MUSICA COMO RUÍDO *1/f*

Paulo Machado Mors
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre – RS

Resumo

É discutida a maneira matemática que se conhece para medir a combinação de previsibilidade com imprevisibilidade em melodias. Comenta-se o que há de comum, estatisticamente, nas composições musicais.

I. Introdução

A geometria fractal tem permeado, desde sua criação, uma extensa gama de áreas do conhecimento humano. Em particular, as funções fractais são muito presentes na análise de fenômenos que apresentam flutuações no tempo.

Música é um desses fenômenos. Apresentamos, aqui, o tipo de função fractal – o chamado ruído *1/f* – que se mostrou capaz de bem descrever as flutuações em linhas melódicas.

II. Funções Fractais

Fomos educados olhando o mundo sob a ótica da geometria euclidiana. Hoje, começa a ficar claro que existe uma ótica mais abrangente, a geometria **fractal**, introduzida por Benoit MANDELBROT[I], em 1975. O trabalho inicial de Mandelbrot foi a unificação e a aplicação de muitos trabalhos antigos (de Cantor, por exemplo) sobre funções especiais que não são deriváveis em nenhum ponto.

Qualitativamente, podemos dizer que um objeto fractal é um objeto rugoso, com suas rugosidades aparecendo em qualquer escala de comprimento. Esta última característica – a de possuir uma estrutura invariante sob mudança de escala – é conhecida como **auto-similaridade**.

Um bom exemplo é o das fronteiras geográficas, ou da costa de um país. É conhecido o problema da divergência entre diferentes medidas de uma mesma fronteira. O que se verifica é que medidas de comprimento de uma curva apresentam resultados diferentes quando realizadas com réguas de tamanhos diferentes (ou, melhor dizendo, realizadas com resoluções diferentes). Em uma curva muito recortada, haverá muitos pequenos trechos que deixarão de ser "vistos" por uma régua maior.

Somos levados a pensar que, quanto menor a régua utilizada, "melhor" será o resultado da medida, no sentido de estar mais próximo de seu valor "real". De fato, isto ocorre para uma curva "suave". Já para curvas fractais, recortadas em qualquer escala de comprimento, a medida do comprimento tem uma dependência com o tamanho da régua da forma

$$L_\varepsilon \ \alpha \ \varepsilon^\delta, \ \varepsilon \to 0 \tag{1}$$

onde L_ε é a medida realizada com a régua de comprimento ε e δ é um expoente característico da curva medida. A relação vale assintoticamente, no limite de tamanhos de régua pequenos.

Quando a curva é "suave" (ou seja, não fractal – objetos não fractais são chamados **compactos**), i.e., tem um comprimento bem determinado, o expoente δ será nulo, já que a medida independerá do comprimento da régua, no limite de réguas pequenas. Nos demais casos, o expoente será negativo (a medida sempre aumentará com a diminuição da régua) e é usual fazer-se

$$\delta = 1 - D, \tag{2}$$

onde D será um número maior que a unidade (D = 1, para curvas "suaves"). Este número é a **dimensão fractal** da curva: uma linha compacta tem dimensão fractal igual a 1, coincidindo com sua dimensão euclidiana. Este parâmetro dá uma medida do aspecto mais ou menos recortado da curva.

O tema objetos fractais é inesgotável, atualíssimo, e remetemos o leitor interessado à bibliografia (refs. (1), (2), (3), p. ex.), atendo-nos no momento às funções fractais .

Chamamos de funções fractais aquelas funções que, sendo contínuas em um certo domínio, não são deriváveis em nenhum ponto do domínio. O gráfico de uma dessas funções é uma curva fractal. Um exemplo simples é a série

$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(y^n t\right)}{y^{(2-D)n}}, \tag{3}$$

com $1 < D < 2$ e $y > 1$, conhecida como função de Weierstrass-Mandelbrot[(4)].

Esta função é contínua, mas sua derivada é uma série divergente, para qualquer valor de t real.

A relação

$$C(\gamma t) = \gamma^{(2-D)} C(t) \tag{4}$$

é satisfeita para a função. Esta é uma **relação de escala** e reflete o fato de que o gráfico da função em um intervalo qualquer $[t_0; \gamma t_0]$ (t_0 arbitrário) é o gráfico da função no intervalo $[\frac{t_0}{\gamma}; t_0]$ ampliado pelos fatores γ, na direção horizontal, e $\gamma^{(2-D)}$, na direção vertical.

A função (3), portanto, apresenta uma auto-similaridade com fatores de escala diferentes para cada uma das direções coordenadas. Isto caracteriza o que é chamado de **auto-afinidade** ("self-affinity") da função. A função de Weierstrass-Mandelbrot é uma curva fractal auto-afim ("self-affine") .Sua dimensão fractal é o parâmetro D.

Outro exemplo de função fractal é a que representa a coordenada, como função do tempo, de uma partícula em movimento browniano unidimensional. Em uma dimensão, este caminhante aleatório ("random-walker") terá, a cada novo passo, um acréscimo de determinado comprimento à sua coordenada, que poderá ser positivo ou negativo. Aqui, a fractalidade vale até um limite inferior para a auto-similaridade, o que de resto acontece para qualquer objeto fractal do mundo real, não puramente matemático. Também, a auto-similaridade (auto-afinidade, mais corretamente) neste caso será estatística e não exata, característica da maioria dos fractais da natureza. A Fig. 3 ilustra uma possível curva deste tipo, o chamado traço ("trace") de um movimento browniano. Se o eixo horizontal representa o tempo, o valor da função em cada ponto será a coordenada da partícula (coordenada x, por exemplo) no instante considerado. No caso de movimento browniano d-dimensional, para cada dimensão haverá um traço correspondente.

III. Correlação em Funções Fractais

Curvas como as das figuras deste artigo são **funções flutuantes estocásticas** típicas. Quando se investiga um evento que tem uma evolução flutuante no tempo, uma questão importante que se coloca sempre é a de encontrar a correlação que existe entre os valores da função em dois instantes. Denotemos por F(t) uma função flutuante estocástica. A medida da correlação aludida será dada pela **função correlação** K(s)[5]:

$$K(s) \equiv \left\langle F\left(t'\right)F\left(t''\right)\right\rangle \tag{5}$$

onde s = t'' – t' e $\langle \ldots \rangle$ refere-se a média de ensemble. A **densidade espectral** de F (ou seu espectro de potência) é dada pela componente de Fourier J(ω) à freqüência angular ω:

$$K(s) = 2\int_0^\infty J(\varpi)\cos\varpi s \; d\varpi \; , \tag{6.a}$$

$$J(\varpi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(s)\cos\varpi s \, \mathrm{ds}. \tag{6.b}$$

As relações *(6a – b)* valem para *K(s)* real, que é o caso de nosso interesse. Daqui para a frente, adotamos a variável *f* $(\omega = 2\pi f)$ para freqüência e nos referimos à densidade espectral *J(f)*.

Funções estocásticas no tempo são, em geral, caracterizadas pela densidade *J(f)*.

Um tipo muito corrente de função flutuante estocástica é o movimento browniano fracionário ("fractional Brownian motion": fBm)[6], um bom modelo para ruídos e processos aleatórios no tempo. O traço de um movimento deste tipo ao longo de uma coordenada é caracterizado por um parâmetro, geralmente chamado H, que compõe o expoente da relação entre variância e tempo:

$$\left\langle \Delta F^2 (\Delta t) \right\rangle \alpha \left| \Delta t \right|^{2H} . \tag{7}$$

ΔF(Δt) = F(t'') – F(t') é o incremento da função *F(t)* no intervalo de tempo *Δt = t'' – t'*. O movimento Browniano usual é caracterizado por *H =1/2.* O movimento browniano fracionário é uma função auto-afim, já que vale a relação

$$\left\langle \Delta F^2 (r\Delta t) \right\rangle \alpha r^{2H} \left\langle \Delta F^2 (\Delta t) \right\rangle : \tag{8}$$

se r é fator de escala no tempo, r^H será o fator de escala nos valores da função.

O traço de um movimento browniano fracionário é uma função fractal com dimensão fractal[6]

$$D = 2 – H. \tag{9}$$

Muitos ruídos são bem representados pelo traço de um fBm, que tem um espectro de potência apresentando a dependência com a freqüência da forma

$$J(f) \alpha \frac{1}{f^{\beta}} , \tag{10}$$

onde

$$\beta = 2H + 1. \tag{11}$$

Ruído com $\beta = 0$ (espectro de potência independente da freqüência) é chamado de "ruído branco", não apresentando nenhuma correlação. Traço de movimento browniano *(H = 1/2)* tem a caracterizá-lo o expoente $\beta = 2$, e apresenta uma sensível correlação no tempo. Obviamente, uma situação intermediária, com $\beta = 1$, retratará uma flutuação no tempo nem totalmente descorrelacionada como ruído branco, nem tão fortemente correlacionada como ruído browniano: é a chamada flutuação *1/f*, ou ruído *1/f.*

As figuras mostram exemplos destes três tipos de funções flutuantes, que foram traçadas segundo preceito publicado recentemente[7], e normalizadas. É evidente a mistura, na Fig. 2, da total descorrelação apresentada pelo gráfico da Fig. 1, com a monótona correlação na Fig. 3.

IV. Música como ruído *1/f*

Em 1975, Richard F. Voss[8] constatou que, em composições musicais, flutuações nas freqüências das notas são flutuações *1/f*. Ou seja, a função correlação no tempo na seqüência de notas musicais da escala adotada em uma composição musical apresenta uma transformada de Fourier – espectro de potência – que depende da freqüência como *1/f*. Aqui, é importante ressaltar que o espaço de freqüências onde se trabalha ao se proceder à transformação de Fourier não tem nenhuma relação com as freqüências das notas musicais de uma escala predeterminada. Também, o mesmo tipo de flutuação *1/f* é verificado no suceder de tempos e intensidades das notas musicais.

E óbvio que isto, por si só, não é música. Se gerarmos um suceder de notas correlacionadas do modo flutuação *1/f*, esta "melodia" nos parecerá a mesma, se ouvida de trás para a frente. Mas é sobre melodias assim geradas que alguns compositores chegam a construir a chamada "música estocástica": sobre uma linha melódica gerada estocasticamente no computador, a sensibilidade artística do compositor introduz acordes, algumas regras de transição (ou rejeição), etc.

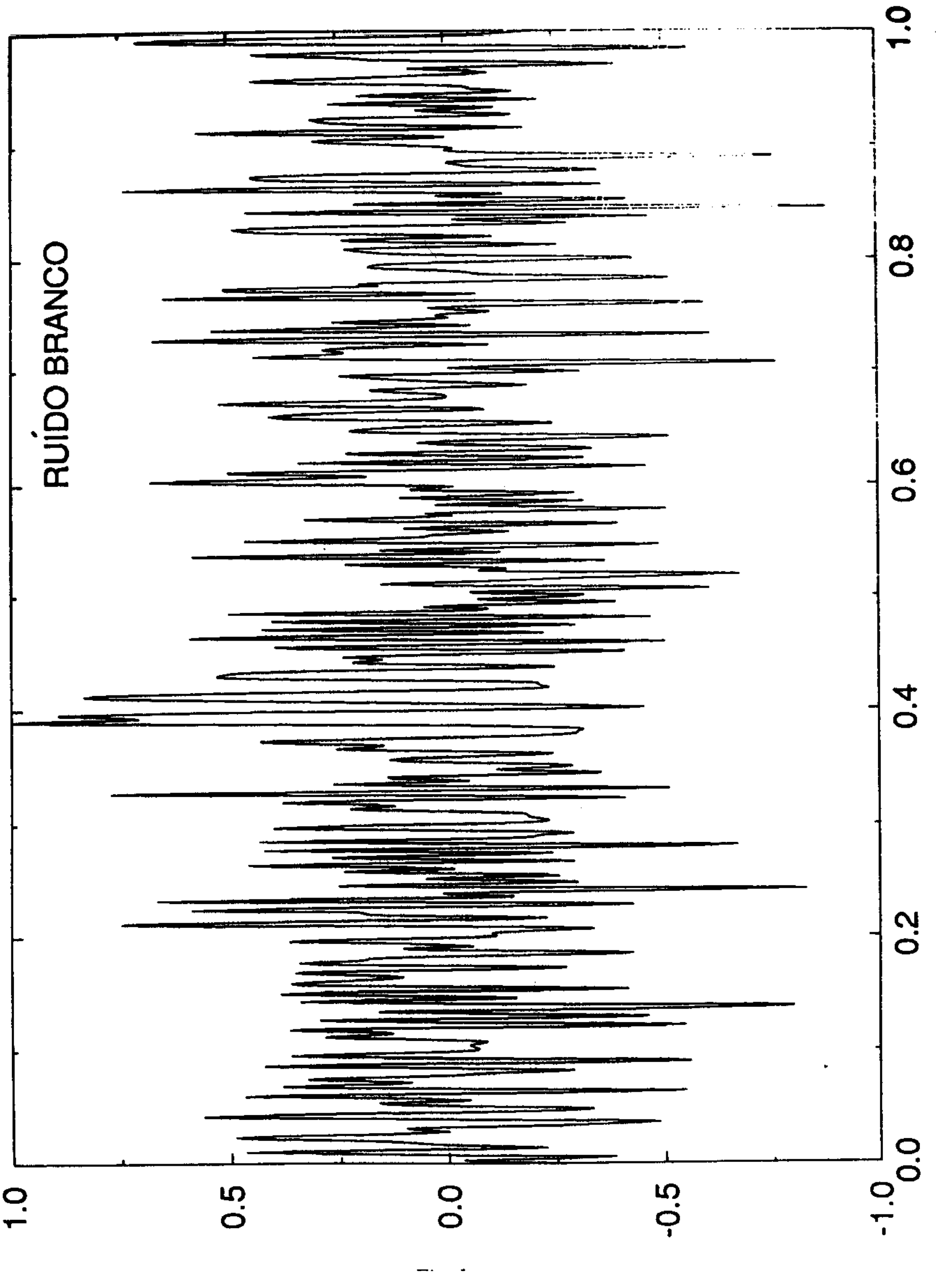
Podemos, então, dizer que música é fractal, no sentido de possuir linhas melódicas que são funções que apresentam flutuações no tempo que podem ser representadas por funções fractais. Além do mais, Voss constatou que estas funções são típicas flutuações *1/f*, tendo analisado várias composições, de culturas e épocas diferentes, da música tradicional japonesa aos Beatles, passando por Beethoven, "blues" americanos, etc. Exceções que fugiram ao padrão ruído *1/f* ficaram com alguns poucos compositores modernos, como Stockhausen, onde as flutuações melódicas se aproximam de ruído branco a baixas freqüências.

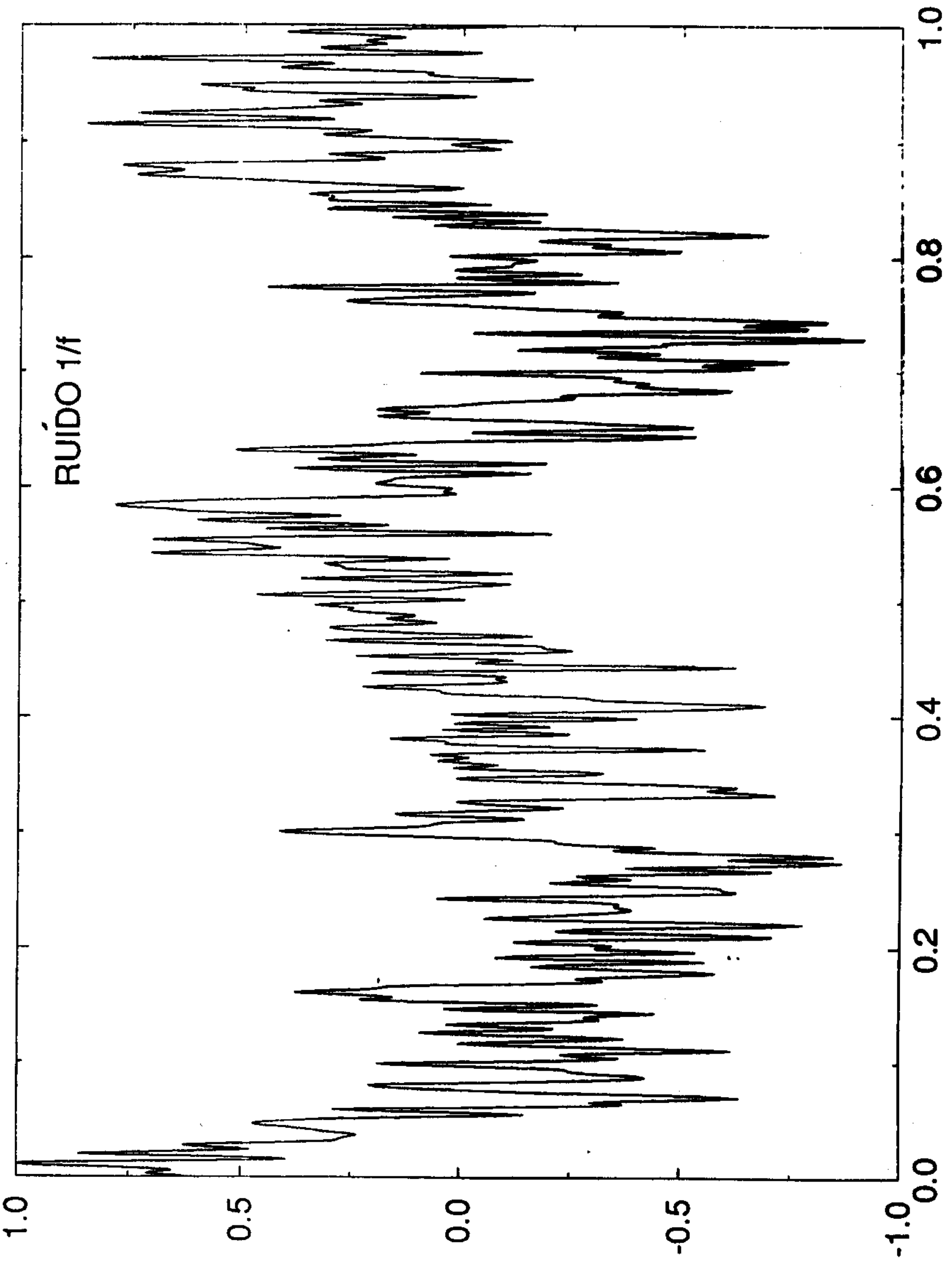
Vale, aqui, assinalar a existência da prática experimental, entre alguns compositores atuais, da chamada **música fractal**. Neste caso, trata-se de trabalhos em que o artista se baseia, por exemplo, em figuras fractais determinísticas, do tipo "conjunto de Mandelbrot"[I], para compor suas obras. Neste sentido, distingue-se música fractal de música não fractal.

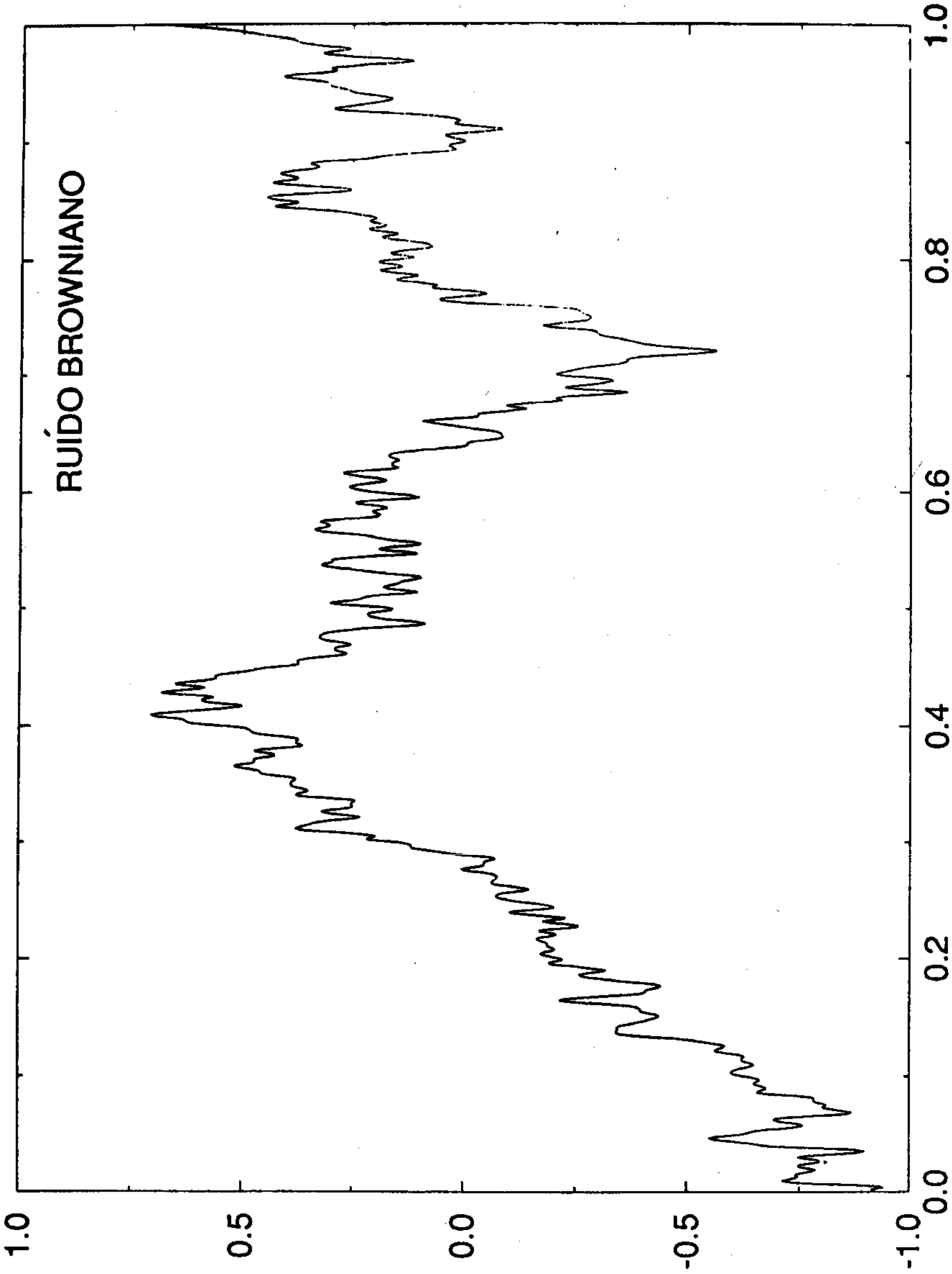
Um artigo de Martin Gardner[9] (um de seus "Mathematical Games") de 1978 apresenta uma bela maneira de se gerar uma seqüência que flutua em *1/f*, que qualquer leitor pode reproduzir.

Não só música é flutuação *1/f*. A cada momento, físicos que trabalham na área da Física Estatística encontram novos comportamentos tipo flutuação *1/f*, para os mais variados fenômenos. Só para mencionar os mais interessantes[6],[9]: flutuações nas medidas de relógios atômicos, nos níveis de cheia de rios, nas correntes elétricas através de membranas nervosas, no fluxo de veículos em auto-estradas, no intervalo de tempo entre duas batidas do coração de um indivíduo saudável, todas são flutuações *1/f*.

Podemos dizer, então, que em 1975, Richard Voss respondeu à pergunta que Platão e Aristóteles se faziam: "o que a arte imita?", pelo menos no que diz respeito à música. Não deve ser muito ousado afirmar, hoje, que a música "imita" o ritmo da natureza.


RUÍDO BRANCO
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


RUÍDO 1/f
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


RUÍDO BROWNIANO
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

V. Conclusões

Música, como muitas outras manifestações flutuantes no tempo, é ruído *1/f*. A descoberta de Richard Voss nos mostra que a música tem algo em comum com fenômenos, os mais diversos, do fluxo de veículos ao batimento cardíaco. E este algo em comum é o comportamento em *1/f* do espectro de potência da função correlação do parâmetro que flutua no tempo.

Talvez seja este um dos motivos que nos tornam a música algo agradável de ouvir. Quando a criança nasce, a mãe a toma no colo, aconchegando-a no lado esquerdo do peito, onde ela se acalmará ao som do bater do coração da mãe. Nossa vida é regida, do início ao fim, por fenômenos que variam como ruídos *1/f*.

Obviamente, gerar uma função flutuante estocástica que represente um ruído *1/f* (como é ensinado no artigo do Martin Gardner) não será fazer boa música.

O compositor estocástico toma como base uma linha melódica gerada estocasticamente, e sobre ela trabalha com suas regras de transição e rejeição, elaborando seus acordes, etc. Só a sensibilidade de um compositor pode criar boa música. A Física explica o que a música tem em comum com o meio que nos cerca. Para, além disso, precisamos dos artistas.

VI. Agradecimento

Sem o estímulo do convívio dos colegas Cyro Ketzer Saul e Adriano Roberto da Luz Figini este artigo não teria sido escrito.

VII. Referências Bibliográficas

1. MANDELBROT, B. B. Les objets fractals: forme, hasard et. dimension (Paris: Flammarion), 1975. Mandelbrot, B. B. The fractal geometry of nature (San Francisco: Freeman), 1982.

2. JULLIEN, R.; BOTET, R. **Aggregation and fractal aggregates**. Singapore: World Scientific, 1987.

3. CHAVES, C. M. G. F. **Ciência Hoje**, 10 (1989) 27.

4. BERRY, M. V.; LEWIS, Z. V. Proc. Roy. Soc. London A370 (1980) 459.

5. REIF, F. Fundamentals of statistical and thermal physics. New York: McGrawHill, 1965. cap. 15.

6. VOSS, R. F. **Physica** D 38 (1989) 362.

7. ISICHENKO, M. B. **Rev. Mod, Phys**, 64 (1992) 961.

8. VOSS, R. F. **Nature**, **258 (1975) 317**.

9. GARDNER, M. **Sci. American** (Abr. 1978) 16.