

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas,  
Estruturas *Offshore* e Nanotubos de Carbono  
através da Resposta Fundamental  
de Valor Inicial**

por

**Sânzara Nhiaia Jardim Costa**

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen  
Orientador

Porto Alegre, abril de 2006

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Sânzara Nhiaia Jardim Costa

O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas *Offshore* e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial / Sânzara Nhiaia Jardim Costa.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2006.

274 p.: il.

Tese de Doutorado—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006. Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Área: Matemática Aplicada

Palavras chave: Resposta fundamental, decomposição de respostas forçadas, estruturas offshore, nanotubos de carbono

**O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas,  
Estruturas *Offshore* e Nanotubos de Carbono  
através da Resposta Fundamental  
de Valor Inicial**

por

**Sânzara Nhiaia Jardim Costa**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

**Doutor em Matemática Aplicada**

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. José Manoel Balthazar - UNESP/UNICAMP

Prof. Dr. Mário Dávila - UFSJ

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho - PPGMAp/UFRGS

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Cristina Varriale

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, 10 de abril de 2006

## AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente ao meu Heiner Lanche, que sempre esteve ao meu lado, pela paciência, compreensão, alegria e apoio indispensáveis à elaboração desta tese.

Agradeço aos meus pais e sogros, pelo carinho, apoio e confiança depositados. Também às minhas irmãs, pelo companheirismo e incentivo.

Agradeço a todos os amigos e colegas que me incentivaram e fizeram críticas sempre que necessário, em especial à Vivi, Garibotti e Bidel.

Agradeço ao Professor Julio Claeysen pela confiança e ensinamentos durante minha formação acadêmica e acesso a seus trabalhos de pesquisa no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao PPGMAp, ao CNPq e a Fapergs pela oportunidade e disponibilização dos recursos, sem dúvida imprescindíveis, e, também, aos professores do PPGMAp, pela colaboração em minha formação.

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	viii
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	xiii
RESUMO . . . . .	xvi
ABSTRACT . . . . .	xvii
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão bibliográfica . . . . .	3
1.2 Contribuições desta tese . . . . .	6
1.3 Estrutura do trabalho . . . . .	7
<b>2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM VIGAS . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1 Modelo de Euler-Bernoulli . . . . .	12
2.2 Modelo de Rayleigh . . . . .	16
2.3 Modelo de Vlasov . . . . .	18
2.4 Modelo de Timoshenko . . . . .	21
2.4.1 A equação de Timoshenko de quarta ordem . . . . .	23
2.5 Formulação de Estado . . . . .	27
2.6 Extensões do Modelo de Timoshenko . . . . .	28
2.6.1 Viga sobre fundação elástica . . . . .	28

2.6.2	Viga em I . . . . .	29
2.6.3	Viga de Timoshenko tipo parede-fina carregada axialmente .	30
2.6.4	Viga fixa-livre com massa afixada no extremo livre . . . . .	32
2.6.5	Viga de Timoshenko carregada axialmente com seção transversal tipo aerofólio . . . . .	34
2.6.6	Viga de Timoshenko em U monossimétrica e carregada axialmente . . . . .	35
2.6.7	Viga Segmentada . . . . .	36
2.6.8	Viga não homogênea sobre suspensão viscoelástica . . . . .	38
2.6.9	Viga com restrições intermediárias . . . . .	40
2.6.10	Viga de Ginsberg . . . . .	42
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO MATRICIAL . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>3.1</b>	<b>Formulação de estado . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1.1	Desacoplamento por Cramer . . . . .	50
<b>3.2</b>	<b>Formulação Newtoniana . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>3.3</b>	<b>Formulação Matricial Evolutiva de Extensões do Modelo de Timoshenko . . . . .</b>	<b>55</b>
3.3.1	Viga em I . . . . .	55
3.3.2	Viga de Timoshenko tipo parede-fina carregada axialmente .	55
3.3.3	Viga fixa-livre com massa afixada no extremo livre . . . . .	56

3.3.4	Viga de Timoshenko carregada axialmente com seção transversal tipo aerofólio . . . . .	56
3.3.5	Viga Segmentada . . . . .	57
3.3.6	Viga uniforme com condições de contorno não-clássicas e restrições intermediárias . . . . .	58
3.3.7	Viga de Ginsberg . . . . .	60
3.3.8	Viga infinita sobre fundação viscoelástica . . . . .	60
<b>4</b>	<b>RESPOSTA DINÂMICA . . . . .</b>	<b>62</b>
4.1	O Operador Adjunto . . . . .	63
4.2	A Identidade de Lagrange-Green . . . . .	63
4.2.1	Formulação Escalar . . . . .	67
4.3	Condições de Contorno Adjuntas . . . . .	69
4.3.1	Condições do Tipo de Valor Inicial . . . . .	77
4.3.2	O Caso de Condições Mistas . . . . .	79
4.4	Função de Green de Valor Inicial e Respostas Dinâmicas . . . . .	85
<b>5</b>	<b>DECOMPOSIÇÃO DE RESPOSTAS FORÇADAS . . . . .</b>	<b>90</b>
5.1	Respostas Forçadas no Sistema de Timoshenko . . . . .	91
5.1.1	Respostas forçadas estacionárias e oscilatórias . . . . .	93
5.2	Modos Normais . . . . .	94
5.3	Equação Modal . . . . .	98

5.3.1	Base Dinâmica . . . . .	100
<b>5.4</b>	<b>Valor Crítico da Frequência . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>5.5</b>	<b>Autovalores Duplos . . . . .</b>	<b>106</b>
5.5.1	Viga Livre-Livre . . . . .	107
<b>5.6</b>	<b>A Resposta Forçada pelo Método Espectral: sistema acoplado de Timoshenko . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>5.7</b>	<b>A Resposta Forçada na equação de Timoshenko . . . . .</b>	<b>116</b>
5.7.1	Respostas Permanentes e Função de Transferência . . . . .	120
5.7.2	Função de Green espacial . . . . .	124
5.7.3	Autovalores e Autofunções . . . . .	126
5.7.4	Base Dinâmica . . . . .	128
5.7.5	A Resposta Forçada pelo Método Espectral . . . . .	130
<b>5.8</b>	<b>Viga Apoiada-Deslizante . . . . .</b>	<b>134</b>
5.8.1	A resposta fundamental na caracterização de autovalores e autofunções . . . . .	135
5.8.1.1	Segundo espectro . . . . .	144
5.8.2	Decomposição da Resposta Forçada . . . . .	146
<b>5.9</b>	<b>O Modelo de Vlasov . . . . .</b>	<b>157</b>
5.9.1	A Equação de Vlasov para a Deflexão . . . . .	159
5.9.1.1	As Equações de Rayleigh e Euler-Bernoulli como Casos Limites . . . . .	160



5.9.2	Autovalores e Autovetores . . . . .	161
5.9.2.1	Viga Apoiada-Deslizante . . . . .	165
<b>5.10</b>	<b>Viga Apoiada-deslizante segundo o modelo de Rayleigh . .</b>	<b>169</b>
5.10.1	Decomposição da resposta forçada para uma viga apoiada- deslizante segundo o modelo de Rayleigh . . . . .	173
<b>6</b>	<b>FORÇAS AMBIENTAIS: ONDAS, CORRENTES E VENTOS</b>	<b>182</b>
<b>6.1</b>	<b>A Equação de Morison . . . . .</b>	<b>183</b>
<b>6.2</b>	<b>Velocidade das Ondas . . . . .</b>	<b>187</b>
6.2.1	Teoria de Ondas Lineares . . . . .	187
6.2.2	Ondas Randômicas . . . . .	188
<b>6.3</b>	<b>Velocidade da Corrente <math>U_c</math> no Oceano . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>6.4</b>	<b>Velocidade do Vento <math>U_v</math> . . . . .</b>	<b>193</b>
<b>7</b>	<b>VIBRAÇÕES ESTOCÁSTICAS DE UMA ESTRUTURA <i>OFF-</i> <i>SHORE</i> . . . . .</b>	<b>194</b>
<b>7.1</b>	<b>Modelo não-linear acoplado . . . . .</b>	<b>197</b>
<b>7.2</b>	<b>Respostas Livre e Livre-amortecida . . . . .</b>	<b>206</b>
7.2.1	Movimento Longitudinal . . . . .	208
7.2.2	Movimento Transversal . . . . .	211
7.2.3	Resposta livre-amortecida . . . . .	211
<b>7.3</b>	<b>Modelos Lineares . . . . .</b>	<b>217</b>

7.3.1	Linearização . . . . .	217
7.3.2	Vibrações Modais . . . . .	221
7.3.3	Vibrações Longitudinais . . . . .	226
7.3.4	Outros modelos lineares transversais . . . . .	227
<b>8</b>	<b>MODOS PARA NANOTUBOS DE CARBONO . . . . .</b>	<b>242</b>
8.1	Modelagem através de Vigas Elásticas . . . . .	242
8.2	Propriedades materiais . . . . .	244
8.3	Modos de Timoshenko e Aproximação de Vlasov . . . . .	246
8.3.1	Viga fixa-apoiada . . . . .	246
8.3.2	Viga fixa-livre . . . . .	251
8.3.3	Viga apoiada-deslizante . . . . .	253
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>262</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>266</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1	Quatro tipos de condições de contorno clássicas: (a) apoiada, (b) fixa, (c) livre, (d) deslizante. . . . .	15
Figura 2.2	Um elemento incremental de viga. . . . .	17
Figura 2.3	Fator de cisalhamento para diferentes tipos de seção transversal. . . . .	19
Figura 2.4	Geometria da viga de paredes finas em forma de I sujeita a momentos nos extremos. . . . .	29
Figura 2.5	Geometria de uma viga elástica do tipo parede-fina. . . . .	31
Figura 2.6	Esquema do sistema de coordenadas e notação utilizada. . . . .	33
Figura 2.7	Viga de Timoshenko em $\mathbf{U}$ carregada axialmente. . . . .	35
Figura 2.8	Geometria da Viga bi-segmentada. . . . .	37
Figura 2.9	Viga não homogênea sobre suspensão viscoelástica. . . . .	38
Figura 2.10	Definições dos eixos. . . . .	38
Figura 2.11	Modelo do sistema dinâmico combinado. . . . .	40
Figura 2.12	Viga de Ginsberg. . . . .	42
Figura 3.1	Características da equação de Timoshenko passando por um ponto P. . . . .	49
Figura 5.1	Função $h(x)$ para os casos de $\omega < \omega_c$ , $\omega = \omega_c$ e $\omega > \omega_c$ , respectivamente. (a) $\omega = 130$ rad/s, (b) $\omega = 170.5$ rad/s, (c) $\omega = 280$ rad/s . . . . .	106

Figura 5.2	Modos para o deslocamento $v(t, x)$ de uma viga de Timoshenko apoiada-deslizante para as primeiras freqüências positivas. . . .	142
Figura 5.3	Modos para a rotação $\psi(t, x)$ para as primeiras freqüências positivas. . . . .	142
Figura 5.4	Modos para deslocamento (linha contínua) e rotação (linha tracejada) para as primeiras freqüências positivas. . . . .	143
Figura 5.5	Deflexão para as primeiras e segundas freqüências positivas. . .	143
Figura 5.6	Rotação $v(t, x)$ para as primeiras e segundas freqüências positivas.	144
Figura 5.7	Função de Green espacial para cada componente. . . . .	146
Figura 5.8	Parte espacial correspondentes ao forçante e aos componentes do deslocamento e giro da resposta permanente, respectivamente. .	147
Figura 5.9	Parte espacial correspondentes ao forçante e as respostas permanentes para a deflexão e giro. . . . .	154
Figura 5.10	Modos para o deslocamento $v(t, x)$ de uma viga de Vlasov apoiada-deslizante. . . . .	166
Figura 5.11	Modos para a rotação $\psi(t, x)$ . . . . .	167
Figura 5.12	Modos para deslocamento $v(t, x)$ (linha contínua) e rotação $\psi(t, x)$ (linha tracejada). . . . .	167
Figura 5.13	Comparação entre os modos para a deflexão $v(t, x)$ para os modelos de Timoshenko (linha contínua) e Vlasov (linha tracejada).	168
Figura 5.14	Comparação entre os modos para o giro $\psi(t, x)$ para os modelos de Timoshenko (linha contínua) e Vlasov (linha tracejada). . . .	169

Figura 5.15	Modos para o deslocamento $v(t, x)$ de uma viga de Rayleigh apoiada-deslizante. . . . .	171
Figura 5.16	Comparação entre os modos para a deflexão $v(t, x)$ : Timoshenko (linha contínua), Vlasov (tracejado estreito), Rayleigh (tracejado largo). . . . .	172
Figura 5.17	Função de Green espacial. . . . .	173
Figura 5.18	Parte espacial correspondentes ao forçante e a resposta permanente para a deflexão. . . . .	174
Figura 5.19	Resposta impulso temporal em $t = 5s$ . . . . .	175
Figura 5.20	Resposta impulso temporal em $x = L$ , para os tempos $t = 5s$ (azul), $t = 10s$ (verde), $t = 15s$ (vermelho) e $t = 20s$ (preto). . .	175
Figura 5.21	Parte espacial correspondente ao forçante e as respostas permanentes para a deflexão. . . . .	178
Figura 6.1	Representação das ondas randômicas no mar. . . . .	189
Figura 7.1	Ilustração dos variados tipos de estruturas utilizadas para exploração de petróleo. . . . .	195
Figura 7.2	Exemplos de redes de cabos para fixação/exploração de petróleo. . . . .	196
Figura 7.3	Modelo simplificado da estrutura. . . . .	197
Figura 7.4	a) Vibração axial livre da Massa $M_p$ com c.i. IC1; b) Espaço de fases para c.i. IC1. . . . .	209
Figura 7.5	PSD para o movimento axial utilizando IC1. . . . .	209
Figura 7.6	Deslocamento axial forçado e PSD considrando IC1. . . . .	210

Figura 7.7	Resposta livre para os deslocamentos axial $u(t, L)$ , usando IC1 para um intervalo de tempo de aproximadamente 2s. . . . .	210
Figura 7.8	Resposta livre para o deslocamento transversal $v(t, L)$ e rotação $\psi(t, L)$ usando IC1. . . . .	211
Figura 7.9	Resposta livre para o deslocamento transversal e fase (modelo de Euler-Bernoulli) usando IC1. . . . .	215
Figura 7.10	Deslocamento transversal em $x = L$ para condições iniciais IC1 e $\omega_f = 2 \text{ rad/s}$ até $\omega_f = 8 \text{ rad/s}$ . . . . .	215
Figura 7.11	Deslocamento transversal em $x = L$ para condições iniciais IC1 para o modelo de Rayleigh. . . . .	216
Figura 7.12	Deslocamento transversal em $x = L$ para condições iniciais IC1 para o modelo de Euler-Bernoulli. . . . .	216
Figura 7.13	Resposta livre para o deslocamento transversal e fase (modelo de Euler-Bernoulli) usando IC1. . . . .	233
Figura 7.14	PSD para o modelo de Euler-Bernoulli para IC1. . . . .	233
Figura 7.15	Resposta livre para o deslocamento transversal e fase (modelo de Rayleigh) usando IC1. . . . .	234
Figura 7.16	PSD para o modelo de Rayleigh para IC1 . . . . .	234
Figura 7.17	Comparação entre os deslocamentos transversais para os modelos de Rayleigh e Euler-Bernoulli . . . . .	235
Figura 7.18	Entrada cossenoidal $f(t, x)$ . . . . .	236
Figura 7.19	Resposta forçada harmônica para o modelo de Rayleigh. . . . .	237

Figura 7.20 Resposta forçada harmônica para o modelo de Rayleigh para frequências próximas a frequência natural de 15.04Hz. . . . .	238
Figura 7.21 Resposta forçada harmônica para o modelo de Euler-Bernoulli. .	238
Figura 8.1 Nanotubos de paredes duplas e múltiplas. . . . .	243

## Lista de Símbolos

$A$	Área da seção transversal	$m^2$
$A_f$	Área da seção transversal do vol. deslocado	$m$
$\mathcal{B}$	Matriz de contorno	
$B$	Forma bilinear de contorno	
$C, \mathcal{C}, \mathbf{C}$	Coefficiente de amortecimento	
$C_A$	Coefficiente de massa adicionada	–
$C_D$	Coefficiente de arrasto	–
$C_M$	Coefficiente de inércia	–
$d$	Profundidade da água	$m$
$D$	Diâmetro da estrutura	$m$
$E$	Módulo de Young	$Nm^2$
$f(t, x)$	Força transversal distribuída	$N/m$
$\mathbf{f}(t, x)$	Vetor dos termos forçantes	$N/m$
$G(\lambda, x, \xi)$	Função de Green espacial	
$G$	Módulo de cisalhamento	$N/m^2$
$g(t, x)$	Momento transversal distribuído	$N = m^4$
$g$	Aceleração gravitacional	$m/s^2$
$h(t), \mathbf{h}(t)$	Resposta impulso evolutiva	
$h(x)$	Resposta impulso estacionária	
$\dot{h}, \dot{\mathbf{h}}$	Derivada temporal da resposta impulso	
$h'$	Derivada espacial de $h(x)$	
$h(t, x)$	Base dinâmica	
$h(t, x, \xi)$	Função de Green de valor inicial	
$\mathbf{h}(t, x, \xi)$	Função de Green matricial	



$H$	Altura de onda significativa	$m$
$H(s), H(s, x, \xi)$	Função de transferência	
$I, J$	Momento de inércia	$m^4$
$\mathbf{I}$	Matriz identidade	
$i$	Unidade complexa	
$k$	Número de onda	$m$
$k$	Constante da mola torcional	$N/m$
$K_C$	Número de Keulegan-Carpenter	—
$K, \mathcal{K}, \mathbf{K}$	Coefficiente de rigidez	
$L$	Comprimento da viga	$m$
$\mathcal{L}$	Lagrangeano	$N \cdot m$
$M$	Momento	$N \cdot m$
$\mathbf{M}, \mathcal{M}$	Matriz de Massa	
$M_p$	Massa pontual	$kg$
$m_{fl}$	Massa de fluido deslocado por comprimento	$kg/m$
$p(t, x)$	Carga axial distribuída	$N/m$
$P(s), p(\lambda)$	Polinômio característico	
$Q$	Cisalhamento	$m$
$Re$	Número de Reynolds	—
$r_i$	Raio interno de um cilindro de parede dupla	$m$
$r_o$	Raio externo de um cilindro de parede dupla	$m$
$t$	tempo	$s$
$u(t, x)$	Deslocamento axial	$m$
$U_c$	Velocidade da corrente	$m/s$

$U_v$	Velocidade do vento	$m/s$
$v(t, x)$	Deslocamento transversal	$m$
$w_h(t, x)$	Resposta homogênea	
$w_{hp}(t, x)$	Resposta livre induzida pela particular	
$w_p(t, x)$	Resposta particular	
$w_x, w_y$	Velocidades das ondas	$m/s$
$EI$	Rigidez flexural	
$KE$	Energia cinética	$kg \cdot m^2/s^2$
$PE$	Energia potencial	$kg \cdot m^2/s^2$
$\gamma$	Fator de forma	
$\eta$	Elevação da superfície	$m$
$\Delta$	Determinante característico	
$\kappa$	Fator de forma	—
$\lambda$	Autovalor	
$\mu$	Viscosidade dinâmica da viga	$N \cdot /m^2$
$\nu$	Taxa de Poisson	—
$\rho$	Densidade da viga	$kg/m^3$
$\rho_f$	Densidade da água	$kg/m^3$
$\Phi, \Psi$	Matrizes modais	
$\psi(t, x)$	Rotação	$rad$
$\omega_j$	$j$ -ésima frequência natural	
$\Omega$	Matriz espectral	

## RESUMO

É desenvolvida a formulação newtoniana do modelo de Timoshenko para vigas elásticas, através da resposta fundamental, ou função de Green de valor inicial, e da análise modal. São feitas aplicações para o caso de plataformas *offshore* e nanotecnologia. A derivação das equações governantes do modelo de Timoshenko, considerando condições de contorno clássicas e não-clássicas, é feita segundo o princípio estendido de Hamilton. Realiza-se uma análise espectral no sistema de equações diferenciais parciais evolutivas de segunda ordem que governam os modelos, utilizando, na determinação das frequências naturais e autofunções, uma base gerada por uma resposta espacial fundamental. Esta resposta satisfaz um sistema não clássico de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que inclui um operador diferencial de primeira ordem e um coeficiente de rigidez que depende não-linearmente da frequência natural. A solução analítica do problema é obtida utilizando-se uma fórmula que envolve a resolução de equações características de três tipos: algébrica, diferencial e em diferenças. O estudo de respostas dinâmicas e, em particular, respostas forçadas no domínio da frequência, é considerado para sistemas evolutivos de segunda ordem, com auxílio da formulação do problema adjunto. A função matricial de transferência é calculada de maneira espectral e não-espectral. A caracterização de autovalores duplos acima de valores críticos da frequência para vigas livre-livre é reformulada matricialmente, em termos da base dinâmica. Respostas devido a excitações harmônicas e variadas condições iniciais são simuladas para vários tipos de vigas. Para o comportamento de estruturas flexíveis *offshore* modeladas segundo as teorias de Euler-Bernoulli e de Rayleigh e a lei de Morison, é proposta uma extensão à teoria de Timoshenko. Os modos de vibração do modelo de Vlasov para nanotubos são determinados através de limite dos modos correspondentes ao modelo de Timoshenko. Simulações são realizadas para nanotubos de carbono.

# ABSTRACT

It is developed a newtonian formulation of the elastic beam model of Timoshenko, through a fundamental response , or initial value Green's function, and from modal analysis. Applications are considered in offshore structures and nanotechnology. The motion equations of the Timoshenko model, under classical or non classical boundary conditions, are obtained according to the extended Hamilton principle. It is done a spectral analysis of the system of second order evolution partial differential equations that governs the model, using a basis generated by a fundamental spatial response for the determination of the frequencies and eigenfunctions. This response satisfies a non classical system of second order ordinary differential equations that includes a first derivative operator and a stiffness coefficient which depends, in a non linear manner, on the natural frequencies. The analytical solution of the problem is obtained by using a formulae which involves the resolution of characteristic equations of three types: algebraic, differential and on differences. The study of dynamical responses and, particularly, of forced responses in the frequency domain, it is considered for second order evolution systems with aid of the adjoint problem formulation. The transfer matrix function is determined by spectral and non spectral means. The characterization of double eigenvalues above critical frequency values for free-free beams is reformulated in matrix form, in terms of the dynamical basis. Responses due to harmonic excitation and various initial conditions are simulated for several types of beams. For the behaviour of flexible offshore structures that are modelled according to Euler-Bernoulli and Rayleigh beam models and subjected to Morison's law, it is proposed a extension for Timoshenko beam theory. The vibration modes of the Vlasov model for nanotubes are obtained as a limit case of the modes corresponding to the Timoshenko model. Simulations are performed for carbon nanotubes.

# 1 INTRODUÇÃO

Os modelos para vibrações transversais de vigas a serem abordados neste trabalho são baseados nas principais teorias de vigas existentes:

- Euler-Bernouli,
- Rayleigh,
- Shear ou Vlasov,
- Timoshenko.

Neste trabalho são utilizadas técnicas espectrais e não-espectrais com o uso da resposta impulso ou função de Green de valor inicial correspondente a formulação no espaço físico. O trabalho dá ênfase ao modelo de Timoshenko, que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao movimento vibratório de uma viga elástica. Aplicações são consideradas para plataformas *offshore* e nanotubos de carbono.

A viga é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros, satélites flexíveis, asas de aviões, braços robóticos, trilhos de trens e subsistemas de estruturas mais complexas. O estudo das respostas estáticas e dinâmicas de componentes estruturais, tais como as citadas anteriormente, sob várias condições de carga é muito útil para a modelagem e análise do comportamento de estruturas mais reais e complexas sujeitas a carregamentos similares.

Um relato histórico bastante detalhado e interessante sobre o problema de flexão de vigas é dado por Timoshenko [80]. Partindo dos trabalhos de Galileo, ele descreve os refinamentos sofridos pelas teorias de vigas por Bernoulli, Euler, Coulomb, Saint-Venant, Poisson, Kirchhoff, Rayleigh, e pelo próprio Timoshenko,

entre outros. Na atualidade, as teorias de vigas mais utilizadas ainda usam os mesmos princípios básicos desenvolvidos décadas, ou em certos casos, séculos atrás [40].

Foi reconhecido pelos primeiros pesquisadores que o efeito da flexão é o efeito mais importante em uma viga vibrando transversalmente. O modelo de Euler-Bernoulli inclui a energia potencial devido a flexão e a energia cinética devido ao deslocamento lateral. Esta teoria data do século XVIII. Jacob Bernoulli (1654-1705) descobriu primeiramente que a curvatura de uma viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento flexural naquele ponto. Daniel-Bernoulli (1700-1782), o sobrinho de Jacob, foi o primeiro a formular a equação diferencial de movimento da vibração de uma viga. Posteriormente, a teoria de Jacob Bernoulli foi aceita por Leonhard Euler (1707-1783) em suas investigações da forma das vigas elásticas sob várias condições de carregamento. Muitos avanços sobre curvas elásticas foram obtidos por Euler, conforme discutido em Timoshenko [80]. A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada, pois é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Porém, esta teoria tende a superestimar levemente as frequências naturais. Este problema é exacerbado para as frequências naturais dos maiores modos. Além disso, a predição das frequências também é melhor para vigas finas ou delgadas do que para as vigas não delgadas.

A teoria de Rayleigh representa um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito de rotação da seção transversal [40]. Como consequência, parcialmente corrige os efeitos da superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, as frequências naturais são ainda superestimadas.

O modelo de Shear ou Vlasov adiciona distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli e, dessa forma, a estimativa das frequências naturais melhora consideravelmente.

Timoshenko [78, 79] propôs uma teoria de vigas que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko foi (e ainda é) a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não-delgadas e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da rotação não podem ser desprezados. Seguindo Timoshenko, vários autores têm obtido as equações para frequências e modos para várias configurações de condições de contorno.

A seguir, é feita uma breve revisão bibliográfica referente ao tema principal deste trabalho, ou seja, análise dinâmica de estruturas segundo teorias clássicas de vigas sob o enfoque da solução fundamental ou função de Green de valor inicial.

## 1.1 Revisão bibliográfica

O movimento de estruturas com parâmetros distribuídos é descrito por variáveis dependendo tanto no tempo quanto no espaço. Dessa forma, o movimento é governado por equações diferenciais parciais (EDPs) e por condições de contorno a serem satisfeitas. Muitos pesquisadores têm dedicado seus trabalhos à modelagem e análise desse tipo de sistemas.

Ginsberg [37] e Meirovitch [59] discutem questões relativas a modelagem e análise de sistemas contínuos.

Traill-Nash e Collar [67] deram um tratamento teórico claro para condições clássicas, assim como obtiveram resultados experimentais para o caso da viga uniforme. Na primeira parte do artigo, eles obtiveram as expressões para as equações da frequência e dos modos de vibração para seis condições de contorno clássicas: fixa-livre, livre-livre, apoiada-livre, bi-apoiada, fixa-fixa e fixa-apoiada. Na segunda parte, apresentaram os resultados experimentais, juntamente com os resultados numéricos, obtidos usando os modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timo-

shenko. Eles consideraram vigas não delgadas nas quais os efeitos do cisalhamento e da rotação foram importantes e relataram a diferença entre a primeira e segunda frequências naturais obtidas para cada um dos modelos teóricos, bem como valores experimentais.

As equações para frequência são difíceis de resolver, exceto para o caso de uma viga simplesmente apoiada, ou seja, apoiada em ambos extremos. Mesmo quando as raízes de tal equação são obtidas, é um desafio apresentá-las em uma forma padronizada. Por exemplo, Dolph [30], Huang [44] e Traill-Nash e Collar [67], entre outros, apresentaram-nas em diferentes formas.

Huang [44], Kruszewski [50] e Traill-Nash e Collar [67] obtiveram apenas expressões para as frequências naturais e modos de vibração. Eles não apresentaram a resposta completa do comportamento da viga devido a condições iniciais e forças externas. Para este propósito, é necessário conhecimento a respeito das condições de ortogonalidade entre autofunções. As condições de ortogonalidade para a viga de Timoshenko foram independentemente estudadas por Dolph e Herrmann [30].

Uma formulação matricial newtoniana em termos da resposta fundamental de valor inicial é dada em [8], [29] e [43].

A teoria de Euler-Bernoulli com e sem força axial, com dispositivos intermediários arbitrariamente localizados e com propriedades descontínuas, é tratada amplamente na literatura segundo o método espectral clássico. Uma nova abordagem, com a introdução da noção de base dinâmica para obtenção da resposta livre foi introduzida em Claeysen e Tsukazan [20, 21, 22, 23]. Uma formulação matricial é apresentada em [17] e [18].

A formulação de Claeysen tem sido amplamente utilizada para análise de uma gama de diferentes aplicações, como por exemplo, na análise das respostas de placas [11], na obtenção da resposta fundamental para vigas de Euler-Bernoulli com rotor em um extremo [12], e na determinação de autovalores duplos para vigas



de Timoshenko com e sem desacoplamento do sistema de equações governantes e condições de contorno [13].

Ainda em relação à obtenção dos modos de vibração e das frequências naturais de vigas com condições de contorno clássicas e não-clássicas descritas pelo modelo estrutural de Euler-Bernoulli, tem-se os trabalhos de Claeysen et al. [19] e Tsukazan [81].

No campo de análise de respostas forçadas, uma nova e importante contribuição diz respeito à possibilidade de decomposição de tais respostas, por meio do cálculo de uma resposta permanente e uma resposta homogênea induzida pelos valores iniciais da resposta permanente. A decomposição para problemas de vigas com condições clássicas tem sido trabalhada em [34] e [15]. As respostas forçadas de problemas com condições de contorno não-clássicas e envolvendo as teorias de Rayleigh, Vlasov e Timoshenko são analisados no presente trabalho.

Outros dois novos tópicos de interesse da pesquisa de Claeysen et al. incluem o estudo das respostas dinâmicas de plataformas do tipo *offshore* (plataformas flutuantes ou semi-submersíveis utilizadas para prospecção de petróleo), e temas envolvendo nanotecnologia, mais especificamente, envolvendo nanotubos [26].

O comportamento de estruturas flexíveis *offshore* tem sido considerado em diversos trabalhos. Entre estes, destacam-se os trabalhos de Benaroya et al. [40, 41, 5]. Em sua pesquisa, Benaroya tem utilizado a teoria de Euler-Bernoulli e a lei de Morison para a modelagem do sistema e resolução numérica para a obtenção da resposta dinâmica.

Problemas que envolvem características ondulatórias e frequências ressonantes em nanotubos de carbono tem sido abordados segundo o modelo de Vlasov para vigas livre-livre em [6, 52]. Wang & Varadan, em [83, 84], estudaram uma aproximação do problema pelo modelo de Vlasov. Em [55] é feita uma aproximação segundo teorias da mecânica estrutural para a análise da resposta livre para na-

notubos de carbono. Algumas propriedades físicas para este tipo de nanotubos são obtidas em [45, 71, 85]. Esta área ainda é carente de muita pesquisa em todas as áreas do conhecimento, sendo atualmente dominada por pesquisas nas áreas de química e física.

## 1.2 Contribuições desta tese

- **Modelo de Timoshenko:** É comum o uso da teoria de Euler-Bernoulli para descrever respostas de vigas elásticas. Desconsidera-se o acoplamento entre o movimento transversal e o giro numa viga. Neste trabalho, é desenvolvida uma formulação matricial newtoniana em termos da resposta fundamental de valor inicial segundo a teoria de Claeysen.
- **Análise Modal:** Frequências e modos de vibração em termos de uma base gerada por uma resposta fundamental para determinar as amplitudes de respostas harmônicas em vigas de Euler-Bernoulli tem sido considerado por Claeysen et al. [12, 19] e Tsukazan [81]. Neste trabalho é realizado um estudo matricial para o modelo de Timoshenko. A caracterização de autovalores duplos acima de valores críticos da frequência, obtida por Geist & McLaughlin [36] para vigas livre-livre tem sido reformulada matricialmente, em termos da base dinâmica.
- **Respostas Forçadas:** Neste trabalho, o estudo de respostas dinâmicas é considerado para sistemas evolutivos de segunda ordem, incluindo o problema adjunto. A validade da decomposição de respostas forçadas em sistemas concentrados ou distribuídos considerada por Claeysen et al. [22, 23, 15], tem sido ampliada para sistemas matriciais evolutivos distribuídos de segunda ordem, que inclui o modelo de Timoshenko. A função matricial de transferência tem sido calculada seguindo Costa [26, 27] e Mennicken [61].

- **Vibrações *Offshore*:** O comportamento de estruturas flexíveis *offshore* tem sido considerado por Benaroya et al., em [40, 41], utilizando a teoria de Euler-Bernoulli e a lei de Morison. Neste trabalho é proposta uma extensão à teoria de Timoshenko. A análise espectral com o uso da base dinâmica tem sido considerada para vibrações transversais, longitudinais e rotacionais em uma viga com massa atarrachada e mola torsional nos extremos. As respostas devido a excitações harmônicas e condições iniciais têm sido simuladas para vários tipos de vigas.
- **Modelo de Vlasov e Nanotubos de Carbono:** Problemas que possuem características ondulatórias e frequências ressonantes tem sido abordados com modelos da mecânica do contínuo aplicada a nanotubos de carbono. Diante de modelos moleculares que envolvem simulações computacionalmente custosas, é proposto o modelo de Timoshenko e seu estudo espectral para vigas com diversas condições de contorno. Neste trabalho, os modos do modelo de Vlasov tem sido obtidos como caso limite dos modos do modelo de Timoshenko conforme certa propriedade física do modelo tende a zero.

### 1.3 Estrutura do trabalho

Esta tese está estruturada da seguinte forma:

- Capítulo 2: Os quatro principais modelos para análise dinâmica de vigas uniformes (Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko) são apresentados nesse capítulo. As equações de movimento e as expressões para as condições de contorno para cada modelo são derivadas por meio de princípios variacionais. Apresenta-se uma discussão sobre sistema acoplado de segunda ordem de Timoshenko versus equação de Timoshenko de quarta ordem. Por fim, são formulados brevemente alguns

problemas de interesse a serem analisados em capítulos posteriores e/ou trabalhos futuros.

- Capítulo 3: Neste capítulo o modelo de Timoshenko é formulado tanto como um sistema evolutivo de primeira ordem quanto de segunda ordem. Isto permite escrever o sistema na formulação de estado ou na sua formulação original de segunda ordem. Dá-se ênfase ao uso da formulação de equação evolutiva de segunda ordem, sem necessidade do desacoplamento e mantendo as condições de contorno na sua forma original.
- Capítulo 4: Formula-se a resposta dinâmica do modelo amortecido de Timoshenko com o uso da resposta fundamental ou função de Green de valor inicial, através da análise adjunta. Assume-se que os operadores de contorno podem ser genéricos, ou seja, podem envolver derivadas espaciais e temporais. A bilinear de contorno que surge da aplicação da identidade de Green-Lagrange é discutida para diferentes situações de condições de contorno.
- Capítulo 5: As respostas forçadas são definidas através da integral de convolução da solução fundamental com o termo não homogêneo que corresponde a excitação externa. Será considerada a extração de soluções homogêneas a partir de resposta forçada em termos dos valores iniciais de uma solução particular, atuando esta última como uma retroalimentação no sistema. A forma dos modos de vibração em variadas aplicações é determinada de maneira analítica com o uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso espacial. Discute-se a natureza do espectro para diversas classes de sistemas, em particular para valores de frequência menores ou maiores do que o parâmetro denominado "frequência crítica". Discute-se também as condições necessárias e suficientes sobre a base dinâmica gerada pela resposta impulso espacial

para existência de autovalores duplos em vigas de Timoshenko (sistema acoplado) do tipo livre-livre. Simulações são apresentadas para o caso de uma viga apoiada-deslizante para os modelos de Timoshenko, Vlasov, Rayleigh e Euler-Bernoulli para diferentes tipos de forçantes externos.

- Capítulo 6: Formula-se a força transversal distribuída a qual está sujeita uma viga inserida em um ambiente oceânico. Tal forçante leva em conta os efeitos do vento, das ondas de superfície e das correntes oceânicas. Este forçante é denominado equação de Morison e é utilizado para modelar as forças do fluido agindo num plano paralelo ao plano da página. As ondas são assumidas aleatórias e são modeladas segundo a teoria das ondas lineares de Airy e o espectro de Pierson-Moskowitz.
- Capítulo 7: Considera-se aqui o exemplo de uma plataforma flutuante, denominada na literatura como "*tension leg platform*", situada no oceano, em águas profundas. Tal estrutura é modelada como uma viga de Timoshenko compreendendo movimentos transversais (deslocamento e rotação) e axiais, com uma mola torcional linear elástica em sua base e uma massa concentrada em seu extremo livre. O extremo livre sofre também ação de uma carga pontual axial. O modelo não linear é derivado a partir do princípio de Hamilton e o sistema de equações resultante é não-linear e acoplado. Um modelo linear é derivado como um caso especial do modelo não-linear acoplado. Respostas são obtidas simbólica e numericamente para diferentes situações. Comparações são feitas entre as respostas obtidas ao empregar cada uma das diferentes teorias de vigas.
- Capítulo 8: Realiza-se análise modal para um nanotubo de carbono modelado via teorias de vigas, com frequências de vibração na escala de terahertz. Primeiramente, discute-se as propriedades materiais usadas

em modelos de vigas para a análise de nanotubos de carbono de parede simples e dupla. A seguir, são apresentadas simulações comparando os resultados para um nanotubo de parede simples modelado segundo as teorias de Timoshenko e Vlasov.

- Capítulo 9: Conclusões e considerações finais.
- Capítulo 10: Referências Bibliográficas.

## 2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM VIGAS

A demanda por sistemas com alta velocidade, baixo custo e baixo consumo de energia tem motivado a introdução de partes flexíveis em muitos sistemas mecânicos como, por exemplo, estruturas aéreas, manipuladores flexíveis, rotores flexíveis, etc. Isto leva ao estudo de sistemas mecânicos compostos tanto por partes rígidas quanto por partes flexíveis que são usualmente descritas por uma combinação de equações diferenciais de segunda ordem ordinárias e parciais. Muitos sistemas mecânicos são modelados como vigas. Assim, uma compreensão completa do comportamento ou resposta de estruturas desse tipo é fundamental tanto para o projeto quanto para prevenção e análise de falhas estruturais [41].

Sendo assim, o objetivo deste capítulo consiste em realizar uma discussão dos quatro principais modelos para análise dinâmica de vigas uniformes. As teorias em questão são as de Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ou Vlasov e Timoshenko. Primeiramente, as equações de movimento para cada modelo, e as expressões para as condições de contorno são derivadas por meio do princípio variacional de Hamilton e, por fim, são formulados alguns problemas de interesse a serem analisados em capítulos posteriores e/ou trabalhos futuros.

As hipóteses básicas que são feitas para todos os modelos anteriormente citados são as seguintes [40, 41]:

1. A dimensão na direção axial é consideravelmente maior que nas outras duas.
2. O material é linear e elástico. O efeito de Poisson é desprezado.
3. A área da seção transversal é simétrica, tal que os eixos neutro e central coincidam.

4. Planos perpendiculares ao eixo neutro permanecem perpendiculares após a deformação.
5. O ângulo de rotação é pequeno tal que as hipóteses para pequenos ângulos podem ser assumidas.

## 2.1 Modelo de Euler-Bernoulli

Derivações detalhadas do modelo de Euler-Bernoulli podem ser encontradas nos livros-texto de Benaroya [41], Inman [47], Meirovitch [59, 60], entre outros. Aqui, a equação de movimento é obtida usando o princípio estendido de Hamilton.

A energia potencial de uma viga uniforme devido à flexão é dada por

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (2.1)$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia da seção transversal sobre o eixo neutro,  $v = v(t, x)$  a deflexão transversal em relação à posição axial  $x$  e ao tempo  $t$ , e  $L$  o comprimento da viga.

A energia cinética é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  representa a densidade da viga e  $A$  a área da seção transversal.

O Lagrangeano, definido por  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$ , é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx. \quad (2.3)$$



O trabalho devido a forças transversais não-conservativas por unidade de comprimento  $f(t, x)$  na direção do deslocamento transversal  $v(t, x)$  é dado por

$$\mathcal{W} = \int_0^L f(t, x)v(t, x)dx. \quad (2.4)$$

O princípio de Hamilton estendido [41, 59, 60] estabelece que a integral

$$J = \int_{t_a}^{t_b} (\mathcal{K} - \mathcal{V} + \mathcal{W}) d\tau, \quad (2.5)$$

assume um valor estacionário para a configuração real  $\mathcal{C}$  do sistema descrita pela função  $v = v(t, x)$ , isto é, a derivada de Gateaux deve anular-se

$$\delta J(v, \zeta) = \frac{\partial J(v)}{\partial \zeta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(v + \epsilon \zeta) - J(v)}{\epsilon} = 0, \quad (2.6)$$

para perturbações  $\zeta$  tais que  $\zeta(t_a, x) = \zeta(t_b, x) = 0$ .

Na literatura é comum encontrar o símbolo  $\delta$  para indicar variações infinitesimais de variáveis envolvidas. Assim  $\delta J$  refere-se à derivada de Gateaux do funcional  $J$  e  $\delta v$  denota a variação  $\zeta$  da variável  $v$ .

Substituindo as expressões (2.1), (2.2) e (2.4) em (2.5) obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(v + \epsilon \zeta) - J(v)}{\epsilon} = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \rho A \epsilon \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right] dx d\tau \right. \\ & - \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[ EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} EI \epsilon \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx d\tau \\ & \left. + \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L f \zeta dx d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ao  $\epsilon \rightarrow 0$ , resulta

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[ \rho A \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + f \zeta \right] dx d\tau = 0. \quad (2.8)$$

Integrando por partes, e lembrando que  $\zeta(t_a, x) = \zeta(t_b, x) = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} & - \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left( \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - f \right) \zeta dx d\tau + \int_{t_a}^{t_b} EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \zeta \Big|_0^L d\tau + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_0^L d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como  $\zeta$  é arbitrário, exceto onde as condições de contorno são dadas, a expressão anterior leva à seguinte equação diferencial parcial de movimento

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x) \quad (2.10)$$

com as seguintes condições de contorno a serem satisfeitas

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \zeta \Big|_0^L = 0, \quad -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_0^L = 0. \quad (2.11)$$

Antes de prosseguir, uma pequena observação sobre o significado físico das condições de contorno obtidas. A variável  $v$  representa o deslocamento, a primeira derivada  $\frac{\partial v}{\partial x}$  representa a inclinação, a segunda derivada  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  representa o momento fletor, e a terceira derivada  $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$  representa o cisalhamento. Note que, de forma geral,  $\zeta = 0$  significa que a *variação* do deslocamento é zero, ou seja, o deslocamento é conhecido, podendo ou não ser nulo. Aqui não se está considerando problemas com excitações e/ou forçantes nos extremos. Assim, neste caso,  $\zeta = 0$  ou  $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$  significará que o deslocamento ou a inclinação é zero.

A expressão (2.11) implica em quatro combinações de condições de contorno possíveis,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad \text{para extremo } \mathbf{fixo};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v = 0, \quad \text{para extremo } \mathbf{apoiado};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad \text{para extremo } \mathbf{deslizante};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad \text{para extremo } \mathbf{livre}.$$

(2.12)

Estas condições estão ilustradas na Figura 2.1, onde  $D$ ,  $S$ ,  $M$ , e  $Q$  representam deslocamento, inclinação ou curvatura, momento fletor e cisalhamento, respectivamente. Para uma viga apoiada, tem-se  $M(t, 0) = 0$ ,  $D(t, 0) = 0$ ; para uma viga fixa, tem-se  $D(t, 0) = 0$ ,  $S(t, 0) = 0$ ; para uma viga livre, tem-se  $M(t, 0) = 0$ ,  $Q(t, 0) = 0$ , e para uma viga deslizante,  $S(t, 0) = 0$ ,  $Q(t, 0) = 0$ .

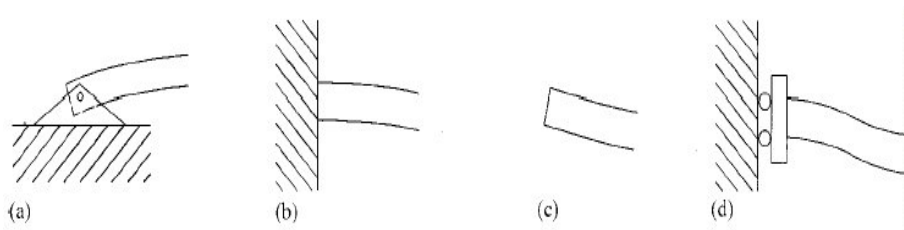


Figura 2.1 Quatro tipos de condições de contorno clássicas: (a) apoiada, (b) fixa, (c) livre, (d) deslizante.

## 2.2 Modelo de Rayleigh

Conforme mencionado na introdução, o modelo de Rayleigh adiciona o efeito de inércia rotatória ao modelo de Euler-Bernoulli. A energia cinética devido a rotação da seção transversal é dada por

$$\mathcal{K}_r = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)^2 dx. \quad (2.13)$$

Combinando a equação (2.13) com as equações (2.1), (2.2) e (2.4) para formar o Lagrangeano, e usando o princípio de Hamilton, obtém-se a equação de movimento, dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} = f(t, x) \quad (2.14)$$

com as seguintes condições de contorno a serem satisfeitas

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_0^L = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \zeta \Big|_0^L = 0, \quad (2.15)$$

onde  $v = v(t, x)$  representa o deslocamento,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  a inclinação ou curvatura,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  o momento fletor e  $EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x}$  o cisalhamento.

Quatro possibilidades de condições de fronteira são as seguintes

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{fixo}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{apoado}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{deslizante}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{livre}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A expressão para o cisalhamento deveria parecer ímpar. Sua validade pode ser verificada através da soma das forças e momentos sobre um elemento incremental da viga, conforme mostrado na Figura 2.2.

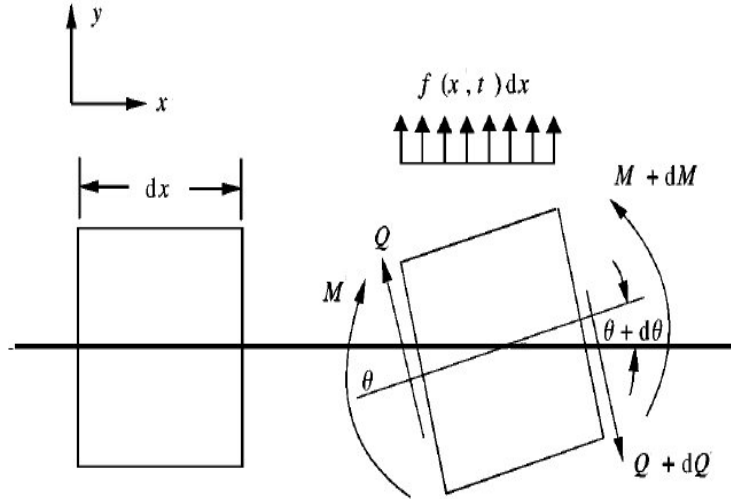


Figura 2.2 Um elemento incremental de viga.

A soma das forças sobre um elemento de viga na direção transversal resulta

$$\sum F_y = \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

$$= -(Q + dQ) \cos(\theta + d\theta) + Q \cos\theta + f(t, x) dx,$$

onde  $\theta$  pode ser aproximado como  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , e  $dQ$  e  $d\theta$  representam  $(\frac{\partial Q}{\partial x}) dx$  e  $(\frac{\partial \theta}{\partial x}) dx$ , respectivamente. Expandindo  $\cos(\theta + d\theta)$  em torno de  $\theta$  usando uma expansão em série de Taylor e utilizando a hipótese de pequenos ângulos, obtém-se

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - f. \quad (2.18)$$

Similarmente, tomando a soma dos momentos em torno do centro do elemento de viga, obtém-se

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x}. \quad (2.19)$$

Tomando a primeira derivada da equação (2.19) com respeito a  $x$ , e subtraindo a equação (2.18) desta, obtém-se

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(t, x). \quad (2.20)$$

Comparando a expressão resultante com a equação de movimento (2.14), o momento fletor é dado por

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.21)$$

Utilizando as equações (2.18) e (2.20), o cisalhamento é dado por

$$Q = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x}, \quad (2.22)$$

o que verifica a interpretação.

## 2.3 Modelo de Vlasov

Este modelo adiciona o efeito da distorção de cisalhamento (mas não inércia rotatória) ao modelo de Euler-Bernoulli. Introduce-se novas variáveis  $\psi$ , o ângulo de rotação da seção transversal devido ao momento fletor, e  $\beta$ , o ângulo de distorção devido ao cisalhamento. O ângulo total de rotação corresponde à soma de  $\psi = \psi(t, x)$  e  $\beta = \beta(t, x)$  e é, aproximadamente, a derivada primeira do deslocamento [41], ou seja,

$$\psi(t, x) + \beta(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Assim, a energia potencial devido a flexão, dada pela equação (2.1), é modificada tal que

$$\mathcal{V}_{fl} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.24)$$

A energia potencial devido ao cisalhamento é dada por

$$\mathcal{V}_{cis} = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)^2 dx, \quad (2.25)$$

onde  $\kappa$  é um fator relacionado à forma da seção transversal da viga. Seguindo o trabalho de Cowper [28], alguns dos valores desse parâmetro<sup>1</sup> estão tabulados na Figura 2.3.

Seção Transversal	$\kappa$
Círculo	$\frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$
Anel circular com $m = r_{\text{interno}}/r_{\text{externo}}$	$\frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2}$
Retângulo	$\frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$
Tubo redondo tipo "parede fina"	$\frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}$
Tubo quadrado tipo "parede fina"	$\frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}$

Figura 2.3 Fator de cisalhamento para diferentes tipos de seção transversal.

Considerando a energia cinética devido ao deslocamento lateral, dada pela equação (2.2), o Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right)^2 - \kappa GA \left( \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right)^2 \right] dx. \quad (2.26)$$

<sup>1</sup>Aqui  $\nu$  representa a taxa de Poisson, [37], [40].

O trabalho realizado por forças e momentos não-conservativos é dado pela expressão

$$\mathcal{W} = \int_0^L f(t, x)v(t, x)dx + \int_0^L g(t, x)\psi(t, x)dx. \quad (2.27)$$

Diferentemente do modelo de Euler-Bernoulli, existem duas variáveis dependentes no modelo de Vlasov: o deslocamento transversal e o ângulo de cisalhamento. As equações de movimento, usando o princípio de Hamilton estendido, são dadas por

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= f(t, x) \\ EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= g(t, x), \end{aligned} \quad (2.28)$$

com as condições de contorno dadas por

$$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Psi \Big|_0^L = 0, \quad \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \zeta \Big|_0^L = 0, \quad (2.29)$$

onde  $v$  é o deslocamento,  $\psi$  o ângulo de rotação devido ao momento fletor,  $EI \frac{\partial \psi}{\partial x}$  o momento fletor, e  $\kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)$  o cisalhamento. Aqui  $\Psi$  e  $\zeta$  representam variações infinitesimais das variáveis  $\psi$  e  $v$ , respectivamente.



Quatro possíveis condições de contorno são

$$\begin{aligned}
 \psi = 0, \quad v = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{fixo}; \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad v = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{apoiado}; \\
 \psi = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{deslizante}; \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = 0, & \quad \text{para extremo } \mathbf{livre}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Note que a curvatura devido ao momento fletor,  $\psi$ , é zero (ao invés da curvatura total  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ) nos extremos fixo e deslizante.

## 2.4 Modelo de Timoshenko

Timoshenko propôs uma teoria de vigas a qual adiciona os efeitos da distorção de cisalhamento e inércia rotatória [78, 79] ao modelo de Euler-Bernoulli. Assim, o Lagrangeano incluirá os efeitos do momento fletor, deslocamento lateral, inércia rotatória e distorção de cisalhamento. Assume-se que não há energia cinética rotacional associada com a distorção de cisalhamento, mas apenas com a rotação devido à flexão. Sendo assim, o termo de energia cinética usado no modelo de Rayleigh (2.13) é modificado a fim de incluir apenas o ângulo de rotação devido a flexão, substituindo-se  $\frac{\partial v}{\partial x}$  por  $\psi$ .

Para uma viga com carga transversal distribuída  $f(t, x)$  e momento  $g(t, x)$ , o trabalho não conservativo é dado por

$$\mathcal{W}_{ncons} = \int_0^L f(t, x)v(t, x)dx + \int_0^L g(t, x)\psi(t, x)dx. \tag{2.31}$$

Substituindo a equação modificada (2.13) e as equações (2.2), (2.24), (2.25) e (2.27) na expressão para o princípio de Hamilton, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)^2 \right] dx d\tau + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L [f(t, x)v(t, x) + g(t, x)\psi(t, x)] dx d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Integrando por partes, e lembrando que  $\zeta(t_a, x) = \zeta(t_b, x) = \Psi(t_a, x) = \Psi(t_b, x) = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left\{ -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right] + f(t, x) \right\} \zeta dx dt + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[ -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) + g(t, x) \right] \Psi dx dt + \\ & \int_{t_a}^{t_b} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \zeta \right] \Big|_0^L dt - \int_{t_a}^{t_b} \left[ \left( EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Psi \right] \Big|_0^L dt = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como  $\zeta$  e  $\Psi$  são arbitrários, exceto onde as condições de contorno são dadas, a equação (2.33) leva às seguintes equações diferenciais parciais acopladas de movimento

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) \right] = f(t, x) \\ & \rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right] - \kappa GA \left( \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = g(t, x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

As condições de contorno generalizadas obtidas da equação (2.33), dadas por

$$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_0^L = 0, \quad \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \zeta \Big|_0^L = 0, \quad (2.35)$$

resultam sendo do mesmo tipo daquelas obtidas para o modelo de Vlasov (condições clássicas) em (2.30).

OBSERVAÇÃO: Alguns exemplos de condições de contorno não clássicas são os seguintes [72]:

- **Extremo apoiado sobre mola linear**

$$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad S_o \kappa GA \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right] = k_o v \quad (2.36)$$

- **Mola linear torcional atachada a um extremo livre**

$$\kappa GA \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right] = 0, \quad -S_o EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\beta_o \psi \quad (2.37)$$

- **Mola linear torcional atachada a uma viga simplesmente apoiada**

$$-S_o EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\beta_o \psi, \quad v = 0 \quad (2.38)$$

onde  $S_o = +1$  no extremo direito e  $S_o = -1$  no extremo esquerdo da viga;  $k_o$  é a constante da mola translacional e  $\beta_o$  representa a constante da mola torcional [30], [39].

### 2.4.1 A equação de Timoshenko de quarta ordem

Na literatura é comum referir-se ao *modelo de Timoshenko* como sendo uma equação evolutiva de quarta ordem no tempo para o deslocamento  $v(t, x)$  **ou**

para o giro  $\psi(t, x)$ . Porém, isto não é muito útil uma vez que o giro aparece nas condições de contorno [37].

A obtenção do modelo de quarta ordem é como segue.

Derivando com respeito a  $x$  as equações (2.34) obtém-se

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \kappa G A \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.39)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \kappa G A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Derivando novamente com respeito a  $x$  as equações (2.39) e (2.40) resulta

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \kappa G A \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.41)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \kappa G A \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \quad (2.42)$$

Para eliminar  $\partial^3 \psi / \partial x^3$  em (2.41) são utilizadas as equações (2.34a) e (2.40). Assim, obtém-se

$$\frac{\rho^2}{E \kappa G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f_1, \quad (2.43)$$

onde

$$f_1 = \frac{\rho}{\kappa G A E} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{EI} f - \frac{1}{\kappa G A} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{EI} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (2.44)$$

De maneira análoga, para eliminar  $\partial^3 v / \partial x^3$  em (2.42) são utilizadas as equações (2.34b) e (2.39). Sendo assim,

$$\frac{\rho^2}{E \kappa G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = f_2, \quad (2.45)$$

onde

$$f_2 = \frac{1}{EI} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho}{\kappa GEI} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{1}{EI} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \quad (2.46)$$

O processo anterior, para a obtenção da equação de Timoshenko de quarta ordem torna-se mais claro e geral, usando a identidade de Cramer em (2.34). Isto é feito a seguir.

Seja  $\det(\mathbf{L})$  o determinante de  $\mathbf{L}$ , e  $\text{adj}(\mathbf{L})$  a matriz transposta da matriz de cofatores de  $\mathbf{L}$ , isto é, a matriz adjugada (ou *adjunta*) do operador  $\mathbf{L}$ . Tem-se que

$$\text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{L}\mathbf{v} = \text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{F}$$

ou seja,

$$\det(\mathbf{L})\mathbf{v} = \text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{F}. \quad (2.47)$$

onde

$$\text{adj}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

e

$$\det(\mathbf{L}) = \kappa GA EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \rho A (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \rho A \left( \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right). \quad (2.49)$$

Assim,

$$\kappa GA EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho A (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \left( \kappa GA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} \right) = F_1 \quad (2.50)$$

$$\kappa GA EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \rho A (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \rho A \left( \kappa GA \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} \right) = F_2 \quad (2.51)$$

onde

$$F_1 = \rho I \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \kappa G A f - EI \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \kappa G A \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad (2.52)$$

$$F_2 = \kappa G A \frac{\partial f}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \kappa G A \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \quad (2.53)$$

As equações anteriores podem ser reescritas como

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f_1$$

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = f_2,$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  foram definidos em (2.44) e (2.46).

Deve ser observado que na equação de Timoshenko para o deslocamento e na equação para o giro aparecem os termos  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente, que envolvem derivação da força externa  $f$  e do momento aplicado  $g$ . Este não é o caso com o modelo acoplado de Timoshenko. Ou seja, **um desacoplamento das equações do modelo forçado envolve uma modificação dos termos não-homogêneos**. Para o modelo não-forçado não é necessário fazer tal modificação.

Tomando  $g(t, x) = 0$ , a equação para o deslocamento pode ser escrita numa forma conveniente para ilustrar os variados efeitos

$$\underbrace{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left( f - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)}_{\text{Teoria de Euler-Bernoulli}} - \underbrace{\rho I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}}_{\text{Inércia rotacional principal}} + \underbrace{\frac{EI}{\kappa G A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( f - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)}_{\text{Deformação de cisalhamento principal}} +$$

$$-\underbrace{\frac{\rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( f - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)}_{\substack{\text{Inércia rotacional e} \\ \text{deformação de cisalhamento} \\ \text{combinados}}} = 0. \quad (2.54)$$

## 2.5 Formulação de Estado

A formulação de estado ou de Hamilton consiste em transformar o sistema original de segunda ordem no tempo em um sistema de equações de primeira ordem. Variados tipos de transformações são encontrados na literatura de teoria de controle [1, 54, 69], entre outros.

Considere o sistema de segunda ordem que descreve o modelo de Timoshenko

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} Q(t, x) + f(t, x) \quad (2.55)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} M(t, x) - Q(t, x) + g(t, x), \quad (2.56)$$

onde o momento  $M(t, x)$  e o cisalhamento  $Q(t, x)$  são dados por

$$M(t, x) = EI(x) \left[ \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right] \quad (2.57)$$

e

$$Q(t, x) = \kappa AG \left[ \psi(t, x) - \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right]. \quad (2.58)$$

Diferenciando (2.57) e (2.58) com respeito a  $t$  e definindo  $\mathcal{Q} = \frac{\partial v}{\partial t} =$  velocidade linear e  $\Omega = \frac{\partial \psi}{\partial t} =$  velocidade angular, obtém-se o novo sistema de equações em relação ao sistema (2.55)-(2.58)

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = EI \frac{\partial \Omega(t, x)}{\partial x} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} = \kappa GA \left( \Omega(t, x) - \frac{\partial \mathcal{Q}(t, x)}{\partial x} \right) \quad (2.60)$$

$$\rho I \frac{\partial \Omega(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} - Q(t, x) + g(t, x) \quad (2.61)$$

$$\rho A \frac{\partial \mathcal{Q}(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} Q(t, x) + f(t, x). \quad (2.62)$$

Para outra derivação de estado, veja-se [7] ou [33]. Nestes trabalhos os autores consideram a evolução no sistema com respeito à variável espacial ao invés da usual variável temporal.

## 2.6 Extensões do Modelo de Timoshenko

Nesta seção serão apresentados modelos que estendem a teoria de Timoshenko para diversas situações ou que utilizam o sistema de equações de Timoshenko, porém com condições de contorno não-clássicas.

### 2.6.1 Viga sobre fundação elástica

A resposta de uma viga sobre uma fundação elástica excitada por uma carga é de grande interesse para a análise e projeto de estradas, ferrovias, pontes, etc.

Considere uma viga infinita sobre uma fundação elástica inicialmente não deformada e em repouso que é excitada por massas em movimento vibrando em



fase e igualmente espaçadas, movendo-se a uma velocidade constante. As equações governantes das vibrações transversais da viga, incluindo deformação de cisalhamento e inércia rotatória sobre a fundação elástica são dadas por [58]

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - P(t, x) + kv = 0, \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

com  $v = v(t, x)$  sendo o deslocamento transversal da viga,  $\theta = \theta(t, x)$  a rotação,  $P(t, x)$  uma força aplicada por unidade de comprimento,  $E$ ,  $I$ ,  $A$ ,  $\rho$  e  $\kappa$  como definidos usualmente na literatura e  $k$  o módulo de reação do pavimento ou fundação elástica, conforme [58].

## 2.6.2 Viga em I

Considere uma viga homogênea, isotrópica, com paredes finas com dois planos de simetria. Assume-se que a viga está carregada no plano de maior rigidez de flexão por momentos de mesma magnitude atuando nos extremos, conforme a Figura 2.4 [70].

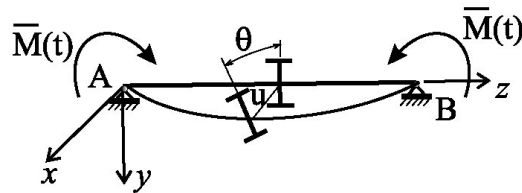


Figura 2.4 Geometria da viga de paredes finas em forma de I sujeita a momentos nos extremos.

As equações diferenciais governantes considerando o acoplamento flexural e torcional da viga podem ser escritas como [9]

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \alpha_u \frac{\partial u}{\partial t} + EI_x \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \bar{F}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{M}(t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0, \\ \rho I_p \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} + \alpha_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \left( GJ - \bar{F}(t) \frac{I_p}{A} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \bar{M}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + EI_s \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} &= 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde  $u$  é o deslocamento flexural na direção  $x$ ,  $\theta$  é o deslocamento torcional,  $I_x$ ,  $I_p$ ,  $I_s$  são os momentos de inércia axial, polar e setorial, respectivamente;  $J$  é a constante torcional de Saint-Venant,  $\alpha_\theta$ ,  $\alpha_v$  são os coeficientes de amortecimento viscoso,  $t$  é o tempo,  $z$  a coordenada axial e  $\rho$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $G$  conforme usualmente definidos na literatura. As condições de contorno correspondem ao caso de uma viga de Timoshenko simplesmente apoiada [70].

### 2.6.3 Viga de Timoshenko tipo parede-fina carregada axialmente

Vigas do tipo parede-fina (*thin-walled beam*) com seção transversal fechada são componentes estruturais básicos em uma variedade de aplicações importantes, tais como asas de avião, hélices de helicópteros, hélices de turbinas, assim como em muitas outras aplicações nas indústrias mecânica, aeronáutica e de construção civil [4], [56], [70].

Considere uma viga elástica do tipo parede-fina, com propriedades anisotrópicas e com seção transversal fechada, conforme ilustrado na Figura 2.5 [57].

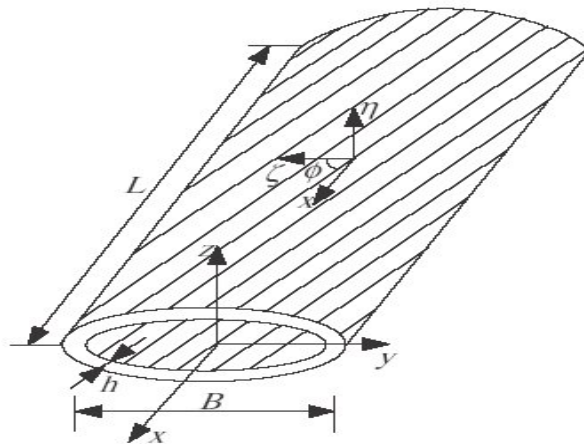


Figura 2.5 Geometria de uma viga elástica do tipo parede-fina.

Assume-se que as dimensões geométricas são tais que  $B \ll L$ ,  $h \ll B$ , onde  $B$  representa a dimensão típica da seção transversal,  $L$  é o comprimento da viga e  $h$  representa a espessura da parede da seção transversal fechada. Para o caso mais geral, uma viga de material composto com paredes finas apresenta acoplamento completo entre os vários modos, i.e., deslocamento, giro, cisalhamento e empenamento. No entanto, uma seleção apropriada da orientação das fibras pode gerar casos de interesse nos quais acoplamentos elásticos desejáveis entre certos modos são obtidos. Nesta extensão, em particular, é de interesse o acoplamento entre os modos do deslocamento e os torcionais, os quais prevalecem nas asas de avião ou hélices de helicópteros. Tal acoplamento é referido na literatura especializada [73] como Configuração de Rigidez Circunferencialmente Assimétrica ou CAS (*Circumferentially Asymmetric Stiffness Configuration*).

Ambos sistemas de coordenadas, global e local, denotados por  $xyz$  e  $x\eta\zeta$ , respectivamente, são mostrados na Figure 2.5. No sistema de coordenadas globais,  $y$  e  $z$  denotam as coordenadas da seção transversal da viga enquanto assume-se que o eixo  $x$  coincide com o eixo geométrico (central) da seção transversal ao longo do comprimento da viga. Em qualquer ponto da seção transversal, os deslocamentos

podem ser expressos com respeito a qualquer dos sistemas de coordenadas, conforme [73].

As equações de movimento acopladas para as vibrações forçadas da viga fina de material composto carregada axialmente, excluindo os efeitos da deformação de cisalhamento, inércia rotatória, e rigidez de empenamento podem ser escritas na forma [73]

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} + K \frac{\partial^3 \psi(t, x)}{\partial x^3} + P \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} &= f(t, x), \\ I_s \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} - K \frac{\partial^3 v(t, x)}{\partial x^3} + \left( P \left( \frac{I_s}{\mu} \right) - GJ \right) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} &= g(t, x), \end{aligned} \quad (2.65)$$

com as correspondentes condições de contorno

$$\begin{aligned} \left[ EI \frac{\partial^3 v(t, x)}{\partial x^3} + P \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + K \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \right] V &= 0 \\ \left[ \left( P \left( \frac{I_s}{\mu} \right) - GJ \right) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} - K \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right] \Psi &= 0 \\ \left[ -EI \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} - K \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right] \Psi' &= 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

#### 2.6.4 Viga fixa-livre com massa afixada no extremo livre

Considere um sistema consistindo de uma viga de Timoshenko fixa-livre com seção transversal uniforme, molas translacionais e rotacionais, e uma massa pontual, de dimensões consideráveis, no extremo livre da viga [39].

O sistema mencionado está ilustrado na Figura 2.6, no estado não deformado.

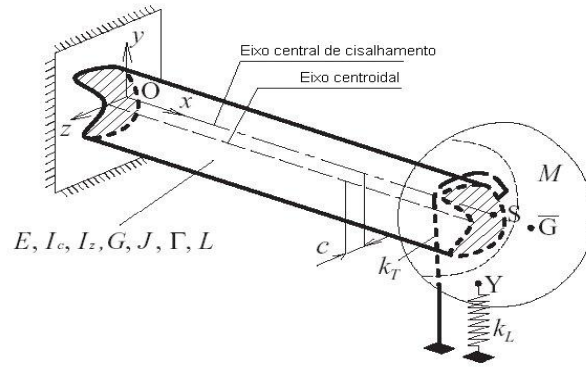


Figura 2.6 Esquema do sistema de coordenadas e notação utilizada.

O elemento básico do sistema é a viga de comprimento  $L$  que tem seção uniforme, monossimétrica e aberta. No estado não deformado, o eixo  $x$  representa o eixo central de cisalhamento. Uma massa rígida  $M$  de dimensões finitas está afixada no extremo direito da viga, e está ligada ao solo via uma mola linear de rigidez  $k_L$  no ponto  $Y$ . Além disso, o extremo direito da viga é apoiado por uma mola torcional de rigidez  $k_T$ . As equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}
 m \left( \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} \right) + EI_z \frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} &= 0 \\
 mc \left( \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} \right) + I_c \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} + E\Gamma \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial x^4} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

juntamente as seguintes condições de contorno em  $x = 0$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \tag{2.68}$$

e em  $x = L$

$$\begin{aligned}
EI_z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - M \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + s \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) - k_L \left( \bar{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{z} \psi + w \right) &= 0, \\
E\Gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - GJ \frac{\partial \psi}{\partial x} - \hat{I}_{\bar{x}\bar{x}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - Ms \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \hat{I}_{\bar{x}\bar{z}} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - k_L \left( \bar{z} \bar{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{z}^2 \psi + \bar{z} w \right) - k_B \psi &= 0, \\
EI_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \hat{I}_{\bar{z}\bar{z}} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + pM \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \hat{I}_{\bar{x}\bar{z}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + k_L \left( \bar{x}^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{x} \bar{z} \psi + \bar{x} w \right) &= 0, \\
E\Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. &
\end{aligned} \tag{2.69}$$

## 2.6.5 Viga de Timoshenko carregada axialmente com seção transversal tipo aerofólio

Neste caso são consideradas as equações de movimento acopladas

$$\begin{aligned}
\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) &= 0 \\
I_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu y_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - GJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + P \left( \frac{I_s}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - y_c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= 0 \\
\mu \left( \frac{\partial v}{\partial t} - y_c \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + P \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - y_c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

que, juntamente a condições de contorno apropriadas, definem completamente as vibrações livres de uma viga de Timoshenko uniforme carregada axialmente, conforme [4].

### 2.6.6 Viga de Timoshenko em U monossimétrica e carregada axialmente

Considere uma viga com seção transversal monossimétrica e comprimento  $L$ . Assuma que o centro de cisalhamento e o centróide da viga são denotados por  $s$  e  $c$ , respectivamente, e estão separados por uma distância  $y_c$ . Os termos associados ao empenamento secundário e inércia de empenamento são descartados [56].

As equações governantes amortecidas para as vibrações forçadas da viga de Timoshenko em U considerando o acoplamento flexão-torção e incluindo rigidez de empenamento são dadas por [56]

$$\begin{aligned} \mu \ddot{v} + c_1 (\dot{v} - y_c \dot{\psi}) - \mu y_c \ddot{\psi} - \kappa GA (v'' - \theta') + P (v'' - y_c \psi'') &= f(t, x) \\ I_s \ddot{\psi} - \mu y_c \ddot{v} + c_2 \dot{\psi} - c_1 y_c \dot{v} - GJ \psi'' + P \left( \frac{I_s}{\mu} \psi'' - y_c v'' \right) + EI \psi'''' &= m(t, x) \\ \rho I \ddot{\theta} + c_3 \dot{\theta} - EI \theta'' - \kappa GA (v' - \theta) &= 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

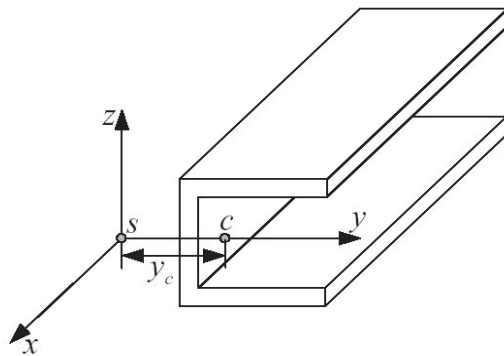


Figura 2.7 Viga de Timoshenko em U carregada axialmente.

com  $v(t, x)$ ,  $\psi(t, x)$  e  $\theta(t, x)$  representando a translação flexural na direção  $z$ , a rotação torcional sobre o eixo  $x$  do centro de cisalhamento e a rotação do eixo elástico devido à flexão, respectivamente.  $P$  é uma força axial constante através do centróide da seção transversal da viga;  $f(t, x)$  é uma força por unidade de comprimento, paralela ao eixo  $sz$  e aplicada no centro de cisalhamento juntamente a um torque  $m(t, x)$  por unidade de comprimento aplicado sobre o eixo  $sx$ ;  $EI$ ,  $\kappa GA$ ,  $GJ$ ,  $E\Gamma$  são a rigidez flexural, rigidez de cisalhamento, rigidez torcional e rigidez de empenamento, respectivamente [56].

Para o caso de uma viga do tipo **Euler-Bernoulli** e assumindo  $f(t, x) = m(t, x) = 0$ , tem-se que o sistema (2.71) se reduz a um sistema da forma [57]

$$I_s \ddot{\psi} - \mu y_c \ddot{v} + P \left( \frac{I_s}{\mu} \psi'' - y_c v'' \right) - GJ \psi'' + E\Gamma \psi'''' = 0 \quad (2.72)$$

$$\mu \ddot{v} - \mu y_c \ddot{\psi} + P (v'' - y_c \psi'') + EI v'''' = 0.$$

## 2.6.7 Viga Segmentada

Considere uma viga bi-segmentada cujas equações de movimento são expressas [31] na forma

$$\rho_i I_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - E_i I_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} - \kappa G_i A_i \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \psi_i \right) = 0 \quad (2.73)$$

$$\rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \kappa G_i A_i \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) = 0,$$

onde  $x \in [0, R_i L]$ ,  $i = 1, 2$ .



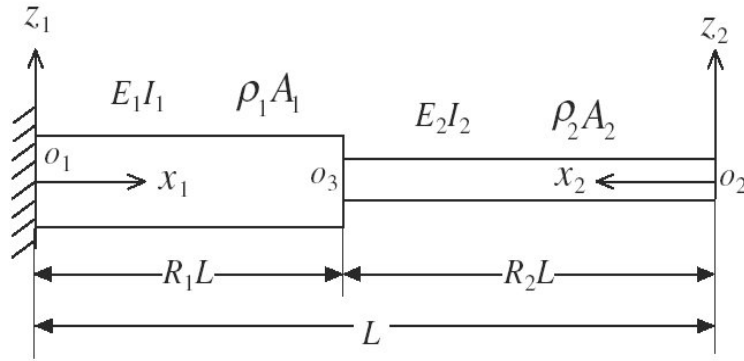


Figura 2.8 Geometria da Viga bi-segmentada.

As condições de contorno e continuidade na forma adimensional são dadas por

- No ponto  $o_1$ ,  $\xi_1 = 0$

$$W_1(0) = 0, \quad L\Psi_1(0) = 0 \tag{2.74}$$

- No ponto  $o_2$ ,  $\xi_2 = 0$

$$L\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}(0) = 0, \quad L\frac{\partial W_2}{\partial x_2} - \Psi_2(0) = 0. \tag{2.75}$$

A concentração de tensão [31] na junção das duas partes da viga é desconsiderada. Assim, no ponto  $o_3$ ,  $\xi_1 = 1$  e  $\xi_2 = 1$ , para que sejam satisfeitas as condições de continuidade da deflexão, da curvatura, do momento e da força de

cisalhamento, tem-se

- $W_1(R_1) = W_2(R_2),$
- $L\Psi_1(R_1) = -L\Psi_2(R_2),$
- $E_1 I_1 L \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}(R_1) = E_2 I_2 L \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}(R_2),$
- $G_1 A_1 \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_1}(R_1) - L\Psi_1(R_1) \right) = -G_2 A_2 \left( \frac{\partial W_2}{\partial x_2}(R_2) - L\Psi_2(R_2) \right).$

(2.76)

### 2.6.8 Viga não homogênea sobre suspensão viscoelástica

Considere uma viga que possui uma região suspensa sobre uma camada viscoelástica (Figura 2.9). Esta região pode também ter propriedades materiais variáveis longitudinalmente sendo, portanto, denominada como uma região de não-homogeneidade [7].

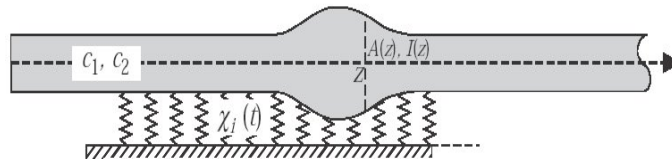


Figura 2.9 Viga não homogênea sobre suspensão viscoelástica.

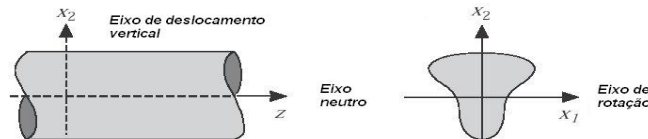


Figura 2.10 Definições dos eixos.

A suspensão é modelada por molas continuamente distribuídas, sujeitas a amortecimento viscoelástico [7]. O comprimento da região de não-homogeneidade é representado por  $d$ . A viga é considerada homogênea. O movimento flexural da viga, incluindo ambos inércia rotatória e cisalhamento, é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) (f_1 \gamma) + k_1 u + K_1 * u &= 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( f_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - f_1 \gamma + k_2 \psi + K_2 * \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde  $u(t, z)$ ,  $\psi(t, z)$  e  $\gamma(t, z)$  representam a deflexão transversal, a rotação e o ângulo de cisalhamento da seção transversal, respectivamente. A contribuição principal da parte elástica das forças externas é modelada pelas constantes das molas  $k_1$  e  $k_2$ . A parte viscosa é modelada pela convolução com os núcleos viscoelásticos (ou funções de memória)  $K_1(t)$  e  $K_2(t)$  com  $u(t, z)$  e  $\psi(t, z)$ , operação que é representada por  $*$ . As funções de memória também contribuem para a parte elástica da resposta.  $I$  e  $A$  são o momento de inércia e a área da seção transversal, respectivamente, enquanto  $\rho$  é a densidade da viga. Além disso,  $f_1$  define a rigidez de cisalhamento e  $f_2$  a rigidez flexural, isto é,

$$f_1 = \kappa GA, \quad f_2 = EI; \quad (2.78)$$

$E$  é o módulo de elasticidade e  $G$  o módulo de cisalhamento. Os parâmetros de rigidez variam espacialmente em uma seção não-homogênea da viga. Finalmente,  $\kappa$  é o coeficiente de cisalhamento, o qual depende das dimensões da seção transversal e da taxa de Poisson correspondente a

$$\nu = \frac{E - 2G}{2G}, \quad 0 \leq \nu < \frac{1}{2}. \quad (2.79)$$

Seguindo [7], assume-se que o material da viga é incompressível com uma taxa de Poisson não negativa.

### 2.6.9 Viga com restrições intermediárias

O problema das vibrações livres e forçadas de vigas com restrições intermediárias de acordo com a teoria de Timoshenko tem sido considerado por vários autores através da aplicação de técnicas numéricas para o sistema desacoplado. O modelo de Timoshenko para o deslocamento e rotação para uma viga com restrições intermediárias e condições de contorno não clássicas é derivado através do princípio variacional de Hamilton, na forma não conservativa. Isto permite que sejam obtidas as condições de compatibilidade nas posições intermediárias assim como as condições de contorno naturais do problema.

Considere um sistema dinâmico consistindo de uma viga de Timoshenko uniforme, molas rotacional e translacional localizadas em  $x = 0$ , mola translacional posicionada em  $x = x_1$ ,  $0 < x_1 < L$  e com o extremo  $x = L$  apoiado conforme a Figura (2.11).

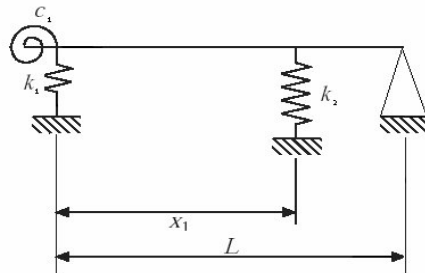


Figura 2.11 Modelo do sistema dinâmico combinado.

Segue que a deflexão  $v$  e o ângulo de rotação  $\psi$  devem satisfazer as seguintes equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned} \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa GA(x) \left( \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - \psi(t,x) \right) \right] &= f(t,x), \\ \rho(x)I(x)\frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x)\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x} \right] - \kappa GA(x) \left( \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - \psi(t,x) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

para todo  $t$ , e  $x \in (0, x_1) \cup (x_1, L)$ . Supondo que a viga é uniforme, ou seja,  $A(x) = A$ , segue que a deflexão e a rotação devem satisfazer, também, as seguintes condições de contorno e de compatibilidade

$$-k_1 v(t, 0) + \kappa GA(v' - \psi)(t, 0) = 0 \quad (2.81)$$

$$EI\psi'(t, 0) - c_R \psi(t, 0) = 0 \quad (2.82)$$

$$-k_2 v(t, x_1) + \kappa GA [-(v' - \psi)(t, x_1^-) + (v' - \psi)(t, x_1^+)] = 0 \quad (2.83)$$

$$EI [-\psi'(t, x_1^-) + \psi'(t, x_1^+)] = 0 \quad (2.84)$$

$$v'(t, L) = 0 \quad (2.85)$$

$$\psi'(t, L) = 0. \quad (2.86)$$

Como a viga é uniforme, a área da seção transversal  $A(x)$  é constante, podendo ser escrita simplesmente como  $A$ .

Juntamente as condições anteriores, são impostas as condições de continuidade para o deslocamento e a rotação

$$v(t, x_1^-) = v(t, x_1^+) \quad (2.87)$$

$$\psi(t, x_1^-) = \psi(t, x_1^+). \quad (2.88)$$

Observa-se que, onde existe uma força concentrada aplicada transversalmente à viga, o momento fletor deve ser contínuo enquanto um salto na força de

cisalhamento interna balança a força aplicada, neste caso, uma mola translacional. Esta é a interpretação de (2.83) e (2.84), respectivamente. Note também que o cisalhamento envolve apenas derivadas espaciais de primeira ordem. No caso em que  $v$  é isolado em (2.80), as condições de contorno para a equação diferencial de quarta ordem a serem satisfeitas para o deslocamento  $v$  poderiam envolver derivadas de até terceira ordem.

Por outro lado, na ausência do apoio intermediário, tem-se continuidade em todos os pontos da viga, e as condições de contorno são

$$-k_1 v(t, 0) + \kappa GA(v' - \psi)(t, 0) = 0 \quad (2.89)$$

$$EI\psi'(t, 0) - c_R\psi(t, 0) = 0 \quad (2.90)$$

$$v'(t, L) = 0 \quad (2.91)$$

$$\psi'(t, L) = 0. \quad (2.92)$$

### 2.6.10 Viga de Ginsberg

As equações de movimento para uma viga de Timoshenko fixa no extremo esquerdo (significando que neste extremo não há deslocamento e nem rotação da seção transversal) e com um cubo de massa  $m$  e lados  $b$  afixado do no outro extremo o qual está preso a uma mola translacional de rigidez  $k$ , conforme ilustrado na Figura 2.12 podem ser obtidas similarmente ao problema anterior [37].

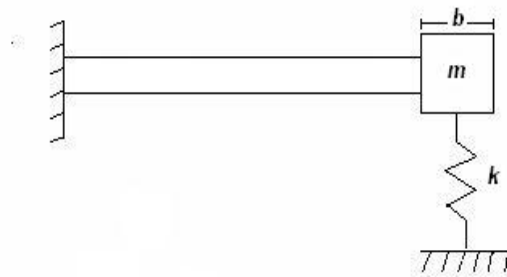


Figura 2.12 Viga de Ginsberg.

As equações governantes correspondem ao sistema de equações de Timoshenko (2.34) e estão sujeitas a condições de contorno nas quais são consideradas ambas inércia translacional e rotacional do cubo, ou seja,

- em  $x = 0$

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= 0, \\ \psi(t, 0) &= 0; \end{aligned} \tag{2.93}$$

- em  $x = L$ ;

$$\begin{aligned} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) + k \left( v + \frac{b}{2} \psi \right) + m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \right] (t, L) &= 0, \\ \left[ EI \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa GA \frac{b}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) + \frac{1}{6} mb^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] (t, L) &= 0. \end{aligned} \tag{2.94}$$

### 3 FORMULAÇÃO MATRICIAL

Neste capítulo o modelo de Timoshenko será formulado tanto como um sistema evolutivo de primeira ordem quanto de segunda ordem. Isto permitirá escrever o sistema na formulação de estado ou na sua formulação original de segunda ordem. A formulação de estado é muito utilizada na literatura e faz uso da teoria de semigrupos de operadores que, na prática, corresponde ao uso da transformada de Laplace ou, no domínio da frequência, com o uso da transformada de Fourier. No entanto, a formulação original preserva as características do sistema, ao associar diretamente os operadores de massa e de rigidez espacial. Esta formulação tem sido pouco desenvolvida pela carência de ferramental matemático, particularmente, na presença de problemas com atrito ou com coeficientes que não satisfazem condições para o uso da teoria de modos normais. Na literatura, a formulação de segunda ordem tem sido utilizada na forma desacoplada com equações de quarta ordem ([36], [44], entre outros) ou com modelos de segunda ordem na forma desacoplada [12], [86], porém com acoplamento através das condições de contorno. Neste trabalho, é enfatizado o uso da formulação de equação evolutiva de segunda ordem, sem necessidade do desacoplamento e mantendo as condições de contorno na sua forma original.

#### 3.1 Formulação de estado

Definindo o vetor de estado como sendo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{u}}, \end{pmatrix} \quad (3.1)$$



onde

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} M \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & EI \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \psi \end{pmatrix} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{V}} \quad (3.2)$$

e

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Do modelo de Timoshenko com força externa  $f(t, x)$  e momento aplicado  $g(t, x)$  por unidade de comprimento (2.34), segue que

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} = \mathbf{R} \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}. \quad (3.4)$$

Assim,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{V}}}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right) + f \\ \frac{1}{\rho I} \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + g \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{w}} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Decorre

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -EI \\ 0 & 0 & \kappa GA & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa GA \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t, x) \\ g(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} M(t, x) \\ Q(t, x) \\ \mathcal{Q}(t, x) \\ \Omega(t, x) \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{Q}(t, x)$ ,  $\Omega(t, x)$  correspondem a derivada do deslocamento e giro, respectivamente. Multiplicando a equação (3.7) por  $\mathbf{A}^{-1}$ , obtém-se

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{E} \mathbf{U} = \mathbf{F}} \quad (3.8)$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -EI \\ 0 & 0 & \kappa GA & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho A} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\rho I} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa GA \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho I} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

e

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f(t, x)}{\rho A} \\ \frac{g(t, x)}{\rho I} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo  $\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{v}$ , substituindo em (3.8), resulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \Upsilon \mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbb{F}, \quad (3.10)$$

onde

$$\Lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \quad \text{e} \quad \Upsilon = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{P}.$$

Como a matriz  $\mathbf{C}$  é diagonalizável,  $\Lambda$  resulta ser uma matriz diagonal quando a transformação  $\mathbf{P}$  corresponde a matriz modal de  $\mathbf{C}$ , isto é, formada pelos autovetores da matriz  $\mathbf{C}$ . Mais do que isso, pode-se determinar  $\mathbf{P}$  precisamente,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{I\sqrt{E\rho}} & -\frac{1}{I\sqrt{E\rho}} \\ \frac{1}{A\sqrt{\kappa G\rho}} & -\frac{1}{A\sqrt{\kappa G\rho}} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como consequência, segue

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{E}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\kappa G A}{2} & \frac{-\kappa G A}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-\kappa G A}{2} & \frac{-\kappa G A}{2} \\ \frac{1}{2\rho I} & \frac{1}{2\rho I} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\rho I} & \frac{1}{2\rho I} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

e

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \frac{f}{2\rho A} \\ \frac{f}{2\rho A} \\ \frac{g}{2\rho I} \\ \frac{g}{2\rho I} \end{bmatrix}.$$

Em termos de componentes, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\kappa G A v_3 - \frac{1}{2}\kappa G A v_4 &= \frac{f}{2\rho A} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{1}{2}\kappa G A v_3 - \frac{1}{2}\kappa G A v_4 &= \frac{f}{2\rho A} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{1}{2\rho I}v_1 + \frac{1}{2\rho I}v_2 &= \frac{g}{2\rho I} \\ \frac{\partial v_4}{\partial t} + \lambda_4 \frac{\partial v_4}{\partial x} + \frac{1}{2\rho I}v_1 + \frac{1}{2\rho I}v_2 &= \frac{g}{2\rho I}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Além disso, pode-se identificar as curvas características <sup>1</sup> reais

$$\begin{aligned} I^+ : \quad \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 \Rightarrow x = \lambda_1 t + k_1 \\ I^- : \quad \frac{dx}{dt} &= \lambda_2 \Rightarrow x = \lambda_2 t + k_2 \\ II^+ : \quad \frac{dx}{dt} &= \lambda_3 \Rightarrow x = \lambda_3 t + k_3 \\ II^- : \quad \frac{dx}{dt} &= \lambda_4 \Rightarrow x = \lambda_4 t + k_4 \end{aligned} \tag{3.13}$$

---

<sup>1</sup>Detalhes sobre curvas características podem ser encontrados em [38], entre outros.

para

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.14)$$

As curvas características passando por um ponto P estão ilustradas na Figura 3.1.

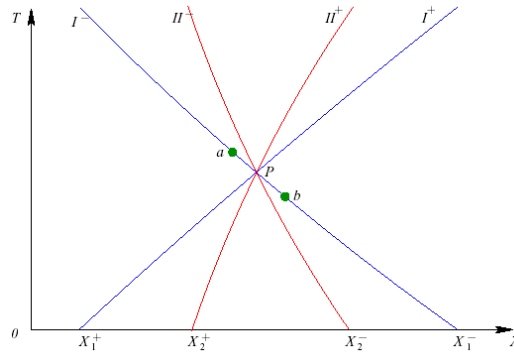


Figura 3.1 Características da equação de Timoshenko passando por um ponto P.

Pelas propriedades das características, os valores do momento  $M$ , cisalhamento  $Q$ , velocidade angular  $\Omega$  e velocidade linear  $\mathcal{Q}$  no ponto P dependem apenas dos seus valores iniciais sobre o eixo  $x$ , entre os valores  $X_1^+$  e  $X_1^-$  para as características  $I^+$  e  $I^-$ , e entre  $X_2^+$  e  $X_2^-$  para as características  $II^+$  e  $II^-$ . Além disso, estes valores em P têm influência sobre os pontos dentro da região acima de P, entre as características  $I^+$  e  $I^-$ . Logo, nenhum sinal pode propagar-se ao longo da viga com velocidade maior que  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  conforme [76, 77].

#### OBSERVAÇÃO

Uma discussão sobre as características da equação de Timoshenko de quarta ordem pode ser encontrada em Taylor e Yau [76].

O modelo diferencial de Timoshenko, descrito pelo sistema de segunda ordem (2.34) ou pela equação escalar de quarta ordem (2.43), além de ser *bem posto*<sup>2</sup>, por satisfazer a condição de Petrovskii-Hadamard [35], [49], também possui caráter

<sup>2</sup>O problema de valor inicial possui solução única, que depende continuamente dos dados iniciais.

hiperbólico e, conseqüentemente, distúrbios movem-se com velocidade de propagação finita, entre outras propriedades. A seguir, é considerado o modelo escalar de quarta ordem.

### 3.1.1 Desacoplamento por Cramer

Outra maneira de desacoplar o sistema de equações (3.7), consiste em utilizar a identidade de Cramer.

Seja

$$\mathcal{L} = \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{C} \quad (3.15)$$

onde

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{D} \quad (3.16)$$

Então

$$\text{adj}(\mathcal{L})\mathcal{L} = \det(\mathcal{L})\mathbf{I}, \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $4 \times 4$ ,  $\det(\mathcal{L})$  denota o determinante de  $\mathcal{L}$ , constituído pelo operador escalar de quarta ordem no tempo

$$\det(\mathcal{L}) = \rho^2 AI \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \left( \kappa GA^2 \rho - \rho AI (\kappa G + E) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \kappa GA EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad (3.18)$$

e  $\text{adj}(\mathcal{L})$  a matriz transposta da matriz de cofatores de  $\mathcal{L}$ , isto é a matriz adjugada (ou *adjunta*) dada por

$$\text{adj}(\mathcal{L}) = \mathcal{A} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \mathcal{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{E} \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho^2 IA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 IA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & EIA\rho\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa GA^2\rho & -\kappa GA\rho I\frac{\partial}{\partial x} \\ \rho A\frac{\partial}{\partial x} & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \kappa GA\rho\left(A - I\frac{\partial}{\partial x^2}\right) & -EI\rho A\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \kappa GA^2\rho\frac{\partial}{\partial x} & -EI\rho A\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa GA\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \rho A\frac{\partial}{\partial x} & -\kappa GA\frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA - EI\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\kappa G\frac{\partial}{\partial x^3} & EI\kappa GA\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & EI\kappa GA\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{-\kappa G}{EI}\frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa GA\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Para o problema não-homogêneo

$$\mathbf{A}\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{D}U = \mathbf{F}(t, x) \quad (3.24)$$

decorre o desacoplamento

$$\rho^2 AI\frac{\partial^4 U_k}{\partial t^4} + \left( \kappa GA^2\rho - \rho AI(\kappa G + E)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} + \kappa GA EI\frac{\partial^4 U_k}{\partial x^4} = F_k(t, x) \quad (3.25)$$

onde  $F_k$  denota a  $k$ -ésima componente do vetor

$$\mathbb{F} = \text{adj}(\mathcal{L})\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

sendo

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa G \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f + \frac{E\kappa GA}{\rho} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\ \kappa GA f + \frac{\kappa GA}{\rho} \left( -\rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + E \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) g \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

As equações anteriores podem ser reescritas como

$$\frac{\rho^2}{\kappa GE} \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f. \quad (3.28)$$

Introduzindo as constantes

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{\kappa G}, \quad \beta^2 = \frac{\rho A}{EI}, \quad \zeta^2 = \frac{\rho}{E}, \quad (3.29)$$

pode-se escrever a equação anterior na forma

$$\alpha^2 \zeta^2 \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \beta^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - (\alpha^2 + \zeta^2) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f. \quad (3.30)$$

Soluções do tipo

$$u = e^{st} e^{i\omega x}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

existem para a equação homogênea, se e somente se,  $s$  é raiz do polinômio

$$P(s, \omega) = \alpha^2 \zeta^2 s^4 + \beta^2 s^2 + (\alpha^2 + \zeta^2) s^2 \omega^2 + \omega^4.$$



A condição de Petrovskii-Hadamard [76] diz que se todas as raízes  $s(\omega)$  da parte principal [49] do polinômio  $P(s, \omega)$  são limitadas superiormente e de maneira uniforme para qualquer  $\omega \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$\operatorname{Re}(s) \leq C$$

então, o problema de valor inicial descrito pela equação (3.30), juntamente com condições iniciais da forma

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x), \quad \frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t^2} = u_2(x), \quad \frac{\partial^3 u(0, x)}{\partial t^3} = u_3(x),$$

é bem posto.

As quatro raízes distintas da parte principal  $P_p(s, \omega) = \alpha^2 \zeta^2 s^4 + (\alpha^2 + \zeta^2) s^2 \omega^2 + \omega^4$  de  $P(s, \omega)$  são

$$\begin{cases} s = \mp i \frac{\omega}{\zeta} \\ s = \mp i \frac{\omega}{\alpha} \end{cases} \quad (3.31)$$

onde  $\alpha$  e  $\zeta$  são valores positivos dependentes das propriedades da viga, definidos por (3.29).

## 3.2 Formulação Newtoniana

Cada um dos quatro principais modelos básicos de vigas (Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko) podem ser descritos por uma equação diferencial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.32)$$

onde, para os modelos de Euler-Bernoulli e Rayleigh,  $\mathbf{v}$  representa o deslocamento transversal da viga,  $\mathbf{F}$  uma força aplicada por unidade de comprimento e  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  são

dados por

$$M = \rho A, \quad K = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

para o modelo de Euler-Bernoulli, e

$$M = \rho A - \rho I \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad K = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

para o modelo de Rayleigh.

Para os modelos de Vlasov e Timoshenko,  $\mathbf{v}$  é o vetor dado por

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} v(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$\mathbf{F}$  é o vetor que representa a força e momento aplicados por unidade de comprimento,

$$\mathbf{F}(t, x) = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

e

$$\mathbf{M}_{Vlasov} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{Timo} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Observa-se que a matriz de massa do modelo de Vlasov é singular, também sendo caso particular da matriz de massa do modelo de Timoshenko quando a inércia rotatória  $\rho I$  é desprezada.

Os modelos descritos na seção 2.6, no capítulo anterior, também podem ser formulados como equação matricial evolutiva de segunda ordem. Deve-se salientar que em vários modelos a equação resultante é do tipo não-conservativo

ou não-clássico, uma vez que inclui um termo com derivada temporal de primeira ordem.

### 3.3 Formulação Matricial Evolutiva de Extensões do Modelo de Timoshenko

#### 3.3.1 Viga em I

Este modelo é descrito por uma equação evolutiva matricial amortecida de segunda ordem, dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.37)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor nulo  $2 \times 1$ , dado por (3.34),

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha_v & 0 \\ 0 & \alpha_\theta \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} EI_x \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \bar{F}(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \bar{M}(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \bar{M}(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} & EI_s \frac{\partial^4}{\partial z^4} - \left( GJ - \bar{F}(t) \frac{I_p}{A} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

#### 3.3.2 Viga de Timoshenko tipo parede-fina carregada axialmente

Este modelo é descrito por uma equação evolutiva matricial amortecida de segunda ordem, dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.40)$$

onde  $\mathbf{F}$  é idêntico ao vetor  $2 \times 1$  com os termos forçantes expresso no caso anterior,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} & K \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ -K \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -\left(GJ - P \frac{I_s}{\mu}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

### 3.3.3 Viga fixa-livre com massa afixada no extremo livre

Este modelo é descrito pela equação evolutiva matricial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor nulo  $2 \times 1$ ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & c \\ mc & mc^2 + I_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} EI_z \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \\ 0 & E\Gamma \frac{\partial^4}{\partial x^4} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

### 3.3.4 Viga de Timoshenko carregada axialmente com seção transversal tipo aerofólio

Este modelo é descrito por uma equação evolutiva matricial amortecida de segunda ordem, dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor nulo  $3 \times 1$ ,  $\mathbf{v}$  é o vetor dado por

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} v(t, x) \\ \psi(t, x) \\ \theta(t, x) \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu y_c & 0 \\ -\mu y_c & I_s & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (-\kappa GA + P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -P y_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -P y_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \left(-GJ + P \frac{I_s}{\mu}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

### 3.3.5 Viga Segmentada

Este modelo pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{K}\mathbf{y}_1 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{K}\mathbf{y}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} v_1(t, x) \\ \psi_1(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} v_2(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Aqui  $v_i(t, x)$  representa o deslocamento transversal da viga, e  $\psi_i(t, x)$  a rotação da seção transversal devido à flexão para cada segmento da viga.

Introduzindo como variáveis os vetores

$$\mathbf{w}_i(t, x) = \begin{bmatrix} v_i(t, x_i) \\ \psi_i(t, x_i) \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

para  $i = 1, 2$ , o sistema homogêneo de equações diferenciais de segunda ordem no tempo acopladas, dado pelas equações (3.49), pode ser escrito como uma equação diferencial de segunda ordem

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{w}}_i + \mathbf{K}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad (3.53)$$

onde

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \rho_i A_i & 0 \\ 0 & \rho_i I_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} -\kappa G_i A_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} & \kappa G_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ -\kappa G_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i} & \kappa G_i A_i - E_i I_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

### 3.3.6 Viga uniforme com condições de contorno não-clássicas e restrições intermediárias

O sistema de equações pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (3.55)$$

onde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}) + \mathcal{C} \quad (3.57)$$

e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

Tem-se as condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} \mathbf{w}(t, 0) + \mathbf{B}_{11} \mathbf{w}'(t, 0) &= 0 \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_{21} \mathbf{w}'(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} -k_1 & -\kappa GA \\ 0 & -c_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} \kappa GA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

As condições de continuidade e compatibilidade nas molas intermediárias são dadas por

$$\mathbf{w}(t, x^-) = \mathbf{w}(t, x^+) \quad (3.61)$$

$$\mathbf{E}_{11} \mathbf{w}(t, x_1^-) + \mathbf{F}_{11} \mathbf{w}'(t, x_1^-) + \mathbf{E}_{12} \mathbf{w}(t, x_1^+) + \mathbf{F}_{12} \mathbf{w}'(t, x_1^+) = 0 \quad (3.62)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{11} &= \begin{bmatrix} -k_2 & \kappa GA \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_{11} &= \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} \kappa GA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

### 3.3.7 Viga de Ginsberg

As equações de movimento correspondem ao sistema original de Timoshenko (2.34), ou, equivalentemente, na forma matricial, por (3.55), (3.57) e (3.58).

As condições de contorno são da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{w}(t, 0) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{w}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11}\dot{\mathbf{w}}(t, 0) + \mathbf{D}_{11}\ddot{\mathbf{w}}(t, 0) &= 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{w}'(t, L) + \mathbf{C}_{21}\dot{\mathbf{w}}(t, L) + \mathbf{D}_{11}\ddot{\mathbf{w}}(t, L) &= 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} k & -\kappa GA + \frac{bk}{2} \\ 0 & \kappa GA + \frac{b}{2} \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} \kappa GA & 0 \\ -\kappa GA + \frac{b}{2} & EI \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_{21} &= \begin{bmatrix} m & \frac{mb}{2} \\ 0 & \frac{mb^2}{6} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

e  $A_{11}$  é uma matriz identidade,  $B_{11}, C_{11}, D_{11}$  são matrizes nulas sendo todas de segunda ordem.

### 3.3.8 Viga infinita sobre fundação viscoelástica

As equações de movimento na forma matricial para o problema descrito na seção 2.6 são dadas por

$$\mathbf{M}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{E}_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{E}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - (\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{E}_2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.66)$$



onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} \mu GA & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu GA & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \mu GA + k_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho J \end{bmatrix}.$$

Juntamente ao modelo (3.66), são também consideradas condições de contorno genéricas na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{u}(t, 0) + \mathbf{u}_{11}\mathbf{u}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11}\dot{\mathbf{u}}(t, 0) + \mathbf{D}_{11}\ddot{\mathbf{u}}(t, 0) &= 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{u}(t, L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{u}'(t, L) + \mathbf{C}_{21}\dot{\mathbf{u}}(t, L) + \mathbf{D}_{21}\ddot{\mathbf{u}}(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde os coeficientes  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$  são matrizes constantes  $2 \times 2$ .

## 4 RESPOSTA DINÂMICA

O modelo de Timoshenko com atrito pode ser escrito na forma matricial evolutiva

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

onde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

denotam os vetores com deslocamento e giro e da força e momento externos, respectivamente. Aqui  $\mathbf{M}$  denota a matriz de massa e  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez, dadas por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A(x) & 0 \\ 0 & \rho I(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}) + \mathcal{E} \quad (4.3)$$

e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\kappa GA(x) & 0 \\ 0 & -EI(x) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA(x) \\ -\kappa GA(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\kappa GA(x))' & \kappa GA(x) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

A matriz  $\mathbf{C}$ , que corresponde ao atrito, será definida conforme o modelo considerado. Juntamente a estas equações de movimento acopladas, são também consideradas condições de contorno genéricas na forma separada

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{w}(t, 0) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{w}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11}\mathbf{w}''(t, 0) + \mathbf{D}_{11}\dot{\mathbf{w}}(t, 0) + \mathbf{E}_{11}\ddot{\mathbf{w}}(t, 0) &= 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{w}'(t, L) + \mathbf{C}_{21}\mathbf{w}''(t, L) + \mathbf{D}_{21}\dot{\mathbf{w}}(t, L) + \mathbf{E}_{21}\ddot{\mathbf{w}}(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde os coeficientes  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{B}_{ij}$ ,  $\mathbf{C}_{ij}$ ,  $\mathbf{D}_{ij}$  e  $\mathbf{E}_{ij}$  são matrizes constantes  $2 \times 2$ , e tem-se utilizado a notação para as derivadas temporais e espaciais

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \quad \mathbf{w}' = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \quad (4.7)$$

respectivamente.

## 4.1 O Operador Adjunto

Para formular a resposta dinâmica do modelo amortecido de Timoshenko com o uso da resposta fundamental ou função de Green de valor inicial, é conveniente introduzir o conceito de condições de contorno adjuntas através do uso da *identidade de Green-Lagrange* para operadores diferenciais lineares.

## 4.2 A Identidade de Lagrange-Green

Considere-se a expressão diferencial

$$Lu = \sum_{k=0}^m l_{m-k}(s) D^k u \quad (4.8)$$

sendo  $D \doteq \frac{d}{ds}$ ; a variável funcional  $u = u(s)$  definida diferenciável num intervalo finito  $I$  é um vetor  $n \times 1$  e os coeficientes  $l_k(s)$  são matrizes  $n \times n$ . Aqui  $s$  poderá denotar o tempo  $t$  ou o espaço  $x$ .

Define-se o produto interno

$$\langle v, u \rangle = \int_{\partial\Omega} v^* u \, dx, \quad u, v \text{ vetores } n \times 1, \quad (4.9)$$

onde  $v^* = \bar{v}^T$  denota a transposta conjugada, de ordem  $1 \times n$ . Por sucessivas integrações por partes, a expressão

$$\int_{s_0}^s v(\xi)^* l_{m-k}(\xi) D^k u(\xi) d\xi \quad (4.10)$$

pode ser transformada em uma nova expressão em que a diferenciação é transferida para  $v(\xi)^*l_{m-k}(\xi)$ . Decorre que

$$\int_{s_0}^s v(\xi)^*Lu(\xi)d\xi = \sum_{k=0}^m (-1)^k \int_{s_0}^s D^k(v(\xi)^*l_{m-k}(\xi))u(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j D^j(v(\xi)^*l_{m-k}(\xi))D^{k-j-1}u(\xi) \Big|_{s_0}^s. \quad (4.11)$$

A relação (4.11), pode ser escrita na forma compacta

$$\langle v, Lu \rangle = \langle L^*v, u \rangle + B(u, v) \Big|_{s_0}^s \quad (4.12)$$

onde

$$L^*v(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k(l_{m-k}(\xi)^*v(\xi)) \quad (4.13)$$

e

$$B(u, v) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r D^r(v(\xi)^*l_{m-k}(\xi))D^{k-r-1}u(\xi). \quad (4.14)$$

A relação (4.11) ou, equivalentemente, (4.12) é referida como sendo a *identidade de Lagrange-Green* [62]. Aqui  $L^*$  é referido como sendo a *forma adjunta* de  $L$ .

O termo  $B(u, v)$  vem a ser uma forma bilinear associada. Ela pode ser escrita de maneira análoga ao caso escalar [25, 27, 66]. Assim,

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m D^{i-1}v^* p_{ij} D^{j-1}u. \quad (4.15)$$

Introduzindo os vetores bloco de ordem  $m \times 1$  com componentes  $n \times 1$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ Du \\ \vdots \\ D^{(m-1)}u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ Dv \\ \vdots \\ D^{(m-1)}v \end{bmatrix},$$

$B(u, v)$  pode ser escrito como

$$B(u, v) = \mathbf{v}^* P(s) \mathbf{u}, \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{v}^*$  denota a matrix transposta conjugada em bloco, isto é,

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} v^* & Dv^* & \dots & D^{(m-1)}v^* \end{bmatrix}$$

e  $P(s)$  é a matriz bloco de ordem  $m \times m$  com componentes  $n \times n$

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1,m-2} & p_{1,m-1} & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m-2} & p_{2,m-1} & 0 \\ p_{3,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m-2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m-1,1} & p_{m-1,2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p_{m,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

cujas componentes na diagonal ou acima dela são dadas por

$$p_{ij} = \sum_{r=i-1}^{m-j} (-1)^r D^{r-i+1} l_{m-r-j}(s). \quad (4.18)$$

Em particular, quando os coeficientes independem de  $s$

$$p_{ij} = (-1)^{i-1} l_{m-i-j+1} \quad (4.19)$$

e a forma bilinear (4.16), é escrita como

$$B(u, v) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r D^r (v(\xi)^*) l_{m-k}(\xi) D^{k-r-1} u(\xi) \quad (4.20)$$

ou

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (-1)^{i-1} D^{i-1} v^* l_{m-i-j+1} D^{j-1} u. \quad (4.21)$$

**Lema 4.1.** *Suponha-se que  $L$  é um operador de segunda ordem, isto é,*

$$Lu = l_o(s)D^2u + l_1(s)Du + l_2(s)u \quad (4.22)$$

e que os coeficientes são diferenciáveis. Então, a matriz  $P(s)$  definida em (4.17) é dada por

$$P(s) = \begin{bmatrix} l_1(s) - l'_o(s) & l_o(s) \\ -l_o(s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Em particular, se  $L$  está na forma divergente <sup>1</sup>, ou seja

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}u) + \mathcal{E}u$$

Então,

$$P(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ -\mathcal{A} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

*Demonstração.* Segue da integração por partes ou de (4.17). □

---

<sup>1</sup>Esta forma inclui o caso de coeficientes constantes.

### 4.2.1 Formulação Escalar

A identidade de Lagrange pode ser apresentada, também, em termos de uma descrição matricial por componentes de

$$\mathbf{L}u = \sum_{k=0}^m l_{m-k}(s) D^k u. \quad (4.25)$$

Denote-se

$$l_k(s) = [l_k^{ij}(s)],$$

então,

$$\mathbf{L}u = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

onde

$$L_{ij} = \sum_{k=0}^m l_{m-k}^{ij}(s) D^k.$$

Tem-se, então, que

$$\begin{aligned} \int_{s_o}^s \mathbf{v}^* \mathbf{L} u d\xi &= \int_{\partial\Omega} (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} d\xi \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{s_o}^s \bar{v}_j L_{ji} u_i d\xi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Utilizando (4.11) com  $m = 1$ , que corresponde ao caso escalar, tem-se

$$\int_{s_0}^s \bar{v}_j L_{ji} u_i d\xi = \int_{s_0}^s \overline{L_{ji}^* v_j} u_i d\xi + B_{ji} \Big|_{s_0}^s \quad (4.27)$$

$$B_{ji} = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r D^r (v_j(\xi) l_{m-k}^{ji}(\xi)) D^{k-r-1} u_i(\xi). \quad (4.28)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^s \mathbf{v}^* \mathbf{L} u dx &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{s_0}^s \overline{L_{ji}^* v_j} u_i d\xi + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ji} \Big|_{s_0}^s \\ &= \int_{s_0}^s \sum_{j=1}^n \left( \overline{\sum_{i=1}^n L_{ji}^* v_j} \right) u_i d\xi + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ji} \Big|_{s_0}^s. \end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbf{L}^* v = \mathcal{L}^* v = \begin{pmatrix} L_{11}^* & L_{21}^* & \cdots & L_{n1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{1n}^* & L_{2n}^* & \cdots & L_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

onde

$$L_{ji}^* v = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k (\overline{v l_{m-k}^{ji}(\xi)}) \quad (4.30)$$

e

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ji} \Big|_{s_0}^s \quad (4.31)$$

com  $B_{ji}$  definido segundo (4.27), segue que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^* \mathbf{L} u dx = \int_{s_0}^s (\mathbf{L}^* v)^* u d\xi + B(u, v) \Big|_{s_0}^s. \quad (4.32)$$

Assim, dado

$$\mathbf{L} = [L_{ij}]$$



o seu *adjunto formal* é definido como sendo

$$L^* = [L_{ji}^*]. \quad (4.33)$$

e

$$B(u, v) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^r D^r (v_j(\xi) l_{m-k}^{ji}(\xi)) D^{k-r-1} u_i(\xi). \quad (4.34)$$

### 4.3 Condições de Contorno Adjuntas

Na prática, a forma diferencial  $L$  definida em (4.8) atua sobre funções  $u = u(s)$  que satisfazem condições de contorno do tipo

$$B_i u = \sum_{j=1}^m A_{ij} D^{j-1} u(s_o) + \sum_{j=1}^m B_{ij} D^{j-1} u(s) = \gamma_i, \quad i = 1 : m, \quad (4.35)$$

onde  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$  são matrizes constantes  $n \times n$  e  $\gamma_i$  um vetor  $n \times 1$ . As condições são ditas *homogêneas* quando  $\gamma_i = 0$  para  $i = 1 : m$ . Neste caso,  $L$  é dito um *operador diferencial linear no intervalo*  $[s_o, s]$ . Para enfatizar que  $L$  é um operador diferencial e não simplesmente uma forma diferencial, será utilizada a notação

$$\mathbb{L}u = Lu$$

quando é subentendido que a função diferenciável  $u = u(s)$  satisfaz as condições de contorno (4.35) com  $\gamma_i = 0$ ,  $i = 1 : m$ .

Assim, a resolução do problema

$$Lu = f \quad (4.36)$$

$$B_i u = 0, \quad i = 1 : m. \quad (4.37)$$

onde  $f = f(s)$  é uma função dada, consiste em inverter o operador diferencial  $\mathbb{L}$ . Para isto é necessário especificar o domínio do operador e o espaço em que assumirá seus valores, por exemplo, o espaço das funções contínuas num determinado intervalo.

O *operador diferencial adjunto*  $\mathbb{L}^*$  é introduzido como sendo a forma adjunta  $\mathbb{L}^*$  atuando sob funções  $v$  tais que a forma bilinear associada  $B(u, v)$  anula-se quando  $u$  satisfaz as condições de contorno (4.14) [51], [66], isto é

$$\langle v, \mathbb{L}u \rangle = \langle \mathbb{L}^*v, u \rangle.$$

Para caracterizar as condições que devem satisfazer as funções  $v$ , é conveniente introduzir os vetores bloco

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ \vdots \\ u_0^{(m-1)} \\ u_L \\ u'_L \\ \vdots \\ u_L^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ \vdots \\ v_0^{(m-1)} \\ v_L \\ v'_L \\ \vdots \\ v_L^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

com  $u_o^{(k)} = u^{(k)}(s_o)$ ,  $u_L^{(k)} = u^{(k)}(s)$  e  $v_o^{(k)} = v^{(k)}(s_o)$ ,  $v_L^{(k)} = v^{(k)}(s)$ . Com a inclusão destes vetores com os valores de  $u, v$  no contorno, a expressão bilinear

$$B(u, v) \Big|_{s_o}^s$$

pode ser escrita na forma matricial bilinear

$$\mathbb{B}(u, v) = \mathbf{v}^T \mathbb{P} \mathbf{u}, \quad (4.39)$$

onde  $\mathbb{P}$  é uma matriz bloco de ordem  $2m \times 2m$  com blocos  $n \times n$  que é da forma

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} -P(a) & 0 \\ 0 & P(b) \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

com  $P(s)$  definida em (4.17).

Seja  $A$  uma matriz bloco de ordem  $2m \times 2m$  com blocos de ordem  $n \times n$  e na qual os primeiros  $m$  blocos correspondem as  $mn$  primeiras linhas nos coeficientes das condições de contorno  $B_k u = 0$ ,  $k = 1 : m$ , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m-1,1} & B_{01} & B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{m-1,1} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m-1,2} & B_{02} & B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{m-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{0m} & A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{m-1,m} & B_{01} & B_{1m} & B_{2m} & \cdots & B_{m-1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

de modo que

$$A u = \begin{bmatrix} B_1 u & B_2 u & \cdots & B_m u & B_{m+1} u & \cdots & B_{2m} u \end{bmatrix}^T. \quad (4.42)$$

Assume-se que as condições de contorno são independentes, isto é, que as primeiras  $mn$  linhas da matriz  $A$  são linearmente independentes e que as  $mn$  linhas restantes foram escolhidas de modo que a matriz  $A$  seja não-singular. Defina-se a matriz bloco de ordem  $2m \times 2m$  com blocos de ordem  $n \times n$

$$A_* = (\mathbb{P} A^{-1})^T \quad (4.43)$$

a qual, na forma de componentes, é dada por

$$A_* = \begin{bmatrix} \alpha_{01}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & \cdots & \alpha_{m-1,1}^* & \beta_{01}^* & \beta_{11}^* & \beta_{21}^* & \cdots & \beta_{m-1,1}^* \\ \alpha_{02}^* & \alpha_{12}^* & \alpha_{22}^* & \cdots & \alpha_{m-1,2}^* & \beta_{02}^* & \beta_{12}^* & \beta_{22}^* & \cdots & \beta_{m-1,2}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{0m}^* & \alpha_{1m}^* & \alpha_{2m}^* & \cdots & \alpha_{m-1,m}^* & \beta_{01}^* & \beta_{1m}^* & \beta_{2m}^* & \cdots & \beta_{m-1,m}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathbb{B}(u, v) = v^T \mathbb{P} A^{-1} A u = (A_* v)^T (A u), \quad (4.44)$$

onde

$$A_* v = \begin{bmatrix} A_1^* v \\ A_2^* v \\ \vdots \\ A_m^* v \\ A_{m+1}^* v \\ \vdots \\ A_{2m}^* v \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

com

$$A_k^* v = \begin{bmatrix} \alpha_{01}^* & \alpha_{11}^* & \cdots & \alpha_{m-1,1}^* & \beta_{01}^* & \beta_{11}^* & \cdots & \beta_{m-1,1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ \vdots \\ v_0^{(m-1)} \\ v_L \\ v'_L \\ \vdots \\ v_L^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

para  $k = 1 : 2m$ . Assim, considerando (4.42) e (4.46), tem-se que (4.44) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(u, v) &= \begin{bmatrix} A_1^* v & A_1^* v & \cdots & A_{2m}^* v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 u \\ B_2 u \\ \vdots \\ B_m(v) \\ B_{m+1}(u) \\ \vdots \\ B_{2m} u \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{2m} A_k^* v B_k u. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para condições de contorno homogêneas

$$B_1 u = 0, B_2 u = 0, \dots, B_m u = 0, \quad (4.48)$$

segue

$$\mathbb{B}(u, v) = \begin{bmatrix} A_1^* v & A_2^* v & \cdots & A_{2m}^* v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_{m+1} u \\ \vdots \\ B_{2m} u \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Como as condições de contorno  $B_{m+k} u$ ,  $k = 1 : m$ , são fictícias, isto é, não foram dadas, decorre que a forma bilinear  $\mathbb{B}$  anula-se ao escolher as seguintes *condições de*



e no segundo caso, com  $m = p + q$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 A_{01} & A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m-1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 A_{02} & A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m-1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 A_{0p} & A_{1p} & A_{2p} & \cdots & A_{m-1,p} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{01} & B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{m-1,1} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{02} & B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{m-1,2} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{0q} & B_{1q} & B_{2q} & \cdots & B_{m-1,q} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

#### OBSERVAÇÃO

Na discussão anterior considerou-se o caso determinado, isto é, o número de condições prescritas é igual a derivada de maior ordem na forma diferencial do operador. A mesma discussão é feita no caso de ter  $n$  condições de contorno prescritas com  $n < m$  ou  $n < 2m$ . Nesta situação, haverá  $2m - n$  condições de contorno adjuntas.

**Lema 4.2.** *Suponha-se que  $L$  é um operador de segunda ordem num intervalo  $I = [a, b]$ , isto é,*

$$Lu = l_o(s)D^2u + l_1(s)Du + l_2(s)u \quad (4.53)$$

e que os coeficientes são diferenciáveis. Então, a matriz  $\mathbb{P}$  definida em (4.40) é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix}
 -l_1(a) + l'_o(a) & -l_o(a) & 0 & 0 \\
 l_o(a) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & l_1(b) - l'_o(b) & l_o(b) \\
 0 & 0 & -l_o(b) & 0
 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Em particular, se  $L$  está na forma divergente <sup>2</sup>, ou seja,

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}u) + \mathcal{E}u$$

então,

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} -\mathcal{B}(a) & -\mathcal{A}(a) & 0 & 0 \\ \mathcal{A}(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}(b) & \mathcal{A}(b) \\ 0 & 0 & -\mathcal{A}(b) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Resumindo:

Dado o operador

$$\mathbb{L}u = \sum_{k=0}^m l_{m-k}(s) D^k u, \quad D = \frac{d}{ds}$$

com  $u$  no espaço

$$U = \{u \in C^{(m)}([s_o, s], \mathbb{E}^n) : B_1 u = 0, B_2 u = 0, \dots, B_m u = 0\},$$

define-se seu *operador adjunto* como sendo o operador

$$L^*v(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k (l_{m-k}(\xi)^* v(\xi))$$

com  $v$  no espaço

$$V = \{v \in C^{(m)}([s_o, s], \mathbb{E}^n) : B_1^* z = 0, B_2^* z = 0, \dots, B_m^* z = 0\},$$

---

<sup>2</sup>Esta forma inclui o caso de coeficientes constantes.



onde as condições de contorno  $B_k^*z$  foram definidas segundo o processo que leva a (4.50). Decorre que para  $\mathbb{L}$  e seu adjunto  $\mathbb{L}^*$ :

$$\langle v, \mathbb{L}u \rangle = \langle \mathbb{L}^*v, u \rangle. \quad (4.56)$$

O operador  $\mathbb{L}$  é dito *auto-adjunto* quando coincide com seu adjunto:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}^*, \quad (4.57)$$

isto é,

$$\sum_{k=0}^m l_{m-k} D^k u = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k (\bar{u} l_{m-k}) \quad (4.58)$$

$$B_1 u = B_1^* u = 0, \quad B_2 u = B_2^* u = 0, \dots, \quad B_m u = B_m^* u = 0. \quad (4.59)$$

### 4.3.1 Condições do Tipo de Valor Inicial

Considere-se

$$Lu = \sum_{k=0}^m l_{m-k}(t) D^k u, \quad D = \frac{d}{dt}$$

com  $u$  possuindo somente condições iniciais nulas em  $t = t_o$ , isto é,

$$B_i u = u^{(i)}(t_o) = 0, \quad i = 1 : m. \quad (4.60)$$

Decorre que a matriz  $\mathbf{A}$  pode ser escolhida como sendo a matriz identidade bloco de ordem  $2m \times 2m$ . Assim, as condições adjuntas serão as últimas  $m$  colunas bloco  $n \times 1$  do vetor  $(\mathbf{A}_* \mathbf{v})^T = (\mathbb{P}^T \mathbf{v})$ .

Por outro lado, na integração por partes em (4.10), e ainda considerando o caso em que os  $l_k$  são matrizes, poderemos utilizar o fato que teremos  $u^{(i)}(t_o) = 0$

para  $i = 1 : m$ . Como os valores  $u^{(i)}(t) = 0$  não são prescritos, resultará

$$\int_{t_o}^t v(\xi)^* l_{m-k}(\xi) D^k u(\xi) d\xi = \int_{t_o}^t D^k (v(\xi)^* l_{m-k}(\xi)) u(\xi) d\xi$$

quando assumirmos

$$v^{i-1}(t) = 0, \quad i = 1 : k - 1.$$

Assim, resultam que as condições de contorno adjuntas para o caso de valor inicial serão

$$B_i^* v = v^{(i-1)}(t) = 0, \quad i = 1 : m. \quad (4.61)$$

De (4.60) e (4.61), observa-se que as condições de contorno são sempre diferentes e portanto um operador diferencial linear de valor inicial nunca pode ser auto-adjunto, ainda que a forma adjunta coincida com a forma diferencial original.

A seguir, encontram-se como exemplos os casos de operadores diferenciais de valor inicial até quarta ordem que são encontrados em conexão com o modelo ou equação de Timoshenko.

L	L*
$l_o(t)u' + l_1(t)u$ $u(t_o) = 0$	$-(l_o^*(\tau)v)' + l_1^*(\tau)v$ $v(t) = 0$
$l_o(t)u'' + l_1(t)u' + l_2(t)u$ $u(t_o) = 0, u'(t_o) = 0$	$(l_o^*(\tau)v)'' - (l_1^*(\tau)v)' + l_2^*(\tau)v$ $v(t) = 0, v'(t) = 0$
$l_o(t)u''' + l_1(t)u'' + l_2(t)u' + l_3(t)u$ $u(t_o) = 0, u'(t_o) = 0, u''(t_o) = 0$	$-(l_o^*(\tau)v)''' + (l_1^*(\tau)v)'' - (l_2^*(\tau)v)' + l_3^*(\tau)v$ $v(t) = 0, v'(t) = 0, v''(t) = 0$
$l_o(t)u^{(iv)} + l_1(t)u''' + l_2(t)u'' + l_3(t)u' + l_4(t)u$ $u(t_o) = 0, u'(t_o) = 0, u''(t_o) = 0$	$(l_o(\tau)v)^{(iv)} - (l_1(\tau)v)''' + (l_2(\tau)v)'' - (l_3(\tau)v)' + l_4(\tau)v$ $v(t) = 0, v'(t) = 0, v''(t) = 0, v'''(t) = 0$

No caso de sistemas com coeficientes constantes

$$Lu = \sum_{k=0}^m l_{m-k} D^k u \quad (4.62)$$

tem-se que

$$L^*v = \sum_{k=0}^m (-1)^k l_{m-k}^* D^k v, \quad (4.63)$$

onde

$$l_{m-k}^* = \overline{l_{m-k}^T} = [\overline{l_{m-k}^{ji}}]. \quad (4.64)$$

Assim,

<b>L</b>	<b>L*</b>
$l_0 u' + l_1 u$ $u(t_0) = 0$	$-l_0^* v' + l_1^* v$ $v(t) = 0$
$l_0 u'' + l_1 u' + l_2 u$ $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0$	$l_0^* v'' - l_1^* v' + l_2^* v$ $v(t) = 0, v'(t) = 0$
$l_0 u''' + l_1 u'' + l_2 u' + l_3 u$ $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0, u''(t_0) = 0$	$-l_0^* v''' + l_1^* v'' - l_2^* v' + l_3^* v$ $v(t) = 0, v'(t) = 0, v''(t) = 0$
$l_0(t)u^{(iv)} + l_1(t)u''' + l_2(t)u'' + l_3(t)u' + l_4(t)u$ $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0, u''(t_0) = 0$	$(l_0^*(\tau)v)^{(iv)} - (l_1^*(\tau)v)''' + (l_2^*(\tau)v)'' - (l_3^*(\tau)v)' + l_4(\tau)v$ $v(t) = 0, v'(t) = 0, v''(t) = 0, v'''(t) = 0$

### 4.3.2 O Caso de Condições Mistas

No modelo de Timoshenko,

$$\mathbf{L}_0 \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{L}_2 \mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (4.65)$$

onde

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

com

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{M}, \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{C}, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{K}, \quad (4.67)$$

definidos em (4.3), (4.4) e (4.5), são consideradas as condições

$$\begin{aligned} B_1 \mathbf{w} &= \mathbf{w}(0, x) \\ B_2 \mathbf{w} &= \mathbf{w}'(0, x) \\ B_3 \mathbf{w} &= \mathbf{A}_{11} \mathbf{w}(t, 0) + \mathbf{B}_{11} \mathbf{w}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11} \mathbf{w}''(t, 0) + \mathbf{D}_{11} \dot{\mathbf{w}}(t, 0) + \mathbf{E}_{11} \ddot{\mathbf{w}}(t, 0) = 0 \\ B_4 \mathbf{w} &= \mathbf{A}_{21} \mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_{21} \mathbf{w}'(t, L) + \mathbf{C}_{21} \mathbf{w}''(t, L) + \mathbf{D}_{21} \dot{\mathbf{w}}(t, L) + \mathbf{E}_{21} \ddot{\mathbf{w}}(t, L) = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

As duas primeiras são condições do tipo de valor inicial e as duas últimas são condições de contorno em dois pontos.

Suponha-se que, no que segue, cada coeficiente  $\mathbf{L}_r$  é uma expressão diferencial espacial, isto é

$$\mathbf{L}_r v = \sum_{k=0}^{m_r} l_{m_r-k,r}(s) D^k v, \quad D = \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 0 : 2, \quad (4.69)$$

com coeficientes diferenciáveis e expressão adjunta

$$\mathbf{L}_r^* v(\xi) = \sum_{k=0}^{m_r} (-1)^k D^k (l_{m_r-k,r}(\xi)^* v(\xi)). \quad (4.70)$$

No caso do modelo de Timoshenko, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_o^* v &= \mathbf{M}^* v = \overline{\mathbf{M}^T} v \\ \mathbf{L}_1^* v &= \mathbf{C}^* v = \sum_{k=0}^{m_c} (-1)^k D^k (l_{m_c-k}(\xi)^* v(\xi)) \\ \mathbf{L}_2^* v &= \mathbf{K}^* v = \mathcal{A}^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\mathcal{A}' + \mathcal{B})^* \frac{\partial v}{\partial x} + (\mathcal{B}' + \mathcal{E})^* v. \end{aligned}$$

Aplicando a identidade de Lagrange-Green, primeiro no espaço e, após no tempo, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{t_o}^t \int_a^b v(\tau, \xi)^* (\mathbf{L}_o \ddot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{L}_2 \mathbf{w}(\tau, \xi)) d\xi d\tau = \\ & = \int_{t_o}^t \int_a^b [(\mathbf{L}_o^* v(\tau, \xi))^* \ddot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + (\mathbf{L}_1^* v(\tau, \xi))^* \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + (\mathbf{L}_2^* v(\tau, \xi))^* \mathbf{w}(\tau, \xi)] d\xi d\tau + \\ & + \sum_{r=0}^2 \int_{t_o}^t \left[ \sum_{k=1}^{m_r} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j D^j (v(\tau, \xi)^* l_{m_r-k,r}(\xi)) D^{k-j-1} w(\tau, \xi) \Big|_a^b \right] d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo trocas na ordem da integração, e utilizando a identidade de Lagrange-Green no tempo, obtém-se que

$$\begin{aligned} & \int_{t_o}^t \int_a^b v(\tau, \xi)^* (\mathbf{L}_o \ddot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{L}_2 \mathbf{w}(\tau, \xi)) d\xi d\tau = \\ & = \int_{t_o}^t \int_a^b [\mathbf{L}_o^* \ddot{v}(\tau, \xi) - \mathbf{L}_1^* \dot{v}(\tau, \xi) + \mathbf{L}_2^* v(\tau, \xi)]^* \mathbf{w}(\tau, \xi) d\xi d\tau + \int_{t_o}^t \int_a^b \left( \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial B_2}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau \end{aligned}$$

onde

$$B_1(v, w) = (\mathbf{L}_o^* v(\tau, \xi))^* \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) - (\mathbf{L}_o^* \dot{v}(\tau, \xi))^* \mathbf{w}(\tau, \xi) + (\mathbf{L}_1^* v(\tau, \xi))^* \mathbf{w}(\tau, \xi)$$

$$B_2(v, w) = B_{20}(v, w) + B_{12}(v, w) + B_{22}(v, w)$$

com

$$B_{2r}(v, w) = \sum_{k=1}^{m_r} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j D^j (v(\tau, \xi)^* l_{m_r-k,r}(\xi)) D^{k-j-1} w(\tau, \xi), \quad r = 0 : 2.$$

Considerando o caso de (4.67), do lema 4.1, uma vez que,

$$\begin{aligned} P_o & = P_M(s) = 0, \\ P_1 & = P_C(s) = \begin{bmatrix} l_1(s) - l'_o(s) & l_o(s) \\ -l_o(s) & 0 \end{bmatrix}, \quad Cu = l_o(s) D^2 u + l_1(s) Du + l_2(s) u \end{aligned}$$

e

$$P_2 = P_K(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ -\mathcal{A} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}) + \mathcal{E}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v(\tau, \xi) \\ Dv(\tau, \xi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w(\tau, \xi) \\ Dw(\tau, \xi) \end{bmatrix}, \quad (4.71)$$

segue,

$$B_2(v, w) = \mathbf{v}^* P_C \mathbf{w} + \mathbf{v}^* P_K \mathbf{w} = \mathbf{v}^* P \mathbf{w}$$

com

$$P = \begin{bmatrix} l_1(s) - l'_o(s) + \mathcal{B} & l_o(s) + \mathcal{A} \\ -l_o(s) - \mathcal{A} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Introduzindo os vetores bloco  $12 \times 1$  com blocos  $2 \times 1$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w(t, 0) \\ w'(t, 0) \\ w''(t, 0) \\ w(t, 0) \\ \dot{w}(t, 0) \\ \ddot{w}(t, 0) \\ w(t, L) \\ w'(t, L) \\ w''(t, L) \\ w(t, L) \\ \dot{w}(t, L) \\ \ddot{w}(t, L) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v(t, 0) \\ v'(t, 0) \\ v''(t, 0) \\ v(t, 0) \\ \dot{v}(t, 0) \\ \ddot{v}(t, 0) \\ v(t, L) \\ v'(t, L) \\ v''(t, L) \\ v(t, L) \\ \dot{v}(t, L) \\ \ddot{v}(t, L) \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

tem-se que

$$\int_{t_o}^t \int_a^b \left( \frac{\partial B_2}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau = \int_{t_o}^t \mathbb{B}(v, w) d\tau \quad (4.74)$$

onde

$$\mathbb{B}(v, w) = \mathbf{v}^T \mathbb{P} \mathbf{w} \quad (4.75)$$

com  $\mathbb{P}$  uma matriz bloco de ordem  $6 \times 6$  com blocos  $4 \times 4$  que é da forma

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} -\tilde{P}_1(a) & -\tilde{P}_2(a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{P}_1(b) & \tilde{P}_2(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Aqui

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{l_1(s) - l'_o(s) + \mathcal{B}}{2} & l_o(s) + \mathcal{A} \\ \frac{-l_o(s) - \mathcal{A}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{l_1(s) - l'_o(s) + \mathcal{B}}{2} \\ 0 & \frac{-l_o(s) - \mathcal{A}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.77)$$

De maneira análoga ao desenvolvido na seção 4.3, as condições de contorno adjuntas

$$B_1^* \mathbf{v} = 0, \quad B_2^* \mathbf{v} = 0 \quad (4.78)$$

são introduzidas de maneira a zerar o integrando em (4.74).

O modelo adjunto de Timoshenko é descrito por

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^* \mathbf{u} = \mathbf{R}, \quad (4.79)$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(t, x) \\ r_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A(x) & 0 \\ 0 & \rho I(x) \end{bmatrix}, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathcal{A}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\mathcal{A}' + \mathcal{B}) \frac{\partial}{\partial x} + (\mathcal{B}' + \mathcal{E}).$$

Para  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{E}$  definidos em (4.4) e (4.5), tem-se

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\kappa GA(x) & 0 \\ 0 & -EI(x) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa GA(x) \\ \kappa GA(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

$$\mathcal{E}^* = \begin{bmatrix} 0 & (\kappa GA(x))' \\ 0 & \kappa GA(x) \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Assim,

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -\kappa GA(x) & 0 \\ 0 & -EI(x) \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} (\kappa GA(x))' & \kappa GA(x) \\ -\kappa GA(x) & (EI(x))' \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\kappa GA(x))' & \kappa GA(x) \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Aqui o adjunto do coeficiente de atrito é obtido segundo a definição do coeficiente  $\mathbf{C}$ .



## 4.4 Função de Green de Valor Inicial e Respostas Dinâmicas

A *solução fundamental* ou *função de Green de valor inicial* do modelo de Timoshenko, é definida como sendo

$$\mathbf{h} = \begin{cases} h(t, x, \xi), & t \geq 0, \quad 0 \leq x, \xi \leq L \\ 0 & t < 0, \quad 0 \leq x, \xi \leq L \end{cases} \quad (4.85)$$

onde  $h(t, x, \xi)$  é solução matricial de ordem  $2 \times 2$  do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t, x, \xi) + \mathbf{C} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, \xi) + \mathbf{K} h(t, x, \xi) &= 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ h(0^+, x, \xi) &= 0, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{M} \frac{\partial h}{\partial t}(0^+, x, \xi) = \mathcal{I}. \quad (4.87)$$

que satisfaz condições de contorno homogêneas da forma

$$B_1 \mathbf{h} = 0, \quad B_2 \mathbf{h} = 0 \quad (4.88)$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 \mathbf{h} &= \mathbf{A}_{11} h(t, 0, \xi) + \mathbf{B}_{11} h_x(t, 0, \xi) + \mathbf{C}_{11} h_{xx}(t, 0, \xi) + \mathbf{D}_{11} h_t(t, 0, \xi) + \mathbf{E}_{11} h_{tt}(t, 0, \xi) \\ B_2 \mathbf{h} &= \mathbf{A}_{21} h(t, L, \xi) + \mathbf{B}_{21} h_x(t, L, \xi) + \mathbf{C}_{21} h_{xx}(t, L, \xi) + \mathbf{D}_{21} h_t(t, L, \xi) + \mathbf{E}_{21} h_{tt}(t, L, \xi) \end{aligned} \quad (4.89)$$

A segunda condição em (4.87) deve ser interpretada no sentido que  $\mathcal{I}$  é o operador identidade quando atua-se sobre funções através de integração, isto é,

$$\int_0^L \mathbf{M} \frac{\partial h}{\partial t}(0, x, \xi) \phi(\xi) d\xi = \phi(x).$$

ou, simplesmente, de maneira prática

$$\mathbf{M} \frac{\partial h}{\partial t}(0, x, \xi) = \delta(x - \xi) \mathbb{I},$$

onde  $\delta(x)$  é a função delta de Dirac.

A introdução da função de Green de valor inicial permite obter uma representação integral da resposta dinâmica de (4.86). Para isto, será utilizado o resultado a seguir.

**Teorema 4.1.** *Suponha-se que  $\mathbf{w}(t, x)$  é solução do problema de valor inicial*

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t, x) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t, x) = \mathbf{F}(t, x),$$

com valores iniciais  $\mathbf{w}(0, x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(0, x)$  dados e sujeita as condições de contorno

$$\begin{aligned} B_1\mathbf{w} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{w}(t, 0) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{w}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11}\mathbf{w}''(t, 0) + \mathbf{D}_{11}\dot{\mathbf{w}}(t, 0) + \mathbf{E}_{11}\ddot{\mathbf{w}}(t, 0) = 0 \\ B_2\mathbf{w} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{w}'(t, L) + \mathbf{C}_{21}\mathbf{w}''(t, L) + \mathbf{D}_{21}\dot{\mathbf{w}}(t, L) + \mathbf{E}_{21}\ddot{\mathbf{w}}(t, L) = 0, \end{aligned}$$

e que  $\mathbf{v}(\tau, \xi)$  é solução do problema adjunto

$$\mathbf{M}^*\dot{\mathbf{v}}(\tau, \xi) - \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{v}}(\tau, \xi) + \mathbf{K}^*\mathbf{v}(\tau, \xi) = 0, \quad (4.90)$$

sujeita as condições de contorno adjuntas

$$B_1^*\mathbf{v} = 0, B_2^*\mathbf{v} = 0.$$

Então

$$\int_0^L [(\mathbf{M}^*\mathbf{v}(\tau, \xi))^* \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + (-\mathbf{M}^*\dot{\mathbf{v}}(\tau, \xi) + \mathbf{C}^*\mathbf{v}(\tau, \xi))^* \mathbf{w}(\tau, \xi)] \Big|_0^t d\xi = \int_0^t \int_0^L \mathbf{v}(\tau, \xi)^* F(\tau, \xi) d\xi d\tau$$

*Demonstração.* Multiplicando ambos membros da equação dada pela solução  $\mathbf{v}$  da equação adjunta e integrando, resulta

$$\int_0^t \int_0^L \mathbf{v}(\tau, \xi)^* F(\tau, \xi) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^L \mathbf{v}(\tau, \xi)^* [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{K}\mathbf{w}(\tau, \xi)] d\xi d\tau.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L \mathbf{v}(\tau, \xi)^* [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{K}\mathbf{w}(\tau, \xi)] d\xi d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^L \left[ \mathbf{M}^* \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{v}(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \mathbf{K}^* \mathbf{v}(\tau, \xi) \right]^* \mathbf{w}(\tau, \xi) d\xi d\tau \\
&+ \int_0^L \left[ (\mathbf{M}^* \mathbf{v}(\tau, \xi))^* \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \left( -\mathbf{M}^* \frac{\partial \mathbf{v}(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \mathbf{C}^* \mathbf{v}(\tau, \xi) \right)^* \mathbf{w}(\tau, \xi) \right] \Big|_0^t d\xi \\
&+ \int_0^t \mathbb{B}(h_*, w) d\tau,
\end{aligned}$$

onde  $\mathbb{B}(v, w)$  é dado em (4.75), isto é,

$$\int_0^t \mathbb{B}(v, w) d\tau = \int_0^t \sum_{k=1}^2 B_k^*(v)^* B_k(w) d\tau. \quad (4.91)$$

Esta última integral anula-se uma vez que  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  satisfazem condições de contorno adjuntas. Por outro lado, sendo  $\mathbf{v}$  solução da equação adjunta (4.90), obtém-se o resultado.  $\square$

Agora, introduzindo a função de Green de valor inicial adjunta

$$\mathbf{h}^* = \begin{cases} -h(t - \tau, x, \xi), & t \geq \tau, \quad 0 \leq x, \xi \leq L \\ 0 & t < \tau, \quad 0 \leq x, \xi \leq L \end{cases} \quad (4.92)$$

tem-se que

$$h_*(\tau, t, \xi, x) = -h(t - \tau, x, \xi), \quad t \geq \tau, \quad 0 \leq x, \xi \leq L \quad (4.93)$$

satisfaz o problema de valor inicial adjunto [62]

$$\mathbf{M}^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial \tau^2}(\tau, t, \xi, x) - \mathbf{C}^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau}(\tau, t, \xi, x) + \mathbf{K}^* h^*(t, \xi, x) = 0, \quad t \geq \tau, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$h^*(t, t, \xi, x) = 0, \quad (4.94)$$

$$\mathbf{M}^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau}(t, t, \xi, x) = \mathcal{I}, \quad (4.95)$$

com condições de contorno adjuntas

$$B_1^* h^* = 0, \quad B_2^* h^* = 0. \quad (4.96)$$

Assim, utilizando o teorema anterior, ou simplesmente multiplicando ambos membros por  $h(t - \tau, x, \xi)$  e integrando, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau &= \int_0^t \int_0^L (-h_*)^* [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \mathbf{K}\mathbf{w}(\tau, \xi)] d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^L \left[ \mathbf{M}^* \frac{\partial^2 h_*}{\partial \tau^2} - \mathbf{C}^* \frac{\partial h_*}{\partial \tau} + \mathbf{K}^* h_* \right]^* \mathbf{w}(\tau, \xi) d\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^L \left[ (\mathbf{M}^*(-h_*))^* \dot{\mathbf{w}}(\tau, \xi) + \left( -\mathbf{M}^* \frac{\partial(-h_*)}{\partial \tau} + \mathbf{C}^*(-h_*) \right)^* \mathbf{w}(\tau, \xi) \right] \Big|_0^t d\xi \\ &\quad + \int_0^t \mathbb{B}(h_*, w) d\tau \\ &= \mathbf{w}(t, x) - \int_0^L h(\tau, x, \xi) \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}}(0, \xi) d\xi - \int_0^L (h_t(t, x, \xi) \mathbf{M} + h(t, x, \xi) \mathbf{C}) \mathbf{w}(0, \xi) d\xi \end{aligned}$$

Desta maneira a resposta dinâmica do modelo de Timoshenko com condições de contorno genéricas pode ser escrita em termos da solução fundamental ou função de Green de valor inicial  $h$ . Mais precisamente,

**Teorema 4.2.** *A resposta dinâmica do modelo de Timoshenko*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t, x) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t, x) &= \mathbf{F}(t, x), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ \mathbf{w}(0, x) &= w_o(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \dot{\mathbf{w}}(0, x) &= w_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ B_1 \mathbf{w} &= \mathbf{A}_{11} \mathbf{w}(t, 0) + \mathbf{B}_{11} \mathbf{w}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11} \mathbf{w}''(t, 0) + \mathbf{D}_{11} \dot{\mathbf{w}}(t, 0) + \mathbf{E}_{11} \ddot{\mathbf{w}}(t, 0) = 0 \\ B_2 \mathbf{w} &= \mathbf{A}_{21} \mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_{21} \mathbf{w}'(t, L) + \mathbf{C}_{21} \mathbf{w}''(t, L) + \mathbf{D}_{21} \dot{\mathbf{w}}(t, L) + \mathbf{E}_{21} \ddot{\mathbf{w}}(t, L) = 0, \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde os coeficientes  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$  são matrizes constantes  $2 \times 2$ , e utilizando-se a notação para as derivadas temporais e espaciais na forma

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \quad \mathbf{w}' = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x},$$

respectivamente, é descrita pela fórmula de variação de parâmetros

$$\mathbf{w}(t, x) = \int_0^L h_o(\tau, x, \xi) \mathbf{w}(0, \xi) d\xi + \int_0^L h_1(\tau, x, \xi) \dot{\mathbf{w}}(0, \xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau$$

onde

$$h_o = h_t(t, x, \xi) \mathbf{M} + h(t, x, \xi) \mathbf{C} \quad (4.98)$$

$$h_1 = h(\tau, x, \xi) \mathbf{M}. \quad (4.99)$$

**Corolário 4.1.** No caso clássico,  $\mathbf{C} = 0$ , tem-se a resposta dinâmica

$$\mathbf{w}(t, x) = \int_0^L h_t(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{w}(0, \xi) d\xi + \int_0^L h(\tau, x, \xi) \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}}(0, \xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

## 5 DECOMPOSIÇÃO DE RESPOSTAS FORÇADAS

Neste capítulo, considera-se a obtenção de respostas diante forças externas estacionárias ou que variam exponencialmente no tempo. Este último tipo de forçantes permite considerar o caso oscilatório, necessário para a obtenção de respostas em frequência.

As respostas forçadas são definidas através da integral de convolução da solução fundamental com o termo não homogêneo que corresponde a excitação externa. Será considerada a extração de soluções homogêneas a partir da resposta forçada em termos dos valores iniciais de uma solução particular, atuando esta última como uma retroalimentação no sistema. Esta decomposição na resposta forçada resulta de interesse quando as forças externas são tais que uma solução particular é simples de obter.

A seguir, serão considerados o *modelo de Timoshenko*, descrito por um sistema evolutivo de segunda ordem, e a *equação de Timoshenko*, descrita por uma equação evolutiva de quarta ordem. Deve ser observado que na extração da equação de Timoshenko a partir de um sistema de segunda ordem as componentes do termo externo modificam-se, conforme discutido na subseção 2.4.1. Daí que não é de se esperar uma simples concordância entre as respostas do sistema acoplado e da equação de Timoshenko.

Um estudo espectral do modelo de Timoshenko tem sido apresentado por Benaroya [40] para sistemas com condições de contorno clássicas, porém, sem identificar a parte transiente e a parte permanente da resposta forçada. Neste trabalho, segue-se a formulação espectral apresentada em [64] para o caso de sistemas com  $N$  graus de liberdade.

## 5.1 Respostas Forçadas no Sistema de Timoshenko

Para tanto, deve-se estudar o problema de valor inicial descrito pela equação diferencial matricial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (5.1)$$

com condições iniciais nulas

$$\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_t(0, x) = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

e sujeita a condições de contorno do tipo discutido no capítulo anterior, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{v}(t, 0) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{v}'(t, 0) + \mathbf{C}_{11}\mathbf{v}''(t, 0) + \mathbf{D}_{11}\dot{\mathbf{v}}(t, 0) + \mathbf{E}_{11}\ddot{\mathbf{v}}(t, 0) &= 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{v}(t, L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{v}'(t, L) + \mathbf{C}_{21}\mathbf{v}''(t, L) + \mathbf{D}_{21}\dot{\mathbf{v}}(t, L) + \mathbf{E}_{21}\ddot{\mathbf{v}}(t, L) &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde os coeficientes  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{B}_{ij}$ ,  $\mathbf{C}_{ij}$ ,  $\mathbf{D}_{ij}$  e  $\mathbf{E}_{ij}$  são matrizes constantes  $2 \times 2$ .

Com a discussão apresentada no capítulo anterior, sabe-se que para as condições iniciais nulas (5.2), a solução da equação (5.1) é dada por

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (5.4)$$

ou, em forma compacta,

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (5.5)$$

onde

$$\mathbf{h}(t) \Phi = \int_0^L \mathbf{h}(t, x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad (5.6)$$

e  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, x)$  é uma função em  $x$  para cada tempo arbitrário porém fixo. Pelo princípio da superposição linear, a solução pode também ser escrita como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_p, \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{v}_h = \mathbf{h}(t)\mathbf{C}_0 + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{C}_1$  é uma solução homogênea a ser determinada e  $\mathbf{v}_p$  uma solução particular qualquer. Substituindo os valores iniciais em (5.7), obtém-se

$$\mathbf{C}_0 = -\mathbf{v}_p(0, x) \quad (5.8)$$

e

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t}(0, x). \quad (5.9)$$

Assim,

$$\mathbf{v}_h(t, x) = -\int_0^L \left[ \mathbf{h}_0(t, x, \xi)\mathbf{v}_p(0, \xi) + \mathbf{h}_1(t, x, \xi)\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t}(0, \xi) \right] d\xi \quad (5.10)$$

vem a ser uma *solução homogênea* ou *resposta livre induzida pela resposta particular*  $\mathbf{v}_p$  através de seus valores iniciais.

Segue que o cálculo da resposta forçada

$$\int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi)\mathbf{f}(\tau, \xi)d\xi d\tau = \mathbf{v}_p(t, x) - \int_0^L \left[ \mathbf{h}_0(t, x, \xi)\mathbf{v}_p(0, \xi) + \mathbf{h}_1(t, x, \xi)\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t}(0, \xi) \right] d\xi \quad (5.11)$$

poderá ser facilitado quando for relativamente simples obter a solução particular  $\mathbf{v}_p(t, x)$ . Isto será considerado a seguir para várias situações de interesse prático [15].



### 5.1.1 Respostas forçadas estacionárias e oscilatórias

Para termos não-homogêneos do tipo

$$\mathbf{f}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{F}(x) \quad (5.12)$$

procura-se uma solução particular da mesma forma, isto é,

$$\mathbf{v}_p = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x). \quad (5.13)$$

Substituindo na equação (5.1) decorre

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X}(x) = \mathbf{F}(x), \quad (5.14)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Equivalentemente, a equação (5.14) pode ser reescrita na forma

$$\mathbb{M} \mathbf{X}''(x) + \mathbb{C} \mathbf{X}'(x) + \mathbb{K}(\lambda) \mathbf{X}(x) = \mathbf{F}(x), \quad (5.16)$$

com

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix}.$$

Juntamente a esta equação são consideradas condições de contorno espaciais que decorrem da substituição de (5.13) nas condições de contorno homogêneas originais

do problema, isto é,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{11} + \lambda \mathbf{D}_{11} + \lambda^2 \mathbf{E}_{11}) \mathbf{X}(0) + \mathbf{B}_{11} \mathbf{X}'(0) + \mathbf{C}_{11} \mathbf{X}''(0) &= 0 \\ (\mathbf{A}_{21} + \lambda \mathbf{D}_{21} + \lambda^2 \mathbf{E}_{21}) \mathbf{X}(L) + \mathbf{B}_{21} \mathbf{X}'(L) + \mathbf{C}_{21} \mathbf{X}''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Se  $\lambda$  não é autovalor, tem-se [25, 66]

$$\mathbf{X}(x) = \int_0^L \mathbf{H}(\lambda, x, \xi) \mathbf{F}(\xi) d\xi, \quad (5.18)$$

onde  $\mathbf{H}(\lambda, x, \xi)$  vem a ser a função de Green espacial associada ao problema de contorno (5.16) e (5.17).

A obtenção de funções de Green para problemas de contorno com sistemas de segunda ordem de maneira direta ainda não tem sido considerado na literatura. Usualmente deve ser considerado através de uma redução para o caso de sistemas de primeira ordem. Este último tipo de sistema tem sido discutido para condições de contorno clássicas [24, 25, 32] e mais recentemente para as não-clássicas [61].

Na seção a seguir é considerado o método espectral para sistemas de segunda ordem em que os modos formam um conjunto ortonormal completo. Isto permitirá obter uma expansão bilinear tanto para a função de Green de valor inicial  $\mathbf{h}(t, x, \xi)$  quanto para a função de transferência  $\mathbf{H}(s, x, \xi)$ .

## 5.2 Modos Normais

A procura de soluções exponenciais não-nulas

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda x} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

do modelo de Timoshenko

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}(\kappa GA \frac{\partial}{\partial x}) & \frac{\partial}{\partial x}(\kappa GA) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(\kappa GA) & -\frac{\partial}{\partial x}(EI \frac{\partial}{\partial x}) + kGA \end{bmatrix},$$

equivale a determinar uma solução não nula  $\mathbf{w}(x)$  do sistema

$$(\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M})\mathbf{w}(x) = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

sujeito a condições de contorno, as quais serão assumidas como sendo do tipo separado, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  denotam matrizes  $2 \times 2$ . Diz-se que  $\mathbf{w}(x)$  é uma autofunção ou modo que corresponde ao autovalor  $\lambda$  sempre que esta for uma solução não trivial de (5.21) que satisfaz as condições de contorno (5.22). Quando  $\lambda = i\omega$  é um número puramente imaginário,  $\omega$  é chamado frequência natural da viga.

A obtenção dos modos, *no caso de coeficientes constantes*, equivale a determinar soluções não-triviais da equação diferencial de segunda-ordem com coeficientes matriciais,

$$\mathbf{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbf{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (5.23)$$

que satisfazem as condições de contorno (5.22). Aqui

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbb{K}(\lambda) = \lambda^2 \mathbb{M} + \mathbb{R} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}.$$

Introduzindo o produto interno

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_0^L \Psi^*(x) \Phi(x) dx, \quad \Psi^*(x) = \overline{\Psi}^T(x) \quad (5.24)$$

segue de (5.23),

$$\langle \mathbf{w}, \mathbb{M} \mathbf{w}'' \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbb{C} \mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbb{R} \mathbf{w} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{w}, \mathbb{M} \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Integrando por partes, decorre

$$\lambda^2 \langle \mathbf{w}, \mathbb{M} \mathbf{w} \rangle = B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] + \int_0^L (\mathbf{w}^{*'}(x) \mathbb{M} \mathbf{w}'(x) + \mathbf{w}^{*'}(x) \mathbb{C} \mathbf{w}(x) + \mathbf{w}^*(x) (-\mathbb{R}) \mathbf{w}(x)) dx,$$

onde

$$\begin{aligned} B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] &= -\mathbf{w}^*(x) \mathbb{M} \mathbf{w}'(x) - \mathbf{w}^*(x) \mathbb{C} \mathbf{w}(x) \Big|_0^L \\ &= \kappa GA \bar{u} (u_x - \phi) + \kappa GA u \bar{\phi} + EI \bar{\phi} \phi_x \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Substituindo valores, resulta

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \frac{B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] - \int_0^L [\kappa GA (|u_x|^2 + |\phi|^2 - \bar{u}_x \phi + u \bar{\phi}_x) + EI |\phi_x|^2] dx}{\int_0^L (\rho A |u|^2 + \rho I |\phi|^2) dx} \\
&= \frac{B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] - \int_0^L \left[ \kappa GA |u_x - \phi|^2 + EI |\phi_x|^2 + \kappa GA \frac{d(u\bar{\phi})}{dx} \right] dx}{\int_0^L (\rho A |u|^2 + \rho I |\phi|^2) dx} \\
&= - \frac{\kappa GA (u_x - \phi) \bar{u} + EI \bar{\phi} \phi_x \Big|_0^L - \int_0^L [\kappa GA |u_x - \phi|^2 + EI |\phi_x|^2] dx}{\int_0^L (\rho A |u|^2 + \rho I |\phi|^2) dx}.
\end{aligned}$$

Aqui  $|z|$  denota valor absoluto do escalar  $z$ , que satisfaz  $z^2 = \bar{z}z$ .

Para o modelo de Timoshenko com as condições de contorno clássicas:

- apoiada,  $u = 0, \phi_x = 0$
- fixa,  $u = 0, \phi = 0$
- livre,  $\phi_x = 0, u_x - \phi = 0$
- deslizante,  $\phi = 0, u_x - \phi = 0$

tem-se que

$$\kappa GA (u_x - \phi) \bar{u} + EI \bar{\phi} \phi_x \Big|_0^L = 0.$$

Nesta situação, decorre que  $\lambda$  é o negativo do quociente de duas grandezas não-negativas e portanto deve ser um número puramente imaginário. Assim a equação (5.21) converte-se em

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}(x) = 0 \tag{5.25}$$

e as autofunções serão reais uma vez que  $\mathbf{K}, \mathbf{M}$  são matrizes reais.

Suponha-se que  $\mathbf{w}$ ,  $\Psi$  são autofunções correspondentes aos autovalores  $\lambda = i\omega$  e  $\lambda = i\gamma$ , respectivamente, ou seja

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (\mathbb{K} - \gamma^2 \mathbf{M}) \Psi(x) = \mathbf{0}.$$

Para as condições de contorno acima, sendo as autofunções e os coeficientes reais, verifica-se em [59] que

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \mathbb{K} \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbb{K} \Psi \rangle, \\ \langle \Psi, \mathbf{M} \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{M} \Psi \rangle, \end{aligned}$$

e decorre que

$$(\omega^2 - \gamma^2) \langle \Psi, \mathbf{M} \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Conseqüentemente, *as autofunções correspondentes a autovalores distintos são ortogonais com respeito a  $\mathbf{M}$* . Utilizando [60], o mesmo é válido para  $\mathbf{K}$ .

### 5.3 Equação Modal

Para determinar os autovalores e autofunções, considere-se a solução de (5.23) na forma

$$\mathbf{w}(x) = \Phi_1(x) \mathbf{c}_1 + \Phi_2(x) \mathbf{c}_2 \quad (5.26)$$

onde  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$  são matrizes  $2 \times 2$  que denotam uma base matricial para as soluções de (5.23), isto é, além de satisfazer a equação diferencial (5.23), a matriz wronskiana de ordem  $4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

possui posto 4 ou, equivalentemente, determinante não nulo. Aqui  $\mathbf{c}_1$  and  $\mathbf{c}_2$  denotam vetores  $2 \times 1$ . Substituindo nas condições de contorno (5.22) reescritas a seguir,

$$\mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) = \mathbf{0},$$

segue

$$\mathcal{A}[\Phi_1(0)\mathbf{c}_1 + \Phi_2(0)\mathbf{c}_2] + \mathcal{B}[\Phi_1'(0)\mathbf{c}_1 + \Phi_2'(0)\mathbf{c}_2] = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

$$\mathcal{C}[\Phi_1(L)\mathbf{c}_1 + \Phi_2(L)\mathbf{c}_2] + \mathcal{D}[\Phi_1'(L)\mathbf{c}_1 + \Phi_2'(L)\mathbf{c}_2] = \mathbf{0}. \quad (5.29)$$

Matricialmente,

$$\mathcal{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (5.30)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma matriz  $4 \times 4$  com blocos de ordem  $2 \times 2$  e  $\mathbf{c}$  o vetor  $4 \times 1$  com linhas bloco de ordem  $2 \times 1$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}\Phi_1(0) + \mathcal{B}\Phi_1'(0) & \mathcal{A}\Phi_2(0) + \mathcal{B}\Phi_2'(0) \\ \mathcal{C}\Phi_1(L) + \mathcal{D}\Phi_1'(L) & \mathcal{C}\Phi_2(L) + \mathcal{D}\Phi_2'(L) \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

De maneira compacta

$$\mathcal{U} = \mathbb{B}\Phi \quad (5.33)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) \\ \Phi_1(L) & \Phi_2(L) \\ \Phi_1'(L) & \Phi_2'(L) \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Para obter soluções não-nulas da equação (5.30) é necessário e suficiente que o determinante da matriz

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) \quad (5.35)$$

seja nulo. A equação que resulta é chamada de *equação característica*.

### 5.3.1 Base Dinâmica

Como base matricial, podem ser escolhidas

$$\Phi_1(x) = \mathbf{h}(x), \quad \Phi_2(x) = \mathbf{h}'(x) \quad (5.36)$$

onde  $\mathbf{h}(x)$  é a matriz  $2 \times 2$  que satisfaz a equação homogênea

$$\mathbb{M}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{h}(x) = \mathbf{0}, \quad (5.37)$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}. \quad (5.38)$$

Aqui  $\mathbf{0}$  denota a matriz nula  $2 \times 2$  e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade  $2 \times 2$ . Outra base pode ser

$$\Phi_1(x) = \mathbf{h}_0(x), \quad \Phi_2(x) = \mathbf{h}_1(x) \quad (5.39)$$



onde

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_0(x) &= \mathbf{h}'(x)\mathcal{M} + \mathbf{h}(x)\mathcal{C} \\ \mathbf{h}_1(x) &= \mathbf{h}(x)\mathcal{M}\end{aligned}\tag{5.40}$$

satisfazem as condições iniciais normalizadas

$$\mathbf{h}_0(0) = \mathbf{I}, \mathbf{h}'_0(0) = \mathbf{0}\tag{5.41}$$

$$\mathbf{h}_1(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'_1(0) = \mathbf{I}.\tag{5.42}$$

Com o uso da base normalizada, a matriz  $\Phi$  definida em (5.34) simplifica-se e decorre que

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{D}\mathbf{h}'_0(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_0(L) & \mathcal{D}\mathbf{h}'_1(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_1(L) \end{bmatrix},\tag{5.43}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(0) \\ \mathbf{w}'(0) \end{bmatrix}.\tag{5.44}$$

Por outro lado, supondo que  $\mathcal{A}$  é uma matriz não-singular, a equação característica pode ser simplificada, pois usando (5.39), (5.41) e (5.42) em (5.28), segue que  $\mathbf{w}'(0)$  pode ser escrito em função de  $\mathbf{w}(0)$ , ou seja,

$$\mathbf{w}(0) = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{w}'(0).\tag{5.45}$$

Utilizando (5.39), (5.41), (5.42) e (5.43) em (5.29), tem-se que

$$[\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})]\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0}.\tag{5.46}$$

Portanto, a equação característica é dada por

$$\Delta(L) = \det(\mathbf{D}) = 0, \quad (5.47)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz  $2 \times 2$  definida por

$$\mathbf{D} = [\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})]. \quad (5.48)$$

Por um raciocínio análogo, discute-se o caso em que a matriz  $\mathcal{B}$  seja não-singular. Neste caso, escreve-se

$$\dot{\Phi}(0) = -\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\Phi(0). \quad (5.49)$$

Uma fórmula fechada para a matriz  $\mathbf{h}(x)$  tem sido estabelecida por Claeysen et al. em [10]. Para tanto, considere-se o polinômio característico

$$P(s) = \det[s^2\mathbb{M} + s\mathbb{C} + \mathbb{K}(\lambda)] = \sum_{k=0}^4 b_k s^{4-k},$$

onde

$$b_0 = ab, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(ae + cb)\lambda^2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = (e\lambda^2 + a)c\lambda^2.$$

Aqui

$$a = \kappa GA, \quad b = EI, \quad c = \rho A, \quad e = \rho I.$$

Então, determina-se a solução  $h(x)$  do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 b_k h^{(4-k)}(x) &= b_0 h^{(iv)}(x) + b_2 h''(x) + b_4 h(x) = 0 \\ h(0) &= h'(0) = h''(0) = 0, \quad b_0 h'''(0) = 1, \end{aligned} \quad (5.50)$$

e calculam-se as matrizes  $\mathbf{h}_k$  a partir do problema de valor inicial matricial em diferenças

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathcal{K}\mathbf{h}_k &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_0 &= \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}_1 = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

A fórmula fechada é dada por

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{4-j} \quad (5.52)$$

Os cálculos seguem a seguir. Considere-se, em primeiro lugar, a equação diferencial característica

$$\begin{aligned} abh^{(iv)}(x) - (ae + cb)\lambda^2 h''(x) + (e\lambda^2 + a)c\lambda^2 h(x) &= 0 \\ h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, abh'''(0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.53)$$

O polinômio característico associado a esta equação diferencial é da forma

$$P(s) = ab(s^4 + g^2 s^2 - r^4),$$

onde

$$g^2(\lambda) = -(e/b + c/a)\lambda^2, \quad r^4 = -c\lambda^2(e\lambda^2 + a)/ab.$$

As raízes do polinômio característico  $P(s)$  são  $s = \epsilon, -\epsilon, i\delta, -i\delta$ , onde

$$\epsilon = 1/2\sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{(g^4 + 4r^4)}}, \quad \delta = \sqrt{(g^2 + \epsilon^2)};$$

Assim

$$g^2 = \delta^2 - \epsilon^2, \quad r^4 = \delta^2 \epsilon^2. \quad (5.54)$$

Utilizando a base de Euler ou a transformada de Laplace, segue que a solução do problema de valor inicial (5.51) é dada por

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{a b (\epsilon^2 + \delta^2) \epsilon \delta} \quad (5.55)$$

Por simples iteração, os seguintes valores matriciais de (5.51) são obtidos

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 - c\lambda^2 b}{a^2 b} & 0 \\ 0 & \frac{e\lambda^2}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} bh''(x) - (e\lambda^2 + a)h(x) & ah'(x) \\ -ah'(x) & ah''(x) - h(x)c\lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

## 5.4 Valor Crítico da Frequência

Para frequências naturais  $\lambda = i\omega$ , a natureza das raízes

$$\lambda_{1,2} = \pm\epsilon \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm\delta i,$$

do polinômio

$$p(s) = ab(s^4 + g^2(\lambda)s^2 - r^4(\lambda)),$$

depende do valor de  $\omega$ . As raízes  $\lambda_{1,2}$  podem ser reais ou imaginárias conforme o valor de  $\epsilon$ . Observe que  $\epsilon$  é real se e somente se  $r^4 \geq 0$ , isto é, se e somente se  $a - e\omega^2 \leq 0$ . Para  $r^4 < 0$  ou, equivalentemente,  $a - e\omega^2 > 0$  tem-se que  $\epsilon$  é puramente imaginário, isto é,  $\epsilon = i\varepsilon$  com  $\varepsilon$  real não-negativo. Em ambos os casos, a expressão  $g^4 + 4r^4$  resulta real não-negativa para qualquer  $\omega$  real. Daí que as raízes  $\lambda_{3,4}$  são sempre imaginárias puras para  $\omega$  real. O caso  $\epsilon$  real ou puramente imaginário pode ser caracterizado com a introdução da frequência crítica

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a}{e}} = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}}. \quad (5.57)$$

Tem-se que  $\epsilon$  é real para  $\omega \leq \omega_c$  e puramente imaginário para  $\omega > \omega_c$ .

Assim, a solução (5.55) reescrita abaixo

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta}$$

é real para  $\omega < \omega_c$ , ou seja,  $\epsilon$  real. Quando  $\omega > \omega_c$ , que corresponde ao caso de  $\epsilon = i\varepsilon$  ser puramente imaginário, das relações trigonométricas  $\cosh(ix) = \cos(x)$ ,  $\sinh(ix) = i \sin(x)$ , decorre que

$$h(x) = \frac{\varepsilon \sin(\delta x) - \delta \sin(\varepsilon x)}{ab(\varepsilon^2 - \delta^2)\varepsilon\delta}. \quad (5.58)$$

O caso  $\omega = \omega_c$  ou  $\epsilon = 0$ , pode ser tratado através de limite em (5.58). Neste caso, decorre que

$$h(x) = \frac{\delta x - \sin(\delta x)}{ab\delta^3}. \quad (5.59)$$

A figura abaixo apresenta o comportamento da função  $h(x)$  para valores da frequência  $\omega$  abaixo, acima e igual à frequência crítica  $\omega_c$ . Para a simulação foi considerada uma viga de Timoshenko livre-livre.

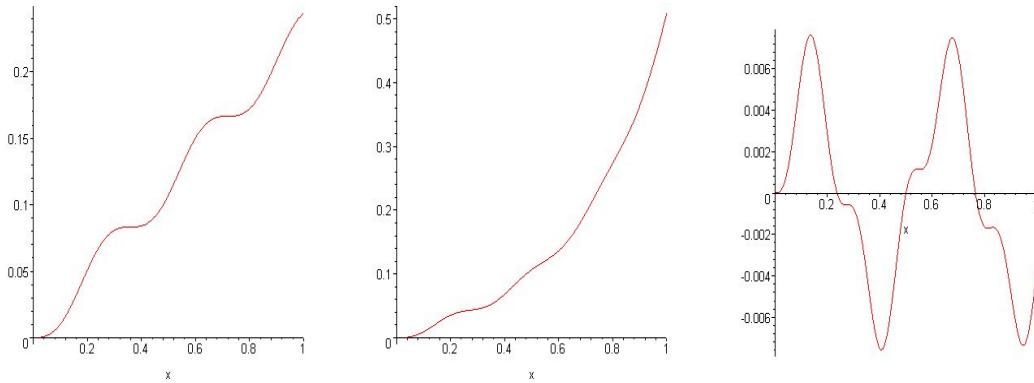


Figura 5.1 Função  $h(x)$  para os casos de  $\omega < \omega_c$ ,  $\omega = \omega_c$  e  $\omega > \omega_c$ , respectivamente.

(a)  $\omega = 130$  rad/s, (b)  $\omega = 170.5$  rad/s, (c)  $\omega = 280$  rad/s

## 5.5 Autovalores Duplos

Foi considerado na subseção 4.1.3.1 que se  $\mathcal{A}$  é uma matriz não-singular, então a equação característica é dada por (5.47), reescrita a seguir,

$$\Delta(L) = \det(\mathbf{D}) = 0,$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz  $2 \times 2$  definida por (5.48), ou seja,

$$\mathbf{D} = [\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})].$$

Para um autovalor, o espaço nulo da matriz  $\mathbf{D}$  de ordem  $2 \times 2$  deverá ter dimensão igual a 1 (um) ou, no máximo, igual a dois. Ou seja, podem existir um ou dois vetores solução  $\dot{\Phi}(0)$  que são linearmente independentes. No segundo caso, a nulidade deve ser igual a dois e, pelo teorema do posto, a matriz  $\mathbf{D}$  deve anular-se. Diz-se que um autovalor é *duplo* quando a nulidade da matriz  $\mathbf{D}$  é igual a dois, isto é, o autovalor corresponde a uma raiz dupla da equação característica (5.47).

A seguir, o estudo de autovalores duplos será considerado para o caso de uma viga de Timoshenko livre-livre. Foi também estudada a existência de autovalores duplos para o caso de uma viga de Timoshenko fixa-fixa, porém este caso será investigado mais profundamente em um trabalho futuro.

### 5.5.1 Viga Livre-Livre

A existência de autovalores duplos para uma viga livre-livre foi discutido em [36] para o caso  $\omega > \omega_c$  com uso da base espectral em cada uma das duas equações que decorrem do desacoplamento do modelo de Timoshenko. Com a metodologia da base fundamental, será mostrado que não existe necessidade de tal desacoplamento. O sistema de autovalor resultante é  $2 \times 2$  ao invés de  $4 \times 4$ . Além disso, a existência de autovalores duplos está relacionada aos zeros da função escalar  $h(x)$ .

Para uma viga com extremos livres, tem-se as condições de contorno

$$-\kappa GA \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \psi \right) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.60)$$

em  $x = 0$  e  $x = L$ .

Matricialmente,

$$\mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\Phi'(0) = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

$$\mathcal{A}\Phi(L) + \mathcal{B}\Phi'(L) = \mathbf{0},$$

onde  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  denotam as matrizes

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para facilitar o estudo do modelo de Timoshenko não forçado, considere a adimensionalização sugerida por Huang em [44],

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{L}, & b^2 &= \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega^2, \\ s^2 &= \frac{EI}{\kappa G A L^2}, & r^2 &= \frac{I}{A L^2},\end{aligned}\tag{5.62}$$

onde  $b$  é um número proporcional às frequências de vibração,  $s^2$  é inversamente proporcional à rigidez de cisalhamento, e  $r^2$  é proporcional à inércia rotacional.

Utilizando (5.62), a equação matricial na forma adimensional é dada por

$$\mathcal{M}\Phi''(\xi) + \mathcal{C}\Phi'(\xi) + \mathcal{K}\Phi(\xi) = 0,\tag{5.63}$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Ls^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} b^2 s^2 & 0 \\ 0 & -L(1 - b^2 r^2 s^2) \end{bmatrix}.\tag{5.64}$$

**Teorema 5.1.** *A solução do problema de valor inicial matricial*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\mathbf{h}''(\xi) + \mathcal{C}\mathbf{h}'(\xi) + \mathcal{K}(b)\mathbf{h}(\xi) &= 0 \\ \mathbf{h}(0) &= \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  são conforme definidos em (5.64), é dada por

$$\mathbf{h}(\xi) = \begin{bmatrix} Ls^2 h''(\xi) - L(1 - b^2 r^2 s^2)h(\xi) & Lh'(\xi) \\ -h'(\xi) & h''(\xi) + b^2 s^2 h(\xi) \end{bmatrix},\tag{5.65}$$

onde  $h(\xi)$  é a solução do problema de valor inicial

$$Ls^2 h^{iv}(\xi) + Lb^2 s^2 (r^2 + s^2) h''(\xi) - Lb^2 s^2 (1 - b^2 r^2 s^2) h(\xi) = 0,\tag{5.66}$$



$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad Ls^2 h'''(0) = 1.$$

*Demonstração.* Seguindo o processo da seção anterior, tem-se

$$\begin{aligned} P(s) &= \det [s^2 \mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K}] \\ &= Ls^2 \lambda^4 + Ls^2 b^2 (r^2 + s^2) \lambda^2 - Ls^2 b^2 (1 - b^2 r^2 s^2), \end{aligned} \quad (5.67)$$

$h(\xi)$  é a solução do problema de valor inicial escalar construído a partir do polinômio  $P(s)$ , ou seja,

$$Ls^2 h^{iv}(\xi) + Lb^2 s^2 (r^2 + s^2) h''(\xi) - Lb^2 s^2 (1 - b^2 r^2 s^2) h(\xi) = 0,$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad Ls^2 h'''(0) = 1,$$

e a matriz  $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}^{(j)}(0)$  satisfaz o problema de valor inicial discreto

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{h}_{j+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{j+1} + \mathcal{K}(b)\mathbf{h}_j &= 0, \\ \mathcal{M}\mathbf{h}_1 &= I, \quad \mathbf{h}_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Por recursão de (5.69), tem-se  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{h}_1 = \mathcal{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{h}_2 = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\mathcal{M}^{-1}$  e  $\mathbf{h}_3 = \mathcal{M}^{-1}[(\mathcal{C}\mathcal{M}^{-1})^2 - \mathcal{K}\mathcal{M}^{-1}]$ . O resultado segue pela substituição destes últimos em (5.65).  $\square$

**Corolário 5.1.** *Tem-se*

$$\mathbf{h}_0(\xi) = \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}(\xi)\mathcal{C} = \begin{bmatrix} Ls^2(h'''(\xi) + b^2 r^2 h'(\xi)) & L^2(1 - b^2 r^2 s^2) h(\xi) \\ b^2 s^2 h(\xi) & L s^2 h'''(\xi) + L(b^2 s^4 + 1)h'(\xi) \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$\mathbf{h}'_0(\xi) = \mathbf{h}''(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{C} = -\mathbf{h}(\xi)\mathcal{K} \quad (5.70)$$

$$\mathbf{h}'_1(\xi) = \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{M}. \quad (5.71)$$

e

$$\mathbf{h}_1(\xi) = \mathbf{h}(\xi)\mathcal{M} = \begin{bmatrix} L s^2 h''(\xi) - L(1 - b^2 r^2 s^2)h(\xi) & L^2 s^2 h'(\xi) \\ -h'(\xi) & L s^2 (h''(\xi) + s^2 h(\xi)) \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

*Demonstração.* Segue por simples substituição. Para a segunda relação, usa-se o fato que  $\mathbf{h}(\xi)$  é solução à direita e à esquerda [23] de

$$\mathcal{M}\mathbf{h}''(\xi) + \mathcal{C}\mathbf{h}'(\xi) + \mathcal{K}\mathbf{h}(\xi) = \mathbf{h}''(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{C} + \mathbf{h}(\xi)\mathcal{K} = 0.$$

□

Para uma viga com extremos livres, as autofunções são soluções não triviais da equação diferencial matricial de segunda ordem completa (5.63), a qual satisfaz as condições de contorno nos extremos  $\xi = 0$  e  $\xi = 1$

$$A\Psi(0) + B\Psi'(0) = \mathbf{0} \quad (5.73)$$

$$A\Psi(1) + B\Psi'(1) = \mathbf{0}. \quad (5.74)$$

Aqui (') denota diferenciação com respeito a  $\xi$ ,  $\Psi(\xi) = \Phi(L\xi) = \Phi(x)$ , e  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  foram introduzidas em (5.64).

Na forma adimensional, as condições de contorno (5.60) são reescritas seguindo [13] como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Assuma que as autofunções  $\Psi(\xi)$  são da forma

$$\Phi(x) = \mathbf{h}_0(x)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(x)\dot{\Phi}(0).$$

Substituindo-se a expressão anterior em (5.73), segue que

$$\dot{\Phi}(0) = -\mathbf{A}\Phi(0). \quad (5.76)$$

Assim,  $\Phi(\xi) = (\mathbf{h}_0(\xi, b) - \mathbf{h}_1(\xi, b)\mathbf{A})\Phi(0)$ , onde tem-se enfatizado a dependência sobre o parâmetro associado com a frequência natural. Como  $\Phi(\xi)$  deve satisfazer a outra condição de contorno (5.74), segue que deve-se encontrar um valor  $b$  tal que  $\Phi(0)$  seja um vetor solução não-nulo do sistema algébrico

$$\mathbf{D}(b)\Phi(0) = 0, \quad (5.77)$$

onde

$$\mathbf{D}(b) = \mathbf{A}\mathbf{h}_0(1) - \mathbf{A}\mathbf{h}_1(1)\mathbf{A} + \mathbf{h}'_0(1) - \mathbf{h}'_1(1)\mathbf{A}. \quad (5.78)$$

Tem-se uma solução não-nula de (5.77) se e apenas se  $b$  é uma raiz da equação característica

$$\Delta(b) = \det(\mathbf{D}(b)) = 0.$$

Substituindo-se valores em  $\mathbf{D}(b)$  e utilizando (5.66), obtém-se que

$$\mathbf{D}(b) = \begin{bmatrix} -Lb^2s^4(h''(1) + b^2r^2h(1)) & -L^2b^2s^4h'(1) \\ b^2s^2h'(1) & Lb^2s^2((1 - b^2r^2s^2)h(1) - r^2h''(1)) \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \Delta(b) = & -L^2r^2b^6s^6(1 - b^2s^2r^2)h(1)^2 - L^2b^4s^6(1 - b^2s^2r^2 - b^2r^4)h''(1)h(1) \\ & + b^4s^6L^2r^2h''(1)^2 + b^4s^6L^2h'(1)^2. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Tem-se que  $\lambda = i\omega$ , onde

$$\omega^2 = (EIL^4/\rho A)b^2,$$

é um autovalor de (5.20) se e apenas se  $b$  é uma raiz de (5.80). Equivalentemente, tem-se que  $b$  corresponde a um autovalor se e somente se  $\text{Posto}(D(b)) < 2$ . É claro que  $\lambda$  será um autovalor simples quando  $\text{Posto}(D(b)) = 1$ . Para isto, é necessário que  $h'(1) \neq 0$ . Um autovalor duplo existe apenas quando  $\text{Posto}(D(b)) = 0$ . Este último permite requerer que a derivada de (5.80) anule-se em  $b$ . Ao invés de se estudar a equação característica altamente não linear  $\Delta(b) = 0$ , tem-se uma caracterização de autovalores duplos em termos de funções escalares  $h(\xi, b)$ .

**Teorema 5.2.** *Seja  $h(\xi, b)$  uma solução do problema de valor inicial*

$$h^{(iv)}(\xi) + g^2h''(\xi) - R^4h(\xi) = 0 \quad (5.81)$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad Ls^2h'''(0) = 1 \quad (5.82)$$

onde

$$g^2 = b^2(r^2 + s^2), \quad (5.83)$$

$$R^4 = b^2(1 - b^2r^2s^2). \quad (5.84)$$

e  $b$ ,  $r$  e  $s$  como em (5.62). Então uma viga uniforme do tipo Timoshenko com extremos livres terá um autovalor duplo se e somente se  $b$  é tal que  $h(\xi, b) = 0$  tem uma raiz de ao menos terceira ordem em  $\xi = 1$  a menos que  $b$  satisfaça  $1 - b^2 s^2 r^2 + b^2 r^4 = 0$ .

*Demonstração.* Um autovalor duplo ocorre se e somente se todas as componentes da matriz  $\mathbf{D}(b)$  são simultaneamente nulas. Se  $b$  é tal que  $h(1) = 0$ ,  $h'(0) = 0$ ,  $h''(1) = 0$ , então  $\text{Posto}(D) = 0$  e existirá um autovalor duplo. É evidente que  $b = 0$  sempre corresponderá a um autovalor duplo. Portanto, assumamos que  $b$  é diferente de zero e que corresponde a um autovalor duplo. Isto significa que deve-se ter  $h'(1) = 0$ ,  $h''(1) = -r^2 h(1)$  e  $r^2 h''(1) = (1 - b^2 r^2 s^2) h(1)$ . Das duas últimas equações, obtém-se que  $h(1) = 0$ ,  $h''(1) = 0$  a menos que  $b$  satisfaça  $1 - b^2 r^2 s^2 + b^2 r^4 = 0$ .  $\square$

**Corolário 5.2.** [36] Um autovalor  $\lambda = i\omega$  de (5.20) com  $\omega > \omega_c$  será duplo se e apenas se existirem inteiros  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $\delta = k_1\pi$ ,  $\epsilon = 2k_2\pi + \delta$ . Neste caso, as frequências naturais serão dadas por  $\omega^2 = EIb^2/\rho AL^4$ , onde

$$b^2 = \pi^4 \left[ \chi((k_1 + k_2)^2 + k_2^2)^2 - ((k_1 + k_2)^2 - k_2^2)^2 \right]. \quad (5.85)$$

Aqui  $\mu = \frac{E}{\kappa G} = \frac{s^2}{r^2}$  e  $\chi = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}$ . Equivalentemente,

$$r^2 = \frac{\frac{2}{(1+\mu)\pi^2}}{\left( (k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right) \left( \chi - \frac{\left( (k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2}{\left( (k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2} \right)}; \quad (5.86)$$

*Demonstração.* A primeira parte segue do Teorema 5.1 sendo que para  $\omega > \omega_c$ , a solução  $h(\xi)$  é dada por

$$h(\xi) = \frac{\epsilon \sinh(\delta\xi) - \delta \sinh(\epsilon\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} = \frac{\epsilon \sin(\delta\xi) - \delta \sin(\epsilon\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 - \delta^2)\epsilon\delta}. \quad (5.87)$$

Aqui

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{g^4 + 4R^4}}, \quad \delta = \sqrt{g^2 + \epsilon^2} \quad (5.88)$$

são as raízes do polinômio característico  $P(z) = Ls^2(z^4 + g^2z^2 - R^4)$  de (5.66) [19] e, para o caso considerado,  $\epsilon = i\varepsilon$  com  $\varepsilon$  real. O valor de  $b^2$  segue de

$$\epsilon^2 + \delta^2 = b^2(r^2 + s^2), \quad \epsilon^2\delta^2 = b^2(b^2r^2s^2 - 1) \quad (5.89)$$

$$b^2 = \mu \frac{(\delta^2 + \epsilon^2)^2}{(1 + \mu)^2} - \epsilon^2\delta^2, \quad r^2 = \frac{\delta^2 + \epsilon^2}{(1 + \mu)^2 b^2}. \quad (5.90)$$

□

## 5.6 A Resposta Forçada pelo Método Espectral: sistema acoplado de Timoshenko

Considere-se o modelo de Timoshenko

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F},$$

e suponha-se que

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \mathbf{w}_n(x), \quad \mathbf{F}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mathbf{M} \mathbf{w}_n(x), \quad (5.91)$$

onde

$$v_n(t) = \int_0^L \mathbf{w}_n^T(\xi) \mathbf{v}(t, \xi) d\xi, \quad (5.92)$$

$$F_n(t) = \int_0^1 \mathbf{w}_n^T(\xi) \mathbf{F}(t, \xi) d\xi. \quad (5.93)$$

No que segue, será assumido que é válida a propriedade dos modos normais,

$$\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{M}\mathbf{w}_n \rangle = \delta_{nm} \quad (5.94)$$

$$\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{K}\mathbf{w}_n \rangle = \delta_{nm}\omega_n^2 \quad (5.95)$$

onde  $(-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$ .

Substituindo em  $\mathbf{M}\mathbf{v}'' + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}$  e aplicando a propriedade acima, decorre

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{v}_n(t) + \omega_n^2 v_n(t)] \mathbf{w}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mathbf{w}_n(x). \quad (5.96)$$

Assim, para cada  $n$  deve-se ter

$$\ddot{v}_n(t) + \omega_n^2 v_n(t) = F_n(t). \quad (5.97)$$

Tem-se que

$$v_n(t) = \dot{h}_n(t)v_n(0) + h_n(t)\dot{v}_n(0) \quad (5.98)$$

onde

$$h_n(t) = \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}. \quad (5.99)$$

Assim,

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( v_n(0) \cos(\omega_n t) + \dot{v}_n(0) \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \right) \mathbf{w}_n(x) \quad (5.100)$$

Por outro lado, supondo  $v(0, x) = 0$ , tem-se a resposta forçada

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^L h(t, x, \xi) M \dot{v}_0(\xi) d\xi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \dot{v}_n(0) \mathbf{w}_n(x) \quad (5.101)$$

sendo

$$\dot{v}_n(0) = \int_0^1 \mathbf{w}_n^T \mathbf{M} \dot{v}(0, \xi) d\xi \quad (5.102)$$

e

$$F_m(t) = \int_0^1 \mathbf{w}_m^T F(t, x) dx. \quad (5.103)$$

Decorre que

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \mathbf{w}_n(x) \mathbf{w}_n^T(\xi). \quad (5.104)$$

Como a função de transferência vem a ser a transformada de Laplace de  $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ , tem-se que

$$\mathbf{H}(s, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \mathbf{w}_n(x) \mathbf{w}_n^T(\xi). \quad (5.105)$$

## 5.7 A Resposta Forçada na equação de Timoshenko

A equação de Timoshenko (2.45), reescrita a seguir

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{EI} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f,$$

pode ser escrita de maneira compacta

$$\sum_{j=0}^4 A_j \frac{\partial^{4-j} u}{\partial t^{4-j}}(t, x) = f(t, x), \quad (5.106)$$



onde

$$A_0 = \alpha^2 \zeta^2, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

com

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{\kappa G}, \quad \zeta^2 = \frac{\rho}{E}, \quad \beta^2 = \frac{\rho A}{EI}.$$

Para as condições iniciais nulas

$$u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(0, x) = 0, \quad (5.107)$$

tem-se a resposta forçada

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (5.108)$$

onde  $h(t, x, \xi)$  é a função de Green de valor inicial associada à equação de Timoshenko.

De forma compacta,

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (5.109)$$

onde

$$\mathbf{h}(t) \Phi(x) = \int_0^L \mathbf{h}(t, x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad (5.110)$$

e  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, x)$ , uma função em  $x$  para cada tempo arbitrário porém fixo.

Suponha-se que  $\{\mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t), \mathbf{h}''(t), \mathbf{h}'''(t)\}$ , onde

$$\mathbf{h}^{(j)}(t) \phi(x) = \int_0^L \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t, x, \xi) \phi(\xi) d\xi, \quad j = 1 : 3, \quad (5.111)$$

forma uma base de soluções da equação homogênea. Pelo princípio da superposição linear, a solução pode ser também escrita como  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p$  onde  $\mathbf{u}_h$  é uma solução homogênea e  $\mathbf{u}_p$  é uma solução particular ou permanente. Assim,

$$\int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j)}(t) a_j + \mathbf{u}_p(t), \quad (5.112)$$

sendo  $a_j$  funções de variável espacial a serem determinadas a partir das condições iniciais nulas de  $\mathbf{u}(t)$  em  $t = 0$ . Tem-se, então, o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j)}(0) a_j + \mathbf{u}_p(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j+1)}(0) a_j + \mathbf{u}_p'(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j+2)}(0) a_j + \mathbf{u}_p''(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j+3)}(0) a_j + \mathbf{u}_p'''(0). \end{array} \right. \quad (5.113)$$

Decorre,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = -A_4 \mathbf{u}_p(0) \\ a_2 = -A_3 \mathbf{u}_p(0) - A_4 \mathbf{u}_p'(0) \\ a_1 = -A_2 \mathbf{u}_p(0) - A_3 \mathbf{u}_p'(0) - A_4 \mathbf{u}_p''(0) \\ a_0 = -A_1 \mathbf{u}_p(0) - A_2 \mathbf{u}_p'(0) - A_3 \mathbf{u}_p''(0) - A_4 \mathbf{u}_p'''(0) \end{array} \right. \quad (5.114)$$

ou de maneira compacta

$$a_j = - \sum_{k=1}^{4-j} A_{k+j} \mathbf{u}_p^{(k-1)}(0, x), \quad \text{para } j = 0 : 3. \quad (5.115)$$

A solução homogênea é dada, então, na forma evolutiva

$$\mathbf{u}_h(t) = - \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j)}(t) \sum_{k=1}^{4-j} A_{k+j} \mathbf{u}_p^{(k-1)}(0) = - \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{4-j} \mathbf{h}^{(k-1)}(t) A_{k+j} \mathbf{u}_p^{(j)}(0). \quad (5.116)$$

Tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(t) = & - \mathbf{h}(t)[A_2 u_p'(0, x) + A_4 u_p'''(0, x)] + \\ & - \mathbf{h}(t)' [A_2 u_p(0, x) + A_4 u_p''(0, x)] + \\ & - \mathbf{h}''(t) A_4 u_p'(0, x) + \\ & - \mathbf{h}'''(t) A_4 u_p(0, x) \end{aligned} \quad (5.117)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(t) = & - \mathbf{h}(t) \left[ \left( \beta^2 - (\alpha^2 + \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_p'(0, x) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_p'''(0, x) \right] + \\ & - \mathbf{h}(t)' \left[ \left( \beta^2 - (\alpha^2 + \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_p(0, x) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_p''(0, x) \right] + \\ & - \mathbf{h}''(t) \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_p'(0, x) + \\ & - \mathbf{h}'''(t) \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_p(0, x). \end{aligned} \quad (5.118)$$

### 5.7.1 Respostas Permanentes e Função de Transferência

Para termos não homogêneos do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t} q(x), \quad (5.119)$$

que podem ser ampliados para incluir, através da propriedade de superposição linear, termos da forma

1.  $f(t, x) = \sum_{j=1}^m A_j e^{\lambda_j t} \delta(x - a_j)$  correspondendo a entradas com dinâmica geral, e
2.  $f(t, x) = \sum_{j=1}^n (A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)) f_j(x)$ ,

podem ser procuradas soluções particulares não homogêneas do mesmo tipo. Substituindo

$$u = e^{\lambda t} X(x)$$

na equação de Timoshenko abaixo

$$\alpha^2 \zeta^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \left( \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e^{\lambda t} q(x), \quad (5.120)$$

decorre a equação

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + g(\lambda)^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - r(\lambda)^4 X(x) = q(x) \quad (5.121)$$

onde

$$g(\lambda)^2 = -(\alpha^2 + \tau^2) \lambda^2, \quad (5.122)$$

$$r(\lambda)^4 = -\alpha^2 \tau^2 \lambda^4 - \beta^2 \lambda^2. \quad (5.123)$$

Supondo condições de contorno, escritas de maneira genérica, como combinações lineares de valores de  $X$  e suas derivadas nos pontos extremos do intervalo  $\Omega = [0, L]$ , isto é,

$$\begin{aligned} B_k X(x) = & \alpha_{0k} X(0) + \alpha_{1k} X'(0) + \alpha_{2k} X''(0) + \alpha_{3k} X'''(0) + \\ & + \beta_{0k} X(L) + \beta_{1k} X'(L) + \beta_{2k} X''(L) + \beta_{3k} X'''(L), \quad k = 1 : 4 \end{aligned} \quad (5.124)$$

a solução é dada por

$$X(x) = \int_{\Omega} H(\lambda, x, \xi) v(\xi) d\xi, \quad (5.125)$$

onde  $\Omega = [0, L]$  e  $H(\lambda, x, \xi)$  denota a *função de Green espacial* ou *função de transferência* associada ao problema de contorno acima.

Tem-se que

$$\mathbb{H}(\lambda)v(x) = \int_{\Omega} H(\lambda, x, \xi)v(\xi)d\xi,$$

define o chamado *operador de transferência*.

Uma discussão sobre a existência e cálculo da função de Green espacial pode ser encontrada em [62], [66] e, sob o enfoque da base dinâmica, em [27]. A função de Green espacial existirá sempre que  $\lambda$  não for um autovalor do sistema, isto é, a única solução do problema homogêneo com  $q(x) = 0$  em (5.121) e (5.124) que satisfaz as condições de contorno é a solução identicamente nula. Além disso pode ser dada de maneira explícita em termos da solução fundamental associada a (5.121), ou seja,  $h = h(x, \lambda)$  tal que

$$h^{(iv)} + g(\lambda)^2 h'' - r(\lambda)^4 h = 0 \quad (5.126)$$

$$h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) = 0, h'''(0) = 1. \quad (5.127)$$

Seja

$$\phi_0(x) = \phi_0(x, \lambda), \phi_1(x) = \phi_1(x, \lambda), \phi_2(x) = \phi_2(x, \lambda), \phi_3(x) = \phi_3(x, \lambda) \quad (5.128)$$

uma base de soluções da equação homogênea

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + g(\lambda)^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - r(\lambda)^4 X(x) = 0. \quad (5.129)$$

Então, a função de transferência  $H(\lambda, x, \xi)$  é calculada através da expressão (pág.91 em [62])

$$H(x, \xi, \lambda) = \frac{\mathcal{H}(x, \xi, \lambda)}{\mathcal{D}(x, \xi, \lambda)}, \quad (5.130)$$

onde

$$\mathcal{H}(x, \xi, \lambda) = \det \begin{bmatrix} g(x, \xi) & \phi_0(x) & \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) \\ B_1(g) & B_1(\phi_0) & B_1(\phi_1) & B_1(\phi_2) & B_1(\phi_3) \\ B_2(g) & B_2(\phi_0) & B_2(\phi_1) & B_2(\phi_2) & B_2(\phi_3) \\ B_3(g) & B_3(\phi_0) & B_3(\phi_1) & B_3(\phi_2) & B_3(\phi_3) \\ B_4(g) & B_4(\phi_0) & B_4(\phi_1) & B_4(\phi_2) & B_4(\phi_3) \end{bmatrix}, \quad (5.131)$$

e

$$\mathcal{D}(x, \xi) = \det \begin{bmatrix} B_1(\phi_0) & B_1(\phi_1) & B_1(\phi_2) & B_1(\phi_3) \\ B_2(\phi_0) & B_2(\phi_1) & B_2(\phi_2) & B_2(\phi_3) \\ B_3(\phi_0) & B_3(\phi_1) & B_3(\phi_2) & B_3(\phi_3) \\ B_4(\phi_0) & B_4(\phi_1) & B_4(\phi_2) & B_4(\phi_3) \end{bmatrix}. \quad (5.132)$$

Aqui

$$g(x, \xi) = g(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}h(x - \xi, \lambda), & \xi < x \\ -\frac{1}{2}h(x - \xi, \lambda), & x < \xi \end{cases} \quad (5.133)$$

Quando escolhem-se como base as funções

$$\begin{aligned}
 h_0(x) &= g^2 h'(x) - r^4 h'''(x) \\
 h_1(x) &= g^2 h(x) - r^4 h''(x) \\
 h_2(x) &= -r^4 h'(x) \\
 h_3(x) &= -r^4 h(x),
 \end{aligned} \tag{5.134}$$

mostra-se em [66] que

$$g(x, \xi) = \frac{-Q(x, \xi)}{2W(s, \xi)}, \tag{5.135}$$

onde

$$Q(x, \xi) = \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \dot{h}_2(\xi) & \dot{h}_3(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}, \tag{5.136}$$

e

$$W(s, \xi) = \det \begin{bmatrix} h_0^{(3)}(\xi) & h_1^{(3)}(\xi) & h_2^{(3)}(\xi) & h_3^{(3)}(\xi) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \dot{h}_2(\xi) & \dot{h}_3(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}. \tag{5.137}$$

Uma expressão para  $g(x, \xi)$  pode ser obtida quando a base dinâmica é escrita em termos da base espectral. Suponha-se que

$$h(x) = \frac{\delta \operatorname{senh}(\epsilon x) - \epsilon \operatorname{sen}(\delta x)}{\epsilon \delta (\epsilon^2 + \delta^2)}, \tag{5.138}$$

onde

$$\epsilon^2 = \epsilon^2(\lambda) = \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}} - \frac{g^2}{2} \tag{5.139}$$

$$\delta^2 = \delta^2(\lambda) = \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}} + \frac{g^2}{2} = g^2 + \epsilon^2. \tag{5.140}$$

Aqui esses valores são tais que

$$s_1 = \epsilon, s_2 = -\epsilon, s_3 = i\delta, s_4 = -i\delta \quad (5.141)$$

vem a ser as raízes da equação característica de (5.129)

$$s^4 + g(\lambda)^2 s^2 - r(\lambda)^4 = 0. \quad (5.142)$$

Decorre que

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\delta \sinh(\epsilon(\xi - x)) - \epsilon \sin(\delta(\xi - x))}{\delta \epsilon (\delta^2 + \epsilon^2)}, & \xi < x \\ -\frac{1}{2} \frac{\delta \sinh(\epsilon(x - \xi)) - \epsilon \sin(\delta(x - \xi))}{\delta \epsilon (\delta^2 + \epsilon^2)}, & x < \xi. \end{cases} \quad (5.143)$$

## 5.7.2 Função de Green espacial

Neste caso tem-se as seguintes condições de contorno

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0; \quad X'(L) = 0, \quad X'''(L) = 0.$$

Utilizando a base normalizada (5.134), obtém-se que

$$\mathcal{H}(x, \xi, \lambda) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h(-\xi) & g^2h'(x) + h'''(x) & g^2h(x) + h''(x) & h'(x) & h(x) \\ \frac{1}{2}h(-\xi) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}h''(-\xi) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}h'(L - \xi) & r^4h(L) & g^2h'(L) + h'''(L) & h''(L) & h'(L) \\ \frac{1}{2}h'''(L - \xi) & r^4h''(L) & r^4h'(L) & -g^2h''(L) + r^4h(L) & h'''(L) \end{bmatrix} \quad (5.144)$$



$$\begin{aligned}
&= h(\xi) [\chi_0 h(x) + \chi_1 h'(x) + \chi_2 h''(x) + \chi_3 h'''(x)] + \\
&\quad + h''(\xi) [\chi_2 h(x) + \chi_3 h'(x) + \chi_4 h''(x)] + \\
&\quad + h(x)\chi_5 + h''(x)\chi_6 + h(\xi - x)\chi_7.
\end{aligned} \tag{5.145}$$

Aqui,

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= \frac{1}{2}r^4 [h(L)h'''(L)g^2 + h''(L)h'''(L) - r^2h(L)h'(L)] \\
\chi_1 &= -\frac{1}{2}g^2 [g^2h'''(L)h'(L) - (h'''(L))^2 + r^4(h'(L))^2] \\
\chi_2 &= \frac{1}{2}r^4 [h(L)h'''(L) - h''(L)h'(L)] \\
\chi_3 &= -\frac{1}{2} [h'''(L)g^2h'(L) - (h'''(L))^2 + r^4(h'(L))^2] \\
\chi_4 &= \frac{1}{2} [h''(L)h'''(L) + h'(L)g^2h''(L) - h'(L)r^4h(L)] \\
\chi_5 &= \frac{1}{2} [h'''(L)h'''(\xi - L) - r^4h'(L)h'(\xi - L) + g^2h'(\xi - L)h'''(L)] \\
\chi_6 &= -\frac{1}{2} [h'(L)h'''(\xi - L) + h'(\xi - L)h'''(L)] \\
\chi_7 &= -\frac{1}{2} [h'''(L)g^2h'(L) - (h'''(L))^2 + r^4(h'(L))^2].
\end{aligned} \tag{5.146}$$

Entretanto, para calcular o determinante  $\mathcal{D}(x, \xi, \lambda)$  observa-se que este corresponde ao bloco formado pela segunda à quinta linhas e colunas da matriz  $\mathcal{H}(x, \xi, \lambda)$ .

Decorre

$$\mathcal{D} = -g^2h'(L)h'''(L) - (h'''(L))^2 + r^4(h'(L))^2. \tag{5.147}$$

Assim, calculando-se a função de transferência a partir da expressão (5.130), e substituindo os valores de  $h(\cdot)$  e suas derivadas segundo (5.138), obtém-se

$$\mathcal{H}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\frac{1 - \operatorname{senh}(\epsilon(\xi - L - x)) + \operatorname{senh}(\epsilon(\xi - L + x))}{2 \epsilon (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cosh}(\epsilon)} + \\ + \frac{1 \operatorname{sen}(\delta(\xi - L - x)) - \operatorname{sen}(\delta(\xi - L + x))}{2 \delta (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cos}(\delta)}, & x < \xi \\ \frac{1 - \operatorname{senh}(\epsilon(\xi + L - x)) - \operatorname{senh}(\epsilon(\xi - L + x))}{2 \epsilon (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cosh}(\epsilon)} \\ + \frac{1 \operatorname{sen}(\delta(\xi + L - x)) + \operatorname{sen}(\delta(\xi - L + x))}{2 \delta (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cos}(\delta)}, & \xi < x \end{cases} \quad (5.148)$$

Utilizando a relação trigonométrica

$$\operatorname{senh}(A + B) - \operatorname{senh}(A - B) = 2\operatorname{senh}(B)\operatorname{cosh}(A),$$

com  $A = \epsilon\xi$  e  $B = \epsilon(L - \xi)$ , resulta

$$\mathcal{H}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{cosh}(\epsilon(\xi - L)) \operatorname{senh}(\epsilon x)}{\epsilon (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cosh}(\epsilon L)} + \frac{\operatorname{cos}(\delta(L - \xi)) \operatorname{sen}(\delta x)}{\delta (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cos}(\delta L)} & x < \xi \\ -\frac{\operatorname{senh}(\epsilon\xi) \operatorname{cosh}(\epsilon(L - x))}{\epsilon (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cosh}(\epsilon L)} + \frac{\operatorname{sen}(\delta\xi) \operatorname{cos}(\delta(L - x))}{\delta (\delta^2 + \epsilon^2) \operatorname{cos}(\delta L)} & \xi < x. \end{cases} \quad (5.149)$$

### 5.7.3 Autovalores e Autofunções

A procura de soluções exponenciais

$$u(t, x) = e^{\lambda t} X(x), \quad (5.150)$$

da equação de Timoshenko

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{EI} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} u = 0,$$

ou,

$$\alpha^2 \zeta^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \left( \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (5.151)$$

equivale a resolver o problema de contorno

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + g(\lambda)^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - r(\lambda)^4 X(x) = 0 \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} B_k X(x) = & \alpha_{0k} X(0) + \alpha_{1k} X'(0) + \alpha_{2k} X''(0) + \alpha_{3k} X'''(0) + \\ & + \beta_{0k} X(L) + \beta_{1k} X'(L) + \beta_{2k} X''(L) + \beta_{3k} X'''(L), \quad k = 1 : 4 \end{aligned} \quad (5.153)$$

onde

$$\begin{aligned} g(\lambda)^2 &= -(\alpha^2 + \tau^2)\lambda^2, \\ r(\lambda)^4 &= -\alpha^2 \tau^2 \lambda^4 - \beta^2 \lambda^2. \end{aligned}$$

Os autovalores  $\lambda$  e autofunções  $X(x)$  podem ser determinados com respeito a uma base qualquer de soluções de  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$  da equação (5.152). Introduzindo a matriz com valores da base de soluções

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) \\ \frac{d}{dx} \phi_1(0) & \frac{d}{dx} \phi_2(0) & \frac{d}{dx} \phi_3(0) & \frac{d}{dx} \phi_4(0) \\ \frac{d^2}{dx^2} \phi_1(0) & \frac{d^2}{dx^2} \phi_2(0) & \frac{d^2}{dx^2} \phi_3(0) & \frac{d^2}{dx^2} \phi_4(0) \\ \frac{d^3}{dx^3} \phi_1(0) & \frac{d^3}{dx^3} \phi_2(0) & \frac{d^3}{dx^3} \phi_3(0) & \frac{d^3}{dx^3} \phi_4(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) \\ \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(L) & \frac{\partial}{\partial x} \phi_2(L) & \frac{\partial}{\partial x} \phi_3(L) & \frac{\partial}{\partial x} \phi_4(L) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_1(L) & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_2(L) & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_3(L) & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_4(L) \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi_1(L) & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi_2(L) & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi_3(L) & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi_4(L) \end{bmatrix}$$

e a matriz com os coeficientes das condições de contorno tem-se que as condições de contorno podem ser representadas matricialmente na forma

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \alpha_{03} & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \alpha_{04} & \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \end{bmatrix}. \quad (5.154)$$

Deve-se determinar soluções  $\mathbf{c}$  de ordem  $8 \times 1$  não-nulas da equação

$$\mathcal{U}(\lambda)\mathbf{c} = 0, \quad \mathcal{U} = B\Phi, \quad (5.155)$$

isto é, para cada  $\lambda$  que é raiz da equação característica

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{U}(\lambda)) = 0. \quad (5.156)$$

A dependência da matriz  $\mathcal{U}$  sobre o parâmetro  $\lambda$  é sempre através da matriz  $\Phi$  e/ou condições de contorno não-clássicas.

#### 5.7.4 Base Dinâmica

A determinação de autovalores e das autofunções pode ser feita com o uso da base dinâmica

$$\phi_1(x) = h(x), \quad \phi_2(x) = h'(x), \quad \phi_3(x) = h''(x), \quad \phi_4(x) = h'''(x) \quad (5.157)$$

ou da base dinâmica normalizada

$$\phi_1(x) = h_o(x), \quad \phi_2(x) = h_1(x), \quad \phi_3(x) = h_2(x), \quad \phi_4(x) = h_3(x) \quad (5.158)$$

onde  $h(x)$  é solução do problema de valor inicial

$$h^{(iv)}(x) + g(\lambda)^2 h''(x) - r(\lambda)^4 h(x) = 0 \quad (5.159)$$

$$h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) = 0, h'''(0) = 1. \quad (5.160)$$

Da seção anterior, tem-se

$$h(x) = \frac{\delta \operatorname{senh}(\epsilon x) - \epsilon \operatorname{sen}(\delta x)}{\epsilon \delta (\epsilon^2 + \delta^2)}, \quad (5.161)$$

onde

$$\epsilon^2 = \epsilon^2(\lambda) = \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}} - \frac{g^2}{2} \quad (5.162)$$

$$\delta^2 = \delta^2(\lambda) = \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}} + \frac{g^2}{2} = g^2 + \epsilon^2. \quad (5.163)$$

Aqui esses valores são tais que

$$s_1 = \epsilon, s_2 = -\epsilon, s_3 = i\delta, s_4 = -i\delta \quad (5.164)$$

vêm a ser as raízes da equação característica de (5.152)

$$s^4 + g(\lambda)^2 s^2 - r(\lambda)^4 = 0. \quad (5.165)$$

Substituindo a forma espectral de Euler para  $h(x)$  na equação característica (5.156) e levando em conta (5.162), resulta uma equação característica que depende de  $\delta$  ou  $\epsilon$ . Quando as raízes desta nova equação são determinadas em termos desses parâmetros, os autovalores  $\lambda$  podem ser obtidos ao substituí-los numa das relações em (5.162). Em particular, segue que

$$\alpha^2 \tau^2 \lambda^4 + (\delta^2 \alpha^2 + \delta^2 \tau^2 + \beta^2) \lambda^2 + \delta^4 = 0. \quad (5.166)$$

Assim, para cada valor de  $\delta$ , tem-se quatro autovalores associados. Eles podem ser todos reais, dois pares de complexos conjugados ou, dois reais e um par de complexos conjugados. Ainda pode-se ter autovalores que são reais ou complexos repetidos.

O *espectro duplo* mencionado em Collar-Nash-Trail [?], acontece quando existem dois pares de autovalores puramente imaginários que possuem a mesma forma de autofunção. Já *autovalor duplo* conforme estudado por MacLaughlin [36], refere-se a um autovalor repetido, podendo ou não existir duas autofunções associadas com o autovalor que sejam linearmente independentes.

### 5.7.5 A Resposta Forçada pelo Método Espectral

Obtém-se aqui uma expressão para a resposta impulso com o uso do método espectral, conforme [82]. A seguir, suponha-se que os autovalores são frequências naturais ( $\lambda = i\omega$ ) e que as autofunções correspondentes a frequências diferentes são ortogonais.

Considere-se a equação de Timoshenko dada em (5.151), ou seja,

$$\alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \beta^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x),$$

sujeita às condições iniciais

$$u(0, x) = v_0(x), \quad u_t(0, x) = v_1(x), \quad (5.167)$$

$$u_{tt}(0, x) = v_2(x) \quad e \quad u_{ttt}(0, x) = v_3(x) \quad (5.168)$$

e condições de contorno clássicas.

Para a carga  $f(t, x)$  expandida espectralmente, tem-se

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad (5.169)$$

com

$$f_n(t) = \frac{\int_0^L f(t, x) X_n dx}{\int_0^L X_n^2 dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.170)$$

onde  $X_n(x)$  denota o  $n$ -ésimo modo relativo às condições de contorno dadas e fixas do problema. Escreve-se a solução da equação (5.151) da mesma forma, isto é,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \quad (5.171)$$

que não é outra coisa senão uma forma de variação de parâmetros.

Substituindo (5.171) e (5.169) em (5.151) obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha^2 \tau^2 u_n^{(iv)}(t) X_n(x) + \left( \beta^2 X_n(x) - (\alpha^2 + \tau^2) X_n''(x) \right) u_n''(t) + u_n(t) X_n^{(iv)}(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) X_n(x). \quad (5.172)$$

Utilizando-se  $X_n(x)$  como base de autofunções, considera-se para  $X_n''(x)$  a seguinte expansão

$$X_n''(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} X_r(x),$$

com

$$a_{rn} = \frac{\int_0^L X_n'' X_r dx}{\int_0^L X_r^2 dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.173)$$

Da equação modal (5.152) tem-se

$$X_n^{(iv)}(x) = -g_n^2 X_n''(x) + K_n^4 X_n(x), \quad (5.174)$$

onde

$$\begin{aligned} g_n^2 &= (\alpha^2 + \tau^2) \omega_n^2, \\ r_n^4 &= (\beta^2 \omega_n^2 - \alpha^2 \tau^2 \omega_n^4) \end{aligned}$$

para cada frequência  $\omega_n$  da equação característica (5.156).

Aplicando a ortogonalidade dos modos, conforme [68], e substituindo (5.173) e (5.174) em (5.172) resulta

$$\alpha^2 \tau^2 u_n^{(iv)}(t) + [\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) a_{nn}] u_n''(t) + [-g_n^2 a_{nn} + K_n^4] u_n(t) = f_n(t), \quad (5.175)$$

cuja solução é, por [16], equivalente a

$$u_n(t) = h_{n,0}(t)u_n(0) + h_{n,1}(t)u_n'(0) + h_{n,2}(t)u_n''(0) + h_{n,3}(t)u_n'''(0) + \int_0^t h_{n,3}(t-s)f_n(s)ds, \quad (5.176)$$

onde

$$[h_{n,0}(t) \quad h_{n,1}(t) \quad h_{n,2}(t) \quad h_{n,3}(t)] = [h_n(t) \quad \dot{h}_n(t) \quad \ddot{h}_n(t) \quad \dddot{h}_n(t)] \begin{bmatrix} 0 & \gamma_n^2 & 0 & 1 \\ \gamma_n^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.177)$$

Com  $h_n(t) = h_{n,3}(t)$ , a resposta impulso da equação (5.174) é dada por

$$h_n(t) = \frac{s_n \operatorname{senh}(q_n t) - q_n \operatorname{sen}(s_n t)}{s_n q_n (s_n^2 + q_n^2)}, \quad (5.178)$$

sendo

$$s_n = \sqrt{\gamma_n^2 + q_n^2}, \quad (5.179)$$

$$q_n = \left[ \left( g_n^2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} - r_n^4 + \frac{\gamma_n^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_n^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.180)$$

$$\gamma_n^2 = \frac{\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) a_{nn}}{\alpha^2 \tau^2}. \quad (5.181)$$

Com as condições iniciais do problema dadas por (5.167) e (5.168), tem-se

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} v_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(j)}(0) X_n(x), \quad j = 0, \dots, 3 \quad (5.182)$$



e, pela ortogonalidade dos modos,

$$u_n^{(j)}(0) = \frac{\int_0^L v_j(\xi) X_n(\xi) d\xi}{\|X_n\|^2}. \quad (5.183)$$

Substituindo (5.176) na expressão (5.171) e trocando-se a ordem dos somatórios resulta

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^3 \int_0^L h_j(t, x, \xi) v_j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (5.184)$$

onde

$$h_j(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} h_{nj}(t) \quad (5.185)$$

com

$$h_{n3}(t) = h_n(t), \quad (5.186)$$

$$h_{n2}(t) = h'_n(t), \quad (5.187)$$

$$h_{n1}(t) = \gamma_n^2 h_n(t) + h''_n(t), \quad (5.188)$$

$$h_{n0}(t) = \gamma_n^2 h'_n(t) + h'''_n(t). \quad (5.189)$$

Assim, na forma evolutiva

$$u(t)(x) = h_0(t)v_0(x) + h_1(t)v_1(x) + h_2(t)v_2(x) + h_3(t)v_3(x) + \int_0^t h_3(t - \tau)f(\tau)d\tau \quad (5.190)$$

com

$$h_j(t)\phi(x) = \int_0^L h_j(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (5.191)$$

sendo que  $h_j(t, x, \xi)$  é dado por (5.185).

A resposta forçada, que corresponde a condições iniciais nulas, vem a ser dada por

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau \quad (5.192)$$

onde

$$h(t, x, \xi) = h_3(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} h_n(t). \quad (5.193)$$

No domínio frequência, tem-se

$$U(s, x) = \mathcal{L}[h(t, x)] = \int_0^L H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi \quad (5.194)$$

com

$$H(s, x, \xi) = \mathcal{L}[h(t, x, \xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} \mathcal{L}(h_n(t)). \quad (5.195)$$

Decorre que

$$H(s, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(s) \quad (5.196)$$

sendo

$$\sigma_n(s) = \frac{1}{(s^2 - q_n^2)(s^2 + s_n^2)} \quad (5.197)$$

com  $s_n$  e  $q_n$  dados por (5.179) e (5.180), respectivamente.

## 5.8 Viga Apoiada-Deslizante

Considere-se o movimento de uma viga apoiada-deslizante de comprimento  $L$  descrita pelo modelo de Timoshenko acoplado

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa G A \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) \right] = f(t, x)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ E I \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right] - \kappa G A \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = g(t, x)$$

e sujeito as condições de contorno

$$u(t, 0) = 0, \quad \psi_x(t, 0) = 0 \quad (5.198)$$

$$\psi(t, L) = 0, \quad u_x(t, L) - \psi(t, L) = 0 \quad (5.199)$$

Matricialmente, tem-se a matriz formada pelos coeficientes das condições de contorno

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \quad (5.200)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.201)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.202)$$

### 5.8.1 A resposta fundamental na caracterização de autovalores e autofunções

Devido ao tipo de condições de contorno, os autovalores são puramente imaginários e as autofunções correspondentes são funções reais. Assim, os modos de vibração são da forma

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{i\omega t} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} v(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix},$$

com  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$ . Para obter as frequências naturais  $\omega$ , utiliza-se a base dinâmica normalizada, de modo que

$$\mathbf{w}(x) = h_o(x)c_1 + h_1(x)c_2,$$

onde os vetores  $2 \times 1$

$$c_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} \quad (5.203)$$

não ambos identicamente nulos, devem ser determinados a partir das condições de contorno. Formula-se, então, a equação modal  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$  onde  $\mathcal{U} = \mathbb{B}\Phi$  com  $\mathbb{B}$  sendo a matriz formada pelos coeficientes das condições de contorno, e  $\Phi$  a matriz formada pelos valores da base dinâmica normalizada em  $x = 0$  e  $x = L$ . Tem-se

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.204)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ h_o(L) & h_1(L) \\ h_o(L) & h_1(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_{o,11}(L) & h_{o,12}(L) & h_{1,11}(L) & h_{1,12}(L) \\ h_{o,21}(L) & h_{o,22}(L) & h_{1,21}(L) & h_{1,22}(L) \\ h'_{o,11}(L) & h'_{o,12}(L) & h'_{1,11}(L) & h'_{1,12}(L) \\ h'_{o,21}(L) & h'_{o,22}(L) & h'_{1,21}(L) & h'_{1,22}(L) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_{o,21} & h_{o,22} & h_{1,21} & h_{1,22} \\ h'_{o,11} - h_{o,21} & h'_{o,12} - h_{o,22} & h'_{1,11} - h_{1,21} & h'_{1,12} - h_{1,22} \end{bmatrix}, \quad (5.205)$$

onde as componentes de  $\mathcal{U}$  são calculadas em  $x = L$ . Da equação modal  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$ , conclui-se que as componentes  $c_{11}$  e  $c_{22}$  são nulas. Portanto,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.206)$$

Utilizando a base de Euler para  $h(x)$ , isto é

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (5.207)$$

e substituindo valores na equação característica  $\det(\mathcal{U}) = 0$ , obtém-se

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 = (\delta^2 + \epsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\epsilon L) = 0. \quad (5.208)$$

Aqui

$$\delta = \sqrt{\frac{g^2}{2} + \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}}}, \quad \epsilon = \sqrt{-\frac{g^2}{2} + \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}}}$$

onde, para  $\lambda = i\omega$ , tem-se

$$g^2 = (e/b + c/a)\omega^2, \quad r^4 = c\omega^2(-e\omega^2 + a)/ab. \quad (5.209)$$

Decorre que

$$\delta = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.210)$$

Da definição de  $\delta$ , segue

$$\delta^4 - \delta^2 g^2 - r^4 = 0. \quad (5.211)$$

Substituindo os valores  $g^2$  e  $r^4$  em termos de  $\omega$ , as frequências naturais vem a ser as raízes da equação

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \quad (5.212)$$

onde os coeficientes

$$A = ec, \quad B = -(ae + cb)\delta^2 - ac, \quad C = ab\delta^4 \quad (5.213)$$

são calculados para cada  $\delta$  em (5.211). Assim, deve-se obter quatro valores reais para  $\omega$ , sendo dois deles os negativos dos outros dois. Os valores

$$\epsilon^2 = \delta^2 - g^2 \quad (5.214)$$

são calculados após determinadas as frequências.

Determinadas as frequências, segue de (5.205)

$$h'_{o,22}(L)c_{12} + h_{1,21}(L)c_{21} = 0$$

$$(h'_{o,12}(L) - h_{o,22}(L))c_{12} + (h'_{1,11}(L) - h_{1,21}(L))c_{21} = 0.$$

Fazendo,  $c_{12} = 1$ , o valor  $c_{21}$  corresponde ao fator de forma

$$\sigma = -\frac{h'_{o,22}(L, \omega)}{h_{1,21}(L, \omega)} \quad (5.215)$$

para cada frequência natural correspondente ao autovalor  $\lambda = i\omega$ . Assim, as auto-funções são do tipo

$$\mathbf{w}(x) = h_o(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + h_1(x) \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.216)$$

isto é,

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} h_{o,12}(x, \omega) + \sigma(\omega)h'_{1,11}(x, \omega) \\ h_{o,22}(x, \omega) + \sigma(\omega)h'_{1,21}(x, \omega) \end{bmatrix}.$$

Aqui

$$h_o = \begin{bmatrix} -b a \frac{d^3 h(x)}{dx^3} - ae \omega^2 \frac{dh(x)}{dx} & -(a^2 - ae \omega^2)h(x) \\ ac \omega^2 h(x) & -a \frac{d^3 h(x)}{dx^3} - cb \omega^2 \frac{dh(x)}{dx} + a^2 h(x) \end{bmatrix}$$

e

$$h_1 = \begin{bmatrix} -b a \frac{d^2 h(x)}{dx^2} - h(x) + h(x) (a^2 - ae \omega^2) & -a b \frac{dh(x)}{dx} \\ a^2 \frac{dh(x)}{dx} & -a b \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + b c \omega^2 h(x) \end{bmatrix}.$$

A Tabela 5.1 apresenta os valores numéricos para os parâmetros utilizados nas simulações.

$L = 1m$	$E = 2.11 \times 10^{10} N/Kg$
$I = 8.33 \times 10^{-6} Kg m^2$	$\rho = 2.768 \times 10^4 Kg/m^3$
$A = 0.01m^2$	$G = 8.44 \times 10^9 N/m^2$

Tabela 5.1 Valores dos parâmetros físicos utilizados nas simulações do modelo da viga.

Os valores obtidos para as frequências  $\omega$ , para o fator de forma  $\sigma$  em (5.215), e para os parâmetros  $g$  e  $r$ , dados pelas expressões em (5.209), considerando o sistema acoplado de Timoshenko, são apresentados na Tabela 5.2.

Note que na Tabela 5.2, as frequências de vibração estão abaixo da "frequência crítica"  $\omega_c = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}} = 4673.7\text{Hz}$ . Denominar-se-há a estas frequências de vibração abaixo da frequência crítica de "*Primeiras frequências positivas*".

$m$	$(\omega_n)_m$	$\sigma_m$	$g_m$	$r_m$
1	18.511	1.0063	0.02458	0.62514
2	160.60	1.0090	0.21327	1.8414
3	418.29	1.0227	0.55548	2.9715
4	756.34	1.0485	1.0044	3.9952
5	1145.3	1.0784	1.5209	4.9153
6	1564.7	1.1087	2.0778	5.7432
7	2001.7	1.1396	2.6582	6.4931
8	2448.3	1.17158	3.2512	7.1768
9	2900.0	1.2049	3.8509	7.8053
10	3353.4	1.2395	4.4532	8.3864

Tabela 5.2 Valores calculados para os parâmetros  $\omega_n$ ,  $\sigma$ ,  $g$  e  $r$  para as primeiras frequências positivas.

Na Tabela 5.3, são apresentadas as frequências de vibração acima da "frequência crítica". Estas frequências serão denominadas no que segue de "*Segundo conjunto de frequências positivas*" ou simplesmente "*Segundas frequências positivas*".



$m$	$(\omega_n)_m$	$\sigma_m$	$g_m$	$r_m$
1	4696.3	1.3468	6.2366	9.8929
2	4872.1	1.3614	6.4700	10.071
3	5196.1	1.3884	6.9003	10.391
4	5632.2	1.4255	7.4793	10.803
5	6148.5	1.4703	8.1650	11.266
6	6723.0	1.5213	8.9280	11.754
7	7340.2	1.5775	9.7476	12.249
8	7989.3	1.6383	10.609	12.740
9	8663.8	1.7033	11.505	13.220
10	9358.6	1.7724	12.428	13.685

Tabela 5.3 Valores calculados para os parâmetros  $\omega_n$ ,  $\sigma$ ,  $g$  e  $r$  para as segundas frequências positivas.

Nas Figuras 5.2 e 5.3 foram plotados os nove primeiros modos de vibração do sistema, a partir da expressão (5.216), para o deslocamento e giro, respectivamente.

A observação das Figuras 5.2 e 5.3 revela um comportamento oscilatório tanto para a deflexão quanto para o giro. As amplitudes de vibração apresentam bastante variação entre os dois tipos de movimento, sendo que a deflexão apresenta as menores amplitudes.

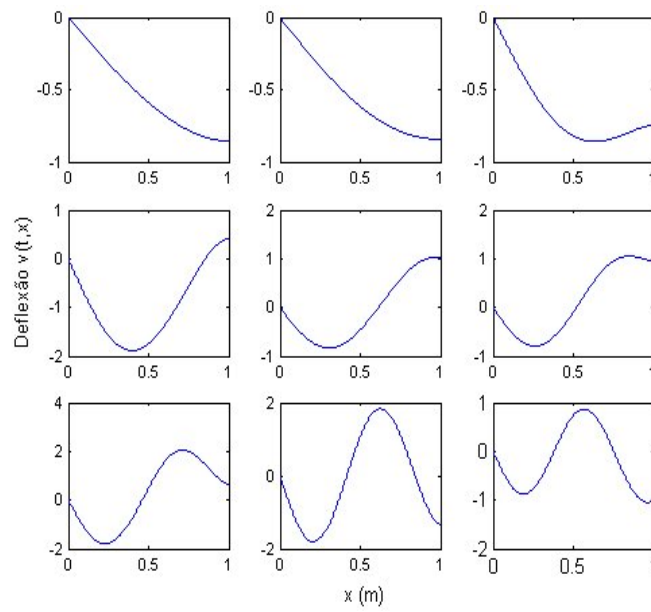


Figura 5.2 Modos para o deslocamento  $v(t, x)$  de uma viga de Timoshenko apoiada-deslizante para as primeiras freqüências positivas.

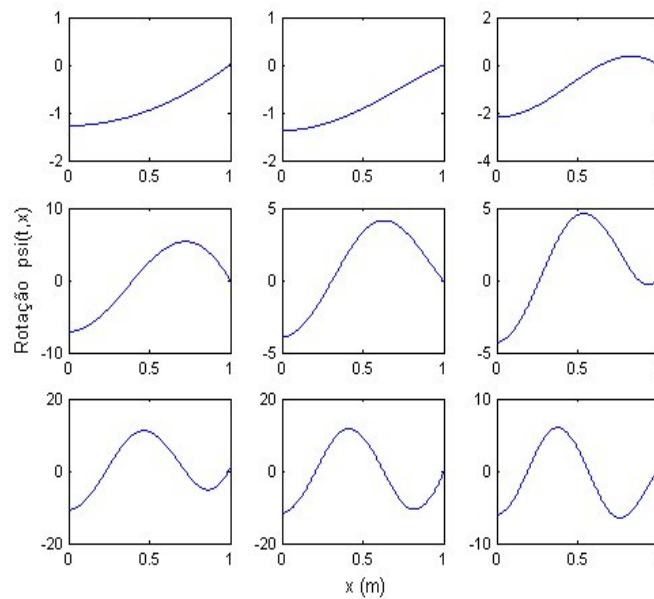


Figura 5.3 Modos para a rotação  $\psi(t, x)$  para as primeiras freqüências positivas.

Note que, na literatura ao se fazer o usual desacoplamento, assume-se que o deslocamento e o giro possuirão exatamente o mesmo comportamento. Este

não é o caso quando mantém-se tanto o sistema de equações quanto as condições de contorno acopladas, conforme pode-se verificar na Figura 5.4.

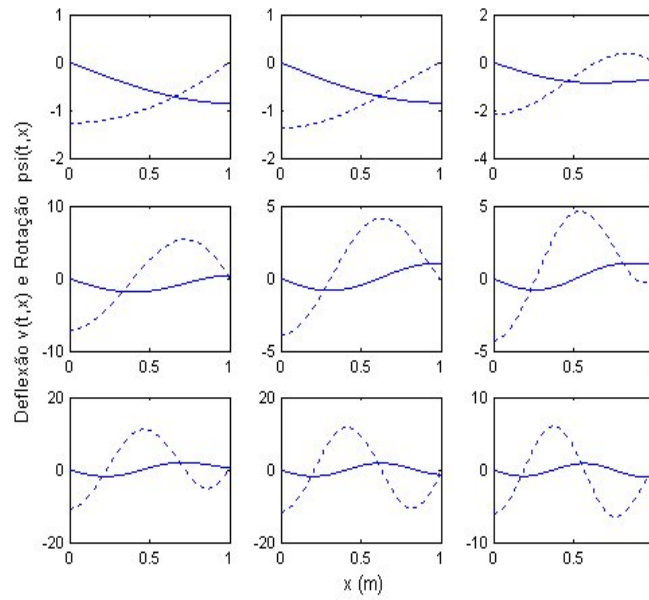


Figura 5.4 Modos para deslocamento (linha contínua) e rotação (linha tracejada) para as primeiras frequências positivas.

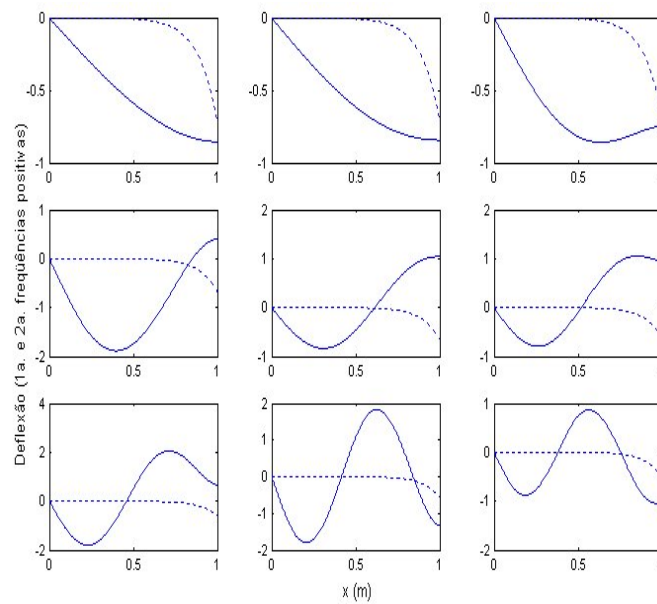


Figura 5.5 Deflexão para as primeiras e segundas frequências positivas.

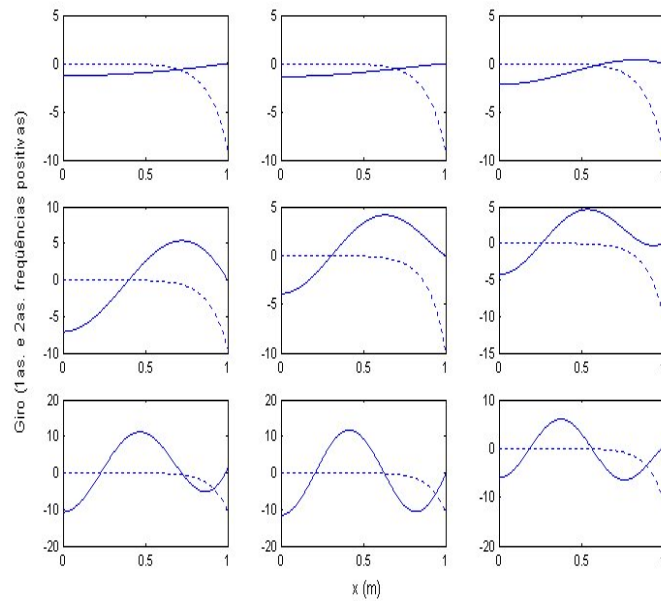


Figura 5.6 Rotação  $v(t, x)$  para as primeiras e segundas frequências positivas.

### 5.8.1.1 Segundo espectro

A discussão acima foi em termos de  $\delta$  uma vez que é imediato obter as raízes (5.211). Por outro lado, soluções para  $\epsilon$  no plano complexo, existem quando a frequência natural  $\omega$  está acima do valor crítico  $\omega_c$  da frequência. Nesta situação,

$$\epsilon = i\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.217)$$

e

$$h(x) = \frac{\varepsilon \sin(\delta x) - \delta \sin(\varepsilon x)}{Ls^2(\varepsilon^2 - \delta^2)\varepsilon\delta}. \quad (5.218)$$

Repetindo o processo anterior com respeito a  $\delta$ , segue que

$$\epsilon^4 + \epsilon^2 g^2 - r^4 = 0. \quad (5.219)$$

Substituindo os valores  $g^2$  e  $r^4$  em termos de  $\omega$ , as frequências naturais vem a ser as raízes da equação

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \quad (5.220)$$

onde os coeficientes

$$A = ec, \quad B = (ae + cb)\epsilon^2 - ac, \quad C = ab\epsilon^2 \quad (5.221)$$

são calculados para cada  $\epsilon$  dado em (5.217). Assim, deve-se obter quatro valores reais para  $\omega$ , sendo dois deles os negativos dos outros dois. Os valores

$$\delta^2 = \epsilon^2 + g^2 \quad (5.222)$$

são calculados após determinadas as frequências.

Para  $\omega > \omega_c$ , tem-se que os modos também são do tipo

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} h_{o,12}(x, \omega) + \sigma(\omega)h'_{1,11}(x, \omega) \\ h_{o,22}(x, \omega) + \sigma(\omega)h'_{1,21}(x, \omega) \end{bmatrix}$$

porém, com  $h(x)$  dado pela expressão (5.218).

Como a equação (5.220) não possui raízes duplas, é claro que os modos dependem de maneira única da frequência, isto é, frequências diferentes correspondem a autofunções diferentes. A denominação de segundo espectro, refere-se ao fato de que com a equação de Timoshenko de quarta ordem isso não é o caso [?]. A mesma conclusão obtida aqui foi obtida por Benaroya et al. em [40] para o caso de viga biapoiada considerando o modelo de Timoshenko de segunda ordem.

## 5.8.2 Decomposição da Resposta Forçada

- **Entrada - Oscilatória no Espaço**

Considere-se a entrada do sistema oscilatória no espaço expressa por

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.223)$$

A função de Green espacial, calculada segundo (5.130), é apresentada na Fig. 5.7.

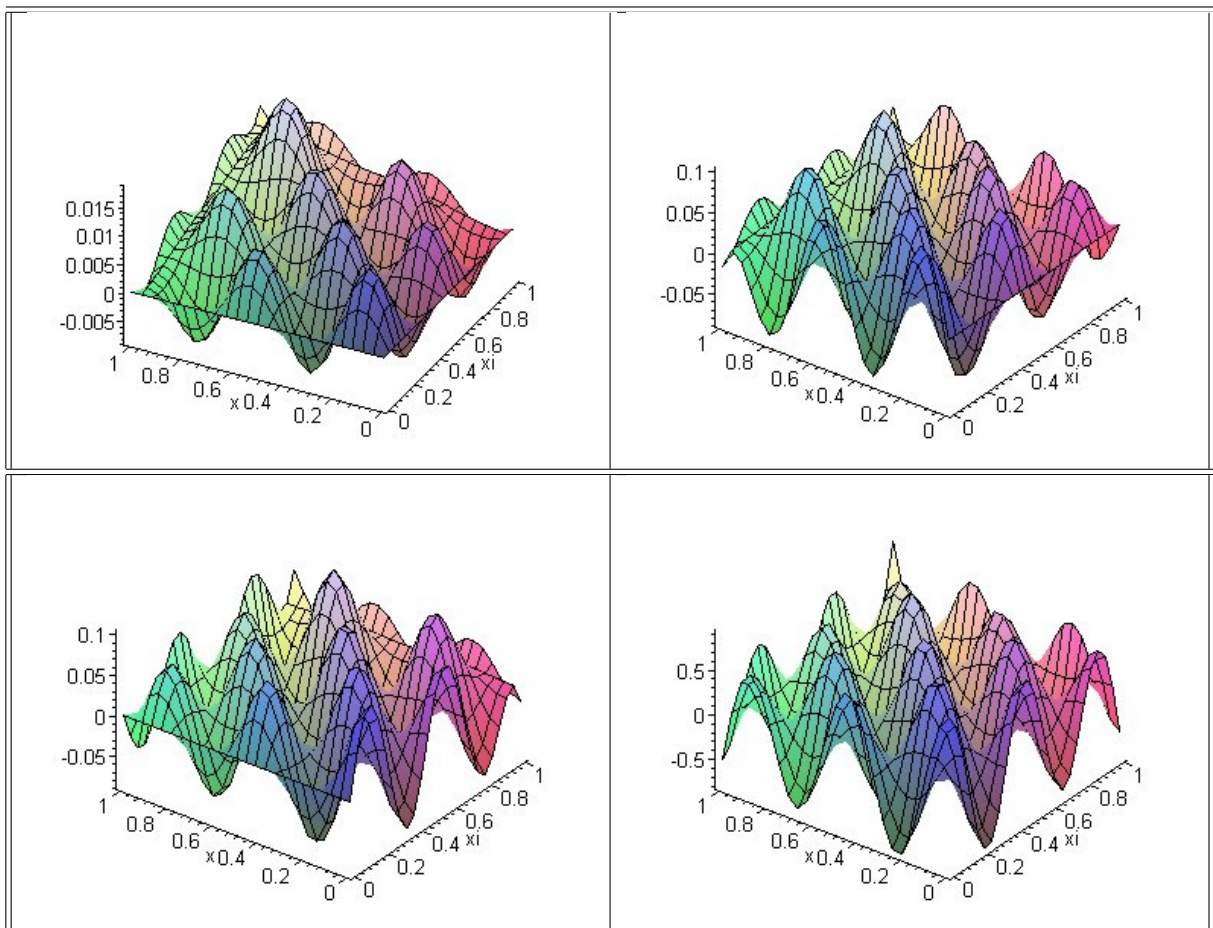
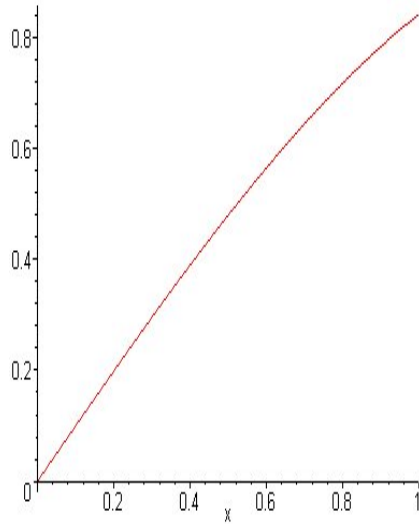
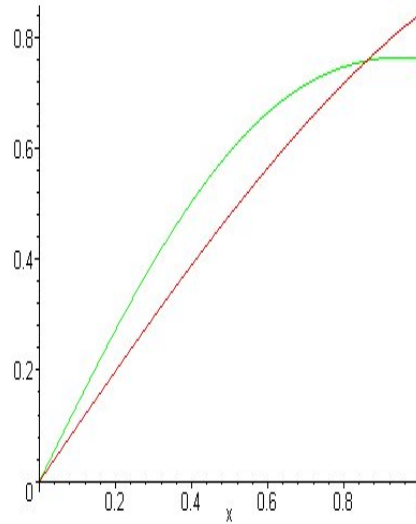


Figura 5.7 Função de Green espacial para cada componente.

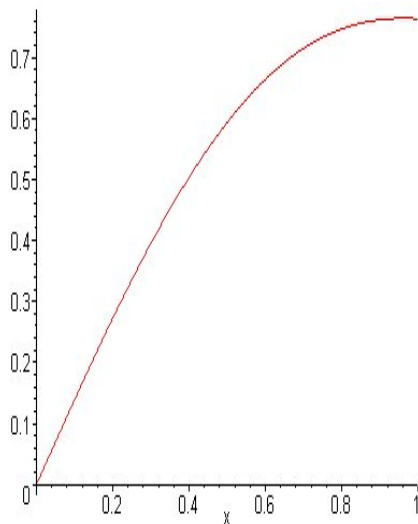
Apresenta-se na Fig. 5.8 a parte espacial da entrada  $f(x)$  e as correspondentes respostas permanentes do sistema.



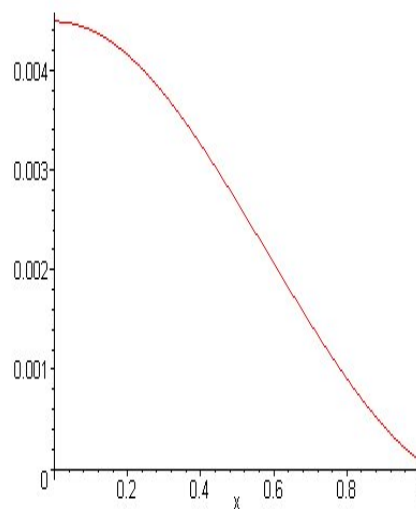
(a) Forçante - parte espacial



(b) Entrada e Primeira Componente da Resposta Permanente



(c) Resposta Permanente - primeira componente



(d) Resposta Permanente - segunda componente

Figura 5.8 Parte espacial correspondentes ao forçante e aos componentes do deslocamento e giro da resposta permanente, respectivamente.

A resposta impulso temporal  $h(t, x, \xi)$  é apresentada nas Tabs. 5.5 e 5.6; sendo que na primeira encontram-se os gráficos que representam o comportamento de cada uma de suas componentes para diferentes tempos fixos e na segunda encontram-se os gráficos que correspondem ao seu comportamento em determinados pontos da viga.

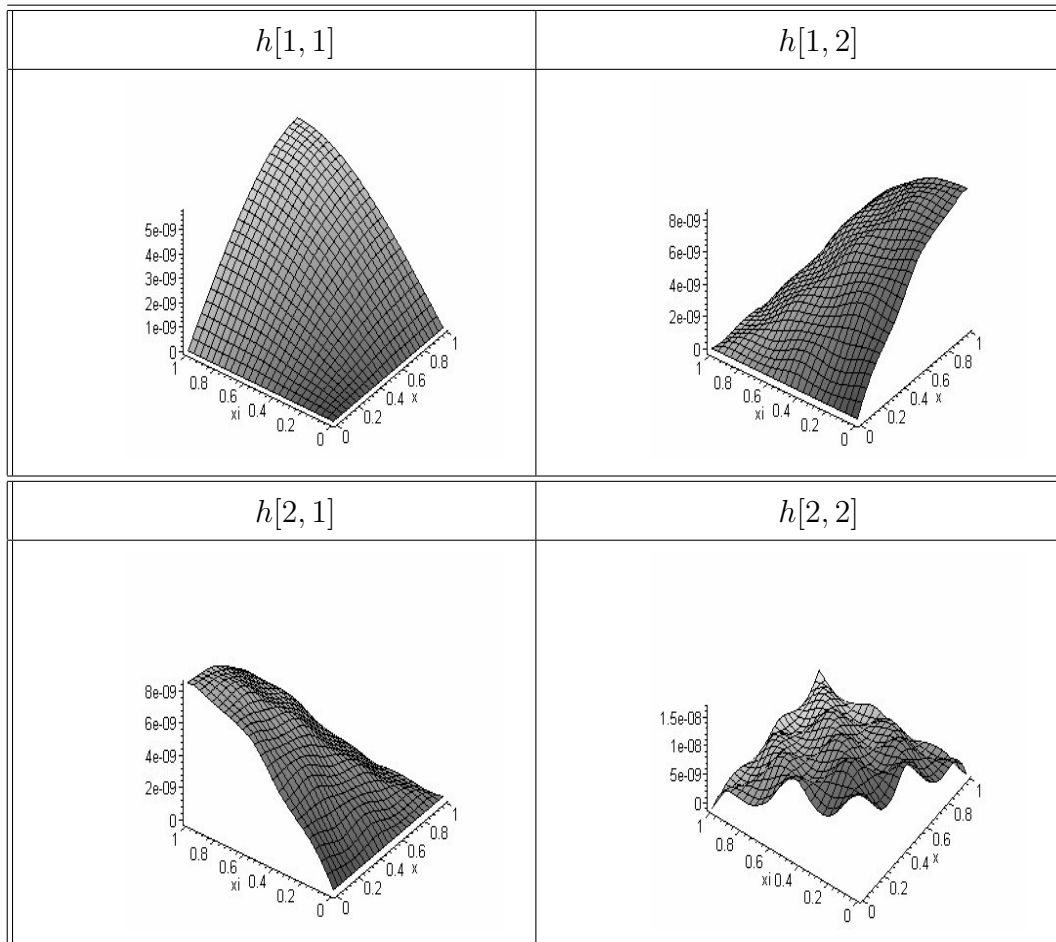


Tabela 5.4 Resposta impulso temporal para as diferentes componentes em  $t = 5s$



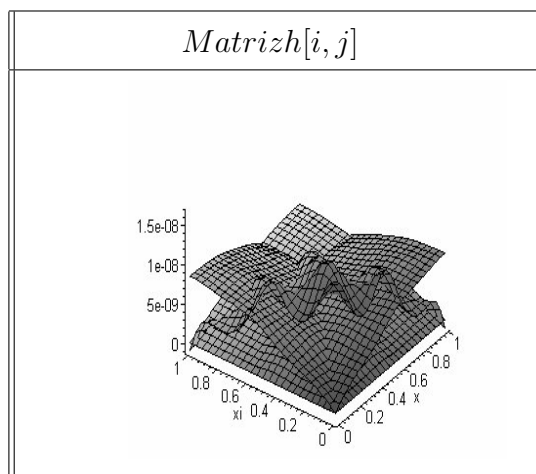


Tabela 5.5 Matriz da resposta impulso temporal em  $t = 5s$

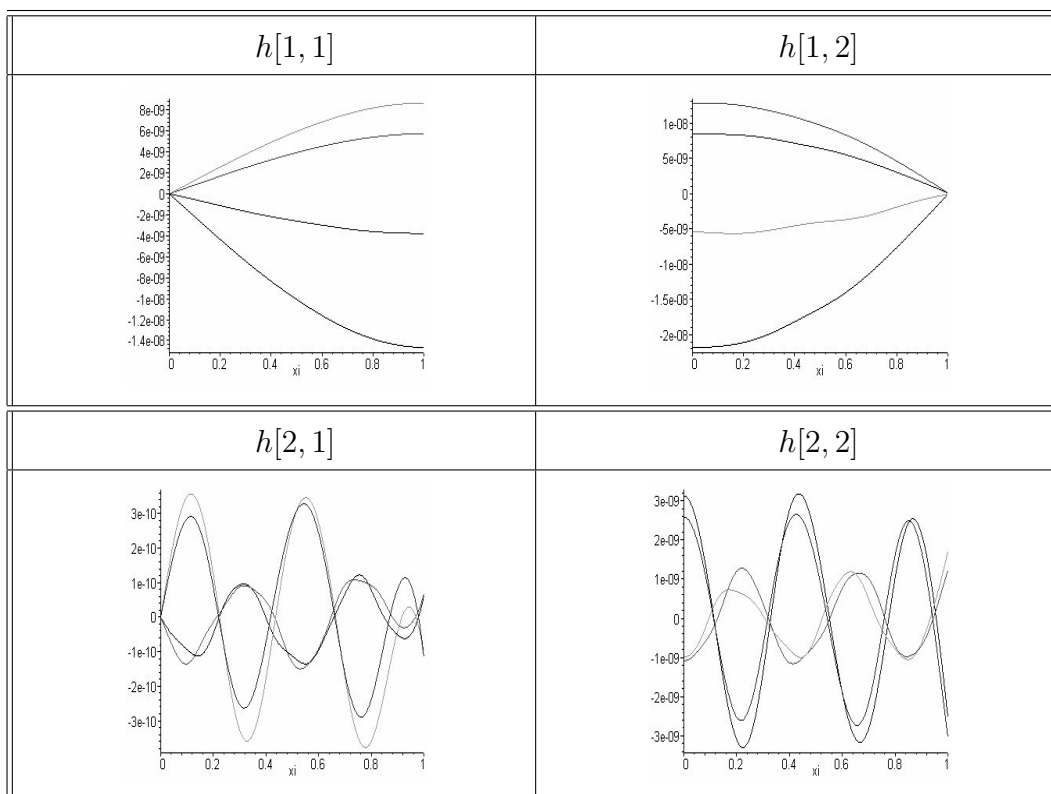


Tabela 5.6 Resposta impulso temporal para as componentes  $h[i, j]$  em  $x = L$ , para os tempos  $t = 5s$  (azul),  $t = 10s$  (verde),  $t = 15s$  (vermelho) e  $t = 20s$  (preto).

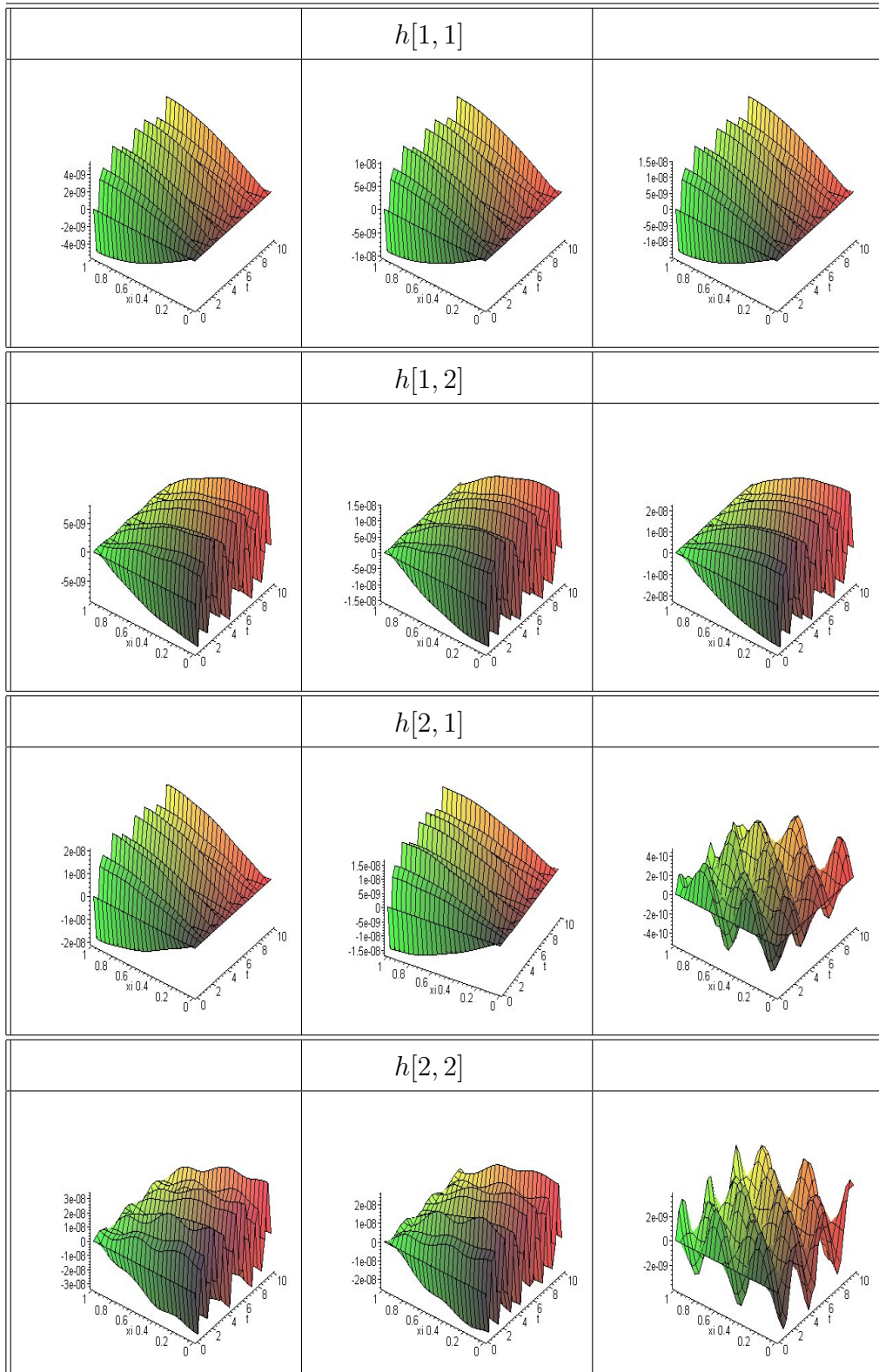


Tabela 5.7 Resposta impulso temporal para as diferentes componentes em  $x = \frac{1}{4}m$ ,  $x = \frac{1}{2}m$  e  $x = 1m$ .

A decomposição da resposta forçada do sistema é apresentada nas Tabs. 5.8 e 5.9 para cada componente.

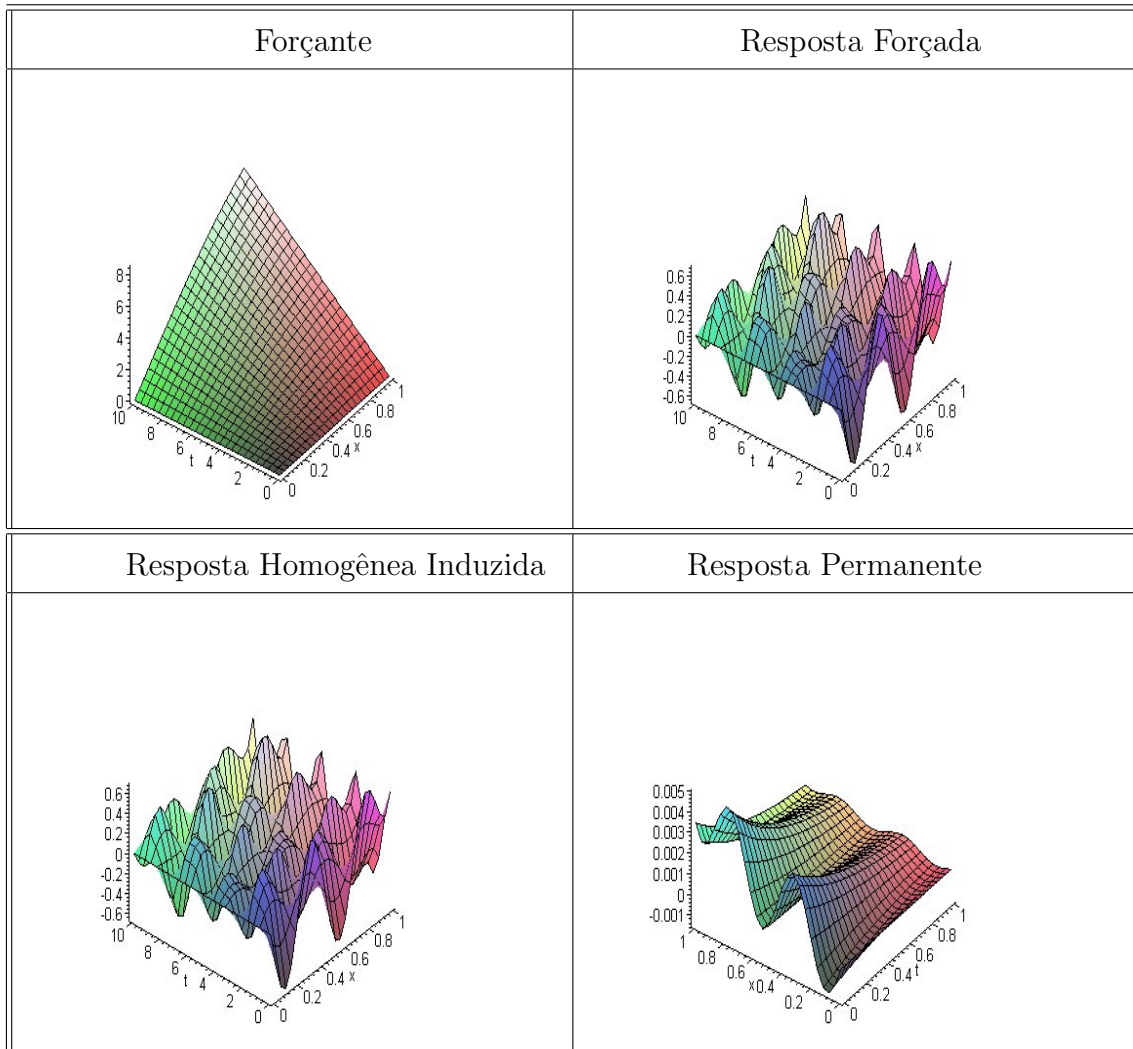


Tabela 5.8 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para o deslocamento.

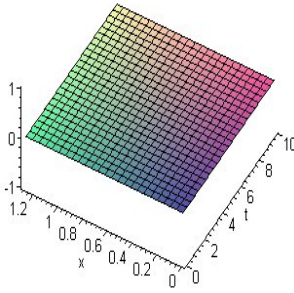
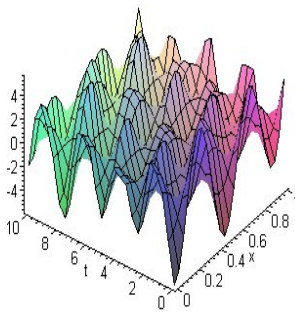
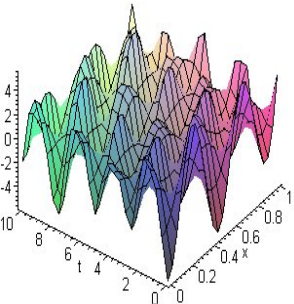
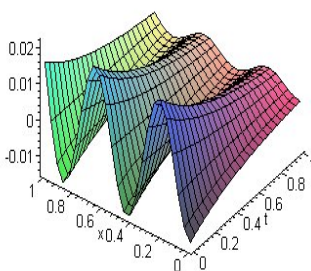
Forçante	Resposta Forçada
	
Resposta Homôgenea Induzida	Resposta Permanente
	

Tabela 5.9 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para o giro.

Na Tab. 5.8.2 são apresentados a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas juntas para o tempo  $t = 1s$ , para o deslocamento e giro, respectivamente.

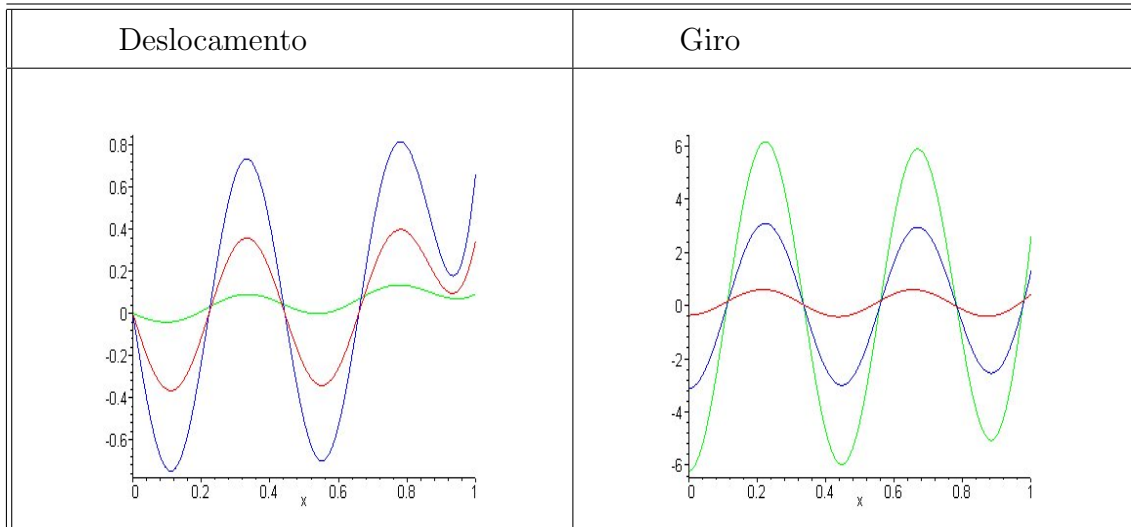


Tabela 5.10 Resposta forçada (azul), homogênea induzida (vermelha) e permanente (verde) para  $t = 1s$ .

- **Entrada - Triangular no Espaço**

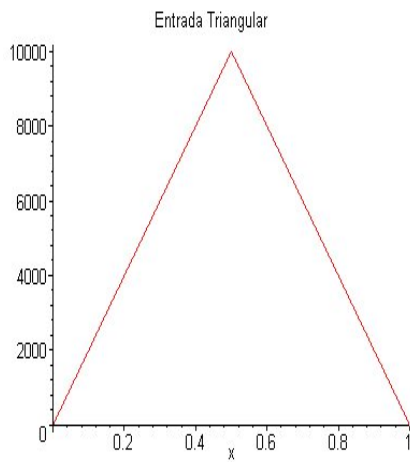
Considere-se a entrada do sistema triangular no espaço expressa por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.224)$$

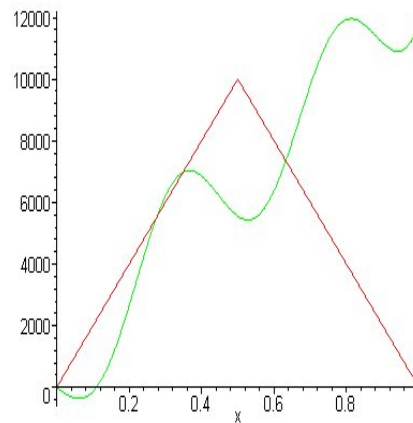
onde

$$F(x) = \begin{cases} 20000x, & 0 < x < 1/2 \\ 20000(1-x), & 1/2 < x < 1 \end{cases}. \quad (5.225)$$

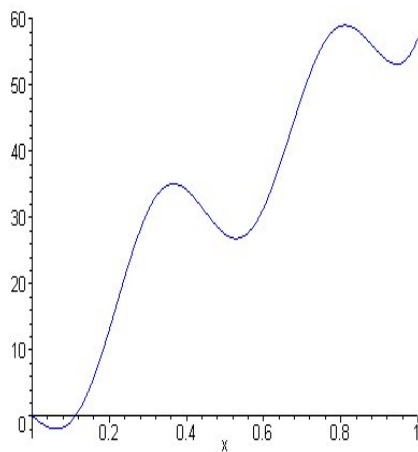
Apresenta-se na Fig. 5.9 a parte espacial da entrada ( $f(x)$ ) e as correspondentes respostas permanentes ( $\phi_j(x)$ ) do sistema.



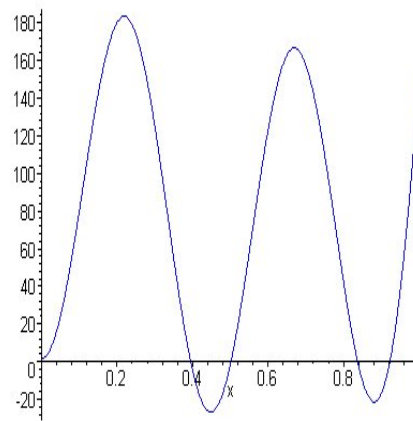
(a) Forçante - parte espacial



(b) Entrada e Primeira Componente da Resposta Permanente



(c) Resposta Permanente - deflexão



(d) Resposta Permanente - rotação

Figura 5.9 Parte espacial correspondentes ao forçante e as respostas permanentes para a deflexão e giro.

A decomposição da resposta forçada do sistema é apresentada nas Tabs. 5.11 e 5.12 para cada componente.

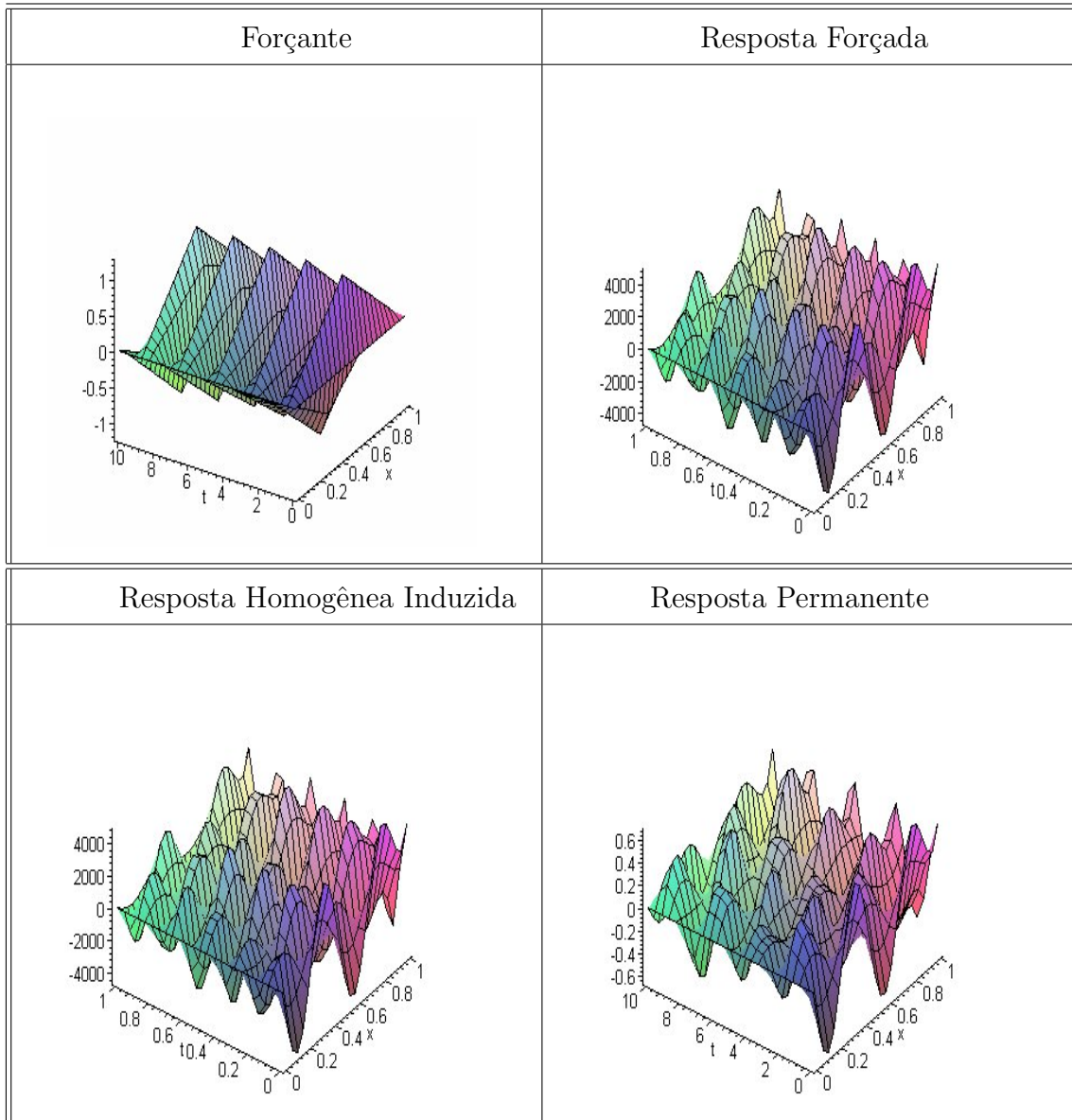


Tabela 5.11 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para o deslocamento.

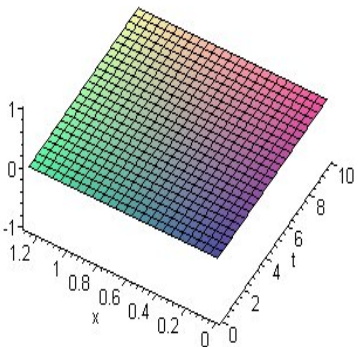
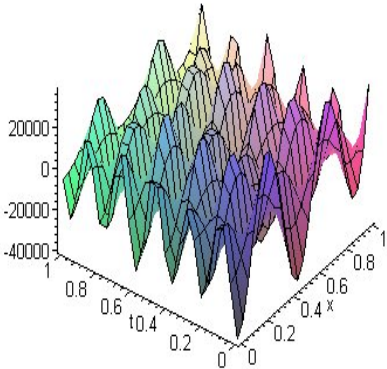
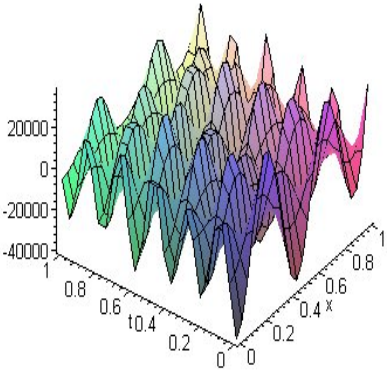
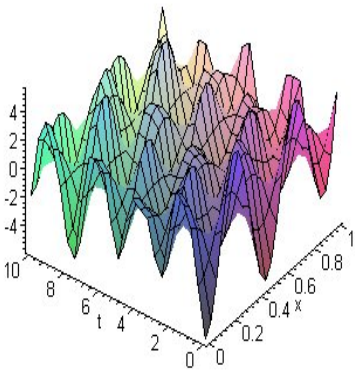
Forçante	Resposta Forçada
	
Resposta Homogênea Induzida	Resposta Permanente
	

Tabela 5.12 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a rotação.

Na Tab. 5.13 são apresentados a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas juntas para o tempo  $t = 1s$ , para as duas componentes.



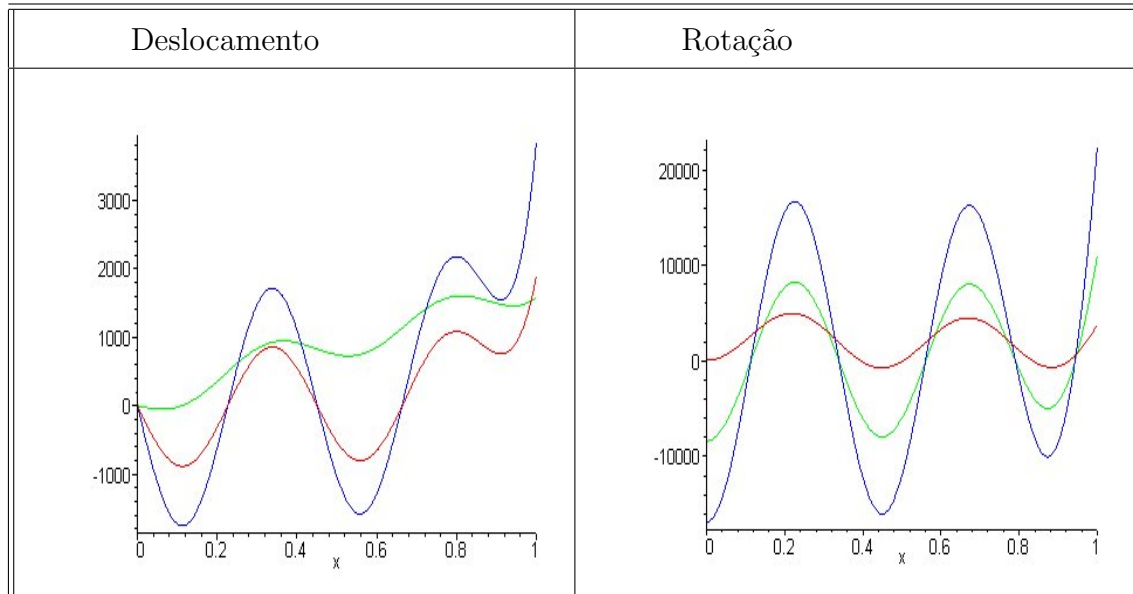


Tabela 5.13 Resposta forçada (azul), homogênea induzida (vermelha) e permanente (verde) para  $t = 1s$ .

## 5.9 O Modelo de Vlasov

Na teoria da elasticidade [2], quando a deformação num corpo elástico isotrópico é suficientemente pequena, as equações do movimento 3D são da forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = G \Delta \mathbf{w} + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + F, \quad (5.226)$$

onde  $F$  representa a força externa por unidade de volume e  $\mathbf{w}$  o deslocamento 3D. Aqui  $G = E/2(1+\nu)$ , onde  $\nu < 1$  é a taxa de Poisson, representa o módulo de elasticidade de cisalhamento e  $\lambda$  a constante de Lamé. No estudo de vibrações de pequena amplitude em corpos sólidos, considera-se dois tipos principais de ondas: longitudinais (compressão/dilatação) e transversais (rotacionais ou de cisalhamento). Como os primeiros dois tipos de ondas ocorrem no interior do corpo, são denominadas *ondas de corpo*. Em ausência de forças externas, numa viga uniforme unidimensional

$\mathbf{w} = (u(t, x), \psi(t, x), 0)$ , as equações acima são desacopladas, convertendo-se em equações de onda com as velocidades de propagação longitudinal ( $u$ ) e transversal ( $\psi$ )

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\kappa G}{\rho}, \quad (5.227)$$

respectivamente.

Numa viga uniforme, o modelo de Vlasov é obtido do modelo de Timoshenko

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= f(t, x) \\ \epsilon \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= g(t, x), \end{aligned}$$

onde o parâmetro

$$\epsilon = \rho I \quad (5.228)$$

relativo a inércia rotatória é desprezado. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= f(t, x) \\ -EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= g(t, x). \end{aligned} \quad (5.229)$$

Introduzindo

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ p(t, x) \end{bmatrix}$$

o modelo de Vlasov pode ser escrito na forma matricial evolutiva

$$\mathbf{M}(0)\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (5.230)$$

onde

$$\mathbf{M}(\epsilon) = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad (5.231)$$

corresponde a *matriz de massa* do modelo de Timoskenko e

$$\mathbf{K} = \mathcal{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{C}$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.232)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}, \quad (5.233)$$

corresponde a *matriz de rigidez* do modelo de Timoskenko.

### 5.9.1 A Equação de Vlasov para a Deflexão

Quando o modelo de Timoshenko é desacoplado para a deflexão, decorre a equação

$$\frac{EI}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \left[ \rho A - EI \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F, \quad (5.234)$$

onde

$$F = f(t, x) + \frac{I}{A} \frac{c_1^2}{c_2^2} \left[ \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \quad (5.235)$$

Similarmente, com o modelo de Vlasov, obtém-se a equação escalar para a deflexão

$$\left( \rho A - \frac{EI}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(t, x) - \frac{I}{A} \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (5.236)$$

As expressões desacopladas para deflexão não são adequadas para cálculos subsequentes devido ao fato de que as condições de contorno são difíceis de serem estabelecidas e o termo não-homogêneo é muito complexo. Estas servem, porém, para ilustrar o efeito de propagação de ondas longitudinais e transversais através da viga. Em particular, no caso de velocidade de propagação infinita com as ondas longitudinais através da viga ( $c_1 \rightarrow \infty$ ) a equação de Timoshenko (5.234) se reduz à equação de Vlasov (5.236).

### 5.9.1.1 As Equações de Rayleigh e Euler-Bernoulli como Casos Limites

Se somente o efeito de inércia rotatória é considerado e o efeito do cisalhamento desprezado, resulta o modelo de Rayleigh. Com este tipo de viga, tem-se que o momento fletor é dado por  $EIv_{xx} = EI\psi_x$  e a relação

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x},$$

segue do fato de que a força de cisalhamento anula-se. Tem-se que a equação de Rayleigh

$$\left( \rho A - \frac{EI}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} = f(t, x) \quad (5.237)$$

corresponde ao caso em que as ondas transversais propagam-se através da viga com velocidade infinita ( $c_2 \rightarrow \infty$ ). Finalmente, se tanto o efeito de inércia rotatória quanto o efeito de cisalhamento são desprezados, então decorre o modelo de Euler-Bernoulli

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} = f(t, x) \quad (5.238)$$

que corresponde ao caso em que ondas longitudinais e transversais propagam-se através da viga ambas com velocidade infinita ( $c_1 \rightarrow \infty, c_2 \rightarrow \infty$ ).

## 5.9.2 Autovalores e Autovetores

Para termos não-homogêneos do tipo

$$\mathbf{f}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{F}(x), \quad (5.239)$$

o modelo de Vlasov (5.230) produz respostas particulares

$$\mathbf{v}_p = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x),$$

onde a distribuição espacial  $X(x)$  satisfaz a equação

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X}(x) = \mathbf{F}(x). \quad (5.240)$$

Aqui

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (5.241)$$

Equivalentemente, a equação (5.240) pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{M} \mathbf{X}''(x) + \mathbf{C} \mathbf{X}'(x) + \mathbf{K}(\lambda) \mathbf{X}(x) = \mathbf{F}(x), \quad (5.242)$$

com

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}.$$

Observa-se que com relação ao modelo de Timoshenko, o modelo de Vlasov é singular no tempo (ausência da segunda derivada temporal da rotação),

porém, ele não é singular no cálculo de autofunções, pois o parâmetro  $\epsilon$  não aparece no coeficiente da derivada espacial de maior ordem em (5.242). Daí que os modos do modelo de Vlasov serão valores limites dos modos do modelo de Timoshenko.

Considerando a equação diferencial modal do modelo de Timoshenko, correspondente a (5.242), e devido à dependência contínua das soluções da EDO com respeito ao parâmetro  $\lambda$ , a solução fundamental de (5.240) pode ser obtida como caso limite. Daí que o cálculo da solução  $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x, 0)$  pela fórmula deverá fornecer como resultado o valor limite da solução  $\mathbf{h}(x, \epsilon)$  associada com a equação diferencial modal.

Para o modelo de Vlasov, tem-se que

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{4-j}, \quad (5.243)$$

onde

$$P(s) = \det[s^2 \mathbb{M} + s \mathbb{C} + \mathbb{K}(\lambda)] = \sum_{k=0}^4 b_k s^{4-k},$$

com

$$b_0 = ab, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -cb\lambda^2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = ac\lambda^2.$$

Aqui  $a$ ,  $b$  e  $c$  representam parâmetros físicos do problema,  $h(x)$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 b_k h^{(4-k)}(x) &= b_0 h^{(iv)}(x) + b_2 h''(x) + b_4 h(x) = 0 \\ h(0) &= h'(0) = h''(0) = 0, \quad b_0 h'''(0) = 1, \end{aligned} \quad (5.244)$$

e as matrizes  $\mathbf{h}_k$  são obtidas por recursão a partir do problema de valor inicial da equação matricial em diferenças

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathcal{K}\mathbf{h}_k &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_0 &= \mathbf{0}, \mathcal{M}\mathbf{h}_1 = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5.245)$$

Os cálculos são dados a seguir. A equação diferencial característica

$$\begin{aligned} abh^{(iv)}(x) - cb\lambda^2 h''(x) + ac\lambda^2 h(x) &= 0 \\ h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, abh'''(0) &= 1 \end{aligned} \quad (5.246)$$

possui o polinômio característico

$$P(s) = ab(s^4 + g^2 s^2 - r^4),$$

onde

$$g^2(\lambda) = -c/a\lambda^2, \quad r^4 = -c\lambda^2/b.$$

As raízes do polinômio característico  $P(s)$  são  $s = \epsilon, -\epsilon, i\delta, -i\delta$ , onde

$$\epsilon = 1/2\sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{(g^4 + 4r^4)}}, \quad \delta = \sqrt{(g^2 + \epsilon^2)};$$

Assim

$$g^2 = \delta^2 - \epsilon^2, \quad r^4 = \delta^2 \epsilon^2. \quad (5.247)$$

Utilizando a base de Euler ou a transformada de Laplace, segue que a solução do problema de valor inicial (5.244) é dada por

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta}. \quad (5.248)$$

Por simples iteração, os seguintes valores matriciais de (5.245) são obtidos

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 - c\lambda^2 b}{a^2 b} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} bh''(x) - ah(x) & ah'(x) \\ -ah'(x) & ah''(x) - h(x)c\lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (5.249)$$

Da definição de  $\delta$ , segue que

$$\delta^4 - \delta^2 g^2 - r^4 = 0. \quad (5.250)$$

Substituindo os valores  $g^2$  e  $r^4$  em termos de  $\lambda$ , tem-se

$$-B\lambda^2 + C = 0, \quad (5.251)$$

onde os coeficientes

$$B = -cb\delta^2 - ac \text{ e } C = ab\delta^4 \quad (5.252)$$

são calculados para cada  $\delta$ . Assim, deve-se obter dois valores puramente imaginários conjugados para  $\lambda$ . Os valores

$$\epsilon^2 = \delta^2 - g^2 \quad (5.253)$$



são calculados após determinadas as frequências.

É claro que no limite a ramificação do espectro real o do segundo espectro associada com o modelo de Timoshenko, desaparece com o modelo de Vlasov. Somente existirão modos oscilatórios que não decaem com o tempo.

### 5.9.2.1 Viga Apoiada-Deslizante

No caso de uma viga apoiada-deslizante descrita pelo modelo de Vlasov, tem-se a equação característica  $\det(\mathcal{U}) = 0$ ,

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 = (\delta^2 + \epsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\epsilon L) = 0. \quad (5.254)$$

Aqui

$$\delta = \sqrt{\frac{g^2}{2} + \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}}} \quad \text{e} \quad \epsilon = \sqrt{-\frac{g^2}{2} + \sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}}},$$

onde, para  $\lambda = i\omega$ , tem-se

$$g^2 = -c\lambda^2/a, \quad r^4 = -c\lambda^2/b.$$

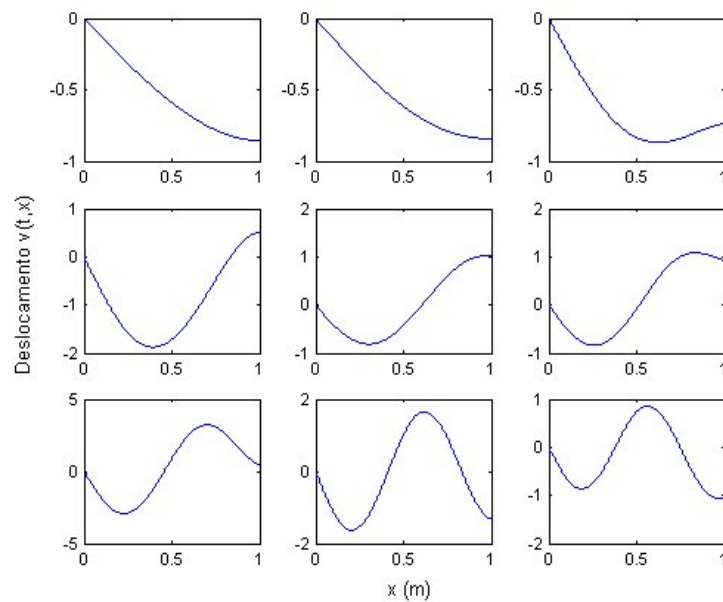
Decorre que  $\delta = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .

Determinadas as frequências, segue de (5.205)

$$\begin{aligned} h'_{o,22}(L)c_{12} + h_{1,21}(L)c_{21} &= 0 \\ (h'_{o,12}(L) - h_{o,22}(L))c_{12} + (h'_{1,11}(L) - h_{1,21}(L))c_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Na Tabela 5.14 são apresentados os valores de alguns parâmetros calculados para uma viga apoiada-deslizante modelada segundo a teoria de Vlasov. As frequências  $\omega_m$  são dadas em Hertz.

$m$	$\omega_m$	$\sigma_m$	$g_m$	$r_m$
1	18.530	1.0063	0.021864	0.62546
2	161.892	1.0090	0.19102	1.8487
3	425.819	1.0233	0.50245	2.9983
4	776.532	1.0504	0.91626	4.0490
5	1182.20	1.0819	1.3949	4.9958
6	1619.083	1.1140	1.9104	5.8467
7	2071.719	1.1470	2.4445	6.6134
8	2531.20	1.1815	2.9866	7.3102
9	2992.27	1.2176	3.5307	7.9477
10	3452.70	1.2548	4.0740	8.5379

Tabela 5.14 Valores calculados para os parâmetros  $\omega_n$ ,  $\sigma$ ,  $g$  e  $r$ .Figura 5.10 Modos para o deslocamento  $v(t, x)$  de uma viga de Vlasov apoiada-deslizante.

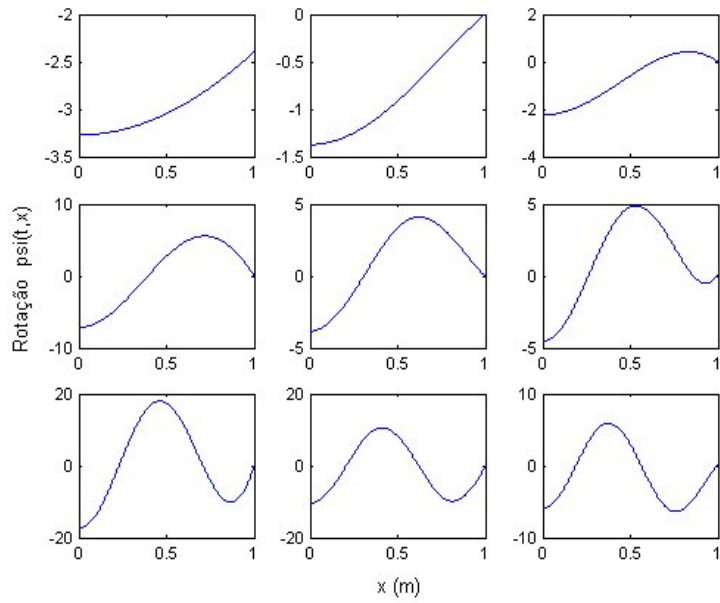


Figura 5.11 Modos para a rotação  $\psi(t, x)$ .

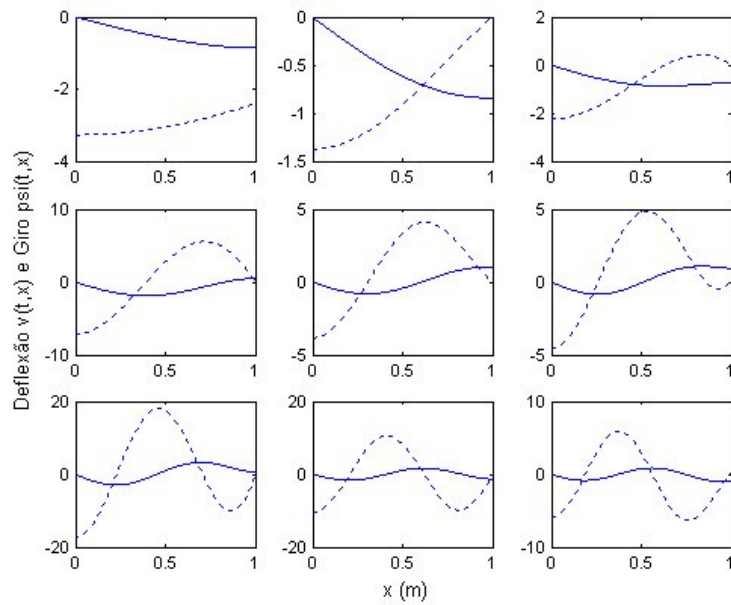
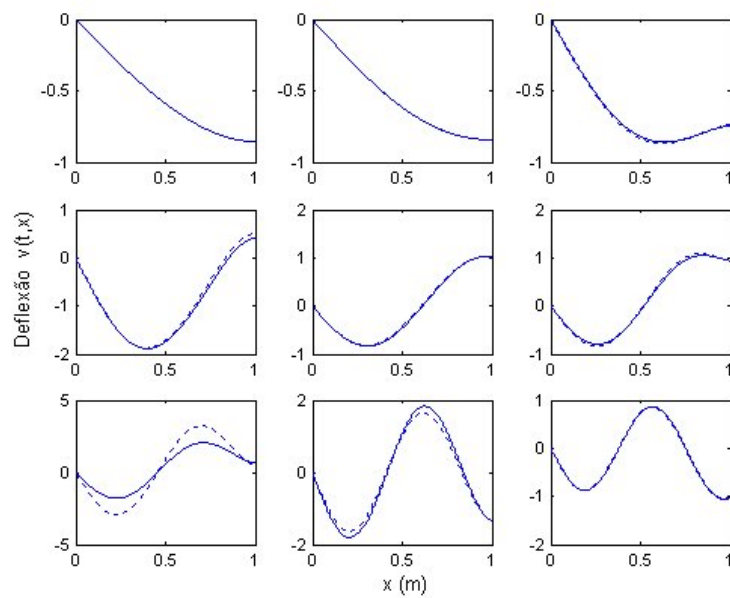


Figura 5.12 Modos para deslocamento  $v(t, x)$  (linha contínua) e rotação  $\psi(t, x)$  (linha tracejada).

$m$	Timoshenko	Vlasov
1	18.511	18.530
2	160.60	161.892
3	418.29	425.819
4	756.34	776.532
5	1145.3	1182.20
6	1564.7	1619.083
7	2001.7	2071.719
8	2448.3	2531.20
9	2900.0	2992.27
10	3353.4	3452.70

Tabela 5.15 Valores de  $(\omega_n)_m$ , para os modelos de Vlasov e Timoshenko.Figura 5.13 Comparação entre os modos para a deflexão  $v(t, x)$  para os modelos de Timoshenko (linha contínua) e Vlasov (linha tracejada).

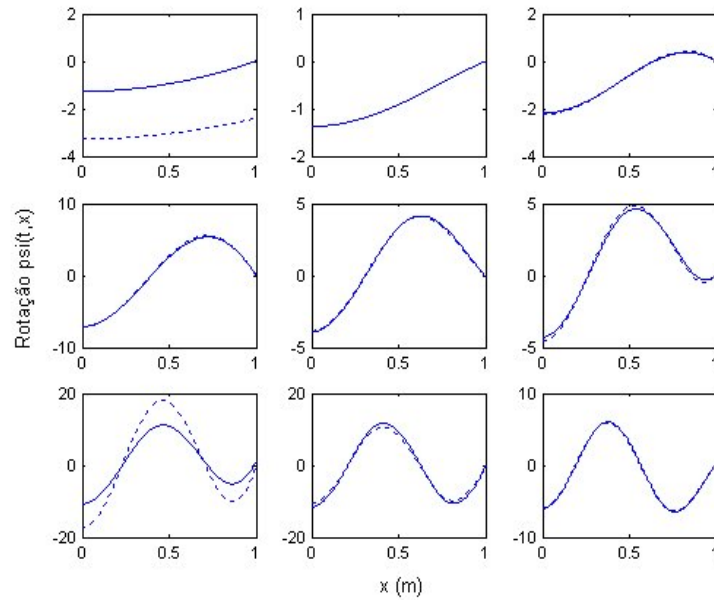


Figura 5.14 Comparação entre os modos para o giro  $\psi(t, x)$  para os modelos de Timoshenko (linha contínua) e Vlasov (linha tracejada).

## 5.10 Viga Apoiada-deslizante segundo o modelo de Rayleigh

Nesta seção considera-se condições de contorno do tipo apoiada-deslizante para uma viga modelada segundo a teoria de Rayleigh.

As condições de contorno são dadas por

$$\begin{cases} v(0) = 0, & v''(0) = 0, \\ v'(L) = 0, & v'''(L) = 0. \end{cases} \quad (5.255)$$

A equação modal algébrica é dada por  $Uc = 0$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} h(0) & \dot{h}(0) & \ddot{h}(0) & \dddot{h}(0) \\ \dot{h}(0) & \ddot{h}(0) & \dddot{h}(0) & h^{(iv)}(0) \\ h(L) & \dot{h}(L) & \ddot{h}(L) & \dddot{h}(L) \\ \ddot{h}(L) & \dddot{h}(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Repetindo o procedimento da seção anterior, obtém-se a expressão para os modos, que em termos da base dinâmica normalizada, é dada por

$$X(x) = h_3(x) + \sigma h_1(x), \quad (5.256)$$

com

$$\sigma = -\frac{h_2(L)}{h_0(L)}, \quad (5.257)$$

ou fazendo-se simplesmente a substituição pelos valores de  $h_j(\cdot)$  tem-se que

$$\sigma = -\frac{\cosh(\epsilon L) - \cos(\delta L)}{(\epsilon^2 + g^2) \cosh(\epsilon L) + (\delta^2 + g^2) \cos(\delta L)}, \quad (5.258)$$

onde

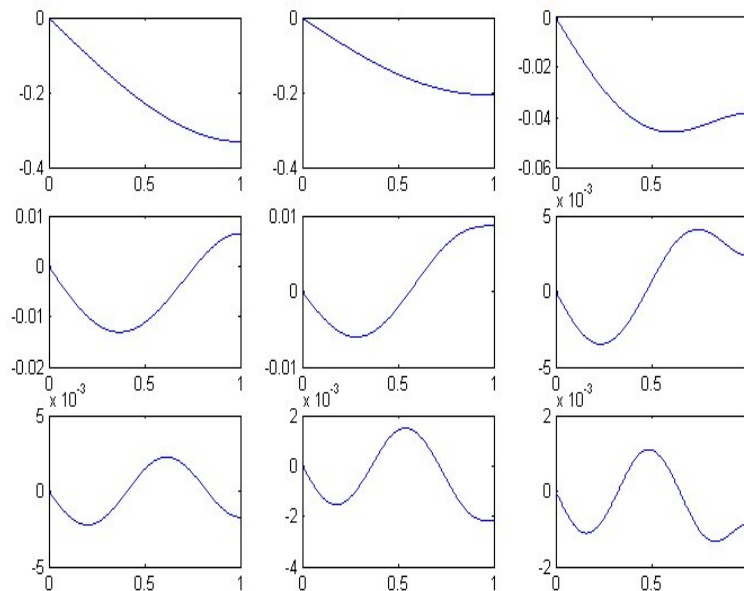
$$\epsilon = \sqrt{\sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}} - \frac{g^2}{2}}, \quad \delta = \sqrt{\sqrt{r^4 + \frac{g^4}{4}} + \frac{g^2}{2}} \quad (5.259)$$

e

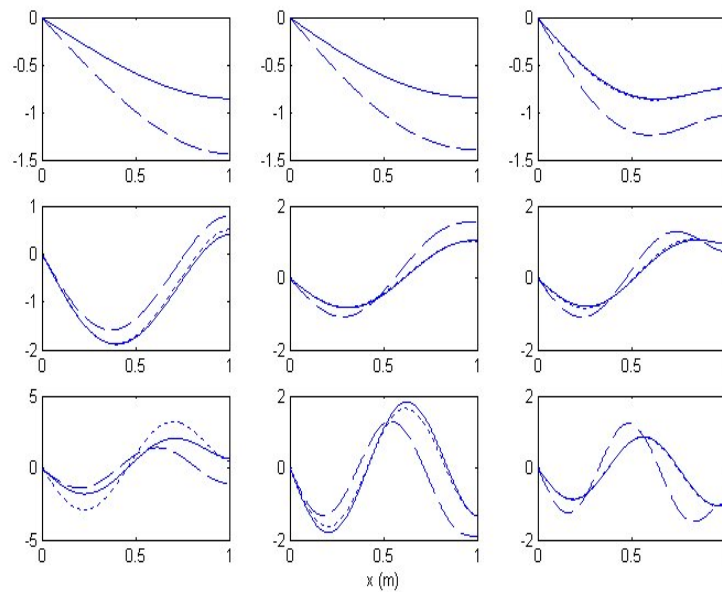
$$g^2 = \frac{\rho I(\omega^2)}{E I}, \quad r^4 = \frac{m}{b} \omega^2. \quad (5.260)$$

A seguir são tabelados os valores obtidos para uma viga de Rayleigh do tipo apoiada-deslizante.

$m$	$\omega_m$	$\sigma_m$	$g_m$	$r_m$
1	18.583	-0.49702	0.011323	0.62636
2	165.89	-0.34108	0.10108	1.8714
3	453.53	-0.12472	0.27634	3.0943
4	868.80	-0.05533	0.52935	4.2827
5	1395.1	-0.03313	0.85002	5.4270
6	2014.3	-0.02296	1.2273	6.5209
7	2708.3	-0.01707	1.6502	7.5618
8	3461.0	-0.01328	2.1088	8.5480
9	4258.0	-0.10719	2.5944	9.4812
10	5087.9	-0.0089	3.1001	10.364

Tabela 5.16 Valores calculados para os parâmetros  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $g$  e  $r$ .Figura 5.15 Modos para o deslocamento  $v(t, x)$  de uma viga de Rayleigh apoiada-deslizante.

$m$	Timoshenko	Vlasov	Rayleigh
1	18.511	18.530	18.583
2	160.60	161.892	165.89
3	418.29	425.819	453.53
4	756.34	776.532	868.80
5	1145.3	1182.20	1395.1
6	1564.7	1619.083	2014.3
7	2001.7	2071.719	2708.3
8	2448.3	2531.20	3461.0
9	2900.0	2992.27	4258.0
10	3353.4	3452.70	5087.9

Tabela 5.17 Valores de  $(\omega_1)_m$ , para os modelos de Timoshenko, Vlasov e Rayleigh.Figura 5.16 Comparação entre os modos para a deflexão  $v(t, x)$ : Timoshenko (linha contínua), Vlasov (tracejado estreito), Rayleigh (tracejado largo).



### 5.10.1 Decomposição da resposta forçada para uma viga apoiada-deslizante segundo o modelo de Rayleigh

- Entrada - Oscilatória no Espaço

Considere-se a entrada do sistema oscilatória no espaço expressa por

$$\mathbf{F}(t, x) = \sin(x). \quad (5.261)$$

A função de Green espacial é apresentada na Fig. 5.17.

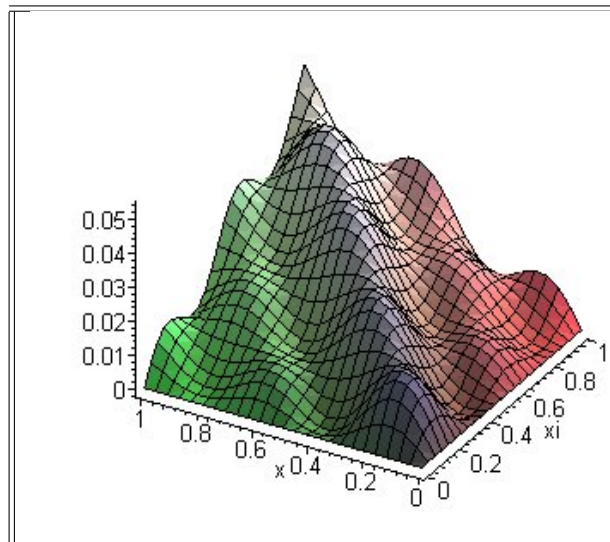
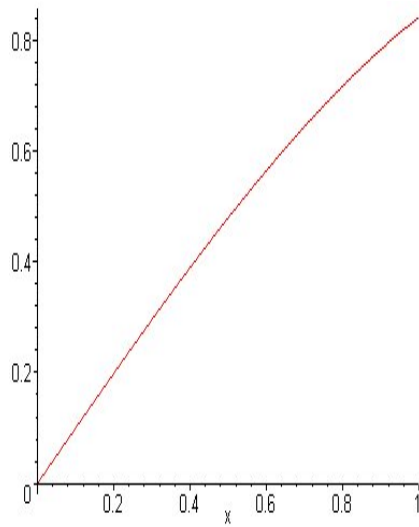
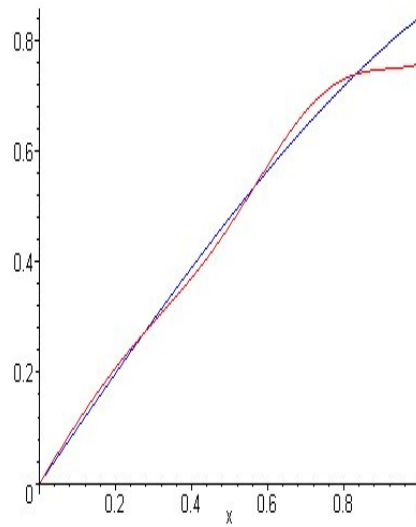


Figura 5.17 Função de Green espacial.

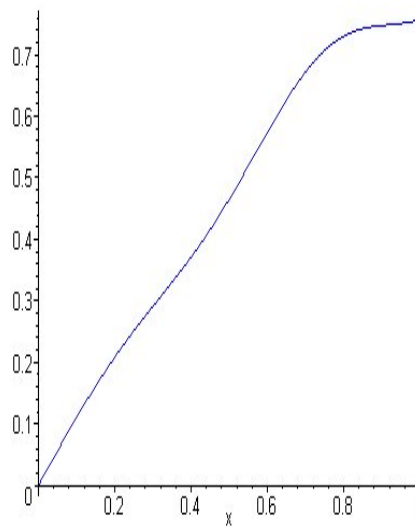
Apresenta-se na Fig. 5.18 a parte espacial da entrada  $f(x)$  e a correspondente resposta permanente do sistema.



(a) Forçante - parte espacial



(b) Entrada e Resposta Permanente



(c) Resposta Permanente

Figura 5.18 Parte espacial correspondentes ao forçante e a resposta permanente para a deflexão.

A resposta impulso temporal  $h(t, x, \xi)$  é apresentada nas Figs. 5.19, 5.20 e na Tab. 5.18; sendo que na primeira encontra-se o gráfico que representa o

comportamento de  $h(5, x, \xi)$ ; na segunda, é apresentado o gráfico de  $h(t, L, \xi)$  para diferentes tempos fixos e na terceira encontram-se os gráficos que correspondem ao seu comportamento em determinados pontos da viga.

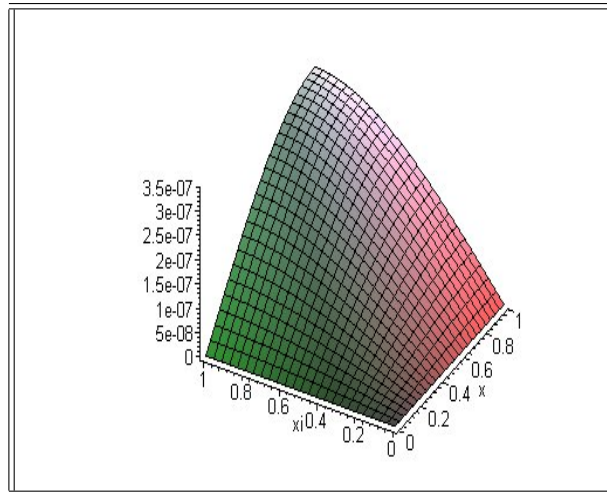


Figura 5.19 Resposta impulso temporal em  $t = 5s$ .

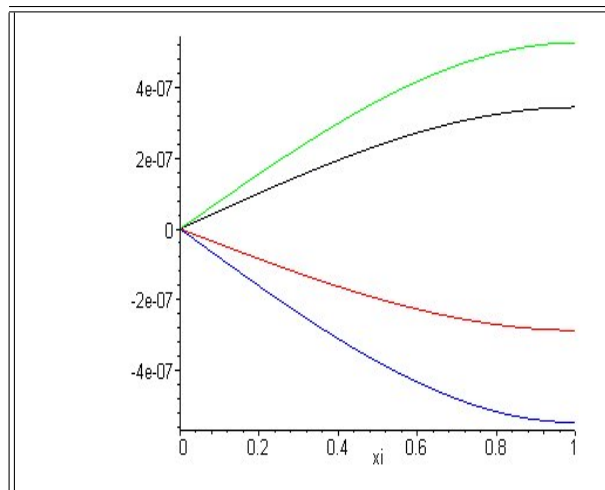


Figura 5.20 Resposta impulso temporal em  $x = L$ , para os tempos  $t = 5s$  (azul),  $t = 10s$  (verde),  $t = 15s$  (vermelho) e  $t = 20s$  (preto).

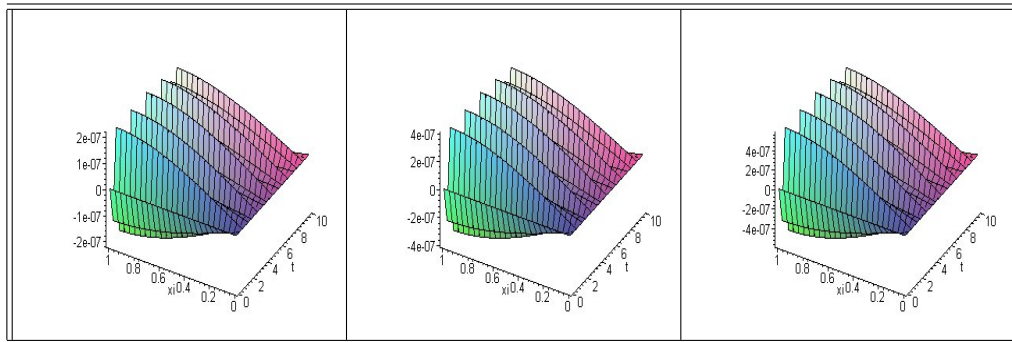


Tabela 5.18 Resposta impulso temporal para  $L = 1/4m$ ,  $L = 1/2m$   $L = 1m$ .

A decomposição da resposta forçada do sistema é apresentada na Tab. 5.19.

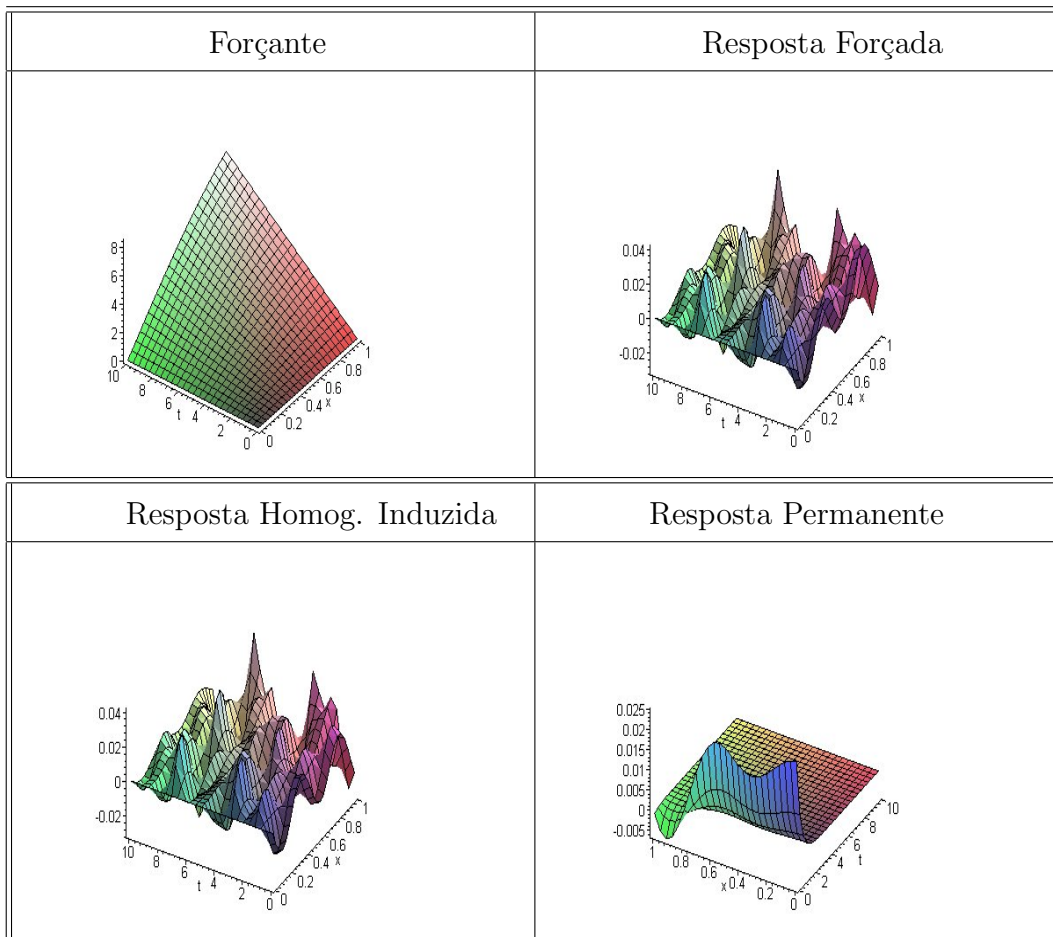


Tabela 5.19 Decomposição da resposta forçada e correspondente entrada.

Na Tab. 5.20 é apresentado o gráfico com a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas conjuntamente para o tempo  $t = 1s$ .

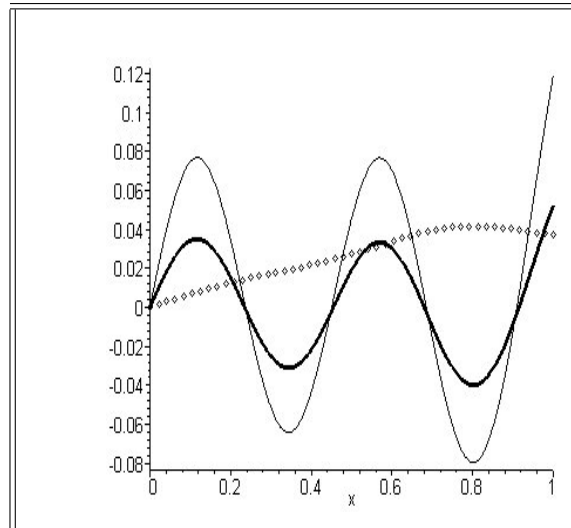


Tabela 5.20 Resposta forçada (linha grossa), homogênea induzida (-) e permanente ( $\diamond$ ) para  $t = 1s$ .

### • Entrada - Triangular no Espaço

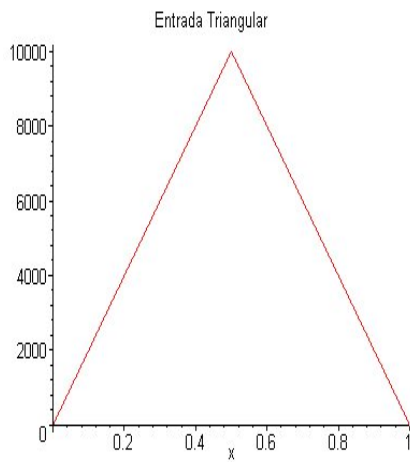
Considere-se a entrada do sistema triangular no espaço expressa por

$$\mathbf{F} = e^{\lambda t} F(x), \quad (5.262)$$

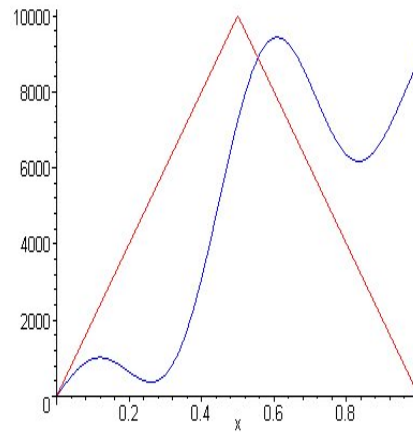
onde

$$F(x) = \begin{cases} 20000x, & 0 < x < 1/2, \\ 20000(1-x), & 1/2 < x < 1. \end{cases} \quad (5.263)$$

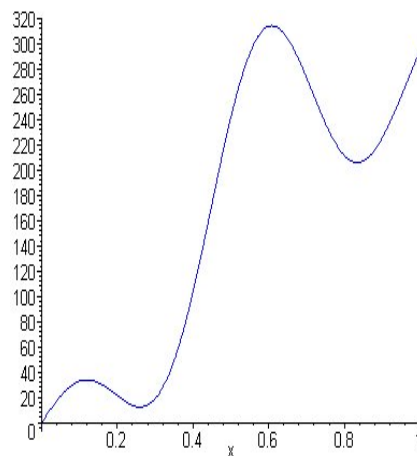
Apresenta-se na Fig. 5.21 a parte espacial da entrada e a correspondente resposta permanente.



(a) Forçante - parte espacial



(b) Entrada e Resposta Permanente



(c) Resposta Permanente - deflexão

Figura 5.21 Parte espacial correspondente ao forçante e as respostas permanentes para a deflexão.

A decomposição da resposta forçada do sistema é apresentada na Tab. 5.21.

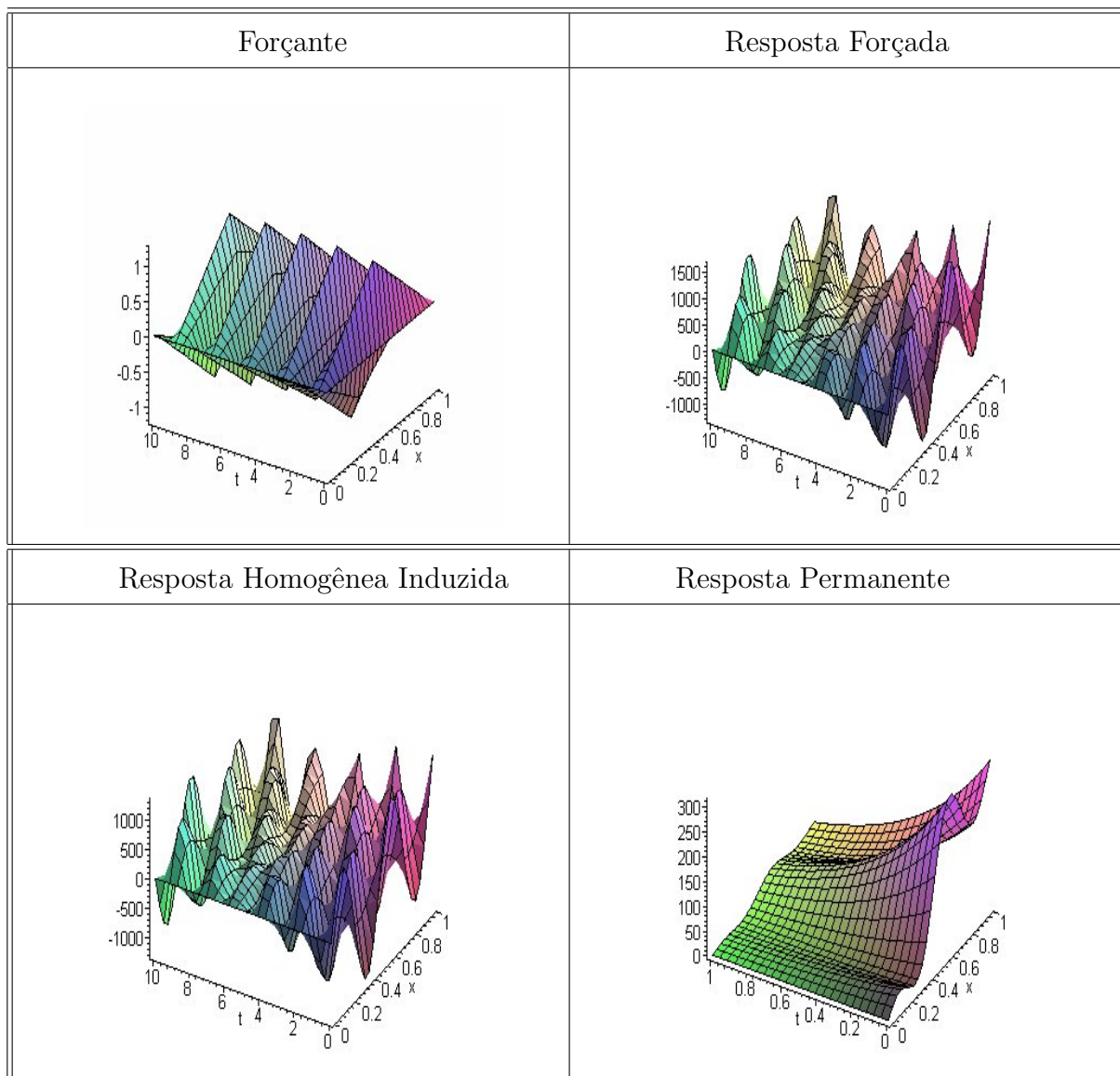


Tabela 5.21 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a deflexão.

Na Tab. 5.22 são apresentadas a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas juntas para o tempo  $t = 1s$ .

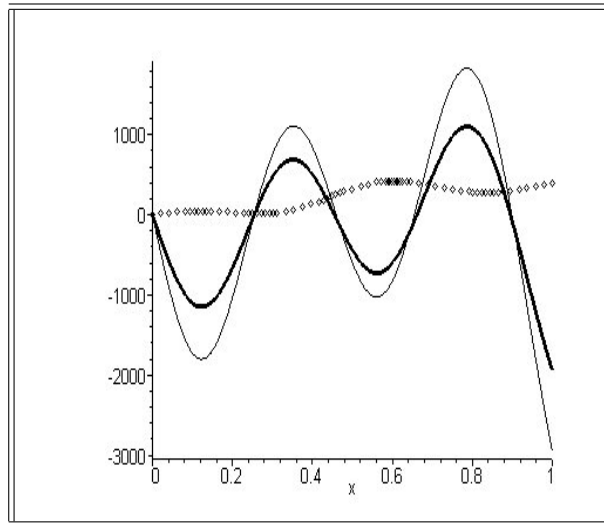


Tabela 5.22 Resposta forçada (linha grossa), homogênea induzida (-) e permanente (◇) para  $t = 1s$ .

• **Entrada - Oscilatória por partes no Espaço**

$$\mathbf{F} = e^{\alpha t} F(x), \tag{5.264}$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} 20000 \text{ sen}(2\pi x), & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases} . \tag{5.265}$$



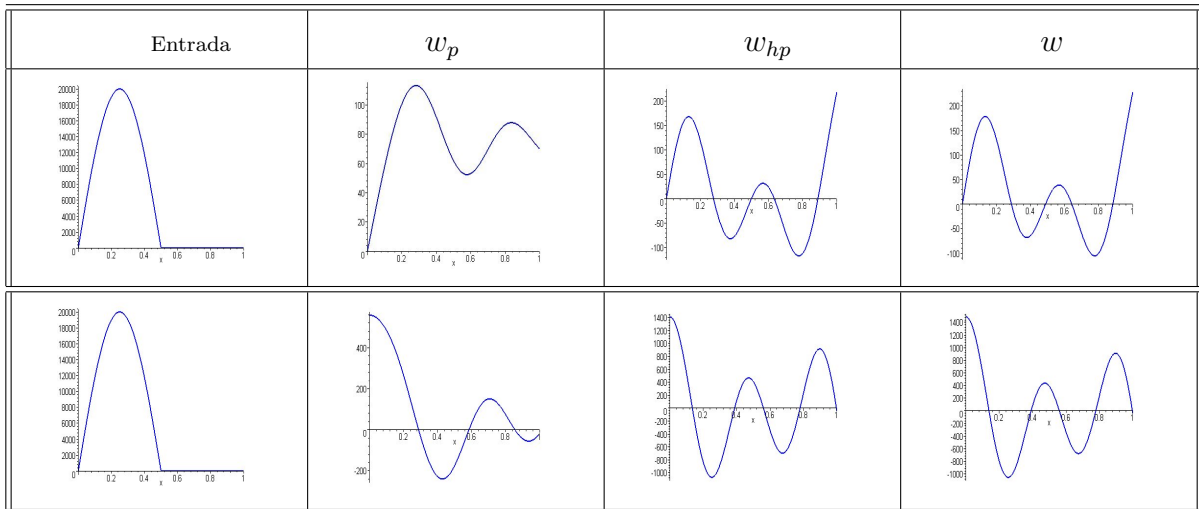


Tabela 5.23 Entrada Oscilatória e respostas permanente, homogênea induzida e forçada para  $t = 1s$ . Na primeira linha  $\alpha = 2$ ; Na segunda,  $\alpha = 5$ ;

Na Tab. 5.24 são apresentadas a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas juntas para o tempo  $t = 1s$ , para  $\alpha = 2$ .

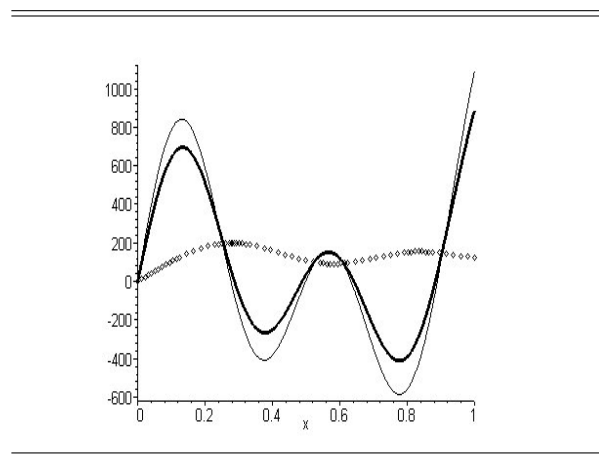


Tabela 5.24 Resposta forçada (linha grossa), homogênea induzida (-) e permanente ( $\diamond$ ) para  $t = 1s$ .

## 6 FORÇAS AMBIENTAIS: ONDAS, CORRENTES E VENTOS

Neste capítulo, faz-se a formulação da força transversal distribuída a qual está sujeita uma viga inserida em um ambiente oceânico. Uma estrutura inserida em um ambiente oceânico está sujeita a forças devido ao vento, ondas de superfície e correntes oceânicas. A equação de Morison [5] é utilizada para modelar as forças do fluido agindo no plano da página. As ondas são assumidas randômicas e são modeladas segundo a teoria das ondas lineares de Airy e o espectro de Pierson-Moskowitz [40]. A força de fluido agindo perpendicularment ao plano da página é modelada como uma simples senóide de acordo com [41].

Se o diâmetro de uma estrutura cilíndrica é pequeno comparado ao comprimento de onda das ondas incidentes, então pode-se usar a equação de Morison para modelar as forças do fluido [42]. A equação de Morison foi originalmente derivada para um cilindro estacionário sob a hipótese de que a força do fluido é composta por forças de arrasto e inércia, com a força de arrasto sendo predominante. Esta força é proporcional ao quadrado da velocidade relativa do fluido. A força de inércia é a força exercida pelo fluido enquanto ele acelera e desacelera conforme passa pela estrutura.

A equação de Morison é modificada para um cilindro em movimento através da inclusão de um termo de massa adicionada. Quando uma estrutura acelera-se em um meio fluidico, que estaria normalmente em repouso na ausência da estrutura, ela também acelera o fluido nas suas proximidades. Assim, a força necessária para acelerar a estrutura é

$$F = (m_{estrutura} + C_A m_{fluido deslocado}) \ddot{v}, \quad (6.1)$$

onde  $\ddot{v}$  é a aceleração da estrutura e  $C_A$  é o coeficiente de massa adicionada, o qual

é determinado experimentalmente.

Se a estrutura não é pequena<sup>1</sup> comparada ao comprimento de onda da onda incidente, esta é refletida pela superfície da estrutura. Como essas ondas refletidas são da ordem da onda incidente, então a teoria da difração deve ser utilizada ao invés da equação de Morison. Neste caso, a força de inércia será predominante [5].

Se a força de inércia ainda predomina e a força de arrasto é pequena, porém a estrutura ainda é pequena comparada ao comprimento de onda da onda incidente, a teoria de Froude-Krylov deve ser aplicada [40].

Neste trabalho, será assumido que o diâmetro da estrutura é pequeno comparado ao comprimento de onda da onda incidente tal que a equação de Morison pode ser aplicada. A força de Morison é expressa em termos da aceleração relativa e o quadrado da velocidade relativa entre a estrutura e o fluido. As velocidades das correntes são consideradas constantes com o tempo e variando com a profundidade. Por outro lado, as velocidades e acelerações das ondas de superfície são oscilatórias. Considera-se, também, que as ondas são randômicas, portanto cada onda apresenta uma ampla banda de frequências.

Para modelar velocidades de ondas randômicas, primeiro obtém-se uma expressão para a altura aleatória das ondas através do espectro de potências de Pierson-Moskowitz. Após, as velocidades horizontal e vertical das ondas são obtidas por meio da teoria das ondas lineares de Airy.

## 6.1 A Equação de Morison

A expressão semi-empírica para a força do fluido foi derivada por Morison [65].

---

<sup>1</sup>A estrutura é considerada relativamente grande quando  $D/\lambda > 0.2$ , onde  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $\lambda$  é o comprimento de onda da onda incidente.

Ao longo deste capítulo os símbolos em negrito denotarão quantidades vetoriais, e o subscrito  $n$  denotará o componente normal.

A forma geral da força normal sobre um elemento de viga cilíndrica oscilando em ondas e correntes é dada por

$$f^n = C_M m_{fl} \dot{w}^n + C_D \rho_f r_o |V_{rel}^n| V_{rel}^n - C_A m_{fl} \ddot{R}^n, \quad (6.2)$$

onde  $f^n$  é a força por unidade de comprimento normal a estrutura,  $C_M$  é o coeficiente de inércia,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto,  $C_A$  é o coeficiente de massa adicionada, o qual está relacionado a  $C_M$  por

$$C_A = C_M - 1, \quad (6.3)$$

$r_o$  é o raio externo do cilindro,  $V_{rel}^n$  é o componente da velocidade relativa que é normal ao elemento de viga, e é dado por

$$V_{rel}^n = w^n + U_c^n - \dot{R}^n, \quad (6.4)$$

$w$  é a velocidade da onda,  $U_c$  é a velocidade da corrente,  $R$  é o vetor posição a partir da base da viga até certa posição na viga, e  $m_{fl}$  é a massa deslocada do fluido por unidade de comprimento, a qual pode ser escrito como

$$m_f = \rho_f \pi r_o^2. \quad (6.5)$$

Os vetores aceleração normal e velocidade normal podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} \dot{w}^n &= |\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{t}| \\ w^n &= |\mathbf{t} \times \mathbf{w} \times \mathbf{t}| \\ U_c^n &= |\mathbf{t} \times \mathbf{U}_c \times \mathbf{t}| \\ \ddot{R}^n &= |\mathbf{t} \times \ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{t}| \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde  $t$  é o vetor tangente a viga, que é dado por

$$\mathbf{t} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}, \quad (6.7)$$

sendo  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  os vetores unitários da estrutura fixa. As velocidades das ondas e correntes e o vetor posição podem ser escritos em termos de seus componentes na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} \\ \mathbf{U}_c &= U_c\mathbf{j} \\ R &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde assume-se que a corrente  $U$  ocorre apenas na direção  $y$ . Note que como a velocidade do fluido não possui componente  $z$ , a velocidade e aceleração normais podem ser obtidas por meio de um vetor normal. O vetor normal, neste caso, é dado por

$$\mathbf{n} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}, \quad (6.9)$$

onde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.10)$$

e  $v(t, x)$  é o deslocamento na direção  $y$ . Quando a hipótese de pequenos ângulos é utilizada, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \sin\theta &\approx \theta \\ \operatorname{tg}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1, \end{aligned} \quad (6.11)$$

e  $\theta$  pode ser aproximado por  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . Assim, o vetor normal pode ser escrito como

$$\mathbf{n} = -v'\mathbf{i} + \mathbf{j}. \quad (6.12)$$

Portanto, as velocidades e acelerações normais são dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{w}^n &= \dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n} = -\dot{w}_x v' + \dot{w}_y \\
w^n &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = -w_x v' + \dot{w}_y \\
U_c^n &= \mathbf{U}_c \cdot \mathbf{n} = -U_{cx} v' + U_{cy} \\
\ddot{R}^n &= \ddot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n} = -u v' + v.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Assim, usando as equações (6.4) e (6.13), a velocidade normal relativa  $V_{rel}$  é dada por

$$\begin{aligned}
V_{rel}^n &= w^n + U_c^n - \dot{R}^n \\
&= -\left(w_x + U_{cx} - \dot{R}_x\right) v' + \left(w_y + U_{cy} - \dot{R}_y\right)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

tal que a equação (6.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
f^n(t, x) &= C_D \rho_f r_o (-w_x v' + \dot{w}_y + U_c - \dot{v}) \\
&\times |-w_x v' + \dot{w}_y + U_c - \dot{v}| + \\
&- C_A \rho_f \pi r_o^2 (-\ddot{w}_y + \ddot{v}) + C_M \rho_f \pi r_o^2 (\dot{w}_y - \dot{w}_x v').
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Os coeficientes de inércia, massa adicionada e arrasto são obtidos de forma experimental. Para um cilindro longo, porém,  $C_M$  aproxima-se de seu valor limite teórico (fluxo uniformemente acelerado) de 2 (dois), e  $C_A$  aproxima-se da unidade [65], [75]. Os coeficientes de inércia e arrasto são funções de, no mínimo, três parâmetros [75],

$$\begin{aligned}
C_M &= C_M(Re, K_c, \text{rugosidade do cilindro}), \\
C_D &= C_D(Re, K_c, \text{rugosidade do cilindro}),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds e  $K_c$  é o número de Keulegan-Carpenter, dados por

$$Re = \frac{\rho_f U D}{\mu} \quad \text{e} \quad K_c = 2\pi \frac{H}{2D}. \tag{6.17}$$

Aqui  $\rho_f$  é a densidade do fluido,  $U$  é a velocidade da corrente livre,  $D$  é o diâmetro

da estrutura,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica ou absoluta e  $H/2$  é a amplitude da onda. Para água, a viscosidade dinâmica vale  $1.12 \times 10^{-3} N \cdot s/m^2$  [41].

Para encontrar a expressão completa para a força do fluido, necessita-se ainda de relações para as velocidades das ondas e correntes.

## 6.2 Velocidade das Ondas

### 6.2.1 Teoria de Ondas Lineares

A teoria das ondas lineares, também conhecida como teoria das ondas de Airy, define o padrão de ondas (*wave profile*)  $\eta$  como

$$\eta(t, y) = A \cos(ky - \omega t), \quad (6.18)$$

e os componentes da velocidade da onda são dados por

$$\begin{aligned} w_x(t, x, y) &= A\omega \frac{\sinh(kx)}{\sinh(kd)} \sin(ky - \omega t) \\ w_y(t, x, y) &= A\omega \frac{\cosh(kx)}{\sinh(kd)} \cos(ky - \omega t), \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde  $k$ ,  $\omega$  e  $A$  representam o número de onda, frequência angular e amplitude da onda de superfície, respectivamente. As velocidades variam com o tempo, coordenada horizontal  $y$  e profundidade  $x$ , utilizando-se a mesma notação de Han em [40]. A frequência está relacionada ao número de onda através da relação de dispersão, dada por

$$\omega^2 = g k \tanh(kd), \quad (6.20)$$

sendo  $d$  a profundidade da água. Para águas profundas,  $\tanh(kd)$  aproxima o valor da unidade e a frequência é dada por

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \omega^2 = gk. \quad (6.21)$$

### 6.2.2 Ondas Randômicas

A consideração da característica aleatória do mar no projeto de estruturas *offshore* fornece uma estimativa mais precisa da resposta da estrutura, devido ao conteúdo de freqüências analisadas e a descrição mais realista das elevações da superfície do mar, que no domínio do tempo é representada através do somatório de um grande número de ondas harmônicas de pequenas amplitudes. Para representar um comportamento aleatório da elevação da superfície do mar, considera-se que o valor desta variável randômica no tempo  $t$  e na coordenada  $x$  é o resultado do somatório de  $N$  ondas lineares oriundas da teoria linear de Airy.

Associada a cada onda, considera-se uma fase randômica cuja distribuição uniforme de probabilidades se encontra no intervalo de  $[0, 2\pi]$ . A função de elevação define um processo aleatório Gaussiano de média zero, estacionário e ergódico quando  $N$  tende ao infinito.

Para modelar as velocidades das ondas randômicas, obtém-se primeiramente, uma expressão para a altura das ondas randômicas através de um espectro de potências. Neste trabalho, escolheu-se o espectro de Pierson-Moskowitz por ser um espectro clássico. O espectro de Pierson-Moskowitz para elevação de superfície ou padrão de ondas  $\eta$  é dado por

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{A_o}{\omega^5} e^{-B/\omega^4} \quad [m^2 s], \quad (6.22)$$

onde  $A_o$  e  $B$  são dados por

$$\begin{aligned} A_o &= 0.0081g^2 = 0.7796 \quad [m^2 s] \\ B &= 0.74 \left( \frac{g}{U_{\omega, 19.5}} \right)^4 \quad [s^{-4}] \end{aligned} \quad (6.23)$$



aqui  $g$  é a aceleração gravitacional e  $U_{\omega,19.5}$  é a velocidade do vento calculada a  $19.5m$  acima do nível da água [75]. Note que as unidades estão especificadas entre colchetes.

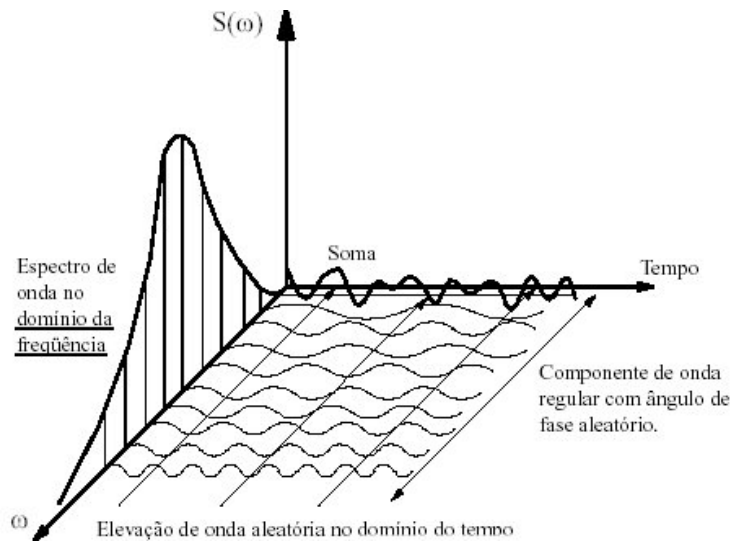


Figura 6.1 Representação das ondas randômicas no mar.

O único dado ainda necessário para calcular o espectro de potências é a velocidade do vento à altura  $h = 19.5m$ . Algumas vezes, porém, o espectro é expresso em termos da altura de onda significativa  $H_s$ . A altura de onda significativa é a média das alturas da terça parte mais alta entre todas as ondas [74]. Matematicamente

$$H_s = 4\sigma \text{ [m]}, \tag{6.24}$$

onde  $\sigma$  é o desvio padrão do padrão de ondas (*wave profile*). Para o caso de média zero, a variância é a área sob a curva da densidade espectral, dada por

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^\infty S_{\eta\eta}(\omega)d\omega = \frac{A_o}{4B} e^{-B/\omega^4} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{A_o}{4B} \text{ [m}^2\text{]}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Em termos da altura de onda significativa,  $B$  é dado por

$$B = \frac{4A_o}{H_s^2}. \quad (6.26)$$

Assim, o espectro de Pierson-Moskowitz pode ser escrito como

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{A_o}{\omega^5} e^{-\frac{4A_o}{H_s^2}\omega^{-4}} \quad [m^2 s]. \quad (6.27)$$

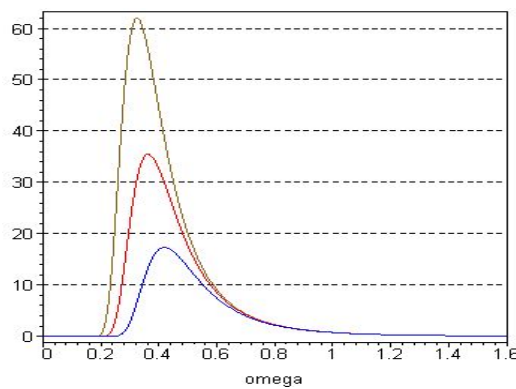
Utilizando as equações (6.25) e (6.26), a altura de onda significativa em termos da velocidade do vento é dada por

$$H_s = 2\sqrt{\frac{A_o}{B}}. \quad (6.28)$$

A frequência de pico (frequência na qual  $S_{\eta\eta}$  é máxima) é dada por<sup>2</sup>

$$\omega_{pico} = \left(\frac{4}{5}B\right)^{1/4}. \quad (6.29)$$

O espectro, quando a altura de onda significativa é de 9, 12 e 15m, está plotado na Figura 6.2.2 para  $U_{\omega,19.5m} = 25m/s$ .



<sup>2</sup>Esta expressão é obtida tomando-se a derivada de  $S_{\eta\eta}$  em relação a  $\omega$  igual a zero.

O próximo passo consiste em encontrar a altura de onda significativa ou padrão de ondas  $\eta$ . Para tanto é necessário converter o espectro de elevação de onda em uma espectro temporal equivalente.

A elevação de superfície como uma função de ambas coordenada espacial  $y$  e tempo, é representada por

$$\eta(t, y) = \int_0^\infty \cos(ky - \omega t) \sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega)} d\omega, \quad (6.30)$$

onde o espectro é dado pela equação (6.27). Esta integral pode ser representada em termos de somas finitas como

$$\eta(t, y) = \sum_{n=1}^N \cos(\bar{k}_n y - \bar{\omega}_n t - \varphi_n) \sqrt{2S_{\eta\eta}(\bar{\omega}_n) \Delta\bar{\omega}_n}, \quad (6.31)$$

onde  $\varphi_n$  é um número randômico uniforme entre 0 e  $2\pi$  e

$$\bar{\omega}_n = \frac{\omega_n + \omega_{n-1}}{2}$$

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} \quad (6.32)$$

$$\bar{k}_n = k(\bar{\omega}_n) \text{ para } n = 1, \dots, N.$$

A frequência  $\omega_0$  é zero e  $\omega_N$  é escolhido tal que a maior parte da área esteja contida entre  $\omega_0$  e  $\omega_N$ . As frequências  $\omega_1$  e  $\omega_{N-1}$  são escolhidas tal que a área sob a curva do espectro é igual para cada intervalo. A área entre o intervalo  $\omega_0 = 0$  a  $\omega_n$  é  $\frac{n}{N}$  da área total sob a curva entre o intervalo  $\omega_0 = 0$  até  $\omega_N$ . Assim,  $\omega_n$  é dado por

$$\int_0^{\omega_n} S_{\eta\eta}(\omega) d\omega = \frac{n}{N} \int_0^{\omega_N} S_{\eta\eta}(\omega) d\omega, \quad (6.33)$$

ou seja,

$$\omega_n = \left( \frac{B}{\ln(N/n) + B/\omega_n^4} \right)^{1/4} \text{ para } n = 1, \dots, N-1. \quad (6.34)$$

Note que o último termo na equação (6.31) é a raiz quadrada da área incremental entre  $\omega_n$  e  $\omega_{n-1}$ . Uma área particionada, por exemplo  $a^2$ , é aproximadamente a área total dividida pelo número de intervalos  $N$ . Da equação (6.27),

$$a^2 = \frac{1}{N} \int_0^\infty S_{\eta\eta}(\omega) d\omega = \frac{A_o}{4BN} = \frac{H_s^2}{16N}, \quad (6.35)$$

e  $\eta$  é escrito na forma

$$\eta(t, y) = \frac{H_s}{4} \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \cos(\bar{k}_n y - \bar{\omega}_n t). \quad (6.36)$$

Portanto, as velocidades das ondas são dadas por

$$w_x(t, x, y) = \frac{H_s}{4} \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \bar{\omega}_n \frac{\sinh(\bar{k}_n x)}{\sinh(\bar{k}_n d)} \sin(\bar{k}_n y - \bar{\omega}_n t) \quad (6.37)$$

$$w_y(t, x, y) = \frac{H_s}{4} \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \bar{\omega}_n \frac{\cosh(\bar{k}_n x)}{\sinh(\bar{k}_n d)} \cos(\bar{k}_n y - \bar{\omega}_n t).$$

### 6.3 Velocidade da Corrente $U_c$ no Oceano

Segundo Isaacson [48], a velocidade da corrente consiste de três componentes:

1. Componente  $U_{tide}$ ;
2. um componente de baixa frequência relacionado a circulação,  $U_{circ}$ ;
3. e corrente induzida pelo vento,  $U_{drift}$ .

Todos são medidos na superfície da água. Assume-se que a velocidade da corrente<sup>3</sup> possui apenas um componente horizontal. Assim, a velocidade da

---

<sup>3</sup>Em laboratório, a velocidade da corrente é assumida constante com a profundidade.

corrente é dada segundo a equação empírica

$$U_c(x) = (U_{tide}(d) + U_{circ}(d)) \left(\frac{x}{d}\right)^{1/7} + U_{drift}(0) \left(\frac{x - d + d_o}{d_o}\right), \quad (6.38)$$

onde  $d$  representa a profundidade da água e  $d_o$  é assumido como  $50m$ . O valor de  $U_{tide}$  é obtido através de tabelas, e  $U_{drift}$  é cerca de 3% da média da velocidade do vento em 10 minutos a  $10m$  acima do nível do mar [53], [75].

## 6.4 Velocidade do Vento $U_v$

Wilson [75] dá uma expressão para a velocidade média do vento, como segue

$$U_v(h) = \left(\frac{h}{h_{ref}}\right)^{1/n} U_v(h_{ref}), \quad (6.39)$$

onde  $h$  representa a altura a partir da superfície da água. A altura de referência,  $h_{ref}$ , é tomada frequentemente como  $10m$ . O valor de  $n$  é escolhido sendo 7 ou 8 para um mar aberto.

## 7 VIBRAÇÕES ESTOCÁSTICAS DE UMA ESTRUTURA *OFFSHORE*

A Petrobras é líder mundial em exploração de petróleo em águas profundas. Em 1992, a Companhia venceu o prêmio da *Offshore Technology Conference* (OTC), reconhecimento internacional à tecnologia na produção até os dois mil metros de profundidade. Dois anos depois, bateu o recorde mundial com produção em lâmina d'água de 1.027 metros. Hoje, a Petrobras mantém a liderança na produção de petróleo em águas profundas produzindo a 1.853 metros, no campo de Roncador. Desde 1986, quando foi criado o Programa de Capacitação Tecnológica (Procap), a Companhia vem realizando estudos para viabilizar a produção de petróleo em profundidades cada vez maiores. Na faixa de lâmina d'água entre os 1.000 e 2.000 metros estão 23% das reservas brasileiras, e a previsão é de que 50% das reservas a serem descobertas se situarão em águas ultraprofundas<sup>1</sup>.

Estruturas *Offshore* são usadas na indústria do petróleo tanto para exploração quanto para produção e armazenagem de petróleo. Em geral, existem dois tipos de estruturas *offshore*: as estruturas fixas e as submersíveis (ou semi-submersíveis). Estruturas fixas são projetadas para resistir a forças ambientais sem deslocamentos substanciais. Neste caso, uma análise dinâmica linear pode ser suficiente. Já as estruturas não-fixas são projetadas para permitir deformações e deflexões pequenas mas não negligenciáveis. Para tais estruturas, as respostas dinâmicas podem ter características não lineares as quais precisam ser exploradas mais profundamente. Estruturas fixas tornam-se impraticáveis para regiões com águas profundas devido aos custos altíssimos de construção e manutenção em relação às plataformas submersíveis ou semi-submersíveis. Assim, um grande interesse e igualmente grandes esforços têm sido feitos no intuito de viabilizar a exploração de petróleo por meio de estruturas flutuantes.

---

<sup>1</sup>Fonte: Petróleo Brasileiro S. A. Petrobrás: <http://www2.petrobras.com.br/portal/Petrobras.htm>

Exemplos dos vários tipos de plataformas para exploração de petróleo são ilustrados na Figura 7.1



Figura 7.1 Ilustração dos variados tipos de estruturas utilizadas para exploração de petróleo.

Da esquerda para a direita na Fig. 7.1: plataforma terrestre; plataforma marítima fixa; plataforma tipo jaqueta; semi-submersível; navio de exploração/sucção; plataforma flutuante.

A Fig. 7.2 ilustra o quão complexa pode ser a rede de cabos flexíveis ou *risers* utilizados na fixação da estrutura e/ou exploração de petróleo em águas profundas.

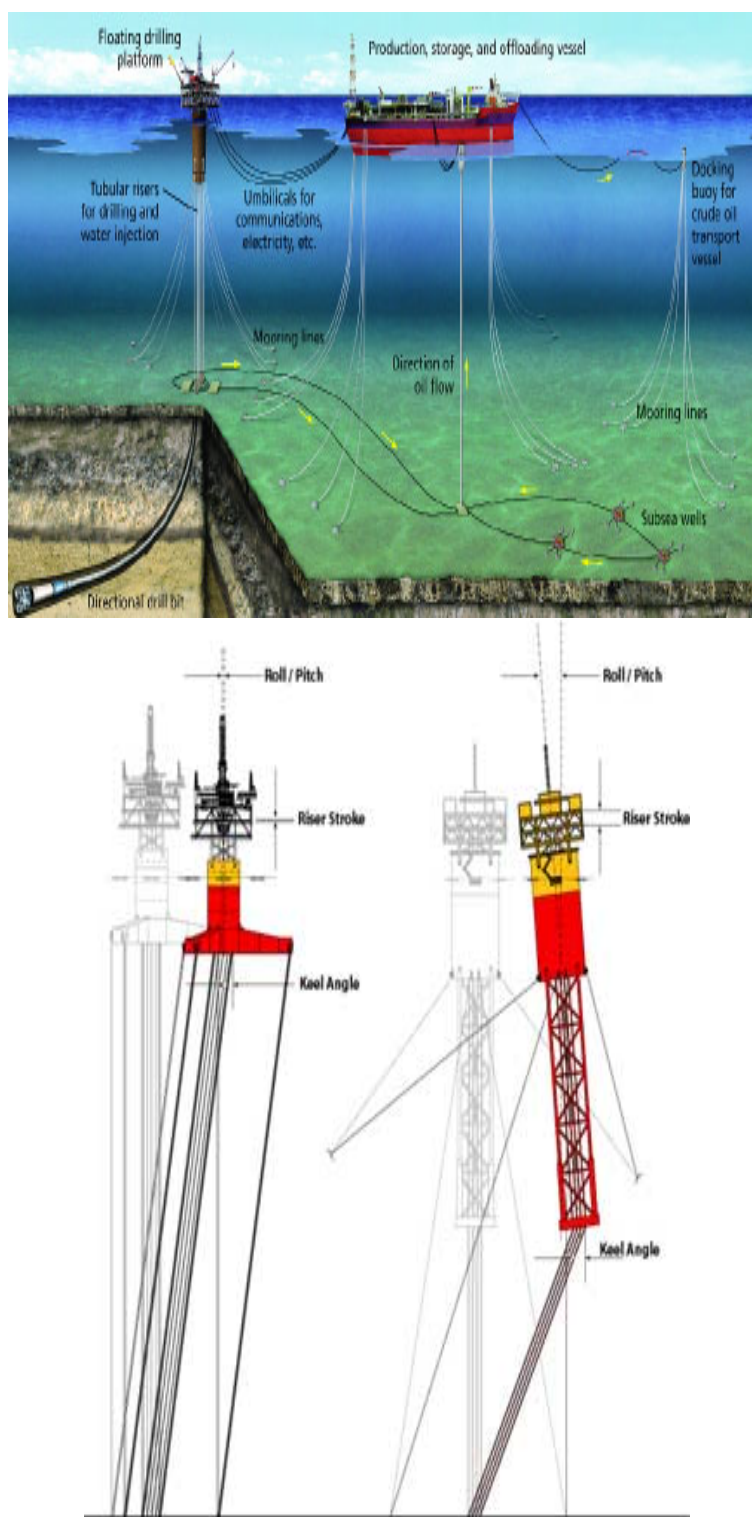


Figura 7.2 Exemplos de redes de cabos para fixação/exploração de petróleo.



## 7.1 Modelo não-linear acoplado

Considera-se aqui o exemplo de uma torre articulada ou uma "tension leg platform" situada no oceano, em águas profundas. Tal estrutura pode ser modelada como uma viga compreendendo movimentos transversais e axiais, com uma mola torcional linear elástica em sua base e uma massa concentrada em seu extremo livre como mostra a Figura 7.3.

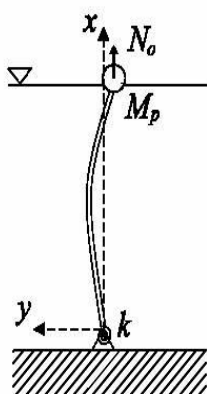


Figura 7.3 Modelo simplificado da estrutura.

As equações de movimento são não-lineares e acopladas e sua derivação, considerando uma viga do tipo Rayleigh, pode ser encontrada em [40] e [5]. Uma derivação detalhada considerando uma viga do tipo Timoshenko é obtida e apresentada, pela primeira vez, neste trabalho.

Este modelo apresenta as propriedades físicas essenciais de uma torre flutuante. O movimento é confinado a um plano; movimentos na terceira direção, para fora da página, não são permitidos. As equações de movimento e as condições de contorno são derivadas usando as hipóteses de Kirchhoff [37], [59]. Assim, além das hipóteses básicas sobre a viga, assume-se um campo de deslocamentos dado por

$$\begin{aligned}
u_1(t, x, y) &= u(t, x) - y\psi(t, x), \\
u_2(t, x) &= v(t, x), \\
u_3(t, x) &= 0,
\end{aligned} \tag{7.1}$$

onde  $x$  e  $y$  são coordenadas Lagrangeanas,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente;  $u$  representa o deslocamento axial (na direção  $y$ ), e  $v$  e  $\psi$  representam o deslocamento transversal (na direção  $x$ ) e o giro da viga, respectivamente.

Tais variáveis dependem apenas de  $x$  e  $t$ . Assume-se que a seção transversal é simétrica e a deformação é pequena, mas a rotação pode ser moderada. Matematicamente, tem-se

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \sim \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \ll 1. \tag{7.2}$$

Em termos das deflexões, tem-se

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \sim \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \ll 1. \tag{7.3}$$

A forma geral dos tensores de Green é dada por

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \right] \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right].
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Usando as hipóteses (7.2) e (7.3), obtém-se que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{yz} &= 0, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial y}, & \varepsilon_{xz} &= 0, \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right], & \varepsilon_{zz} &= 0.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Com o campo de deslocamentos (7.1), os tensores de Green são dados por

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_{yy} &= 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right).$$

A energia potencial  $\mathcal{V}$  do sistema é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \frac{1}{2} \int_{V_o} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV_o \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \int_A E \varepsilon_{xx}^2 dA + \int_A \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} dA \right\} dx.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Pelas definições da taxa de Poisson  $\gamma_{xy}$  e segundo a tensão de Piola-Kirchhoff [60]  $\tilde{\sigma}_{xx}$ , dados por

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \quad \tilde{\sigma}_{xx} = E\varepsilon_{xx}, \quad (7.9)$$

onde  $E$  é o módulo de Young, tem-se

$$\int_A \sigma_{xy} dA = \kappa' GA \gamma_{xy} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{strain}} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \int_A E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dA \right\} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa' GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Através de manipulações algébricas e reescrevendo a hipótese (7.2) como

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.12)$$

a energia potencial resulta como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{strain}} = & \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ \int_A \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 - 3 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} y - 2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 y^2 \right\} dA dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa' GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Integrando sobre a área da seção transversal, o quinto termo desaparece devido a hipótese de simetria da seção transversal. Por outro lado, considerando a definição de momento de inércia  $I$ , dada por

$$\int_A y^2 dA = I \quad (7.14)$$

então a energia potencial resulta na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{strain}} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left( EA \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (7.15)$$

A energia potencial armazenada na mola torcional é dada por

$$\mathcal{V}_{\text{spring}} = \frac{1}{2} k \theta^2, \quad (7.16)$$

onde  $\theta$  representa o ângulo de rotação da mola torcional. Este pode ser aproximado por  $\psi(t, 0)$ . Assim, a energia potencial total é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{total}} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left( EA \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + EI \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa' GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} k \psi^2(t, 0). \end{aligned} \quad (7.17)$$

A energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{beam}} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \\ = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} - y \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \\ = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - 2y \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + y^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \end{aligned} \quad (7.18)$$

ou seja,

$$\mathcal{T}_{\text{beam}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial t} \right]^2 + \rho I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\} dx. \quad (7.19)$$

A energia cinética da massa pontual em  $x = L$  é dada por

$$\mathcal{T}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} M_p \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] (t, L). \quad (7.20)$$

Portanto, a energia cinética total do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{total}} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial t} \right]^2 + \rho I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\} dx + \\ &+ \frac{1}{2} M_p \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] (t, L). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Assim,

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} (\mathcal{T}_{\text{total}} - \mathcal{V}_{\text{total}}) dt. \quad (7.22)$$

O trabalho virtual realizado pelas cargas transversal  $f(t, x)$  e axial  $p(t, x)$  é dado por

$$\delta W = \int_0^L (f(t, x) \delta v + p(t, x) \delta u) dx. \quad (7.23)$$

Para uma carga axial pontual  $N_o$  agindo em  $x = L$ , o trabalho virtual realizado por  $N_o$  é dado por

$$\delta W = N_o \delta u(t, L). \quad (7.24)$$

A variação das equações (7.22) é dada por

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = & \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \dot{U} + \frac{\partial v}{\partial t} \dot{V} \right) + \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} \dot{\Psi} + \right. \right. \\
& - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \left( U' + \frac{\partial v}{\partial x} V' \right) - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Psi' + \\
& \left. \left. - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) (V' - \Psi) \right] dx + \right. \\
& \left. + M_p \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \dot{V} + \frac{\partial u}{\partial t} \dot{U} \right] (t, L) - k(\psi \Psi)(t, 0) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Integrando por partes e agrupando termos com a mesma variação, obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = & \int_{t_i}^{t_f} \int_0^L \left[ -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right] (t, x) U(t, x) dx dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} \int_0^L \left[ -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EA \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] (t, x) V(t, x) dx dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} \int_0^L \left[ \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right] (t, x) V(t, x) dx dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} \int_0^L \left[ -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right] (t, x) \Psi(t, x) dx dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} \left[ \rho A \frac{\partial u}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right] U \Big|_0^L dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} \left[ \rho A \frac{\partial v}{\partial t} - EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right] V \Big|_0^L dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} \left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \Psi \Big|_0^L dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_i}^{t_f} -M_p \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} V + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} U \right] (t, L) dt + \\
& + \int_{t_i}^{t_f} (k\psi \Psi) (t, 0) dt.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Segundo o princípio de Hamilton, tem-se

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} (\mathcal{L} + \mathcal{W}) dt = 0. \tag{7.27}$$

Assim, as equações não-lineares e acopladas de movimento resultam em

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) = p(t, x) \\
\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = f(t, x) \\
\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = 0,
\end{array} \right. \tag{7.28}$$

com as correspondentes condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left[ \rho A \frac{\partial u}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) - M_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + N_o \right] (t, L) U(t, L) = 0 \\
\left[ \rho A \frac{\partial u}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right] (t, 0) U(t, 0) = 0 \\
\left[ \rho A \frac{\partial v}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) - M_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] (t, L) V(t, L) = 0 \\
\left[ \rho A \frac{\partial v}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \right] (t, 0) V(t, 0) = 0 \\
\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] (t, L) \Psi(t, L) = 0 \\
\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi \right] (t, 0) \Psi(t, 0) = 0.
\end{array} \right. \tag{7.29}$$



Para o caso considerado neste trabalho, as condições de contorno são assumidas da forma

$$u(t, 0) = 0$$

$$\left[ \rho A \frac{\partial u}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) - M_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + N_o \right] (t, L) = 0$$

$$v(t, 0) = 0$$

$$\left[ \rho A \frac{\partial v}{\partial t} - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) - M_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] (t, L) = 0$$

$$\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi \right] (t, 0) = 0$$

$$\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] (t, L) = 0.$$

(7.30)

Se gravidade e empuxo são incluídos nas equações, pode-se escrever

$$p(t, x) = (\rho_f A_f - \rho A) g \quad (7.31)$$

e

$$N_o = (\rho_f V_{submerged} - M_p) g, \quad (7.32)$$

onde  $\rho_f$  é a densidade do fluido,  $A_f$  é a área da seção transversal do volume deslocado da viga,  $A_f = \pi r_o^2$ ; e  $V_{sub}$  é o volume submerso da estrutura. Note que  $u(t, x)$  e  $v(t, x)$  são os deslocamentos de um elemento de viga a partir de sua posição original  $x$  uma vez que utiliza-se aqui a formulação Lagrangeana. As equações de movimento são não-lineares e acopladas.

Em termos matriciais o sistema não linear (7.29) pode ser escrito como

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbb{K}\mathbf{z} + \mathbf{N}(\mathbf{z}) = \mathbf{F} \quad (7.33)$$

com

$$\mathbf{z}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, x) = \begin{bmatrix} p(t, x) \\ f(t, x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.34)$$

e

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad \mathbb{K} = \begin{bmatrix} -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \kappa GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

O operador não-linear  $\mathbf{N}(\mathbf{z})$ , é definido por

$$\mathbf{N}(\mathbf{z}) = -EA \vec{n} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial x^2}, \quad (7.36)$$

sendo  $\vec{n} = (0 \ 1 \ 0)$ , e o operador  $\mathbf{A}(\cdot)$  dado por

$$\mathbf{A} \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

## 7.2 Respostas Livre e Livre-amortecida

Nas seções anteriores foram formuladas as equações de movimento do modelo não-linear acoplado, satisfazendo as hipóteses de uma viga de Timoshenko. As respostas para as vibrações não-lineares e acopladas são obtidas numericamente

para uma viga com as propriedades materiais<sup>2</sup> apresentadas na Tab. 7.1. Quando a resposta livre-amortecida é considerada, as propriedades do fluido utilizadas nas simulações são aquelas da Tab. 7.2.

Módulo de Young $E$	73 GPa
Densidade $\rho$	2770 kg/m <sup>3</sup>
Massa pontual $M_p$	0.236 kg
Raio externo $r_o$	0.0127 m
Raio interno $r_i$	0.011 m
Comprimento $L$	1.27 m
Cte. da mola torcional $k$	38.8 N/m
Fator de forma $\kappa$	2/3
Módulo de cisalhamento $G$	$8 \times 10^9$ N/m <sup>2</sup>

Tabela 7.1 Propriedades da viga.

Densidade da água $\rho_f$	999kg/m <sup>3</sup>
Profundidade da água $d$	1.05m
Coef.de massa adicionada $C_A$	1
Coef.de arrasto modificado $C_D$	1
Número de Reynolds $Re$	2718.7

Tabela 7.2 Propriedades do fluido.

Considera-se, primeiramente, uma viga uniforme vibrando livremente no vácuo em um ambiente livre de gravidade. Esta análise irá fornecer as características estruturais não-lineares, tais como frequências e modos de vibração. A

<sup>2</sup>São considerados aqui valores em escala para fins de comparação com [40].

seguir, considera-se uma viga vibrando na água sob ação de forças de gravidade e empuxo. A equação de Morison com amortecimento e termos de massa adicionada é utilizada a fim de simular essa condição.

Assume-se que a velocidade inicial é zero e que o deslocamento inicial corresponde ao conjunto<sup>3</sup> listado na Tabela 7.3. A obtenção das respostas não-lineares é obtida por meio de uma aproximação em diferenças finitas. Utiliza-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Todos os gráficos apresentados mostram o comportamento na extrutura em  $x = L$ .

IC1:	$u(0, x) = \frac{-1}{2} \left( \frac{P_0}{EI} \right)^2 \left( \frac{x^5}{20} - \frac{Lx^4}{4} + \left( L^2 - \frac{EIL}{k} \right) \frac{x^3}{3} + \frac{EIL^2x^2}{k} + \left( \frac{EIL}{k} \right)^2 x \right)$ $v(t, x) = -\frac{P_0}{EI} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \frac{EILx}{k} \right)$ $\psi(t, x) = 0$
IC2:	$u(0, x) = -0.00125x$ $v(t, x) = 0.05x$ $\psi(t, x) = 0$

Tabela 7.3 Conjunto de deslocamentos iniciais.

### 7.2.1 Movimento Longitudinal

Na Fig. 7.4 são apresentadas as simulações para as vibrações na direção axial considerando-se condições iniciais do tipo IC1. Note que o gráfico do espaço de fase mostra a existência de componentes de alta frequência para o deslocamento. A Fig. 7.5 mostra o espectrograma, mais conhecido como *PSD*, do movimento axial quando as condições iniciais IC1 da Tab.7.3 são utilizadas. No espectrograma observa-se algumas das baixas frequências para o movimento axial.

<sup>3</sup>Este conjunto de condições de contorno foi derivado e vem sendo utilizado por Benaroya et al. em seus trabalhos.

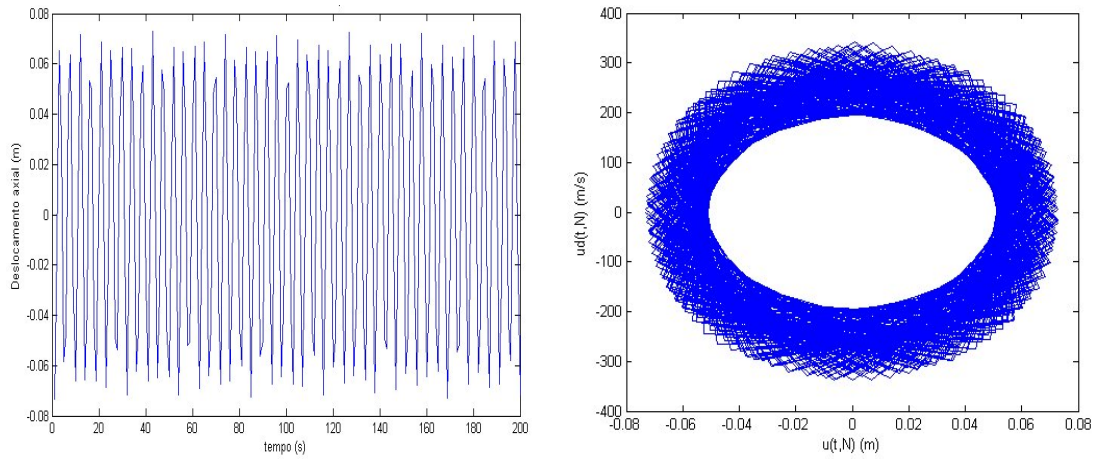


Figura 7.4 a) Vibração axial livre da Massa  $M_p$  com c.i. IC1; b) Espaço de fases para c.i. IC1.

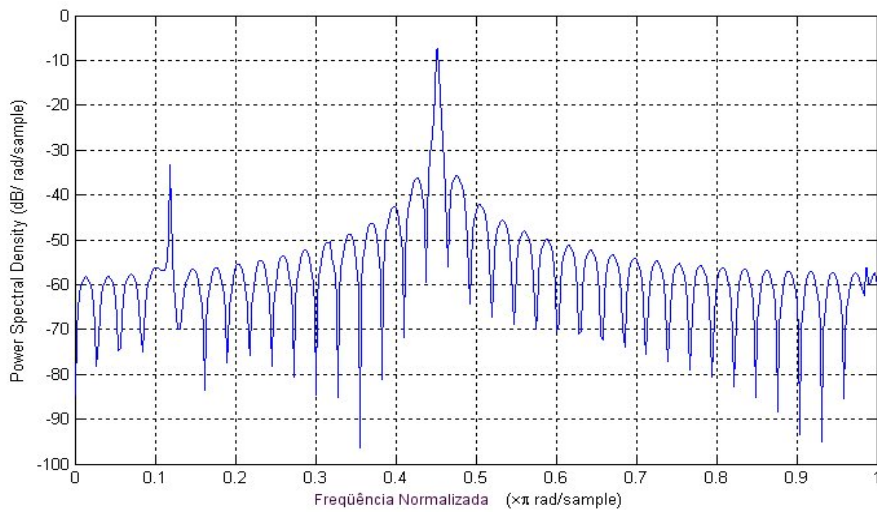


Figura 7.5 PSD para o movimento axial utilizando IC1.

Na Fig. 7.6 as simulações são também para as condições iniciais do tipo IC1, porém considerando que a viga está sujeita a uma carga axial distribuída do tipo

$$p(t, x) = \begin{cases} (\rho_f A_f - \rho A) g, & 0 < x < d \\ -\rho A g, & d < x < L, \end{cases} \quad (7.38)$$

onde  $\rho_f$ ,  $A_f$  e  $d$  foram devidamente definidos no capítulo anterior.

Aqui, o PSD do movimento axial forçado, quando IC1 é utilizado, apresenta aproximadamente as mesmas frequências de pico que o movimento livre.

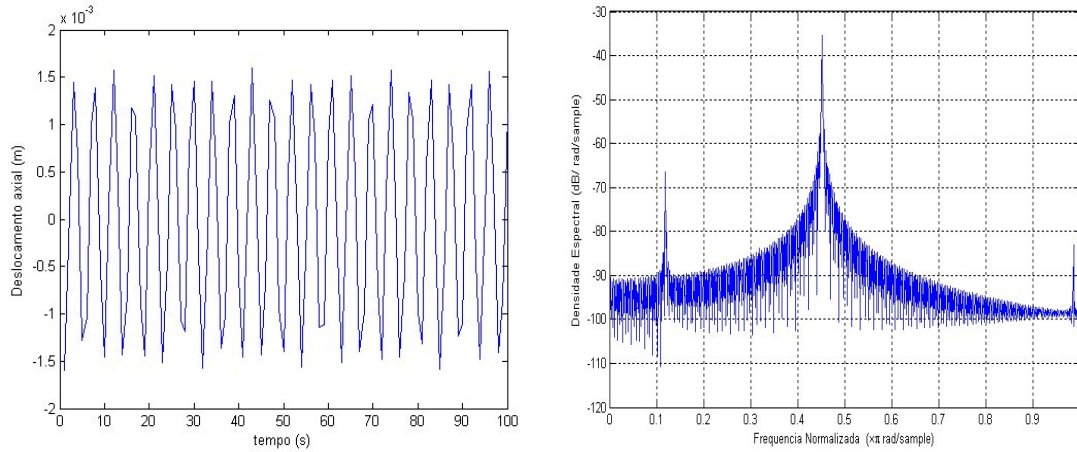


Figura 7.6 Deslocamento axial forçado e PSD considerando IC1.

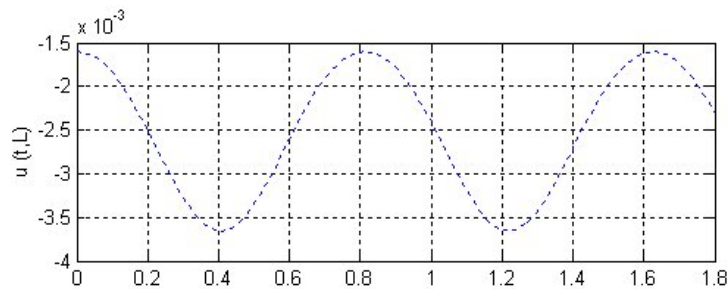


Figura 7.7 Resposta livre para os deslocamentos axial  $u(t, L)$ , usando IC1 para um intervalo de tempo de aproximadamente 2s.

Observa-se, pelas Figuras 7.6a ou 7.7, que as vibrações longitudinais da viga apresentam um comportamento senoidal com baixa amplitude de vibração, conforme deveria ocorrer de fato.

## 7.2.2 Movimento Transversal

Na Figura 7.8 são apresentados os resultados para as vibrações livres de uma viga de Timoshenko com condições iniciais do tipo IC1. Nota-se que os transversal e rotacional comportam-se também de maneira senoidal. A amplitude de vibração do deslocamento transversal sendo inferior àquela da rotação.

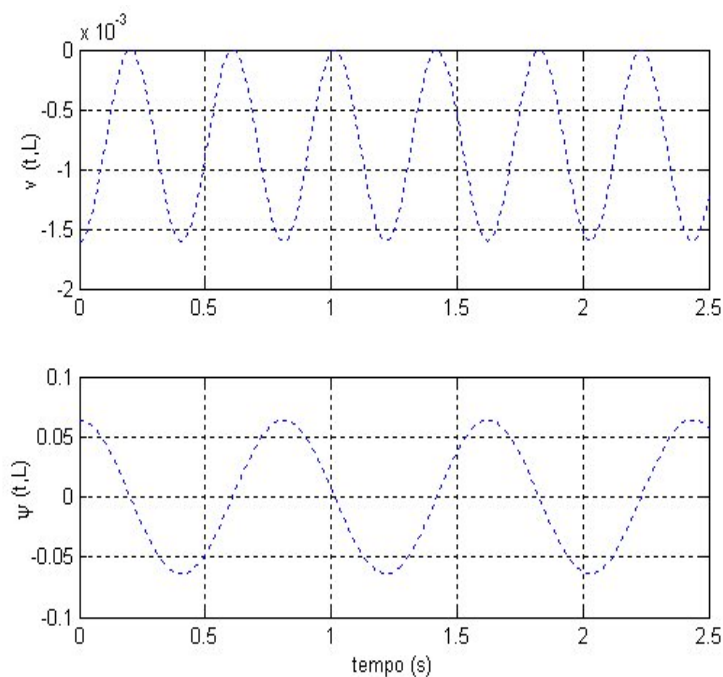


Figura 7.8 Resposta livre para o deslocamento transversal  $v(t, L)$  e rotação  $\psi(t, L)$  usando IC1.

## 7.2.3 Resposta livre-amortecida

Neste caso, considera-se uma viga sujeita à ação de gravidade e empuxo. Assumindo que o fluido não exerce força tangente à estrutura, a carga axial relaciona-

se apenas à gravidade, ou seja,

$$p(t, x) = \begin{cases} (\rho_f A_f - \rho A) g, & 0 < x < d \\ -\rho A g, & d < x < L, \end{cases} \quad (7.39)$$

onde  $d$  representa a profundidade da água. A força transversal é dada pela equação (6.15), desconsiderando os efeitos de ondas e correntes. Assim a expressão (6.15) é reescrita na forma

$$f(t, x) = C_D \rho_f r_o (\dot{u}v' - \dot{v}) |\dot{u}v' - \dot{v}| - C_A \rho_f \pi r_o^2 (-\ddot{u}v' + \ddot{v}). \quad (7.40)$$

Quando a carga transversal distribuída corresponde à equação de Morison modificada (7.40), o movimento é denominado *livre-amortecido*. Se o forçante corresponder à equação de Morison completa, ou seja, sujeita as ações de ondas e correntes, só então o movimento será denominado *forçado*.

São consideradas duas situações. A primeira situação consiste em assumir a carga axial nula, ou seja,  $p(t, x) = 0$ , com a força transversal  $f(t, x)$  satisfazendo a equação de Morison modificada (7.40) e utilizando as condições iniciais IC1. Os resultados referentes a essa situação são apresentados na Tab. 7.4. Mais precisamente, na Tab. 7.4 são apresentados os gráficos referentes ao movimento livre-amortecido da estrutura tanto na direção axial como na transversal, lembrando que a direção transversal engloba o deslocamento transversal e o giro (ou rotação) da estrutura, conforme definido previamente.



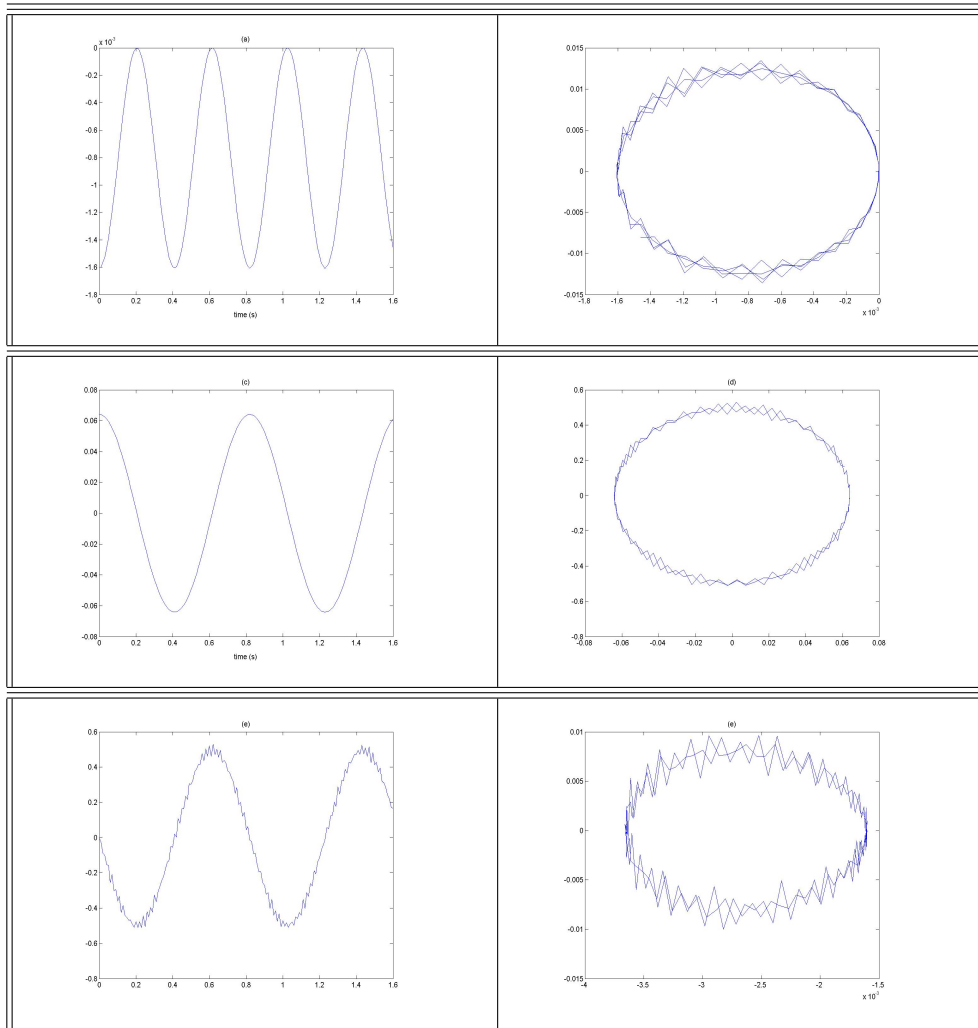


Tabela 7.4 Resposta livre-amortecida em  $x = L$  utilizando IC1. (a) Deslocamento axial, (b) Fase axial (c) Deslocamento transversal, (d) Fase transversal (e) Giro, (f) Fase para o giro.

Outra situação de interesse, consiste em considerar a carga transversal  $f(t, x)$  variando harmonicamente no tempo, ou seja,  $f(t, x) = \rho_f A_f \cos(\omega_f t)$ . Para esse caso são apresentados os deslocamentos transversais no extremo  $x = L$  para condições iniciais nulas e variadas frequências de entrada  $\omega_f$  em rad/s, escolhidas tais que sejam aproximadamente o dobro das primeiras frequências naturais. Os resultados são apresentados na Tab. 7.5.

Os gráficos da Tab.7.5 representam subharmônicos, ou seja, são respostas periódicas a um forçante harmônico com frequência de entrada  $\omega_f$  a qual é aproximadamente um múltiplo de uma frequência natural de vibração. Os subharmônicos podem ser observados tanto em sistemas lineares quanto não lineares e uma discussão mais detalhada para o caso linear é apresentada em seções posteriores. Foram escolhidas frequências de entrada sendo aproximadamente o dobro das naturais porque as equações de movimento não-lineares (7.28) apresentam termos não lineares de segunda ordem e isso indicou que a resposta poderia exibir, e de fato exibiu, subharmônicos [63].

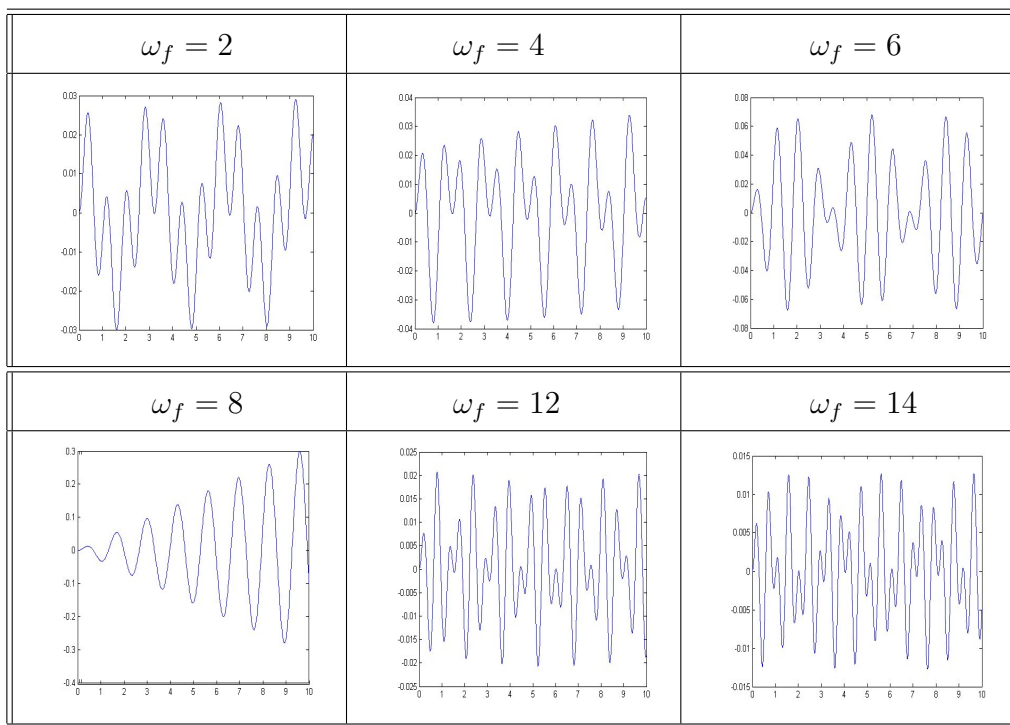


Tabela 7.5 Deslocamento transversal em  $x = L$  para condições iniciais nulas.

Aqui, escolheram-se valores de  $\omega_f$  variando de 2 a 14 rad/s. Nota-se que a resposta cresce conforme  $\omega_f$  aproxima a frequência natural de aproximadamente 7.521 rad/s, mas o estado subharmônico ainda não ocorre. O subharmônico ocorre

para  $\omega_f \approx 15.04 \text{ rad/s}$ , aproximadamente. Tal resultado pode ser observado na Fig.7.9.

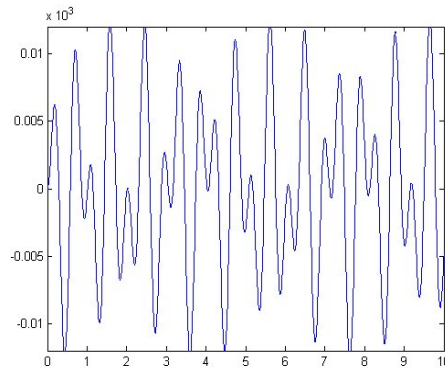


Figura 7.9 Resposta livre para o deslocamento transversal e fase (modelo de Euler-Bernoulli) usando IC1.

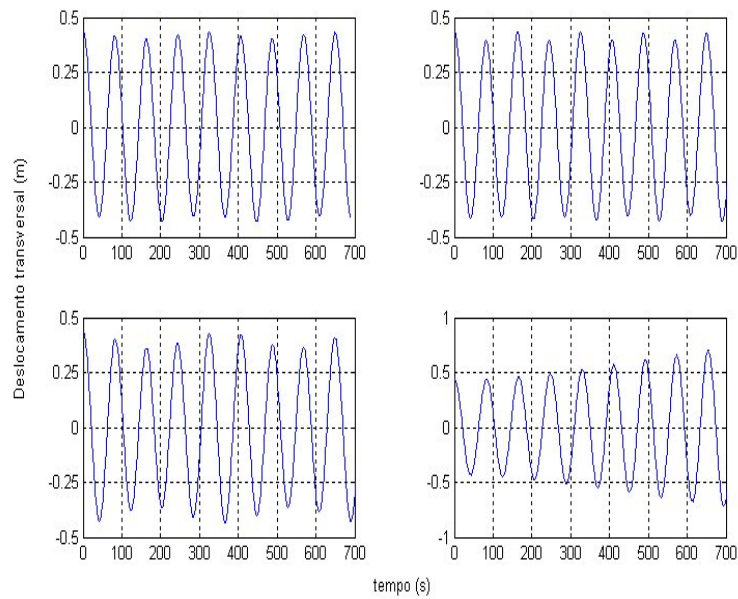


Figura 7.10 Deslocamento transversal em  $x = L$  para condições iniciais IC1 e  $\omega_f = 2 \text{ rad/s}$  até  $\omega_f = 8 \text{ rad/s}$ .

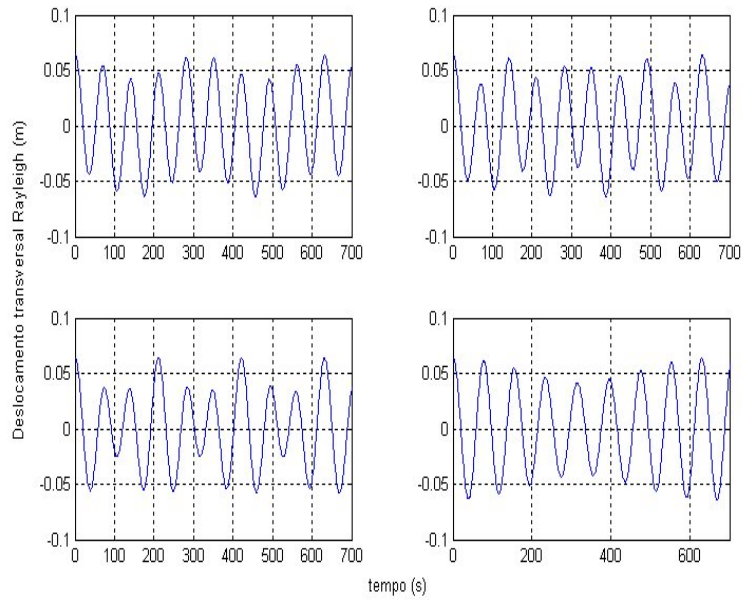


Figura 7.11 Deslocamento transversal em  $x = L$  para condições iniciais IC1 para o modelo de Rayleigh.

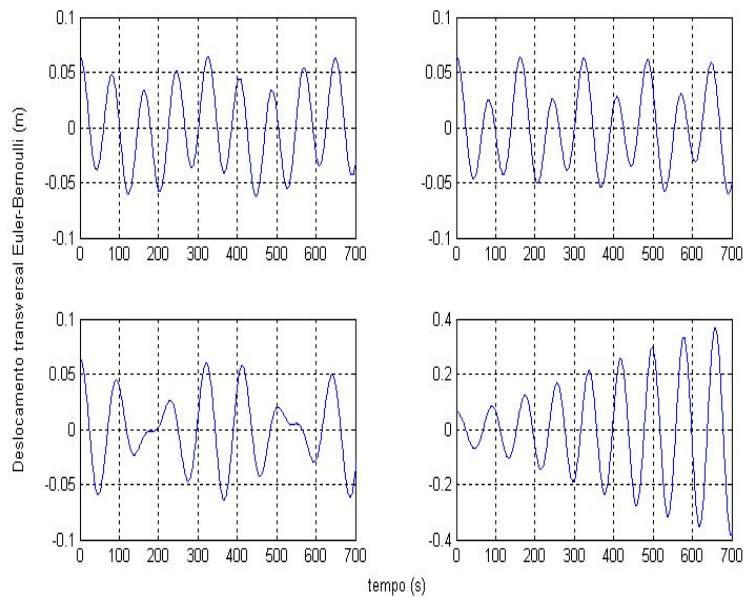


Figura 7.12 Deslocamento transversal em  $x = L$  para condições iniciais IC1 para o modelo de Euler-Bernoulli.

Para o comportamento linear, o movimento transversal (para o deslocamento e giro) e longitudinal são desacoplados e podem ser descritos efetivamente por modelos lineares.

## 7.3 Modelos Lineares

### 7.3.1 Linearização

Soluções estacionárias, para o modelo de Timoshenko não-linear são obtidas a partir do sistema

$$\begin{aligned}
 -EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) &= p(t, x), \\
 -EA \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) &= f(t, x), \quad (7.41) \\
 -EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Uma forma de linearizar o sistema anterior consiste em assumir soluções constantes na direção axial, isto é, soluções constantes em  $u$ . Dessa forma a equação (7.41a) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (7.42)$$

Integrando-a e utilizando a relação (7.31) para  $p(t, x)$  e as condições de contorno (7.30b), obtém-se

$$EA \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = (\rho A - \rho_f A_f) g(x - L) + N_o. \quad (7.43)$$

Substituindo a expressão anterior em (7.41b), obtém-se a equação estacionária para o movimento transversal

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ ((\rho A - \rho_f A_f) g(x - L) + N_o) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \kappa G A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = f(t, x). \quad (7.44)$$

A equação estacionária para o giro é obtida diretamente, sem qualquer manipulação algébrica, de (7.41c).

Outra forma de derivar as equações de movimento para o modelo linear consiste em considerá-lo como um caso especial do modelo acoplado não-linear quando a vibração axial pode ser negligenciada. Tomando  $u(t, x) = 0$ , a parte axial da equação de movimento (7.28a) é reduzida a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E A \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) = (\rho A - \rho_f A_f) g. \quad (7.45)$$

Integrando e usando as condições de contorno (7.30b), obtém-se

$$E A \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = (\rho A - \rho_f A_f) g(x - L) + N_o. \quad (7.46)$$

As partes transversal e rotacional nas Eqs. (7.44, 7.46) podem ser escritas como

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ ((\rho A - \rho_f A_f) g(x - L) + N_o) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \kappa G A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = f(t, x) \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - E I \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = 0, \end{cases} \quad (7.47)$$

e as condições de contorno são resumidas a

$$v(t, 0) = 0$$

$$\left[ \rho A \frac{\partial v}{\partial t} - [(\rho A - \rho_f A_f) g(x - L) + N_o] \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) - M_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] (t, L) = 0$$

$$\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi \right] (t, 0) = 0$$

$$\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] (t, L) = 0.$$

(7.48)

Desconsiderando-se as forças gravitacional e de empuxo, o sistema linearizado de equações de movimento resulta como

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - N_o \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = f(t, x) \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = 0, \end{cases} \quad (7.49)$$

com as seguintes condições de contorno

$$v(t, 0) = 0$$

$$\left[ N_o \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) - M_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] (t, L) = 0$$

(7.50)

$$\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} + k\psi \right] (t, 0) = 0$$

$$\left[ \rho I \frac{\partial \psi}{\partial t} - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] (t, L) = 0.$$

Se o deslocamento transversal e rotacional são negligenciados na resposta total,  $v(t, x) = 0$  e  $\psi(t, x) = 0$ , obtém-se a equação de movimento e condições de contorno para o modelo axial linear

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(t, x) \quad (7.51)$$

e

$$u(t, 0) = 0 \quad (7.52)$$

$$\left[ \rho A \frac{\partial u}{\partial t} - EA \frac{\partial u}{\partial x} - M_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + N_o \right] (t, L) = 0.$$

Matricialmente, tem-se

$$\mathbf{M}\mathbf{w}_{tt}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t, x) = \mathbf{F}(t, x), \quad (7.53)$$

onde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.54)$$

$\mathbf{M}$  é um operador constante definido como

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho Au \\ \rho I \alpha \end{pmatrix}, \quad (7.55)$$

e  $\mathbf{K}$  é um operador diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes definido por

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}\mathbf{w}) + \mathcal{C}\mathbf{w} = \mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathcal{C}\mathbf{w}. \quad (7.56)$$

Aqui

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{pmatrix} \quad (7.57)$$



juntamente às condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbf{I}\mathbf{w}(t, 0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t, L) + \mathbf{B}_2\mathbf{w}'(t, L) + \mathbf{B}_3\dot{\mathbf{w}}(t, L) + \mathbf{B}_4\ddot{\mathbf{w}}(t, L) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (7.58)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz Identidade de ordem  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo  $2 \times 1$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa GA \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_2 &= \begin{pmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_3 &= \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_4 &= \begin{pmatrix} -M_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

### 7.3.2 Vibrações Modais

A fim de determinar os modos de vibração, substitui-se  $\mathbf{w} = e^{i\omega t}\Phi(x)$  na equação (7.53) na forma homogênea, onde

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} v(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix}. \quad (7.60)$$

Isto resulta na equação diferencial modal

$$-M\omega^2\Phi(x) + K\Phi(x) = 0, \quad (7.61)$$

a qual pode ser convenientemente escrita como a equação diferencial matricial e espacial de segunda ordem, isto é,

$$\mathbb{M}\Phi''(x) + \mathbb{C}\Phi'(x) + \mathbb{K}\Phi(x) = 0, \quad (7.62)$$

com

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.63)$$

$$\mathbb{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho A & 0 \\ 0 & \kappa GA - \omega^2 \rho I \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

onde  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{K}$  são as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez, respectivamente. Observa-se que a frequência  $\omega$  está presente na equação (7.62) tal que a amplitude  $\Phi$  dependerá sobre  $\omega$ . O valor de  $\omega$  será então caracterizado uma vez que sejam satisfeitas as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$ . Assim,

$$\mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\Phi'(0) = \mathbf{0}, \quad (7.64)$$

$$\mathcal{C}\Phi(L) + \mathcal{D}\Phi'(L) = \mathbf{0}, \quad (7.65)$$

onde  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são matrizes  $2 \times 2$  dadas por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k - i\omega\rho I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} i\omega(\rho A - i\omega M_p) & \kappa GA \\ 0 & i\omega\rho I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} -(N_o + \kappa GA) & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}.$$

Agora, segue-se a determinação dos modos  $\Phi(x, \omega)$  para cada frequência  $\omega$ . Os modos podem ser convenientemente escritos na forma

$$\Phi(x, \omega) = \Phi_1(x, \omega)\mathbf{C}_1 + \Phi_2(x, \omega)\mathbf{C}_2, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (7.66)$$

onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são matrizes  $2 \times 2$  que constituem uma base matricial para (7.62) em  $[0, L]$ , e os vetores  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ , são  $2 \times 1$  e obtidos substituindo-se  $\Phi(x, \omega)$  nas condições de contorno. Entre várias possibilidades de escolha para uma base matricial, será utilizada

$$\Phi(x, \omega) = \mathbf{h}(x, \omega)\mathbf{C}_1 + \mathbf{h}'(x, \omega)\mathbf{C}_2, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (7.67)$$

ou, no caso de utilizar-se valores iniciais, a seguinte forma resulta mais conveniente

$$\Phi(x, \omega) = \mathbf{h}_0(x, \omega)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(x, \omega)\dot{\Phi}(0), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (7.68)$$

onde

$$\mathbf{h}_0(x) = \mathbf{h}'(x)\mathbb{M} + \mathbf{h}(x)\mathbb{C}, \quad (7.69)$$

$$\mathbf{h}_1(x) = \mathbf{h}(x)\mathbb{M} \quad (7.70)$$

são soluções matriciais de (7.62) com os valores iniciais

$$\mathbf{h}_0(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}'_0(0) = \mathbf{0} \quad (7.71)$$

$$\mathbf{h}_1(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'_1(0) = \mathbf{I}. \quad (7.72)$$

Considerando-se a solução (??), é necessário que

$$\mathcal{A}[\mathbf{h}_0(0)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(0)\dot{\Phi}(0)] + \mathcal{B}[\mathbf{h}'_0(0)\Phi(0) + \mathbf{h}'_1(0)\dot{\Phi}(0)] = \mathbf{0}, \quad (7.73)$$

$$\mathcal{C}[\mathbf{h}_0(L)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(L)\dot{\Phi}(0)] + \mathcal{D}[\mathbf{h}'_0(L)\Phi(0) + \mathbf{h}'_1(L)\dot{\Phi}(0)] = \mathbf{0}. \quad (7.74)$$

A partir dos valores iniciais (7.71) e (7.72), resulta

$$\mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0}, \quad (7.75)$$

$$[\mathcal{D}\mathbf{h}'_0(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_0(L)]\Phi(0) + [\mathcal{D}\mathbf{h}'_1(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_1(L)]\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0}. \quad (7.76)$$

Na forma matricial

$$\mathcal{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (7.77)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma matriz bloco  $2 \times 2$  com cada bloco sendo  $2 \times 2$ ; aqui  $\mathbf{c}$  é um vetor  $2 \times 1$  com blocos-linha  $2 \times 1$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{D}\mathbf{h}'_0(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_0(L) & \mathcal{D}\mathbf{h}'_1(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_1(L) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \dot{\Phi}(0) \end{bmatrix}. \quad (7.78)$$

Para obter-se soluções não-nulas de (7.77) é necessário e suficiente que o determinante da matriz  $\mathcal{U}$  seja nula, ou seja,

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0. \quad (7.79)$$

Como  $\mathcal{A}$  é uma matriz não-singular então a equação característica pode ser simplificada. Substituindo (7.71) e (7.72) em (7.75), segue que

$$\Phi(0) = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\dot{\Phi}(0). \quad (7.80)$$

Agora substituindo (7.71), (7.72) e (7.80) em (7.76), obtém-se

$$[\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})]\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0}. \quad (7.81)$$

Portanto, a equação característica resulta em

$$\Delta(L) = \det(\mathbf{D}) = 0, \quad (7.82)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz  $2 \times 2$  dada por

$$\mathbf{D} = [\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})]. \quad (7.83)$$

Por outro lado, note que os coeficientes matriciais das condições de contorno  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  podem ser escritos como

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{Re} + i \mathcal{C}_{Im}, \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_{Re} + i \mathcal{D}_{Im} \quad (7.84)$$

tal que a matriz  $\mathbf{D}$  resulta composta por uma parte real e uma parte imaginária, isto é,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{Re} + i \mathbf{D}_{Im} \quad (7.85)$$

onde

$$\mathbf{D}_{Re} = \begin{bmatrix} aD_0(L) & M_p\omega^2 D_1(L) + aD_2(L) - (a + N_o)D'_1(L) - \frac{cb}{e}D_3(L) \\ -abh'_{21}(L) & -bD'_2(L) + D_4(L) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{Im} = \begin{bmatrix} ac\omega h_{11}(L) & c\omega D_1(L) - \frac{b(a + N_o)}{e\omega}D'_3(L) + \frac{b}{e\omega}D_3(L) + aD_4(L) \\ ae\omega h_{21}(L) & e\omega D_2(L) - \frac{b^2}{e\omega}D'_4(L) \end{bmatrix} \quad (7.86)$$

com

$$D_0(x) = M_p\omega^2 h_{11}(x) + ah_{21}(x) - (a + N_o)h'_{11}(x)$$

$$D_1(x) = bh_{12}(x) + \frac{b}{k}(bh'_{12}(x) - ah_{11}(x)), D_3(x) = bh'_{12}(x) - ah_{11}(x),$$

$$D_2(x) = bh_{22}(x) + \frac{b}{k}(bh'_{22}(x) - ah_{21}(x)),$$

$$D_4(x) = bh'_{22}(x) - ah_{21}(x).$$

e

$$\begin{aligned}
 h_{11}(x) &= (e\omega^2 - a)h(x) + bh''(x), \\
 h_{12}(x) &= -h_{21}(x) = ah'(x), \\
 h_{22}(x) &= c\omega^2 h(x) + ah''(x).
 \end{aligned}
 \tag{7.88}$$

Segue que para cada raiz da equação característica (7.82), tem-se o modo

$$\Phi(x, \omega) = [\mathbf{h}(x, \omega) (-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{M}) - \mathbf{h}'(x, \omega)\mathbf{MA}^{-1}\mathbf{B}] \dot{\Phi}(0)
 \tag{7.89}$$

para  $\Phi(0)$  um vetor não nulo arbitrário. Aqui enfatizou-se a dependência tanto da equação característica quanto dos modos sobre a frequência.

Tem-se, assim, o modo para o deslocamento

$$v(t, x) = \alpha (-bh''(x, \omega) + (a - e\omega^2) h(x, \omega)) - \beta \frac{h'(x, \omega)}{b}
 \tag{7.90}$$

e o modo para a rotação

$$\psi(t, x) = \alpha \frac{h'(x, \omega)}{b} + \beta \left( \frac{h''(x, \omega) - c\omega^2 h(x, \omega)}{ab} \right)
 \tag{7.91}$$

para constantes escalares arbitrárias  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 7.3.3 Vibrações Longitudinais

Neste caso, utiliza-se a configuração física correspondente a uma viga fixa no extremo  $x = 0$  e que possui uma massa atarrachada no extremo  $x = L$ , conforme lustrado na Figura 7.3.

Para o movimento longitudinal ou axial, as vibrações são descritas pela equação

$$\rho A_o \ddot{u}(t, x) - EA_o u''(t, x) = 0, \quad (7.92)$$

e pelas condições de contorno

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= 0, \\ [EA_o u' + M_p \ddot{u}](t, L) &= N_0. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Separando variáveis e aplicando as condições de contorno, a solução espacial é dada por

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 h(x) + c_2 h'(x) \\ c_1 &= 1, \quad c_2 = 0, \end{aligned} \quad (7.94)$$

com

$$h(x) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\beta_j x)}{\beta_j}, \quad (7.95)$$

onde  $\beta = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \omega$  satisfaz a equação transcendental

$$\text{tg}(\beta L) = \frac{\rho A}{M_p \beta} \quad (7.96)$$

e as frequências naturais são dadas por

$$\omega_n = \beta_n \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.97)$$

### 7.3.4 Outros modelos lineares transversais

O movimento transversal pode ser descrito por qualquer um dos quatro modelos clássicos de vigas (Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov ou Timoshenko) satis-

fazendo condições de contorno adequadas.<sup>4</sup> O modelo de Timoshenko foi discutido nas seções anteriores.

Se a vida for do tipo **Euler-Bernoulli**, as vibrações transversais serão descritas pelo modelo

$$\rho A \ddot{v}(t, x) + EI v^{(iv)}(t, x) = f(t, x) \quad (7.98)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= 0, \\ [kv' - EIv''] (t, 0) &= 0, \\ [EIv''' - M_p \ddot{v}] (t, L) &= 0, \\ EIv''(t, L) &= 0. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Para as vibrações transversais lineares governadas segundo esta teoria, a fórmula de variação de parâmetros, ou seja, a solução do problema, é dada por

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \int_0^L \left[ \dot{h}(t, x, \xi) v(0, \xi) + h(t, x, \xi) \dot{v}(0, \xi) \right] d\xi + \\ &+ \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \\ &+ \frac{M_p}{\rho A} \left( \dot{h}(t, x, L) v(0, L) + h(t, x, L) \dot{v}(0, L) \right) \end{aligned} \quad (7.100)$$

onde

$$h(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j(x) X_j(\xi)}{\|X_j\|^2} h_j(t) \quad (7.101)$$

---

<sup>4</sup>A configuração física para o modelo linear transversal consiste de uma viga apoiada por uma mola torcional no extremo  $x = 0$  e que possui uma massa atarrachada no extremo  $x = L$ .



com<sup>5</sup>

$$X(x) = c_1 h_{eb}(x) + c_2 h'_{eb}(x) + c_3 h''_{eb}(x) + c_4 h_{eb}(x) \quad (7.102)$$

solução do problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} X(x) &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ kX'(0) - EIX''(0) &= 0 \\ EIX'''(L) - M_p \omega^2 X(L) &= 0 \\ EIX''(L) &= 0, \end{aligned} \quad (7.103)$$

onde a função

$$h_{eb}(x) = \frac{1}{2} \frac{\text{senh}(\alpha_j x) - \text{sen}(\alpha_j x)}{\alpha_j^3} \quad (7.104)$$

satisfaz o problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 h_{eb}(x)}{\partial x^4} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} h_{eb}(x) &= 0 \\ h_{eb}(0) = h'_{eb}(0) = h''_{eb}(0) &= 0 \\ h'''_{eb}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (7.105)$$

e

$$h_j(t) = \frac{\text{sen}(\omega_j t)}{\omega_j} \quad (7.106)$$

satisfaz o problema com condições iniciais impulsivas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} + \omega^2 h(t) &= 0 \\ h(0) &= 0 \\ \rho A \dot{h}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (7.107)$$

---

<sup>5</sup>Os valores das constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  serão definidos a seguir.

Aqui

$$c_4 = 0, \quad c_3 = \frac{EI(\sigma_2 + \sigma_1'')}{\sigma_4(k\sigma_1 - EI\sigma_1' + \sigma_3)}, \quad c_2 = \frac{k}{EI} c_3, \quad c_1 = \frac{(k\sigma_1 - EI\sigma_1')}{EI} c_3, \quad (7.108)$$

com

$$\sigma_1 = M_p \lambda^2 h'(L) + \rho A h(L), \quad \sigma_2 = -\rho A h'(L), \quad (7.109)$$

$$\sigma_3 = -EI(kh'''(L) - \rho A h(L)), \quad \sigma_4 = EIh'''(L) - M_p \lambda^2 h(L)$$

para  $h(L)$ ,  $h'(L)$ ,  $h''(L)$  e  $h'''(L)$  não simultaneamente nulos.

Para uma viga do tipo **Rayleigh** as vibrações transversais devem satisfazer

$$\rho A_o \ddot{v}(t, x) - N_0 v''(t, x) - \rho I_o \ddot{v}''(t, x) + E I v^{(iv)}(t, x) = f(t, x) \quad (7.110)$$

juntamente as condições

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= 0 \\ [k v' - E I v''] (t, 0) &= 0 \\ [E I v''' - \rho I \ddot{v}' - N_0 v' - M_p \ddot{v}] (t, L) &= 0 \\ E I v''(t, L) &= 0. \end{aligned} \quad (7.111)$$

Neste caso, a fórmula de variação de parâmetros é dada por

$$\begin{aligned}
v(t, x) = & \int_0^L \rho A_o \left[ \dot{h}(t, x, \xi) v(0, \xi) + h(t, x, \xi) \dot{v}(0, \xi) \right] d\xi + \\
& - \int_0^L \rho I_o \left[ \dot{h}(t, x, \xi) v''(0, \xi) + h(t, x, \xi) \dot{v}''(0, \xi) \right] d\xi + \\
& + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \\
& + M_p \left( \dot{h}(t, x, L) v(0, L) + h(t, x, L) \dot{v}(0, L) \right) + \\
& + \rho I \left( \dot{h}(t, x, L) v'(0, L) + h(t, x, L) \dot{v}'(0, L) \right) + \\
& + \rho I \int_0^L \left[ \ddot{h}'(t - \tau, x, L) v(\tau, L) - h(t - \tau, x, L) \ddot{v}'(\tau, L) + \right. \\
& \left. + h'(t - \tau, x, L) v(\tau, L) - h(t - \tau, x, L) v'(\tau, L) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{7.112}$$

onde  $h(t, x, \xi)$  e  $X_j(x)$  são dadas pelas expressões (7.6) e (7.6), respectivamente.

Aqui

$$h_r(x) = \frac{\delta \operatorname{senh}(\epsilon x) - \epsilon \operatorname{sen}(\delta x)}{\delta \epsilon (\epsilon^2 + \delta^2)} \tag{7.113}$$

com

$$\epsilon = \sqrt{\left(a^4 + \frac{g^4}{4}\right)^{1/2} - \frac{g^2}{2}}, \quad \delta = \sqrt{\left(a^4 + \frac{g^4}{4}\right)^{1/2} + \frac{g^2}{2}} \tag{7.114}$$

e

$$g^2 = \frac{\rho I \omega^2 - N_0}{EI}, \quad a^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \tag{7.115}$$

com  $X(x)$  satisfazendo o problema

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + g^2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - a^4 X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \tag{7.116}$$

$$kX'(0) - EIX''(0) = 0$$

$$EIX'''(L) + (\rho I\omega^2 - N_0) X'(L) + M_p\omega^2 X(L) = 0$$

$$EIX''(L) = 0,$$

onde a função  $h_r(x)$  satisfaz o problema de contorno

$$\frac{\partial^4 h_r(x)}{\partial x^4} + g^2 \frac{\partial^2 h_r(x)}{\partial x^2} - a^4 h_r(x) = 0, \quad h_r(0) = h_r'(0) = h_r''(0) = 0, \quad h_r'''(0) = 1 \tag{7.117}$$

e

$$h_j(t) = \frac{\text{sen}(\omega_j t)}{\omega_j} \tag{7.118}$$

satisfaz o problema com condições iniciais impulsivas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} + \omega^2 h(t) &= 0 \\ h(0) &= 0, \quad \dot{h}(0) = 1. \end{aligned} \tag{7.119}$$

A seguir são consideradas simulações comparando estes dois modelos. Todos os gráficos apresentados em duas dimensões correspondem a resposta em  $x = L$ , ou seja, na massa atarrachada.

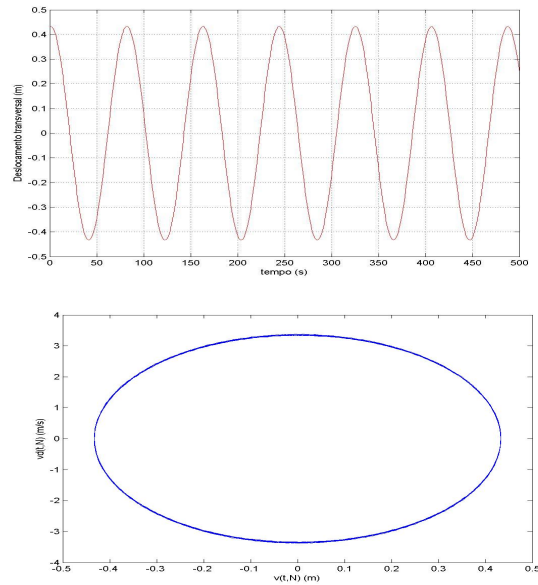


Figura 7.13 Resposta livre para o deslocamento transversal e fase (modelo de Euler-Bernoulli) usando IC1.

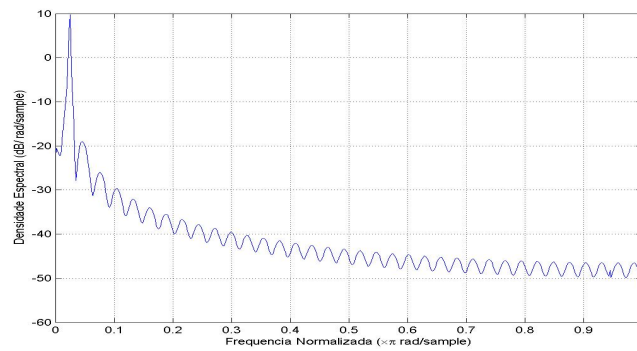


Figura 7.14 PSD para o modelo de Euler-Bernoulli para IC1.

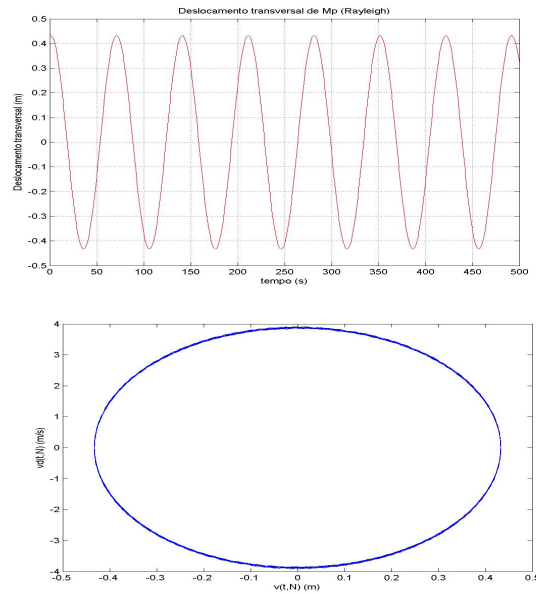


Figura 7.15 Resposta livre para o deslocamento transversal e fase (modelo de Rayleigh) usando IC1.

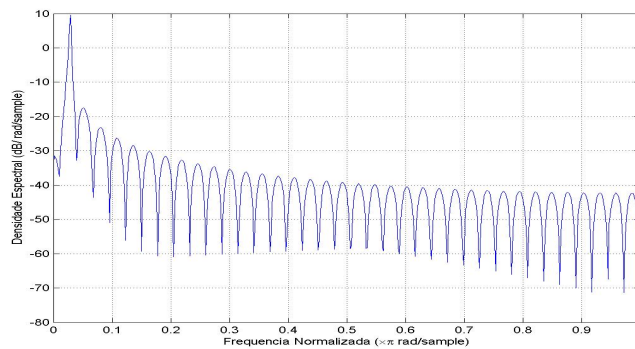


Figura 7.16 PSD para o modelo de Rayleigh para IC1

Na Fig.7.17 são comparadas as respostas entre os modelos de Euler-Bernoulli e Rayleigh utilizando as condições iniciais do tipo IC1.

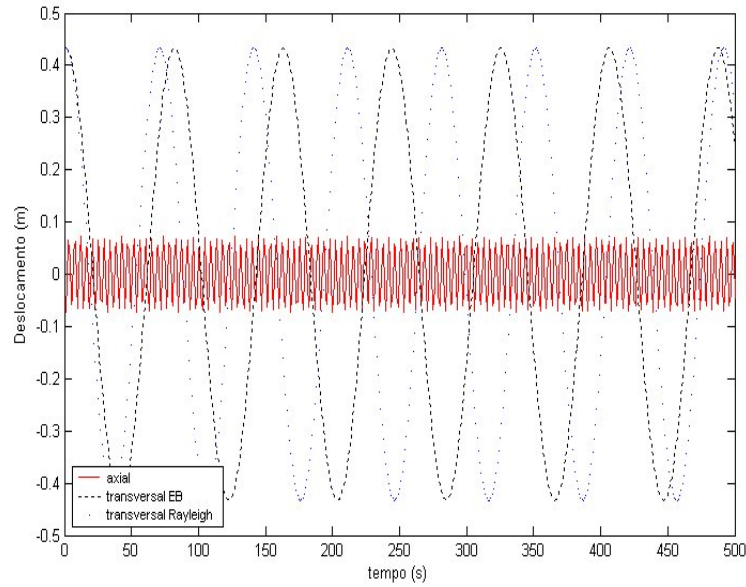


Figura 7.17 Comparação entre os deslocamentos transversais para os modelos de Rayleigh e Euler-Bernoulli

Nas Figs.7.19 e 7.20 são apresentadas as respostas para uma carga transversal  $f(t, x)$  variando harmonicamente no tempo, ou seja,

$$f(t, x) = \begin{cases} \rho_f A_f \cos(\omega_f t), & 0 < x < d \\ 0, & d < x < L \end{cases} \quad (7.120)$$

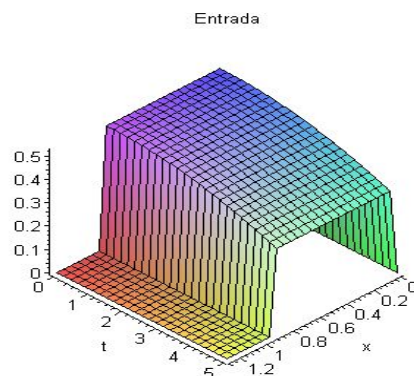


Figura 7.18 Entrada cossenoidal  $f(t, x)$ .

Para esse caso são apresentados deslocamentos transversais no extremo  $x = L$  para  $\omega_f$  variando de 2 à 12 rad/s. Nas Figs.7.19 e 7.20 tem-se os resultados considerando-se o modelo de Rayleigh; na Fig.7.21 para o modelo de Euler-Bernoulli.

Note que em sistemas lineares a resposta é composta por uma solução homogênea e uma solução particular. A solução homogênea oscila segundo as frequências naturais e a solução particular oscila segundo a frequência de entrada  $\omega_f$ . A magnitude da solução particular depende das condições iniciais, frequência de entrada  $\omega_f$  e da amplitude do forçante. O estado subharmônico ocorre quando a frequência forçante equivale a duas vezes a frequência natural, e a magnitude da solução homogênea é grande comparada à da solução particular <sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Uma abordagem detalhada de subharmônicos e superharmônicos é encontrada em [63]



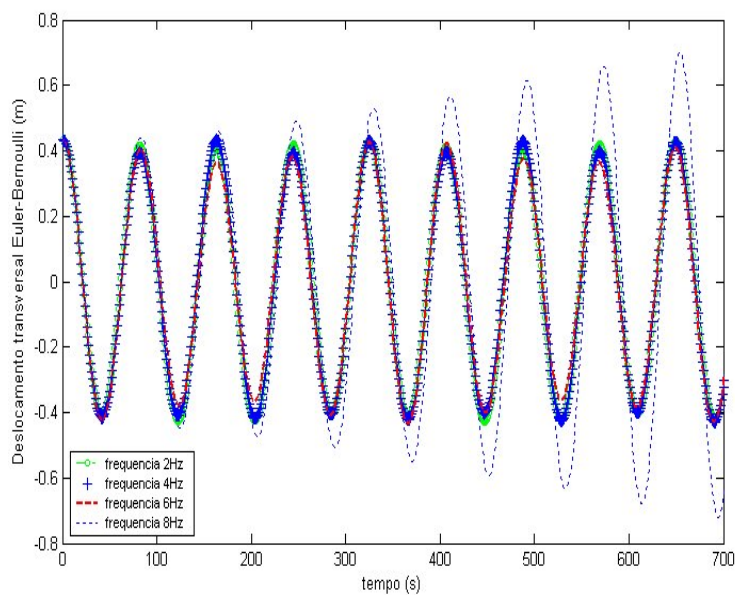


Figura 7.19 Resposta forçada harmônica para o modelo de Rayleigh.

Observa-se na Fig.7.19 que o sistema responde de acordo com a oscilações devidas a frequência natural conforme é forçado com frequências próximas ao dobro das frequências naturais de aproximadamente 2,371Hz. O mesmo ocorre na Fig.7.20 para a frequência natural de aproximadamente 15,04Hz. O mesmo não se verifica nos resultados para o modelo de Euler-Bernoulli na Fig7.21.

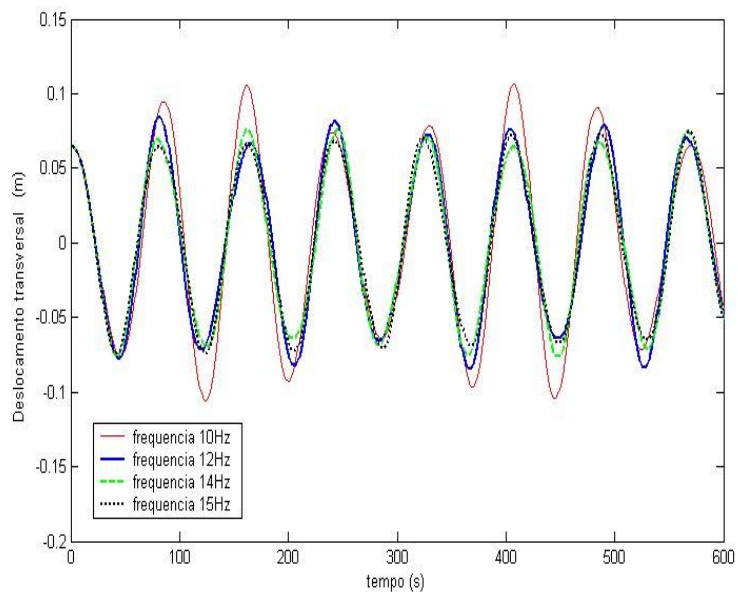


Figura 7.20 Resposta forçada harmônica para o modelo de Rayleigh para freqüências próximas a freqüência natural de 15.04Hz.

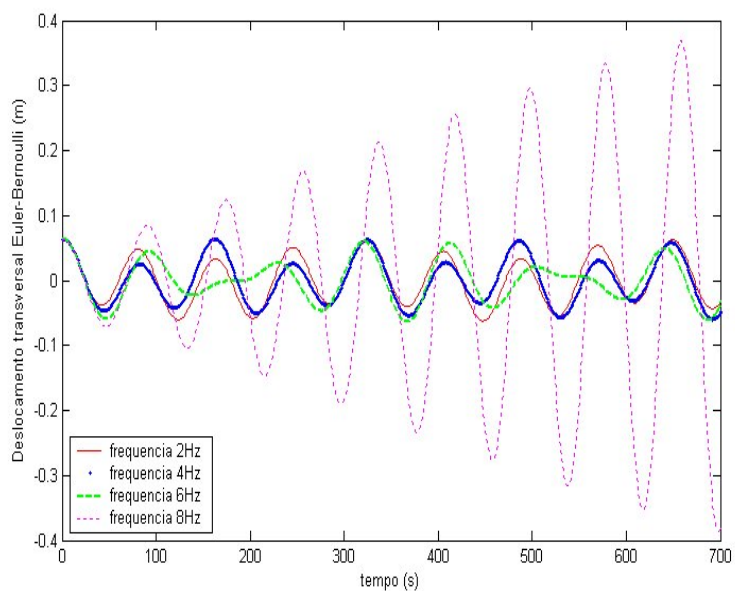


Figura 7.21 Resposta forçada harmônica para o modelo de Euler-Bernoulli.

A seguir são comparados os resultados para os dois modelos simultaneamente para as frequências de entrada variando de 2 a 12 Hz.

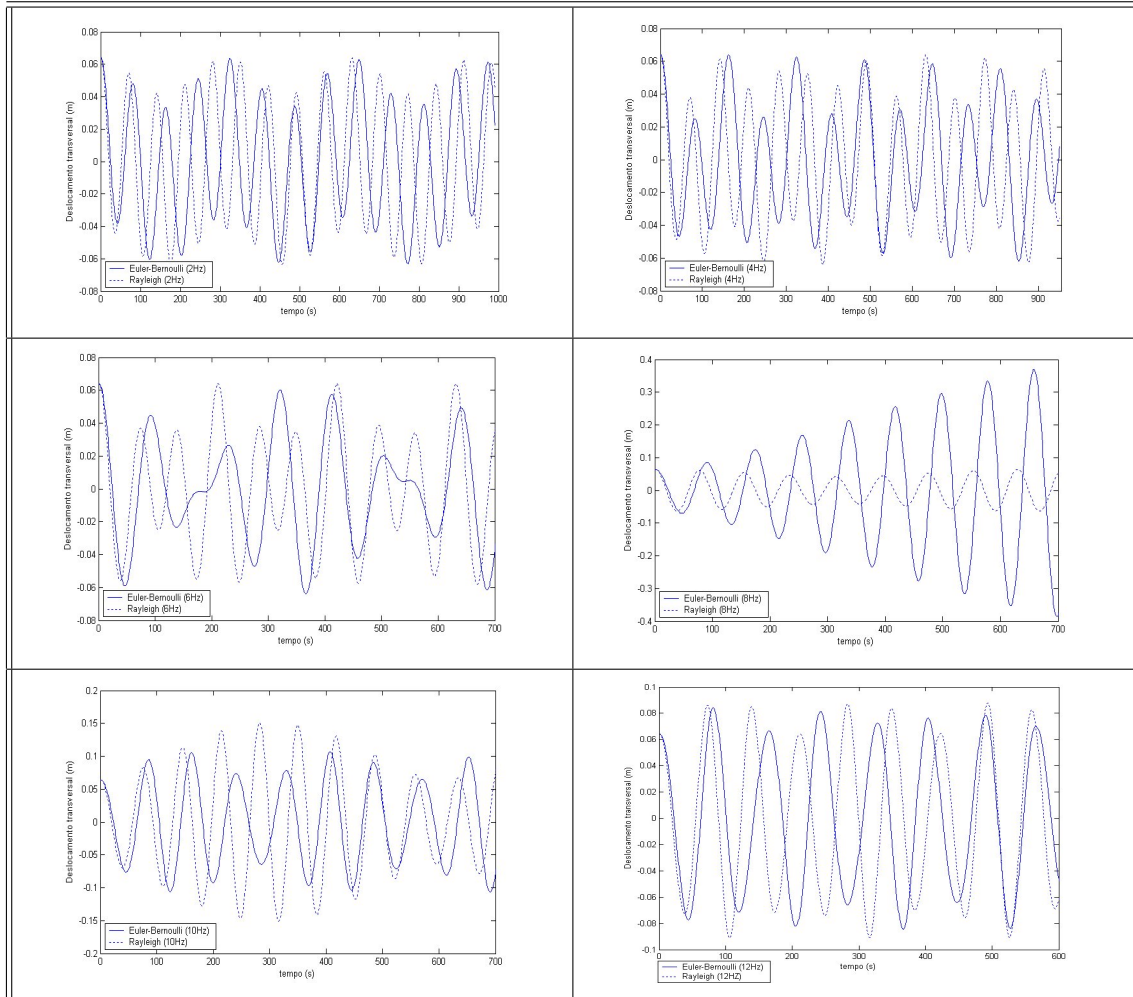


Tabela 7.6

A seguir é feita a decomposição da resposta forçada para a entrada cossenoidal (7.120), ou seja,

$$f(t, x) = \begin{cases} \rho_f A_f \cos(\omega_f t), & 0 < x < d \\ 0, & d < x < L. \end{cases}$$

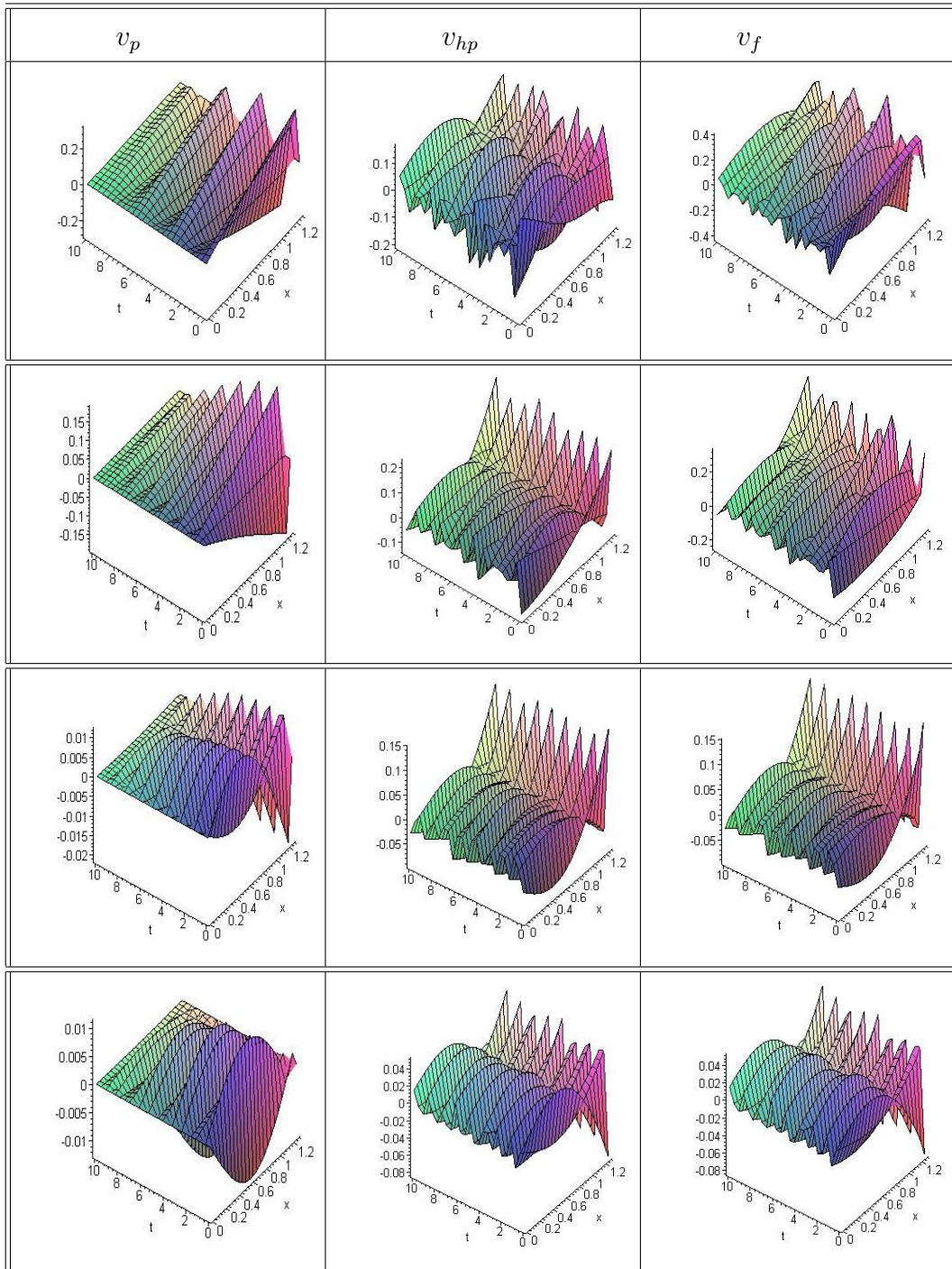


Tabela 7.7 Respostas permanente, homogênea induzida e forçada para as frequências  $\omega_f = 2\text{Hz}$ ,  $4\text{Hz}$ ,  $6\text{Hz}$  e  $8\text{Hz}$ .

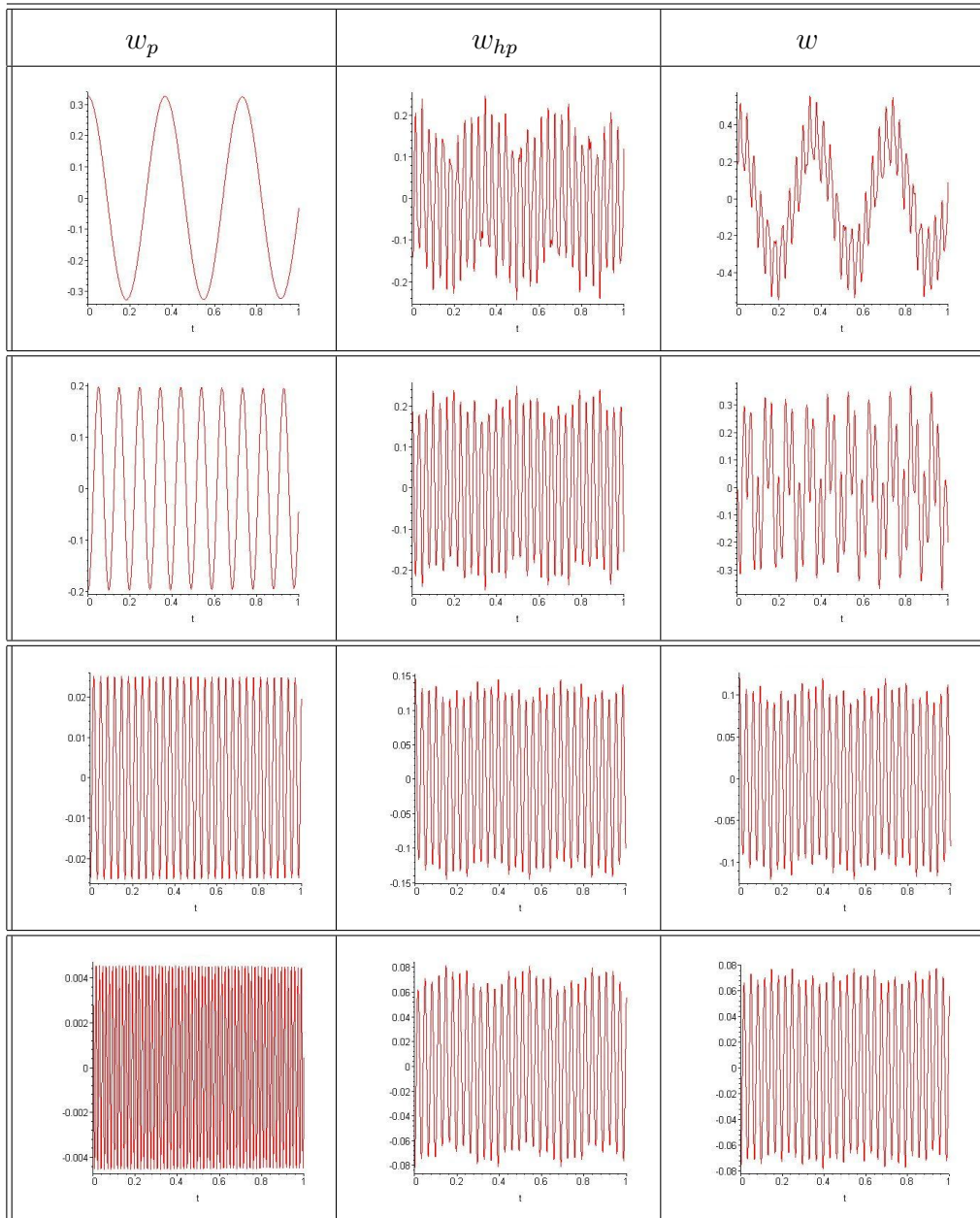


Tabela 7.8 Respostas permanente, homogênea induzida e forçada em  $x = L$  para as frequências  $\omega_f = 2\text{Hz}$ ,  $4\text{Hz}$ ,  $6\text{Hz}$  e  $8\text{Hz}$ .

## 8 MODOS PARA NANOTUBOS DE CARBONO

Pesquisas extensivas sobre nanotubos de carbono (*CNTs*) tem sido realizadas [3], [6] desde que os *CNTs* foram descobertos por Iijima em 1991 [46]. Várias aplicações dos *CNTs* têm sido discutidas recentemente, tais como forças atômicas microscópicas, emissores de campo, preenchimento de nanotubos para materiais compostos e dispositivos eletrônicos em nanoescala. Nanotubos com múltiplas paredes (*MWNTs*) têm o potencial para o desenvolvimento de nanoatuadores sem atrito, nano-motores, nano-rolamentos, e nano-molas [52]. Assim, as pesquisas sobre nanotubos de carbono podem levar a novas aplicações envolvendo outros materiais e estruturas inteligentes. Uma vez que simulações moleculares [55], [45]; [85] implicam em altíssimo custo, especialmente para problemas em grande escala, modelos do contínuo para *CNTs* tornaram-se uma ferramenta importante no estudo de nanotubos de carbono. A maioria dos trabalhos nesta categoria está focada na aplicação de modelos de placas e vigas elásticas. No caso de vigas, o modelo de Euler–Bernoulli é o mais amplamente utilizado na literatura na análise de nanotubos de carbono. A aplicabilidade desse modelo, no entanto, não tem sido investigada extensivamente [83] e [84].

### 8.1 Modelagem através de Vigas Elásticas

As equações governantes para o nanotubo de parede simples (*SCNT*), seguindo a teoria de Timoshenko, são dadas por [83]

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right) = 0,$$
(8.1)

onde  $v$  representa o deslocamento lateral,  $\phi$  é introduzido para medir a curvatura da seção transversal devido a flexão,  $\kappa$  é o coeficiente de ajuste, o qual foi sugerido como sendo  $10/9$  para uma seção transversal circular. Como em modelos de nanotubos a espessura do tubo é muito pequena, o termo referente a inércia rotatória,  $\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ , pode ser desconsiderado nos cálculos [83], resultando, dessa forma, no modelo de Vlasov.

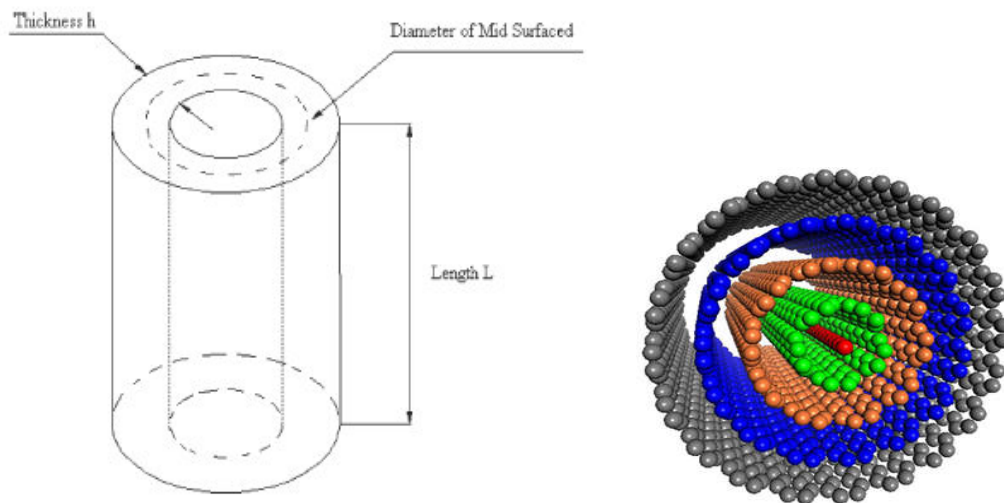


Figura 8.1 Nanotubos de paredes duplas e múltiplas.

Na análise de um nanotubo de parede dupla (*double walled nanotube* ou DWNT), o modelo de viga assume que os dois tubos permanecem coaxiais durante a deformação.

As equações governantes para o tubo interno e externo podem ser escritas via modelo de Timoshenko

$$\begin{aligned}
\rho A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \kappa (GA)_1 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) &= c (v_2 - v_1) \\
(\rho I)_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - (EI)_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \kappa (GA)_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \phi_1 \right) &= 0 \\
\rho A \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \kappa (GA)_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) &= -c (v_2 - v_1) \\
(\rho I)_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - (EI)_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} - \kappa (GA)_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \phi_2 \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{8.2}$$

onde os subíndices 1 e 2 referem-se às variáveis nos tubos interno e externo, respectivamente. O cálculo da constante  $c$  foi sugerido por Yoon et al. [87] como  $c \approx \frac{320(2\bar{r})\text{erg/cm}^2}{0.16a^2}$  e  $\bar{r} = \frac{1}{4}(d_1 + d_2)$ ,  $a = 1.42 \times 10^{-8}\text{cm}$ . Do ponto de vista da mecânica estrutural, o efeito da força de van der Waals é representado por molas distribuídas com rigidez  $c$ , atachadas na interface do tubo interno e externo do DWNT.

A seguir, apresenta-se a derivação das propriedades materiais dos nanotubos usados em modelos de vigas.

## 8.2 Propriedades materiais

Um interesse chave em aplicar a teoria do contínuo por meio de modelos de vigas em análise estática e dinâmica de CNTs está na determinação das propriedades materiais dos CNTs, como por exemplo a rigidez fletora. O objetivo aqui consiste em estabelecer um primeiro contato com a teoria de nanotubos de carbono através do estudo de um nanotubo de parede simples modelado segundo a teoria de Vlasov. O comprimento de tal nanotubo é  $L$ , e o diâmetro é  $d$ . A expressão



clássica para a rigidez da viga é dada por

$$EI = \frac{E\pi}{64} (d_o^2 - d_i^2), \quad (8.3)$$

onde  $d_o$  e  $d_i$  representam os diâmetros externo e interno da superfície da viga;  $h = (d_o - d_i)/2$  é a espessura do nanotubo ( $h = t = 0.34nm$  para um SWNT;  $h = Nt$  para um  $N$ -facetado MWNT);  $t$  ( $0.34nm$ ) é o espaço de equilíbrio entre nanotubos adjacentes;  $E$  é o módulo de Young do nanotubo;  $\nu = 0.145$  é a taxa de Poisson. Ru [71] propôs que a rigidez fletora efetiva do um nanotubo de carbono de parede simples deveria ser considerada como um parâmetro independente do material e não relacionada a espessura de equilíbrio. Dos resultados obtidos por Yakobson et al. [85], a espessura representativa de um nanotubo é de  $0.066nm$  o que é muito menor que o diâmetro da maioria dos nanotubos. Substituindo as igualdades  $d_o - d_i = 2h$  e assumindo  $d_o \approx d_i \approx d$  se a espessura representativa do nanotubo é bem pequena, a rigidez da viga pode ser expressa como

$$EI = \frac{E\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{E\pi h}{8} d^3 \frac{\pi C}{8} d^3, \quad (8.4)$$

onde a rigidez é  $Et = C = 360J/m^2$  (Yakobson et al., 1996) [85]. Note que embora a expressão acima seja proposta sob a hipótese  $d \gg h$ , o erro na derivação ainda permanecerá menor que 4.5% se um nanotubo de parede simples com diâmetro  $d = 1nm$  é investigado para a espessura representativa tomada como  $0.066nm$ , conforme [71]. A densidade de massa por unidade de comprimento de um nanotubo de parede simples,  $\rho A$ , foi proposta por Yoon et al. em [87];  $\rho = 2.3g/cm^3$  foi proposto como a densidade do nanotubo;  $A = \pi dt$  é a área da seção transversal. Quando se considera o modelo de Timoshenko, outros dois parâmetros utilizados são  $GI$  e  $GA$ , onde  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  é o módulo de cisalhamento para o nanotubo. Os outros dois parâmetros foram propostos como

$$GI = \frac{EI}{2(1+\nu)} = \frac{\pi C}{16(1+\nu)} d^3, \quad GA = \frac{E\pi dt}{2(1+\nu)} = \frac{\pi C d}{2(1+\nu)}. \quad (8.5)$$

Para o caso de dois tubos coaxiais com mesmo momento de inércia de área, os parâmetros discutidos anteriormente para o caso de nanotubo de parede simples, são dados por

$$\begin{aligned}\rho A &= \pi \rho t (d_1 + d_2), \\ GI &= \frac{\pi C}{16(1 + \nu)} (d_1^3 + d_2^3), \\ GA &= \frac{E \pi t d}{2(1 + \nu)} = \frac{\pi C (d_1 + d_2)}{2(1 + \nu)},\end{aligned}\tag{8.6}$$

onde  $d_1$  é o diâmetro intermediário do tubo interno, e  $d_2 = d_1 + 2 \times 0.34nm$  é o diâmetro intermediário do tubo externo.

### 8.3 Modos de Timoshenko e Aproximação de Vlasov

Considere-se o movimento de uma viga de comprimento  $L$  descrita pelo modelo de Vlasov

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) \right] &= f(t, x) \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right] - \kappa GA \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= g(t, x)\end{aligned}\tag{8.7}$$

#### 8.3.1 Viga fixa-apoiada

Considere-se as condições de contorno

$$u(t, 0) = 0, \quad \psi(t, 0) = 0,\tag{8.8}$$

$$u(t, L) = 0, \quad \psi_x(t, L) = 0.\tag{8.9}$$

Matricialmente, tem-se a matriz formada pelos coeficientes das condições de contorno

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}, \quad (8.10)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

Para obter as frequências naturais  $\omega$ , utiliza-se a base dinâmica normalizada, de modo que

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}_o(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}_1(x)\mathbf{c}_2, \quad (8.13)$$

onde os vetores  $2 \times 1$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

não ambos identicamente nulos, são determinados a partir das condições de contorno e  $\mathbf{w}$  é o vetor de variáveis da forma

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Formulando-se a equação modal,  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$ , onde  $\mathcal{U} = \mathbb{B}\Phi$  com  $\mathbb{B}$  sendo a matriz formada com os coeficientes das condições de contorno e  $\Phi$  é a matriz formada

com valores da base dinâmica normalizada em  $x = 0$  e  $x = L$ , tem-se

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \mathbf{h}_o(L) & \mathbf{h}_1(L) \\ \mathbf{h}'_o(L) & \mathbf{h}'_1(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_{o,11}(L) & h_{o,12}(L) & h_{1,11}(L) & h_{1,12}(L) \\ h_{o,21}(L) & h_{o,22}(L) & h_{1,21}(L) & h_{1,22}(L) \\ h'_{o,11}(L) & h'_{o,12}(L) & h'_{1,11}(L) & h'_{1,12}(L) \\ h'_{o,21}(L) & h'_{o,22}(L) & h'_{1,21}(L) & h'_{1,22}(L) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h_{o,11} & h_{o,12} & h_{1,11} & h_{1,12} \\ h'_{o,21} & h'_{o,22} & h'_{1,21} & h'_{1,22} \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

onde as componentes de  $\mathcal{U}$  são calculadas em  $x = L$ .

Utilizando a base de Euler para  $h(x)$ , isto é

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{a b (\epsilon^2 + \delta^2) \epsilon \delta} \quad (8.18)$$

e substituindo valores na equação característica  $\det(\mathcal{U}) = 0$ , resulta

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 = \delta \tanh(\epsilon L) - \epsilon \tan(\delta L) = 0, \quad (8.19)$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 = \sqrt{\epsilon^2 + g^2} \tanh(\epsilon L) - \epsilon \tan(\sqrt{\epsilon^2 + g^2} L) = 0. \quad (8.20)$$

Para o cálculo das frequências naturais  $\omega_n$ , resolve-se (8.20) para  $\epsilon$  e, a partir destes valores, calculam-se os parâmetros  $r$  e  $\delta$ , ou seja,

$$r = \sqrt{\sqrt{\left(\epsilon^2 + \frac{g^2}{2}\right)^2 - \frac{g^4}{4}}} \quad \text{e} \quad \delta^2 = \epsilon^2 + g^2 \quad (8.21)$$

onde tem-se que

$$g^2 = (e/b + c/a)\omega^2, \quad r^4 = c\omega^2(-e\omega^2 + a)/ab. \quad (8.22)$$

Da equação modal  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$ , conclui-se que as componentes  $c_{11}$  e  $c_{12}$  são nulas. Portanto,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix}, \quad (8.23)$$

e então, de  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$ , tem-se as expressões

$$h_{1,11}(L)c_{21} + h_{1,12}(L)c_{22} = 0,$$

$$h'_{1,21}(L)c_{21} + h'_{1,22}(L)c_{22} = 0.$$

Fazendo,  $c_{21} = 1$ , o valor  $c_{22}$  corresponde ao fator de forma

$$\sigma = -\frac{h_{1,11}(L, \omega) + h'_{1,21}(L, \omega)}{h_{1,12}(L, \omega) + h'_{1,22}(L, \omega)}, \quad (8.24)$$

para cada raiz da equação característica que satisfaça as condições

$$h_{1,12}(L, \omega) + h'_{1,22}(L, \omega) \neq 0, \quad (8.25)$$

$$(h_{1,12}(L, \omega))^2 + (h'_{1,22}(L, \omega))^2 \neq 0. \quad (8.26)$$

Assim, as autofunções serão do tipo

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}_1(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma(L, \omega) \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} h_{1,11}(x, \omega) + \sigma(L, \omega)h_{1,12}(x, \omega) \\ h_{1,21}(x, \omega) + \sigma(L, \omega)h_{1,22}(x, \omega) \end{bmatrix}$$

para cada  $\omega$  raiz de (8.19) ou (8.20), satisfazendo as condições (8.25) e (8.26). Aqui

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} -b a \frac{d^3 h(x)}{dx^3} - a e \omega^2 \frac{dh(x)}{dx} & -(a^2 - a e \omega^2)h(x) \\ a c \omega^2 h(x) & -a \frac{d^3 h(x)}{dx^3} - c b \omega^2 \frac{dh(x)}{dx} + a^2 h(x) \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

e

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -b a \frac{d^2 h(x)}{dx^2} - h(x) + h(x) (a^2 - a e \omega^2) & -a b \frac{dh(x)}{dx} \\ a^2 \frac{dh(x)}{dx} & -a b \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + b c \omega^2 h(x) \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

Para a equação governante satisfazendo (8.1), toma-se o limite para o parâmetro  $e$  tendendo a zero em (8.22) e em (8.27) e (8.28). Assim, as matrizes  $\mathbf{h}_0$  e  $\mathbf{h}_1$  modificadas resultam em

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} -a b \frac{d^3 h(x)}{dx^3} & -a^2 h(x) \\ a c \omega^2 h(x) & -a \frac{d^3 h(x)}{dx^3} - c b \omega^2 \frac{dh(x)}{dx} + a^2 h(x) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -ab \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + (a-1)h(x) & -ab \frac{dh(x)}{dx} \\ a^2 \frac{dh(x)}{dx} & -ab \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + b c \omega^2 h(x) \end{bmatrix}.$$

### 8.3.2 Viga fixa-livre

Neste caso tem-se condições de contorno da forma

$$u(t, 0) = 0, \quad \psi(t, 0) = 0, \quad (8.29)$$

$$u_x(t, L) - \psi(t, L) = 0, \quad \psi_x(t, L) = 0. \quad (8.30)$$

Matricialmente,

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}, \quad (8.31)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.32)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.33)$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior, obtém-se

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -h_{o,21} + h'_{o,11} & -h_{o,22} + h'_{o,12} & -h_{1,21} + h'_{1,11} & -h_{1,22} + h'_{1,12} \\ h'_{o,21} & h'_{o,22} & h'_{1,21} & h'_{1,22} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

onde as componentes de  $\mathcal{U}$  são calculadas em  $x = L$ . Da equação modal  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$ , conclui-se que as componentes  $c_{11}$  e  $c_{12}$  são nulas. Portanto,

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.35)$$

Utilizando a base de Euler para  $h(x)$ , e substituindo valores na equação característica  $\det(\mathcal{U}) = 0$ , resulta

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 = (g^2 + 2\epsilon^2)^2 + g^2\epsilon\sqrt{g^2 + \epsilon^2}\tan(\sqrt{g^2 + \epsilon^2}L)\tanh(\epsilon L) = 0. \quad (8.36)$$

Determinadas as frequências, segue de (8.34)

$$(-h_{1,21}(L) + h'_{1,11}(L))c_{21} + (-h_{1,22}(L) + h'_{1,12}(L))c_{22} = 0 \quad (8.37)$$

$$(8.38)$$

$$h'_{1,21}(L)c_{21} + h'_{1,22}(L)c_{22} = 0. \quad (8.39)$$

Fazendo,  $c_{21} = 1$ , o valor  $c_{21}$  corresponde ao fator de forma

$$\sigma = \frac{h_{1,21}(L, \omega) - h'_{1,11}(L, \omega) - h'_{1,21}(L, \omega)}{h'_{1,12}(L, \omega) - h_{1,22}(L, \omega) + h'_{1,22}(L, \omega)}, \quad (8.40)$$

para cada raiz  $\omega$  da equação caracterísitca que satisfaça as restrições

$$h'_{1,22}(L, \omega) + h'_{1,12}(L, \omega) - h_{1,22}(L, \omega) \neq 0, \quad (8.41)$$

$$(-h_{1,21}(L, \omega) + h'_{1,11}(L, \omega))^2 + (-h_{1,22}(L, \omega) + h'_{1,12}(L, \omega))^2 \neq 0 \quad (8.42)$$

$$(h'_{1,21}(L, \omega))^2 + (h'_{1,22}(L, \omega))^2 \neq 0. \quad (8.43)$$



### 8.3.3 Viga apoiada-deslizante

Neste caso a viga está sujeita as condições de contorno

$$u(t, 0) = 0, \quad \psi_x(t, 0) = 0, \quad (8.44)$$

$$\psi(t, L) = 0, \quad u_x(t, L) - \psi(t, L) = 0 \quad (8.45)$$

ou, matricialmente, tem-se os coeficientes das condições de contorno

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.47)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.48)$$

A equação modal  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$  resulta

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_{o,21} & h_{o,22} & h_{1,21} & h_{1,22} \\ h'_{o,11} - h_{o,21} & h'_{o,12} - h_{o,22} & h'_{1,11} - h_{1,21} & h'_{1,12} - h_{1,22} \end{bmatrix}, \quad (8.49)$$

onde as componentes de  $\mathcal{U}$  são calculadas em  $x = L$ . Da equação modal  $\mathcal{U}\mathbf{c} = 0$ , conclui-se que as componentes  $c_{11}$  e  $c_{22}$  são nulas. Portanto,

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{12} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.50)$$

Novamente, utilizando a base de Euler para  $h(x)$  e substituindo valores na equação característica  $\det(\mathcal{U}) = 0$ , tem-se que

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) = 0 = (\delta^2 + \epsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\epsilon L) = 0 \quad (8.51)$$

com  $\delta$  e  $\epsilon$  relacionados pela equação (5.54).

Decorre que

$$\delta = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \text{ n inteiro.} \quad (8.52)$$

Da definição de  $\delta$ , segue

$$\delta^4 - \delta^2 g^2 - r^4 = 0. \quad (8.53)$$

Os valores

$$\epsilon^2 = \delta^2 - g^2 \quad (8.54)$$

são calculados após determinadas as frequências.

Segue de  $\mathcal{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}$  que

$$h_{o,22}(L, \omega)c_{12} + h_{1,21}(L, \omega)c_{21} = 0$$

$$(h'_{o,12}(L, \omega) - h_{o,22}(L, \omega))c_{12} + (h'_{1,11}(L, \omega) - h_{1,21}(L, \omega))c_{21} = 0.$$

Fazendo,  $c_{12} = 1$ , o valor  $c_{21}$  corresponde ao fator de forma

$$\sigma = -\frac{h_{o,22}(L, \omega)}{h_{1,21}(L, \omega)} \quad (8.55)$$

para cada raiz de (8.51) que satisfaça as restrições

$$(h_{o,22}(L, \omega))^2 + (h_{1,21}(L, \omega))^2 \neq 0 \quad (8.56)$$

$$(h'_{o,12}(L, \omega) - h_{o,22}(L, \omega))^2 + (h'_{1,1}(L, \omega) - h_{1,21}(L, \omega))^2 \neq 0. \quad (8.57)$$

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para o caso de um nanotubo de carbono apoiado-deslizante.

Propriedade	Valor
$h$	$0.066nm$
$d$	$1nm$
$L$	$9nm$
$\nu$	$0.145$
$\kappa$	$\frac{10}{9}$
$C$	$360 \times 10^{-18} J/nm^2$
$\rho$	$2.3 \times 10^{-24} kg/nm^3$
$EI$	$\frac{\pi}{8} \times 10^{-18} Jnm$
$GI$	$\frac{\pi C}{16(1+\nu)} d^3$
$GA$	$\frac{\pi C}{2(1+\nu)} d$

Tabela 8.1 Valores dos parâmetros usados nas simulações .

Nas simulações foram calculados os quinze primeiros modos de vibração do sistema. Os valores obtidos para os parâmetros  $\epsilon_m$  e  $\delta_m$ , e para as quinze primeiras frequências de vibração  $\omega_m$  (em Hertz) são apresentados nas Tabs. 8.2 e 8.3, considerando os modelos de Vlasov e Timoshenko, respectivamente. Note que as frequências de vibração para o nanotubo modelado segundo a teoria de Vlasov

é superestimada em relação àquelas obtidas segundo a teoria de Timoshenko. Note também que o parâmetro  $\epsilon$  é puramente imaginário (modelo de Timoshenko) a partir da décima primeira frequência positiva de vibração. Isso ocorre porque os valores de  $\omega$  ultrapassaram o valor do parâmetro da *frequência crítica*, conforme discutido ao longo do quinto capítulo.

$m$	$\omega_m$	$\epsilon_m$	$\delta_m$
1	230.17	0.1738	0.1745
2	2009.92	0.5060	0.5235
3	5281.98	0.7978	0.8726
4	9622.79	1.0383	1.2217
5	14635.10	1.2282	1.5707
6	20025.04	1.3749	1.9198
7	25604.42	1.4876	2.2689
8	31263.31	1.5742	2.6179
9	36941.57	1.6412	2.9670
10	42608.30	1.6937	3.3161
11	48248.96	1.7353	3.6651
12	53857.86	1.7686	4.0142
13	59433.93	1.7956	4.3633
14	64978.38	1.8177	4.7123
15	70493.50	1.8359	5.0614

Tabela 8.2 Valores calculados para os parâmetros  $\omega_m$ ,  $\epsilon_m$ , e  $\delta_m$  para as 15 primeiras frequências positivas para o modelo de Vlasov.

$m$	$\omega_m$	$\epsilon_m$	$\delta_m$
1	229.75	0.17352	0.1745
2	1980.5	0.49806	0.5236
3	5112.7	0.76660	0.8726
4	9171.9	0.96605	1.2217
5	13809	1.0953	1.5708
6	18797	1.1561	1.9199
7	24002	1.1479	2.2689
8	29337	1.0636	2.6180
9	34753	0.87920	2.9671
10	40216	0.49321	3.3163
11	45705	0.67530 <i>i</i>	3.6653
12	51208	1.1495 <i>i</i>	4.0143
13	56711	1.5320 <i>i</i>	4.3634
14	62215	1.8793 <i>i</i>	4.7124
15	67712	2.2067 <i>i</i>	5.0614

Tabela 8.3 Valores calculados para os parâmetros  $\omega_m$ ,  $\epsilon_m$ , e  $\delta_m$  para as 15 primeiras frequências positivas para o modelo de Timoshenko.

Os modos normalizados considerando o modelo de Vlasov, são apresentados na Fig. 8.4. A linha contínua representa modo relativo ao deslocamento e a linha pontilhada o modo relativo ao giro. Os modos normalizados considerando o modelo de Timoshenko, são apresentados na Fig. 8.5. Novamente, linha pontilhada refere-se ao giro e linha contínua ao deslocamento. Observe que não há uma

diferença quantitativa representativa entre os modos, tanto para o deslocamento quanto para o giro, entre os dois modelos.

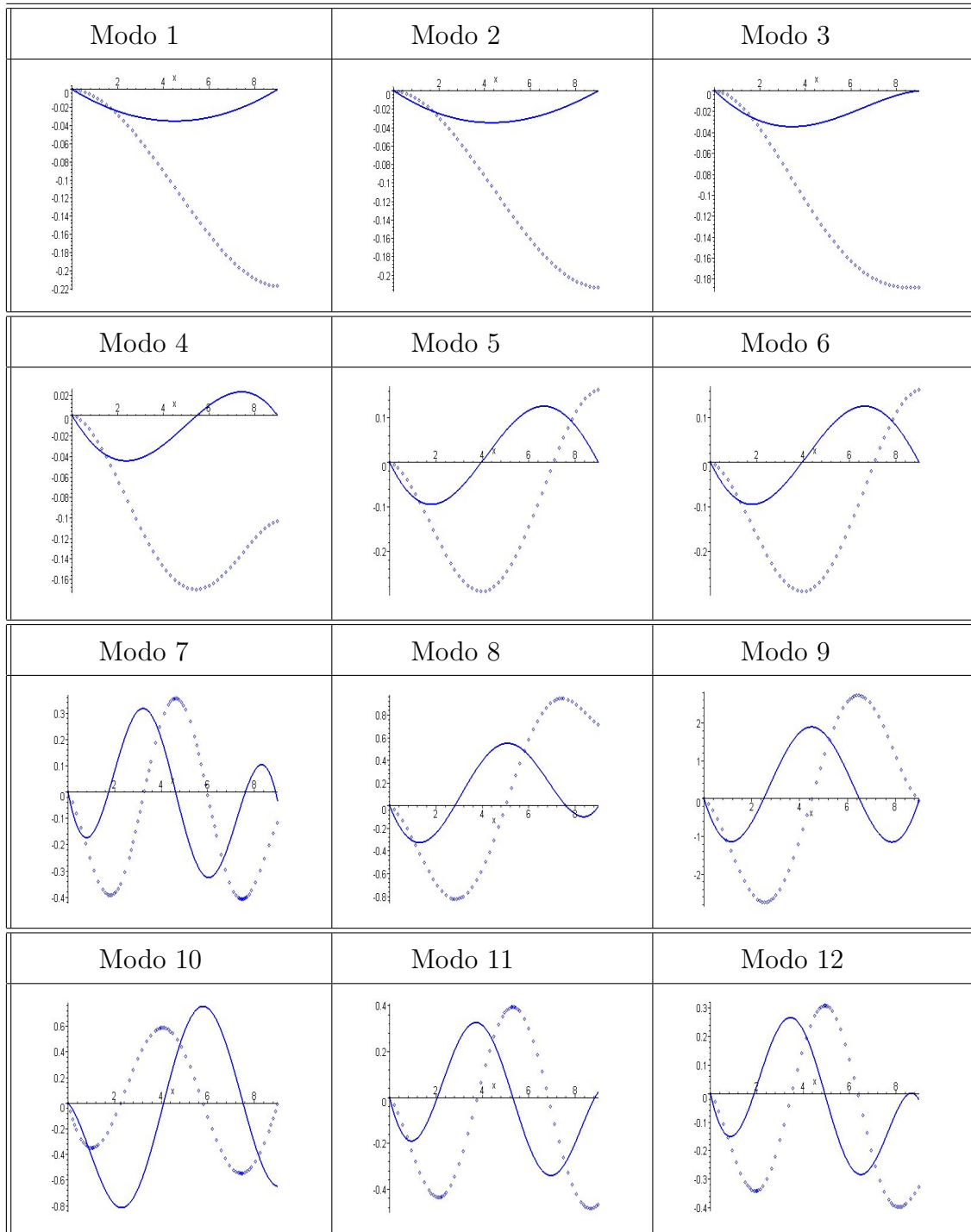


Tabela 8.4 Modos de vibração para o modelo de Vlasov.

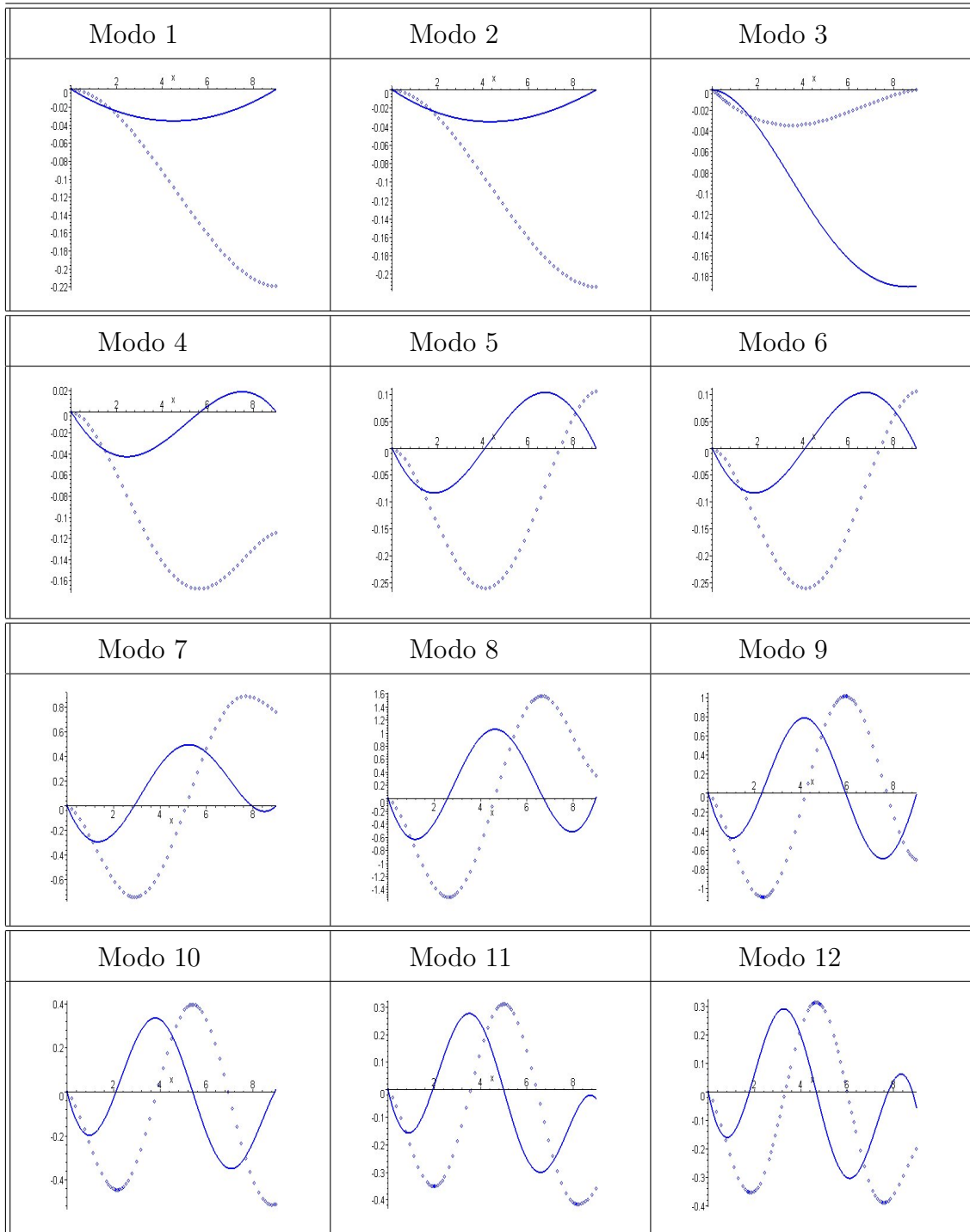


Tabela 8.5 Modos de vibração para o modelo de Timoshenko.

A seguir comparam-se as variações nos modos para o deslocamento e giro, conforme o modelo (Timoshenko ou Vlasov) escolhido.

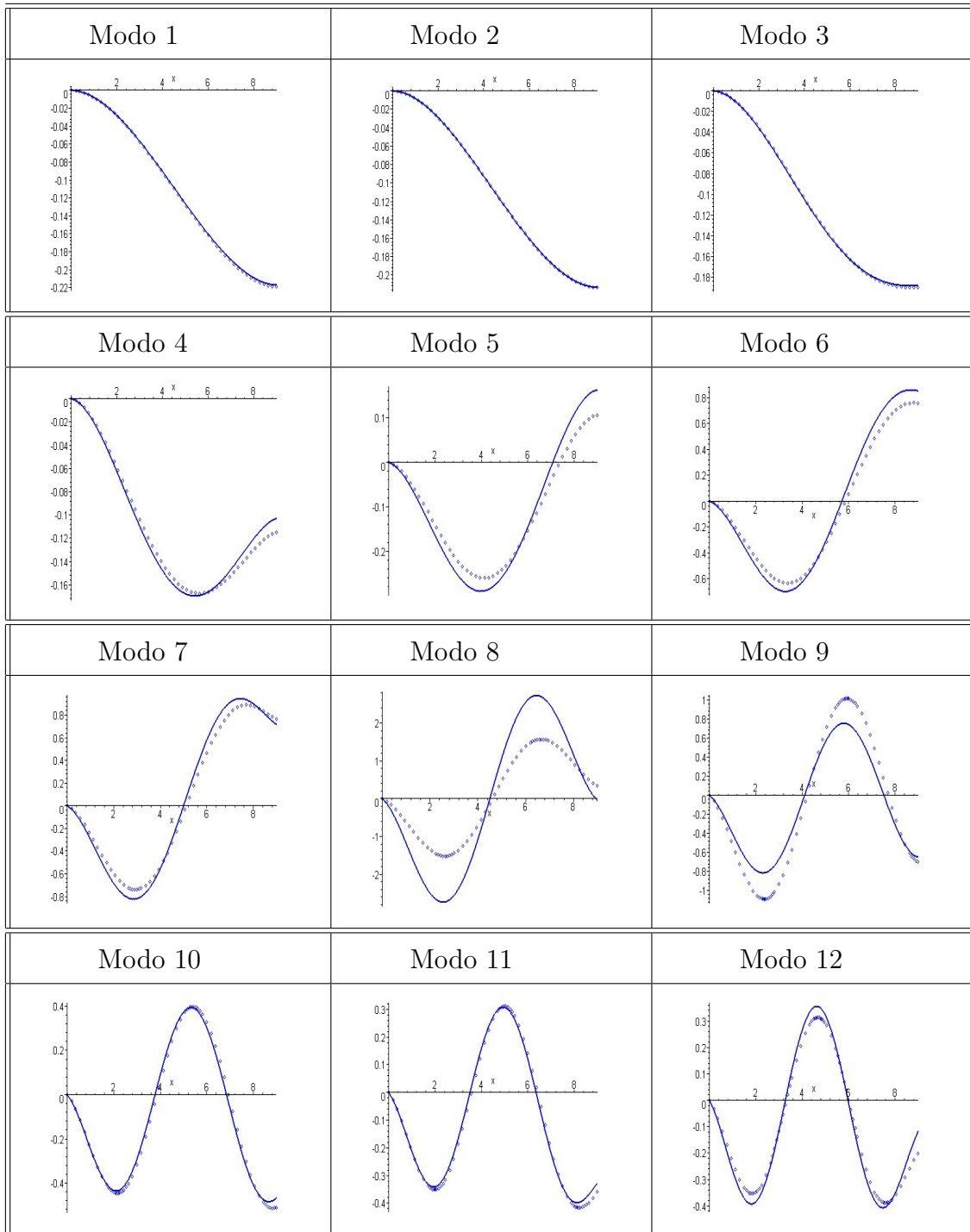


Tabela 8.6 Modos para o deslocamento: (-) Timoshenko; ( $\diamond$ ) Vlasov.



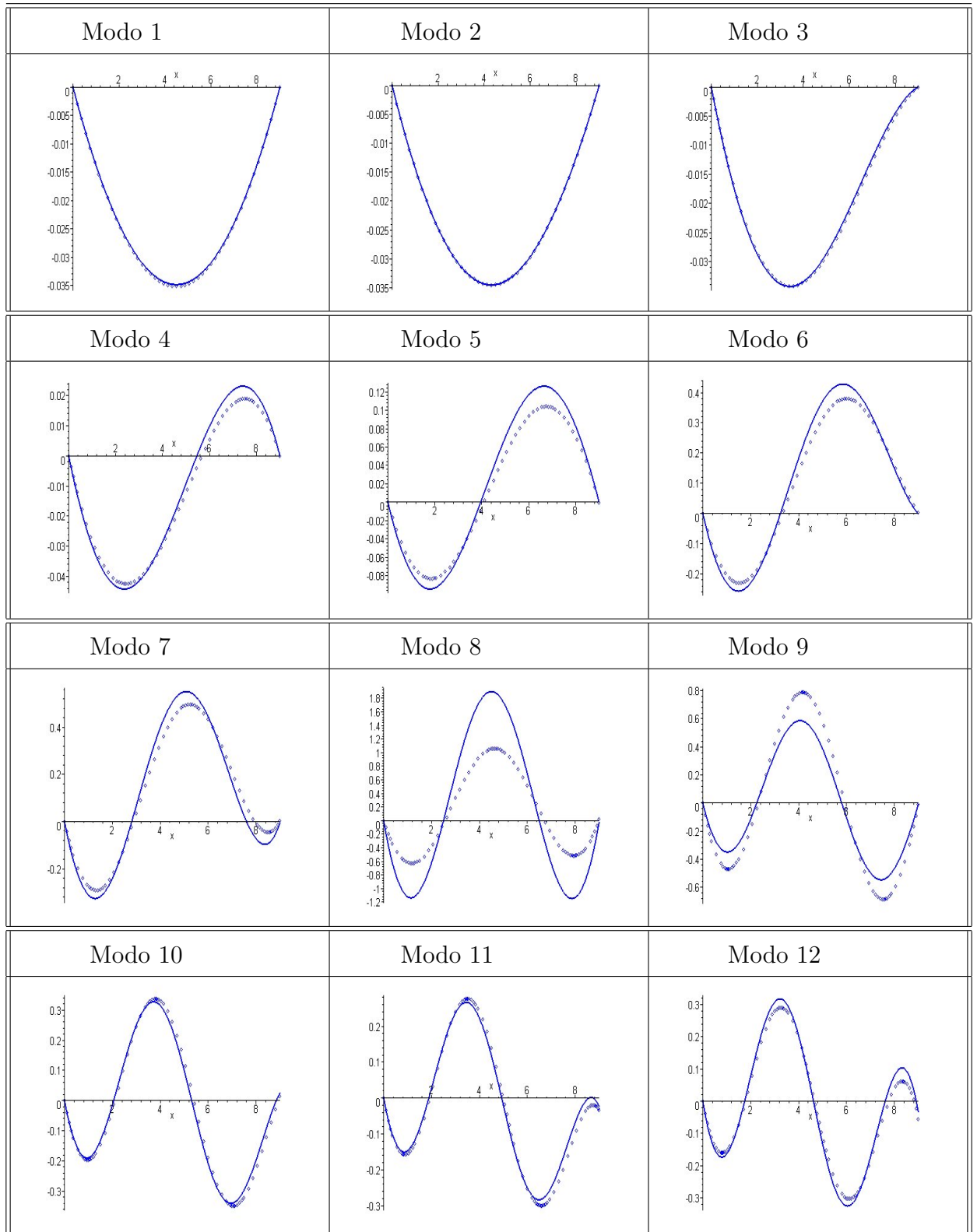


Tabela 8.7 Modos para o giro: (-) Timoshenko; ( $\diamond$ ) Vlasov.

## 9 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo de problemas modelados segundo as quatro principais teorias existentes para análise dinâmica de vigas: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko.

A abordagem de sistemas acoplados foi realizado de maneira direta, eliminando a utilização de técnicas usuais encontradas na literatura para transformação de sistemas de ordem superior em um sistema matricial de primeira ordem no tempo. Também, na análise espectral, evitou-se a técnica frequente de desacoplar os deslocamentos transversais e o giro nas equações de Timoshenko e Vlasov em equações espaciais de quarta ordem e manter o acoplamento através das condições de contorno. Com isso, mantém-se a dependência da resposta fundamental sobre os termos forçantes originais, diferentemente do que acontece com o desacoplamento, onde os termos forçantes resultam completamente modificados.

A obtenção das autofunções ou modos para determinar as amplitudes de respostas harmônicas em vigas de Timoshenko e Vlasov foi facilitado com o uso da base gerada pela resposta fundamental matricial devido aos valores iniciais desta resposta. A decorrente formulação matricial facilitou o estudo sobre a existência de autovalores duplos em uma viga de Timoshenko livre-livre, obtendo-se que a análise pode ser referida ao comportamento de uma resposta escalar característica que inclui implicitamente os parâmetros do problema. Além disso, como não é feito o desacoplamento, trabalha-se sempre no espaço físico do problema, diferente do que acontece quando o sistema é desacoplado em equações de primeira ordem no tempo, segundo a formulação de estado ou a teoria de semigrupos. A transformação de um sistema de segunda ordem em um sistema de primeira ordem muitas vezes acarreta perdas importantes, como a perda da simetria e/ou da positividade dos coeficientes do sistema. A formulação utilizada para obtenção da resposta, calculada de maneira exata, permitiu uma análise passo-a-passo do problema. Essa resposta analítica

resultou fácil de ser obtida pela utilização da fórmula que envolve a resolução de equações características de três tipos: algébrica, diferencial e em diferenças.

Para a obtenção da resposta fundamental, foram introduzidos problemas adjuntos de natureza evolutiva e de natureza espacial. Na literatura, o conceito de adjunto é restrito aos coeficientes espaciais do modelo e não é muito discutido o conceito de modelo evolutivo adjunto. A discussão sobre condições de contorno adjuntas, condições do tipo valor inicial adjuntas e o caso de condições mistas adjuntas apresentada neste texto vem a clarear ou preencher uma lacuna existente na literatura no que diz respeito à bilinear de contorno da identidade de Green-Lagrange. A introdução da função de Green de valor inicial permitiu obter uma representação integral da resposta dinâmica para o modelo de Timoshenko com condições de contorno genéricas. A solução para os casos envolvendo os modelos de Vlasov, Rayleigh e Euler-Bernoulli podem ser obtidos como casos limite do modelo de Timoshenko.

As respostas forçadas foram definidas através da integral de convolução da resposta fundamental com o termo não homogêneo que corresponde a excitação externa. A decomposição da resposta forçada mostrou-se muito útil, já que o cálculo da integral de convolução é bastante complexo e implica alto custo computacional. A decomposição, como foi formulada, permitiu a identificação da componente dominante da solução (homogênea induzida ou permanente), isto é, aquela que mais contribuiu para a resposta do problema como um todo, mesmo para problemas com maior complexidade nas condições de contorno, como os apresentados ao longo do trabalho e, por exemplo, em [14]. Além disso, a decomposição de respostas forçadas em sistemas distribuídos foi ampliada para sistemas matriciais evolutivos distribuídos de segunda ordem, que inclui o modelo de Timoshenko.

Foi proposto um modelo não-linear para o estudo de plataformas *off-shore* e realizadas simulações diante excitações harmônicas. Tal estrutura foi modelada como uma viga de Timoshenko em ambiente oceânico e sujeita a deslocamentos axiais, transversais e de rotação. As equações governantes e as condições de contorno

foram obtidas através do princípio variacional de Hamilton estendido e resultaram sendo não-lineares e acopladas. Essas EDPs não-lineares e acopladas juntamente as respectivas condições de contorno foram resolvidas numericamente usando uma aproximação em diferenças finitas e o método de Runge-kutta de quarta ordem. O modelo simplificado foi composto por uma viga apoiada em uma mola torcional linear elástica e com uma massa afixada no extremo livre da viga. As forças do fluido foram modeladas usando a equação de Morison e a teoria das ondas lineares de Airy. A partir de uma linearização do modelo, obteve-se o sistema de equações governantes lineares juntamente as condições de contorno. Simulações foram feitas para este modelo linear e comparadas às respostas obtidas para um problema do mesmo tipo, porém governado pelas equações de Rayleigh e de Euler-Bernoulli e suas respectivas condições de contorno.

Para o modelo não-linear acoplado, foram obtidas as respostas livre, livre-amortecida e forçada, respectivamente. Observou-se a presença de subharmônicos quando a frequência forçante aproximou suficientemente a frequência natural de aproximadamente  $15\text{rad/s}$  para a viga modelada segundo a teoria de Rayleigh onde o sistema respondeu como metade da frequência forçante. Este resultado está de acordo com a literatura e foi importante para a validação do código computacional; Para a viga modelada conforme a teoria de Timoshenko, não foi observada a presença de subharmônicos, conforme o esperado. A introdução de deslocamentos iniciais não-nulos ao sistema causou um aumento na amplitude da resposta, mas que não representou grande mudança no aspecto qualitativo da solução. Qualitativamente, os resultados para o deslocamento transversal do modelo não-linear acoplado de Timoshenko, mostrou-se semelhante àqueles da literatura para o modelo de Rayleigh. A diferença ficou restrita à amplitude de vibração. Observou-se também que a força exercida pelo fluido afeta diretamente o deslocamento transversal e a rotação. A amplitude do movimento de rotação da seção transversal apresentou maior magnitude em relação à do deslocamento transversal.

Nanotubos de carbono foram modelados segundo a teoria de Timoshenko, validando a aproximação de Vlasov frequentemente utilizada nas aplicações. Foram obtidas frequências naturais na escala Terahertz correspondentes aos modos de vibração coaxiais para um nanotubo de parede simples. Os resultados mostraram que para este caso as diferenças nas frequências naturais e modos de vibração entre os modelos de Timoshenko e Vlasov são insignificantes de um ponto de vista físico, o que não necessariamente deve ser o caso com nanotubos de paredes múltiplas.

Como um trabalho futuro em relação ao estudo de nanotubos, seria de interesse investigar o comportamento das respostas livres e forçadas de nanotubos de carbono de paredes múltiplas. Tais nanotubos poderiam ser modelados, por exemplo, como uma série de vigas de Timoshenko conectadas por dispositivos elásticos representando as forças interatômicas Van der Waals.

## Referências Bibliográficas

- [1] ATHANS, M., AND FALB, P. *Optimal Controls (Lincoln Laboratory Publications)*. McGraw-Hill College, 1966.
- [2] ATKIN, R. J., AND FOX, N. *An introduction to the theory of elasticity*. Longman, 1980.
- [3] BALL, P. Roll up for the revolution. *Nature* 414, 6860 (2001), 142–144.
- [4] BANERJEE, J. R., AND WILLIAMS, F. W. Coupled bending torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded timoshenko beam element. *International Journal of solids and structures* 31, 6 (1994), 749–762.
- [5] BAR-AVI, P., AND BENAROYA, H. Non-linear dynamics of an articulated tower in the ocean. *Journal of Sound and Vibration* 190, 1 (1996), 77–103.
- [6] BAUGHMAN, R. H., ZAKHIDOV, A. A., AND DE HEER, W. A. Carbon nanotubes: the route toward applications. *Science* 297, 5582 (2002), 787–792.
- [7] BILLGER, D. V. J., AND FOLKOW, P. D. The imbedding equations for the timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* 209, 4 (1998), 609–634.
- [8] BUTKOVSKY, A. G. *Structural Theory of Distributed Systems*. John Wiley, 1983.
- [9] CHEN, F., AND ATSUTA, T. *Theory of Beam-Columns: Space behaviour and design*, 3rd ed., vol. 2. McGraw Hill, New York, 1976.
- [10] CLAEYSSSEN, J. C. R., CANAHUALPA, G., AND JUNG, C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics* 30, 1 (1999), 65–78.

- [11] CLAEYSSSEN, J. C. R., CHIWIACOWSKI, L. D., AND SUAZO, G. C. The impulse response in the symbolic computing of modes for beams and plates. *Applied Numerical Mathematics* 40, 1-2 (2002), 119–135.
- [12] CLAEYSSSEN, J. C. R., COPETTI, R. D., AND BALTHAZAR, J. M. Modal analysis of a beam with a tip rotor by using a fundamental response. *Materials Science Forum* 440, (2003), 261–268.
- [13] CLAEYSSSEN, J. C. R., COSTA, S. N. J., AND BIHUNA, E. A resposta fundamental na caracterização de autovalores duplos em vigas de timoshenko. *Anais do DINCON 05 - Série Arquimedes* (2005).
- [14] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND COSTA, S. N. J. Modes for the coupled timoshenko model with a restrained end. *Journal of Sound and Vibration* 296, 4-5 (2006), 1053–1058.
- [15] CLAEYSSSEN, J. C. R., FERREIRA, I., AND COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied Numerical Mathematics* 47, 3-4 (2003), 391–405.
- [16] CLAEYSSSEN, J. C. R., MORAES, I. F., AND SUAZO, G. C. A resposta impulso em problemas de dinâmica e controle: Uma abordagem operacional direta. *Aplicon* (2001).
- [17] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND SCHUCHMAN, V. On the minimal extension of semigroups for second order damped equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 211 (1997), 213–227.
- [18] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND SCHUCHMAN, V. Evolution equations of higher order in banach spaces. *Applicable Analysis and Applications* 72, 3-4 (1999), 459–468.

- [19] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND SODER, R. A. A dynamical basis for computing the modes of euler-bernoulli and timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 259, 4 (2003), 986–990.
- [20] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND TSUKAZAN, T. Dynamical solutions of linear matrix differential equations. *Quart.App.Math.* 48, N<sup>o</sup> 1 (1990), 1–16.
- [21] CLAEYSSSEN, J. C. R. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration* 140, 1 (1990), 73–84.
- [22] CLAEYSSSEN, J. C. R. *Time and Frequency Response*. ZAMM-ICIAM 95, Hamburg, 1996.
- [23] CLAEYSSSEN, J. C. R. The matrix impulse response in vibrating systems, nonlinear dynamics, chaos, control and their applications to engineering sciences. *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences*, 2, (1999), 122–135.
- [24] CODDINGTON, E. A., AND LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. MacGraw-Hill, New York, 1955.
- [25] COLE, R. H. *The Theory of Ordinary Differential Equations*. Appleton-Century-Crofts, New York, 1968.
- [26] COSTA, S. N. J., AND CLAEYSSSEN, J. C. R. Dynamic responses of elastic models. In *First LNCC Meeting on Computational Modelling* (2004).
- [27] COSTA, S. N. J. Problemas de contorno de ordem superior e cálculo da função de green. Master's thesis, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [28] COWPER, G. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics* 33, 2 (1966), 335–340.
- [29] DAUTRAY, R., AND LIONS, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer, Berlin, 1991.



- [30] DOLPH, C. On the timoshenko theory of transverse beam vibrations. *Quarterly of Applied Mathematics* 12 (1954), 175–187.
- [31] DONG, X.-J., MENG, G., LI, H.-G., AND YE, L. Vibration analysis of a stepped laminated composite timoshenko beam. *Mechanics Research Communications* (2005).
- [32] DUNFORD, N., AND SCHWARTZ, J. T. *Linear Operators*. Interscience, New York, 1958.
- [33] FOLKOW, P. D., KRISTENSSON, G., AND OLSSON, P. Time domain green functions for the homogeneous timoshenko beam. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 51, 1 (1998), 125–141.
- [34] GARIBOTTI, C. R., COSTA, S. N. J., AND CLAEYSSSEN, J. C. R. Decomposição de respostas forçadas em sistemas distribuídos. *Anais do DINCON 03 - Série Arquimedes* 2 (2003).
- [35] GARIBOTTI, C. R. Resposta dinâmica em sistemas distribuídos e decomposição forçada da superfície livre para um modelo acoplado oceano-atmosfera. Master's thesis, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- [36] GEIST, B., AND MACLAUGHLIN, J. R. Double eigenvalues for the uniform timoshenko beam. *Appl. Math. Lett.* 10, 3 (1997), 129–134.
- [37] GINSBERG, J. H. *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications*. John Willey and Sons, Inc., 2001.
- [38] GODUNOV, S. K. *Ecuaciones de la Física Matemática*. MIR, Moscú, 1978.
- [39] GÖKDAG, H., AND KOPMAZ, O. Coupled bending and torsional vibration of a beam with in-span and tip attachments. *Journal of Sound and Vibration* 287, 3 (2004), 591–610.

- [40] HAN, S. M., AND BENAROYA, H. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration* 225, 5 (1999), 935–988.
- [41] HAN, S. M., AND BENAROYA, H. *Nonlinear and Stochastic Dynamics of Compliant Offshore Structures*, vol. 1. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2002.
- [42] HOGBEN, N. Wave loads on structures. In *Behavior of Offshore Structures* (1976).
- [43] HORMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*, 3rd ed. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [44] HUANG, T. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics* 28 (1961), 579–584.
- [45] IJIMA, S., BRABEC, C., MAITI, A., AND BERNHOLC, J. Structural flexibility of carbon nanotubes. *Journal of Chemical Physics* 104 (1996), 2089–2092.
- [46] IJIMA, S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature* 354 (1991), 56–58.
- [47] INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [48] ISAACSON, M. Wave and current forces on fixed offshore structures. *Canadian Journal of Civil Engineering* 15 (1988), 937–947.
- [49] JOHN, F. *Partial Differential Equations*, 3rd ed., vol. 1. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [50] KRUSZEWSKI, E. Effects of transverse shear and rotary inertia on the natural frequencies of a uniform beam. *National Advisory Committee for Aeronautics - NACA TN 1909* (1949), 560–575.

- [51] LANCZOS, C. *Linear Differential Operators*. Dover, New York, 1980.
- [52] LAU, K. T. Interfacial bonding characteristics of nanotube/polymer composites. *Chemical Physics Letters* 370 (2003), 399–405.
- [53] LEBLOND, P. H., AND MYSAK, L. A. *Waves in the Ocean*. Elsevier, Amsterdam, 1978.
- [54] LEE, E. B., AND MARKUS, L. *Foundations of Optimal Control Theory*. Krieger Pub Co, New York, 1986.
- [55] LI, C., AND CHOU, T. W. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), 2487–2499.
- [56] LI, J., HUA, H., SHEN, R., AND JIN, X. Stochastic vibration of axially loaded monosymmetric timoshenko thin-walled beam. *Journal of Sound and Vibration* 274, 3-5 (2004), 915–938.
- [57] LI, J., RONGYING, S., HONGXING, H., AND XIANDING, J. Coupled bending and torsional vibration of axially loaded bernoulli-euler beams including warping effects. *Applied Acoustics* 65 (2004), 153–170.
- [58] MACKERTICH, S. Dynamic response of a supported beam to oscillatory moving masses. *Journal of Vibration and Control* 9 (2003), 1083–1091.
- [59] MEIROVITCH, L. *Analytical Methods in Vibration*. MacMillan Publishing Co., 1967.
- [60] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [61] MENNICKEN, R., AND MÖLLER, M. *Non-Self Adjoint Boundary Eigenvalue Problems*. No. 192 in Mathematical Studies. North-Holland-Elsevier, Amsterdam, 2003.

- [62] MILLER, K. S. *Linear Differential Equations in the Real Domain*. Routledge, London, 1963.
- [63] MINORSKY, N. *Nonlinear Oscillations*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., London, 1962.
- [64] MORAES, I. F. *Uma Metodologia Unificada no Domínio Tempo para Sistemas Concentrados, Discretos e Distribuídos*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2002.
- [65] MORISON, J., O'BRIEN, M., JOHNSON, J., AND SCHAAF, S. The force exerted by surface waves on piles. *Petroleum Transactions, AIME 189* (1950), 149–157.
- [66] NAIMARK, M. A. *Linear Differential Operators*. Frederick Ungar Pub., New York, 1967. pt. 1. Elementary theory of linear differential operators.
- [67] NASH, R. W. T., AND COLLAR, A. R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 6* (1953), 186–222.
- [68] NEUMANN, R. P. *Determinação dos Modos Vibratórios Sujeitos a Efeitos de Cisalhamento e Inércia Rotativa*. Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [69] OGATA, K. *System Dynamics*, 3rd ed. Prentice Hall, New York, 1997.
- [70] PAVLOVIC, R., AND KOZIC, P. Almost sure stability of the thin-walled beam subjected to end moments. *Theoret. Appl. Mech. 30*, 3 (2003), 193–207.
- [71] RU, C. Q. Effective bending stiffness of carbon nanotubes. *Physical Review B*, 62 (2000), 9973–9976.

- [72] SADEK, I., SLOSS, J. M., BRUCH, J. C., AND ADALI, S. Optimal control of a timoshenko beam by distributed forces. *Journal of Optimization Theory and Applications* 50, 3 (September 1986), 451–461.
- [73] SMITH, E., AND CHOPRA, I. Formulation and evaluation of an analytical model for composite box beams. *Journal of the American Helicopter Society* 36 (1991), 23–35.
- [74] SVERDRUP, H., AND MUNK, W. *Wind, Sea, and Swell: Theory of Relations for Forecasting*, vol. 601. U. S. Navy Hydrographic Office, 1947.
- [75] SVERDRUP, H., AND MUNK, W. *Dynamics of Offshore Structures*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953.
- [76] TAYLOR, S. W., AND YAU, S. C. B. Boundary control of a rotating timoshenko beam. *ANZIAM J.* 44, E (2003), E143–E184.
- [77] TAYLOR, S. W. A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 114, 1 (2000), 23–40.
- [78] TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine* 41 (1921), 744–746.
- [79] TIMOSHENKO, S. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine* 43, (1922), 125–131.
- [80] TIMOSHENKO, S. *History of Strength of Materials*. Dover Publications, New York, 1953.
- [81] TSUKAZAN, T. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. *Journal of Sound and Vibration* 281 (2005), 1175–1185.

- [82] TURCATTO, R. B. *Vibrações livres e forçadas no modelo de Timoshenko*. Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 2002.
- [83] WANG, Q., AND VARADAN, V. K. Stability analysis of carbon nanotubes via continuum models. *Smart Materials and Structures* 14, 1-2 (2005), 281–286.
- [84] WANG, Q., AND VARADAN, V. K. Wave characteristics of carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures* 43, 2 (2006), 254–265.
- [85] YAKOBSON, B. I., CAMPBELL, M. P., BRABEC, C. J., AND BERNHOLC, J. High strain rate fracture and *c*-chain unraveling in carbon nanotubes. *Computational Materials Science* 8, 5 (1997), 341–348.
- [86] YAMANAKA, K., HEPLER, G. R., AND HUSEYIN, H. On the dynamics and stability of a beam with a tip rotor. *35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, (1994), 1031–1038.
- [87] YOON, J., RU, C. Q., AND MIODUCHOWSKI, A. Vibration of an embedded multiwall carbon nanotubes. *Composites Science and Technology* 63, 11 (2003), 1533–1542.