

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Decomposição de Respostas
Forçadas no Modelo de
Timoshenko**

por

Adriana Speggorin Verza

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, Novembro de de 2003.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Verza, Adriana Speggorin

Decomposição de Respostas Forçadas no Modelo de Timoshenko / Adriana Speggorin Verza.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2003.

106 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2003.

Orientador: Claeysen, Julio Cesar Ruiz

Dissertação: Matemática Aplicada

Decomposição de Respostas Forçadas no Modelo de Timoshenko

por

Adriana Speggorin Verza

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibração e Controle

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Banca examinadora:

Profa. Dra. Inês Ferreira Moraes
CCNE/UFSM

Profa. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
Novembro de 2003.

Prof. Vilmar Trevisan, Ph.D.
Coordenador

Para meus filhos e meu esposo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen pelo apoio, dedicação e orientação.

Aos meus filhos Arthur e Lucas, que são o maior presente que a vida me deu, pela compreensão.

Ao meu esposo Melchior e minha mãe Ides pelo apoio, compreensão e carinho.

Aos familiares que me apoiaram e aos amigos que entenderam minha ausência.

Aos colegas que compartilharam os momentos.

Ao meu pai que, mesmo ausente, muito influenciou nesta caminhada.

E, por fim, a Deus por ter colocado todas essas pessoas maravilhosas em minha vida.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
RESUMO	xv
ABSTRACT	xvi
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELAGEM MATEMÁTICA	4
2.1 Modelo de Euler-Bernoulli	4
2.2 Modelo de Timoshenko	4
2.2.1 Efeito de cisalhamento e inércia rotacional	5
2.2.2 Condições iniciais e de contorno	9
2.2.2.1 Condições de contorno clássicas	10
3 ESTUDO DA EQUAÇÃO MODAL	12
3.1 Equação matricial modal	12
3.1.1 Cálculo da base espectral e da base dinâmica	13
3.2 Cálculo dos modos	18
4 A RESPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS DISTRIBUÍDOS	20
5 A RESPOSTA FORÇADA PELO MÉTODO ESPECTRAL	24
6 CÁLCULO SIMBÓLICO DA RESPOSTA FORÇADA PARA O MODELO DE TIMOSHENKO	28
6.1 Decomposição da resposta forçada	28
6.2 Decomposição para diferentes tipos de entradas	32

6.2.1	O caso concentrado sem dinâmica	32
6.2.2	O caso dinâmico	33
7	SIMULAÇÕES SIMBÓLICO-NUMÉRICAS	37
7.1	Viga apoiada-livre	39
7.1.1	O caso concentrado sem dinâmica	40
7.1.2	O caso dinâmico	46
7.2	Viga fixa-livre	55
7.2.1	O caso concentrado sem dinâmica	57
7.2.2	O caso dinâmico	62
7.3	Viga livre-deslizante	73
7.3.1	O caso concentrado sem dinâmica	75
7.3.2	O caso dinâmico	80
7.4	A Resposta freqüência para a condição de contorno do tipo fixa-livre	91
8	CONCLUSÕES	103
	REFERÊNCIAS	105

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	(a) Vibração transversal // (b) Diagrama de um pequeno elemento da viga deformado por uma força distribuída por unidade de comprimento	6
Figura 2.2	Efeito da deformação de cisalhamento.	8
Figura 7.1	Modos da viga apoiada-livre	39
Figura 7.2	Resposta impulso para viga apoiada -livre em $t = 1.5$	40
Figura 7.3	Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x) = A \cos(\hat{\omega}t) \delta(x - a)$	42
Figura 7.4	Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x) = A \sin(\hat{\omega}t) \delta(x - a)$	43
Figura 7.5	Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo $f(t,x) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$	45
Figura 7.6	Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo $f(t,x) = \sum_{n=1}^5 A_n \sin(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$	45
Figura 7.7	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \cos(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.5$	47
Figura 7.8	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \sin(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.5$	48
Figura 7.9	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \cos(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.2$	49
Figura 7.10	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \sin(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.2$	50
Figura 7.11	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \cos(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.5$	51
Figura 7.12	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \sin(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.5$	52
Figura 7.13	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A \cos(\hat{\omega}t) P_0(x)$ em $t = 0.2$	53

Figura 7.14	Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	54
Figura 7.15	Modos da viga fixa-livre	55
Figura 7.16	Resposta impulso para viga fixa-livre em $t = 1.5$	56
Figura 7.17	Deslocamento $u(t, x)$ para $f(t, x) = A \operatorname{cos}(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$	58
Figura 7.18	Deslocamento $u(t, x)$ para $f(t, x) = A \operatorname{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$	59
Figura 7.19	Deslocamento $u(t, x)$ para entrada do tipo $f(t, x) = \sum_{n=1}^5 A_n \operatorname{cos}(\hat{\omega}_n t)\delta(x - a)$	61
Figura 7.20	Deslocamento $u(t, x)$ para entrada do tipo $f(t, x) = \sum_{n=1}^5 A_n \operatorname{sen}(\hat{\omega}_n t)\delta(x - a)$	61
Figura 7.21	Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{cos}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	63
Figura 7.22	Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	64
Figura 7.23	Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{cos}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	65
Figura 7.24	Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	66
Figura 7.25	Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{cos}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	68
Figura 7.26	Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	70
Figura 7.27	Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{cos}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	71
Figura 7.28	Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \operatorname{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	72

Figura 7.29	Modos da viga livre-deslizante	73
Figura 7.30	Resposta impulso para viga fixa-livre em $t = 1.5$	74
Figura 7.31	Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$	76
Figura 7.32	Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$	77
Figura 7.33	Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo $f(t,x) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t)\delta(x-a)$	79
Figura 7.34	Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo $f(t,x) = \sum_{n=1}^5 A_n \text{sen}(\hat{\omega}_n t)\delta(x-a)$	79
Figura 7.35	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	81
Figura 7.36	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	82
Figura 7.37	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	83
Figura 7.38	Respostas particulares $u_p(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	84
Figura 7.39	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	86
Figura 7.40	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$	88
Figura 7.41	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	89
Figura 7.42	Respostas homogêneas $u_h(t,x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t,x) = A\text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$	90
Figura 7.43	Respostas freqüência particulares $u_p(t,x)$ para $p(t,x) = A_i \cos(\hat{\omega}_i t)P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$ em $t = 0.5$	92

Figura 7.44	Respostas	frequência	particulares	$u_p(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.5$ 93
Figura 7.45	Respostas	frequência	particulares	$u_p(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{cos}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.2$ 94
Figura 7.46	Respostas	frequência	particulares	$u_p(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.2$ 95
Figura 7.47	Respostas	frequência	homogêneas	$u_h(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{cos}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.5$ 97
Figura 7.48	Respostas	frequência	homogêneas	$u_h(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.5$ 98
Figura 7.49	Respostas	frequência	homogêneas	$u_h(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{cos}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.5$ 99
Figura 7.50	Respostas	frequência	homogêneas	$u_h(t, x)$	para	
	$p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$			em	$t = 0.5$ 100

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Condições de Contorno Clássicas	11
Tabela 7.1	Parâmetros de entrada da força harmônica cosseno concentrada.	41
Tabela 7.2	Parâmetros de entrada da força harmônica seno concentrada. .	41
Tabela 7.3	Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas	44
Tabela 7.4	Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas	44
Tabela 7.5	Parâmetros de entrada com excitações dinâmicas	46
Tabela 7.6	Parâmetros de entrada da força harmônica cosseno concentrada.	57
Tabela 7.7	Parâmetros de entrada da força harmônica seno concentrada. .	57
Tabela 7.8	Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas	60
Tabela 7.9	Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas	60
Tabela 7.10	Parâmetros de entrada com excitações dinâmicas	62
Tabela 7.11	Parâmetros de entrada da força harmônica cosseno concentrada.	75
Tabela 7.12	Parâmetros de entrada da força harmônica seno concentrada. .	75
Tabela 7.13	Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas	78
Tabela 7.14	Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas	78
Tabela 7.15	Parâmetros de entrada com excitações dinâmicas	80
Tabela 7.16	Resposta freqüência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_{03}(x)$ em $t = 0.5$	101
Tabela 7.17	Resposta freqüência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A\sin(\hat{\omega}t)P_{03}(x)$ em $t = 0.5$	101
Tabela 7.18	Resposta freqüência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_{03}(x)$ em $t = 0.2$	102
Tabela 7.19	Resposta freqüência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A\sin(\hat{\omega}t)P_{03}(x)$ em $t = 0.2$	102

LISTA DE SÍMBOLOS

$A(x)$	área da seção transversal
A_j	operadores espaciais
B	matriz de contorno
E	módulo elástico de Young
EI	rigidez flexural
c	vetor das incógnitas
$f(t, x)$	força externa aplicada à viga
$F(s)$	transformada de Laplace de $f(t)$
$h(t)$	resposta impulso evolutiva
$h(t, x, \xi)$	função de Green de valor inicial
$H(s, x, \xi)$	função de Green de contorno
$h_{i,j}$	componentes da matriz resposta impulso
$H(s)$	operador de transferência
I	matriz identidade
$I(x)$	momento de inércia da área da seção transversal
L	comprimento da viga
L_y	largura da viga
L_z	espessura da viga
\mathcal{L}	operador transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	operador transformada inversa de Laplace

m	massa da viga por unidade de comprimento
$M(t, x)$	momento fletor
P_0	força de entrada
Q	operador diferencial espacial
R	operador diferencial espacial
S	operador diferencial espacial
t	tempo
$u(t, x)$	deflexão ou deslocamento lateral
$U(s)$	transformada de Laplace de $u(t)$
u	resposta dinâmica
u_h	resposta livre
u_p	resposta permanente
$V(t, x)$	força de cisalhamento
x	posição longitudinal da viga
X_n	modos
α	ângulo de deflexão
ϵ	raiz da equação característica
δ	raiz da equação característica (parte imaginária)
Φ	matriz base
ρ	densidade de massa
ω	freqüência

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a decomposição da resposta forçada de um sistema distribuído de quarta ordem no tempo, representado pela equação de Timoshenko para vigas. O modelo em estudo considera os efeitos da inércia rotativa e do cisalhamento. É introduzida uma base dinâmica para a obtenção dos modos de vibração, considerando-se determinadas condições iniciais e de contorno. Desenvolve-se uma metodologia para a obtenção da resposta dinâmica. A resposta forçada é caracterizada como uma decomposição da resposta permanente e da resposta livre, que, por sua vez, é induzida pela resposta permanente. Realiza-se o cálculo da resposta forçada para entradas do tipo concentrado e dinâmico. Realizam-se simulações para os modos, para a resposta impulso e para vibrações forçadas em vigas com extremidades apoiada e livre, extremidades fixa e livre e extremidades livre e deslizante sujeitas a cargas concentradas e com dinâmica. A análise da resposta frequência é ilustrada com uma viga fixa-livre.

ABSTRACT

Title: "DECOMPOSITION OF FORCED RESPONSES IN THE TIMOSHENKO MODEL"

The goal of this work is the decomposition of the forced response of a fourth-order time distributed system, described by Timoshenko model for beams. The model in study considers the effects of rotary inertia and shear deformation. A dynamic basis is introduced for obtaining the vibration modes and for considering initial and boundary conditions. It is developed a methodology for obtaining the dynamical response. The forced response is characterized as a decomposition of the permanent and free responses. The free response is induced for the permanent response. The computation of the forced response is done for concentrated and dynamical inputs. Simulations were done for computing the modes, the impulse response and forced vibrations for supported-free, fixed-free and free-sliding beams under concentrated loads and loads with dynamics. Frequency response analysis is illustrated with a fixed-free beam.

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos vem aumentando o interesse no projeto de estruturas submetidas a grandes intensidades, curta duração, cargas dinâmicas, que podem resultar de impacto e explosões. A resposta estrutural resultante de elementos de concreto reforçado sujeitos a tais cargas envolve várias dificuldades analíticas, veja-se [2], [1], [6] e [5].

Alguns estudos têm implementado modelos analíticos ou numéricos para tais análises sujeitas aos efeitos de cargas impulsivas distribuídas uniformemente. Entretanto, condições de carga uniforme representa somente uma pequena parcela de cargas possíveis. Este estudo é visto como ferramenta útil por incluir efeitos de carga localizada e combinações de cargas localizadas e distribuídas.

A demanda por sistemas de alta velocidade, baixo custo e baixo consumo de energia tem motivado a introdução de partes flexíveis em diversos sistemas mecânicos (estrutura de espaçonaves, braços com articulações flexíveis, rotores flexíveis, por exemplo). Sistemas mecânicos compostos por partes rígidas e flexíveis são geralmente descritos matematicamente por combinações de equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais e um conjunto de condições .

Em muitos sistemas mecânicos híbridos, o sistema flexível é modelado como uma estrutura do tipo viga. O modelo de viga usado comumente é baseado na teoria clássica de Euler-Bernoulli que ignora a inércia rotativa da viga. O modelo de Euler-Bernoulli fornece uma boa descrição do comportamento dinâmico da viga quando as dimensões da secção transversal são pequenas em comparação com seu comprimento. Um modelo mais acurado pode ser obtido utilizando-se a teoria de Timoshenko a qual considera não só a inércia rotacional mas também a deformação da viga devido ao cisalhamento. O modelo de Timoshenko para vigas é geralmente mais preciso que o modelo de Euler-Bernoulli, mas, por outro lado, é mais difícil usá-lo com finalidade de controle devido sua complexidade.

Como a teoria de Timoshenko para vigas é de maior ordem que a teoria de Euler-Bernoulli, é considerada superior na previsão da resposta transiente da viga. A superioridade do modelo de Timoshenko é mais pronunciado para vigas com uma razão de aspecto baixo. Aldraihem em [2] mostra que o uso de um controle baseado em Euler-Bernoulli para eliminar a vibração da viga pode conduzir à instabilidade causada pela excitação inadvertida do método não modelado.

Neste trabalho, estuda-se a obtenção da equação de Timoshenko, os modos de vibração e as vibrações forçadas sobre vigas com determinadas condições de contorno e submetidas a cargas harmônicas com e sem dinâmica.

No capítulo 2 estuda-se a descrição do modelo de Timoshenko e sua dedução, com uma breve comparação com o modelo de Euler-Bernoulli. Ainda, são descritas as condições iniciais e de contorno utilizadas no decorrer do trabalho.

O capítulo 3 aborda o estudo da equação modal de quarta ordem associada ao modelo de Timoshenko, considerando-se as bases espectral e dinâmica, para a obtenção dos modos conforme [12] e [19].

No capítulo 4 estuda-se a solução dinâmica distribuída e a resposta forçada decorrente de forças externas aplicadas à viga.

No capítulo 5 desenvolve-se a teoria para sistemas distribuídos em termos da função de Green para o cálculo simbólico das respostas forçadas, seguindo os trabalhos de [4], [?], [7], [?], [9] e [17].

O capítulo 6 trata da decomposição da resposta forçada que, pelo princípio da superposição, pode ser determinada pela soma da resposta livre com a resposta particular.

O capítulo 7 apresenta simulações para os modos, para a resposta impulso sendo considerados os casos de vigas com extremidades apoiada e livre, fixa e livre e livre e deslizante, sob a ação de cargas pontuais e com dinâmica; esta última com entradas do tipo constante, linear, com descontinuidade e oscilatória.

A resposta em frequência foi considerada para uma viga fixa livre sujeita a uma entrada dinâmica com várias frequências. As simulações foram realizadas com o uso do software Maple.

No capítulo 8 apresentam-se as conclusões pertinentes.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Modelo de Euler-Bernoulli

A equação do movimento para a vibração lateral de pequena amplitude de uma viga uniforme não amortecida, cuja deflexão de cisalhamento pode ser desconsiderada é dada por

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.1)$$

onde m é a massa da viga por unidade de comprimento e EI sua rigidez flexural (ambas são constantes conhecidas). A deflexão lateral da viga é $u(x, t)$, a qual é uma função de uma posição do tempo t e de uma posição longitudinal x .

Esta equação pode ser obtida considerando-se o equilíbrio lateral de um pequeno elemento dx da viga. A força lateral resultante no elemento é a diferença entre as forças de cisalhamento que se opõem sobre suas faces e aquelas que estão relacionadas com a curvatura de uma viga pela teoria de Euler para vigas. A força lateral resultante deve ser igual à massa do elemento mdx multiplicado por sua aceleração lateral $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Para maiores detalhes veja-se [5].

2.2 Modelo de Timoshenko

A equação do movimento (2.1) da teoria para vigas simples assume que cada elemento de uma viga move-se somente por translação perpendicular ao eixo da viga e não gira ou sofre deformação de cisalhamento [18]. No modelo de Timoshenko são considerados o efeito de cisalhamento e inércia rotacional [1]. Por Timoshenko, as seções transversais planas permanecem planas mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, pois, devido ao cisalhamento, ocorre um giro da seção em relação a essa perpendicular [8].

O sistema fornecerá o número de frequências naturais e, para cada frequência ocorre vibração. A configuração é referida como modo. As vibrações são geralmente chamadas *vibrações transversais* ou *vibrações flexurais*, pois ocorrem transversalmente ao comprimento da viga [19].

2.2.1 Efeito de cisalhamento e inércia rotacional

Considera-se a vibração de uma barra ou viga na direção perpendicular ao seu comprimento. A figura 2.1 ilustra uma viga fixa livre com a direção transversal indicada (isto é, a deflexão $u(t, x)$ está na direção y). A viga tem seção transversal retangular $A(x)$ com largura L_y , espessura L_z e comprimento L . Associada à viga está a rigidez flexural $EI(x)$, onde E é o módulo elástico de Young para viga e $I(x)$ é o momento de inércia da área da seção transversal sobre o eixo z . Da mecânica de materiais, a viga origina um momento fletor $M(t, x)$, o qual é relacionado com a deflexão da viga ou deformação de curvatura $u(t, x)$ dado por

$$M(t, x) = EI(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Um modelo de vibração flexural pode ser derivado examinando diagrama de forças de um elemento infinitesimal da viga, como indica a figura 2.1. Assumindo a deformação ser suficientemente pequena tal que a deformação de cisalhamento é muito menor que $u(t, x)$, isto é, os lados do elemento dx não se curvam, uma soma de forças na direção y origina

$$\left[V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right] - V(t, x) + f(t, x) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Aqui $V(t, x)$ é a força de cisalhamento no extremo esquerdo do elemento dx , $V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx$ é a força de cisalhamento no extremo direito do elemento dx , $f(t, x)$ é a força externa total aplicada ao elemento por unidade de comprimento e o termo do lado direito da igualdade é a força de inércia do elemento. A suposição da deformação de cisalhamento pequena usada no balanço das forças na equação (2.3) é verdadeira se $L/L_z \geq 10$ e $L/L_y \geq 10$, isto é, para vigas longas e finas. Para

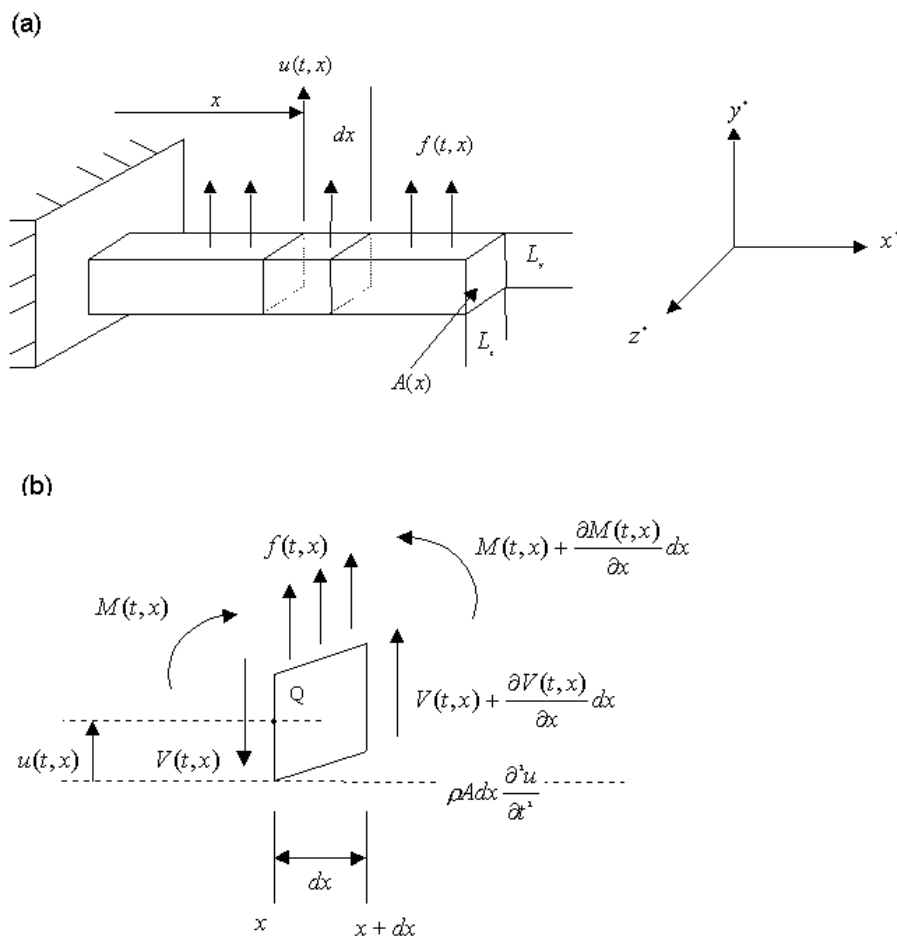


Figura 2.1: (a) Vibração transversal // (b) Diagrama de um pequeno elemento da viga deformado por uma força distribuída por unidade de comprimento

maiores detalhes veja-se [6]. Os momentos que atuam no elemento dx sobre o eixo z através do ponto são somados, Q (ver figura 2.1). Isto resulta

$$\left(M(t, x) + \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} dx \right) - M(t, x) + \left(V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right) dx + f(t, x) \frac{dx}{2} = 0. \quad (2.4)$$

O lado esquerdo da equação 2.4 é zero desde que também suposto que a inércia rotacional do elemento dx seja desprezível. Simplificando esta expressão obtém-se

$$\left[\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} + V(t, x) \right] dx + \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{f(t, x)}{2} \right] dx^2 = 0. \quad (2.5)$$

Para dx muito pequeno, tem-se $(dx)^2$ muito próximo de zero, então a expressão do momento é

$$V(t, x) = -\frac{\partial M(t, x)}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Isto estabelece que a força de cisalhamento é proporcional ao câmbio espacial no momento fletor. A substituição desta expressão pela força de cisalhamento na equação (2.3) resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [M(t, x)] dx + f(t, x) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Além disso, a substituição da equação (2.2) em (2.7) e dividindo-se por dx obtém-se

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right] = f(t, x). \quad (2.8)$$

Se não há ação de força externa então $f(t, x) = 0$ e se $EI(x)$ e $A(x)$ são constantes, a equação (2.8) simplifica-se e a vibração livre é dada por

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.9)$$

onde $c^2 = \frac{EI}{\rho A}$.

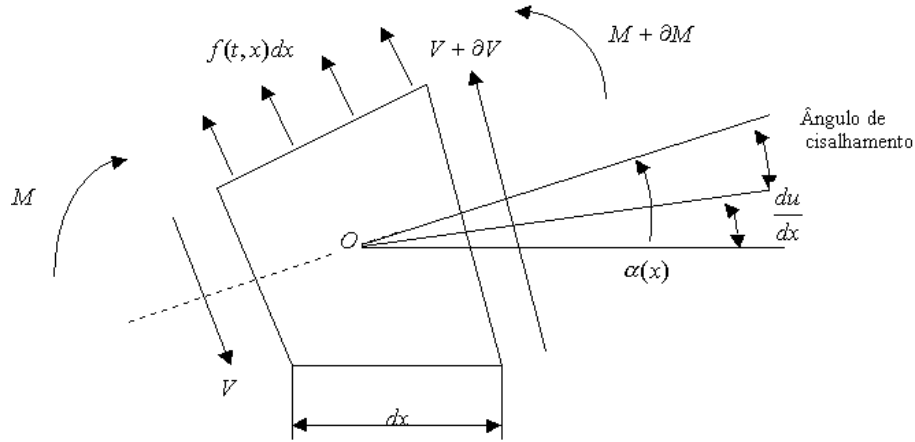


Figura 2.2: Efeito da deformação de cisalhamento.

O modelo para viga fina dado na equação (2.8) é referido como sendo a equação de Euler-Bernoulli. Este modelo ignora os efeitos de deformação de cisalhamento e a inércia rotativa.

Referindo a figura 2.2, o ângulo de cisalhamento dado por $\alpha - \frac{du}{dx}$, isto é, a diferença entre o ângulo total devido à flexão α e a inclinação da reta central da viga $\left(\frac{du}{dx}\right)$, representa o efeito de deformação de cisalhamento. Das condições elásticas [6] a equação do momento fletor torna-se

$$EI(x) \left[\frac{d\alpha(t, x)}{dx} \right] = M(t, x) \quad (2.10)$$

e tem-se para equação da força de cisalhamento

$$k^2 AG \left[\alpha(t, x) - \frac{du(t, x)}{dx} \right] = V(t, x) \quad (2.11)$$

onde E, I, A, α, V e M estão previamente definidos, G é o módulo de cisalhamento, k^2 é um fator que depende da forma da seção transversal (k^2 é denominado coeficiente de cisalhamento). Como no caso da equação (2.3), um balanço de forças produz

$$mdx \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = - \left[V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right] + V(t, x) + f(t, x) dx \quad (2.12)$$

onde m é a massa da viga por unidade de comprimento. Se a inércia rotacional é incluída então o balanço do momento em dx , dado pela equação (2.4) chega a

$$\begin{aligned} \rho I(x) dx \frac{\partial^2 \alpha(t, x)}{\partial t^2} = & \left[M(t, x) + \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} dx \right] - M(t, x) + \\ & + \left[V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right] dx + f(t, x) \frac{(dx)^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.10) e (2.11) em (2.12) e (2.13) tem-se

$$\rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right] + k^2 AG \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \right) \quad (2.14)$$

e

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k^2 AG \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \right) \right] + f(t, x) \quad (2.15)$$

que correspondem às equações acopladas de movimento para a viga, incluindo os efeitos da inércia rotacional e da deformação de cisalhamento.

Resolvendo-se a equação (2.15) para $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ obtém-se

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{k^2 AG} \left(f(t, x) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (2.16)$$

e resolvendo-se a equação (2.14) para α obtém-se

$$\alpha = \frac{EI}{k^2 AG} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\rho I}{k^2 AG} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

Assumindo que os coeficientes são constantes, $\alpha(t, x)$ pode ser eliminado e as equações acopladas reduzidas a uma equação, tem-se a equação de Timoshenko para uma viga

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \left(\frac{E}{k^2 G} + 1 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho^2 I}{k^2 G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f - \frac{EI}{k^2 AG} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{k^2 AG} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

2.2.2 Condições iniciais e de contorno

A equação da vibração livre, isto é, $f(t, x) = 0$, no modelo de Timoshenko dado pela (2.18) contém derivada espacial de quarta ordem e, portanto, requer quatro condições de contorno no cálculo da solução. A presença de derivadas temporais de segunda ordem requer duas condições iniciais: uma para o deslocamento $u(t, x)$ e outra para a velocidade $u_t(t, x)$, no instante $t = 0$.

2.2.2.1 Condições de contorno clássicas

Neste trabalho serão consideradas as condições de contorno clássicas, isto é, vigas com extremidades do tipo fixa, apoiada, livre e deslizante.

As condições de contorno necessárias para resolver a equação espacial são obtidas por análise da deflexão (deslocamento) $u(t, x)$, o declive do deslocamento $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, o momento fletor $EI(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$ e a força de cisalhamento $\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right]$ para cada extremidade da viga, ou seja, em $x = 0$ e $x = L$.

Quando a viga possui extremidade fixa, o momento fletor e a força de cisalhamento são ilimitados; o giro e o deslocamento são nulos.

Se a viga está apoiada em um suporte, o momento fletor e o deslocamento estarão restringidos; o giro e a força de cisalhamento são irrestritos.

Para vigas com extremidades livres o deslocamento e o giro são ilimitados, porém o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos.

Na viga com fronteira deslizante o deslocamento é permitido mas não a rotação; a força de cisalhamento é nula; o deslocamento e o momento fletor são irrestritos.

A tabela apresenta as condições de contorno clássicas para a viga na extremidade $x = 0$ e a representação esquemática de cada caso.

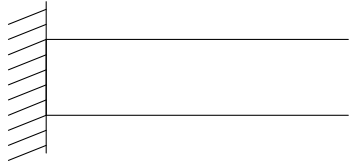


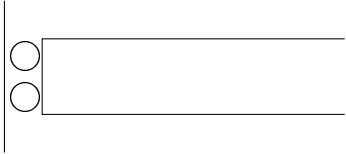
Extremo	Equações	Esquema
Fixa	$u(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0$	
Apoiada	$u(t, 0) = 0 \quad EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0$	
Livre	$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (t, 0) = 0$	
Deslizante	$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (t, 0) = 0$	

Tabela 2.1: Condições de Contorno Clássicas

3 ESTUDO DA EQUAÇÃO MODAL

A parte espacial da equação de Timoshenko, que é denominada equação modal, corresponde a uma equação de quarta ordem. Neste capítulo, o estudo dessa equação é realizado com uma base genérica de soluções. Nos cálculos serão consideradas a base espectral clássica e a base dinâmica introduzida por Claeysen, sendo a base dinâmica gerada a partir de uma solução com condições iniciais impulsivas; para maiores detalhes veja-se [3], [10], [11].

3.1 Equação matricial modal

Da equação 2.18 do modelo de Timoshenko, decorre que, por vibrações livres, a expressão é dada por:

$$\frac{\rho^2 I}{k^2 G} \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho E I}{k^2 G} + \rho I \right) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + E I \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = 0. \quad (3.1)$$

Com a introdução das constantes

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\rho A}{g k^2 A G} = \frac{\rho}{g k^2 G} \\ \beta^2 &= \frac{\rho A}{g E I} \\ \tau^2 &= \frac{\rho A I}{g E I A} = \frac{\rho}{g E} \end{aligned}$$

a equação de Timoshenko pode ser expressa por

$$\alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \beta^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = 0. \quad (3.2)$$

Na forma evolutiva, a equação 3.2 pode ser escrita como

$$R(t, x) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t, x) + S(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q(t, x) u = 0 \quad (3.3)$$

onde R , S e Q são operadores diferenciais espaciais

$$\begin{aligned} R &= \alpha^2 \tau^2 I, \\ S &= \beta^2 I - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ Q &= \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

atuando sobre funções que satisfazem as condições de contorno do problema.

Na resolução da equação através do método espectral procura-se soluções do tipo oscilatório, denotadas por $u(t, x) = e^{i\omega t} X(x)$. Assim, resulta

$$R(i\omega)^4 X(x) + S(i\omega)^2 X(x) + QX(x) = 0, \quad (3.4)$$

que equivale a determinar ω tal que a amplitude $X(x)$ é uma função não identicamente nula. Deve-se, assim, resolver o problema de autovalor com a equação modal dada por

$$[\omega^4 R - \omega^2 S + Q]X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0 \quad (3.5)$$

ou de forma simplificada

$$X^{(iv)}(x) + g^2 X''(x) - K^4 X(x) = 0 \quad (3.6)$$

onde

$$g^2 = (\alpha^2 + \tau^2)\omega^2, \quad K^4 = \beta^2\omega^2 - \alpha^2\tau^2\omega^4. \quad (3.7)$$

Tem-se, então, ω representando a *frequência característica* dos modos de vibração e $X(x)$, o modo de vibração correspondente. Os modos de vibração gozam das propriedades de simetria e ortogonalidade [15], [19].

3.1.1 Cálculo da base espectral e da base dinâmica

Serão consideradas as condições de contorno do modelo de Timoshenko descritas na tabela 2.1, que, de maneira genérica resultam nas expressões

$$\begin{cases} A_{11}X(0) + B_{11}X'(0) + C_{11}X''(0) + D_{11}X'''(0) = 0 \\ A_{12}X(0) + B_{12}X'(0) + C_{12}X''(0) + D_{12}X'''(0) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{cases} A_{21}X(L) + B_{21}X'(L) + C_{21}X''(L) + D_{21}X'''(L) = 0 \\ A_{22}X(L) + B_{22}X'(L) + C_{22}X''(L) + D_{22}X'''(L) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

A solução da equação diferencial linear homogênea (3.6) é dada por uma combinação linear das soluções

$$X(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) + c_4\phi_4(x) \quad (3.10)$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes e $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ é uma base de soluções, sendo o wronskiano não nulo, garantindo que o conjunto de soluções é linearmente independente. Escreve-se matricialmente a solução da equação modal (3.10) como

$$X = \Phi c \quad (3.11)$$

onde

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4], \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo-se as condições de contorno (3.8) e (3.9) em (3.10) e escrevendo-se matricialmente, resulta

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} c = 0 \quad (3.12)$$

Convencionando-se que:

- (i) nos elementos A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} e D_{ij} o índice i refere-se ao ponto onde há condição de contorno, sendo que $i = 1$ para $x = 0$ e $i = 2$ para $x = L$; o índice j refere-se à j -ésima condição de contorno no mesmo ponto;
- (ii) nos elementos $\phi_{ij}^{(k)}$ o índice k refere-se à k -ésima derivada e a ausência dele denota a função; o subíndice i indica a i -ésima condição de contorno e j , a j -ésima função de base,

a expressão 3.12 pode ser representada na forma matricial expandida

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11}(0) & \phi_{12}(0) & \phi_{13}(0) & \phi_{14}(0) \\ \phi'_{11}(0) & \phi'_{12}(0) & \phi'_{13}(0) & \phi'_{14}(0) \\ \phi''_{11}(0) & \phi''_{12}(0) & \phi''_{13}(0) & \phi''_{14}(0) \\ \phi'''_{11}(0) & \phi'''_{12}(0) & \phi'''_{13}(0) & \phi'''_{14}(0) \\ \phi_{21}(L) & \phi_{22}(L) & \phi_{23}(L) & \phi_{24}(L) \\ \phi'_{21}(L) & \phi'_{22}(L) & \phi'_{23}(L) & \phi'_{24}(L) \\ \phi''_{21}(L) & \phi''_{22}(L) & \phi''_{23}(L) & \phi''_{24}(L) \\ \phi'''_{21}(L) & \phi'''_{22}(L) & \phi'''_{23}(L) & \phi'''_{24}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

De maneira compacta, para obter os modos $X(x) = \Phi(x)c$ deve-se resolver

$$Uc = 0, \quad c \neq 0, \quad U = B\Phi \quad (3.14)$$

onde B é a matriz que representa as condições de contorno, Φ é o vetor da base e c representa o vetor de incógnitas. Como os parâmetros g^2 e K^4 , dados por (3.7), dependem de ω e, portanto, também os elementos da base Φ , as frequências ω são os valores para os quais este sistema possui solução, ou seja,

$$\Delta = \det(B\Phi) = 0 \quad (3.15)$$

A base dinâmica é gerada pela solução dinâmica ou resposta impulso $h(x)$ da equação (3.6) e suas derivadas até terceira ordem. A solução $h(x)$ é definida através do problema de valor inicial

$$h^{(iv)}(x) + g^2 h''(x) - K^4 h(x) = 0 \quad (3.16)$$

com as condições iniciais $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ e $h'''(0) = 1$. Para verificar que h , h' , h'' e h''' formam uma base de soluções, aplica-se as condições iniciais de $h(x)$ na matriz wronskiana, tal que

$$\det \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)} \\ h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)} & h^{(v)} \\ h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -g^2 \\ 1 & 0 & -g^2 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (3.17)$$

Verifica-se que o determinante é não nulo, de modo que h , h' , h'' e h''' são linearmente independentes formando, portanto, uma base de soluções.

A solução dinâmica pode ser representada em termos de base espectral. Assim, tem-se a equação característica de (3.6)

$$\lambda^4 + g^2 \lambda^2 - K^4 = 0 \quad (3.18)$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = \epsilon, \quad \lambda_2 = -\epsilon, \quad \lambda_3 = \delta i \quad \text{e} \quad \lambda_4 = -\delta i,$$

sendo

$$\delta = \sqrt{g^2 + \epsilon^2}, \quad \epsilon = \sqrt{\left(K^4 + \frac{g^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{g^2}{2}} \quad (3.19)$$

Substituindo K e g por ϵ em (3.18) tem-se

$$\omega^4 \alpha^2 \tau^2 + [\epsilon^2(\alpha^2 + \tau^2) - \beta^2] \omega^2 + \epsilon^4 = 0$$

ou

$$\omega^4 + \left[\frac{\epsilon^2(\alpha^2 + \tau^2) - \beta^2}{\alpha^2 \tau^2} \right] \omega^2 - \frac{\epsilon^4}{-(\alpha^2 \tau^2)} = 0$$

Assim

$$\omega = \left[\left(d^4 + \frac{z^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{z^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

sendo

$$z^2 = \frac{\epsilon^2(\alpha^2 + \tau^2) - \beta^2}{\alpha^2\tau^2}$$

$$d^4 = \frac{\epsilon^4}{-(\alpha^2\tau^2)}.$$

A base espectral é

$$\Phi = [\text{sen}(\delta x), \text{cos}(\delta x), \text{senh}(\epsilon x), \text{cosh}(\epsilon x)]. \quad (3.23)$$

A solução dinâmica em termos de base espectral é dada por [16]

$$h(x) = a_1 \text{sen}(\delta x) + a_2 \text{cos}(\delta x) + a_3 \text{senh}(\epsilon x) + a_4 \text{cosh}(\epsilon x). \quad (3.24)$$

Aplicando-se as condições iniciais em 3.24, obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \delta & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\delta^2 & 0 & \epsilon^2 \\ -\delta^3 & 0 & \epsilon^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução deste sistema é dada por

$$a_1 = \frac{-1}{\delta(\delta^2 + \epsilon^2)},$$

$$a_2 = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{\epsilon(\delta^2 + \epsilon^2)} \quad \text{e}$$

$$a_4 = 0.$$

Tem-se, então que

$$h(x) = \frac{\delta \text{senh}(\epsilon x) - \epsilon \text{sen}(\delta x)}{\delta \epsilon (\epsilon^2 + \delta^2)}. \quad (3.25)$$

Logo, a base dinâmica é

$$\phi_1 = h(x) = \frac{\delta \text{senh}(\epsilon x) - \epsilon \text{sen}(\delta x)}{\delta \epsilon (\epsilon^2 + \delta^2)}$$

$$\phi_2 = h'(x) = \frac{\cosh(\epsilon x) - \cos(\delta x)}{(\epsilon^2 + \delta^2)}$$

$$\phi_3 = h''(x) = \frac{\epsilon \operatorname{senh}(\epsilon x) + \delta \operatorname{sen}(\delta x)}{\epsilon^2 + \delta^2}$$

$$\phi_4 = h'''(x) = \frac{\epsilon^2 \cosh(\epsilon x) + \delta^2 \cos(\delta x)}{\epsilon^2 + \delta^2}$$

Como $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]$ tem-se

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -g^2 \\ 1 & 0 & -g^2 & 0 \\ h(L) & h'(L) & h''(L) & h'''(L) \\ h'(L) & h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) \\ h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \\ h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) & h^{(vi)}(L) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

onde $g^2 = \delta^2 - \epsilon^2$. Logo, derivando $h(x)$ até sexta ordem e obtendo seus valores em $x = 0$ e $x = L$ obtém-se a matriz correspondente à base dinâmica.

3.2 Cálculo dos modos

Os modos são obtidos ao resolver-se o sistema linear $Uc = 0$, onde sua solução, multiplicada pela matriz de base de soluções Φ fornece o modo relativo à base considerada. Para tanto, introduz-se, primeiramente, a matriz $U = B\Phi$, sendo B a matriz das condições de contorno e Φ a matriz de base para os valores $x = 0$ e $x = L$; calcula-se o determinante da matriz U através do qual obtém-se a equação $\Delta(\epsilon) = \det U = 0$; substituindo-se ω em K^4 na fórmula por ϵ , tem-se para cada raiz

ϵ o valor da frequência

$$\omega = \left[\left(d^4 + \frac{z^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{z^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

onde

$$z^2 = \frac{\epsilon^2(\alpha^2 + \tau^2) - \beta^2}{\alpha^2\tau^2} \quad (3.28)$$

e

$$d^4 = \frac{\epsilon^4}{-(\alpha^2\tau^2)}. \quad (3.29)$$

Sendo, ainda

$$\alpha^2 = \frac{m}{k^2 AG} = \frac{\rho A}{gk^2 AG} = \frac{\rho}{gk^2 G}$$

$$\beta^2 = \frac{m}{EI} = \frac{\rho A}{gEI}$$

$$\tau^2 = \frac{m r^2}{EI} = \frac{\rho AI}{gEIA} = \frac{\rho}{gE}$$

e para cada raiz ϵ desta equação, resolve-se o sistema $Uc = 0$ através de eliminação gaussiana.

Para maiores detalhes sobre a forma dos modos X_n veja-se [19].

4 A RESPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

Neste capítulo, abordar-se-ão, sistemas distribuídos do tipo

$$\sum_{j=0}^4 A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x), \quad (4.1)$$

onde as funções $u(t, x) = u$ e $f(t, x) = f$, dependentes do tempo t e do espaço x , correspondem à saída e à entrada do sistema, respectivamente, de acordo com Moraes [9].

Os coeficientes A_j são operadores espaciais que contêm derivadas somente com respeito à variável x e são assim definidos:

$$A_j w(x) = \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{d^k w}{dx^k}, \quad j = 0, \dots, 4. \quad (4.2)$$

A ordem das derivadas que aparecem nos coeficientes A_j , descritos pelos operadores da parte espacial, correspondem ao valor do parâmetro $m = \max(m_1, \dots, m_4)$, que definem a ordem espacial do sistema.

A *resposta livre* do sistema é dada pela solução da equação diferencial (4.1) quando a entrada $f(t, x)$ for idênticamente nula. A *resposta forçada* no tempo $t = t_0$ corresponde à solução da equação diferencial quando todas as condições iniciais são idênticamente nulas, isto é,

$$u(t_0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_0, x) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_0, x) = 0 \quad (4.3)$$

São fornecidas, juntamente com as condições iniciais, as condições de contorno genéricas, veja-se [20], [14], denotadas por

$$\begin{aligned} \alpha_{0k} u(t, 0) + \alpha_{1k} \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + \dots + \alpha_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} u(t, 0)}{\partial x^{m-1}} + \beta_{0k} y(t, L) + \\ + \beta_{1k} \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} + \dots + \beta_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} u(t, L)}{\partial x^{m-1}} = 0, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em (4.1) obtém-se

$$\sum_{j=0}^4 s^j A_j U(s, x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i + F(s, x). \quad (4.5)$$

A equação (4.5) pode ser escrita como

$$\sum_{k=0}^m p_k(s, x) \frac{\partial^k U(s, x)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i + F(s, x), \quad (4.6)$$

para certas funções $p_k(s, x)$. As condições iniciais de saída são dadas por $u_0^i = \frac{\partial^i u(0, x)}{\partial t^i}$. As funções $U(s, x)$ e $F(s, x)$ são as transformadas da saída $u(t, x)$ e da entrada $f(t, x)$, respectivamente.

Aplicando-se a transformada de Laplace nas condições de contorno dadas pela equação (4.4) tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_{0k} U(s, 0) + \alpha_{1k} \frac{\partial U(s, 0)}{\partial x} + \cdots + \alpha_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} U(s, 0)}{\partial x^{m-1}} + \beta_{0k} U(s, L) + \\ + \beta_{1k} \frac{\partial U(s, L)}{\partial x} + \cdots + \beta_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} U(s, L)}{\partial x^{m-1}} = 0, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Define-se $\Delta(s)$ como

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^4 s^j A_j = \sum_{j=0}^4 s^j \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{d^k}{dx^k} = \sum_{k=0}^m p_k(s, x) \frac{d^k}{dx^k}. \quad (4.8)$$

Assim, o problema de contorno dado pela equação (5.6) pode ser escrito, de maneira compacta, como

$$\Delta(s)U(s, x) = R(s, x) \quad (4.9)$$

sendo

$$R(s, x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i + F(s, x), \quad (4.10)$$

e $U(s, x)$ funções que satisfazem as condições de contorno dadas por (4.7).

Dada a função $H(s, x, \xi)$ como a *função de Green* do problema (4.9) tem-se

$$U(s, x) = \int_0^L H(s, x, \xi) \left[\sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i(\xi) \right] d\xi + \int_0^L H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi, \quad (4.11)$$

ou seja,

$$U(s, x) = \int_0^L H(s, x, \xi) \mathbf{R}(s, \xi) d\xi. \quad (4.12)$$

Definindo-se $h(t, x, \xi) = \mathcal{L}^{-1}[H(s, x, \xi)]$ e considerando-se propriedade da função $h(t, x, \xi)$, dada por

$$\begin{aligned} h(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s, x, \xi) &= 0 \\ h'(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 H(s, x, \xi) &= 0 \\ h''(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 H(s, x, \xi) &= 0 \\ A_4 h'''(0, x, \xi) &= A_4 \lim_{s \rightarrow \infty} s^4 H(s, x, \xi) &= \delta(x - \xi) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sendo assim,

$$s^k H(s, x, \xi) = \mathcal{L} [h^{(k)}(t, x, \xi)], \quad k = 0, \dots, 3. \quad (4.14)$$

A saída do sistema pode ser dada como

$$u(t, x) = \int_0^L \left(\sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t, x, \xi) A_j u_0^i(\xi) \right) d\xi + \int_0^L \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi \quad (4.15)$$

ou

$$u(t, x) = \int_0^L \left(\sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t, x, \xi) A_j u_0^i(\xi) + \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau \right) d\xi. \quad (4.16)$$

que é uma representação da distribuição espacial da saída do sistema, a qual pode ser simplificada com a introdução da solução dinâmica $\mathbf{h}(t)$ do sistema distribuído, definida através do operador integral

$$\mathbf{h}(t)\phi(x) = \int_0^L h(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (4.17)$$

sendo $h(t, x, \xi)$ a inversa da transformada de Laplace da função de Green $H(s, x, \xi)$ do problema de contorno dado pelas equações (4.7) e (4.9).

Com a introdução da solução dinâmica, a saída pode ser escrita na forma evolutiva

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{h}^{(j-1-i)}(t) A_j u_0^i + \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (4.18)$$

onde $u(t)$ é uma função com valores distribuídos, ou seja, para cada t fixo $u(t)$ é uma função que depende da variável espacial cujo valor é $u(t)(x) = u(t, x)$. Analogamente, tem-se que $f(t)(x) = f(t, x)$.

Aplicando-se a transformada de Laplace na solução dinâmica (4.17) obtém-se $H(s)$ *operador de transferência* atuando sobre funções de variável espacial

$$H(s)\phi(x) = \int_0^L H(s, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (4.19)$$

sendo $H(s)$ o operador inverso de

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^4 s^j A_j \quad (4.20)$$

definido sobre as funções que satisfazem as condições de contorno (4.7), isto é,

$$\Delta(s)H(s) = H(s)\Delta(s) = 1. \quad (4.21)$$

Assim, a relação (4.11) com condições iniciais nulas pode ser escrita como

$$U(s) = H(s)F(s), \quad (4.22)$$

sendo $U(s)$ e $F(s)$ funções com valores distribuídos espacialmente, isto é, $U(s)(x) = U(s, x)$ e $F(s)(x) = F(s, x)$.

5 A RESPOSTA FORÇADA PELO MÉTODO ESPECTRAL

Neste capítulo, obtém-se uma expressão para a resposta impulso com o uso do método espectral, conforme [17].

Considere-se a equação de Timoshenko, cuja modelagem foi descrita no capítulo 2:

$$\alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \beta^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x). \quad (5.1)$$

sujeita às condições iniciais

$$u(0, x) = v_0(x), \quad u_t(0, x) = v_1(x), \quad (5.2)$$

$$u_{tt}(0, x) = v_2(x) \quad e \quad u_{ttt}(0, x) = v_3(x). \quad (5.3)$$

e condições de contorno clássicas consideradas na seção 2.4.1.

Para a carga $f(t, x)$ expandida espectralmente, tem-se

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad (5.4)$$

com

$$f_n(t) = \frac{\int_0^L f(t, x) X_n dx}{\int_0^L X_n^2 dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.5)$$

onde $X_n(x)$ denota o n -ésimo modo relativo às condições de contorno dadas e fixas do problema. Escreve-se a solução da equação (5.1) da mesma forma, isto é,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \quad (5.6)$$

que não é outra coisa senão uma forma de variação de parâmetros,

Substituindo (5.6) e (5.4) em (5.1) obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha^2 \tau^2 u_n^{(iv)}(t) X_n(x) + \left(\beta^2 X_n(x) - (\alpha^2 + \tau^2) X_n''(x) \right) u_n''(t) + u_n(t) X_n^{(iv)}(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) X_n(x) \quad (5.7)$$

Utilizando-se $X_n(x)$ como base de autofunções, considera-se para $X_n''(x)$ a seguinte expansão

$$X_n''(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} X_r(x),$$

com

$$a_{rn} = \frac{\int_0^L X_n'' X_r dx}{\int_0^L X_r^2 dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

Da equação modal (3.6) tem-se

$$X_n^{(iv)}(x) = -g_n^2 X_n''(x) + K_n^4 X_n(x) \quad (5.9)$$

onde

$$\begin{aligned} g_n^2 &= (\alpha^2 + \tau^2) \omega_n^2, \\ K_n^4 &= (\beta^2 \omega_n^2 - \alpha^2 \tau^2 \omega_n^4). \end{aligned}$$

para cada frequência ω_n da equação característica (3.16).

Aplicando a ortogonalidade dos modos conforme [19] e substituindo (5.8) e (5.9) em (5.7) vem

$$\alpha^2 \tau^2 u_n^{(iv)}(t) + \left[\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} \right] u_n''(t) + \left[-g_n^2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} + K_n^4 \right] u_n(t) = f_n(t). \quad (5.10)$$

cujas soluções são [13]

$$\begin{aligned} u_n(t) &= h_{n,0}(t) u_n(0) + h_{n,1}(t) u_n'(0) + h_{n,2}(t) u_n''(0) + h_{n,3}(t) u_n'''(0) + \\ &+ \int_0^t h_{n,3}(t-s) f_n(s) ds, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde

$$[h_{n,0}(t) \quad h_{n,1}(t) \quad h_{n,2}(t) \quad h_{n,3}(t)] = [h_n(t) \quad \dot{h}_n(t) \quad \ddot{h}_n(t) \quad h_n'''(t)] \begin{bmatrix} 0 & \gamma_n^2 & 0 & 1 \\ \gamma_n^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Com $h_n(t) = h_{n,3}(t)$ a resposta impulso da equação (5.9) que é dada por

$$h_n(t) = \frac{s_n \operatorname{senh}(q_n t) - q_n \operatorname{sen}(s_n t)}{s_n q_n (s_n^2 + q_n^2)}, \quad (5.13)$$

sendo

$$s_n = \sqrt{\gamma_n^2 + q_n^2}, \quad (5.14)$$

$$q_n = \left[\left(g_n^2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} - K_n^4 + \frac{\gamma_n^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_n^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.15)$$

$$\gamma_n^2 = \frac{\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn}}{\alpha^2 \tau^2}. \quad (5.16)$$

Com as condições iniciais do problema dadas por 5.2 tem-se

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} v_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(j)}(0) X_n(x), \quad j = 0, \dots, 3 \quad (5.17)$$

e pela ortogonalidade dos modos

$$u_n^{(j)}(0) = \frac{\int_0^L v_j(\xi) X_n(\xi) d\xi}{\|X_n\|^2}. \quad (5.18)$$

Substituindo (5.11) na expressão (5.6) e trocando-se a ordem dos somatórios vem

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^3 \int_0^L h_j(t, x, \xi) v_j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau \quad (5.19)$$

onde

$$h_j(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} h_{nj}(t) \quad (5.20)$$

com

$$h_{n3}(t) = h_n(t), \quad (5.21)$$

$$h_{n2}(t) = h_n'(t), \quad (5.22)$$

$$h_{n1}(t) = \gamma_n^2 h_n(t) + h_n''(t), \quad (5.23)$$

$$h_{n0}(t) = \gamma_n^2 h_n'(t) + h_n'''(t). \quad (5.24)$$

Assim, de forma evolutiva

$$u(t)(x) = h_0(t)v_0(x) + h_1(t)v_1(x) + h_2(t)v_2(x) + h_3(t)v_3(x) + \int_0^t h_3(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (5.25)$$

com

$$h_j(t)\phi(x) = \int_0^L h_j(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (5.26)$$

sendo que $h_j(t, x, \xi)$ é dado por (5.20).

A resposta forçada, que corresponde a condições iniciais nulas, vem a ser dada por

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t-\tau, x, \xi)f(\tau, \xi)d\xi d\tau \quad (5.27)$$

onde

$$h(t, x, \xi) = h_3(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} h_n(t). \quad (5.28)$$

No domínio freqüência, tem-se

$$U(s, x) = \mathcal{L}[u(t, x)] = \int_0^L H(s, x, \xi)F(s, \xi)d\xi \quad (5.29)$$

com

$$H(s, x, \xi) = \mathcal{L}[h(t, x, \xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} \mathcal{L}(h_n(t)) \quad (5.30)$$

Decorre que

$$H(s, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(s) \quad (5.31)$$

sendo

$$\sigma_n(s) = \frac{1}{(s^2 - q_n^2)(s^2 + s_n^2)} \quad (5.32)$$

com s_n e q_n dados por (5.12) e (5.13), respectivamente.

Deve ser observado que para entradas exponenciais

$$f(t, x) = e^{\lambda t}F(x)$$

soluções particulares do mesmo tipo podem ser obtidas da forma

$$u(t, x) = e^{\lambda t} \int_0^L H(\lambda, x, \xi)F(\xi)d\xi. \quad (5.33)$$

6 CÁLCULO SIMBÓLICO DA RESPOSTA FORÇADA PARA O MODELO DE TIMOSHENKO

6.1 Decomposição da resposta forçada

A resposta forçada em $t = 0$ na forma evolutiva é obtida a partir da equação 4.18, sendo dada pela integral de convolução

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (6.1)$$

que corresponde à solução do sistema distribuído representado por

$$\sum_{j=0}^4 A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x), \quad (6.2)$$

com condições iniciais nulas

$$u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(0, x) = 0, \quad (6.3)$$

onde $\mathbf{u}(t) = u(t, x)$ e $\mathbf{f}(t) = f(t, x)$ são funções que dependem da variável espacial.

Pelo princípio da superposição, a resposta forçada pode ser escrita como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p$ onde \mathbf{u}_h é a resposta livre, e \mathbf{u}_p é a resposta particular (permanente), ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = \mathbf{u}_h(t) + \mathbf{u}_p(t) \quad (6.4)$$

sendo $\mathbf{u}_h(t)(x) = u_h(t, x)$ e $\mathbf{u}_p(t)(x) = u_p(t, x)$.

Como $\{\mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t), \mathbf{h}''(t), \mathbf{h}'''(t)\}$ formam uma base de soluções da equação homogênea

$$\sum_{j=0}^4 A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = 0, \quad (6.5)$$

a equação(6.4), que corresponde à solução não homogênea, pode ser escrita como

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j)}(t) a_j + \mathbf{u}_p(t), \quad (6.6)$$

sendo a_j funções de variável espacial a serem determinadas a partir das condições iniciais nulas de $\mathbf{u}(t)$ em $t = 0$.

Tem-se,então, o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j)}(0)a_j + \mathbf{u}_p(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j+1)}(0)a_j + \mathbf{u}'_p(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j+2)}(0)a_j + \mathbf{u}''_p(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j+3)}(0)a_j + \mathbf{u}'''_p(0). \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = -A_4 \mathbf{u}_p(0) \\ a_2 = -A_3 \mathbf{u}_p(0) - A_4 \mathbf{u}'_p(0) \\ a_1 = -A_2 \mathbf{u}_p(0) - A_3 \mathbf{u}'_p(0) - A_4 \mathbf{u}''_p(0) \\ a_0 = -A_1 \mathbf{u}_p(0) - A_2 \mathbf{u}'_p(0) - A_3 \mathbf{u}''_p(0) - A_4 \mathbf{u}'''_p(0) \end{array} \right. \quad (6.8)$$

ou de maneira compacta

$$a_j = - \sum_{k=1}^{4-j} A_{k+j} \mathbf{u}_p^{(k-1)}(0, x), \quad \text{para } j = 0, \dots, 3. \quad (6.9)$$

A solução homogênea é dada, então, na forma evolutiva por

$$\mathbf{u}_h(t) = - \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}^{(j)}(t) \sum_{k=1}^{4-j} A_{k+j} \mathbf{u}_p^{(k-1)}(0) = - \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{4-j} \mathbf{h}^{(k-1)}(t) A_{k+j} \mathbf{u}_p^{(j)}(0), \quad (6.10)$$

sendo que

$$\mathbf{h}^{(j)}(t)\phi(x) = \int_0^L \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi. \quad (6.11)$$

Tem-se, portanto no domínio original

$$u_h(t, x) = - \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{4-j} \int_0^L \frac{\partial^{k-1} h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi) A_{k+j} u_p^j(0, \xi) d\xi. \quad (6.12)$$

A solução homogênea $u_h(t, x)$ pode ser determinada com o auxílio da resposta impulso funcional $h(t)$, sendo conhecidas as condições iniciais da solução não homogênea $u_p(t, x)$.

O cálculo da resposta forçada fica, então, determinado pela obtenção da resposta particular e é dado na forma evolutiva por

$$u(t) = \int_0^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau = u_p(t) - \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{4-j} h^{(k-1)}(t)A_{k+j}u_p^j(0), \quad (6.13)$$

que é uma decomposição da convolução.

Na forma usual, considerando-se o domínio original, tem-se que a resposta forçada é expressa por

$$u(t, x) = u_p(t, x) - \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{4-j} \int_0^L \frac{\partial^{k-1} h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi)A_{k+j}u_p^j(0, \xi)d\xi. \quad (6.14)$$

Considerando o sistema (6.2) para o modelo de Timoshenko expresso pela equação (5.1), resulta que os coeficientes espaciais são

$$A_0 = Q, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = S, \quad A_3 = 0 \quad e \quad A_4 = R$$

com

$$R = \alpha^2 \tau^2, \quad (6.15)$$

$$S = \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (6.16)$$

$$Q = \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \quad (6.17)$$

Na forma expandida, a resposta forçada é dada por

$$u(t, x) = \int_0^t \left[\int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau \quad (6.18)$$

onde

$$h(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} h_n(t) \quad (6.19)$$

sendo

$$h_n(t) = \frac{s_n \sinh(q_n t) - q_n \sin(s_n t)}{s_n q_n (s_n^2 + q_n^2)} \quad (6.20)$$

com

$$s_n = \sqrt{\gamma_n^2 + q_n^2}, \quad (6.21)$$

$$q_n = \left[\left(g_n^2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} - K_n^4 + \frac{\gamma_n^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_n^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.22)$$

Segue pela equação (6.13)

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = \\ &= u_p(0) - [\mathbf{h}(t) A_2 \mathbf{u}'_p(0) + \mathbf{h}'(t) A_2 \mathbf{u}_p(0) + \mathbf{h}(t) A_4 \mathbf{u}'''_p(0) + \\ &+ \mathbf{h}'(t) A_4 \mathbf{u}''_p(0) + \mathbf{h}''(t) A_4 \mathbf{u}'_p(0) + \mathbf{h}'''(t) A_4 \mathbf{u}_p(0)]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Substituindo os valores dos coeficientes A_j , as equações (6.15) a (6.17) e escrevendo a equação (6.23) na forma expandida ou na forma integral expandida

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_p(t, x) - \int_0^L \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, \xi) S \frac{\partial u_p}{\partial t}(0, \xi) d\xi + \\ &- \int_0^L \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, \xi) S u_p(0, \xi) d\xi + \\ &- \int_0^L h(t, x, \xi) R \frac{\partial^3 u_p}{\partial t^3}(0, \xi) d\xi + \\ &- \int_0^L \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, \xi) R \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}(0, \xi) d\xi + \\ &- \int_0^L \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t, x, \xi) R \frac{\partial u_p}{\partial t}(0, \xi) d\xi + \\ &- \int_0^L \frac{\partial^3 h}{\partial t^3}(t, x, \xi) R u_p(0, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.24)$$

De maneira compacta tem-se

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_p(t, x) - [\mathbf{h} S \mathbf{u}'_p(0, x) + \mathbf{h}' S u_p(0, x) + \mathbf{h} R \mathbf{u}'''_p(0, x) + \\ &+ \mathbf{h}'(t) R \mathbf{u}''_p(0, x) + \mathbf{h}''(t) R \mathbf{u}'_p(0, x) + \mathbf{h}'''(t) R u_p(0, x)] \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.2 Decomposição para diferentes tipos de entradas

Na equação de Timoshenko para uma viga dada por (2.18), a entrada é expressa por $f(t, x) = \sum_{j=1}^m A_j e^{\lambda_j t} \delta(x - a_j)$ correspondendo a entradas com dinâmica geral. Para entradas do tipo concentradas sem dinâmica considera-se $f(t, x) = p - \frac{EI}{k^2 AG} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{k^2 AG} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ onde $p(t, x) = Ae^{\lambda t} P_o(x)$

6.2.1 O caso concentrado sem dinâmica

Para uma entrada concentrada $f(t, x) = Ae^{\lambda t} \delta(x - a)$, procura-se resposta particular do mesmo tipo:

$$u_p(t, x) = Ae^{\lambda t} w(x). \quad (6.26)$$

Substituindo na equação de Timoshenko, decorre

$$w^{(iv)}(x) - (\alpha^2 + \tau^2)v''(x) + (\alpha^2\tau^2\lambda^4 + \beta\lambda^2)v(x) = A\delta(x - a), \quad (6.27)$$

sujeita a condições de contorno. Tem-se, ainda, que

$$w(x) = \int_0^L H(\lambda, x, \xi) A\delta(\xi - a) d\xi = Ae^{\lambda t} H(\lambda, x, a).$$

onde $H(\lambda, x, \xi)$ é a função de Green associada com (6.27).

A solução homogênea $u_h(t, x)$ dada pela equação (6.24) tem termos do tipo

$$\int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r}(t, x, \xi) \frac{\partial^b u_p}{\partial t^b}(0, \xi) d\xi \quad r, b = 0, \dots, 3 \quad (6.28)$$

com

$$\frac{\partial^b u_p}{\partial t^b}(0, \xi) = \lambda^b AH(\lambda, \xi, a). \quad (6.29)$$

Substituindo $H(\lambda, \xi, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi)X_n(a)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda)$ e utilizando a ortogonalidade dos modos, decorre

$$\int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial^b u_p}{\partial t^b}(0, \xi) \right) d\xi = \lambda^b A \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(r)}(t) \frac{X_j(x)X_j(a)}{\|X_j\|^2} \sigma_j(\lambda) \quad (6.30)$$

para $k = 0$

$$\int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial^b u_p}{\partial t^b}(0, \xi) \right) d\xi = \lambda^b A \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \sigma_j(\lambda) \frac{X_{n-j}(x) X_j(a)}{\|X_{n-j}\|^2} a_{n-j,j} \quad (6.31)$$

e para $k=2$

com

$$\sigma_j(\lambda) = \frac{1}{(\lambda^2 - q_j^2)(\lambda^2 + s_j^2)}. \quad (6.32)$$

e

$$a_{n-j,j} = \frac{\int_0^L X_j'' X_{n-j} d\xi}{\int_0^L X_{n-j}^2 d\xi} \quad (6.33)$$

Tem-se, então

$$\begin{aligned} u_h = & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j(x) X_j(a)}{\|X_j\|^2} \sigma_j(\lambda) \left[A \beta^2 (\lambda h_j + h_j') + A \alpha^2 \tau^2 (\lambda^3 h_j + \lambda^2 h_j' + \lambda h_j'' + h_j''') \right] + \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{X_{n-j}(x) X_j(a)}{\|X_{n-j}\|^2} a_{n-j,j} \sigma_j \left[A (\alpha^2 + \tau^2) (\lambda h_{n-j}(t) + h_{n-j}'(t)) \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Dada

$$u_p = A e^{\lambda t} H(\lambda, x, a) = A e^{\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(a)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda) \quad (6.35)$$

tem-se

$$\begin{aligned} u = u_p + u_h = & A e^{\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(a)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda) + \\ & - A \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{X_n(x) X_n(a)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda) \left(\beta^2 + \alpha^2 \tau^2 \lambda^2 + \alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\lambda h_n + h_n') \right] + \\ & + \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{X_{n-j}(x) X_{j+1}(a)}{\|X_{n-j}\|^2} a_{n-j,j+1} \sigma_{j+1} (\alpha^2 + \tau^2) (\lambda h_{n-j}(t) + h_{n-j}'(t)) \right] \end{aligned} \quad (6.36)$$

6.2.2 O caso dinâmico

Supõe-se

$$f(t, x) = p(t, x) + D \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} = e^{\lambda t} F(x) \quad (6.37)$$

sendo $F(x) = (1 + \lambda^2 E)P_0 + DP_0''$

com

$$D = \frac{-EI}{k^2 AG} \text{ e } E = \frac{\rho I}{k^2 AG}.$$

Procura-se resposta particular do tipo

$u_p(t, x) = e^{\lambda t}v(x)$ onde

$$v(x) = \int_0^L H(\lambda, x, \xi)F(\xi)d\xi \quad (6.38)$$

com

$$H(\lambda, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda).$$

Como

$$\begin{aligned} u_h = & -[hSu_p'(0, x) + h'Su_p(0, x) + hRu_p'''(0, x) + \\ & + h'(t)Ru_p''(0, x) + h''(t)Ru_p'(0, x) + h'''(t)Ru_p(0, x)] \end{aligned} \quad (6.39)$$

com R e S dados por (6.15) e (6.16) respectivamente, segue o cálculo de termos da forma

$$\int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial^b u_p}{\partial t^b}(0, \xi) \right) d\xi = \lambda^b \int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r} \frac{\partial^k v(\xi)}{\partial \xi^k} d\xi \quad (6.40)$$

sendo

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \frac{\partial^b u_p}{\partial t^b}(t, \xi) = \lambda^b e^{\lambda t} \frac{\partial^k v(\xi)}{\partial \xi^k}(t, \xi). \quad (6.41)$$

Para $t = 0$ tem-se $u_p(0, \xi) = v(\xi)$.

Segue que

$$u_p(0, \xi) = \int_0^L H(\lambda, \xi, \eta)F(\eta)d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \frac{X_n(\xi)X_n(\eta)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda)F(\eta)d\eta \quad (6.42)$$

Logo

$$\frac{\partial^k u_p}{\partial \xi^k}(0, \xi) = \lambda^b \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \frac{X_n^{(k)}(\xi)X_n(\eta)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(\lambda)F(\eta)d\eta \quad (6.43)$$

Usando a ortogonalidade dos modos tem-se

$$\int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r} \frac{\partial^k u_p}{\partial \xi^k} = \lambda^b \int_0^L \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \frac{X_{n-j}(x)X_{n-j}(\xi)}{\|X_{n-j}\|^2} X_j^{(k)}(\xi) \psi_j d\xi \quad (6.44)$$

com

$$\psi_j = \int_0^L \frac{X_j(\eta)^2}{\|X_j\|} F(\eta) d\eta \quad (6.45)$$

Trocando a ordem da integral, vem

$$\int_0^L \frac{\partial^r h}{\partial t^r} \frac{\partial^k u_p}{\partial \xi^k} = \lambda^b \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_j(\lambda) \psi_j \int_0^L X_{n-j}(\xi) X_j^{(k)}(\xi) d\xi \quad (6.46)$$

sendo que

$$\int_0^L X_{n-j}(\xi) X_j^{(k)}(\xi) d\xi = \delta_{n-j} \|X_{n-j}\|^2. \quad (6.47)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \lambda^b \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_j(\lambda) \psi_j \delta_{n-j,j} \|X_{n-j}\|^2 = \\ & = \lambda^b \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) X_{n-j}(x) \sigma_j(\lambda) \psi_j \delta_{n-j,j} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Em (6.47), se $k = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} & \lambda^b \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_j(\lambda) \psi_j \int_0^L X_{n-j}(\xi) X_j^{(k)}(\xi) d\xi = \\ & = \lambda^b \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(r)}(t) X_j(x) \sigma_j(\lambda) \psi_j \end{aligned} \quad (6.49)$$

Mas se $k = 2$, tem-se

$$\begin{aligned} & \lambda^b \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_j(\lambda) \psi_j \int_0^L X_{n-j}(\xi) X_j^{(k)}(\xi) d\xi = \\ & = \lambda^b \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} h_{n-j}^{(r)}(t) \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_j(\lambda) \psi_j a_{n-j,j} \end{aligned} \quad (6.50)$$

sendo $a_{n-j,j}$ dado por (6.33).

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} u_h = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n(x) \sigma_n(\lambda) \psi_n \left(\beta^2 + \lambda^2 \alpha^2 \tau^2 + \alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\lambda h_n(t) + h'_n(t)) + \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_{j+1}(\lambda) a_{n-j,j+1} (\alpha^2 + \tau^2) \psi_{j+1} (\lambda h_{n-j}(t) + h'_{n-j}(t)) \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

onde

$$\psi_j = \int_0^L \frac{X_j(\eta)}{\|X_j\|^2} F(\eta) d\eta$$

Decorre, portanto

$$\begin{aligned} u &= u_p + u_h = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(\lambda) \psi_n X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n(x) \sigma_n(\lambda) \psi_n \left(\beta^2 + \lambda^2 \alpha^2 \tau^2 + \alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\lambda h_n(t) + h'_n(t)) + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{X_{n-j}(x)}{\|X_{n-j}\|^2} \sigma_{j+1}(\lambda) a_{n-j,j+1} (\alpha^2 + \tau^2) \psi_{j+1} (\lambda h_{n-j}(t) + h'_{n-j}(t)) \right] \end{aligned} \tag{6.52}$$

com $h_n(t)$ dado por (6.20).

7 SIMULAÇÕES SIMBÓLICO-NUMÉRICAS

A seguir, apresentar-se-ão os resultados das simulações realizadas, com diferentes condições de contorno clássicas para vigas dos tipo apoiada-livre, fixa-livre e livre-deslizante, que sofrem a ação de forças externas, cuja equação é dada pelo modelo de Timoshenko para vigas. Para cada tipo serão consideradas entradas concentradas sem dinâmica do tipo harmônicas cossenoidais e senoidais e, também, entradas dinâmicas de diferentes tipos, de amplitudes espaciais, tais como: constante, linear, degrau, senoidal e contínua por partes.

As simulações realizadas foram organizadas de acordo com as diferentes condições de contorno consideradas, sendo que, para cada uma dessas são apresentados os resultados obtidos para os diferentes tipos de entradas. Além disso, na seção 7.4 consta os resultados obtidos considerando-se o domínio freqüência para viga com condição de contorno do tipo fixa-livre.

Para as simulações e de acordo com o cálculo modal desenvolvido no capítulo 3 , seguindo [19], os valores dos parâmetros usados são dados a seguir:

$L = 1 \text{ m}$	comprimento da viga;
$E = 2.1 \cdot 10^{10} \text{ kg/m}^2$	módulo de elasticidade do aço;
$I = 8.33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$	momento de inércia da área da seção transversal da viga;
$\rho = 7833.44 \text{ Kg/m}^3$	peso específico;
$A = 0.01 \text{ m}^2$	área da viga;
$k^2 = 2/3$	fator dependente da seção transversal;
$G = 8 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$	módulo de cisalhamento do aço;
$g = 9.8 \text{ m/s}^2$	aceleração da gravidade;

As principais equações desenvolvidas nos capítulos anteriores, usadas nas simulações são as seguintes:

$$h(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} h_n(t) \quad (7.1)$$

$$h_n(t) = \frac{s_n \operatorname{senh}(q_n t) - q_n \operatorname{sen}(s_n t)}{s_n q_n (s_n^2 + q_n^2)} \quad (7.2)$$

$$H(s, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} \sigma_n(s) \quad (7.3)$$

$$\sigma_n(\lambda) = \frac{1}{(\lambda^2 - q_n^2)(\lambda^2 + s_n^2)} \quad (7.4)$$

$$\omega = \left[\left(d^4 + \frac{z^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{z^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.5)$$

$$z^2 = \frac{\epsilon^2(\alpha^2 + \tau^2) - \beta^2}{\alpha^2 \tau^2} \quad (7.6)$$

$$d^4 = \frac{\epsilon^4}{-(\alpha^2 \tau^2)} \quad (7.7)$$

$$\alpha^2 = \frac{m}{k^2 AG} = \frac{\rho A}{gk^2 AG} = \frac{\rho}{gk^2 G} \quad (7.8)$$

$$\beta^2 = \frac{m}{EI} = \frac{\rho A}{gEI} \quad (7.9)$$

$$\tau^2 = \frac{m r^2}{EI} = \frac{\rho AI}{gEIA} = \frac{\rho}{gE} \quad (7.10)$$

$$s_n = \sqrt{\gamma_n^2 + q_n^2}, \quad (7.11)$$

$$q_n = \left[\left(g_n^2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn} - K_n^4 + \frac{\gamma_n^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_n^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.12)$$

$$\gamma_n^2 = \frac{\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \sum_{r=1}^{\infty} a_{rn}}{a_{rn}} \alpha^2 \tau^2 \quad (7.13)$$

$$F(x) = (1 + \lambda^2 E)P_0 + DP_0'' \quad (7.14)$$

$$E = \frac{\rho I}{k^2 AG}, \quad (7.15)$$

$$D = \frac{-EI}{k^2 AG}. \quad (7.16)$$

7.1 Viga apoiada-livre

Os cinco primeiros modos dinâmicos foram calculados, aproximadamente, através da base dinâmica descrita na seção 3.3 para o caso da viga apoiada-livre resultam em:

$$X_1 = -1.399\text{sen}(3.9414x) + 0.04635\text{senh}(3.8255x)$$

$$X_2 = -1.380\text{sen}(7.1143x) - 0.003713\text{senh}(6.4907x)$$

$$X_3 = -1.353\text{sen}(10.2988x) + 0.0005381\text{senh}(8.6164x)$$

$$X_4 = -1.315\text{sen}(13.4911x) - 0.0001414\text{senh}(10.1710x)$$

$$X_5 = -1.250\text{sen}(16.6882x) + 0.00006392\text{senh}(11.1864x).$$

A figura a seguir mostra os cinco primeiros modos em um mesmo sistema de coordenadas.

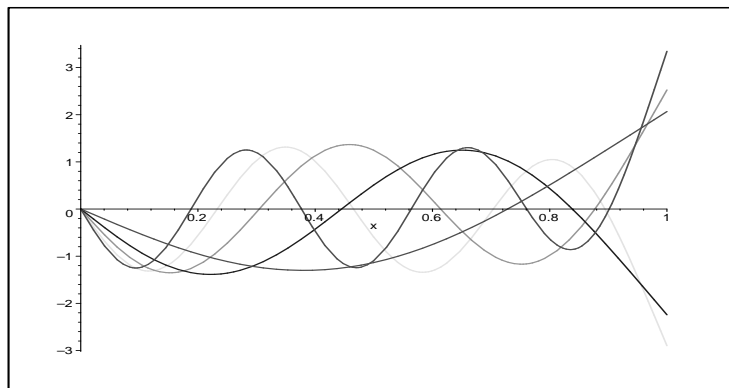


Figura 7.1: Modos da viga apoiada-livre

O gráfico da resposta impulso expressa pela equação (5.13) é apresentado a seguir para t fixado em 1.5s.

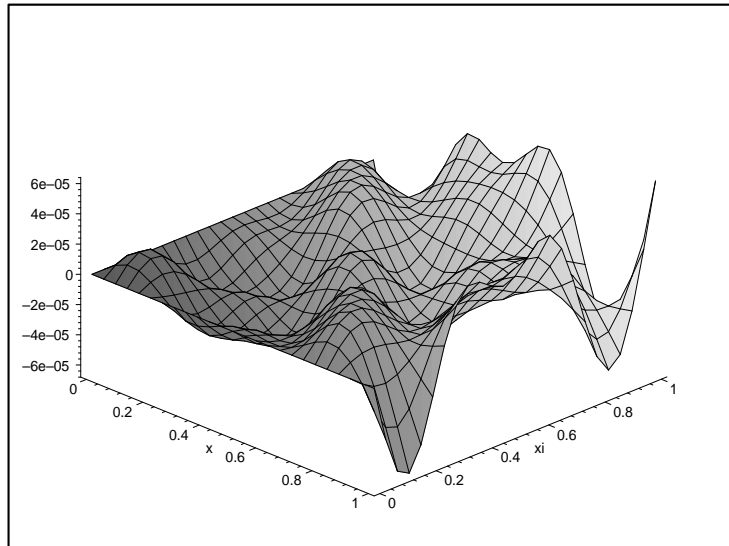


Figura 7.2: Resposta impulso para viga apoiada -livre em $t = 1.5$

Para o caso dinâmico, considera-se: $\lambda = i\omega$, sendo $f(t, x) = e^{i\hat{\omega}t}P_0(x) \Rightarrow$
 $F(t, x) = \cos\hat{\omega}t[(1 - \omega^2 E)P_0 + DP_0''] + i\sin\hat{\omega}t[(1 - \omega^2 E)P_0 + DP_0'']$.

7.1.1 O caso concentrado sem dinâmica

Os parâmetros das entradas concentradas harmônicas cossenoidais e senoidais são apresentados nas tabelas a seguir, respectivamente.

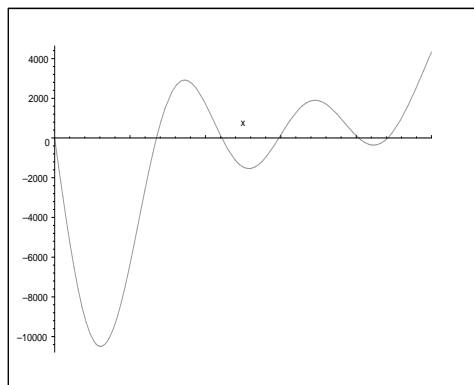
Parâmetros de Entrada			Excitação
AMPLITUDE (A)	FREQUÊNCIA (ω)	LOCALIZAÇÃO DA CARGA (x)	$f(t, x)$
3000	1300	0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9	$A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

Tabela 7.1: Parâmetros de entrada da força harmônica cosseno concentrada.

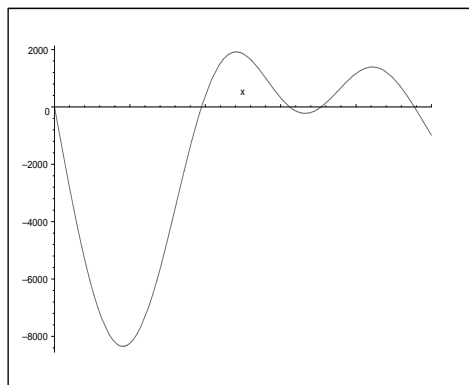
Parâmetros de Entrada			Excitação
AMPLITUDE (A)	FREQUÊNCIA (ω)	LOCALIZAÇÃO DA CARGA (x)	$f(t, x)$
3000	1300	0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9	$A\sin(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

Tabela 7.2: Parâmetros de entrada da força harmônica seno concentrada.

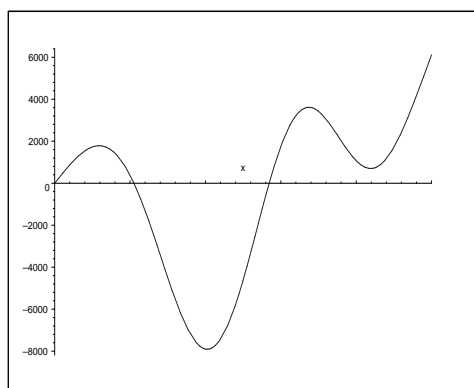
Os gráficos a seguir apresentam os deslocamentos quando da ação de uma carga do tipo concentrada sem dinâmica harmônica cossenoidal em diferentes posições da viga.



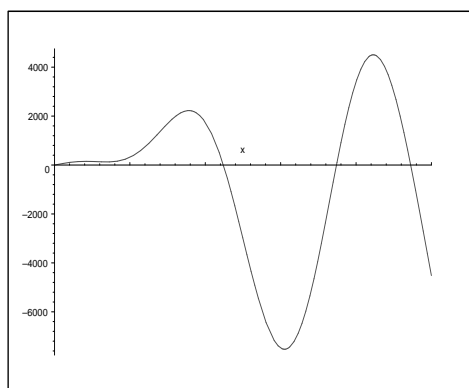
a=0.1



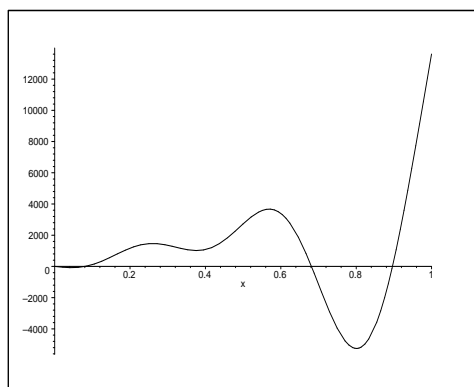
a=0.2



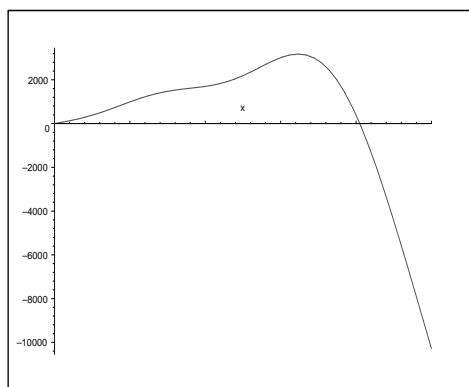
a=0.4



a=0.6



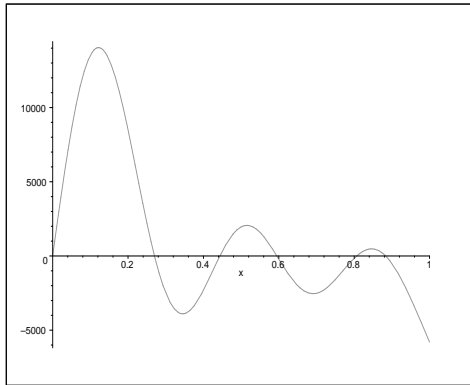
a=0.8



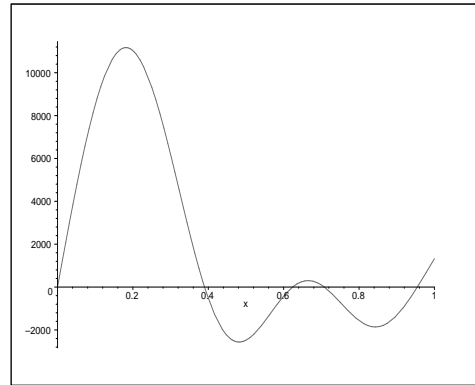
a=0.9

Figura 7.3: Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

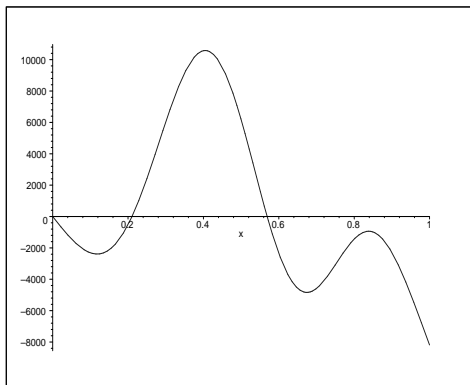
Os gráficos a seguir apresentam os deslocamentos quando da ação de uma carga do tipo concentrada sem dinâmica harmônica senoidal em diferentes posições da viga.



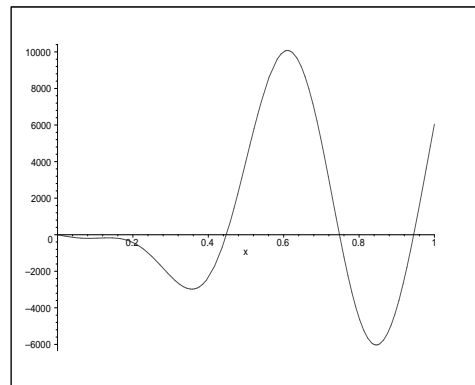
a=0.1



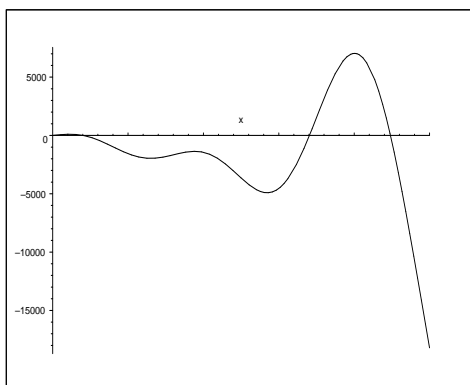
a=0.2



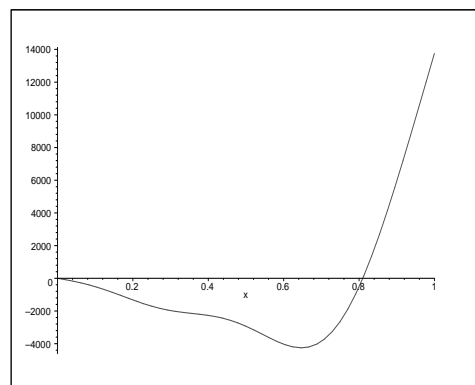
a=0.4



a=0.6



a=0.8



a=0.9

Figura 7.4: Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$

As tabelas apresentam os parâmetros para entrada compostos de diversas parcelas harmônicas cossenoidais e senoidais, respectivamente.

Valores dos parâmetros da entrada				Excitação
n	A_n	$\hat{\omega}_n$	a_n	$f(t, x)$
1	1000	2500	0.2	$\sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$
2	2000	6800	0.4	
3	1500	12000	0.6	
4	1000	18500	0.8	
5	3500	13000	0.9	

Tabela 7.3: Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas

Valores dos parâmetros da entrada				Excitação
n	A_n	$\hat{\omega}_n$	a_n	$f(t, x)$
1	1000	2500	0.2	$\sum_{n=1}^5 A_n \sin(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$
2	2000	6800	0.4	
3	1500	12000	0.6	
4	1000	18500	0.8	
5	3500	13000	0.9	

Tabela 7.4: Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas

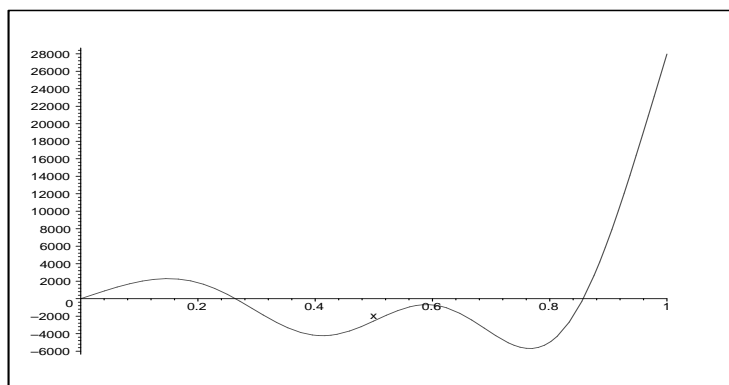


Figura 7.5: Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x-a)$$

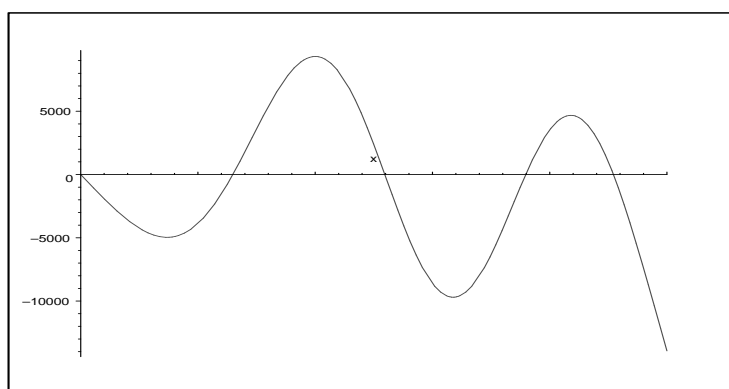


Figura 7.6: Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^5 A_n \text{sen}(\hat{\omega}_n t) \delta(x-a)$$

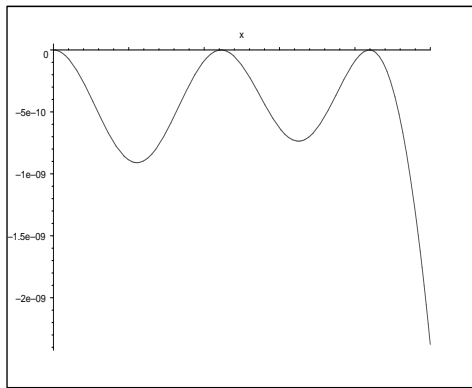
7.1.2 O caso dinâmico

Para o caso dinâmico, considerou-se diferentes entradas, as quais estão apresentadas na tabela:

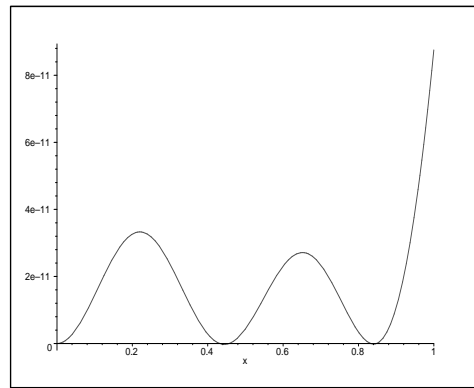
Valores dos parâmetros da entrada		Excitação
A	$\hat{\omega}_n$	$f(t, x) = e^{\lambda t} P_0(x)$
1000	6865	$P_0 = 500$ $P_0 = 200x + 100$ $P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$ $P_0 = \text{sen}(50x)$ $P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$

Tabela 7.5: Parâmetros de entrada com excitações dinâmicas

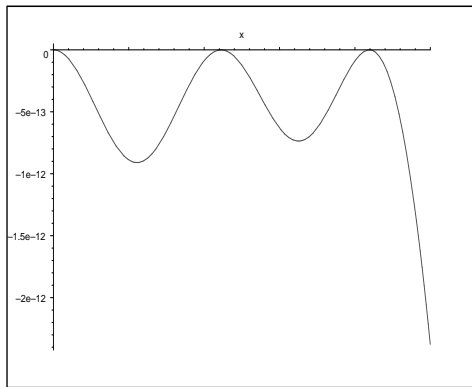
Os gráficos a seguir representam as respostas particulares $u_p(t, x)$ resultantes de entradas harmônicas no tempo para as cinco diferentes funções espaciais consideradas nas simulações.



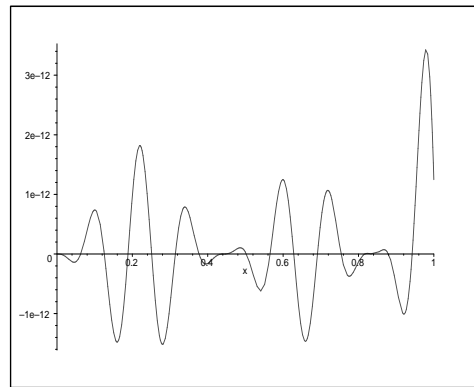
$$P_0 = 500$$



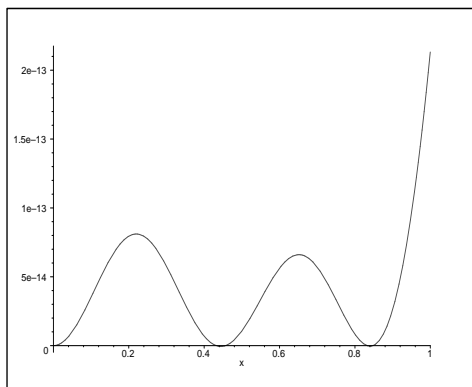
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

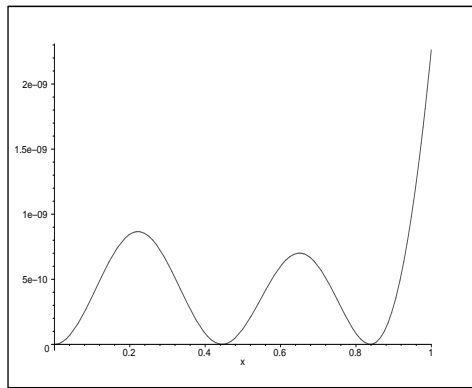


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

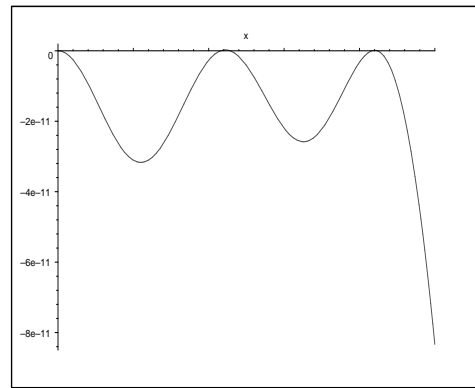


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

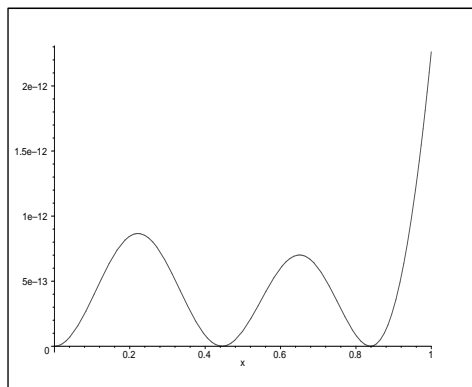
Figura 7.7: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



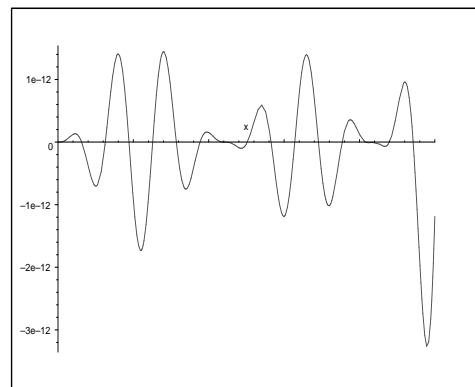
$$P_0 = 500$$



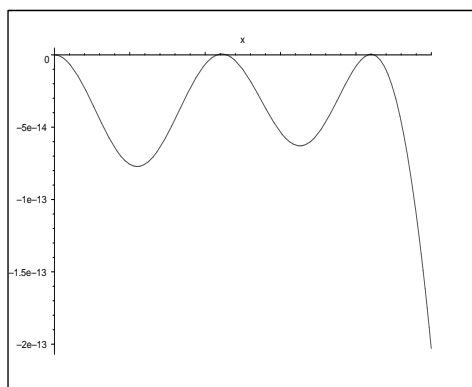
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

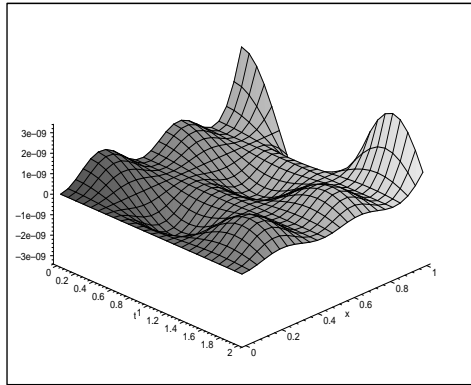


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

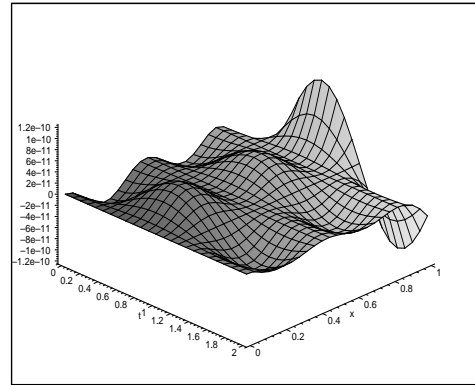


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

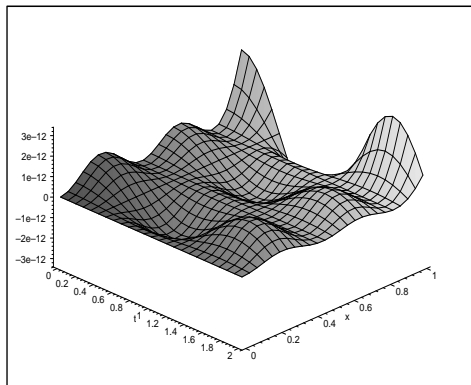
Figura 7.8: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



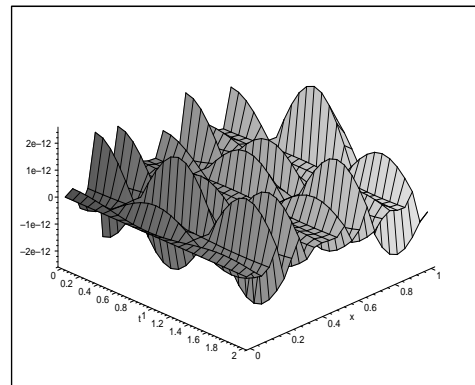
$$P_0 = 500$$



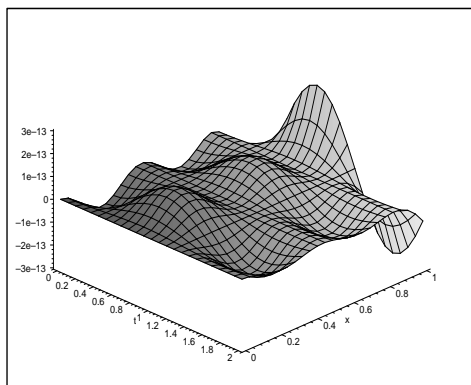
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

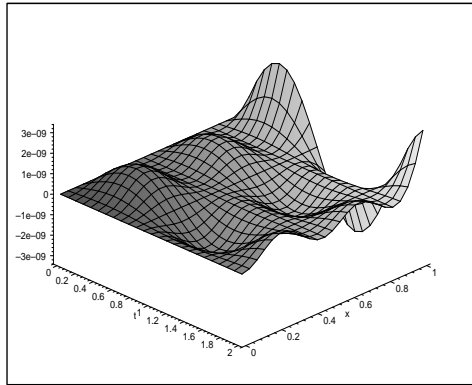


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

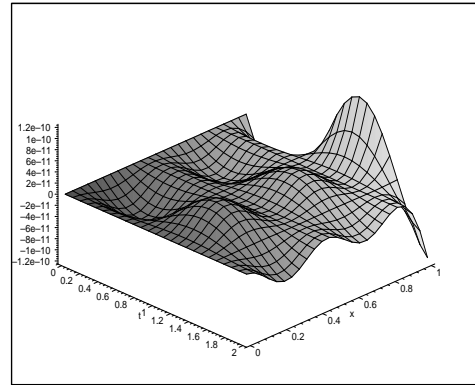


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

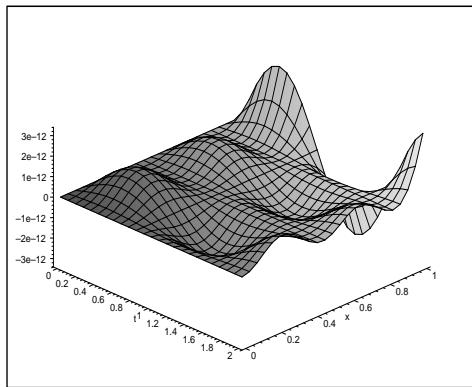
Figura 7.9: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$



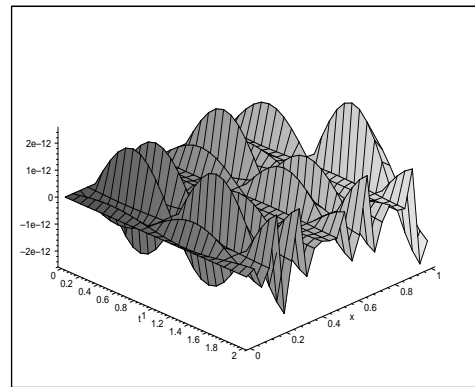
$$P_0 = 500$$



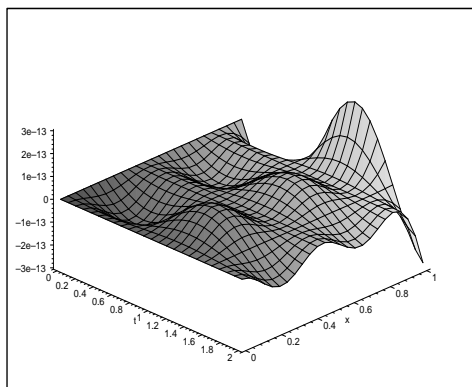
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



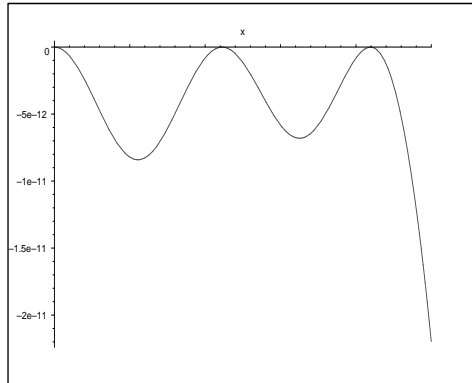
$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



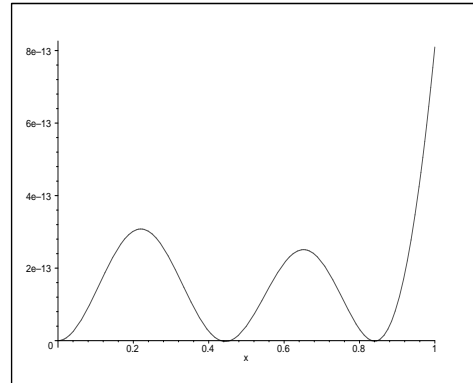
$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.10: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$

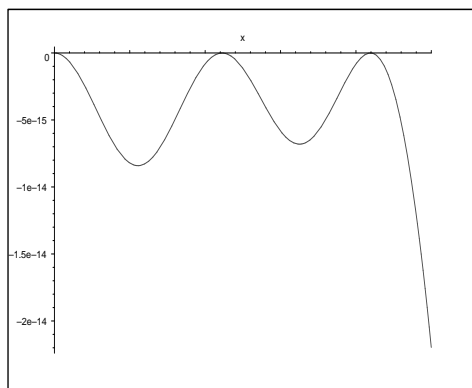
Os gráficos a seguir representam as resposta homogêneas induzidas pelas respostas particulares apresentadas anteriormente.



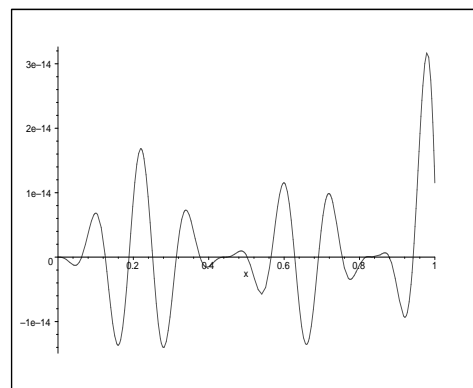
$$P_0 = 500$$



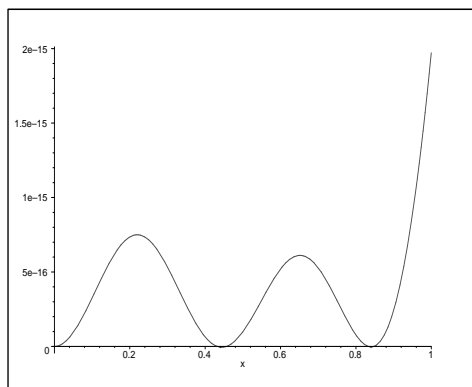
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



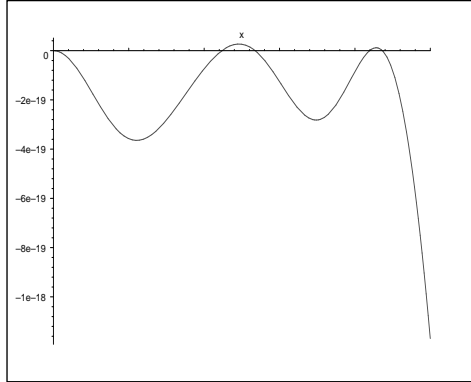
$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



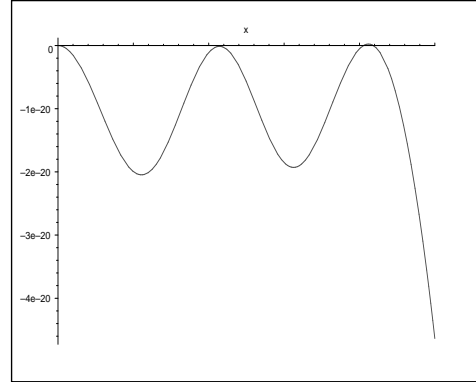
$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.11: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$

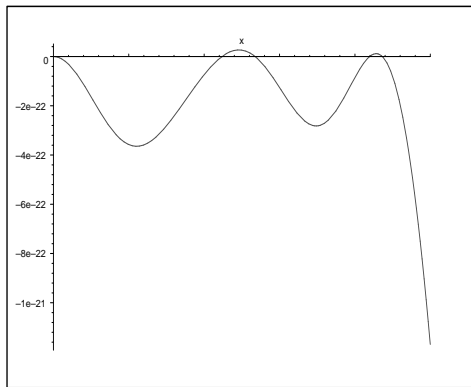
Os gráficos a seguir representam as resposta homogêneas induzidas pelas respostas particulares apresentadas anteriormente.



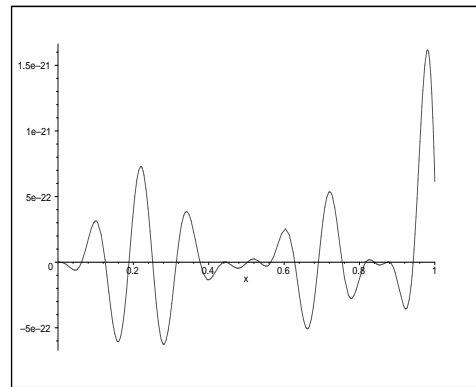
$$P_0 = 500$$



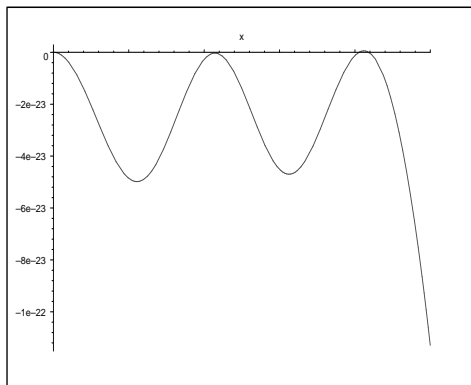
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

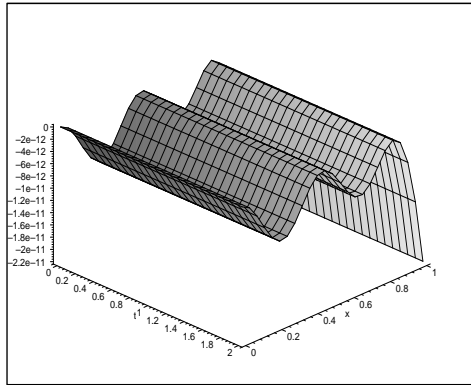


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

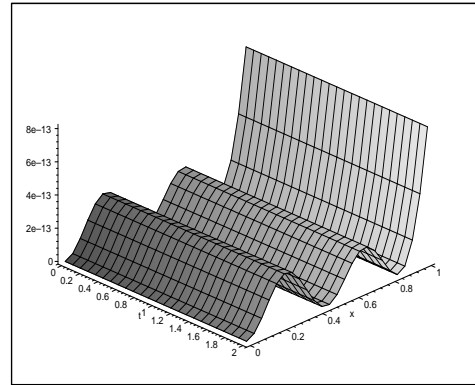


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

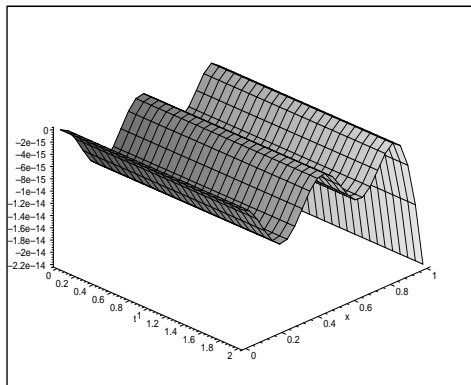
Figura 7.12: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



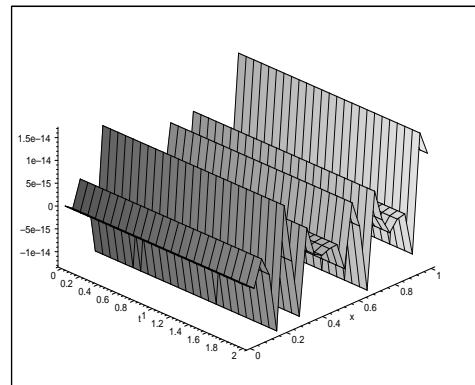
$$P_0 = 500$$



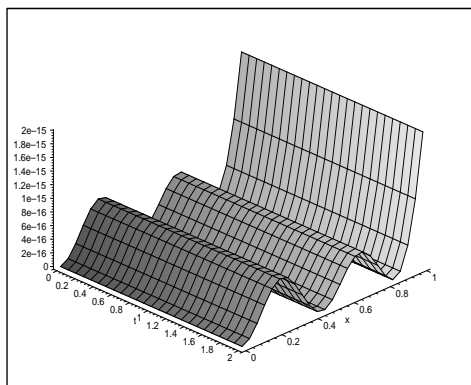
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

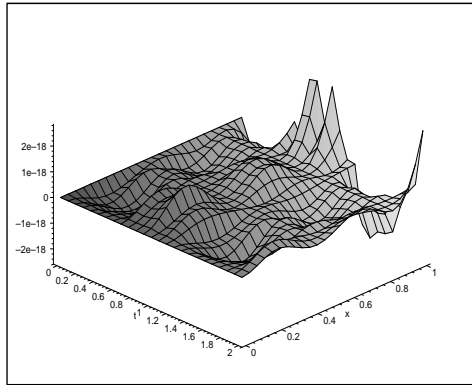


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

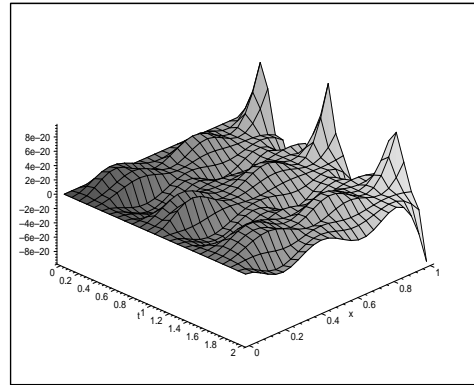


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

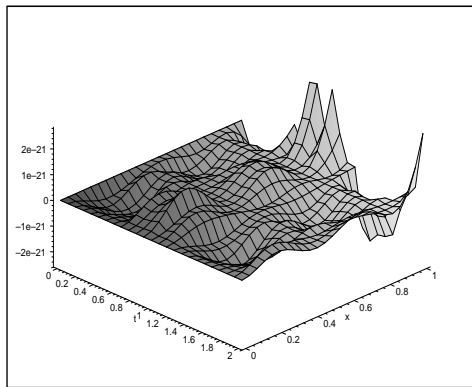
Figura 7.13: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$



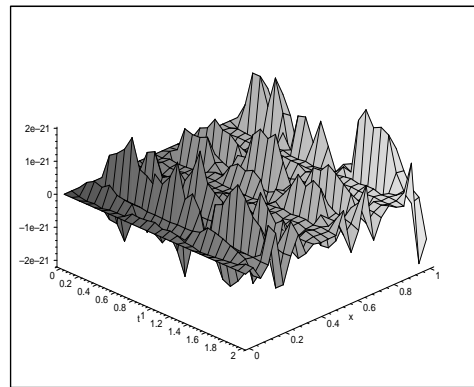
$$P_0 = 500$$



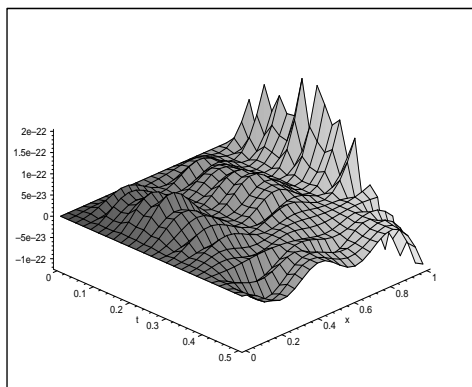
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.14: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$

7.2 Viga fixa-livre

Os cinco primeiros modos dinâmicos foram calculados, aproximadamente, através da base dinâmica descrita na seção 3.3 para o caso da viga fixa-livre resultam em:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 0.7218\text{sen}(1.8832x) - 0.7269\text{senh}(1.8701x) \\
 &\quad - 0.9963\text{cos}(1.8832x) + 0.9963\text{cosh}(1.8701x) \\
 X_2 &= 0.9826\text{sen}(4.7334x) - 1.0253\text{senh}(4.5363x) \\
 &\quad - 1.0017\text{cos}(4.7334x) + 1.0017\text{cosh}(4.5363x) \\
 X_3 &= 0.9061\text{sen}(7.9683x) - 1.0144\text{senh}(7.1174x) \\
 &\quad - 1.0165\text{cos}(7.9683x) + 1.0165\text{cosh}(7.1174x) \\
 X_4 &= 0.8402\text{sen}(11.2001x) - 1.0326\text{senh}(9.1127x) \\
 &\quad - 1.0323\text{cos}(11.2001x) + 1.0323\text{cosh}(9.1127x) \\
 X_5 &= 0.7552\text{sen}(14.4484x) - 1.0363\text{senh}(10.5296x) \\
 &\quad - 1.0364\text{cos}(14.4484x) + 1.0364\text{cosh}(10.5296x)
 \end{aligned}$$

A figura a seguir mostra os cinco primeiros modos em um mesmo sistema de coordenadas.

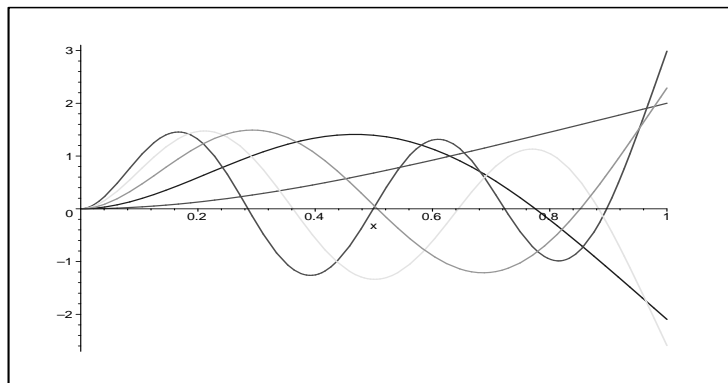


Figura 7.15: Modos da viga fixa-livre

O gráfico da resposta impulso expressa pela equação (5.13) é apresentado a seguir para t fixado em 1.5s.

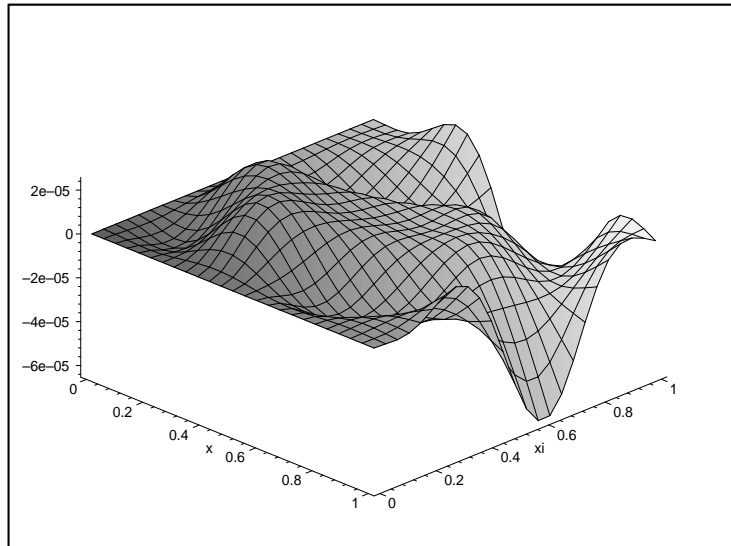


Figura 7.16: Resposta impulso para viga fixa-livre em $t = 1.5$

7.2.1 O caso concentrado sem dinâmica

Os parâmetros das entradas concentradas harmônicas cossenoidais e senoidais são apresentados nas tabelas a seguir, respectivamente.

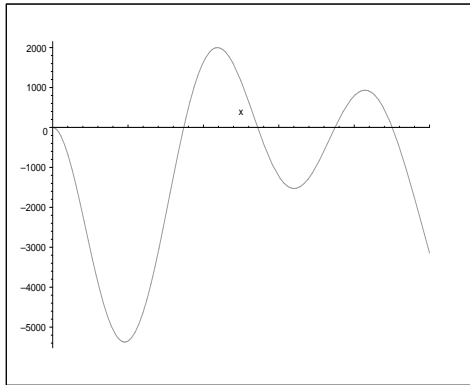
Parâmetros de Entrada			Excitação
AMPLITUDE (A)	FREQUÊNCIA (ω)	LOCALIZAÇÃO DA CARGA (x)	$f(t, x)$
3000	1300	0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9	$A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

Tabela 7.6: Parâmetros de entrada da força harmônica cosseno concentrada.

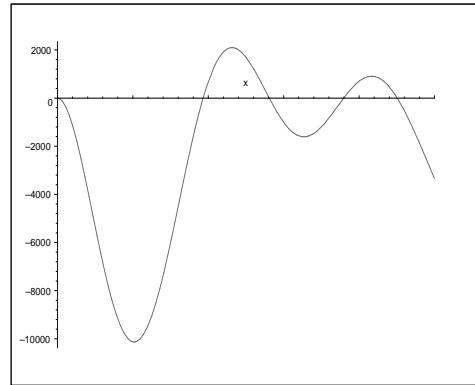
Parâmetros de Entrada			Excitação
AMPLITUDE (A)	FREQUÊNCIA (ω)	LOCALIZAÇÃO DA CARGA (x)	$f(t, x)$
3000	1300	0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9	$A\sin(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

Tabela 7.7: Parâmetros de entrada da força harmônica seno concentrada.

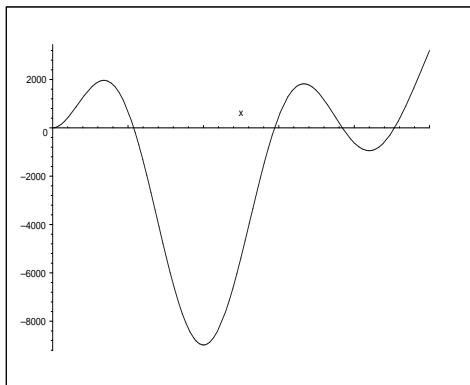
Os gráficos a seguir apresentam os deslocamentos quando da ação de uma carga do tipo concentrada sem dinâmica harmônica cossenoidal em diferentes posições da viga.



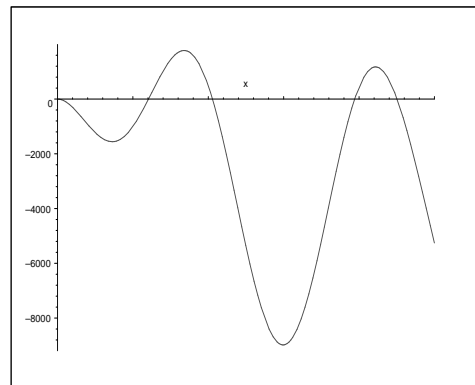
$a=0.1$



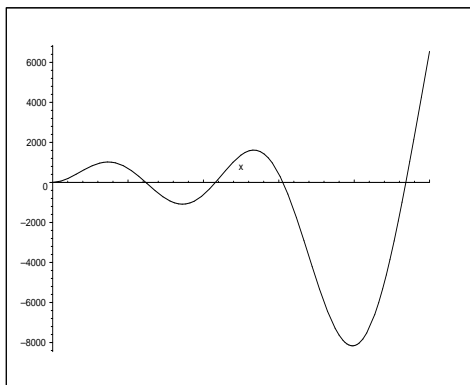
$a=0.2$



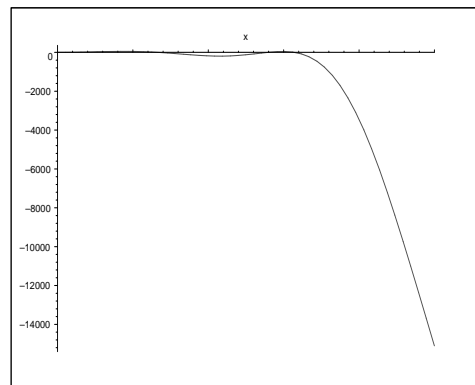
$a=0.4$



$a=0.6$



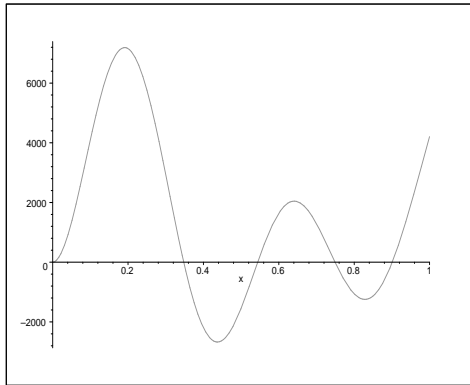
$a=0.8$



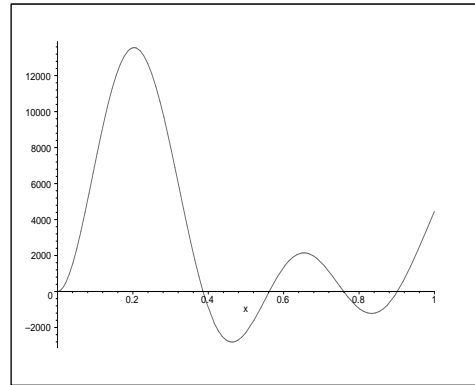
$a=0.9$

Figura 7.17: Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$

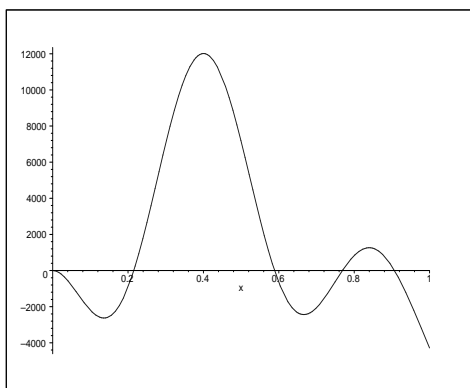
Os gráficos a seguir apresentam os deslocamentos quando da ação de uma carga do tipo concentrada sem dinâmica harmônica senoidal em diferentes posições da viga.



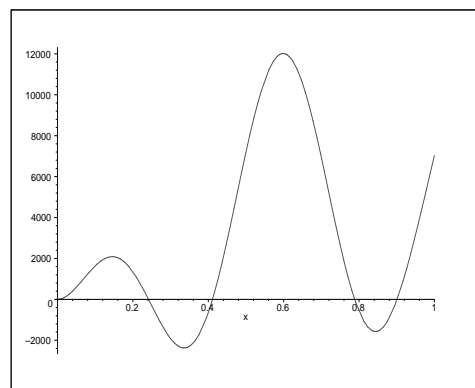
a=0.1



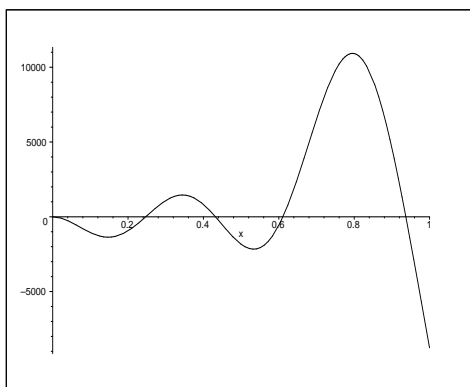
a=0.2



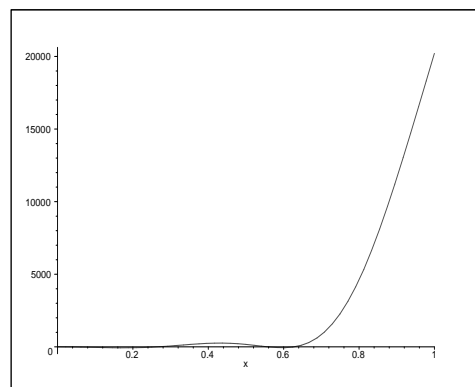
a=0.4



a=0.6



a=0.8



a=0.9

Figura 7.18: Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$

As tabelas apresentam os parâmetros para entrada compostos de diversas parcelas harmônicas cossenoidais e senoidais, respectivamente.

Valores dos parâmetros da entrada				Excitação
n	A_n	$\hat{\omega}_n$	a_n	$f(t, x)$
1	1000	2500	0.2	$\sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$
2	2000	6800	0.4	
3	1500	12000	0.6	
4	1000	18500	0.8	
5	3500	13000	0.9	

Tabela 7.8: Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas

Valores dos parâmetros da entrada				Excitação
n	A_n	$\hat{\omega}_n$	a_n	$f(t, x)$
1	1000	2500	0.2	$\sum_{n=1}^5 A_n \sin(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$
2	2000	6800	0.4	
3	1500	12000	0.6	
4	1000	18500	0.8	
5	3500	13000	0.9	

Tabela 7.9: Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas

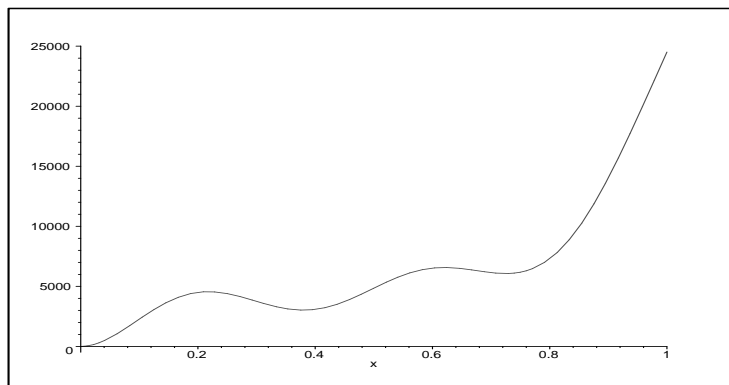


Figura 7.19: Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$$

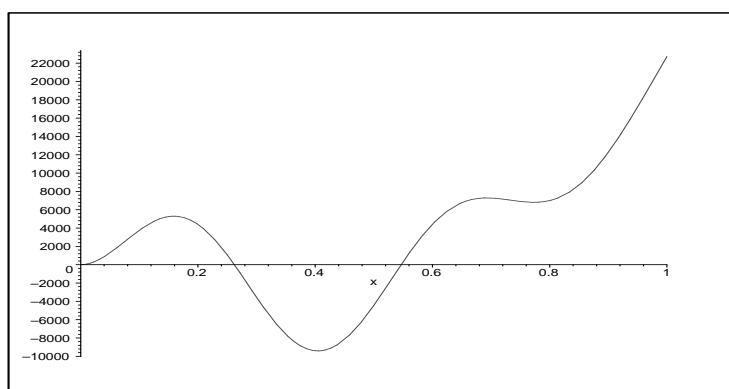


Figura 7.20: Deslocamento $u(t,x)$ para entrada do tipo

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^5 A_n \text{sen}(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$$

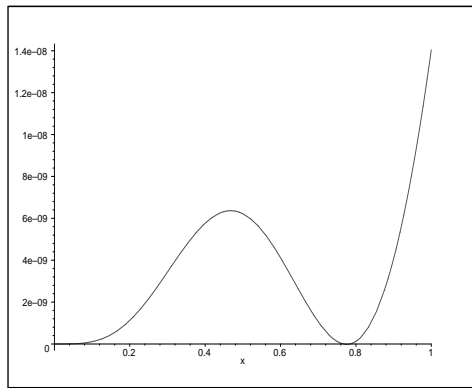
7.2.2 O caso dinâmico

Para o caso dinâmico, considerou-se diferentes entradas, as quais estão apresentadas na tabela:

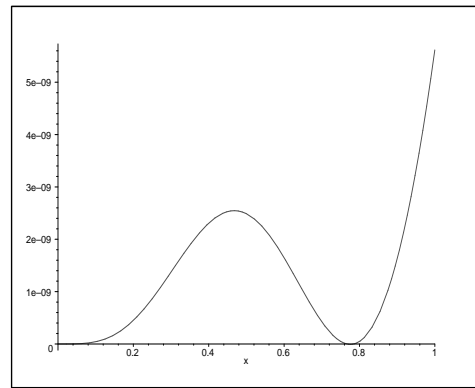
Valores dos parâmetros da entrada		Excitação
A	$\hat{\omega}_n$	$f(t, x) = e^{\lambda t} P_0(x)$
1000	6865	$P_0 = 500$ $P_0 = 200x + 100$ $P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$ $P_0 = \text{sen}(50x)$ $P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$

Tabela 7.10: Parâmetros de entrada com excitações dinâmicas

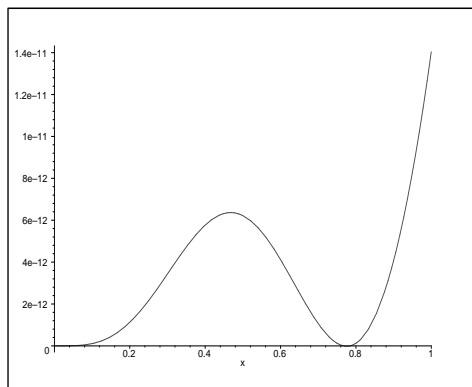
Os gráficos a seguir representam as respostas particulares $u_p(t, x)$ resultantes de entradas harmônicas no tempo para as cinco diferentes funções espaciais consideradas nas simulações.



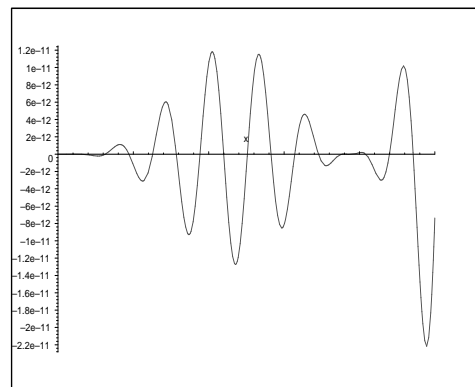
$$P_0 = 500$$



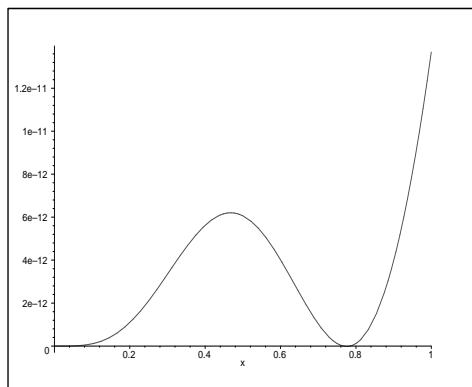
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

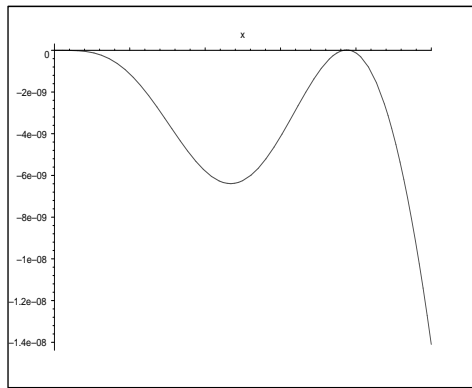


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

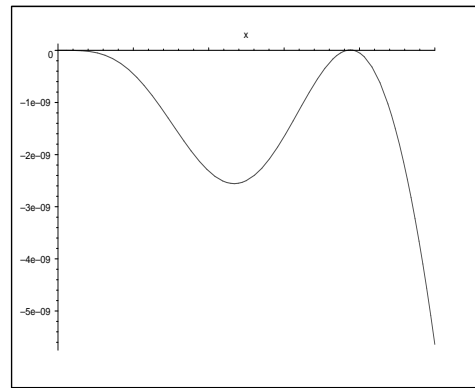


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

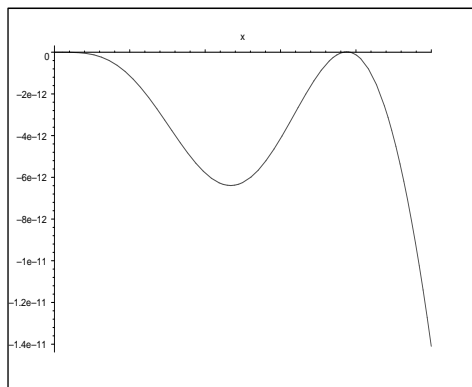
Figura 7.21: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



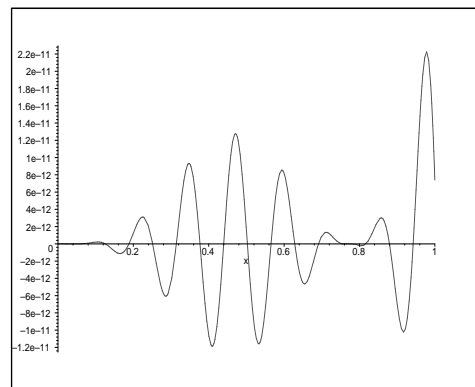
$$P_0 = 500$$



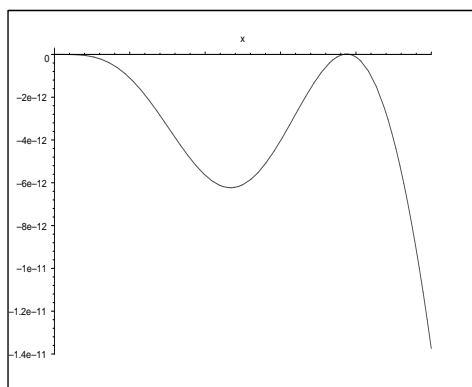
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

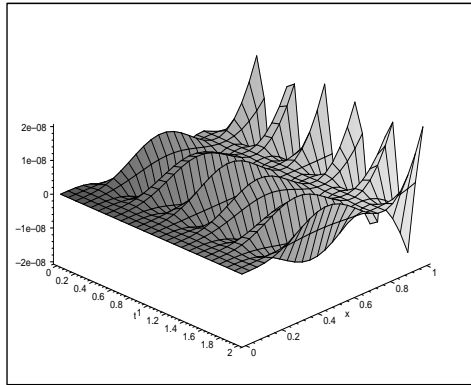


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

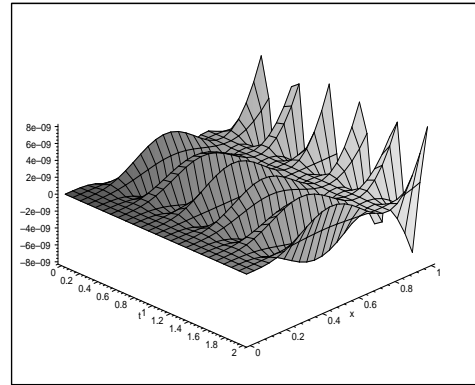


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

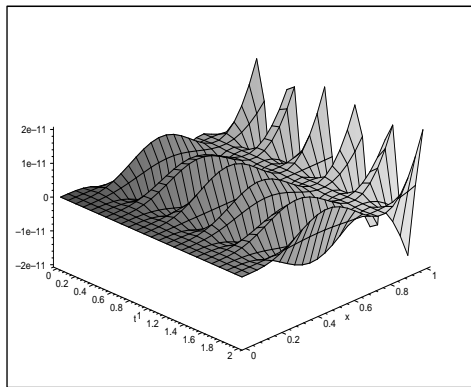
Figura 7.22: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



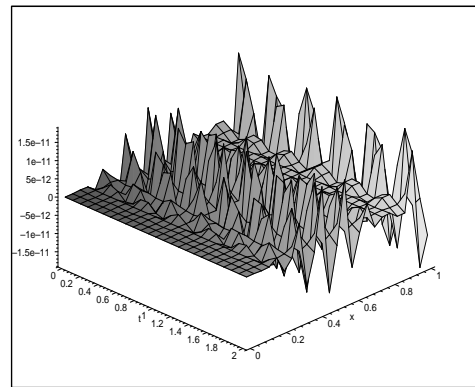
$$P_0 = 500$$



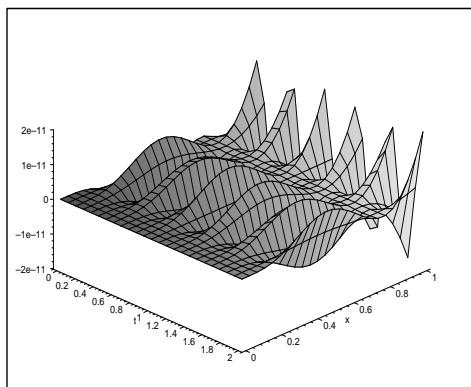
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

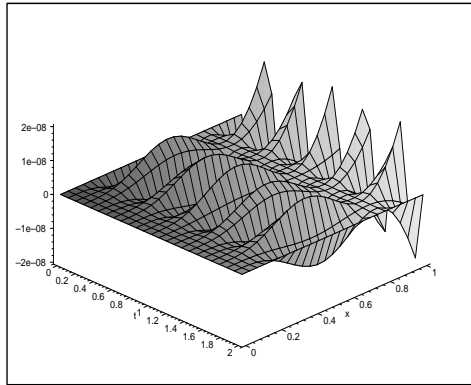


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

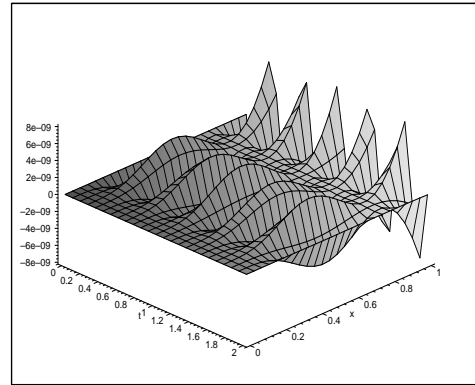


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

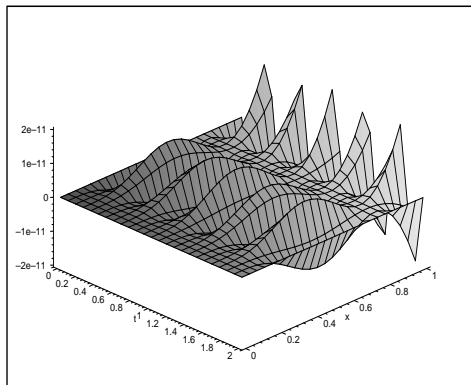
Figura 7.23: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$



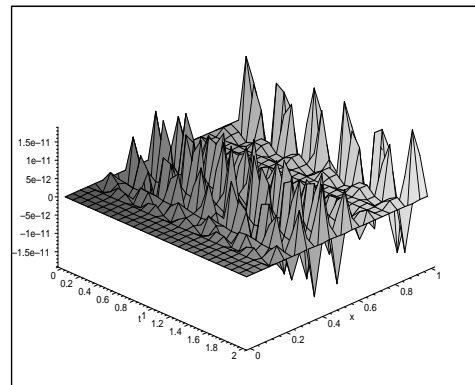
$$P_0 = 500$$



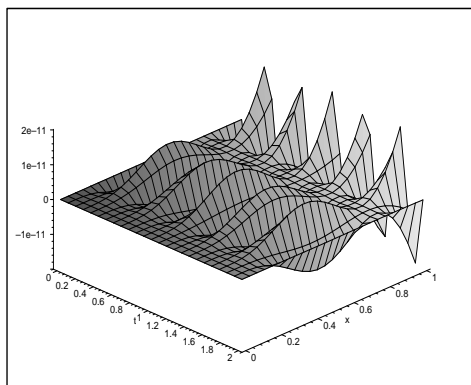
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



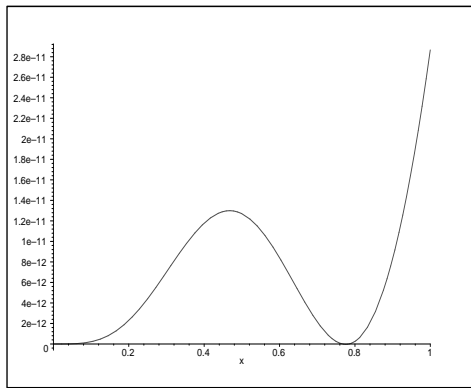
$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



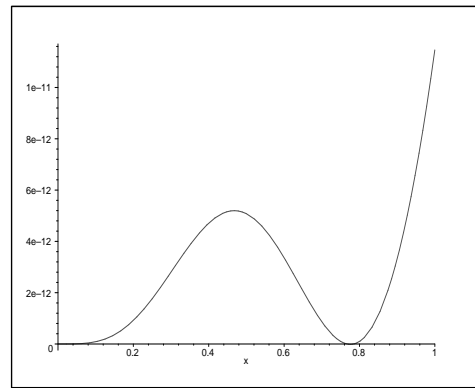
$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.24: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$

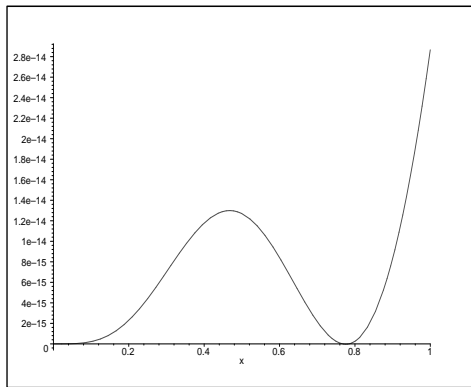
Os gráficos a seguir representam as resposta homogêneas induzidas pelas respostas particulares apresentadas anteriormente.



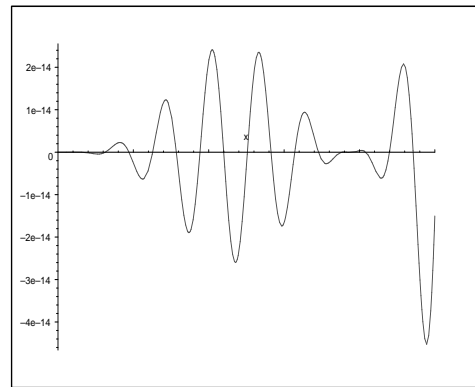
$$P_0 = 500$$



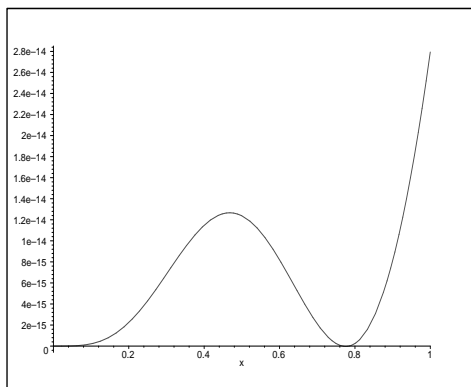
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



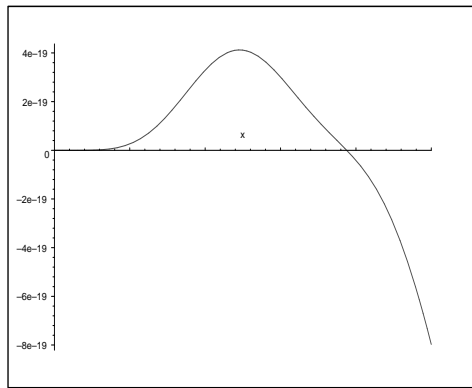
$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



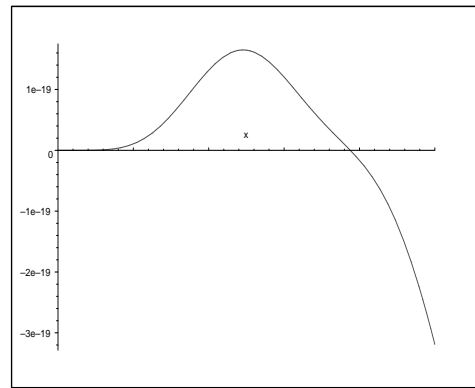
$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.25: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A\cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$

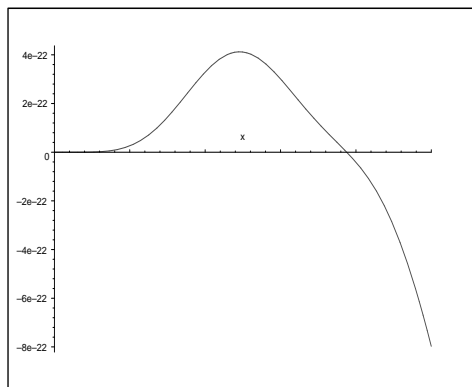
Os gráficos a seguir representam as resposta homogêneas induzidas pelas respostas particulares apresentadas anteriormente.



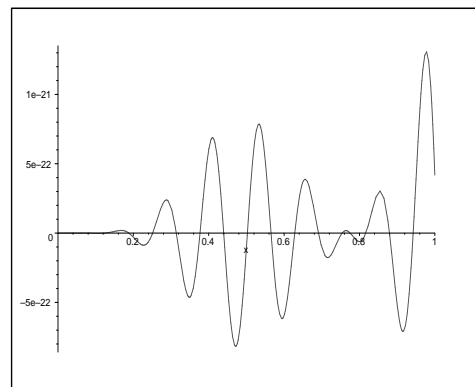
$$P_0 = 500$$



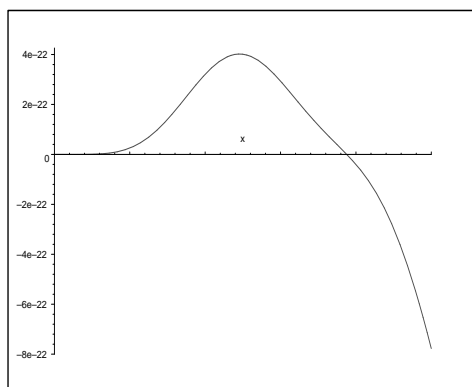
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

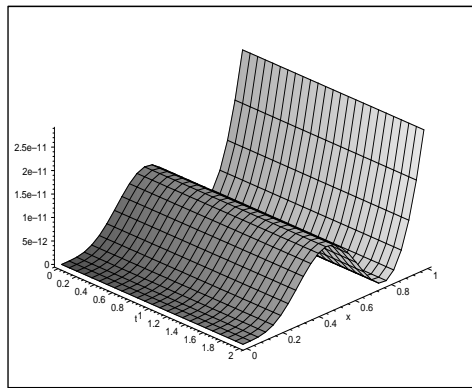


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

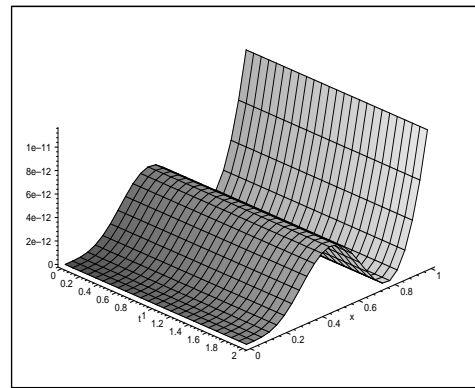


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

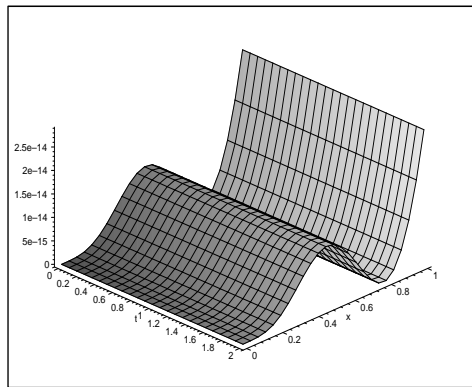
Figura 7.26: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



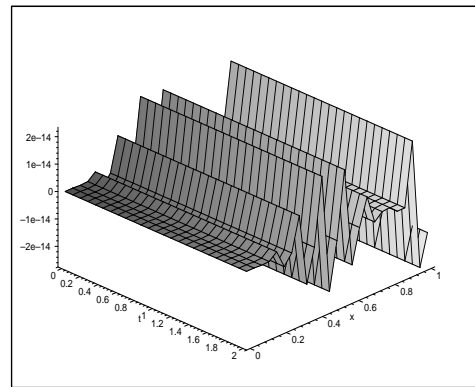
$$P_0 = 500$$



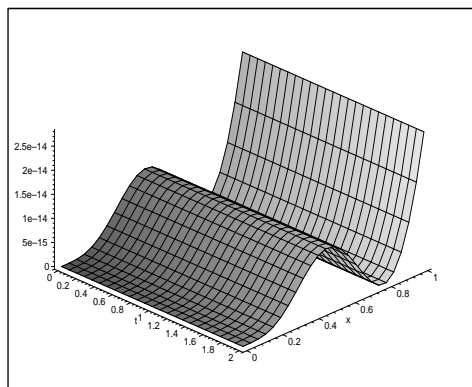
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

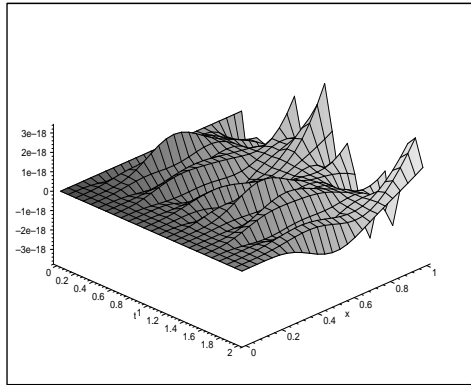


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

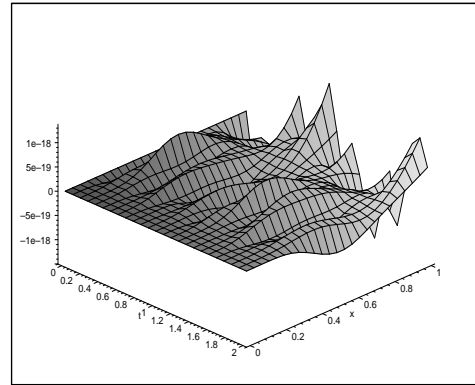


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

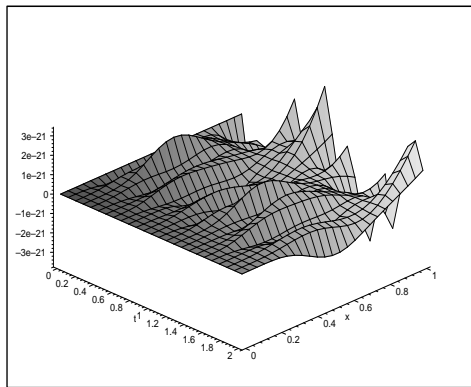
Figura 7.27: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$



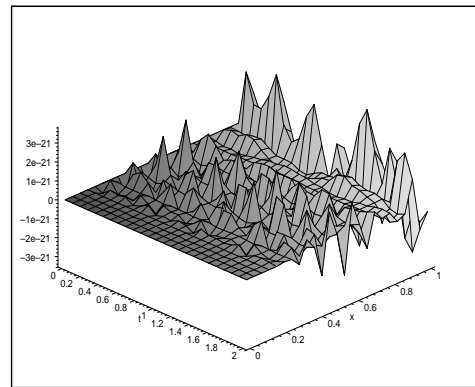
$$P_0 = 500$$



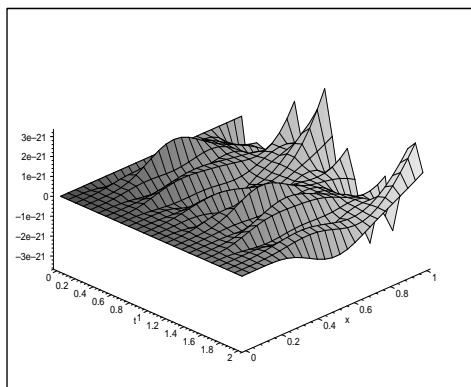
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.28: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$

7.3 Viga livre-deslizante

Os cinco primeiros modos dinâmicos foram calculados, aproximadamente, através da base dinâmica descrita na seção 3.3 para o caso da viga fixa-livre resultam em:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -0.9689\text{sen}(2.3708x) - 1.0014\text{senh}(2.3449x) \\
 &\quad + 0.9978\text{cos}(2.3708x) + 1.0200\text{cosh}(2.3449x) \\
 X_2 &= -0.9535\text{sen}(5.5263x) - 1.1318\text{senh}(5.2193x) \\
 &\quad + 1.0096\text{cos}(5.5263x) + 1.1319\text{cosh}(5.2193x) \\
 X_3 &= -0.9011\text{sen}(8.7054x) - 1.3409\text{senh}(7.6252x) \\
 &\quad + 1.0288\text{cos}(8.7054x) + 1.3409\text{cosh}(7.6252x) \\
 X_4 &= -0.8318\text{sen}(11.8942x) - 1.6513\text{senh}(9.4638x) \\
 &\quad + 1.0454\text{cos}(11.8942x) + 1.6513\text{cosh}(9.4638x) \\
 X_5 &= -0.7459\text{sen}(15.0892x) - 2.0668\text{senh}(10.7432x) \\
 &\quad + 1.0477\text{cos}(15.0892x) + 2.0668\text{cosh}(10.7432x)
 \end{aligned}$$

A figura a seguir mostra os cinco primeiros modos em um mesmo sistema de coordenadas.

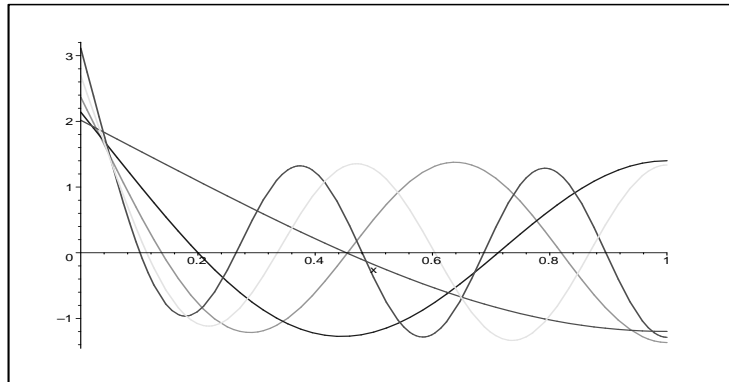


Figura 7.29: Modos da viga livre-deslizante

O gráfico da resposta impulso expressa pela equação (5.13) é apresentado a seguir para t fixado em 1.5s.

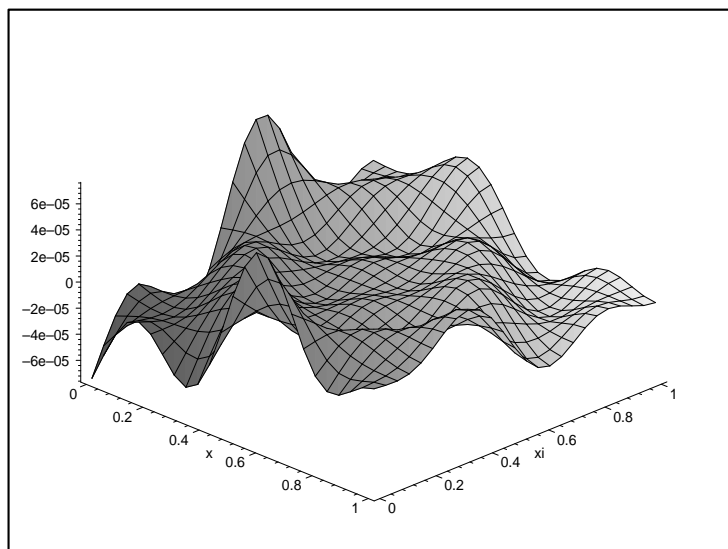


Figura 7.30: Resposta impulso para viga fixa-livre em $t = 1.5$

7.3.1 O caso concentrado sem dinâmica

Os parâmetros das entradas concentradas harmônicas cossenoidais e senoidais são apresentados nas tabelas a seguir, respectivamente.

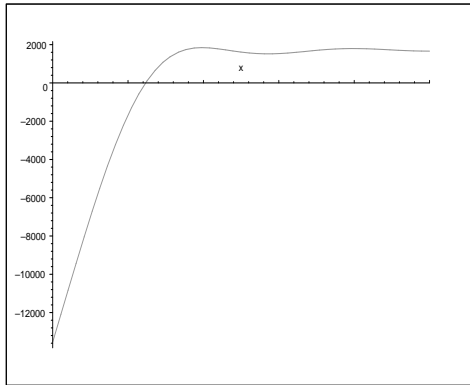
Parâmetros de Entrada			Excitação
AMPLITUDE (A)	FREQUÊNCIA (ω)	LOCALIZAÇÃO DA CARGA (x)	$f(t, x)$
3000	1300	0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9	$A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

Tabela 7.11: Parâmetros de entrada da força harmônica cosseno concentrada.

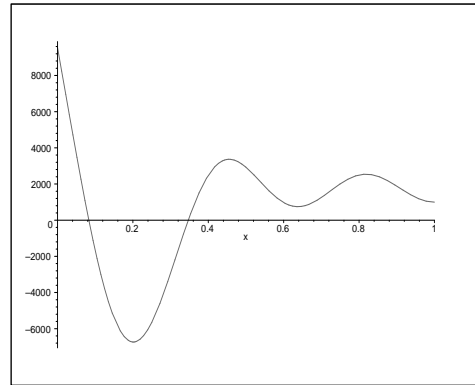
Parâmetros de Entrada			Excitação
AMPLITUDE (A)	FREQUÊNCIA (ω)	LOCALIZAÇÃO DA CARGA (x)	$f(t, x)$
3000	1300	0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9	$A\sin(\hat{\omega}t)\delta(x - a)$

Tabela 7.12: Parâmetros de entrada da força harmônica seno concentrada.

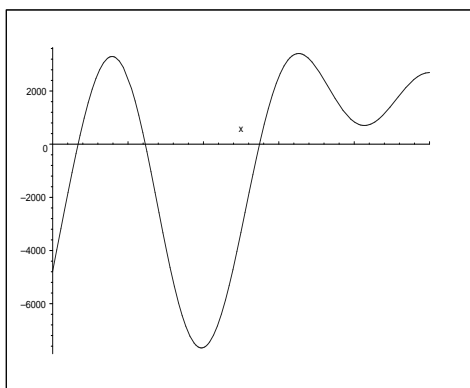
Os gráficos a seguir apresentam os deslocamentos quando da ação de uma carga do tipo concentrada sem dinâmica harmônica cossenoidal em diferentes posições da viga.



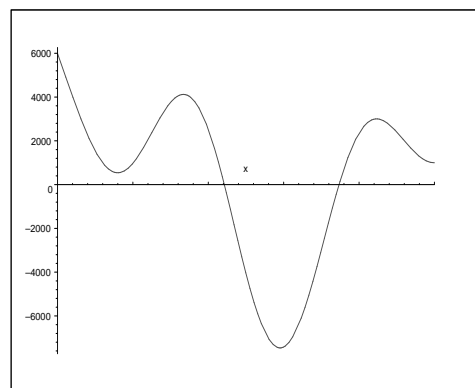
a=0.1



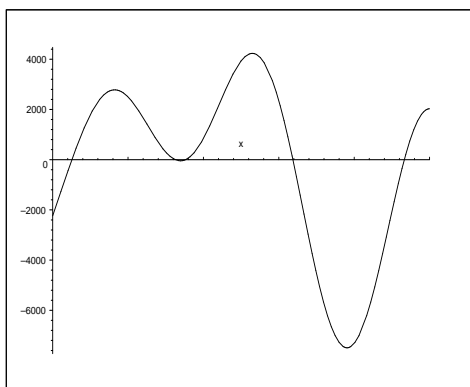
a=0.2



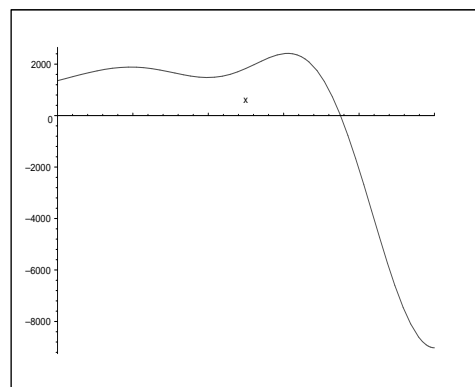
a=0.4



a=0.6



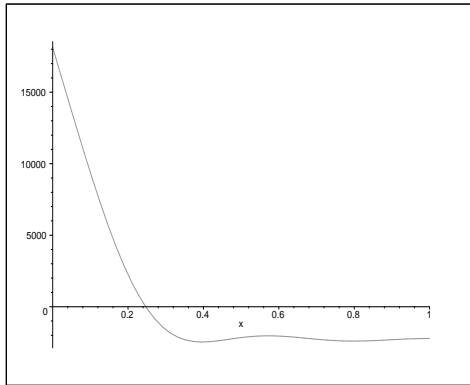
a=0.8



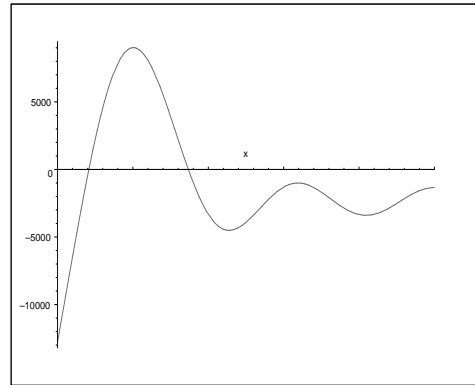
a=0.9

Figura 7.31: Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\cos(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$

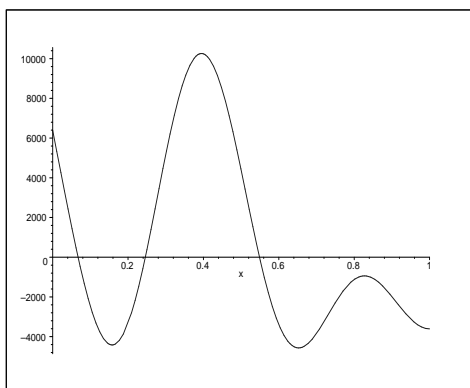
Os gráficos a seguir apresentam os deslocamentos quando da ação de uma carga do tipo concentrada sem dinâmica harmônica senoidal em diferentes posições da viga.



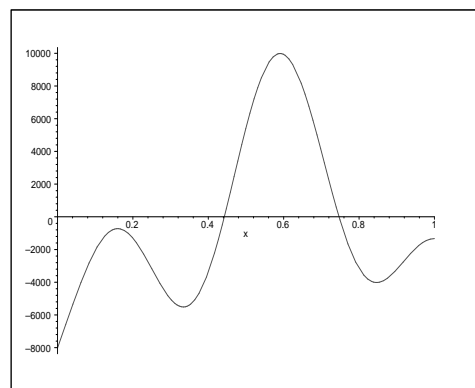
a=0.1



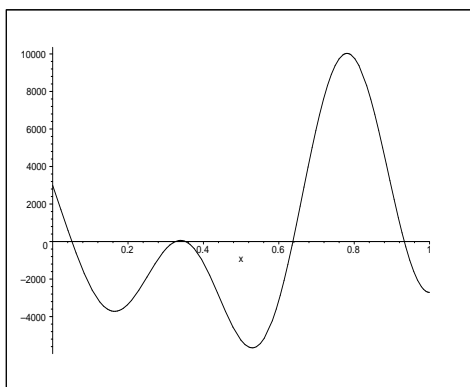
a=0.2



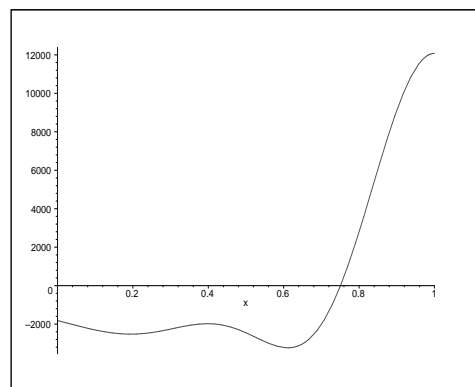
a=0.4



a=0.6



a=0.8



a=0.9

Figura 7.32: Deslocamento $u(t,x)$ para $f(t,x)=A\text{sen}(\hat{\omega}t)\delta(x-a)$

As tabelas apresentam os parâmetros para entrada compostos de diversas parcelas harmônicas cossenoidais e senoidais, respectivamente.

Valores dos parâmetros da entrada				Excitação
n	A_n	$\hat{\omega}_n$	a_n	$f(t, x)$
1	1000	2500	0.2	$\sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$
2	2000	6800	0.4	
3	1500	12000	0.6	
4	1000	18500	0.8	
5	3500	13000	0.9	

Tabela 7.13: Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas

Valores dos parâmetros da entrada				Excitação
n	A_n	$\hat{\omega}_n$	a_n	$f(t, x)$
1	1000	2500	0.2	$\sum_{n=1}^5 A_n \sin(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$
2	2000	6800	0.4	
3	1500	12000	0.6	
4	1000	18500	0.8	
5	3500	13000	0.9	

Tabela 7.14: Parâmetros de entrada da soma de forças harmônicas

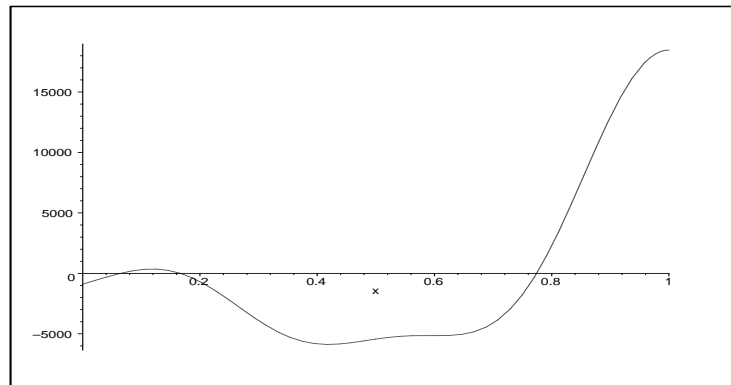


Figura 7.33: Deslocamento $u(t, x)$ para entrada do tipo

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$$

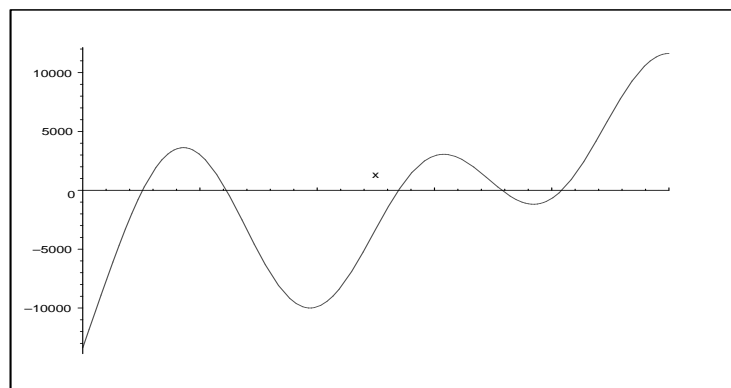


Figura 7.34: Deslocamento $u(t, x)$ para entrada do tipo

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^5 A_n \text{sen}(\hat{\omega}_n t) \delta(x - a)$$

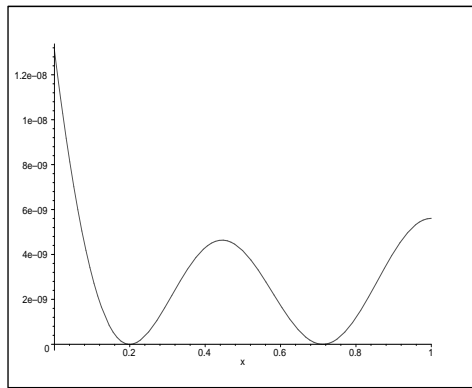
7.3.2 O caso dinâmico

Para o caso dinâmico, considerou-se diferentes entradas, as quais estão apresentadas na tabela:

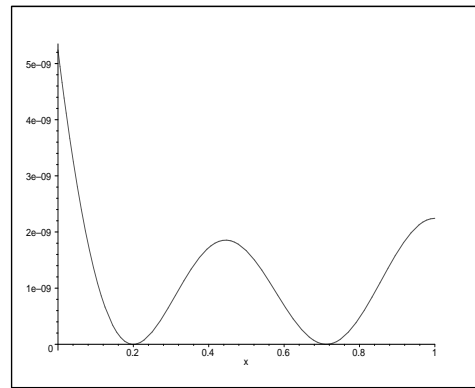
Valores dos parâmetros da entrada		Excitação
A	$\hat{\omega}_n$	$f(t, x) = e^{\lambda t} P_0(x)$
1000	6865	$P_0 = 500$ $P_0 = 200x + 100$ $P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$ $P_0 = \text{sen}(50x)$ $P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$

Tabela 7.15: Parâmetros de entrada com excitações dinâmicas

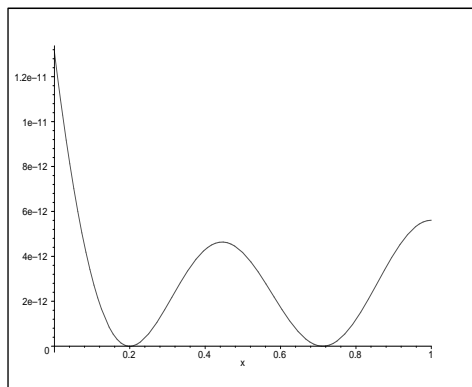
Os gráficos a seguir representam as respostas particulares $u_p(t, x)$ resultantes de entradas harmônicas no tempo para as cinco diferentes funções espaciais consideradas nas simulações.



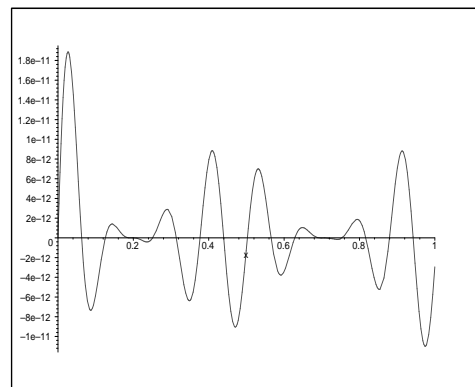
$$P_0 = 500$$



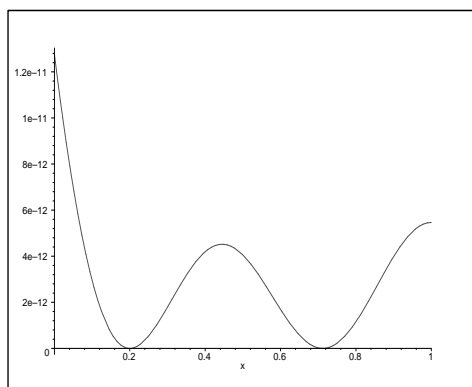
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

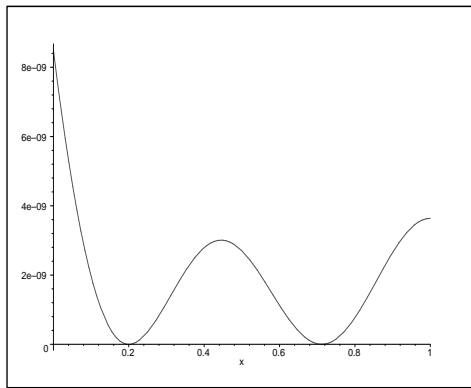


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

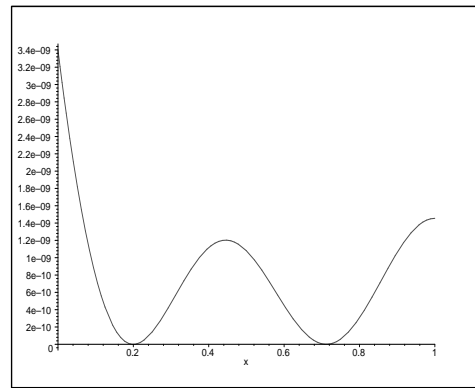


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

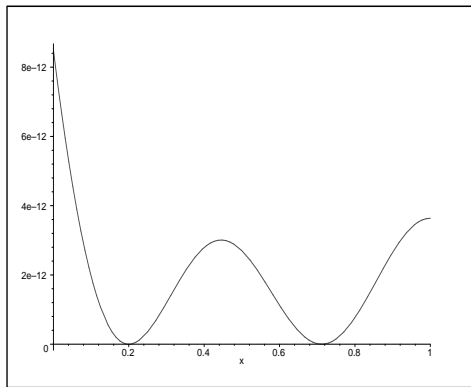
Figura 7.35: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



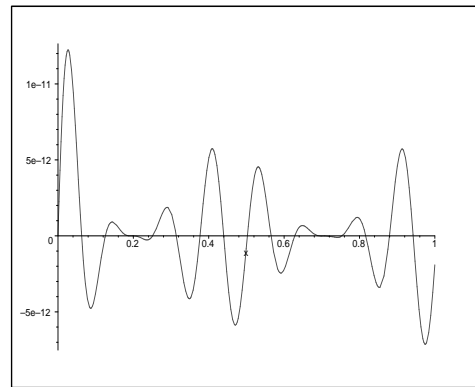
$$P_0 = 500$$



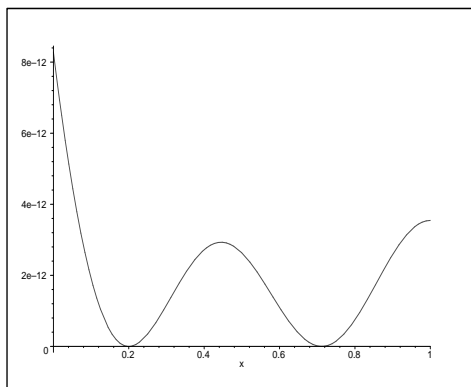
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

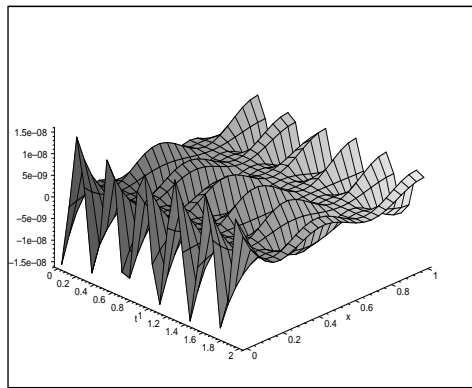


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

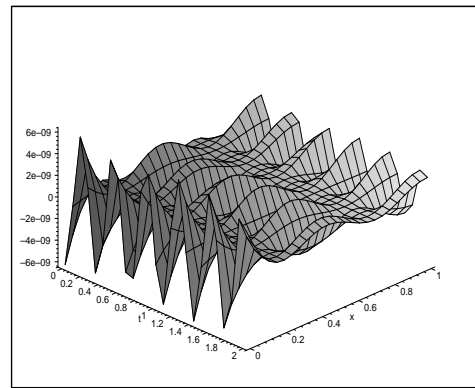


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

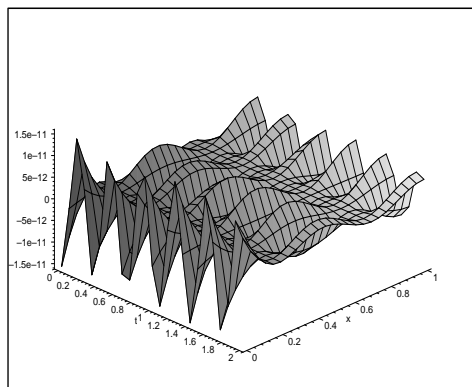
Figura 7.36: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



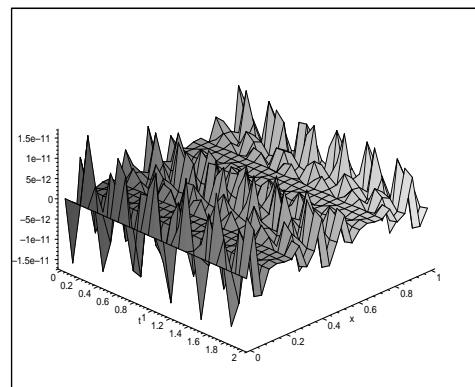
$$P_0 = 500$$



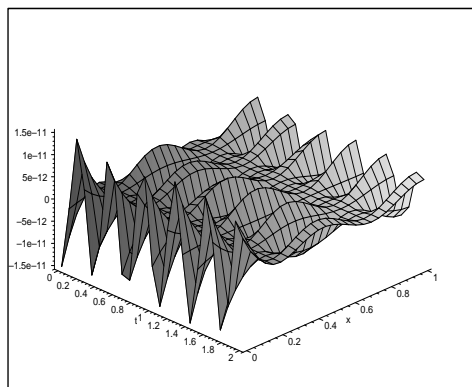
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

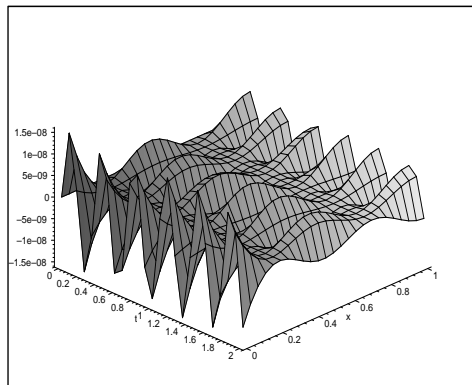


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

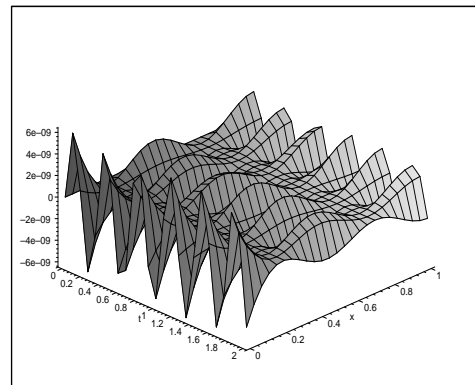


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

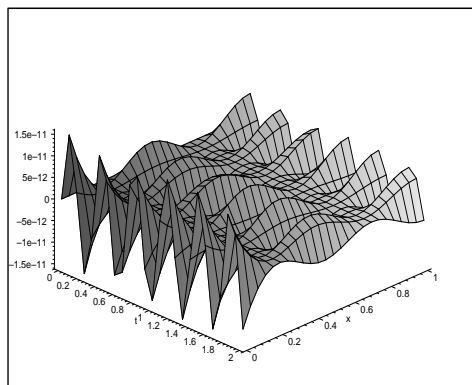
Figura 7.37: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$



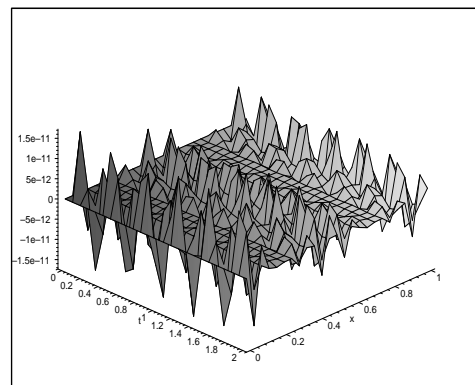
$$P_0 = 500$$



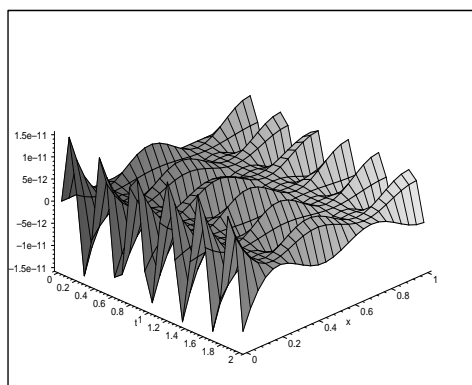
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



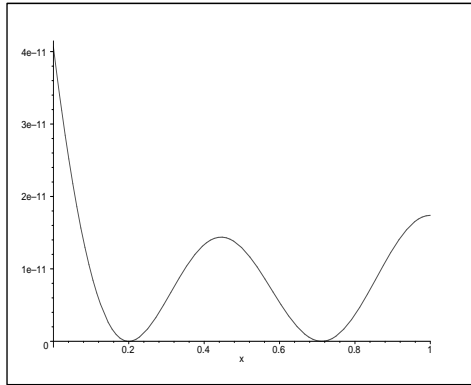
$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



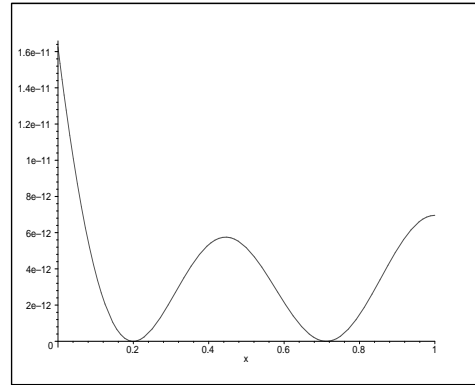
$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.38: Respostas particulares $u_p(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$

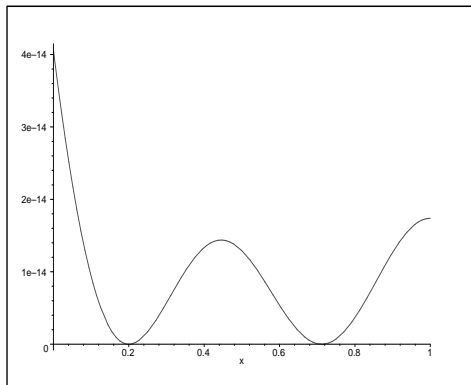
Os gráficos a seguir representam as resposta homogêneas induzidas pelas respostas particulares apresentadas anteriormente.



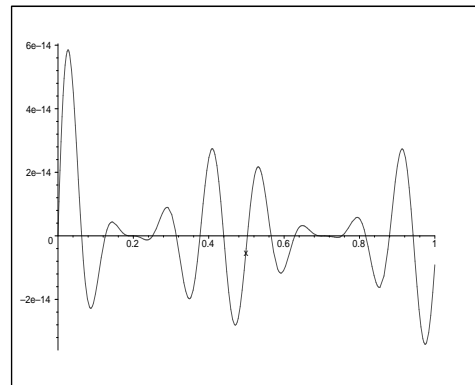
$$P_0 = 500$$



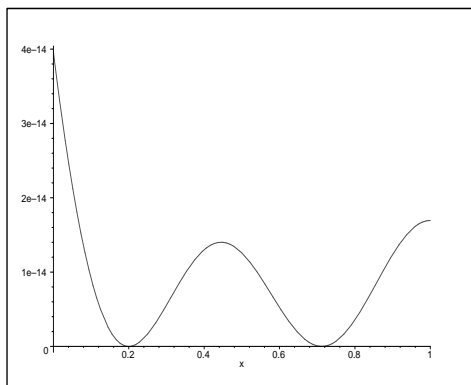
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



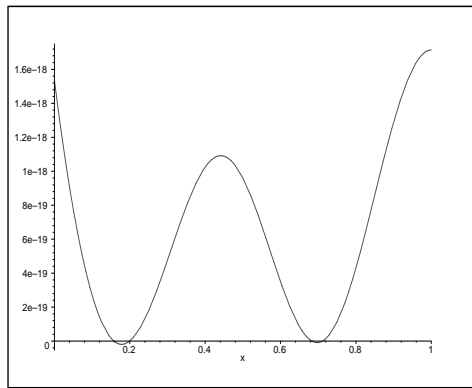
$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



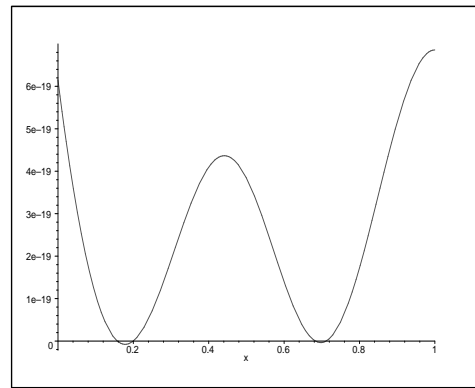
$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.39: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A\cos(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$

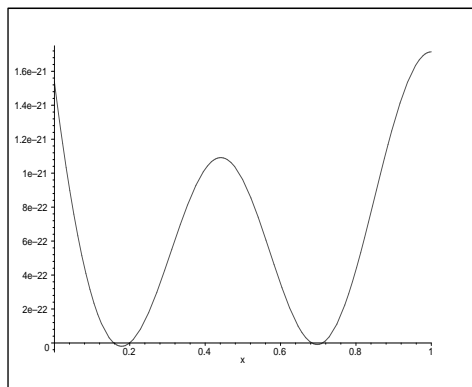
Os gráficos a seguir representam as resposta homogêneas induzidas pelas respostas particulares apresentadas anteriormente.



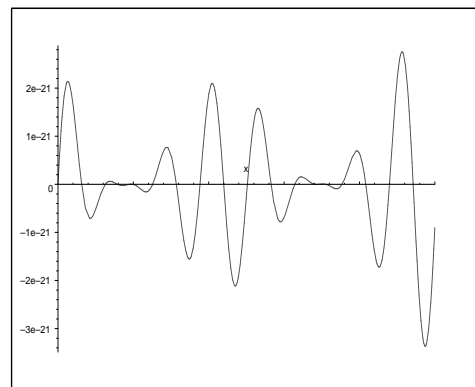
$$P_0 = 500$$



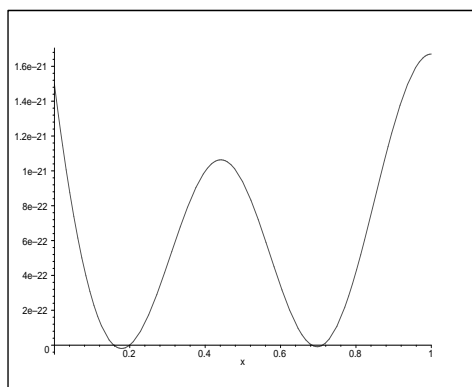
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

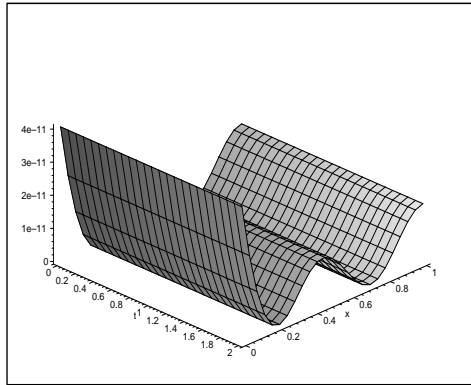


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

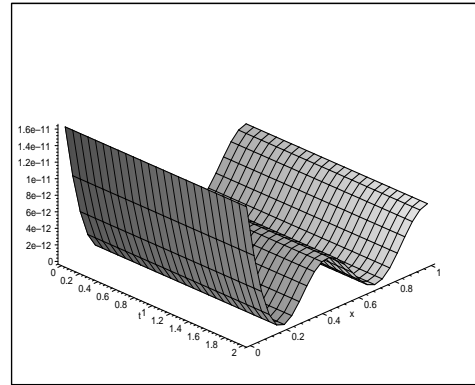


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

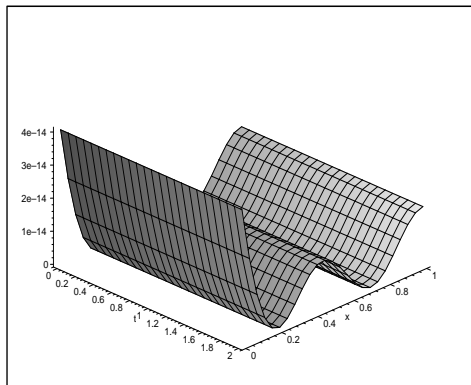
Figura 7.40: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0.5$



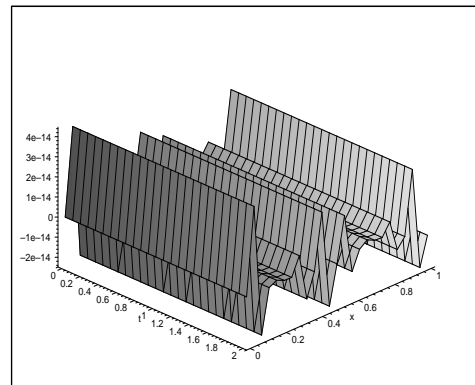
$$P_0 = 500$$



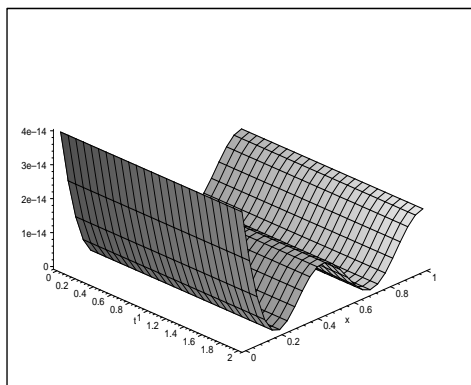
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

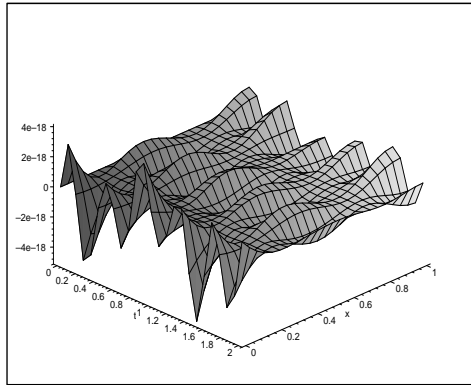


$$P_0 = \text{sen}(50x)$$

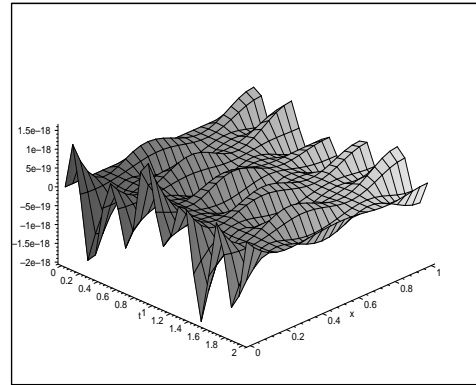


$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

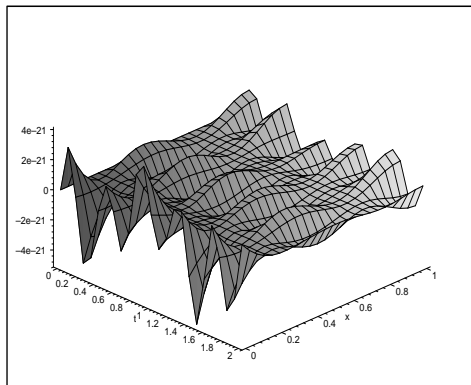
Figura 7.41: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$



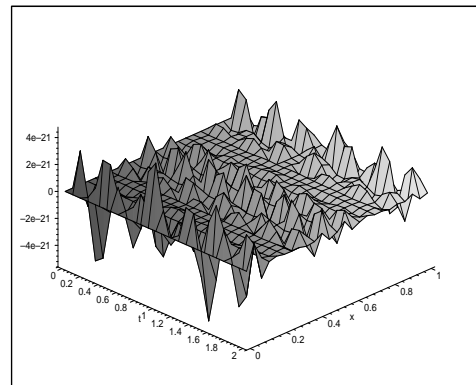
$$P_0 = 500$$



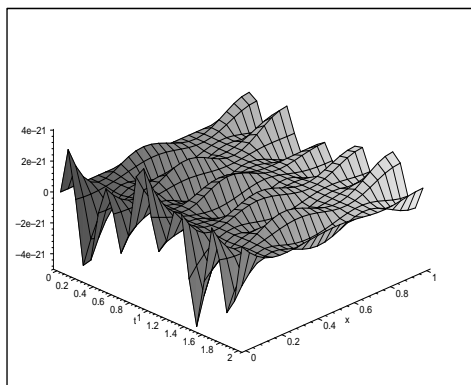
$$P_0 = 200x + 100$$



$$P_0 = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$



$$P_0 = \text{sen}(50x)$$



$$P_0 = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 7.42: Respostas homogêneas $u_h(t, x)$ para diferentes funções espaciais considerando-se entradas do tipo $F(t, x) = A \text{sen}(\hat{w}t)P_0(x)$ em $t = 0..2$

7.4 A Resposta freqüência para a condição de contorno do tipo fixa-livre

Nesta seção apresentam-se simulações para o cálculo da resposta em freqüência para uma entrada harmônica do tipo $f(t, x) = e^{i\omega t}P_0(x)$.

No caso dinâmico $F = (1 + (i\omega)^2E)P_0 + DP_0''$, considerou-se $P_0 = A\text{sen}(\omega x)$.

Então, a resposta em freqüência vem dada por $u(t, x) = e^{i\omega t}\mathcal{H}(i\omega)(t, x)F(x)$ onde $\mathcal{H}(i\omega)F(x) = \int_0^L H(i\omega, x, \xi)F(\xi)d\xi$

Para uma superposição de entradas harmônicas

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^N e^{i\omega_k t} F_k(x)$$

tem-se a resposta em freqüência

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N e^{i\omega_k t} \mathcal{H}(i\omega_k)F_k(x).$$

Considerou-se as entradas

$$P_{O1} = 1000\text{sen}(50x), P_{O2} = 5000\text{sen}(5x) e P_{O3} = P_{O1} + P_{O2}.$$

Os gráficos a seguir representam as respostas em freqüências particulares para as entradas espaciais expressas por $P_{0i}(x)$, $i = 1, 2, 3$ e temporais cossenoidais e senoidais denotadas, respectivamente, por $p(t, x) = A_i\cos(\hat{\omega}_i t)P_{0i}(x)$ e $p(t, x) = A_i\text{sen}(\hat{\omega}_i t)P_{0i}(x)$ para $i = 1, 2, 3$.

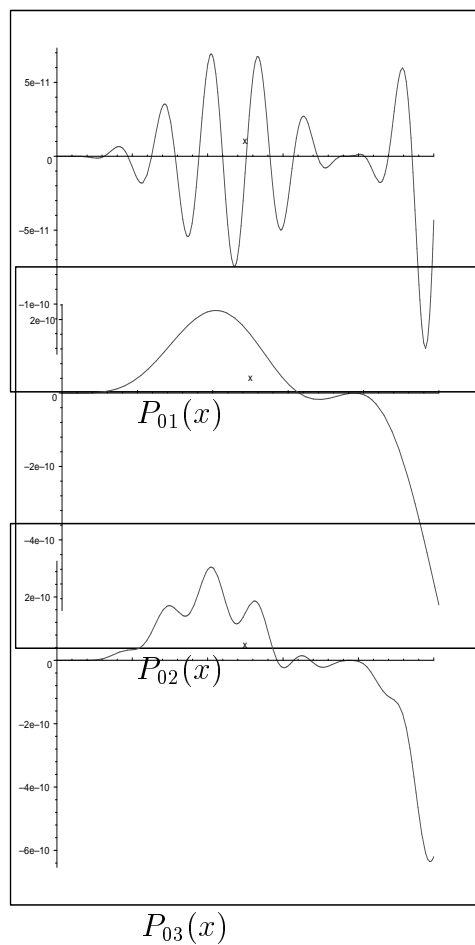


Figura 7.43: Respostas frequência particulares $u_p(t, x)$ para $p(t, x) = A_i \cos(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$ em $t = 0.5$

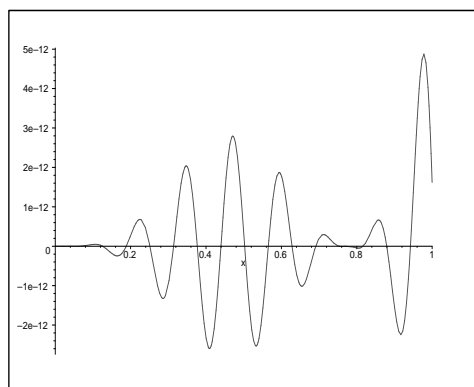
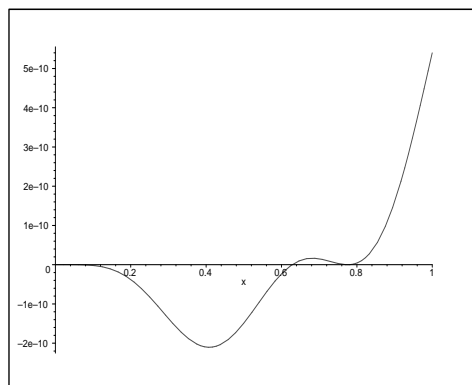
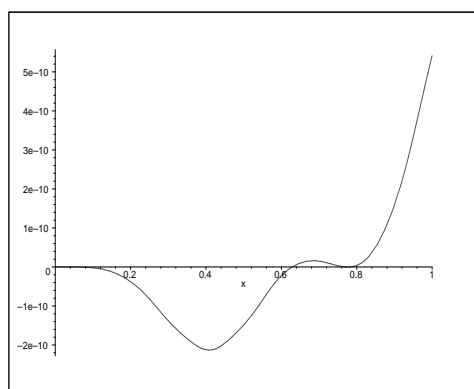
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.44: Respostas frequência particulares $u_p(t, x)$ para $p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$ em $t = 0.5$

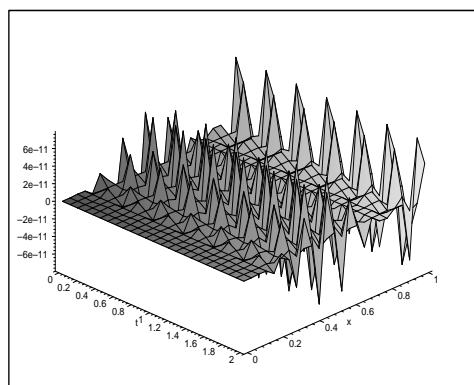
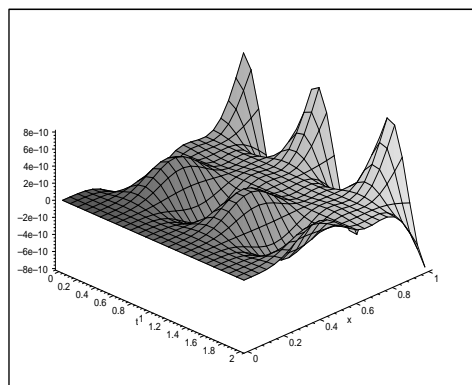
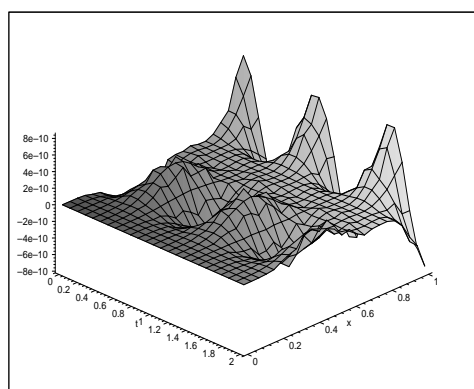
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.45: Respostas frequência particulares $u_p(t, x)$ para $p(t, x) = A_i \cos(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x)$, $i = 1, 2, 3$ em $t = 0..2$

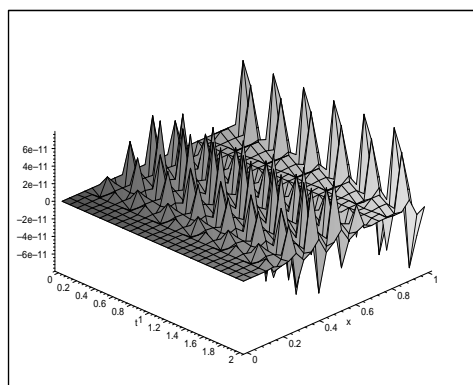
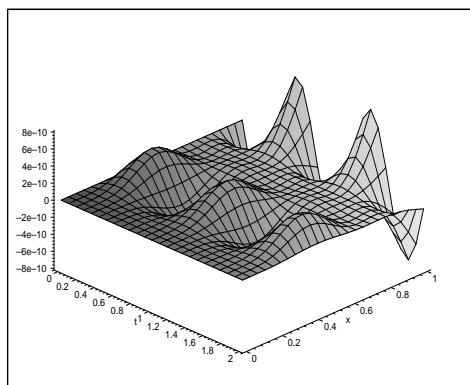
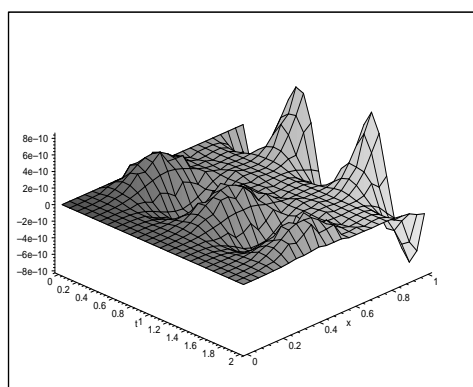
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.46: Respostas frequência particulares $u_p(t, x)$ para $p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$ em $t = 0..2$

Os gráficos a seguir representam as respostas em frequência homogêneas para entradas espaciais expressas por $P_{0i}(x)$ com $i = 1, 2, 3$ e temporais cossenoidais e senoidais.

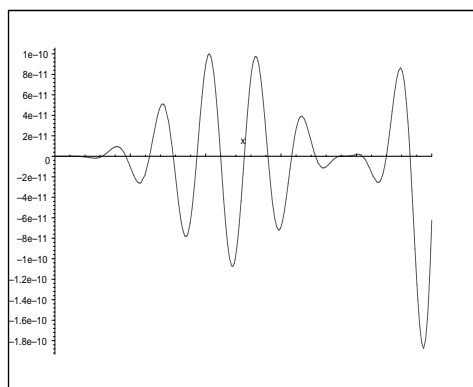
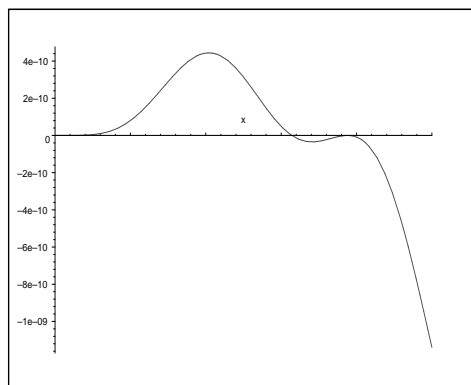
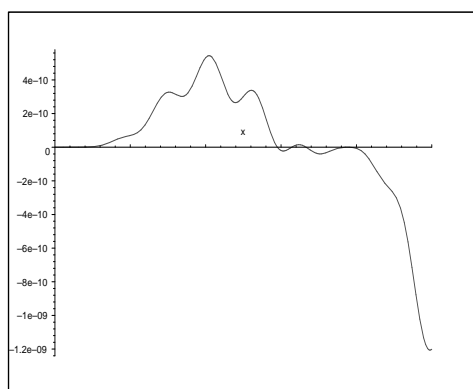
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.47: Respostas frequência homogêneas $u_h(t, x)$ para

$$p(t, x) = A_i \cos(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3 \quad \text{em} \quad t = 0.5$$

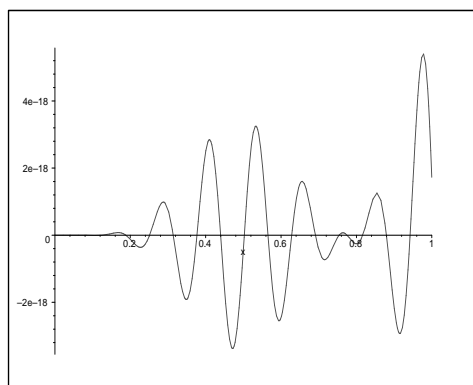
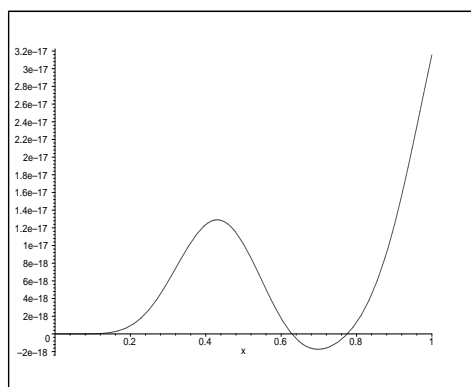
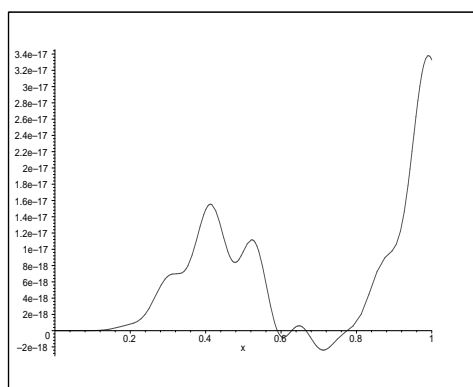
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.48: Respostas frequência homogêneas $u_h(t, x)$ para
 $p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3$ em $t = 0.5$

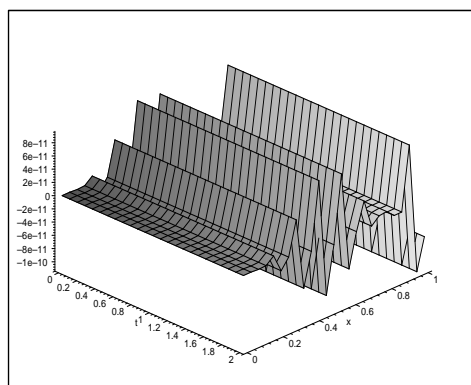
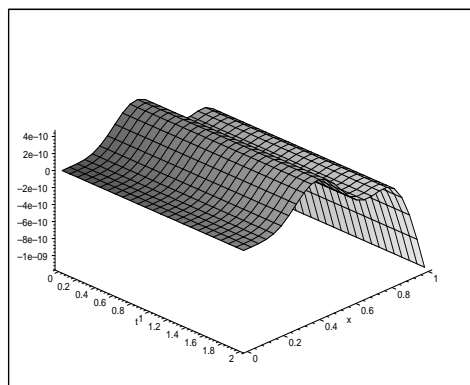
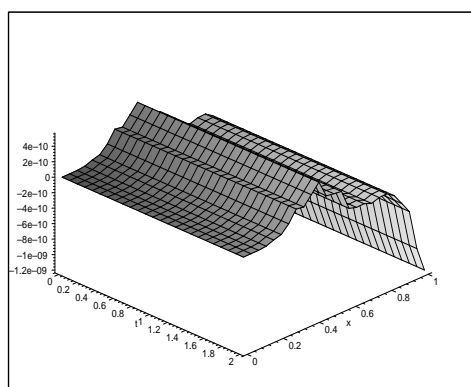
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.49: Respostas frequência homogêneas $u_h(t, x)$ para

$$p(t, x) = A_i \cos(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3 \quad \text{em} \quad t = 0.5$$

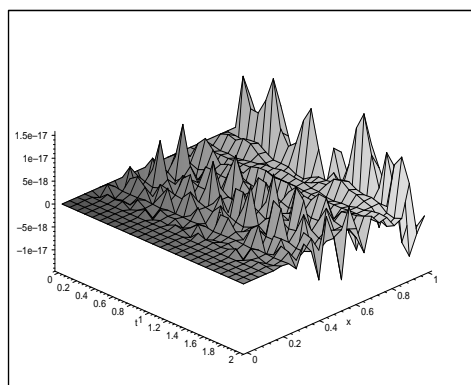
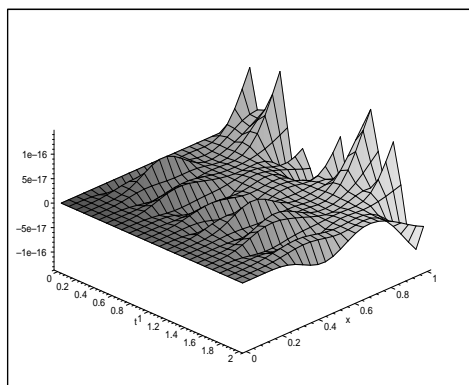
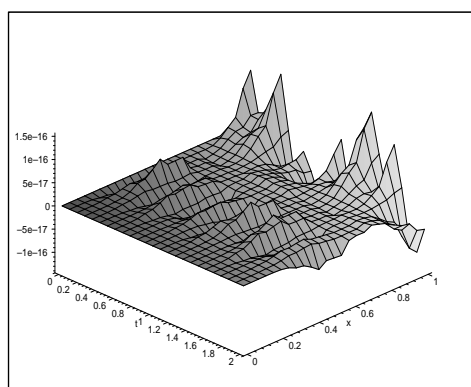
 $P_{01}(x)$  $P_{02}(x)$  $P_{03}(x)$

Figura 7.50: Respostas frequência homogêneas $u_h(t, x)$ para

$$p(t, x) = A_i \text{sen}(\hat{\omega}_i t) P_{0i}(x), i = 1, 2, 3 \quad \text{em} \quad t = 0.5$$

Os gráficos a seguir representam a resposta em frequência total, ou seja, $u(t, x) = u_p(t, x) + u_h(t, x)$, para os correspondentes casos descritos anteriormente, quando a entrada espacial é dada por P_{03} .

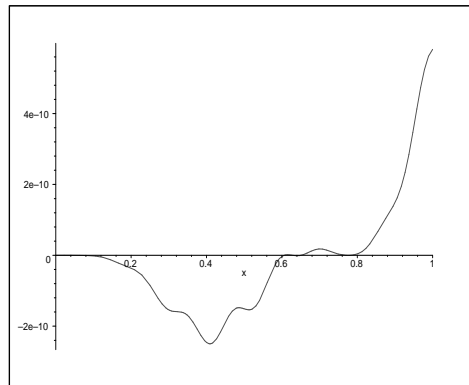


Tabela 7.16: Resposta frequência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t) P_{03}(x)$ em $t = 0.5$

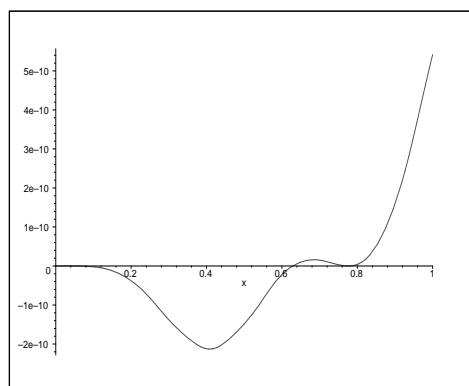


Tabela 7.17: Resposta frequência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A \sin(\hat{\omega}t) P_{03}(x)$ em $t = 0.5$

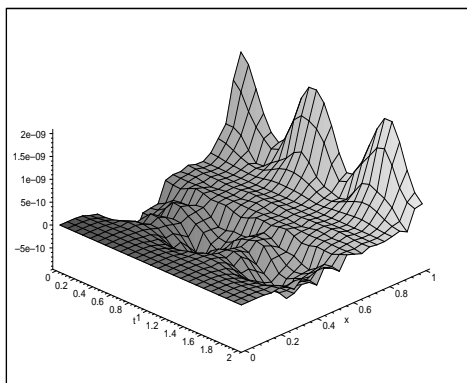


Tabela 7.18: Resposta freqüência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A \cos(\hat{\omega}t)P_{03}(x)$ em $t = 0..2$

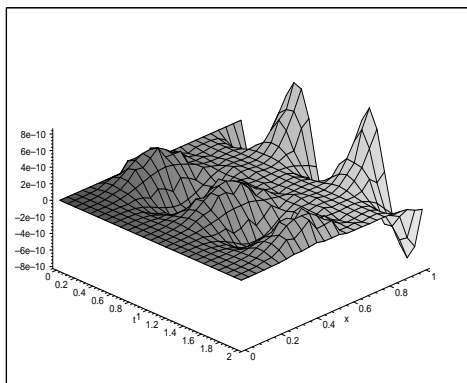


Tabela 7.19: Resposta freqüência total $u(t, x)$ para $p(t, x) = A \text{sen}(\hat{\omega}t)P_{03}(x)$ em $t = 0..2$

8 CONCLUSÕES

Na modelagem de vigas flexíveis, de uso freqüente em aplicações estruturais e metal-mecânicas, o modelo de Timoshenko, ainda que mais preciso do que o clássico modelo de Euler-Bernoulli, por considerar o efeito de cisalhamento e a inércia rotativa, envolve várias dificuldades analíticas para determinar respostas forçadas.

A solução total para a equação de Timoshenko, representada por uma equação diferencial parcial de quarta ordem no tempo, munida de condições iniciais e de contorno, foi descrita em termos da resposta impulso h . Uma expansão espectral foi utilizada para o cálculo da resposta impulso como o uso dos modos. Estes últimos, foram descritos em termos da base dinâmica.

A decomposição de respostas forçadas, introduzida por Claeysen [11], [13], [12] e Moraes [9], foi utilizada para o caso específico da equação de Timoshenko, em que o forçante pode possuir sua própria dinâmica. A resposta forçada foi decomposta na soma de uma resposta livre induzida pelos valores iniciais da resposta particular. Esta decomposição foi determinada de maneira analítica para entradas concentradas e com dinâmica.

Para entradas com exponenciais no tempo e amplitude espacial variável, foi utilizado o operador de transferência. Este último foi calculado de maneira espectral.

Nas simulações, como era de esperar-se, no caso concentrado, percebe-se que a amplitude do deslocamento no tempo está relacionada com o ponto da viga onde a força é aplicada. Quando a resposta é decomposta em livre e permanente, tem-se a predominância desta última no resultado final, para os diversos tipos de entrada, observando-se o inverso quando as freqüências estavam perto de ressonância.

A resposta em frequência foi considerada no caso de uma fixa-livre, para uma entrada dinâmica, representada pela superposição de duas componentes harmônicas, neste caso, observou-se que ambas têm influência na resposta.

REFERÊNCIAS

- [1] ALDRAIHEM, O., WETHERHOLD, R., AND SINGH, T. Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs euler-bernoulli theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 8, 2 (1997), 149–157.
- [2] CLAEYSSSEN, J. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration* 140, 1 (1990), 73–84.
- [3] CLAEYSSSEN, J. *Time and Frequency Response*. ICIAM 95, Hamburg, 1995.
- [4] CLAEYSSSEN, J. The matrix impulse response in vibrating systems, nonlinear dynamics, chaos, control and their applications to engineering sciences. *ABCM-SBMAC-SIAM* 2 (1999).
- [5] CLAEYSSSEN, J., AND FERREIRA, I. A resposta dinâmica em modelos evolutivos e estacionários. I bienal da sbm, Belo Horizonte, 2002.
- [6] CLAEYSSSEN, J., MORAES, I., AND SUAZO, G. A resposta impulso em problemas de dinâmica e controle: Uma abordagem operacional direta. *Aplicon* (2001).
- [7] CLAEYSSSEN, J., AND SODER, R. A dynamical basis for computing the modes of euler-bernoulli and timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 259, 4 (2003), 986–990.
- [8] COSTA, S. *Problemas de Contorno de Ordem Superior e Cálculo da Função de Green*. Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [9] CRAIG, R. *Structural Dynamics an Introduction to Computer Methods*. The University of Texas at Austin, 1981.
- [10] DIMAGORONAS, A. *Vibration for Engineers*. Pretince Hall, 1995.

- [11] FERREIRA, I., CLAEYSSEN, J., AND CANAHUALPA, G. Convolution with weighting, impulse, transient and permanent responses. Tech. rep., SIAM Meeting in Control, Signals and Linear Algebra, Boston, 2001.
- [12] GARIBOTTI, C., CLAEYSSEN, J., AND COSTA, S. *Decomposição de Respostas Forçadas em Sistemas Distribuídos*. Anais do DINCON, série Arquimedes,2, São José do Rio Preto, 2003.
- [13] GARIBOTTI, C., CLAEYSSEN, J., COSTA, S., AND TSUKASAN, T. *Computing forced response with the dynamical basis*. VIII Workshop on Partial Differential Equations, Petrópolis, 2003.
- [14] GIARETA, M. *Vibrações Forçadas com Força Axial Num Modelo De Euler-Bernoulli para Vigas*. Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [15] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [16] MORAES, I. *Uma Metodologia Unificada no Domínio Tempo para Sistemas Concentrados, Discretos e Distribuídos*. Tese de Doutorado,UFRGS/PROMECC, Porto Alegre, 2002.
- [17] MOSCHEN, I. *Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas*. Dissertação de Mestrado,UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 1999.
- [18] NAIMARK, M. *Linear Differential Operators*. Frederick Ungar Pub., New York, 1967.
- [19] NEUMANN, R. S. *Determinação dos Modos Vibratórios Sujeitos a Efeitos de Cisalhamento e Inércia Rotativa*. Dissertação de Mestrado,UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [20] NEWLAND, D. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific and Technical, London, 1989.

- [21] SODER, R. *Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial*. Dissertação de Mestrado,UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 2000.
- [22] TURCATTO, R. *Vibrações livres e forçadas no modelo de Timoshenko*. Dissertação de Mestrado,UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre, 2002.