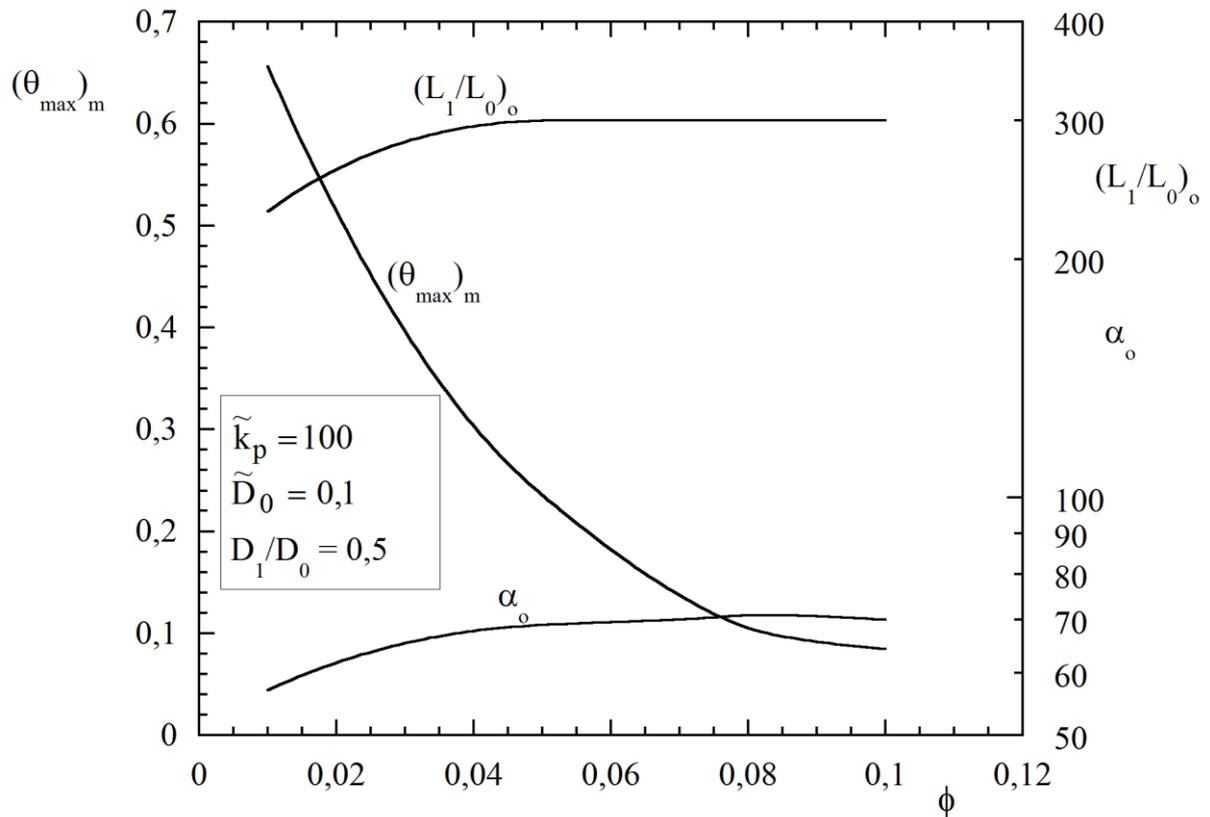
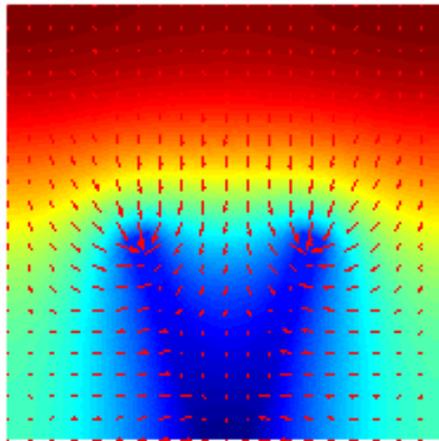


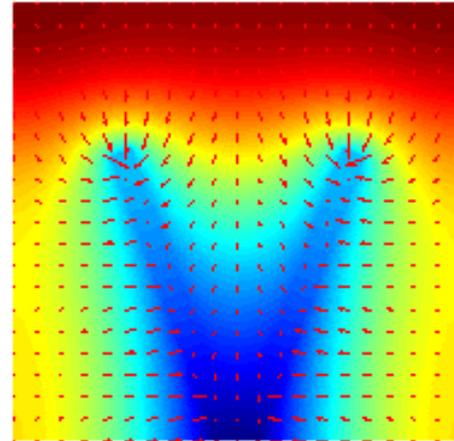
Figura 5.6 – Representação da variação da resistência térmica otimizada, de  $(L_1/L_0)_o$  otimizado e do ângulo  $\alpha_o$  otimizado em função da fração de área  $\phi$ .

A Figura 5.6 apresenta o comportamento da resistência térmica adimensional em função da fração de área  $\phi$ , sendo que este assumiu valores de 0,01 até 0,1. Foram mantidos constantes  $\tilde{k}_p = 100$ ,  $D_1/D_0 = 0,5$  e  $\tilde{D}_0 = 0,1$  e encontrados o ângulo ótimo,  $\alpha_o$ , que conferisse o melhor desempenho para o conjunto. Cerca de 80% dos resultados ótimos foram obtidos para  $\alpha_o \approx 70^\circ$  com  $\phi > 0,05$ . Novamente se percebe que quando  $L_0$  tende a zero se obtém melhor rendimento. Também se percebe que entre  $\phi = 0,08$  e  $\phi = 0,1$ , ou seja, se a área do Y aumenta em 20%, a melhoria no rendimento do sistema é de 17,5%. A Figura 5.7 mostra as geometrias ótimas obtidas com essa variação e seus respectivos valores para o excesso de temperatura máximo,  $\theta_{\max}$ . Novamente se percebe que a distribuição dos pontos quentes, ou uma distribuição das imperfeições do sistema, garante um melhor rendimento térmico.



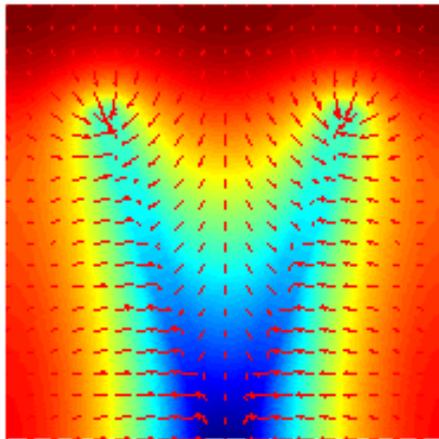
$$\phi = 0,05 \quad (L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha_o = 69^\circ \quad (\theta_{\max})_m = 0,2347$$



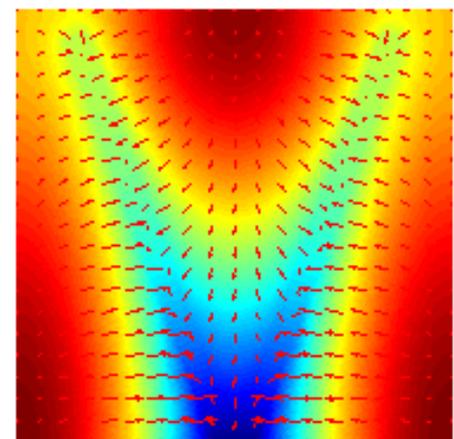
$$\phi = 0,07 \quad (L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha_o = 70^\circ \quad (\theta_{\max})_m = 0,1369$$



$$\phi = 0,08 \quad (L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha_o = 71^\circ \quad (\theta_{\max})_m = 0,1030$$



$$\phi = 0,1 \quad (L_1/L_0)_o = 300$$

$$\alpha_o = 70^\circ \quad (\theta_{\max})_m = 0,0847$$

Figura 5.7 – Representação gráfica das melhores configurações encontradas na Figura 5.6 para diferentes valores da fração de área  $\phi$ .

Para verificar qual a variação do campo de temperaturas com o aumento da condutividade térmica é possível observar a Figura 5.8 que apresenta o comportamento da resistência térmica global adimensional para diferentes valores de condutividade térmica para o material altamente condutor. Os novos valores para  $\theta_{\max}$  encontrados levam o subíndice “mm” para representar os novos valores duas vezes minimizados.

Os valores ótimos para  $(L_1/L_0)_{oo}$  novamente mostram valores altos como sendo os mais indicados e para o ângulo  $\alpha$  o valor de  $68^\circ$  fornece um  $(\theta_{\max})_{mm} = 0,0666$  quando a condutividade térmica adimensional é de 300. A condutividade térmica adimensional entre 200 e 300 apresenta melhora na troca térmica de 5% e entre 100 e 300 uma melhora de 21,3%. Nesta figura também é possível perceber um enrijecimento da geometria quando a condutividade térmica cresce a partir de  $\tilde{k}_p = 100$ .

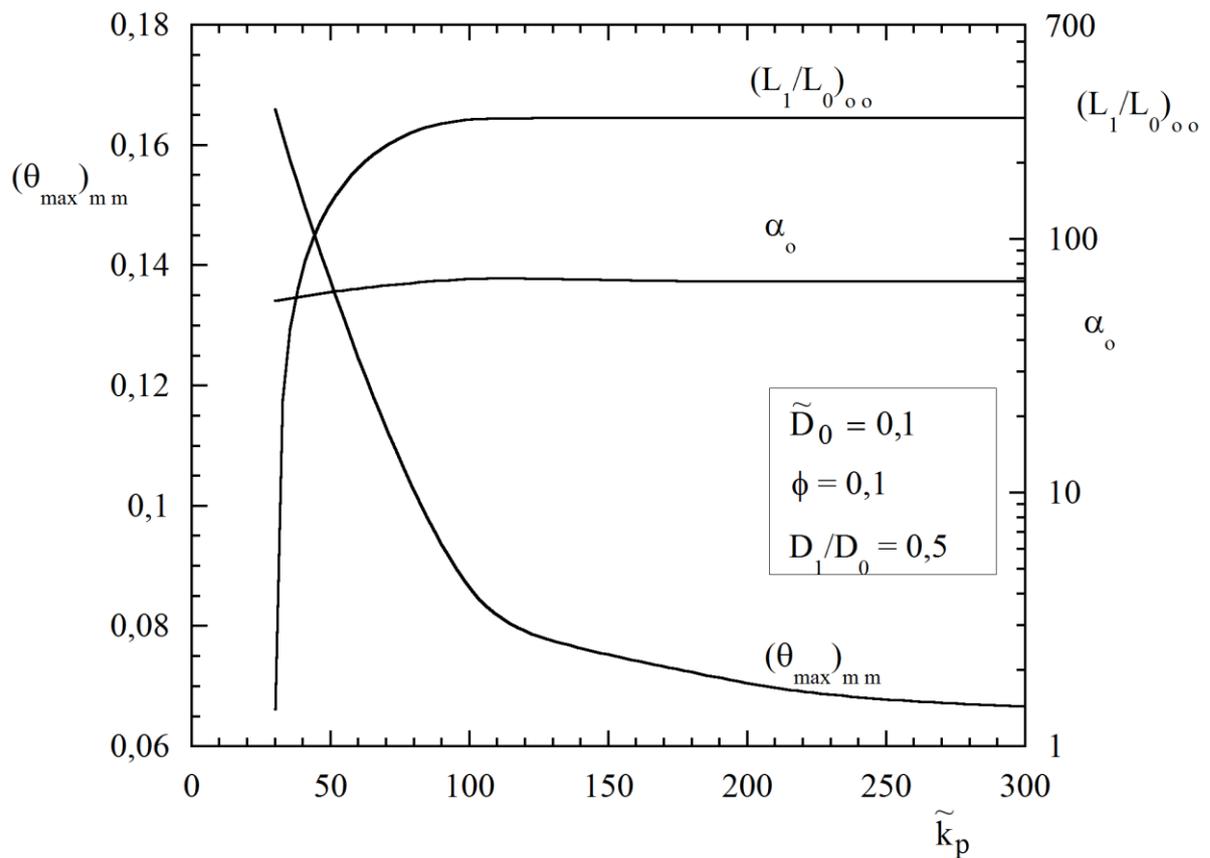
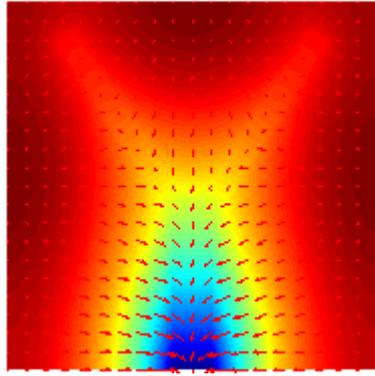


Figura 5.8 – Variação da resistência térmica duas vezes otimizada, do parâmetro  $(L_1/L_0)_{oo}$  otimizado e do ângulo  $\alpha_o$  otimizado em função da condutividade térmica  $\tilde{k}_p$ .

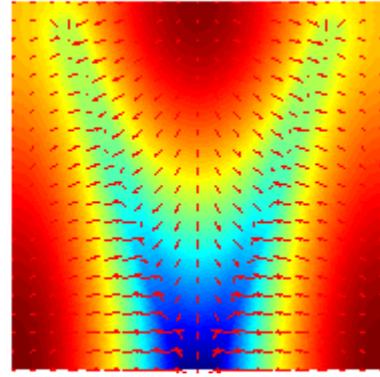
Para melhor representar as configurações ótimas encontradas nessa etapa, elas estão representadas na Figura 5.9 para  $\tilde{k}_p = 30$ ,  $\tilde{k}_p = 100$ ,  $\tilde{k}_p = 200$  e  $\tilde{k}_p = 300$ .



$$\tilde{k}_p = 30$$

$$(L_1/L_0)_{oo} = 1,4$$

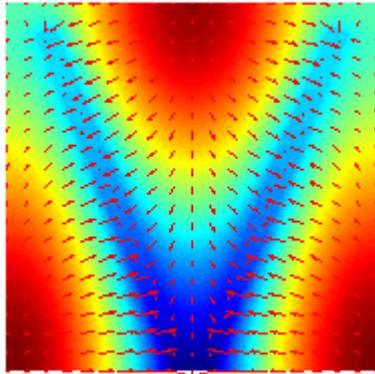
$$\alpha_o = 57^\circ \quad (\theta_{\max})_{mm} = 0,1659$$



$$\tilde{k}_p = 100$$

$$(L_1/L_0)_{oo} = 300$$

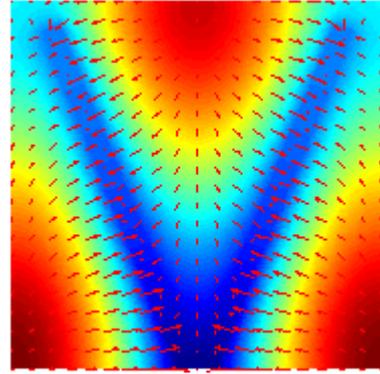
$$\alpha_o = 70^\circ \quad (\theta_{\max})_{mm} = 0,0847$$



$$\tilde{k}_p = 200$$

$$(L_1/L_0)_{oo} = 300$$

$$\alpha_o = 68^\circ \quad (\theta_{\max})_{mm} = 0,0705$$



$$\tilde{k}_p = 300$$

$$(L_1/L_0)_{oo} = 300$$

$$\alpha_o = 68^\circ \quad (\theta_{\max})_{mm} = 0,0666$$

Figura 5.9 – Representação gráfica das melhores configurações encontradas na Figura 5.8 para frações de área  $\phi = 0,1$ .

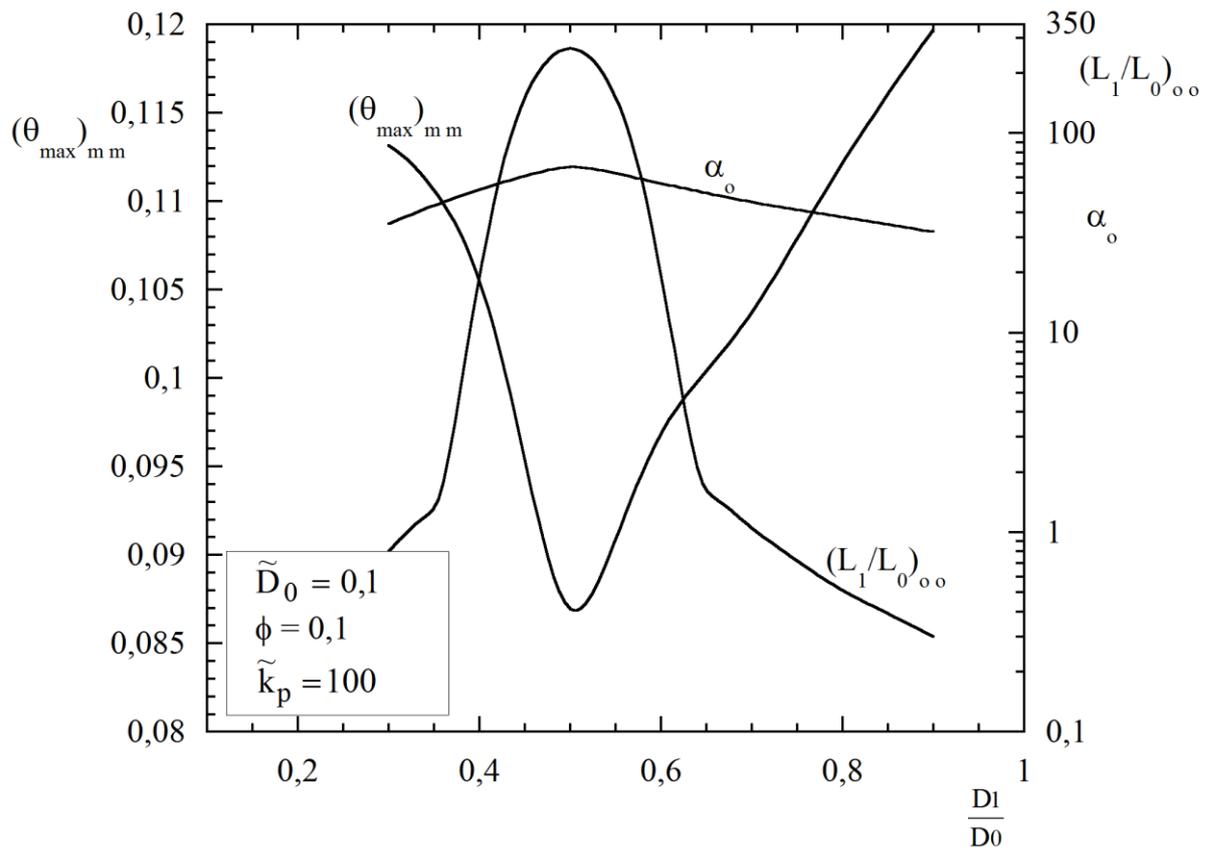


Figura 5.10 – Otimização do grau de liberdade  $D_1/D_0$ .

Para demonstrar a influência do grau de liberdade  $D_1/D_0$  foi repetido o procedimento mostrado para a Figura 5.4 para diversos valores dessa razão  $D_1/D_0$ . Foram mantidos fixos nessa análise  $\tilde{D}_0 = 0,1$ ,  $\phi = 0,1$  e  $\tilde{k}_p = 100$ . Agora foi determinado  $(D_1/D_0)_o = 0,5$  e o ângulo  $\alpha_{oo}$  correspondente ao melhor desempenho térmico nesta análise é o mesmo já encontrado Figura 5.5, confirmando o valor ótimo de  $\alpha_{oo} = 70^\circ$  fornecendo novamente o valor de  $(\theta_{\max})_{\text{mmm}} = 0,0847$  e o correspondente  $(L_1/L_0)_{\text{ooo}} \approx 300$ . A Figura 5.11 mostra algumas formas encontradas na Figura 5.10.

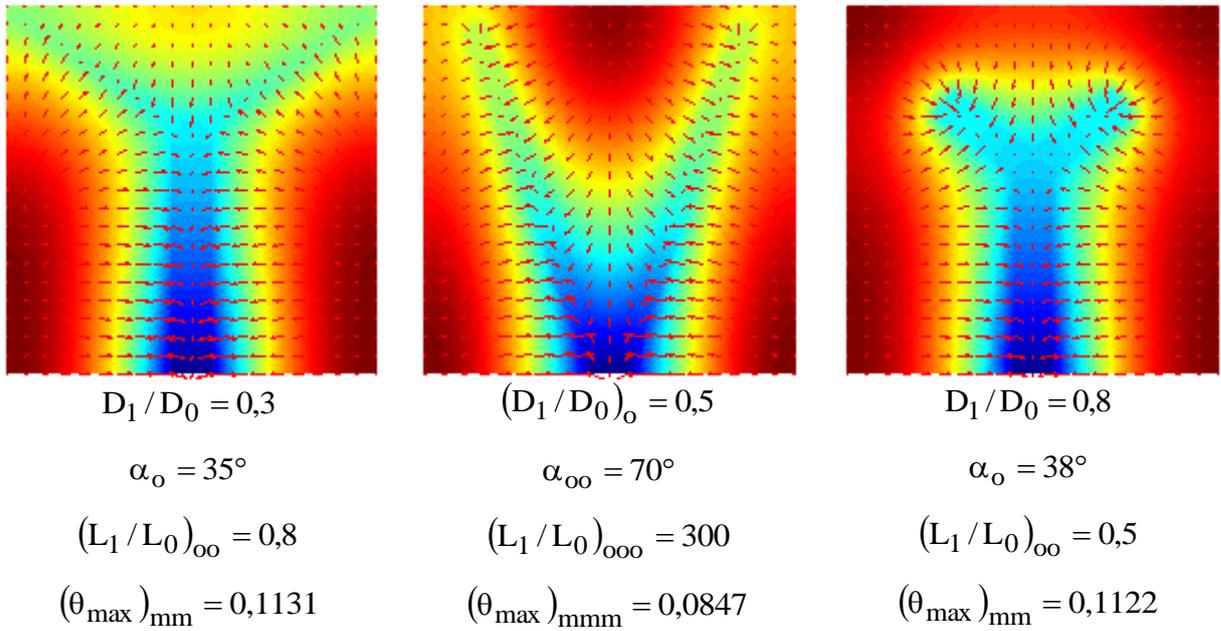


Figura 5.11 – Geometrias ótimas obtidas na Figura 5.10.

Finalmente como última otimização, a Figura 5.12 mostra como se comporta o excesso de temperatura em função de  $\tilde{D}_0$ . Foram mantidos fixos nessa análise apenas  $\phi = 0,1$  e  $\tilde{k}_p = 100$ . Foi repetido o procedimento da Figura 5.9, mas agora para diversos valores de  $\tilde{D}_0$ . A Figura 5.12 mostra que existe um valor de  $(\tilde{D}_0)_o = 0,14$  que minimiza o excesso de temperatura máxima quatro vezes,  $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,0805$ . Os outros graus de liberdade ótimos correspondentes são  $(D_1/D_0)_{oo} = 0,4$ ,  $\alpha_{ooo} = 73^\circ$  e  $(L_1/L_0)_{oooo} \approx 300$ . A Figura 5.12 também mostra que para valores de  $\tilde{D}_0$  maiores que 0,14 os outros graus de liberdade ótimos calculados se mantêm aproximadamente iguais aos valores calculados para  $(\tilde{D}_0)_o = 0,14$ . Na Figura 5.13 são exibidas algumas geometrias encontradas na Figura 5.12.

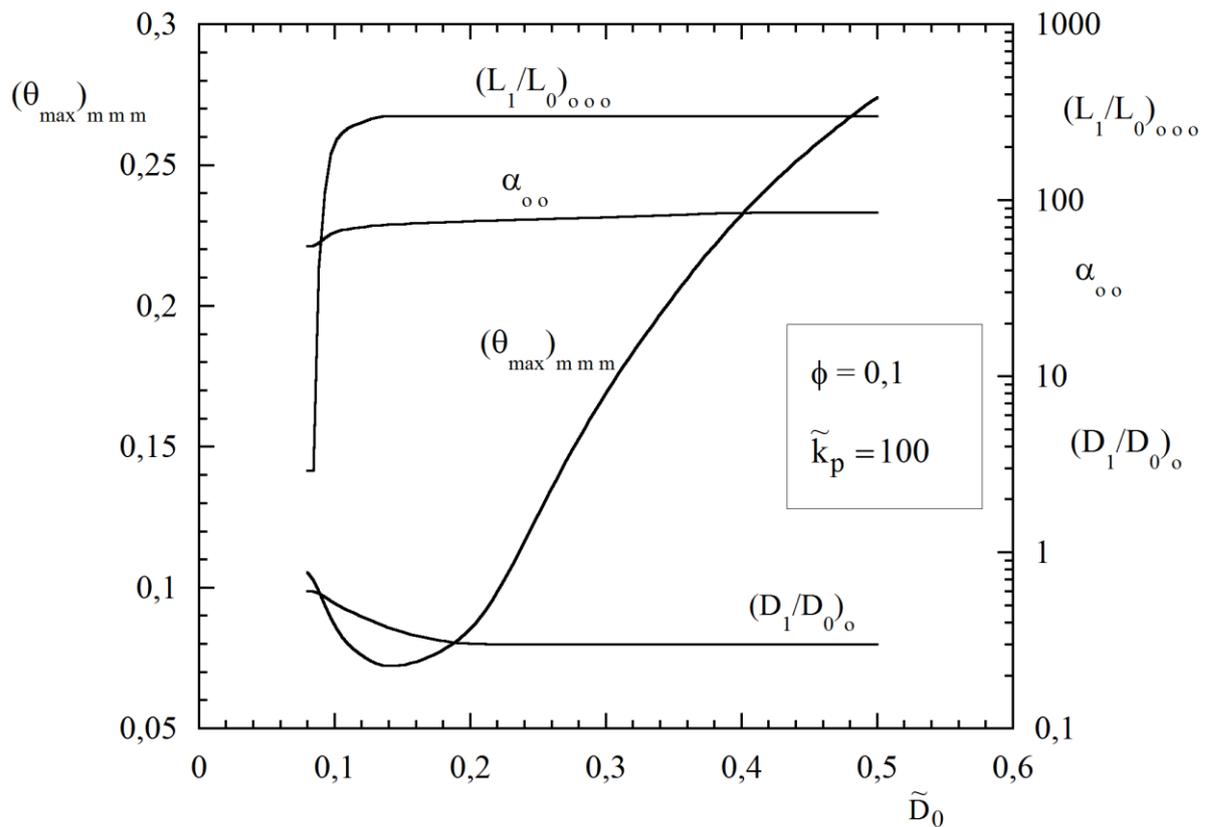


Figura 5.12 – Efeito do grau de liberdade  $\tilde{D}_0$  em  $(\theta_{\max})_{\text{mmm}}$  e suas respectivas geometrias.

Uma comparação dos resultados obtidos com trabalhos semelhantes mostra como a geometria otimizada distribui as imperfeições (os pontos quentes, isto é, pontos de maior temperatura) ao longo de toda a superfície, resultando no melhor desempenho dos sistemas. Na Figura 5.14 se percebe que quando comparado com a geometria em I, o formato de Y consegue um desempenho de aproximadamente 46% melhor. Quando comparado com o formato em X este melhor desempenho é de aproximadamente 13%. Note-se que a configuração em Y, apesar de mais simples que a configuração X, apresenta um melhor desempenho corroborando a informação que nem sempre a configuração mais complexa tem um melhor desempenho. Deve-se atentar ao fato de que a configuração Y foi otimizada 4 vezes, enquanto que a configuração X foi otimizada apenas 2 vezes. Sistemas mais simples podem apresentar melhor desempenho térmico do que sistemas mais complexos desde que sejam otimizados todos seus graus de liberdade.

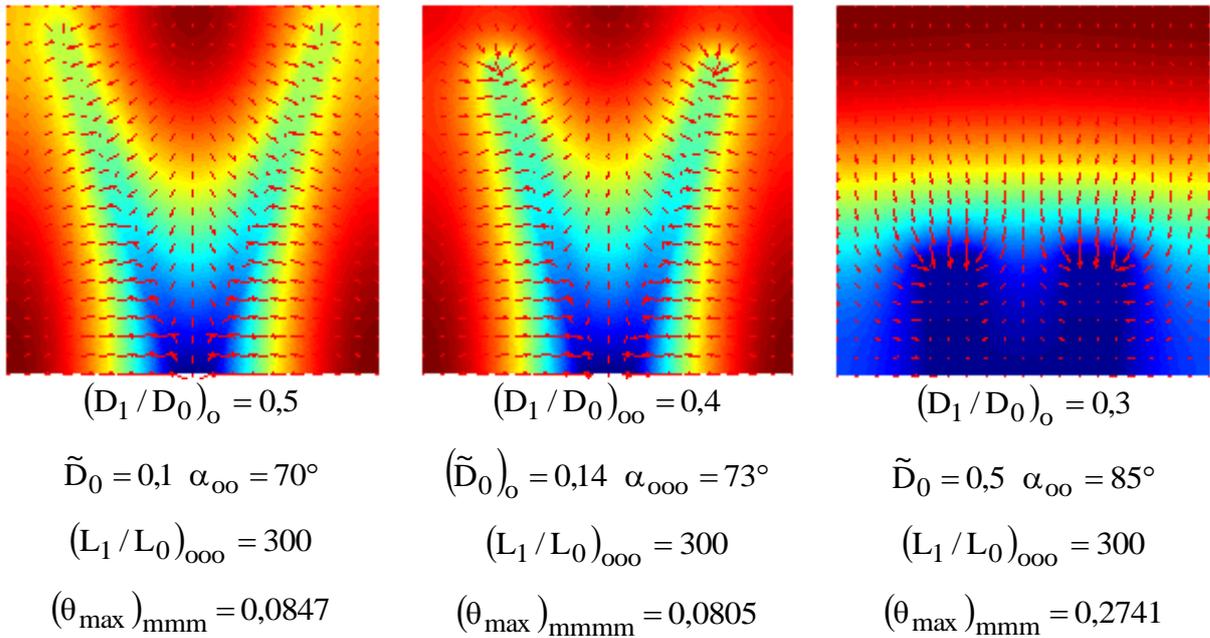


Figura 5.13 – Melhores configurações para valores de  $\tilde{D}_0 = 0,1$ ,  $(\tilde{D}_0)_o = 0,14$  e  $\tilde{D}_0 = 0,5$ .

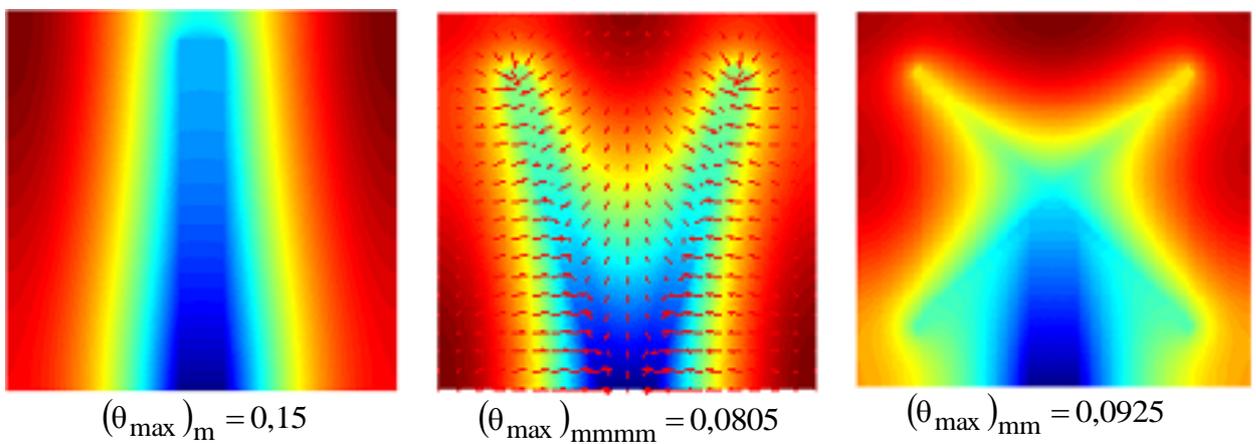


Figura 5.14 – Comparação da geometria em Y estudada neste trabalho com as geometrias em I, estudada por Almgel e Bejan, 1999, e em X, estudada por Lorenzini et al, 2013, quando a condutividade térmica  $\tilde{k}_p = 100$  e  $\phi = 0,1$ .

## 5.2 Geometria com condutividades diferentes

Nesta seção será estudada uma configuração para o material de alta condutividade em Y, onde a condutividade térmica da base,  $\tilde{k}_{p0}$ , é diferente da condutividade térmica dos ramos,  $\tilde{k}_{p1}$ , conforme mostrado na Figura 5.1. Agora o modelo matemático é ainda governado pelas equações (3.14) e (3.15), sujeito as mesmas condições de contorno dadas pelas equações (3.20) e (3.21), mas as restrições são descritas pelas equações (3.16), (3.17) e (3.18). Como temos uma constante adicional, neste caso existem somente quatro graus de liberdades que foram definidos de forma adimensional como:  $H/L$ ,  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\alpha$ . Como o corpo é quadrado, isto é,  $H/L=1$ , somente serão estudados três graus de liberdade:  $L_1/L_0$ ,  $D_1/D_0$  e  $\alpha$ .

Foi escolhida essa análise para investigar a possibilidade de modificar os materiais condutivos utilizados no Y, sem prejuízo no desempenho e com economia de material condutor. Com essa análise se pretende verificar a posição adequada, dentro da geometria, para substituição de material condutor por outro mais econômico. O primeiro passo foi descobrir qual era a melhor combinação de valores e se o melhor seria uma maior condutividade na base ou nos ramos da geometria. Para tanto foram testados quatro combinações e as curvas de excesso de temperatura em função da relação  $L_1/L_0$  estão representadas na Figura 5.15.

Como poderia ser previsto, o melhor desempenho foi obtido quando a base e os ramos estavam com o material melhor condutor. Porém o resultado quando as condutividades adimensionais são  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ , diferem em apenas 5,36% ao se comparar com os resultados para o par de condutividades  $\tilde{k}_{p0} = \tilde{k}_{p1} = 100$  (caso do melhor desempenho), podendo justificar o uso de uma condutividade menor nos ramos.

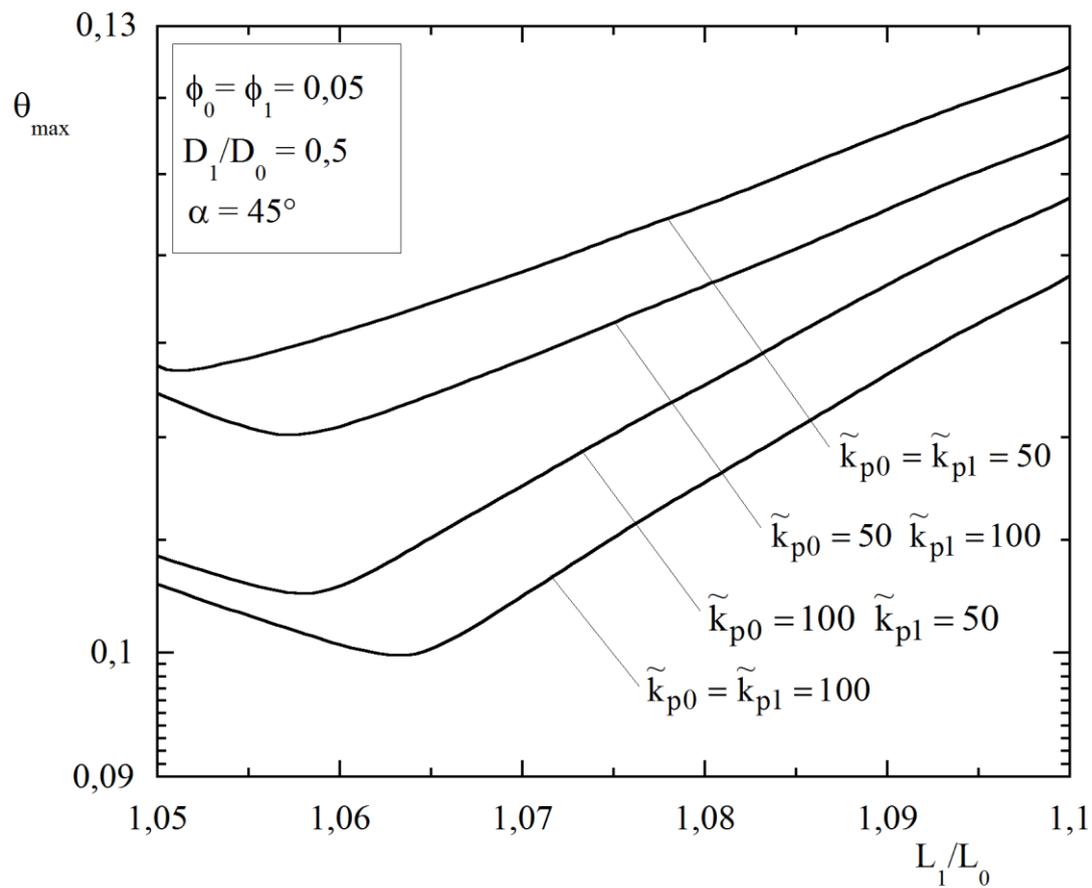


Figura 5.15 – Comportamento da resistência térmica em função do parâmetro  $L_1/L_0$  para diferentes pares de condutividade térmica.

Quando comparamos os resultados para a resistência térmica mínima obtida quando os pares de condutividades são  $\tilde{k}_{p0} = 50$  e  $\tilde{k}_{p1} = 100$  com os resultados quando  $\tilde{k}_{p0} = \tilde{k}_{p1} = 50$ , as diferenças são de 6,2%. Por fim, a melhor escolha é o par cuja menor condutividade térmica é posta nos ramos, ou seja, nesta análise, quando as frações de área são iguais, a parte da geometria que apresenta maior significância na troca térmica é a parte da base. Para o caso de  $\tilde{k}_{p0} = 50$  e  $\tilde{k}_{p1} = 100$  comparado com o de  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  este último tem 14,3% melhor desempenho térmico. Estes resultados mostram que a geometria se adapta ao tipo de condutividade imposta, ou seja, que o sistema se adapta às condições do meio ambiente.

Na Figura 5.16 novamente três pares diferentes para os valores da condutividade térmica têm seu comportamento avaliado em função da fração de área  $\phi_0$ .

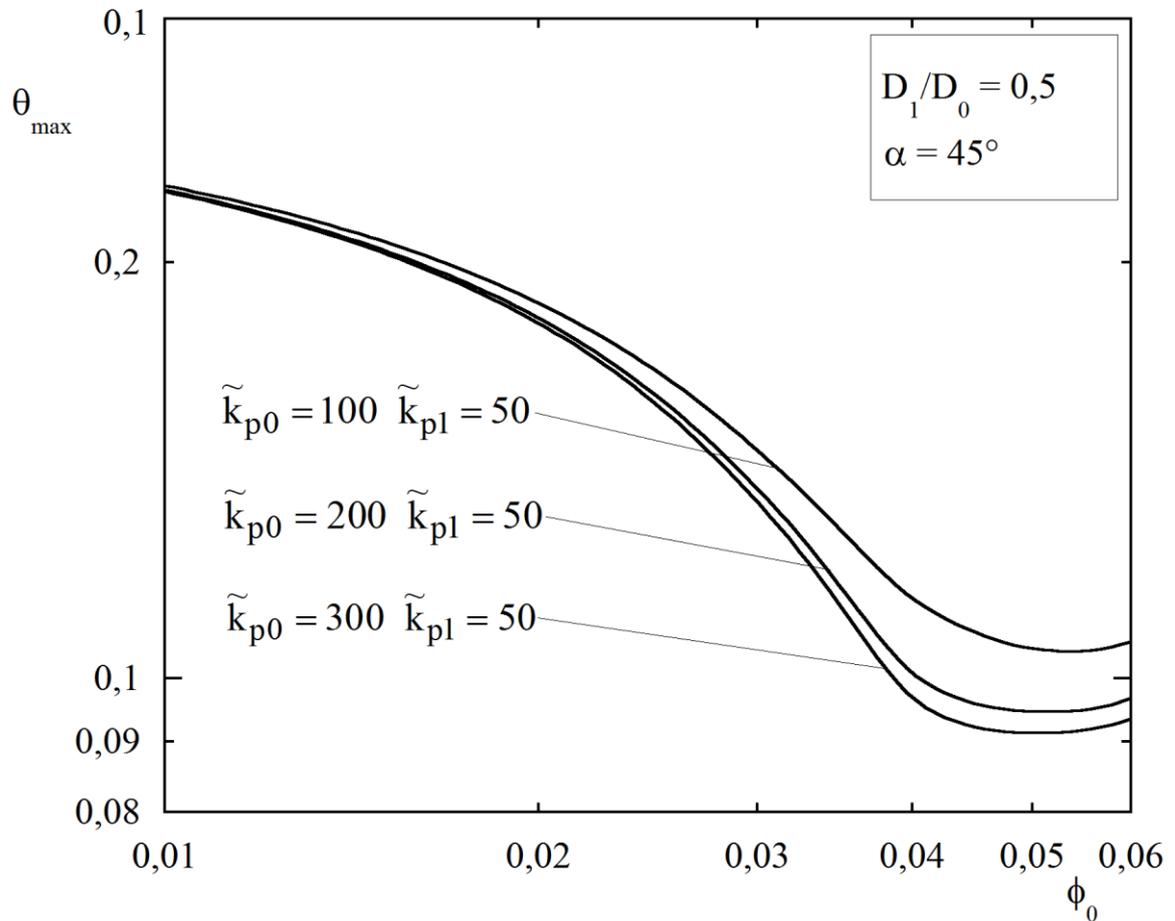


Figura 5.16 – Comportamento da resistência térmica em função do parâmetro  $\phi_0$  considerando diferentes pares de condutividade térmica.

O eixo das abcissas é representado o parâmetro  $\phi_0$ , como esclarecimento, a fração de área total do material altamente condutivo é 0,1 ou  $\phi_0 + \phi_1 = 0,1$  então na análise da figura deve-se ver o parâmetro  $\phi_1$  como o complemento para a equação. Na figura pode-se perceber que a diferença entre o melhor desempenho, quando  $\tilde{k}_{p0} = 300$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  e o de pior desempenho, quando  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ , é 14,8%. E comparando a combinação de

$\tilde{k}_{p0} = 300$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  com a combinação de  $\tilde{k}_{p0} = 200$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  essa diferença é de apenas 3,5%.

Também se percebe que para as três combinações os resultados de menor resistência térmica foram gerados quando  $\phi_0 = \phi_1 = 0,05$ , ou seja, proporções equivalentes para ambas as partes, base e ramos da geometria.

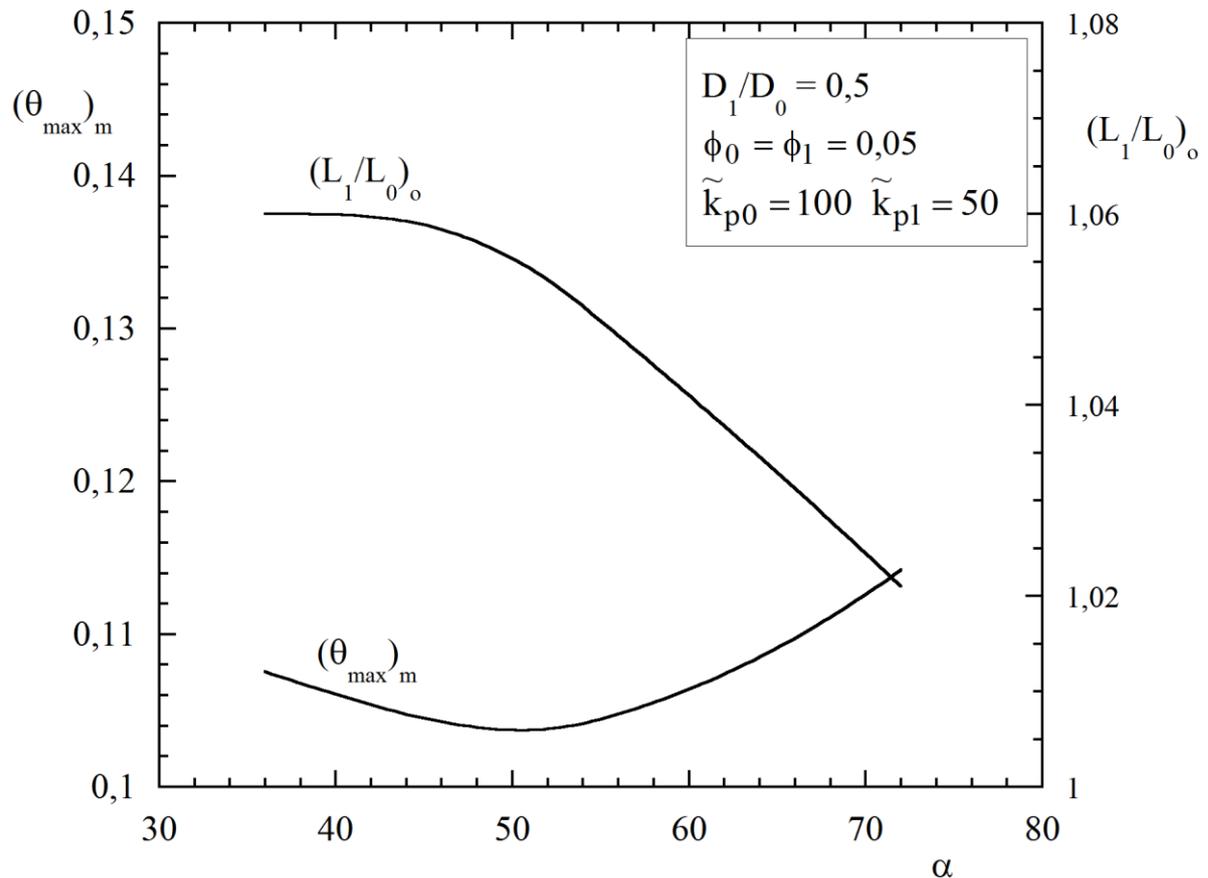


Figura 5.17 – Comportamento da resistência térmica e do parâmetro  $L_1/L_0$  uma vez otimizados em função do ângulo  $\alpha$ .

A Figura 5.17 mostra o efeito do ângulo  $\alpha$ , variado diversas vezes até obter o ângulo cuja resistência térmica seja menor. De acordo com a figura esse ângulo ótimo ocorre em torno de  $50^\circ$ . Para esse caso, a variação do ângulo não resultou em grandes variações no desempenho térmico do sistema, entre  $40^\circ$  e  $60^\circ$  os resultados apresentam variações de 0,3%

apenas. A figura também representa os respectivos valores ótimos para  $L_1/L_0$ . A Figura 5.18 mostra a configuração de melhor desempenho encontrada a partir da análise mostrada na Figura 5.17.

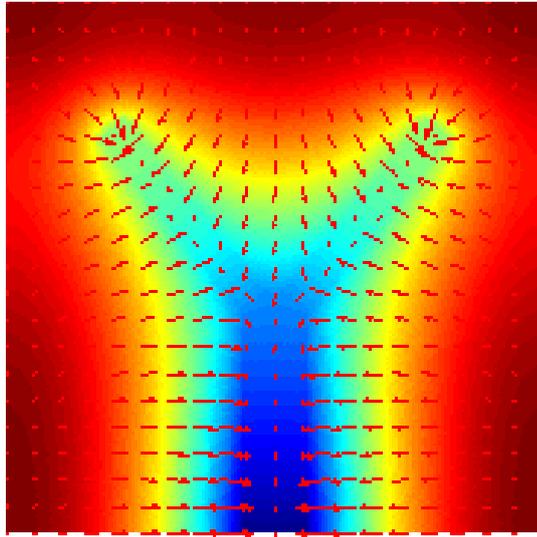


Figura 5.18 – Melhor geometria encontrada na Figura 5.17 para  $(L_1/L_0)_{oo} = 1,05$ ,  
 $\alpha_o = 51,4^\circ$ ,  $D_1/D_0 = 0,5$  e  $\theta_{\max,mm} = 0,1036$ .

A Figura 5.19 mostra a resistência térmica das geometrias geradas para várias combinações dos parâmetros  $\phi_0$  e  $\phi_1$ . Os resultados demonstram que para cada par de frações de área analisado, o desempenho do sistema é melhor em torno de um ângulo específico, que depende de cada combinação das frações de área. No entanto esses valores são muito próximos, e o seu pior desempenho é obtido quando  $\phi_1 = 0,09$  e  $\phi_0 = 0,01$ . Os resultados obtidos permitem concluir que se utilizando o ângulo ótimo pode-se usar uma combinação de  $\phi_0 \ll \phi_1$  com uma pequena perda no desempenho, ocasionando uma economia de material de alta condutividade.

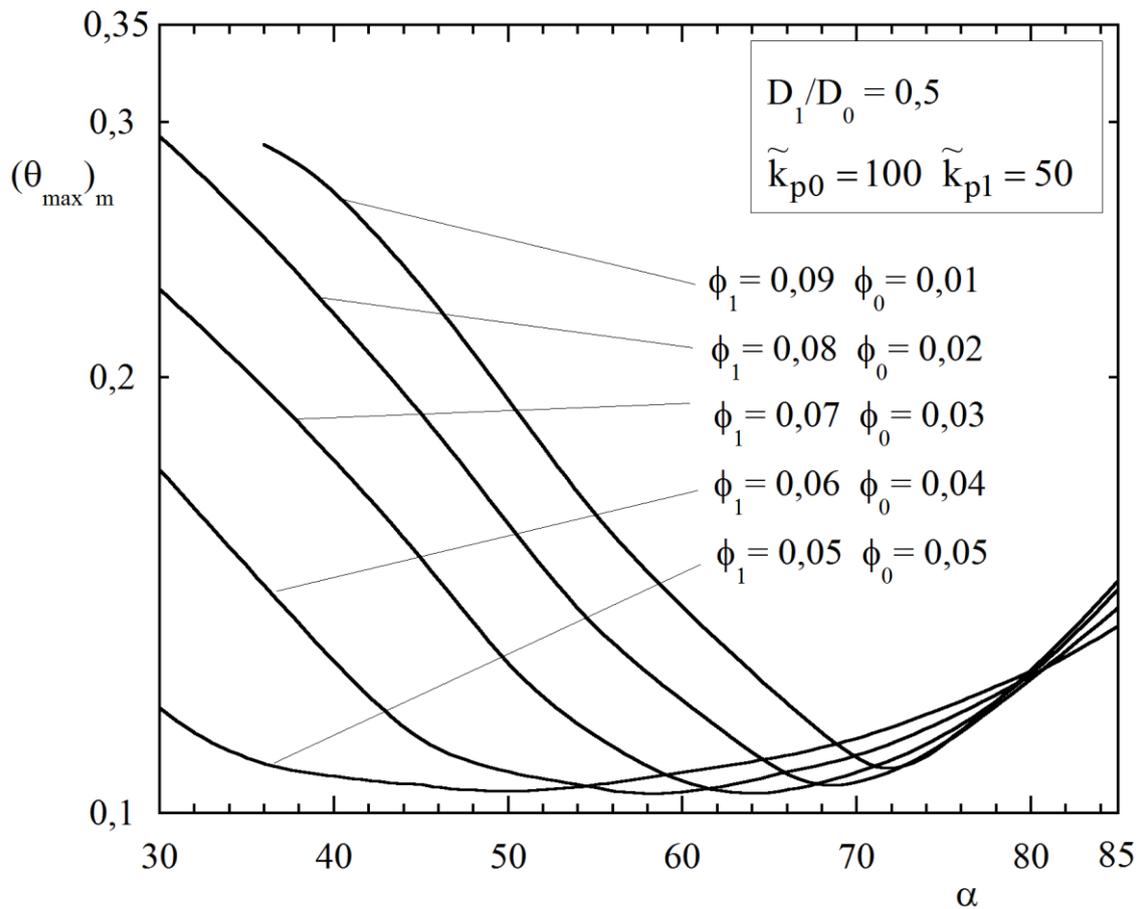


Figura 5.19 – Comportamento da resistência térmica otimizada em função do ângulo  $\alpha$  para diferentes combinações das frações de área  $\phi_0$  e  $\phi_1$  quando  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ .

Novamente em função do ângulo  $\alpha$  é mostrado na Figura 5.20 o comportamento do parâmetro  $(L_1/L_0)_{oo}$  correspondente aos resultados da Figura 5.19 para diferentes pares de frações de área. A Figura 5.20 mostra que a razão  $(L_1/L_0)_{oo}$  é quase independente de  $\alpha$  quando o valor de  $\phi_1$  é menor ou igual a 0,07. Pode-se dizer que para todos os pares de frações analisadas, o valor de  $(L_1/L_0)_{oo}$  apresenta variação insignificante para ângulos maiores do que  $60^\circ$  e que quando  $\phi_0$  menor do que 0,07 as variações são insignificantes para todos os ângulos testados. Como fixamos os valores de  $D_1/D_0 = 0,5$ , não foi possível gerar geometria com valores de  $\phi_1$  menor do que 0,05. As melhores configurações encontradas

nessa etapa da otimização encontram-se na Figura 5.21, sendo a melhor combinação o par  $\phi_0 = 0,03$  e  $\phi_1 = 0,07$  para  $\theta_{\max,m} = 0,1023$ .

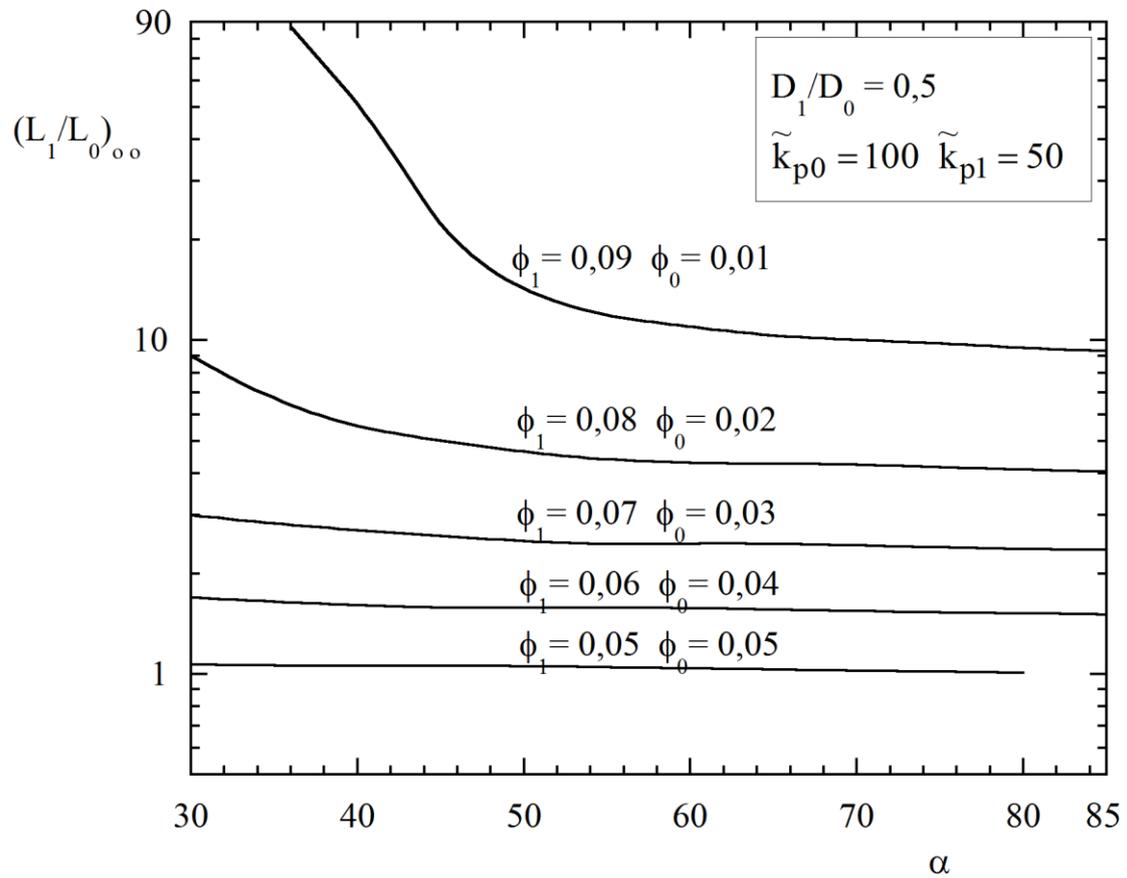


Figura 5.20 – Razão  $(L_1/L_0)_{oo}$  correspondente aos valores da Figura 5.19 em função do ângulo  $\alpha$  para diferentes combinações das frações de área  $\phi_0$  e  $\phi_1$ .

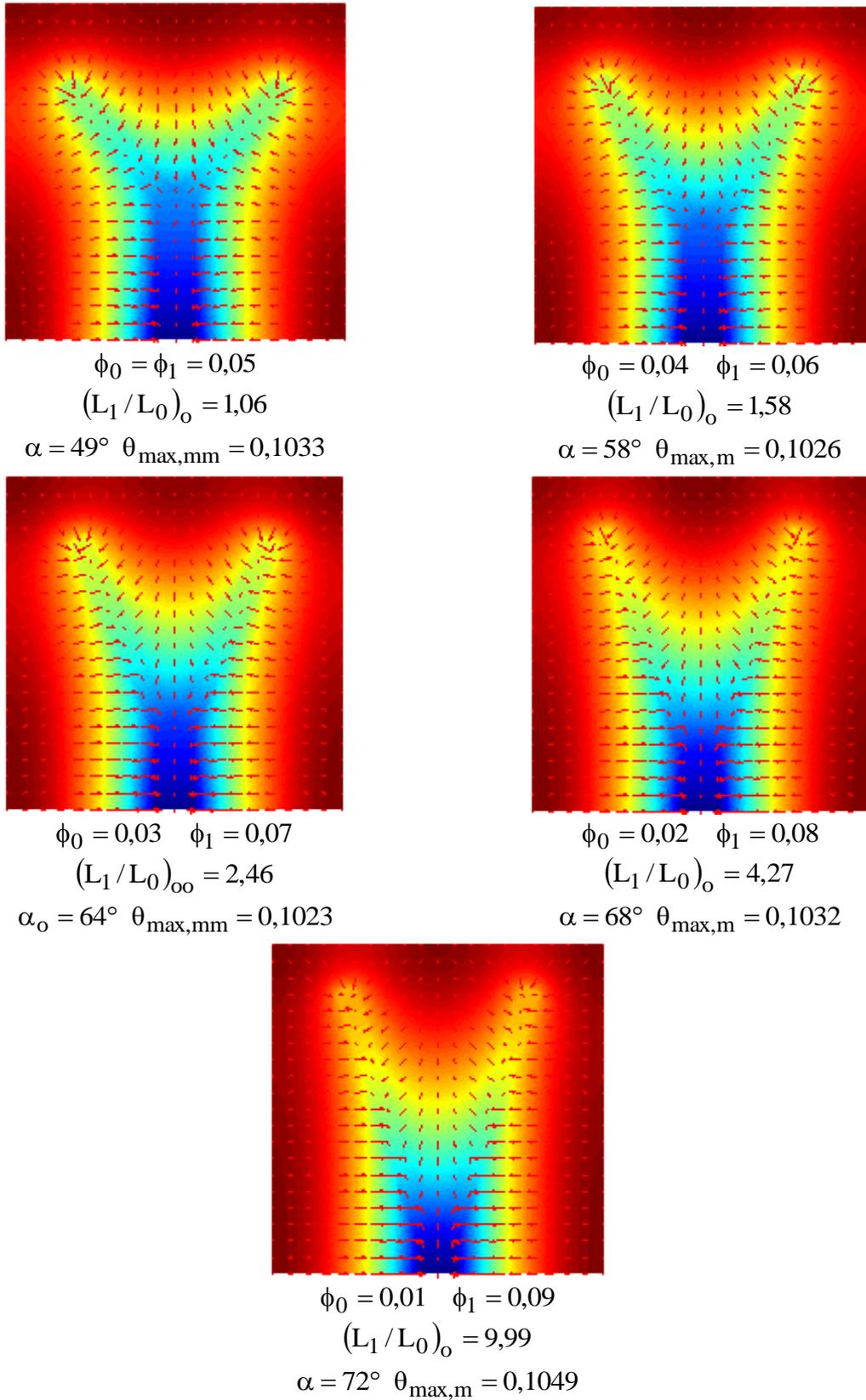


Figura 5.21 – Representação de algumas configurações encontradas na Figura 5.19 e Figura 5.19.

Para o par de condutividades térmicas adimensional,  $\tilde{k}_{p0} = 20$  e  $\tilde{k}_{p1} = 10$ , a Figura 5.22 e a Figura 5.23 demonstram o comportamento do parâmetro  $(L_1/L_0)_{oo}$  e da resistência térmica em função do ângulo  $\alpha$ . Na Figura 5.23 se percebe que quando as frações de área são  $\phi_0 = \phi_1 = 0,05$  e o ângulo  $\alpha$  em torno de  $50^\circ$  se tem o melhor desempenho térmico.

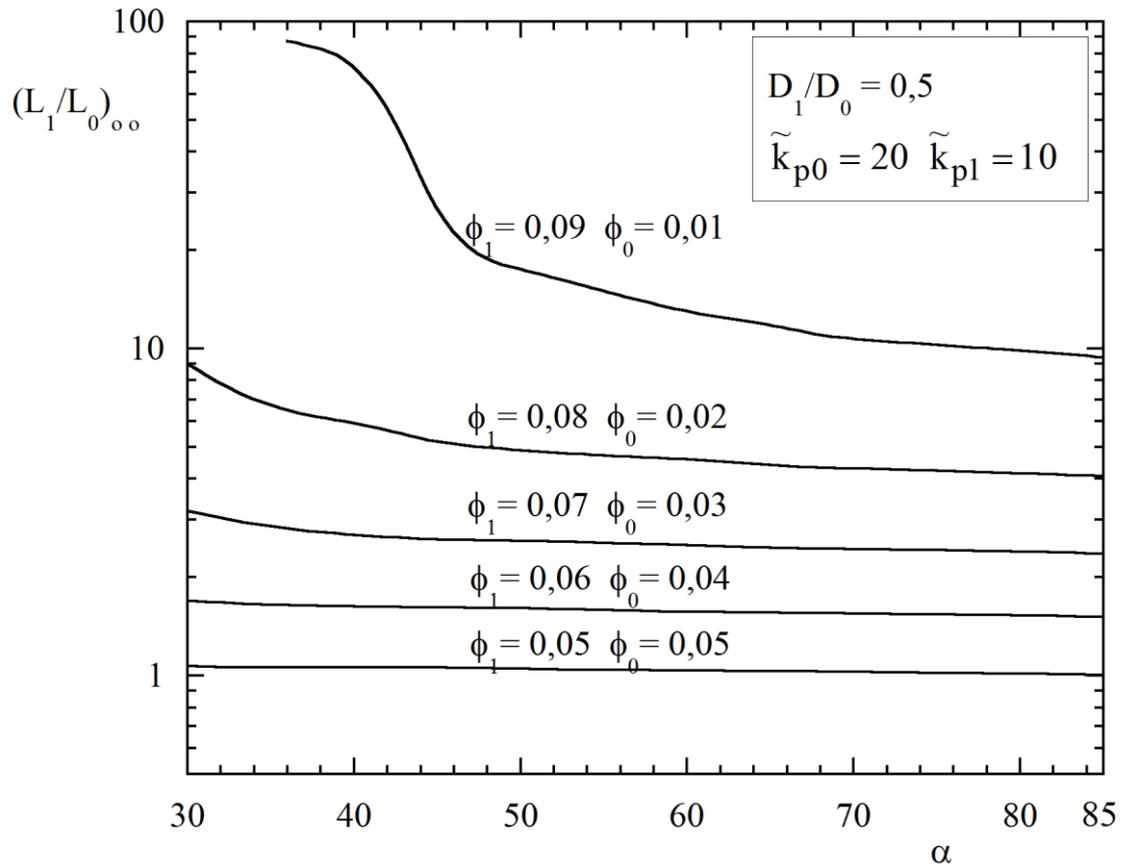


Figura 5.22 – Comportamento do parâmetro  $(L_1/L_0)_{oo}$  em função do ângulo  $\alpha$  para diferentes combinações das frações de área  $\phi_0$  e  $\phi_1$  quando  $\tilde{k}_{p0} = 20$  e  $\tilde{k}_{p1} = 10$ .

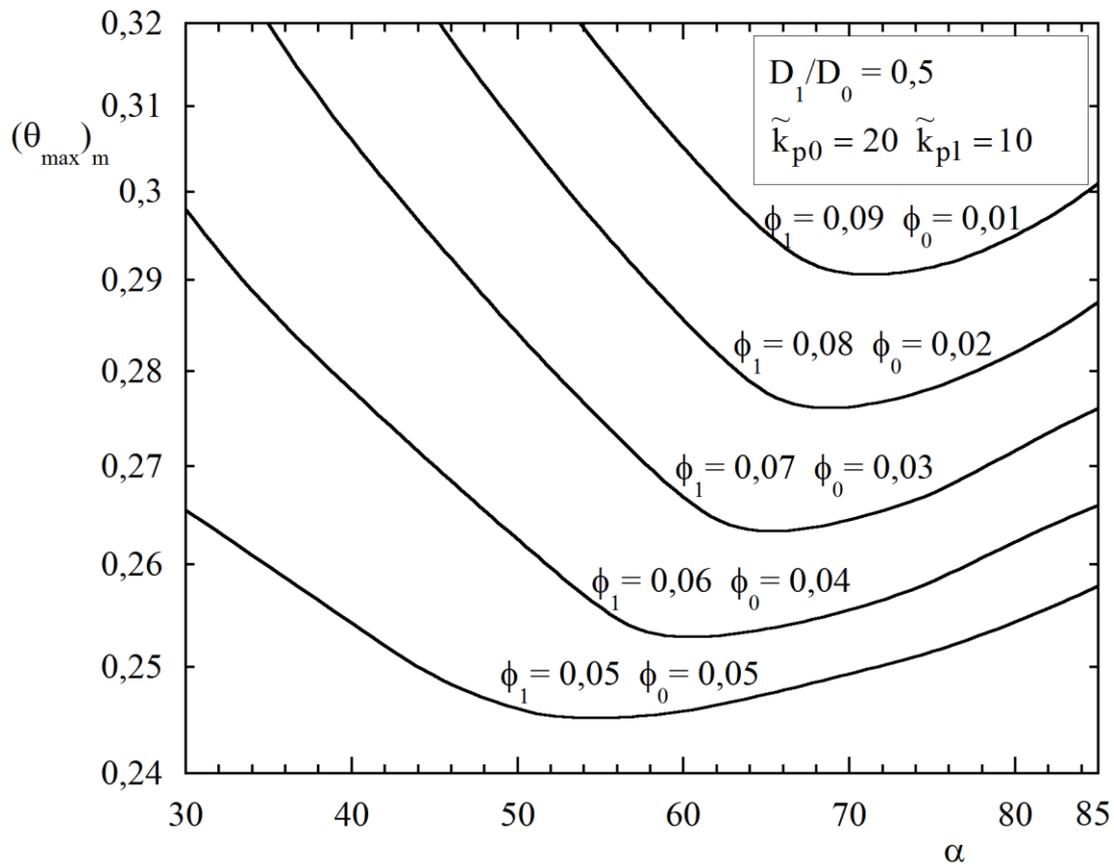


Figura 5.23 – Comportamento da resistência térmica otimizada em função do ângulo  $\alpha$  para diferentes combinações das frações de área  $\phi_0$  e  $\phi_1$  quando  $\tilde{k}_{p0} = 20$  e  $\tilde{k}_{p1} = 10$ .

A Figura 5.24 demonstra as curvas de melhor desempenho para diferentes valores do parâmetro  $D_1/D_0$  para três combinações de condutividade térmica. Para cada par escolhido, os parâmetros  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\alpha$ ,  $L_1/L_0$  apresentam valores ótimos distintos. No entanto, os melhores desempenhos são conseguidos quando  $D_1/D_0 = 0,5$  para todos os três casos avaliados. Note-se que quando o par  $\tilde{k}_{p0} = 20, \tilde{k}_{p1} = 10$  aumenta para  $\tilde{k}_{p0} = 100, \tilde{k}_{p1} = 50$  há um decréscimo de 58% na resistência térmica. Entretanto, quando o par  $\tilde{k}_{p0} = 100, \tilde{k}_{p1} = 50$  aumenta para  $\tilde{k}_{p0} = 200, \tilde{k}_{p1} = 50$  a resistência térmica diminui somente 8%. As melhores configurações encontradas nessa etapa da otimização encontram-se na Figura 5.25.

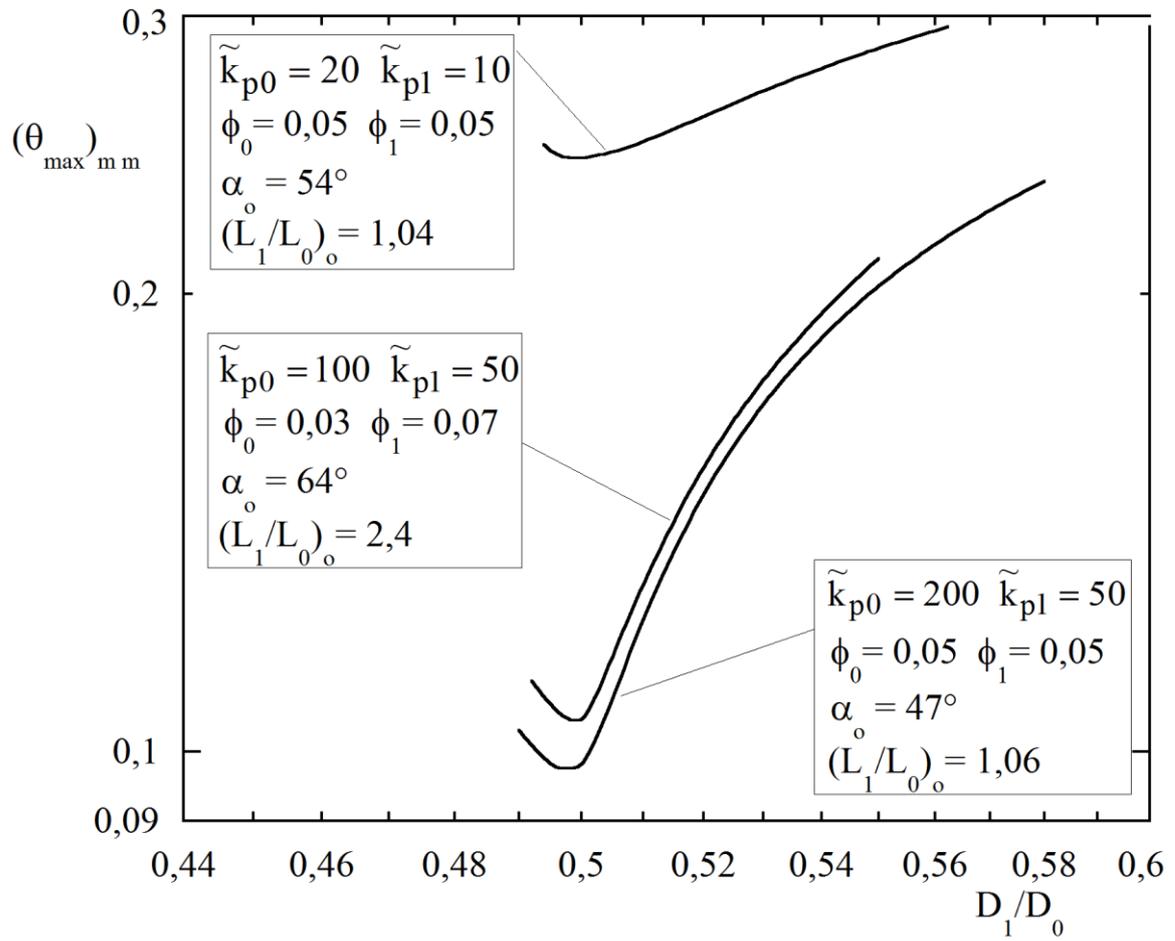
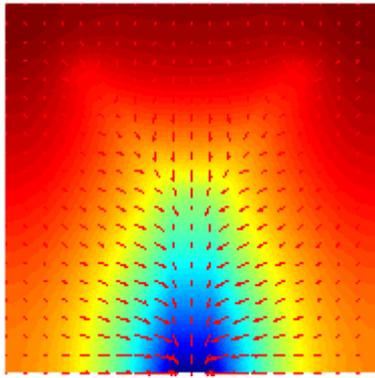
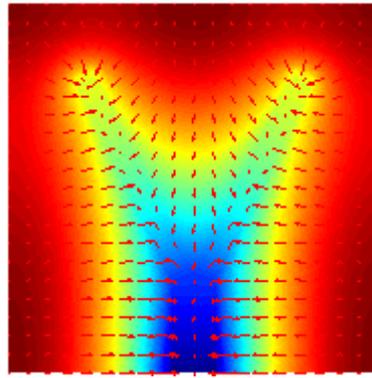


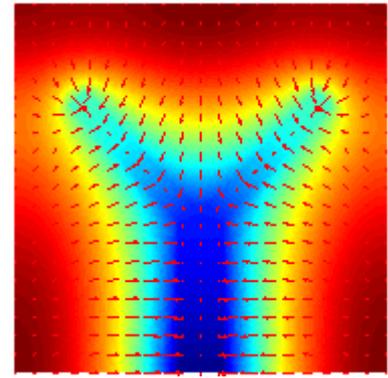
Figura 5.24 – Comportamento da resistência térmica duas vezes otimizada em função do parâmetro  $D_1/D_0$  diferentes valores de condutividade, frações de área e ângulo  $\alpha$ , conforme as legendas representadas no gráfico.



$$\begin{aligned} \tilde{k}_{p0} &= 20 \quad \tilde{k}_{p1} = 10 \\ \alpha &= 54^\circ \quad (L_1/L_0)_o = 1,04 \\ \phi_0 &= 0,05 \quad \phi_1 = 0,05 \\ D_1/D_0 &= 0,49 \\ (\theta_{\max})_{\text{mmm}} &= 0,2451 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{k}_{p0} &= 100 \quad \tilde{k}_{p1} = 50 \\ \alpha &= 64^\circ \quad (L_1/L_0)_o = 2,46 \\ \phi_0 &= 0,03 \quad \phi_1 = 0,07 \\ D_1/D_0 &= 0,5 \\ (\theta_{\max})_{\text{mmm}} &= 0,1023 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{k}_{p0} &= 200 \quad \tilde{k}_{p1} = 50 \\ \alpha &= 47^\circ \quad (L_1/L_0)_o = 1,06 \\ \phi_0 &= 0,05 \quad \phi_1 = 0,05 \\ D_1/D_0 &= 0,5 \\ (\theta_{\max})_{\text{mmm}} &= 0,0941 \end{aligned}$$

Figura 5.25 – Representação de algumas configurações encontradas na Figura 5.24.

## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho aborda a questão de maximizar a taxa de transferência de calor em um volume fixo de um material de baixa condutividade onde há geração de calor uniforme por unidade de volume, a partir de otimização da geometria de um material de alta condutividade também com volume fixo através do método Constructal Design. O resfriamento do sistema dá-se a partir do contato do material de alta condutividade em uma região das bordas que é mantida a temperatura constante. Aplicando o método “constructal design”, este trabalho procura a arquitetura que maximiza o desempenho do sistema. O material de alta condutividade tem a forma de Y e é embutido no corpo de baixa condutividade. As superfícies exteriores do sólido são perfeitamente isoladas. As geometrias foram testadas de duas maneiras diferentes: na primeira foi considerada a condutividade térmica do material de alta condutividade,  $\tilde{k}_{p0}$ , igual em toda a geometria; na segunda, considerou-se uma condutividade térmica diferente da área em Y, de maneira que a base do Y tivesse um valor de condutividade térmica  $\tilde{k}_{p0}$  e os ramos uma condutividade térmica de valor  $\tilde{k}_{p1}$ . Dessa maneira foi possível estudar qual região seria a predominante na troca térmica, ocasionando assim economia na escolha dos materiais. Para se descobrir uma forma otimizada da geometria, em ambos os casos foram analisados diferentes graus de liberdade do problema.

Para o Y com  $\tilde{k}_{p0}$  para a base e ramos, primeiramente foi avaliado o comportamento da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade  $\alpha$ , mantendo fixos os parâmetros  $\phi = 0,1$ ,  $\tilde{k}_p = 100$ ,  $D_1/D_0 = 0,5$ , e  $\tilde{D}_0 = 0,1$ , de onde se concluiu que existe um ângulo ótimo  $\alpha_o = 70^\circ$  e uma relação de  $(L_1/L_0)_{oo}$  ótima quando o comprimento de  $L_0$  é muito pequeno comparado com o comprimento de  $L_1$ , ou seja, quando a relação  $L_1/L_0$  tende a valores próximos ao infinito, transformando a geometria em Y em um formato de “V”. Numa segunda análise feita, uma nova variação de  $L_1/L_0$  e do ângulo  $\alpha$  em função da fração de área  $\phi$  confirma que a resistência térmica é menor quando o ângulo  $\alpha$  é próximo de  $70^\circ$  precisamente para frações de área  $\phi > 0,05$ .

A influência da condutividade térmica adimensional também foi avaliada para se concluir sobre o ganho que se teria na troca térmica com a colocação de um material melhor condutor ou outro que fosse dotado de menor condutividade. Os resultados apontam que a condutividade térmica pode ser aumentada para o máximo valor que se tenha disponível, porém os ganhos na troca térmica a partir de  $\tilde{k}_p = 200$  podem não se justificar financeiramente, devido ao conhecido alto custo desses materiais e o não tão elevado ganho na troca térmica, sendo que entre  $\tilde{k}_p = 200$  e  $\tilde{k}_p = 300$  o ganho nesse caso foi de 5%. Os resultados apontam um enrijecimento da geometria ótima para valores de  $\tilde{k}_p$  maiores de 100. É exibido que  $(\tilde{D}_0)_o = 0,14$  minimiza a resistência térmica quatro vezes,  $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,0805$ . Os outros graus de liberdade ótimos correspondentes são  $(D_1/D_0)_{oo} = 0,4$ ,  $\alpha_{ooo} = 73^\circ$  e  $(L_1/L_0)_{oooo} \approx 300$ .

Pode ser feita uma comparação do desempenho inicial encontrado na Figura 5.3 para o caso de  $\tilde{k}_p = 100$ , onde se obteve  $(\theta_{\max}) = 0,1123$  quando  $(L_1/L_0) = 1$  com o desempenho final exibido na Figura 5.13 onde  $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,0805$  quando  $(L_1/L_0)_{oooo} \approx 300$  e se perceber uma melhora superior a 28% na troca térmica. Deve-se observar também que essa melhora poderia ser maior ou menor, dependendo da configuração inicial da geometria.

Para o caso onde  $\tilde{k}_{p0} \neq \tilde{k}_{p1}$ , investigou-se a possibilidade de adotar materiais de menor condutividade associados a outros com maiores valores, bem como a localização onde esses materiais renderiam a melhor troca térmica para o sistema. Assim, das quatro combinações avaliadas conclui-se que o par  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  representa uma escolha com bom retorno na troca térmica, pois o desempenho do sistema cai apenas 5,36% ao substituir  $\tilde{k}_{p1} = 100$  por  $\tilde{k}_{p1} = 50$ , para o caso onde a base e os ramos da geometria têm a mesma quantidade de material,  $\phi_0 = \phi_1 = 0,05$ .

A proposta de se usar material menos nobre na base da geometria foi avaliada para diferentes combinações de a fração de área total do condutor, onde  $\phi_0$  e  $\phi_1$  receberam valores diferentes que resultassem em  $\phi_0 + \phi_1 = 0,1$ . O melhor desempenho se deu nesse caso quando os materiais foram igualmente distribuídos, com  $\phi_0 = \phi_1 = 0,05$  e a combinação de

$\tilde{k}_{p0} = 200$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  pode ser escolhida frente à de  $\tilde{k}_{p0} = 300$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$  com um prejuízo de apenas 3,5% no desempenho térmico.

Para a análise com  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ , mantido fixo  $D_1/D_0 = 0,5$ , a fração de área correspondente à base deve ser próxima de 30% de material nobre,  $\phi_0 = 0,03$ , para um melhor rendimento térmico e o ângulo  $\alpha$  de  $64^\circ$ . No entanto para a combinação de condutividades  $\tilde{k}_{p0} = 20$  e  $\tilde{k}_{p1} = 10$  e para a combinação  $\tilde{k}_{p0} = 200$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ , a distribuição de material igual para a base e os ramos do Y, com  $\phi_0 = \phi_1 = 0,05$ , e o ângulo  $\alpha$  fica em torno de  $50^\circ$ , apresentam os melhores resultados. Quando as condutividades  $\tilde{k}_{p0} = 20, \tilde{k}_{p1} = 10$  aumentam para  $\tilde{k}_{p0} = 100, \tilde{k}_{p1} = 50$  há um decréscimo próximo de 60% na resistência térmica. Entretanto, quando o par  $\tilde{k}_{p0} = 100, \tilde{k}_{p1} = 50$  aumenta para  $\tilde{k}_{p0} = 200, \tilde{k}_{p1} = 50$  a resistência térmica decresce somente 8%.

O parâmetro  $D_1/D_0$  foi otimizado para três combinações de condutividade térmica e para cada par escolhido, os parâmetros  $\phi_0, \phi_1, \alpha, L_1/L_0$  apresentaram valores ótimos distintos. No entanto, os melhores desempenhos são conseguidos quando  $D_1/D_0 = 0,5$  para todos os três casos avaliados. O ângulo  $\alpha$  e o parâmetro  $L_1/L_0$  não apresentaram grandes variações para diferentes frações de área  $\phi_0$  avaliadas. Os valores ótimos encontrados foram  $(\theta_{\max})_{\text{mm}} = 0,1023$  quando  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ ,  $(\theta_{\max})_{\text{mm}} = 0,2451$  quando  $\tilde{k}_{p0} = 20$  e  $\tilde{k}_{p1} = 10$  e  $(\theta_{\max})_{\text{mmm}} = 0,0941$  quando  $\tilde{k}_{p0} = 200$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ .

Quando comparados o desempenho do caso inicial do Y com condutividades  $\tilde{k}_{p0} = 100$  e  $\tilde{k}_{p1} = 50$ , exibidos na Figura 5.15 onde se obteve  $(\theta_{\max}) = 0,147$  quando  $L_1/L_0 = 1,1$  com o caso exibido na Figura 5.24 onde se obteve  $(\theta_{\max})_{\text{mmm}} = 0,1023$  quando  $(L_1/L_0)_o = 2,46$ , se percebe uma melhora superior a 30% na troca térmica.

Para os casos estudados onde  $\tilde{k}_{p0} \neq \tilde{k}_{p1}$  obteve-se, ainda, um valor otimizado de  $L_1/L_0$  finito com ordem de magnitude 1, indicando que a configuração otimizada tem a forma de um “Y” e demonstrando a influência da condutividade térmica sobre a geometria ótima.

Finalmente, este trabalho mostrou que a geometria otimizada é aquela que melhor distribui as imperfeições, isto é, os pontos quentes (pontos de temperatura máxima) o que está de acordo com o princípio constructal da ótima distribuição das imperfeições.

## 7 PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Como futuros trabalhos, são apresentadas as seguintes sugestões:

- Estudar o efeito do grau de liberdade da forma retangular externa,  $H/L$ ;
- Estudar o efeito do aumento do número de ramos do Y, por exemplo, usando três ou quatro ramos;
- Estudar o desempenho do volume elementar com a forma em Y em construções com número de volumes elementares igual a 2, 4, 8, etc.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alebrahim, A.; Bejan, A. Constructal trees of circular fins for conductive and convective heat transfer, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 42(19), p. 3585-3597, 1999.

Almogbel, M., Bejan, A. Constructal optimization of nonuniformly distributed tree-shaped flow structures for conduction, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 44(22), p. 4185-4194, 2001.

Almogbel, M.; Bejan, A. Conduction trees with spacings at the tips, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 42, p. 3739-3756, 1999.

Attetkov, A. V.; Volkov, I. K.; Tverskaya, E. S. The optimum thickness of a cooled coated wall exposed to local pulse-periodic heating, **Journal of Engineering Physics and Thermophysics**, v. 74, p. 1467-1474, 2001.

Azoumah, Y.; Neveu, P.; Mazet, N. Constructal design combined with entropy generation minimization for solid-gas reactors, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 45(7), p. 716-728, 2006.

Bejan A.; Lorente, S. The constructal law and thermodynamics of flow systems with configuration, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 47, p. 3203-3214, 2004.

Bejan, A. Almgobel, M. Constructal T-shaped fins, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 43(12-15), p. 2101-2115, 2000.

Bejan, A. Constructal theory of pattern formation, **Hydrology of Earth Systems Science**, v. 11, p. 753-768, 2008.

Bejan, A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 40, p. 799-816, 1996a.

Bejan, A. Shape and structure from engineering to nature, **Cambridge University Press**, Cambridge, UK, 2000.

Bejan, A. Street network theory of organization in nature, **Journal of Advanced Transportation**, v. 30(2), p. 85-107, 1996b.

Bejan, A. The tree of convective heat streams: its thermal insulation function and the predicted 3/4-power relation between body heat loss and body size, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 44, p. 699-704, 2001.

Bejan, A.; Dan, N. Constructal trees of convective fins, **Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 121(3), p. 675-682, 1999.

Bejan, A.; Errera, M. R. Convective trees of fluid channels for volumetric cooling, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 43(17), p. 3105-3118, 2000.

Bejan, A.; Lorente, S. **Design with Constructal Theory**, Wiley, Hoboken, 2008.

Bejan, A.; Lorente, S.; Miguel, A. F.; Reis, A. H. **Constructal human dynamics, security and sustainability**, IOS Press, Amsterdam, 2009.

Bejan, A.; Rocha, L. A. O.; Lorente S. Thermodynamic optimization of geometry: T and Y-shaped constructs of fluid streams, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 39(9-11), p. 949-960, 2000.

Biserni, C.; Rocha, L. A. O.; Bejan, A. Inverted fins: geometric optimization of the intrusion into a conducting wall, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 47(12-13), p. 2577-2583, 2004.

Biserni, C.; Rocha, L. A. O.; Stanescu, G.; Lorenzini, E. Constructal H-shaped cavities according to Bejan's theory, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 50(11-12), p. 2132-2138, 2007.

Cheng, X. G.; Li, Z. X.; Guo, Z. Y. Constructs of highly effective heat transport paths by bionic optimization, **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 46, p. 296-302, 2003.

Cheng, X. G.; Xia, Z.; Li, Z. X. Optimization of heat conduction: Thermal dissipation and optimal thermal conductivity distribution, **Journal of Engineering Thermophysics**, v. 23, p. 715-717, 2002.

Dan, N.; Bejan, A. Constructal tree networks for the time-dependent discharge of finite-size volume to one point, **Journal of Applied Physics**, v. 84(6), p. 3042-3050, 1998.

Eslami, M.; Jafarpur, K. Thermal resistance in conductive constructal designs of arbitrary configuration: A new general approach, **Energy Conversion and Management**, v. 57, p. 117-124, 2012.

François, M. P.; Louis, G. Optimal conduction pathways for a heat generating body: a comparison exercise, **International Journal of Heat Mass Transfer**, v. 50, 2996-3006, 2007.

Gao, T.; Zhang, W. H.; Zhu, J. H.; Xu, Y. J.; Bassir, D. H. Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heat load effect, **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 44, p. 805-813, 2008.

Garcia, F. L. Otimização geométrica de cavidades complexas empregando constructal design, **Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, FURG, Rio Grande, Brasil, 2011.

Gersborg–Hansen, A.; Bendsoe, M. P.; Sigmund, O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.31, p. 251-259, 2006.

Ghodoossi, L. Entropy generation rate in uniform heat generating area cooled by conducting paths: criterion for rating the performance of constructal designs, **Energy Conversion and Management**, v. 45(18-19), p. 2951-2969, 2004.

Ghodoossi, L.; Egrican, N. Conductive cooling of triangular shaped electronics using constructal theory, **Energy Conversion and Management**, v. 45(6), p. 811-828, 2004.

Ghodoossi, L.; Egrican, N. Exact solution for cooling of electronics using constructal theory, **Journal of Applied Physics**, v. 93(8), p. 4922-4929, 2003.

Han, G. Z.; Guo, Z. Y. Two different thermal optimization objective functions: Dissipation of heat transport potential capacity and entropy production, **Journal of Engineering Thermophysics**, v. 27, p. 811-813, 2006.

Huang, Y. J.; Guo, M. H.; Fu, S. L. Reliability and routability consideration for MCM placement, **Microelectronics Reliability**, v. 42, p. 83-91, 2002.

Kalyon, M.; Sahin, A. Z. Application of optimal control theory in pipe insulation, **Numerical Heat Transfer, Part A**, v. 41(4), p. 391-402, 2002.

Kuddusi, L.; Denton, J. Analytical solution for heat conduction problem in composite slab and its implementation in constructal solution for cooling of electronics, **Energy Conversion and Management**, v. 48(4), p. 1089-1105, 2007.

Ledezma, G. A.; Bejan, A.; Errera, M. R. Constructal tree networks for heat transfer, **Department of Mechanical Engineering and Material Science**, Box 90300, Duke University, Durham, North Carolina, 27708-0300, 1997.

Lee, J. Reliability and wireability optimizations for chip placement on multichip modules, **IEEE Transactions on Electronics Packaging Manufacturing**, v. 28, p. 133-141, 2005.

Lee, J.; Chou, J. H. Hierarchical placement for power hybrid circuits under reliability and wireability constraints, **IEEE Transactions on Reliability**, v. 45, p. 200-207, 1996.

Li, Q.; Steven, G. P.; Querin, O. M.; Xie, Y. M. Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 42, p. 3361-3371, 1999.

Li, Q.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields, **International Journal of heat mass transfer**, v. 47, p. 5071-5083, 2004.

Li, Q.; Steven, G. P.; Xie, Y. M.; Querin, O. M. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 47, p. 5071-5083, 2004.

Liu, M. A.; Dong, Q. X.; Chen, S. Investigation on thermal design for opening cabinet of electronic equipment by numerical simulation, **Journal of air force engineering university**, v. 6, p. 62-65, 2005.

Lorente, S.; Bejan, A. Combine 'flow and strength' geometry optimization: internal structure in a vertical insulating wall with air cavities and prescribed strength, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 45(16), p. 3313-3320, 2002.

Lorente, S.; Wechsato, W.; Bejan, A. Optimization of tree-shaped flow distribution structures over a disc-shaped area, **International Journal of Energy Research**, v. 27(8), p. 715-723, 2003.

Lorente, S.; Wechsato, W.; Bejan, A. Tree-shaped flow structures design by minimizing path length, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 45(16), p. 3299-3312, 2002.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Isoldi, L. A.; Dos Santos, E. D.; Rocha, L. A. O. Constructal design applied to the geometric optimization of Y-shaped cavities embedded in a conducting medium, **Journal of Electronic Packaging**, v. 133, p. 041008, 2011.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Rocha, L. A. O. Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 58, p. 513-520, 2013a.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Rocha, L. A. O. Constructal design of non-uniform X-shaped conductive pathways for cooling, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 71, p. 140, 2013b.

Lorenzini, G.; Correa, R. L.; Dos Santos, E. D.; Rocha, L. A. O. Constructal design of complex assembly of fins, **Journal of Heat Transfer**, v. 133, 081902, 2011.

Lorenzini, G.; Moretti, S. A Bejan's constructal theory approach to the overall optimization of heat exchanging finned modules with air in forced convection and laminar flow condition, **Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer**, v. 131(8), 081801, 2009b.

Lorenzini, G.; Moretti, S. A CFD application to optimize T-shaped fins: comparisons to the constructal theory's results, **Transactions ASME Journal of Electronic Packaging**, v. 129(3), p. 324-327, 2007a.

Lorenzini, G.; Moretti, S. Numerical analysis of heat removal enhancement with extended surfaces, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 50, p. 746-755, 2007c.

Lorenzini, G.; Moretti, S. Numerical analysis on heat removal from Y-shaped fins: Efficiency and volume occupied for a new approach to performance optimization, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 46(6), p. 573-579, 2007b.

Lorenzini, G.; Moretti, S. Numerical heat transfer optimization in modular systems of Y-shaped fins, **Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer**, v. 130(8), 081801, 2008.

Lorenzini, G.; Moretti, S. Numerical performance analysis of constructal | and Y finned heat exchanging modules, **Journal of Electronic Packaging**, v. 131(3), 031012, 2009a.

Lorenzini, G.; Rocha, L. A. O. Constructal design of T-Y assembly of fins for an optimized heat removal, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, p. 1458-1463, 2009a.

Lorenzini, G.; Rocha, L. A. O. Constructal design of Y-shaped assembly of fins, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 49(23-24), p. 4552-4557, 2006.

Lorenzini, G.; Rocha, L. A. O. Geometric optimization of t-y-shaped cavity according to constructal design, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, p. 4683-4688, 2009b.

Marck, G.; Harion, J. L.; Nemer, M.; Russeil, S.; Bougeard, D. A new perspective of constructal networks cooling a finite-size volume generating heat, **Energy Conversion and Management**, v. 52 p. 1033-1046, 2011.

MATLAB®, User's guide, version 7.0.1, release 14SP1, The Mathworks Inc., 2006.

Neagu, M.; Bejan, A. Three-dimensional tree constructs of "constant" thermal resistance, **Journal of Applied Physics**, v. 86(12), p. 7107-7115, 1999.

Pepe, V. R. Estudo de Redes Vasculares Aplicadas aos Materiais Multifuncionais, **Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica**, Escola de Engenharia FURG, 2008.

Pramanick, A. K.; Das, P. K.. Method of synthetic constraint, Fermat's principle and the constructal law in the fundamental principle of conductive heat transport, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 50(9/10), p. 1823-1832, 2007.

Qi, Y. Q.; He, Y. L.; Zhang, W. Thermal analysis and design of electronic equipments, **Modern Electronic Technology**, v. 144, p. 73-76, 2003.

Rocha, L. A. O.; Lorente, S.; Bejan, A. Conduction tree networks with loops for cooling a heat generating volume, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 49, p. 2626-2635, 2006.

Rocha, L. A. O.; Lorente, S.; Bejan, A. Constructal design for cooling a disc-shaped area by conduction, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 45 (8), p. 1642-1652, 2003.

Rocha, L. A. O.; Lorenzini, E.; Biserni, C. Geometric optimization of shapes on the basis of Bejan's Constructal theory, **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 32(10), p. 1281-1288, 2005.

Rocha, L. A. O.; Montanari, G. C.; dos Santos, E. D. Constructal design applied to the study of cavities into a solid conducting wall, **ENCIT**, Rio de Janeiro, Brazil, 2004.

Sasikumar, M.; Balaji, C. Optimization of convective fin systems: a holistic approach, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 39, p. 57-68, 2002.

Sharqawy, M. H.; Zubair, S. M. Performance and optimum geometry of spines with simultaneous heat and mass transfer, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 48(11), p. 2130-2138, 2009.

Shengbin, Z.; Lingen, C.; Fengrui, Sun. Optimization of constructal volume-point conduction with variable cross section conducting path, **Energy Conversion and Management**, v. 48, p. 106-111, 2007.

Wang, A.; Liang, X.; Ren, J. Constructal enhancement of heat conduction with phase change, **International Journal of Thermophysics**, v. 27(1), p. 126-138, 2006.

Wei, S.; Chen, L.; Sun, F. "Volume-point" heat conduction constructal optimization with entransy dissipation minimization objective based on rectangular element, **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 51(8), p. 1283-1295, 2008.

Wei, S.; Chen, L.; Sun, F. Constructal multidisciplinary optimization of electromagnet based on entransy dissipation minimization, **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 52(10), p. 2981-2989, 2009b.

Wei, S.; Chen, L.; Sun, F. Constructal optimization of discrete and continuous variable cross-section conducting path based on entransy dissipation rate minimization, **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 56(6), p. 1666-1677, 2010.

Wei, S.; Chen, L.; Sun, F. The area-point constructal optimization for discrete variable crosssection conducting path, **Applied Energy**, v. 86(7-8), p. 1111-1118, 2009a.

Wu, W.; Chen, L.; Sun, F. Heat-conduction optimization based on constructal theory, **Applied Energy**, v. 84, p. 39-47, 2007b.

Wu, W.; Chen, L.; Sun, F. Improvement of tree-like network constructal method for heat conduction optimization, **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 49(3), p. 332-341, 2006.

Wu, W.; Chen, L.; Sun, F. On the area-to-point flow problem based on constructal theory, **Energy Conversion and Management**, v. 48(1), p. 101-105, 2007.

Xie, Z.; Chen, L.; Sun, F. Constructal optimization on t-shaped cavity based on entransy dissipation minimization, **Chinese Science Bulletin**, v. 54(23), p. 4418-4427, 2009b.

Xie, Z.; Chen, L.; Sun, F. Constructal optimization for geometry of cavity by taking entransy dissipation minimization as objective, **Science China Technological Sciences**, v. 52(12), p. 3504-3513, 2009a.

Xie, Z.; Chen, L.; Sun, F. Constructal optimization of a vertical insulating wall based on a complex objective combining heat flow and strength, **Science China Technological Sciences**, v. 53(8), p. 2278-2290, 2010.

Yang, D. K.; Lee, K. S.; Song, S. Fin spacing optimization of a fin-tube heat exchanger under frosting conditions, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 49 p. 2619-2625, 2006.

Yu, B.; Li, B. Fractal-like tree networks reducing the thermal conductivity, **Physical Review E**, v. 73(6), p. 066302, 2006.

Zhang, X. W.; Wong, E. H.; Lee, C.; Chai, T. C.; Ma, Y. Y.; Teo, P. S.; Pinjala, D.; Sampath, S. Thermo-mechanical finite element analysis in a multichip build up substrate based package design, **Microelectronics Reliability**, v. 44, p. 611-619, 2004.

Zhang, Y.; Liu, S.; Qiao, Heting. Design of the heat conduction structure based on the topology optimization, **Developments in Heat Transfer**, v. 26, p. 523-536, 2011.

Zhou, S.; Chen, L.; Sun, F. Constructal optimization for solid-gas reactors based on triangular element, **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 51(9), p. 1554-1562, 2008.

Zhou, S.; Chen, L.; Sun, F. Constructal theory in designing photovoltaic cell, **National Science**, v. 16(11), p. 1500-1505, 2006.

## APÊNDICE A – Códigos em MATLAB® para condutividades iguais

### (Código secundário)

```
clear
    for L1dL0 = 0.1:0.1:300
        L1dL0
        CONDUTIVIDADESIGUAIS(L1dL0)
    end
```

### (Código principal)

```
function CONDUTIVIDADESIGUAIS(L1dL0)

    angg = 40;
    alfa = angg * pi/180;
    beta = pi - (pi/2 + alfa);

    D1dD0 = 0.5;

    HdL = 1;
    fi = 0.09;
    L = (1/HdL)^0.5;
    H = 1/L;

    D0 = 0.1;
    D1 = D0 * D1dD0;
    X = D1*cos(beta);
    Y = D1*sin(beta);
    a = fi-D0^2*D1dD0*sin(beta);
    b = D0^2*(D1dD0)^2*sin(beta)*cos(beta);
    c = (2*L1dL0*D1+D0);
    L0 = (a + b)/c;
    L1 = L0 * L1dL0;

    k = 1; %para a superficie com geração de calor
    kp = 100; %para a geometria super condutiva

    x1 = -L/2;
    y1 = 0;
    x2 = L/2;
    y2 = 0;
    x3 = L/2;
    y3 = H;
    x4 = -L/2;
    y4 = H;

    x5 = D0/2;
    y5 = 0;
    x6 = D0/2;
    y6 = L0;
```

```

x7 = (D0/2 + L1*cos(alfa));
y7 = L0+L1*sin(alfa);
x8 = (D0/2-X+L1*cos(alfa));
y8 = L0 + Y + L1*sin(alfa);
x9 = (D0/2-X);
y9 = L0 + Y;
x10 = -(D0/2-X);
y10 = L0 + Y;
x11 = -(D0/2-X+L1*cos(alfa));
y11 = L0 + Y + L1*sin(alfa);
x12 = -(D0/2 + L1*cos(alfa));
y12 = L0+L1*sin(alfa);
x13 = -D0/2;
y13 = L0;
x14 = - D0/2;
y14 = 0;

[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',9);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1.5 1 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-0.5 2.3]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');

% Geometry description:
pdepoly([ x1,...
  x2,...
  x3,...
  x4,...
],...
[ y1,...
  y2,...
  y3,...
  y4,...
],...
'P1');
pdepoly([ x5,...
  x6,...
  x7,...
  x8,...
  x9,...
  x10,...
  x11,...
  x12,...
  x13,...
  x14,...
],...
[ y5,...
  y6,...
  y7,...
  y8,...
  y9,...
  y10,...
  y11,...
  y12,...
  y13,...

```

```

y14,...
],...
'P2');
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','P1+P2')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(15,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(14,...
'dir',...
1,...
'1',...
'0')
pdesetbd(13,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(3,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(2,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(1,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
setappdata(pde_fig,'jiggle',char('on','mean',''));
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')
pdetool('refine')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
'1.0!100',...%condutividade K, Kp
'0!0',...
'(1.0)+(0).* (0.0)!(0)+(0).* (0.0)',...
'(1.0).* (1.0)!(1.0).* (1.0)',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig,'currparam',...
['1.0!1.0';...

```

```

'1.0!1.0';...
'1.0!100';...%condutividade K, Kp
'1.0!0  ' ;...
'0!0    ' ;...
'0.0!0.0']])

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('0','8376','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1E-4','','fixed','Inf'))

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[1 1 1 1 1 1 7 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');

% Solve PDE:
pdetool('solve')
T=get(findobj(get(pde_fig,'Children'),'flat','Tag','PDEPlotMenu'),...
'UserData');

y = max(T)

```

## APÊNDICE B – Códigos em MATLAB<sup>®</sup> para condutividades diferentes

### (Código secundário)

```
clear
    for D1dD0 = 0.55:0.01:50
        D1dD0
        CONDUTIVIDADESDIF(D1dD0)
    end
```

### (Código principal)

```
function CONDUTIVIDADESDIF(D1dD0)

angg = 47;
alfa = angg * pi/180;
beta = pi - (pi/2 + alfa);

L1dL0 = 1.061;

HdL = 1;
fi0 = 0.05;
fi1 = 0.05;
L = (1/HdL)^0.5;
H = 1/L;

a = fi0 - (fi1/(2*L1dL0*D1dD0));
b = D1dD0 * sin(beta);
c = (D1dD0)^2 * cos(beta)*sin(beta);
D0 = sqrt(a/(b-c))
D1 = D0 * D1dD0;
X = D1*cos(beta);
Y = D1*sin(beta);
L0 = fi1/(2*L1dL0*D1);
L1 = L0 * L1dL0;

k = 1; %para a superficie com geração de calor
kp0 = 200; %para o tronco/base da geometria
kp1 = 050; %para os ramos da geometria

x1 = -L/2;
y1 = 0;
x2 = L/2;
y2 = 0;
x3 = L/2;
y3 = H;
x4 = -L/2;
y4 = H;

x5 = D0/2;
y5 = 0;
```

```

x6 = D0/2;
y6 = L0;
x7 = (D0/2-X);
y7 = L0 + Y;
x8 = -(D0/2-X);
y8 = L0 + Y;
x9 = -D0/2;
y9 = L0;
x10 = - D0/2;
y10 = 0;

x11 = D0/2;
y11 = L0;
x12 = (D0/2 + L1*cos(alfa));
y12 = L0+L1*sin(alfa);
x13 = (D0/2-X+L1*cos(alfa));
y13 = L0 + Y + L1*sin(alfa);
x14 = (D0/2-X);
y14 = L0 + Y;

x15 = -D0/2;
y15 = L0;
x16 = -(D0/2 + L1*cos(alfa));
y16 = L0+L1*sin(alfa);
x17 = -(D0/2-X+L1*cos(alfa));
y17 = L0 + Y + L1*sin(alfa);
x18 = -(D0/2-X);
y18 = L0 + Y;

[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',9);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1.5 1 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-0.5 2.3]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');

% Geometry description:
pdepoly([ x1,...
  x2,...
  x3,...
  x4,...
],...
[ y1,...
  y2,...
  y3,...
  y4,...
],...
'P1');
pdepoly([ x5,...
  x6,...
  x7,...
  x8,...
  x9,...
  x10,...
],...

```

```

[ y5,...
 y6,...
 y7,...
 y8,...
 y9,...
 y10,...
 ],...
 'P2');
pdepoly([ x11,...
 x12,...
 x13,...
 x14,...
 ],...
 [ y11,...
 y12,...
 y13,...
 y14,...
 ],...
 'P3');
pdepoly([ x15,...
 x16,...
 x17,...
 x18,...
 ],...
 [ y15,...
 y16,...
 y17,...
 y18,...
 ],...
 'P4');
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','P1+P2+P3+P4'
)

% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(15,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(14,...
'dir',...
1,...
'1',...
'0')
pdesetbd(13,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(3,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')
pdesetbd(2,...
'neu',...
1,...

```

```

'0',...
'0')
pdesetbd(1,...
'neu',...
1,...
'0',...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
setappdata(pde_fig,'jiggle',char('on','mean',''));
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')%primeiro refinamento
pdetool('refine')%segundo refinamento
pdetool('refine')%terceiro refinamento = só fiz até aqui
%pdetool('refine')%quarto refinamento

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
'1.0!050!200!050',...%CONDUTIVIDADES k,kp1,kp0,kp1
'0!0!0!0',...
'(1.0)+(0).* (0.0)! (0)+(0) .* (0.0)! (0)+(0) .* (0.0)! (0)+(0) .* (0.0)',...
'(1.0) .* (1.0)! (1.0) .* (1.0)! (1.0) .* (1.0)! (1.0) .* (1.0)',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig,'currparam',...
['1.0!1.0!1.0!1.0';...
'1.0!1.0!1.0!1.0';...
'1.0!050!200!050';...%CONDUTIVIDADE k,kp1,kp0,kp1
'1.0!0!0!0';...
'0!0!0!0';...
'0.0!0.0!0.0!0.0'])

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('0','47232','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1E-4','','fixed','Inf'))

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[1 1 1 1 1 1 7 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');

% Solve PDE:
pdetool('solve')
T=get(findobj(get(pde_fig,'Children'),'flat','Tag','PDEPlotMenu'),...
'UserData');
y = max(T)

```