

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**FORMULAÇÃO MICROMECAÂNICA DO  
COMPORTAMENTO POROELÁSTICO DE UM MEIO  
ROCHOSO FRATURADO**

**Giordano Von Saltiél Lorenci**

Porto Alegre  
2013

GIORDANO VON SALTÍEL LORENCI

FORMULAÇÃO MICROMECHANICA DO COMPORTAMENTO  
POROELÁSTICO DE UM MEIO ROCHOSO FRATURADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA**.

Orientadores: Prof. Dr. Samir Maghous

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Porto Alegre  
2013

### CIP - Catalogação na Publicação

Von Saltiél Lorenci, Giordano  
Formulação micromecânica do comportamento  
poroelástico de um meio rochoso fraturado / Giordano  
Von Saltiél Lorenci. -- 2013.  
135 f.

Orientador: Samir Maghous.  
Coorientador: Eduardo Bittencourt.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-  
RS, 2013.

1. Micromecânica. 2. Meios porosos. 3. Rochas  
fraturadas. I. Maghous, Samir, orient. II.  
Bittencourt, Eduardo, coorient. III. Título.

**GIORDANO VON SALTIEL LORENCI**

**FORMULAÇÃO MICROMECAÂNICA DO COMPORTAMENTO  
POROELÁSTICO DE UM MEIO ROCHOSO FRATURADO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 24 de maio de 2013

**Prof. Samir Maghous**

Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées  
Orientador

**Prof. Eduardo Bittencourt**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

**Prof. Armando Miguel Awruch**

Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Armando Miguel Awruch (PPGEC – UFRGS)**

Dr. pela COPPE/UFRJ

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (PPGEC – UFRGS)**

Dr. pelo PPGEC/UFRGS

**Prof. Rodrigo Rossi (PROMEC – UFRGS)**

Dr. pelo POSMEC/UFSC

Dedico este trabalho a minha família, pelo apoio incondicional.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil pela educação de excelência que proporciona aos seus alunos. É uma grande honra fazer parte desta comunidade acadêmica.

Ao Prof. Samir Maghous, pela orientação e pela dedicação, não só durante este trabalho, mas também ao longo de todo o Mestrado. Agradeço por seu incentivo e sua amizade. Guardarei sempre seus conselhos e ensinamentos.

Ao Prof. Eduardo Bittencourt pela orientação, pelo conhecimento transmitido e pela ajuda nas situações de maior dificuldade.

Aos Professores Dr. Armando M. Awruch e Dr. Roberto D. Rios pela recomendação no momento do ingresso no Mestrado.

Aos colegas pelo apoio neste trabalho, pela amizade e pelos momentos de descontração e encorajamento nas situações adversas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a minha família, principalmente meus pais, Cléo e Vânia por sempre incentivarem o caminho da educação. Vocês são meus exemplos para toda a vida. Agradeço também a minha irmã Giovana pelo companheirismo.

Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,  
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram  
conquistadas do que parecia impossível.

*Charles Chaplin*

## RESUMO

LORENCI, G.V.S. **Formulação micromecânica do comportamento poroelástico de um meio rochoso fraturado**. 2013. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Os meios rochosos são compostos por blocos de rochas intactos e por descontinuidades. As descontinuidades representam zonas de baixa rigidez, onde as propriedades do maciço estão degradadas, reduzindo a resistência do mesmo. Elas também constituem caminhos para o fluxo de fluidos no interior da rocha. O estudo do comportamento hidráulico-mecânico acoplado existente nos meios porosos é realizado pela poroelasticidade, que relaciona os campos de tensões e deformações no maciço, gerados pela deformação mecânica do esqueleto e pela ação do fluido pressurizado nos poros. Uma abordagem micromecânica permite estender os resultados clássicos da teoria de poroelasticidade para o caso de juntas que são capazes de transferir esforços ao longo de suas faces. Neste contexto, o meio rochoso heterogêneo é substituído por um meio homogêneo equivalente, pela aplicação do conceito de mudança de escala da teoria da homogeneização, que possibilita a determinação das propriedades efetivas do maciço. Demonstra-se que, para certas distribuições geométricas das juntas, é possível obter soluções analíticas para o comportamento do maciço pela aplicação de estimativas como, por exemplo, o esquema Mori-Tanaka, onde as juntas são modeladas como esferoides. Um modelo numérico via método dos elementos finitos, que considera explicitamente as juntas, é usado para comparar os resultados obtidos.

Palavras-chave: micromecânica, meios porosos, rochas fraturadas.

## ABSTRACT

LORENCI, G.V.S. **Formulation of the micromechanical behavior of a poroelastic jointed rock media**. 2013. 135 f. Dissertation (Masters Degree in Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Rock media are composed by blocks of intact rock and discontinuities. Discontinuities represent zones of low stiffness, where the mass properties of the rock are degraded, with reduced resistance. They also provide ways for fluid flow within the rock. The study of coupled mechanical-hydraulic behavior existing in porous media is performed by poroelasticity, which relates the stress and strain fields in a rock mass generated by the mechanical deformation of the skeleton and the action of pressurized fluid in the pores. A Micromechanics approach allows to extend the classical results of the theory of poroelasticity to the case of joints that are able to transfer stresses along their faces. In this context, a heterogeneous rock media is replaced by an equivalent homogeneous medium by applying the micro-macro approach from the theory of homogenization, which allows the determination of the effective properties of the rock mass. It is shown that, for some geometric distributions of the joints, it is possible to obtain analytical solutions for the rock behavior by applying estimates methods as the Mori-Tanaka scheme, where the joints are modeled as oblong spheroids. A numerical model via the finite element method, where the joints are considering explicitly, is used in order to compare the results.

Key-words: micromechanics, porous media, jointed rocks.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: maciço rochoso formado pelos blocos de rocha e pelas descontinuidades ....	16
Figura 2.2: curva generalizada para a relação tensão-deformação de meios rochosos ....	20
Figura 2.3: diferentes tipos de descontinuidades presentes nos maciços rochosos .....	23
Figura 2.4: reservatório superficial de petróleo de Wytch Farm, na Inglaterra, formado por rocha arenítica .....	25
Figura 2.5: usina geotermal para produção de energia elétrica .....	26
Figura 2.6: deslizamento de blocos em encostas rochosas .....	29
Figura 3.1: esquema fundamental da Teoria de Homogeneização .....	32
Figura 3.2: célula unitária representativa (CUR) de um meio periódico .....	35
Figura 3.3: detalhe do VER para um meio desordenado .....	35
Figura 3.4: deformação homogênea imposta no contorno do VER .....	41
Figura 3.5: tensão homogênea imposta no contorno do VER .....	45
Figura 3.6: condições de contorno periódicas na célula unitária $C$ .....	48
Figura 3.7: inclusão inserida em um meio infinito .....	55
Figura 3.8: processo de homogeneização baseado na solução de Eshelby .....	57
Figura 3.9: esquema da estimativa diluída .....	58
Figura 3.10: esquema da estimativa auto-consistente .....	59
Figura 3.11: esquema da estimativa auto-consistente generalizada .....	60
Figura 3.12: esquema da estimativa diferencial .....	60
Figura 3.13: esquema da estimativa Mori-Tanaka .....	62
Figura 4.1: meio poroso representado pela superposição dos meios contínuos .....	65
Figura 4.2: VER submetido às condições de contorno .....	67
Figura 5.1: VER de um meio rochoso com descontinuidades com o carregamento aplicado e a caracterização da junta .....	73
Figura 5.2: eixos locais para a junta $\omega_i$ .....	77
Figura 5.3: decomposição do problema (P) em dois problemas elementares (P1 e P2) ..	81
Figura 6.1: modelo coesivo proposto por Barenblatt .....	90
Figura 6.2: desenho esquemático da interface coesiva nos elementos finitos .....	93
Figura 6.3: tensões tangenciais e normais na interface segundo as expressões propostas por Xu e Needelman (1994) .....	96
Figura 6.4: tensões tangenciais e normais na interface considerando as leis de separação bi-lineares .....	96
Figura 6.5: modos fundamentais de fratura .....	97
Figura 7.1: elipsoide oblongo .....	99

Figura 7.2: inclusão modelada como um cilindro infinito para solução analítica em EPD .....	101
Figura 7.3: plano ortonormal na junta representada por um esferoide .....	102
Figura 7.4: componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas paralelas ...	106
Figura 7.5: componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas paralelas considerando $k_n \ll E$ e $k_t \ll E$ .....	106
Figura 7.6: componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas paralelas, com relação à variação das rigidezes da junta $k_n$ e $k_t$ .....	107
Figura 7.7: sistemas de coordenadas locais ( $X'_i$ ) e globais ( $X_i$ ) .....	108
Figura 7.8: componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas .....	112
Figura 7.9: componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, considerando $k_n \ll E$ e $k_t \ll E$ .....	113
Figura 7.10: componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, com relação à variação das rigidezes da junta $k_n$ e $k_t$ .....	113
Figura 7.11: constantes elásticas $k_{\text{hom}}$ e $\mu_{\text{hom}}$ para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, com relação ao parâmetro $\varepsilon$ .....	114
Figura 7.12: propriedades poroelásticas ( $B^{\text{hom}}$ e $M$ ) para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, com relação ao parâmetro $\varepsilon$ .....	114
Figura 7.13: célula de base contendo uma junta .....	115
Figura 7.14: condições de contorno aplicadas sobre a célula unitária .....	117
Figura 7.15: malhas do estudo com diferentes refinamentos para $L1 = L2 = 0.5$ m .....	119
Figura 7.16: comparação dos resultados da análise numérica para as componentes do tensor elástico homogeneizado .....	120
Figura 7.17: verificação da simetria do tensor elástico para as componentes $C_{1122}^{\text{hom}}$ e $C_{2211}^{\text{hom}}$ via homogeneização numérica .....	122
Figura A.1: elipsoide alongado (a) e cilindro de comprimento infinito (b) .....	130
Figura B.1: sistemas de coordenadas e a descrição dos ângulos de Euler $\theta$ e $\phi$ .....	133

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
1.1 OBJETIVOS .....	13
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	14
<b>2 MEIOS ROCHOSOS</b> .....	16
2.1 COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS MACIÇOS ROCHOSOS .....	17
2.2 DESCONTINUIDADES .....	21
2.3 PROBLEMAS DE ENGENHARIA EM MEIOS ROCHOSOS .....	24
<b>2.3.1 Reservatórios de petróleo</b> .....	25
<b>2.3.2 Reservatórios geotermiais</b> .....	26
<b>2.3.3 Reservatórios de suprimento de água</b> .....	27
<b>2.3.4 Reservatórios para deposição de resíduos</b> .....	27
<b>2.3.5 Mineração</b> .....	28
<b>2.3.6 Outras estruturas subterrâneas</b> .....	29
<b>3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ABORDAGEM MICROMECAÂNICA</b> .....	30
3.1 VOLUME ELEMENTAR REPRESENTATIVO – VER .....	34
3.2 REGRA DAS MÉDIAS .....	37
3.3 LEMA DE HILL .....	39
3.4 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO EM ELASTICIDADE .....	39
<b>3.4.1 Deformação homogênea aplicada no contorno do VER</b> .....	40
<b>3.4.2 Tensão homogênea aplicada no contorno do VER</b> .....	44
<b>3.4.3 Meios periódicos</b> .....	47
3.5 DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE MEIOS HOMOGENEIZADOS .....	50
<b>3.5.1 Limites variacionais</b> .....	51
3.5.1.1 Limites de Voigt e Reuss .....	51
3.5.1.2 Limites de Hashin e Shtrikman .....	53
<b>3.5.2 Teoria da inclusão equivalente de Eshelby</b> .....	54
<b>3.5.3 Estimativas baseadas na solução de Eshelby</b> .....	56
3.5.3.1 Estimativa diluída .....	57
3.5.3.2 Estimativa Auto-Consistente .....	58
3.5.3.3 Esquema diferencial .....	60
3.5.3.4 Estimativa Mori-Tanaka .....	61
3.5.3.5 Estimativas no âmbito da mecânica dos meios porosos .....	63

<b>4 POROELASTICIDADE LINEAR</b> .....	64
4.1 CARREGAMENTO APLICADO SOBRE O VER .....	66
4.2 EQUAÇÕES DE ESTADO HOMOGENEIZADAS .....	68
<b>5 EQUAÇÕES DO COMPORTAMENTO POROELÁSTICO DE ROCHAS FRATURADAS</b> .....	72
5.1 LEMA DE HILL PARA OS MEIOS COM DESCONTINUIDADES .....	72
5.2 FORMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO MACROSCÓPICO PARA O CASO DRENADO .....	76
5.3 FORMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO MACROSCÓPICO PARA O CASO DE UMA REDE DE JUNTAS SATURADAS .....	79
5.3.1 Definição da primeira equação de estado .....	81
5.3.2 Definição da segunda equação de estado .....	85
<b>6 MODELO COESIVO</b> .....	90
6.1 INTERFACES COESIVAS APLICADAS AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	91
6.2 DESCRIÇÃO DAS INTERFACES COESIVAS .....	93
<b>7 APLICAÇÕES</b> .....	99
7.1 MEIO ROCHOSO COM JUNTAS CURTAS PARALELAS .....	101
7.2 MEIO ROCHOSO COM JUNTAS CURTAS DISTRIBUÍDAS ALEATORIAMENTE .....	108
7.3 ANÁLISE NUMÉRICA – MACIÇO ROCHOSO COM JUNTAS CURTAS PARALELAS .....	115
<b>8 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	123
REFERÊNCIAS .....	126
APÊNDICE A .....	130
APÊNDICE B .....	133
APÊNDICE C .....	135

## 1 INTRODUÇÃO

A determinação do comportamento dos meios rochosos representa um grande desafio nos projetos de Engenharia. Uma das principais características destes meios é a presença de descontinuidades (juntas) em diferentes escalas. A existência destas descontinuidades tem um impacto crucial sobre o comportamento global dos mesmos, pois elas constituem zonas de baixas rigidez e resistência, ao longo das quais as propriedades físicas e mecânicas da rocha são degradadas. A presença das descontinuidades constitui um elemento chave na estabilidade e na segurança de inúmeras obras de Engenharia, como fundações de barragens, escavação de túneis e cavernas, perfurações para obtenção de óleo e gás, instalações de energia geotérmica, depósitos de resíduos tóxicos, entre outros.

Do ponto de vista das propriedades de transporte, as descontinuidades representam canais preferenciais para o escoamento, e como tal, podem contribuir para a circulação de fluidos ou contaminantes através dos maciços rochosos, particularmente quando a permeabilidade da matriz é baixa. Do ponto de vista mecânico, as descontinuidades podem ser tratadas como vazios, ou poros, preenchidos ou não com fluido.

A Poromecânica é a ciência que estuda os processos termodinâmicos caracterizados pelo acoplamento hidromecânico existente entre a matriz rochosa e os fluidos presentes nos espaços vazios. Terzaghi (1943) e Biot (1941) desenvolveram os primeiros modelos poromecânicos, cujo objetivo era descrever o processo de consolidação em solos submetidos a um carregamento externo. Estas abordagens para poroelasticidade linear são puramente fenomenológicas, mas permanecem coerentes com os trabalhos desenvolvidos utilizando uma modelagem termodinâmica (COUSSY, 2004), assim como modelos da Mecânica do Contínuo que abordam o problema na escala do poro.

Um aspecto importante a salientar é que, num meio poroso, os efeitos na microescala afetam fortemente seu comportamento macroscópico. Neste contexto, as técnicas de homogeneização representam uma ferramenta fundamental para permitir uma estimativa confiável das propriedades do meio em análise. A utilização de ferramentas computacionais, como o método dos elementos finitos, aplicado conjuntamente com os princípios da Mecânica da

Fratuira, também constitui um caminho interessante para o estudo dos meios onde há descontinuidades.

Os trabalhos de Dormieux et al. (2002) e Maghous et al. (2013) demonstram que, para certas condições específicas, os parâmetros poroelásticos são completamente determinados a partir do conhecimento das propriedades elásticas drenadas (na ausência de fluido). Assim, o aspecto computacional é ainda mais facilmente aplicável, considerando que o modelo numérico não requer a introdução do fluido para obtenção das propriedades do meio.

## 1.1 OBJETIVOS

Os maciços rochosos são meios de caráter fortemente heterogêneos e, portanto, apresentam comportamento bastante complexo, principalmente devido à presença de fluidos nas cavidades que separam os blocos de rocha. A maioria das ferramentas aplicáveis nos problemas de Engenharia está baseada no conceito de meios contínuos, cujas hipóteses são violadas pela presença das descontinuidades. Uma forma de contornar esta situação é a aplicação de métodos numéricos onde as descontinuidades são incorporadas ao modelo. Muitas vezes, o tamanho do problema acarreta em grande esforço computacional, dificultando o uso desta abordagem.

Logo, é importante estabelecer caminhos para simular o comportamento destes meios heterogêneos, a partir da substituição destes por um meio homogêneo equivalente. As ferramentas utilizadas pela micromecânica foram desenvolvidas em prol deste objetivo e facilitam o estudo de inúmeros problemas complexos de Engenharia.

Considerando o exposto acima, o campo de aplicação deste trabalho é focado nos meios rochosos fraturados. Logo, o objetivo principal é analisar o comportamento poromecânico dos maciços rochosos supondo que eles possuem uma rede de juntas interconectada e saturada por um fluido pressurizado. Em virtude destas afirmações, os objetivos do trabalho são:

- a) derivação de um esquema micromecânico para avaliar analiticamente a rigidez efetiva (abordagem via homogeneização teórica);

- b) uma análise computacional, baseada sobre o conceito do modelo coesivo, visando à determinação da rigidez efetiva (abordagem via homogeneização numérica);
- c) comparação das duas abordagens destacadas acima;
- d) formulação das equações de estado em poroelasticidade.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 traz breves comentários sobre as propriedades dos meios rochosos, focado principalmente na questão das descontinuidades e como estas afetam o comportamento mecânico dos maciços. Também são descritas algumas das principais situações de Engenharia onde os meios fraturados constituem um grande problema a ser enfrentado.

No capítulo 3, inúmeros aspectos da homogeneização em elasticidade linear são apresentados, compreendendo a avaliação de meios desordenados e periódicos. Também são destacados os diferentes métodos para avaliar as propriedades elásticas efetivas. Os conceitos de volume elementar representativo e de célula unitária são também detalhados. Os limites variacionais, baseados em princípios energéticos são destacados, assim como as expressões dos chamados esquemas micromecânicos, desenvolvidos a partir do resultado de Eshelby (1957) para inclusões em meios infinitos.

A existência de um fluido pressurizado preenchendo as cavidades interfere no comportamento mecânico do maciço. Por outro lado, a deformação do maciço também influi nas condições deste fluido. Obviamente, existe um acoplamento hidráulico-mecânico que rege o comportamento do maciço. O capítulo 4 trata da poroelasticidade linear, cujas hipóteses estão baseadas na interação existente entre a matriz elástica da rocha e o fluido presente nos poros. O conteúdo apresentado é desenvolvido com uma visão voltada para a abordagem micromecânica. A teoria poroelástica é a chave para compreender as variações de tensões e deformações nestes meios heterogêneos. O comportamento poroelástico linear é particularizado para a situação dos meios rochosos fraturados no capítulo 5. São apresentadas as equações de estado que regem o problema, novamente no contexto da micromecânica.

O capítulo 6 aborda de maneira resumida os princípios básicos da teoria dos elementos coesivos aplicados ao método dos elementos finitos. São tratados alguns pontos importantes

que permitem entender a ação das interfaces coesivas, para simulação do comportamento de fraturas capazes de transferir esforços ao longo das superfícies onde ocorre o deslocamento relativo.

No capítulo 7, duas situações derivadas da formulação tratada no capítulo 5 são detalhadas. Os meios rochosos são avaliados em dois casos distintos: o primeiro considera apenas juntas curtas paralelas e o segundo traz juntas curtas aleatoriamente distribuídas em todas as direções da matriz. Por fim, é apresentada uma aplicação em elementos finitos, com o intuito de obter os resultados da abordagem numérica em homogeneização, visando comparar as duas metodologias.

No capítulo 8, as considerações sobre os resultados obtidos, além de sugestões para trabalhos futuros são destacadas.

## 2 MEIOS ROCHOSOS

O maciço rochoso é um meio heterogêneo formado pelo conjunto de blocos de rocha intacta justapostos, limitados por superfícies que os separam, denominadas genericamente de descontinuidades, fraturas ou juntas (figura 2.1). Os blocos de rocha têm tamanhos que variam de alguns milímetros a até poucos metros. A quantidade e a relação das descontinuidades indicam o grau de isotropia do meio e constituem uma interrupção das propriedades físicas ou mecânicas das rochas (ATTA, 2004). As juntas ocorrem geralmente agrupadas em famílias, com diferentes tamanhos, orientações e comportamentos mecânicos.



Figura 2.1: maciço rochoso formado pelos blocos de rocha e pelas descontinuidades

Ainda segundo Atta (2004), na chamada escala do Engenheiro, as juntas representam as únicas heterogeneidades do meio rochoso. É também nesta escala que a modelagem experimental é executada. A rigor, até mesmo os blocos rochosos intactos possuem heterogeneidades em sua matriz, oriunda de vazios, inclusões minerais, microtrincas, entre outros. Neste trabalho, admite-se que a matriz rochosa sofreu um processo de homogeneização preliminar (experimental ou teórico). Logo, as únicas heterogeneidades presentes no maciço são as juntas.

## 2.1 COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS MACIÇOS ROCHOSOS

A estrutura mecânica da rocha apresenta aspectos distintos, dependendo da escala em que é estudada. A maioria das rochas é formada pelo conjunto de cristais e partículas amorfas unidas por diferentes quantidades de materiais cimentantes. A composição química dos cristais pode ser relativamente homogênea, como em alguns calcários ou bastante heterogênea, tal como em um granito. Da mesma forma, o tamanho dos cristais pode ser uniforme ou variável, mas, geralmente, têm dimensões da ordem dos centímetros ou ainda menores. Estes cristais são a menor escala em que as propriedades mecânicas são estudadas. Os limites entre os cristais representam os pontos de fraqueza na estrutura da rocha, que ainda assim pode ser considerada como um meio contínuo. A deformação dos cristais em si fornece evidências interessantes em relação à deformação que a rocha foi sujeita.

Em uma escala de dimensões, que variam de poucos metros a centenas de metros, a estrutura de algumas rochas é contínua, mas muitas vezes é interrompida por falhas, planos de estratificação ou demais descontinuidades que separam o maciço em diferentes blocos. É nesta escala que estas descontinuidades apresentam maior preocupação na Engenharia, pois é justamente onde as estruturas de fundações e demais obras subterrâneas são construídas (JAEGER et al., 2007).

A determinação dos parâmetros em um maciço heterogêneo se configura em tarefa bastante complexa, já que o meio é descontínuo e anisotrópico. A maior parte do volume do maciço é composta pelos blocos, cujas propriedades mecânicas podem ser determinadas em ensaios de laboratório, sem negligenciar os efeitos de escala. Estes resultados superestimam a resistência do maciço, enquanto que a sua deformação é subestimada (POUYA; GHOREYCHY, 2001). As descontinuidades, por sua vez, possuem um volume reduzido, mas sob determinados tipos de ações, influem diretamente no comportamento do maciço, pois elas apresentam grande deformabilidade, baixa resistência e elevada permeabilidade.

As juntas podem interromper a continuidade dos deslocamentos no maciço, quando este for submetido a um estado de tensão ou a pressões de fluidos. Nos casos onde tais perturbações são pequenas em relação às dimensões do maciço, apesar de algumas propriedades mecânicas serem alteradas, o meio pode ainda ser tratado como um contínuo. Por outro lado, onde tais perturbações têm dimensões significativas, elas devem ser tratadas como parte da estrutura ou como um limite (JAEGER et al., 2007).

A determinação das propriedades geomecânicas dos maciços rochosos apresenta grande complexidade, sendo necessária a adoção de diferentes abordagens, dependendo do tipo de maciço e dos objetivos da análise. A experiência acumulada permitiu a elaboração de sistemas empíricos para a classificação dos maciços rochosos, possibilitando uma caracterização através de parâmetros geomecânicos. O desenvolvimento de novas tecnologias e a própria experiência adquirida tem permitido a aplicação destes métodos.

Dentre estes sistemas de classificação empíricos pode-se destacar o Sistema Q, desenvolvido por Barton, Lien e Lunde (1974), mediante avaliação de casos históricos de túneis. A qualidade do maciço rochoso é avaliada através de diferentes parâmetros, envolvendo (NOGOSEKE, 2009):

- a) o número de famílias de juntas;
- b) a rugosidade, grau de alteração e preenchimento das juntas;
- c) o fluxo interno de água;
- d) as condições de tensões;
- e) parâmetro RDQ (relacionado com a parcela intacta de testemunhos de rocha à medida que a perfuração avança).

Outro método bastante utilizado é o Sistema RMR, também chamado de classificação geomecânica (BIENIAWSKI, 1989), cuja primeira publicação data de 1976. É baseada nos seguintes parâmetros (NOGOSEKE, 2009):

- a) resistência da rocha intacta;
- b) espaçamento e condição das fraturas;
- c) influência de água subterrânea;
- d) orientação das descontinuidades;
- e) parâmetro RDQ.

Os métodos empíricos para classificação dos maciços rochosos, durante os estágios do estudo de viabilidade e também de projeto preliminar, fornecem boas informações quanto ao comportamento do meio em análise. São procedimentos bastante utilizados, pois nestas fases

iniciais, se dispõe de pouca informação sobre o comportamento do meio rochoso, incluindo até mesmo as características hidrológicas (HOEK, 2007).

Hoek (2007) salienta ainda que é importante compreender as limitações destes sistemas de classificação e que seu uso não deve substituir alguns dos procedimentos de projeto mais elaborados. Ou seja, a aplicação destes deve ser atualizada em conjunto com análises específicas do local em questão, como as tensões *in situ*, as propriedades do maciço e também sobre a sequência de escavação planejada.

Além dos métodos empíricos, soluções exatas podem ser obtidas para alguns casos específicos. Os trabalhos desenvolvidos por Bekaert e Maghous (1996) e de Buhan e Maghous (1997) demonstram soluções para meios rochosos onde as fraturas são paralelas a uma ou duas direções diferentes. A análise numérica também é uma opção para o estudo dos maciços rochosos. No entanto, uma elevada densidade de fraturas pode tornar o processo dispendioso computacionalmente (POUYA; GHOREYCHI, 2001).

Do ponto de vista mecânico, a deformabilidade dos maciços é um dos parâmetros mais importantes com relação ao comportamento dos mesmos (VALLEJO et al., 2002). Ela representa a alteração das formas geométricas da rocha como resposta à ação de esforços. Dependendo da intensidade destes carregamentos e das características mecânicas da rocha, a deformação será permanente ou elástica.

Em geral, as rochas apresentam relações não lineares entre as forças aplicadas e as deformações correspondentes. De acordo com Farmer (1968), a relação tensão-deformação permite separar as rochas em três grupos:

- a) **rochas com comportamento quase elástico**: típico de rochas maciças, compactas e de grão fino (ígneas hipoabissais, extrusivas e algumas metamórficas de grão fino). Apresentam relação quase linear entre tensão e deformação até próximo ao ponto de ruptura;
- b) **rochas semi-elásticas**: rochas ígneas de grão mais grosso e rochas sedimentares compactas de grão fino, que apresentam porosidade baixa e níveis razoáveis de coesão. Apresentam uma relação tensão-deformação na qual a inclinação da curva decresce com o incremento das tensões;
- c) **rochas não elásticas**: rochas menos coesivas, com porosidade alta, como as rochas sedimentares de resistência coesiva baixa. Ao sofrer um carregamento, a rocha passa por um processo de compactação e fechamento das fraturas, antes mesmo de qualquer ocorrência de deformação linear.

Generalizando, o comportamento tensão-deformação das rochas pode ser descrito na forma de uma curva (figura 2.2), composta por um trecho aproximadamente linear de inclinação máxima, que decresce progressivamente passando a um comportamento não linear a partir do momento onde as tensões aplicadas superam a chamada resistência de pico (tensão máxima que uma rocha pode suportar em certas condições de carregamento).

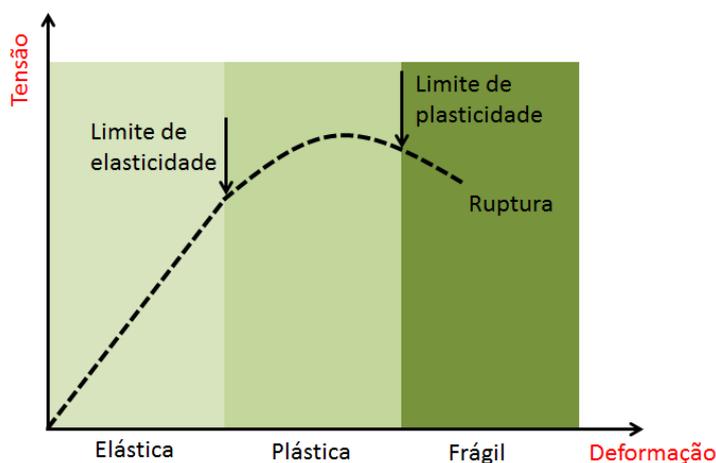


Figura 2.2: curva generalizada para a relação tensão-deformação de meios rochosos

O módulo de elasticidade  $E$  expressa a constante de proporcionalidade, que indica a linearidade existente entre tensão e deformação no trecho inicial da curva indicada na figura 2.2. Dentro da região das deformações elásticas, o material volta a sua configuração inicial quando há a retirada do carregamento. A partir de certa deformação, a rocha não consegue manter o comportamento elástico e começam a ocorrer deformações plásticas, que persistem mesmo após o descarregamento. O módulo de elasticidade, em uma visão simplista, expressa a resistência mecânica do maciço. Ele sofre influência direta de inúmeros aspectos, como:

- a) a presença das descontinuidades;
- b) da estrutura petrográfica (resistência interna das partículas minerais individuais e resistência das ligações entre os grãos minerais na matriz rochosa);
- c) da orientação e mergulho da formação rochosa e das estruturas geológicas que a afetam;
- d) do grau de intemperismo e alteração da rocha;
- e) das propriedades elásticas e plásticas;

- f) do grau de anisotropia;
- g) do índice de vazios e da porosidade.

A temperatura e os efeitos devidos a vibrações de ações sísmicas podem também afetar o módulo de elasticidade dos maciços. A água também é um fator condicionante no comportamento. Farmer (1968) afirma que a água diminui significativamente o módulo de elasticidade, principalmente nas rochas porosas. Esta diminuição pode chegar a até 40% do valor em estado seco no caso de arenitos e calcários. De forma resumida, pode-se dizer que a presença da água no interior dos poros afeta a estrutura coesiva da rocha, enfraquecendo-a. Como deformação e formação das falhas são fortemente influenciados pela coesão, tal redução torna-se compreensível.

## 2.2 DESCONTINUIDADES

O termo descontinuidade descreve uma região de pouca espessura, ao longo da qual as propriedades mecânicas da rocha são altamente degradadas. Logo, em relação ao comportamento mecânico, as juntas possuem propriedades inferiores aos dos blocos de rocha, e assim, sua inclusão é fundamental para modelagem adequada do meio. As descontinuidades afetam diretamente a deformabilidade e a permeabilidade das rochas fraturadas (ATTA, 2004).

As descontinuidades são, de longe, o tipo mais comum de estrutura geológica e representam um fenômeno comum a todas as rochas ígneas e sedimentares. São definidas como fraturas na rocha, ao longo das quais houve pouco ou nenhum deslocamento transversal. Geralmente, ocorrem em grupos, onde são dispostas mais ou menos paralelas e regularmente espaçadas. São comuns os conjuntos orientados em diferentes direções, de modo a dividir o maciço em uma estrutura de blocos. O espaçamento entre as juntas podem variar de centímetros a até dezenas de metros, embora as juntas muito estreitamente espaçadas possam ser consideradas como uma propriedade da matriz da rocha (JAEGER et al., 2007).

Muitas vezes, as descontinuidades não estão distribuídas aleatoriamente e seus efeitos geram uma considerável anisotropia nas propriedades do maciço, sendo a principal delas a anisotropia de resistência. A anisotropia é um fator comum até mesmos nas rochas que têm

uma estrutura contínua, devido a orientações preferenciais dos minerais ou ainda devido ao histórico das tensões. Logo, o comportamento mecânico do maciço é, em geral, também anisotrópico.

Segundo Bandis et al. (1983), em um maciço rochoso fraturado, a deformação das descontinuidades é um componente fundamental de seu comportamento, mesmo sob diferentes condições de tensão. Em níveis de tensão relativamente baixos, típicos de escavações superficiais, a deformação das juntas domina a deflexão elástica da rocha intacta. Mesmo para altos níveis de tensão, associados a grandes estruturas, o deslizamento e o fechamento das juntas constituem a parte principal do assentamento da rocha.

As descontinuidades são geralmente classificadas de acordo com o modo de sua formação. Descontinuidades com mesma origem geológica possuem propriedades similares no que diz respeito às dimensões e às propriedades de resistência ao deslizamento. As descontinuidades podem ser classificadas segundo quatro grandes grupos:

- a) **superfície de estratificação (*bedding*)**: resultam de processos de formação sedimentar e são paralelas à superfície de deposição dos sedimentos. Possuem grande extensão e pouca ondulação. São pontos onde há depósito de sedimentos finos de xisto ou de argila, que os tornam perigosos para a estabilidade – figura 2.3(a);
- b) **diaclasses**: são, muitas vezes, perpendiculares ou oblíquas aos planos de estratificação ou foliação do maciço. Não demonstram nenhum vestígio de movimento e têm uma extensão limitada – figura 2.3(b);
- c) **trincas ou fraturas de expansão**: são formadas sob o efeito da tração originada em grandes movimentos tectônicos. Muitas vezes são preenchidas por calcita ou quartzo – figura 2.3(c);
- d) **falhas (*fault*)**: são resultados da zona de ruptura do maciço que sofreu um grande esforço cisalhante (deslocamento tangencial importante). Representam descontinuidades que separam duas entidades maiores do maciço e possuem grande extensão. Raramente são unidades planas singulares, pois normalmente constituem famílias de descontinuidades paralelas – figura 2.3(d).

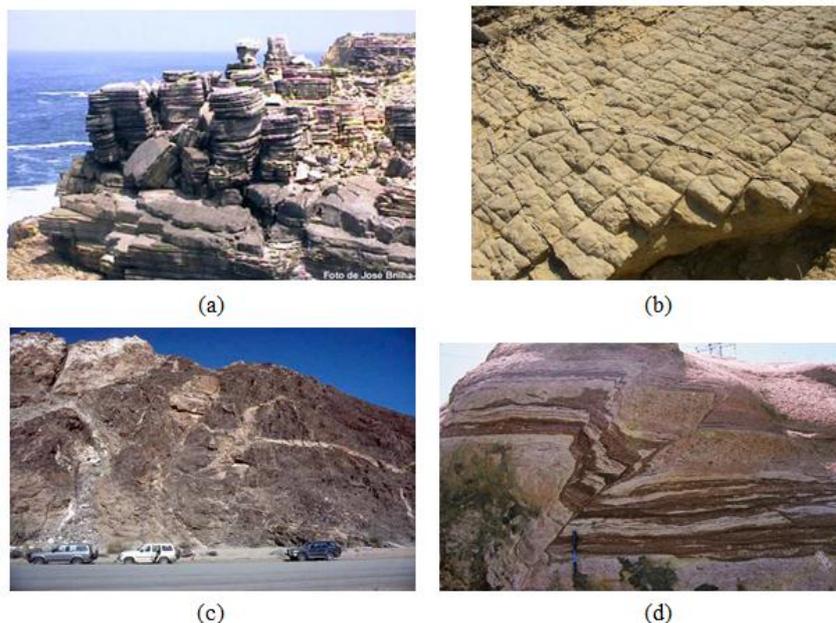


Figura 2.3: diferentes tipos de descontinuidades presentes nos maciços rochosos

É importante destacar que, neste trabalho, o termo junta reúne todas as descontinuidades envolvidas na escala do maciço rochoso. Dentre os diferentes parâmetros usados para descrever as descontinuidades pode-se destacar os seguintes:

- a) **orientação**: definida como a atitude de um plano de descontinuidade no espaço. É descrita pela direção e pelo mergulho do plano. A direção é dada pelo ângulo entre o norte e a linha de intercessão do plano da descontinuidade, com um plano horizontal. O mergulho é o ângulo de inclinação do plano com um plano horizontal;
- b) **número de famílias**: caracterizada por um conjunto de descontinuidades com mesmas orientação e origem. Um sistema de fraturas é formado pelo conjunto das famílias de um determinado local;
- c) **persistência**: definida como a extensão exposta da superfície da descontinuidade. A presença ou ausência de persistência determina o padrão de compartimentação dos maciços rochosos. Tem influência na resistência ao cisalhamento dos maciços rochosos, principalmente nos casos de taludes e fundações de barragens;
- d) **alteração das paredes das descontinuidades**: é descrita pelo grau de alteração da rocha e pela espessura que a alteração apresenta. Não ocorre de forma homogênea no maciço. Aparece nas áreas que afloram e pelas descontinuidades onde há percolação de água;
- e) **rugosidade**: a rugosidade de uma descontinuidade é caracterizada pelas ondulações e irregularidades dos planos que a compõem. Influencia na

resistência ao cisalhamento, principalmente quando as descontinuidades não são preenchidas;

- e) **abertura**: corresponde à distância perpendicular que separa as duas paredes de uma descontinuidade. O espaço entre elas pode ser preenchido por fluidos ou inclusões minerais;
- f) **preenchimento**: é o termo usado para designar o material presente entre as paredes de uma descontinuidade. O material existente nas aberturas é de relevante importância no comportamento do maciço, principalmente com relação à resistência ao cisalhamento e à condutividade hidráulica;
- g) **espaçamento**: o espaçamento é definido como a quantidade de descontinuidades por uma unidade de medida. Pode ser considerado como a distância perpendicular entre duas descontinuidades de uma mesma família, normalmente se referindo à média de espaçamentos desta família;
- h) **grau de faturamento**: expressa a quantidade de fraturas em relação ao comprimento do maciço. Utilizado principalmente na descrição de testemunhos extraídos via prospecção;
- i) **resistência das paredes**: resistência à compressão da rocha que compõe as paredes de uma descontinuidade;

As juntas podem se apresentar preenchidas por diversos minerais, tais como calcita, dolomita, quartzo ou partículas de argila. Por outro lado, também constituem vazios na matriz rochosa e, nestes casos, é comum a presença de fluidos sob pressão no seu interior. Esta última situação é o interesse deste trabalho.

## 2.3 PROBLEMAS DE ENGENHARIA EM MEIOS ROCHOSOS

Os itens a seguir descrevem alguns problemas associados com a ocorrência de fraturas em maciços rochosos, principalmente no que se refere a reservatórios subterrâneos, a mineração e a escavações de rocha em obras de Engenharia, como túneis e fundações. Destaca-se também o aspecto do fluido presente nas fraturas, cujo entendimento é crucial na área de extração de recursos energéticos, como petróleo e gás. A presença do fluido pode também representar um sério risco à estabilidade das estruturas, já que o mesmo tende a afetar a resistência mecânica do maciço.

### 2.3.1 Reservatórios de petróleo

As fraturas conferem problemas e oportunidades para exploração e produção de reservatórios de petróleo (figura 2.4). Muitos destes estão constituídos em rochas altamente fraturadas. Nestes casos, as propriedades das fraturas, como densidade e orientação são fundamentais para a operação do reservatório. Pode-se dizer que a porosidade da matriz é responsável pelo armazenamento dos hidrocarbonetos, enquanto que as fraturas proporcionam caminhos viáveis para o transporte dos mesmos nos poços de perfuração.



Figura 2.4: reservatório superficial de petróleo de Wytch Farm, na Inglaterra, formado por rocha arenítica

O objetivo da exploração de hidrocarbonetos em reservatórios fraturados é encontrar áreas de fraturamento intenso. Em geral, estas áreas não são visíveis superficialmente e, portanto, devem ser localizadas através de métodos de detecção específicos. O tamanho do reservatório também é um ponto chave na questão da viabilidade econômica. Os hidrocarbonetos armazenados nas fraturas em si tendem a se esgotar rapidamente. Portanto, é fundamental que a matriz possua alta porosidade para favorecer a instalação de poços de extração.

É importante conhecer a orientação das fraturas, pois uma das maneiras de aumentar a eficiência na produção é realizar perfurações orientadas. Por exemplo, no caso de fraturas paralelas, as redes de fluxo são pouco conectadas. Poços perfurados perpendicularmente às fraturas garantem melhor produtividade.

Outro item importante a compreender diz respeito à permeabilidade da fratura e sua dependência da pressão nos poros. A extração de fluidos pode reduzir as pressões *in situ* nos

poros, levando ao fechamento das fraturas, gerando uma redução significativa na eficácia da permeabilidade do sistema.

### 2.3.2 Reservatórios geotermiais

A maioria dos sistemas geotérmico-hidrotermais para obtenção de energia é encontrada em maciços rochosos fraturados (figura 2.5). O sucesso dos esforços neste campo de exploração depende em grande parte da localização de fraturas extensas, falhas ou zonas de fratura que controlam a circulação de fluidos subterrâneos. Ao contrário dos reservatórios de petróleo, os sistemas geotérmicos são muitas vezes localizados em rochas de baixa porosidade.

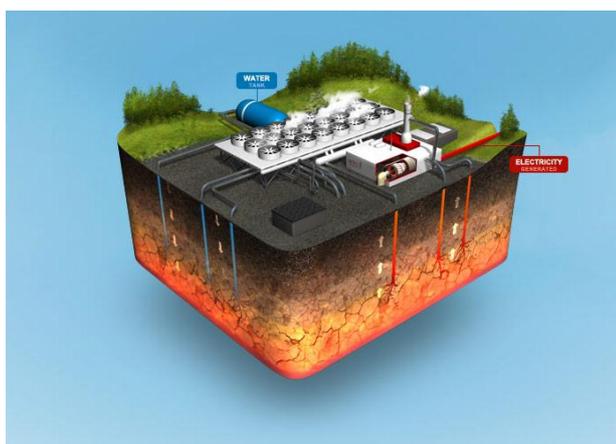


Figura 2.5: usina geotermal para produção de energia elétrica

As fraturas proporcionam canais para o fluxo do fluido através da rocha. Estes fluidos extraem o calor armazenado na matriz das rochas profundas. Este calor pode ser "extraído" mediante bombeamento desses fluidos para a superfície através de perfurações. A tecnologia para localizar e caracterizar fraturas em ambientes geotérmicos fraturados não está ainda bem desenvolvida.

Em reservatórios hidrotermais as taxas a que o vapor pode ser produzido ou que os fluidos podem ser reinjetados são dependentes das aberturas das fraturas e da conexão hidráulica entre elas. Se a transmissividade, taxa na qual o fluido é transmitido através de uma fratura, é baixa, a operação comercial pode ser economicamente inviável devido à baixa produção de fluido ou ao alto custo da injeção de fluidos residuais para dentro do reservatório a uma

pressão elevada. Por outro lado, transmissividades altas, em zonas de grandes fraturas, altamente conectadas podem proporcionar “curtos-circuitos” para a recarga, ou seja, os fluidos reinjetados irão escoar rapidamente pela matriz rochosa não absorvendo calor.

### **2.3.3 Reservatórios de suprimento de água**

Os problemas de abastecimento de água em rochas fraturadas são semelhantes aos do petróleo ou de reservatórios geotérmicos. Contudo, os projetos de abastecimento de água geralmente não demandam o alto custo financeiro necessário para implantação de poços de extração de petróleo ou para aproveitamento de energia geotérmica. Os poços de abastecimento de água são frequentemente localizados por tentativa e erro através da perfuração em zonas de fraturas. Diversos poços podem ser perfurados até que uma região produtora de água seja encontrada.

A previsão de um rendimento sustentável para aquíferos deve levar em conta o efeito das fraturas no fluxo da água. O cálculo dos rendimentos sustentáveis requer uma compreensão do equilíbrio da água para o aquífero. As fraturas podem desempenhar um papel importante neste equilíbrio, porque elas controlam a recarga e a descarga do aquífero.

Podem se distinguir dois tipos de aquíferos. O primeiro, chamado de aquífero de fraturas é formado em rochas ígneas ou metamórficas, que tipicamente tendem a apresentar fraturas. O segundo é chamado de aquífero poroso, pois ocorre em materiais de origem sedimentar, cuja principal característica é a grande e homogênea porosidade, que permite a água escoar em qualquer direção.

### **2.3.4 Reservatórios para deposição de resíduos**

A necessidade de eliminar resíduos tóxicos na terra tem levado à consideração de rochas fraturadas como depósitos de eliminação. Portanto, uma criteriosa análise deve ser realizada, pois instalações mal projetadas podem liberar contaminantes no subsolo. No entanto, a caracterização das camadas subterrâneas é complexa, devido à dificuldade em determinar a

localização de fraturas subsuperficiais e predizer o transporte de contaminantes através deste possível sistema de fraturas interconectadas.

Em alguns casos, os contaminantes são injetados no subsolo por meio de poços de descarte. Tipicamente, os resíduos são injetados abaixo de uma camada impermeável confinante que fornece uma barreira à migração ascendente dos resíduos. Fraturas nestas camadas confinantes podem proporcionar caminhos para a migração dos contaminantes em direção à superfície, comprometendo o funcionamento do depósito. Além do mais, a injeção de resíduos no subsolo à alta pressão pode fraturar a camada impermeável, criando novas vias a migração ascendente de contaminantes. Os aquíferos são particularmente sensíveis à contaminação devido ao movimento rápido e um tanto quanto imprevisível dos contaminantes através das fraturas.

Grande preocupação quanto ao armazenamento subterrâneo concerne na questão dos resíduos nucleares altamente tóxicos e radioativos, como o combustível gasto em reatores nucleares. Em todo o mundo, os meios geológicos estão sendo considerados como locais de armazenamento ou depósitos para a eliminação de longo prazo ou permanente dos resíduos nucleares. Os depósitos permanentes devem isolar este lixo por dezenas de milhares de anos considerando as meias-vidas longas dos elementos.

Neste contexto, a água subterrânea é o único mecanismo importante para a fuga de resíduos radioativos de um depósito além de, obviamente, a ação do homem. Assim, as fraturas podem desempenhar um papel chave no movimento das águas subterrâneas para um depósito.

Em vista dos pontos citados acima, o conceito geral de armazenamento de resíduos é o de desenvolver depósitos em rochas relativamente íntegras, a fim de isolar o resíduo de zonas de fraturas condutoras. O problema principal é localizar e caracterizar as principais regiões fraturadas, sem realizar perfurações exploratórias, que por si só já constituem potenciais vias de fuga.

### **2.3.5 Mineração**

Inúmeros problemas no setor de mineração estão diretamente relacionados ao fluxo dos fluidos através das fraturas nas rochas. A falta de compreensão sobre o escoamento ao longo

das mesmas e as mudanças nas condições de escoamento induzidas pela extração podem impedir seriamente as operações de mineração. As atividades mais influenciadas pela ação da água incluem a lixiviação, a eliminação de resíduos da mina, a drenagem de minas subterrâneas e ainda a estabilidade estrutural destas.

### 2.3.6 Outras estruturas subterrâneas

As fraturas governam a estabilidade das encostas rochosas (figura 2.6), pois a maioria das falhas típicas das rochas, geralmente pode ser associada com fraturas isoladas ou ainda com regiões intensamente fraturadas. Estas são zonas de fraqueza e, portanto, são menos resistentes que a rocha intacta à deformação e à falha por cisalhamento e tração. A presença de água contribui negativamente quanto à estabilidade do maciço, pois facilita o deslizamento dos blocos.



Figura 2.6: deslizamento de blocos em encostas rochosas

Fraturas oferecem riscos às fundações de estruturas e ainda podem afetar a estabilidade em barragens e nos taludes de contenção dos reservatórios de superfície. A escavação de túneis e cavernas subterrâneas é dependente do comportamento dos meios rochosos fraturados, já que a presença de água subterrânea afeta diretamente a estabilidade no avanço da escavação, além de impactar no projeto das estruturas de suporte dos blocos de rocha. Por fim, as fraturas podem também servir como condutos para gases tóxicos e explosivos em túneis e minas.

### 3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ABORDAGEM MICROMECAÂNICA

Basicamente, a Teoria de Homogeneização fornece à ciência dos materiais ferramentas teóricas úteis para formular um modelo representativo que simule o comportamento de um meio heterogêneo através da proposição de um material homogêneo equivalente (também chamado de efetivo). A hipótese da homogeneidade permite que sejam empregados os métodos de análise tradicionais válidos na mecânica dos meios contínuos. A determinação do meio equivalente é obtida a partir de informações disponíveis no nível do comportamento dos constituintes do material heterogêneo, assim como a morfologia da microestrutura, permitindo encontrar as chamadas propriedades homogeneizadas (ou efetivas), ou seja, as características relevantes para a escala considerada. O conteúdo exposto a seguir é baseado no trabalho de Zaoui (2002), que descreve de maneira concisa os princípios da Teoria de Homogeneização.

O problema da transição da microescala para a macroescala, no ponto de vista da predição do comportamento mecânico dos materiais, tem sido interesse de muitas pesquisas durante várias décadas. A microescala tratada aqui se refere à constituição heterogênea dos materiais considerados e a consequente falta de homogeneidade associada às suas características mecânicas, cuja definição é de extrema importância à Engenharia.

Enquanto os resultados preliminares neste campo foram obtidos muito cedo, como a “Lei das misturas” (também chamada de estimativa de Voigt), de 1889, assim como a estimativa de Reuss, de 1929, as bases das técnicas de homogeneização atuais surgiram apenas nos últimos quarenta anos. A motivação para este avanço diz respeito a dois aspectos particulares.

O primeiro é originado na conformação dos metais, a partir da necessidade de alguns cientistas dos materiais em prever o comportamento dos policristais, como o modelo Sachs (1928), bem como o popular modelo de Taylor (1938). O segundo aspecto é decorrente do desenvolvimento dos primeiros materiais compósitos que, progressivamente, motivaram um novo interesse nesta área de pesquisa, principalmente para elasticidade linear, com base na mecânica do contínuo. Os conceitos de volume elementar representativo – VER, com condições de contorno adequadas e de meio homogêneo equivalente – MHE foram definidos e poderosas abordagens variacionais foram aplicadas, a partir das quais limites rigorosos, ao

invés de estimativas aproximadas, foram derivados. Ao mesmo tempo, as estimativas iniciais de Voigt, Reuss e Taylor foram reavaliadas como limites, considerando que foi dada uma solução para o problema elástico da inclusão em um meio infinito, abrindo caminho para estimativas melhoradas. Pode-se dizer que, desde o início dos anos sessenta, as principais bases da chamada “micromecânica dos meios contínuos” são fundamentadas.

Novos resultados no campo da elasticidade linear foram continuamente desenvolvidos desde este período, com menção especial ao refinamento dos limites, associados a uma melhor descrição morfológica e de teorias completas para os meios com uma estrutura periódica, como os trabalhos de Bensoussan et al. (1978), Sanches-Palencia (1981) e Suquet (1987). Ainda assim, é possível considerar que os trabalhos desenvolvidos nos últimos 30 anos se concentram na micromecânica não linear.

Apesar de significativos avanços nesta área, muitos problemas permanecem sem solução até hoje, especialmente para as leis constitutivas que não derivam de um potencial termodinâmico. Outras importantes descobertas foram promovidas pelo tratamento numérico na abordagem multiescala.

A técnica clássica de homogeneização visa substituir um corpo heterogêneo por um homogêneo fictício, que se comporta globalmente da mesma maneira. A micromecânica dos meios contínuos é principalmente interessada em materiais estatisticamente homogêneos, para os quais é possível definir um volume elementar representativo e um meio homogêneo efetivo, que são equivalentes um para o outro do ponto de vista mecânico (figura 3.1). Isto significa que as suas respostas gerais para qualquer carga mecânica devem ser idênticas.

Em outras palavras, em um corpo constituído por este material homogêneo fictício, o MHE deve ser tal que, os campos de tensão e deformações  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X})$  e  $\underline{\underline{E}}(\underline{X})$  derivados na macroescala na solução do problema de contorno sejam os valores médios, através do VER centrado em  $\underline{X}$ , das tensões e das deformações locais  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ , que teriam sido obtidas na microescala se as heterogeneidades microestruturais pudessem ter sido contabilizadas no cálculo (ZAOUI, 2002).

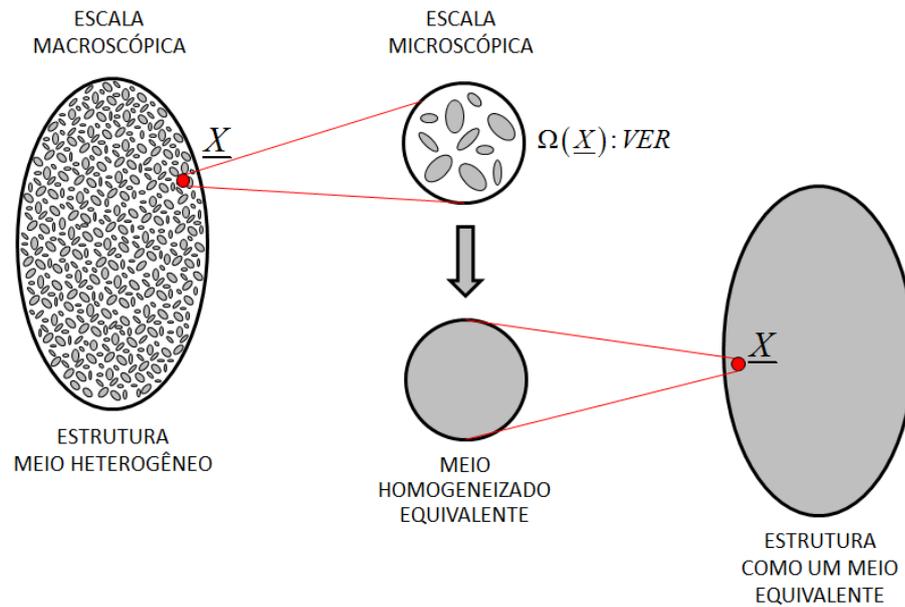


Figura 3.1: esquema fundamental da Teoria de Homogeneização

A validade da técnica de homogeneização depende fundamentalmente da clara separação de escalas. Para que esta afirmação seja respeitada, o VER deve obedecer a limites quanto as suas dimensões características. Estas restrições estão detalhadas no item 3.1.

É importante, neste momento, estabelecer uma diferença básica entre os meios heterogêneos, normalmente separados em dois grupos. O primeiro trata de materiais cuja microestrutura pode ser descrita completamente. Esta situação é típica de meios com uma microestrutura periódica, onde se admite que, globalmente, o material é composto por unidades elementares que se repetem com certo ordenamento espacial. Nestes materiais, as abordagens determinísticas, semelhantes àquelas usadas para resolver problemas de valores de contorno clássicos da mecânica do contínuo, foram desenvolvidas dentro de uma estrutura matemática rigorosa, recorrendo ao uso da chamada célula unitária representativa – CUR (detalhada na seção 3.1). No segundo grupo, estão os materiais heterogêneos, de microestrutura aleatória, onde uma abordagem estatística é necessária (ZAOUI, 2002).

Resumindo, Nemat-Nasser e Hori (1999) destacam que a determinação das propriedades efetivas de meios heterogêneos pode ser obtida analiticamente através de duas metodologias:

- a) **Teoria dos Campos Médios:** esta teoria é baseada no fato de que as propriedades mecânicas efetivas medidas em experimentos são relações entre as médias volumétricas da tensão e da deformação de amostras microscopicamente heterogêneas. Assim, os macrocampos são definidos como

as médias de volume dos correspondentes microcampos, e as propriedades efetivas são determinadas como as relações entre os microcampos médios;

- b) **Teoria Matemática de Homogeneização (Homogeneização Assintótica):** esta teoria estabelece relações matemáticas entre os microcampos e os macrocampos, usando um método da perturbação multiescala. As propriedades efetivas então, naturalmente, surgem como consequências dessas relações, sem depender de medidas físicas específicas.

Nemat-Nasser e Hori (1999) apresentam ainda uma lista de referências relacionadas com a Teoria dos Campos Médios, como os trabalhos de Hill (1963) e Mura (1987) e também sobre a Teoria Matemática de Homogeneização, onde se pode citar os trabalhos de Sanchez-Palencia (1981) e Bakhvalov e Panasenko (1984).

A aplicação do procedimento de homogeneização parte da especificação das fases que compõem o meio heterogêneo, considerando suas características geométricas e mecânicas. Em seguida, busca-se uma descrição estatística da distribuição espacial (morfologia) das fases, em função das frações volumétricas. Muitas vezes, esta distribuição espacial das fases não pode ser completamente determinada. Consequentemente, sem hipóteses adequadas ou aproximações, a lei constitutiva não pode ser determinada (ZAOUI, 2002).

Em outras palavras, para uma dada descrição do VER, a solução do chamado problema de localização (ou concentração) não pode, em geral, ser encontrada. Este problema de localização está focado no modelo mecânico de interação entre as fases e na obtenção dos campos de tensão e deformação locais no VER para o conhecimento das propriedades macroscópicas.

Em virtude das dificuldades citadas acima, pode-se então proceder ao longo de dois caminhos: ou se faz suposições e aproximações adicionais, a fim de se obter algumas estimativas para o comportamento geral, ou é necessário que se avalie limites para as propriedades mecânicas em geral.

Essas estimativas são mais ou menos pertinentes de acordo com a adequação das suposições admitidas. Os limites são obtidos, considerando todos os MHE's, que são consistentes com a escassa informação disponível sobre a distribuição das fases, o que permite calcular as propriedades extremas. Isto pode ser feito usando abordagens variacionais que tratam dos campos de tensão e deformação admissíveis, isto é, campos de deformações compatíveis ou

de tensões equilibradas, obedecendo às condições de contorno de deslocamento ou tensão sobre o VER, respectivamente (ZAOUI, 2002).

Pode-se afirmar que o chamado problema de localização é um problema de valor de contorno, mas onde as condições detalhadas sobre a fronteira não são conhecidas. Assim, este problema é primeiro transformado em um mais simples, assumindo condições de contorno homogêneas no VER (HILL, 1963; 1967; HASHIN, 1983).

Como forma de simplificar a representação matemática que será demonstrada nos itens a seguir, adotam-se neste trabalho, as seguintes convenções de notação:

- a)  $\underline{x}$  : tensor de primeira ordem (vetor);
- b)  $\underline{\underline{x}}$  : tensor de segunda ordem;
- c)  $\underline{\underline{\underline{X}}}$  : tensor de quarta ordem.

### 3.1 VOLUME ELEMENTAR REPRESENTATIVO – VER

O volume elementar representativo (VER) é uma porção do volume do material heterogêneo que possibilita expressar o comportamento global do mesmo. O VER é uma parte muito pequena da estrutura macroscópica e estatisticamente descreve o material, como mostrado nas figuras 3.2 e 3.3. O seu tamanho característico é, portanto, reduzido em comparação com o da estrutura, mas grande em comparação com as heterogeneidades. O VER deve ser pequeno o suficiente para ser considerado um ponto material do corpo na macroescala e grande o suficiente para representar uma média dos processos na microescala.

O VER constitui uma parte do material, sobre a qual podem ser efetuadas pequenas translações sem que ocorram significativas alterações das propriedades nele definidas. As propriedades homogeneizadas de um material heterogêneo são obtidas através da relação entre os valores médios das variáveis de campo dentro do VER.

Em se tratando de materiais com microestrutura periódica, o VER será formado pela menor célula unitária representativa (CUR), também chamada de célula de base, que o descreve (figura 3.2). A ideia da teoria dos meios periódicos é que a informação fundamental sobre as

propriedades físicas dos componentes e da morfologia da microestrutura pode ser capturada pela célula elementar. Um modelo para o material periódico real pode ser obtido através do conjunto de células elementares dispostas de forma ordenada.

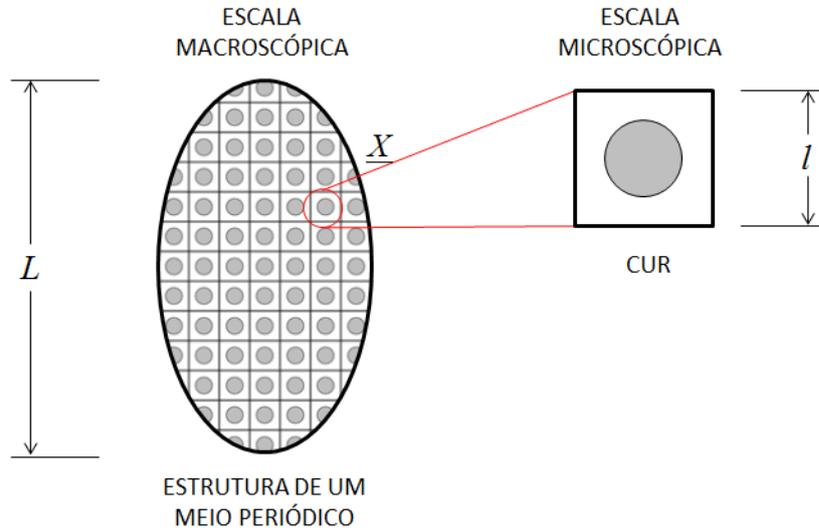


Figura 3.2: célula unitária representativa (CUR) de um meio periódico

Para os materiais com microestrutura aleatória, o VER deve ser definido de modo a conter informações suficientes dos diferentes constituintes (figura 3.3), para garantir um meio homogêneo estatisticamente representativo (OSTOJA-STARZEWSKI, 2006).

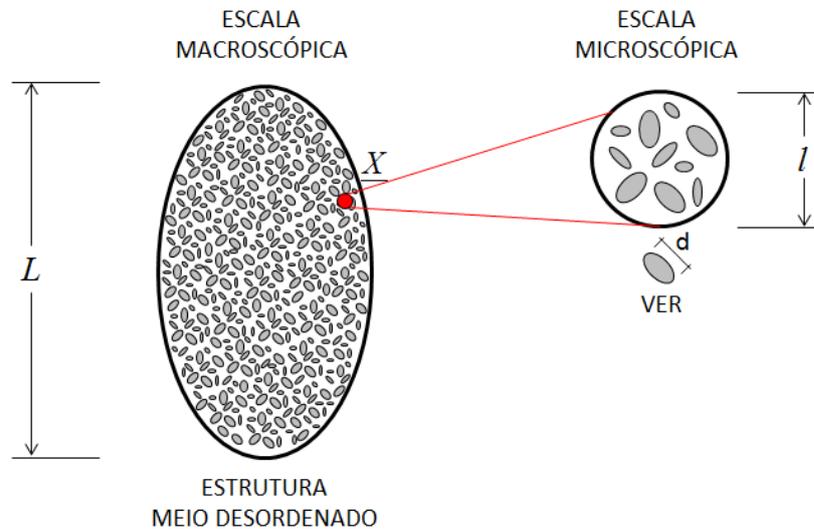


Figura 3.3: detalhe do VER para um meio desordenado

A escolha do VER deve satisfazer uma clara separação de escalas. No caso de um meio aleatório, três diferentes comprimentos característicos devem ser destacados: um comprimento  $L$  descrevendo o tamanho característico do meio heterogêneo; um comprimento  $l$  característico do VER e ainda um comprimento característico  $d$  do tamanho das heterogeneidades. Para que o processo de homogeneização seja válido, estes comprimentos devem satisfazer as seguintes condições (DORMIEUX et al., 2006):

- a)  $l \ll L$ : o tamanho do VER deve ser pequeno em relação ao da estrutura, para garantir que o material equivalente homogeneizado, definido sob a forma macroscópica forme um meio contínuo, no qual as ferramentas tradicionais de diferenciação e integração possam ser aplicadas, permitindo a determinação dos campos de tensões e deformações;
- b)  $l \gg d$ : o tamanho das heterogeneidades deve ser pequeno em relação à dimensão do VER. Essa condição garante que o VER é representativo estatisticamente das partículas em nível microscópico e, portanto, garante confiabilidade às propriedades obtidas no processo de homogeneização.

Em um meio periódico, o tamanho das heterogeneidades não é importante. A escolha do VER adequado deve apenas garantir que a dimensão característica da célula unitária  $l$  seja muito menor que a dimensão  $L$  do material heterogêneo ( $l \ll L$ ).

No âmbito dos meios porosos, algumas particularidades sobre o VER devem ser mencionadas. Na escala macroscópica, o VER é caracterizado por um vetor posição  $\underline{X}$  (a magnitude da variação de  $\underline{X}$  é da ordem de  $L$ ). Um meio contínuo poroso é formado por uma fase sólida, possivelmente heterogênea e ainda uma ou mais fases fluidas. A teoria poromecânica na escala macro aborda esta heterogeneidade típica de materiais porosos, considerando cada uma das fases como uma partícula macroscópica. Logo, todas elas se encontram no mesmo ponto  $\underline{X}$ . Em outras palavras, a partir de um ponto de vista macroscópico, o VER é considerado como a sobreposição das partículas no tempo e no espaço.

De outra forma, uma abordagem poromecânica baseada na escala microscópica considera explicitamente a estrutura heterogênea do VER. A fase sólida e as demais fases fluidas individualmente são descritas como domínios separados do VER. Logo, é requerido um refinamento da descrição geométrica, isto é, uma mudança de escala na análise. Na escala microscópica, o vetor de posição é agora indicado por  $\underline{x}$ , e a ordem de magnitude da variação

de  $\underline{x}$  é proporcional ao tamanho  $l$  do VER. Portanto, dependendo de  $\underline{x}$ , a partícula microscópica pertence à fase sólida ou a uma fase fluida.

A própria existência de um VER é um elemento chave para as teorias micro ou macroporomecânicas, embora com importância diferente para cada caso. Em uma abordagem puramente macroscópica, a existência de um VER deve ser postulada de modo que as leis macroscópicas constitutivas derivadas experimentalmente ou teoricamente sejam representativas da resposta deste VER a diferentes carregamentos.

Resumindo, o princípio da abordagem micromecânica consiste em substituir o experimento real ao qual uma amostra representativa de material pode ser submetida, por um raciocínio matemático sobre o VER, considerado como um elemento heterogêneo com condições de contorno adequadas. Assim, o objetivo da análise micromecânica é derivar a resposta macroscópica da amostra do material a partir da avaliação microscópica de suas fases (DORMIEUX et al., 2006).

Os geomateriais, assim como os demais meios porosos são tipicamente materiais de geometria desordenada. No entanto, em algumas situações, é útil modelar suas microestruturas no contexto dos meios periódicos.

### 3.2 REGRAS DAS MÉDIAS

Normalmente, no processo de avaliação das propriedades efetivas de materiais heterogêneos, aproximam-se as quantidades físicas representativas do comportamento macroscópico do material através de relações entre médias, as quais conduzem a campos médios volumétricos calculados no VER ou na CUR. No caso particular de análises puramente mecânicas, as referidas quantidades físicas relacionam as médias volumétricas de tensão e de deformação (DORMIEUX et al, 2006). Em geral, as quantidades médias são determinadas pela expressão (3.1), onde  $\Omega$  é o volume de material contido na porção representativa:

$$\langle \cdot \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot d\Omega \quad (3.1)$$

A hipótese da separação bem definida de escalas determina que as flutuações nos campos de tensão e deformação na microescala influenciam o comportamento na escala maior através apenas das médias sobre o volume. Por outro lado, os gradientes de campos de tensão e deformação na macroescala não são significativos na escala menor, pois localmente estes campos parecem ser constantes e podem ser descritos em termos de tensões ou deformações aplicadas uniformemente. Assim, estas afirmações podem ser formalmente escritas como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} + \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \quad (3.2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} + \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \quad (3.3)$$

com  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) d\Omega = 0$  e  $\langle \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) d\Omega = 0$ , onde:

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ : microcampos de tensão e deformação;

$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega}$  e  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$ : macrocampos de tensão e deformação;

$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x})$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x})$ : flutuações microscópicas dos campos na microescala.

Considerando um elemento de volume ( $\Omega$ ) para um material não homogêneo, que seja suficientemente grande, que não contenha gradientes significativos na sua composição e que não demonstre variações importantes nas cargas aplicadas, o tensor de deformações macroscópico  $\underline{\underline{E}}$  é dado pela média espacial do tensor de deformações microscópico  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ :

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) d\Omega \quad (3.4)$$

O mesmo pode ser afirmado para a relação entre os campos de tensão  $\underline{\underline{\Sigma}}$  e  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  definidos, respectivamente, na macro e na microescala:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \, d\Omega \quad (3.5)$$

### 3.3 LEMA DE HILL

Considerando  $\underline{\underline{\xi}}(\underline{x})$  um campo de deslocamento cinematicamente admissível e  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  um campo de tensões estaticamente admissível, pode-se afirmar que a média no volume do trabalho virtual realizado pelos campos de tensão e deformação dentro do VER, isto é, na escala microscópica, é igual ao trabalho macroscópico. Tal condição é conhecida como lema de Hill, ou ainda como teorema da energia média, e é expresso matematicamente através da equação:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (3.6)$$

O lema de Hill possui grande importância nas teorias micromecânicas, pois ele permite outra interpretação ao problema de homogeneização. O meio homogêneo equivalente obtido no processo pode ser compreendido como energeticamente idêntico ao material de microestrutura heterogênea. A condição de Hill descreve a equivalência energética entre as duas escalas e é válido tanto para meios desordenados quanto periódicos e independente da solicitação aplicada no VER.

### 3.4 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO EM ELASTICIDADE

O trabalho realizado pela tensão é, em geral, dependente do caminho de deformação. Um material é idealmente elástico quando, sob condições isotérmicas, o corpo recupera sua forma original após a remoção completa das forças que causam a deformação. Para os materiais elásticos, a tensão de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  não depende do caminho de deformação, e o estado de tensão na configuração atual é determinado exclusivamente pelo estado de deformação.

A técnica de homogeneização consiste na solução de um problema de valores de contorno sobre o VER (problema de localização), para encontrar relações entre as médias das variáveis envolvidas. Em geral, não se tem conhecimento sobre tensões e deformações na microescala. A grande vantagem da metodologia é estabelecer a conexão entre os macrocampos e os microcampos das variáveis envolvidas. Assim, é possível obter informações sobre os esforços na microestrutura, objetivando compreender os fenômenos que ocorrem nesta escala.

### 3.4.1 Deformação homogênea aplicada no contorno do VER

Considera-se um elemento composto por um material heterogêneo elástico linear em estado natural, ou seja, na ausência de campos de tensão ou deformação no estado inicial. Assim, o comportamento deste material é regido pelas seguintes leis constitutivas:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \end{cases} \quad (3.7)$$

onde:

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ : tensor das tensões de Cauchy;

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ : tensor das deformações linearizado;

$\mathbb{C}(\underline{x})$ : tensor dos módulos elásticos;

$\mathbb{S}(\underline{x})$ : tensor de compliância.

A relação entre os tensores  $\mathbb{C}(\underline{x})$  e  $\mathbb{S}(\underline{x})$  é dada pela equação a seguir, onde  $\mathbb{I}$  expressa o tensor identidade de quarta ordem:

$$\mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) = \mathbb{I} \quad (3.8)$$

Para estabelecer a relação entre o comportamento nas duas escalas diferentes é necessário definir um carregamento aplicado sobre o VER a partir de grandezas macroscópicas. Um exemplo seria impor um deslocamento do tipo  $\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$  no contorno  $\partial\Omega$  do volume  $\Omega$  ocupado pelo VER (figura 3.4).  $\underline{E}$  representa a deformação macroscópica e  $\underline{\xi}$  o campo de deslocamentos na escala microscópica. Supondo nulas as forças de volume, a solitação aplicada sobre o VER é então:

$$\begin{cases} \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \text{div } \underline{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (3.9)$$

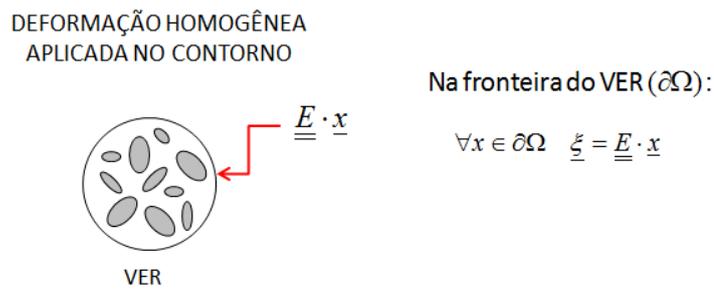


Figura 3.4: deformação homogênea imposta no contorno do VER

A relação entre deslocamento e deformação, no contexto da hipótese das transformações infinitesimais, é dada pela seguinte expressão:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi}) = \text{Sim}(\nabla \underline{\xi}) \quad (3.10)$$

Onde o símbolo  $\nabla$  representa o operador gradiente e o índice  $^T$  denota a operação de transposição do tensor.

O problema da estrutura, na escala microscópica se resume a:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) & (\Omega) \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.11)$$

O problema linear demonstrado acima possui unicidade de solução. O campo de deformação  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  associado ao campo de deslocamento depende linearmente da deformação macroscópica aplicada  $\underline{\underline{E}}$ . Esta propriedade é classicamente expressa através do conceito do tensor de localização das deformações ( $\underline{\underline{A}}$ ). Logo:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.12)$$

$\underline{\underline{A}}$  representa um tensor de quarta ordem que estabelece a ligação entre as deformações macro e microscópicas. Comparando as expressões (3.4) e (3.12), é possível afirmar que:

$$\langle \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \rangle = \underline{\underline{I}} \quad (3.13)$$

O tensor  $\underline{\underline{A}}$  possui simetria nas componentes do tipo  $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$ , mas a simetria dos índices  $(ij)$  e  $(kl)$  não é, geralmente, satisfeita.

A solução do problema de homogeneização é baseada no conhecimento do tensor de localização  $\underline{\underline{A}}$ . Considerando a deformação  $\underline{\underline{E}}$  aplicada no contorno do VER, o comportamento elástico homogeneizado é obtido através das relações (3.5), (3.12) e da lei de comportamento (3.7). Portanto:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle_{\Omega} \quad (3.14)$$

Como a deformação é homogênea, ela pode ser extraída da integral das médias sobre o volume. Assim:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C} : \underline{\underline{\Delta}} \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} \quad (3.15)$$

A expressão (3.15) é normalmente escrita da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad (3.16)$$

onde:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \underline{\underline{\Delta}} \rangle_{\Omega} \quad (3.17)$$

A expressão (3.16) descreve a lei de comportamento macroscópica do meio homogeneizado elástico linear, caracterizado pelo tensor dos módulos elásticos macroscópicos homogeneizados  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . É importante salientar que o tensor de elasticidade  $\mathbb{C}$  é variável de acordo com os constituintes do VER. Por exemplo, em um material poroso, formado por uma matriz elástica e pelos poros, o tensor  $\mathbb{C}$  é definido da seguinte forma:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}(\underline{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}^m & \text{se } \underline{x} \in \text{matriz} \\ \mathbb{C}^p = 0 & \text{se } \underline{x} \in \text{poros} \end{cases} \quad (3.18)$$

O tensor dos módulos elásticos é simétrico. É uma decorrência das características do problema elástico. A simetria das tensões garante que  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ . A simetria das deformações determina que  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . Por fim, como a forma da energia de deformação é quadrática, pode-se dizer que  $C_{ijkl} = C_{klij}$ . Portanto, é possível demonstrar que  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  também respeita estas condições de simetria. Substituindo (3.16) na expressão  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}$ :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad (3.19)$$

Considerando o Lema de Hill, dado em (3.6), o termo do lado esquerdo da equação (3.19) equivale a  $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$ , logo:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{E}} : {}^T \mathbb{A} : \mathbb{C} : \mathbb{A} : \underline{\underline{E}} \rangle = \underline{\underline{E}} : \langle {}^T \mathbb{A} : \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (3.20)$$

Comparando as expressões (3.19) e (3.20), a simetria do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  se torna clara, pois o mesmo pode ser escrito da forma (SUQUET, 1987):

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle {}^T \mathbb{A} : \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle_{\Omega} \quad (3.21)$$

### 3.4.2 Tensão homogênea aplicada no contorno do VER

Considera-se agora o VER submetido a uma tensão homogênea aplicada no contorno (figura 3.5). A condição atribuída é limitada a relação fundamental  $\underline{T}^d = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$ , onde  $\underline{T}^d$  representa o vetor tensão imposto sobre  $\partial\Omega$ ,  $\underline{n}$  é o vetor normal à superfície e  $\underline{\underline{\Sigma}}$  é o já mencionado tensor de Cauchy para as tensões macroscópicas. Em forma matemática, a solicitação aplicada sobre o VER é definida como:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) & (\partial\Omega) \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (3.22)$$

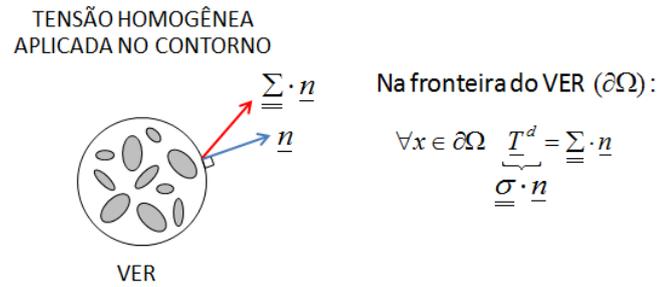


Figura 3.5: tensão homogênea imposta no contorno do VER

Assim o problema elástico sobre o VER se resume a:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{C}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) & (\Omega) \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.23)$$

De maneira análoga ao caso do item anterior, a relação entre os campos é dada através do tensor de localização das tensões  $\mathbb{B}$ . Ele mantém as mesmas propriedades de  $\mathbb{A}$ , ou seja,  $\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I}$  e  $B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk}$ .

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{B}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.24)$$

Novamente, a solução do problema de homogeneização é baseada no conhecimento do tensor de localização  $\mathbb{B}$ . Portanto:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.25)$$

A expressão (3.23) é normalmente escrita da seguinte forma:

$$\underline{\underline{E}} = \mathbb{S}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.26)$$

onde:

$$\mathbb{S}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} \quad (3.27)$$

A expressão (3.24) representa a lei de comportamento macroscópica do meio homogeneizado elástico linear, caracterizado pelo tensor dos módulos de flexibilidade  $\mathbb{S}^{\text{hom}}$ , que mantém as condições de simetria típica dos problemas elásticos. De modo análogo ao item anterior, substituindo (3.25) na relação  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}$ :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.28)$$

Novamente, considerando o Lema de Hill, dado em (3.6), o termo do lado esquerdo da equação (3.28) equivale a  $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$ , logo:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{\Sigma}} : {}^T \mathbb{B} : \mathbb{S} : \mathbb{B} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle {}^T \mathbb{B} : \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.29)$$

A partir da igualdade de (3.28) e (3.29), a simetria do tensor  $\mathbb{S}^{\text{hom}}$  também se torna clara, já que o mesmo pode ser escrito como:

$$\mathbb{S}^{\text{hom}} = \langle {}^T \mathbb{B} : \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} \quad (3.30)$$

Outra forma de resolver os problemas elásticos associados ao VER consiste na utilização de uma abordagem através do princípio da energia complementar mínima, cujos resultados são idênticos aos já anteriormente apresentados.

Garantindo-se uma separação de escalas definida ( $d \ll l$ ), há equivalência entre as duas abordagens, ou seja, o carregamento aplicado no VER não interfere no resultado do processo

de homogeneização. Esta equivalência é estabelecida por Hill (1967) e Mandel (1972), na forma:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbb{S}^{\text{hom}} = \mathbb{I} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{d}{l}\right)^3\right) \quad (3.31)$$

ou seja:

$$\mathbb{S}^{\text{hom}} \approx \left(\mathbb{C}^{\text{hom}}\right)^{-1} \quad \text{para} \quad \frac{d}{l} \ll 1 \quad (3.32)$$

### 3.4.3 Meios periódicos

Nos meios periódicos, a abordagem é muito semelhante ao já apresentado nos itens anteriores. A diferença consiste em algumas considerações adicionais que um meio periódico impõe com relação às condições de contorno.

Supõe-se novamente, que o meio possui comportamento elástico e que ele é formado por uma microestrutura periódica, definida a partir de uma célula unitária  $C$ . Nesta situação, o problema de localização é agora definido sobre  $C$  e não mais sobre o VER. A uma deformação  $\underline{\underline{E}}$  imposta sobre o contorno da célula ( $\partial C$ ), associa-se a tensão correspondente da forma:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{\xi}}' & \text{com } \underline{\underline{\xi}}' \text{ periódico} & (\partial C) \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 & & (C) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} & \text{antiperiódico} & (\partial C) \end{cases} \quad (3.33)$$

Na primeira expressão de (3.33),  $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}}$  representa um deslocamento devido a uma deformação homogênea, enquanto  $\underline{\underline{\xi}}'$  é uma perturbação periódica. Novamente,  $\underline{\underline{n}}$  é o vetor normal ao contorno de  $C$ . Uma determinada quantidade aplicada sobre  $\partial C$  é dita antiperiódica se

apresenta valores com sinais diferentes em dois pontos  $\underline{x}$  e  $\underline{x}'$  geometricamente opostos pela periodicidade (figura 3.6).  $\underline{x}$  e  $\underline{x}'$  são ditos homólogos por periodicidade ( $\underline{n} = -\underline{n}'$ ).

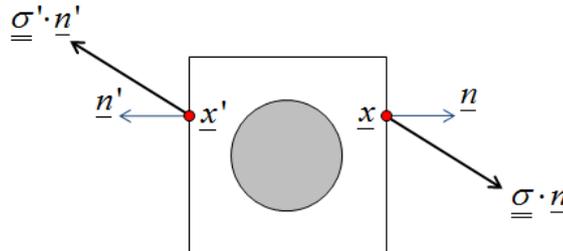


Figura 3.6: condições de contorno periódicas na célula unitária  $C$

A um campo de deslocamento  $\underline{\xi}$  cinematicamente admissível com  $\underline{E}$ , de acordo com a primeira relação de (3.33), se associa um campo de deformação linearizado, composto por uma parcela de deformação homogênea  $\underline{E}$  e ainda pela parcela de deformação periódica  $\underline{\varepsilon}'$ :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{E} + \underline{\varepsilon}' \quad (3.34)$$

onde  $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi})$  e  $\underline{\varepsilon}' = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi}' + {}^T \nabla \underline{\xi}')$ .

Em função da periodicidade de  $\underline{\xi}'$ , é possível demonstrar que o campo de deformações sobre  $C$  verifica a relação:

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E} + \langle \underline{\varepsilon}' \rangle = \underline{E} \quad (3.35)$$

uma vez que  $\langle \underline{\varepsilon}' \rangle = \frac{1}{|C|} \int_{\partial C} \underline{\xi}' \otimes \underline{n} \, dS = 0$ , pois os valores de  $\underline{\xi}'$  nos pontos periodicamente opostos possuem mesmo módulo, mas com sinais contrários e, portanto, são anulados na resolução da integral. O símbolo  $\otimes$  denota o produto tensorial.

Da mesma forma, um campo de tensões microscópico  $\underline{\sigma}$  definido sobre  $C$ , é dito estaticamente admissível, se verifica a equação de equilíbrio e a condição de antiperiodicidade

dadas pelas duas últimas expressões em (3.33). A este campo de tensões, se associa o tensor de tensões macroscópicas  $\underline{\underline{\Sigma}}$  novamente pela relação das médias. Para este tipo de carregamento, o Lema de Hill é também válido, ou seja:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (3.36)$$

onde  $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{|C|} \int_{\partial C} \underline{\underline{\xi}}' \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \, dS = 0$ , pois novamente a condição de periodicidade ao longo de  $\partial C$  indica que os valores de  $\underline{\underline{\xi}}'$  são iguais nos pontos opostos, enquanto que os valores de  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$  são opostos nestes mesmos pontos.

Assim, o problema auxiliar sobre a célula de base unitária de um material periódico é escrito como:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{C}(\underline{\underline{x}}) : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{\underline{x}})) & (C) \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = 0 & (C) \\ \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{\xi}}' & (\partial C) \\ \underline{\underline{\xi}}' \text{ periódico} & (\partial C) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ antiperiódico} & (\partial C) \end{cases} \quad (3.37)$$

Como no caso anterior, a célula de base é constituída por um material elástico linear e, portanto, o problema definido em (3.37) é também linear. Assim, é natural definir um tensor  $\mathbb{L}$ , que relaciona as deformações micro e macroscópicas.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{L}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.38)$$

$\mathbb{L}$  é o chamado tensor de localização para casos periódicos, que possui as mesmas propriedades do tensor  $\mathbb{A}$  anteriormente demonstrado. Novamente, a equação de comportamento homogeneizada pode então ser escrita como:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{L} \rangle \quad (3.39)$$

Analogamente, uma abordagem mediante a aplicação de uma tensão homogênea no contorno conduz a resultados idênticos ao caso já apresentado acima e no item 3.4.2. Maiores detalhes sobre estes resultados podem ser obtidos em Zaoui (2002). O importante a destacar é que a diferença de abordagem entre os meios desordenados e periódicos consiste na aplicação correta das condições de contorno sobre o VER ou a CUR. A necessidade de aplicar as condições de periodicidade sobre a CUR pode dificultar a execução de experimentos em laboratórios e até mesmo em análises numéricas. Assim, em alguns casos, é necessário utilizar o conceito de VER até mesmo em meios periódicos, cujas condições de contorno clássicas são de fácil aplicação.

### 3.5 DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE MEIOS HOMOGENEIZADOS

A obtenção das propriedades elásticas homogeneizadas dos materiais heterogêneos é ainda motivo de intensas pesquisas. Diferentes abordagens podem ser empregadas, dependendo das condições sobre a geometria do VER ou da célula unitária. A determinação de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  está baseada em quatro grandes grupos de metodologias:

- a) **soluções analíticas exatas:** são possíveis apenas em meios compósitos com distribuição periódica de fibras e meios com juntas, onde estas são modeladas como interfaces;
- b) **métodos numéricos:** só são aplicáveis quando a geometria do VER é conhecida e ainda assim podem oferecer problemas de modelagem nas condições de contorno nos meios periódicos e dificuldades para geração de distribuições aleatórias em meios desordenados;
- c) **limites variacionais:** são expressões analíticas aproximadas, baseadas em princípios energéticos;
- d) **métodos das estimativas:** são também expressões analíticas aproximadas, baseadas no trabalho desenvolvido por Eshelby (1957).

Nos itens a seguir, são destacadas algumas das teorias clássicas de homogeneização e também algumas das ferramentas mais utilizadas para determinação das propriedades efetivas de meios heterogêneos.

### 3.5.1 Limites variacionais

A resolução do problema de contorno implica em uma série de hipóteses simplificadoras, que levam a diferentes soluções aproximadas, das quais não se conhece a precisão. Assim, é importante estabelecer limites que sirvam de referência para as soluções obtidas na análise do problema de localização. Os limites variacionais representam, a partir de expressões energéticas, estas condições. Eles estabelecem rígidas fronteiras entre as quais as propriedades homogeneizadas devem estar contidas.

#### 3.5.1.1 Limites de Voigt e Reuss

Em um material homogêneo, a aplicação de condições de contorno homogêneas (tensões ou deformações) conduz a campos de tensões e deformações também homogêneos, ou seja, constantes espacialmente. Para um material heterogêneo a aproximação mais simples é, portanto, assumir um dos campos constante, conforme demonstrado nas seções 3.4.1 e 3.4.2.

De acordo com Voigt (1889) as deformações dentro de  $\Omega$  são tratadas como constantes,  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = cte$ . A partir de (3.12), torna-se evidente que  $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ . Portanto, usando (3.17), o tensor de elasticidade homogeneizado é aproximado pela média dos tensores de rigidez dos constituintes do material heterogêneo:

$$\mathbb{C}_{Voigt}^{hom} = \sum_{r=1}^n f^r \mathbb{C}^r \quad (3.40)$$

em que  $r$  indica cada uma das fases que compõem o meio heterogêneo,  $f^r$  descreve a fração volumétrica da fase e  $\mathbb{C}^r$  é o tensor elástico correspondente.

Analogamente, na aproximação devido à Reuss (1929), assume-se um campo de tensão constante  $\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = cte$ . Logo, é válida a igualdade  $\mathbb{B} = \mathbb{I}$ . Portanto, o tensor de flexibilidade homogeneizado é aproximado pela média dos tensores de flexibilidade dos materiais constituintes do material heterogêneo:

$$\mathbb{S}_{Reuss}^{hom} = \sum_{r=1}^n f^r \mathbb{S}^r \quad (3.41)$$

Estes modelos acima apresentados não abordam a geometria das fases no meio heterogêneo, aproximando o comportamento macroscópico de maneira isotrópica. Em muitos casos, a disposição geométrica das fases é usada justamente para conferir determinada propriedade a uma direção específica do material, como no caso dos compósitos. Nestas situações, os limites de Voigt e Reuss não são apropriados para estimar as propriedades elásticas (GROSS; SEELIG, 2006). Para um dado material heterogêneo composto por duas fases elásticas isotrópicas, os módulos volumétrico  $k$  e de cisalhamento  $\mu$  podem ser estimados da seguinte forma:

$$k_{Voigt}^{hom} = \sum_{r=1}^n f^r k^r \quad e \quad \mu_{Voigt}^{hom} = \sum_{r=1}^n f^r \mu^r \quad (3.42)$$

$$k_{Reuss}^{hom^{-1}} = \sum_{r=1}^n f^r / k^r \quad e \quad \mu_{Reuss}^{hom^{-1}} = \sum_{r=1}^n f^r / \mu^r \quad (3.43)$$

onde  $k^r$  e  $\mu^r$  são, respectivamente, os módulos volumétrico e de cisalhamento da fase  $r$ . No caso de uma matriz que contém cavidades (poros) ou fraturas, os limites de Voigt e Reuss são:

$$\mathbb{C}_{Voigt}^{hom} = f^s \mathbb{C}^s \quad e \quad \mathbb{C}_{Reuss}^{hom} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

onde  $f^s$  e  $\mathbb{C}^s$  expressam, respectivamente, a fração volumétrica e o tensor elástico da matriz.

As expressões destacadas em (3.40) e (3.41) são muitas vezes referidas como as regras de misturas. Elas conferem uma solução exata apenas nos casos especiais de matérias dispostos "em paralelo" (Voigt) ou "em série" (Reuss).

Em geral, a suposição de deformações constantes leva a uma violação de equilíbrio local (por exemplo, nas fronteiras de fase). A hipótese de tensão constante impede a compatibilidade de deformação (GROSS; SEELIG, 2006). Apesar destas deficiências óbvias existentes nas aproximações de Voigt e Reuss, é possível demonstrar que elas conduzem a limites para as constantes elásticas efetivas de um material heterogêneo. Para tanto, busca-se a solução de problemas clássicos da mecânica do contínuo, pela aplicação de princípios variacionais, através do teorema da energia potencial mínima. Esta solução pode ser encontrada no trabalho de Gross e Seelig (2006). Portanto, as estimativas de Voigt e Reuss representam limites superior e inferior para as propriedades homogeneizadas, baseados em critérios energéticos. Logo:

$$\mathbb{C}_{Reuss}^{hom} = \langle \mathbb{S} \rangle^{-1} \leq \mathbb{C}^{hom} \leq \langle \mathbb{C} \rangle = \mathbb{C}_{Voigt}^{hom} \quad (3.45)$$

Os limites demonstrados na inequação acima não são precisos, pois proporcionam uma ampla faixa entre seus valores extremos Além disso, inúmeros aspectos relativos às fases são negligenciados, como forma, distribuição e ainda a morfologia de cada fase. As únicas informações empregadas se resumem às frações volumétricas e às propriedades mecânicas de cada constituinte.

### 3.5.1.2 Limites de Hashin e Shtrikman

Os limites desenvolvidos por Hashin e Shtrikman (1962) são também baseados em princípios variacionais, estabelecidos especialmente para materiais heterogêneos, mas resultam em uma faixa mais estreita do que os limites de Reuss e Voigt.

Diferentemente do demonstrado em 3.5.1.1, ao invés de utilizar campos de tensão e deformação uniformes, Hashin e Shtrikman propõem o uso de campos auxiliares adequados, que representam apenas uma variação de uma dada solução de referência. Portanto, o erro

cometido na aproximação possui menor efeito sobre o resultado final. A abordagem variacional empregada conduz a expressão da energia complementar que, quando é maximizada, fornece o limite superior de Hashin-Shtrikman ( $HS^+$ ). Quando é minimizada, ela dispõe o limite inferior ( $HS^-$ ).

Para um material heterogêneo de duas fases composto por uma matriz e por inclusões, com tensores elásticos expressos, respectivamente, por  $\mathbb{C}^m$  e  $\mathbb{C}^i$ , os limites inferior e superior de Hashin-Strikman são escritos como:

$$\mathbb{C}_{HS^-}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^m + f^i \left[ (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m)^{-1} + (1 - f^i) \mathbb{S}^m : (\mathbb{C}^m)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.46)$$

$$\mathbb{C}_{HS^+}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^i + (1 - f^i) \left[ (\mathbb{C}^m - \mathbb{C}^i)^{-1} + f^i \mathbb{S}^i : (\mathbb{C}^i)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.47)$$

onde  $\mathbb{S}^m$  e  $\mathbb{S}^i$  são tensores de Eshelby (abordados na seção 3.5.2) calculados, respectivamente, através das propriedades mecânicas da matriz e da inclusão. Para meios porosos (que possuem cavidades), a formulação apresentada acima ainda possui validade, bastando admitir  $\mathbb{C}^i \rightarrow 0$ .

### 3.5.2 Teoria da inclusão equivalente de Eshelby

Eshelby (1957) desenvolveu uma solução válida para um domínio infinito  $\Omega$  contendo uma inclusão elipsoidal, equação (3.48), definida pelos eixos principais  $a_i$  (figura 3.7). Os resultados obtidos por Eshelby são considerados, provavelmente, como os mais importantes no campo da micromecânica.

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1 \quad (3.48)$$

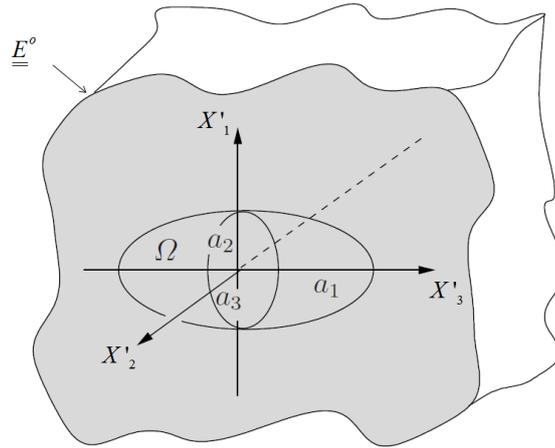


Figura 3.7: inclusão inserida em um meio infinito

Para uma deformação constante  $\underline{\underline{E}}^0$  aplicada no contorno deste meio infinito contendo a inclusão, Eshelby mostrou que, neste caso, a deformação da inclusão é também constante e é definida através da expressão:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_I = \mathbb{A}_E(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}^0 = cte \quad \forall \underline{x} \in I \quad (3.49)$$

O tensor de quarta ordem  $\mathbb{A}_E$  é o denominado tensor de localização de deformações de Eshelby. Ele descreve a relação entre a deformação no interior da inclusão e o carregamento externo representado por  $\underline{\underline{E}}^0$ , definida como:

$$\mathbb{A}_E(\underline{x}) = \langle \mathbb{A}_E \rangle_I = \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^I - \mathbb{C}^0) \right]^{-1} \quad \forall \underline{x} \in I \quad (3.50)$$

$\mathbb{C}^I$  e  $\mathbb{C}^0$  são, respectivamente, os tensores elásticos contendo as propriedades da inclusão e do domínio infinito adjacente.  $\mathbb{P}$  é o chamado tensor de Hill e expressa a dependência do tensor de localização das deformações com a morfologia assumida para a fase caracterizada pelas inclusões incorporadas à matriz. Ele é função da forma e da orientação das inclusões e se relaciona com o denominado tensor de Eshelby  $\mathbb{S}$  através da equação  $\mathbb{S} = \mathbb{P} : \mathbb{C}^0$ .

Expressões dos tensores  $\mathbb{S}$  e  $\mathbb{P}$  para as mais diversas configurações das inclusões podem ser obtidas no trabalho de Mura (1987). Além das características das inclusões, o tensor de Eshelby também depende das propriedades elásticas do meio no qual elas estão inseridas.

Em relação a uma base do tipo  $(e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l)_{i,j,k,l=1,2,3}$ , o tensor de Eshelby é simétrico entre o primeiro e segundo par de índices (isotropia transversal), mas em geral não possui simetria pela troca destes pares, ou seja:

$$\mathbb{S}_{ijkl} = \mathbb{S}_{jkl i} = \mathbb{S}_{ijlk} \quad e \quad \mathbb{S}_{ijkl} \neq \mathbb{S}_{klij} \quad (3.51)$$

### 3.5.3 Estimativas baseadas na solução de Eshelby

O trabalho de Eshelby possibilitou o desenvolvimento de diversos esquemas de estimativas para obtenção do tensor elástico homogeneizado. Nas seções a seguir, são destacadas algumas destas estimativas, considerando que, em todos os casos, o material heterogêneo possui apenas duas fases (matriz e inclusões). Maior atenção é dada ao esquema Mori-Tanaka, utilizado nas aplicações realizadas neste trabalho (seções 7.1 e 7.2).

O procedimento básico das estimativas consiste na escolha do VER para o material, através do qual é determinado um VER auxiliar. Ao longo deste VER auxiliar define-se o problema de localização a ser resolvido, correspondente às hipóteses formuladas pelo esquema de homogeneização empregado (figura 3.8). O resultado desenvolvido por Eshelby estabelece a correspondência mecânica entre VER auxiliar e o meio homogêneo equivalente.

As soluções fundamentais apresentadas por Eshelby permitiram o desenvolvimento de modelos micromecânicos capazes de satisfazer o equilíbrio local e garantir a compatibilidade de deformações. Nas seções a seguir, o material bifásico é formado por uma matriz homogênea descrita pelo tensor elástico  $\mathbb{C}^m$  e pelas inclusões, aproximadas como heterogeneidades elipsoidais caracterizadas pelo tensor de elasticidade  $\mathbb{C}^i$ . Novamente,  $\mathbb{P}$  expressa o tensor de Hill para as inclusões incorporadas à matriz. Ele pode ser encontrado no trabalho de Mura (1987) para as mais diferentes configurações destas inclusões.

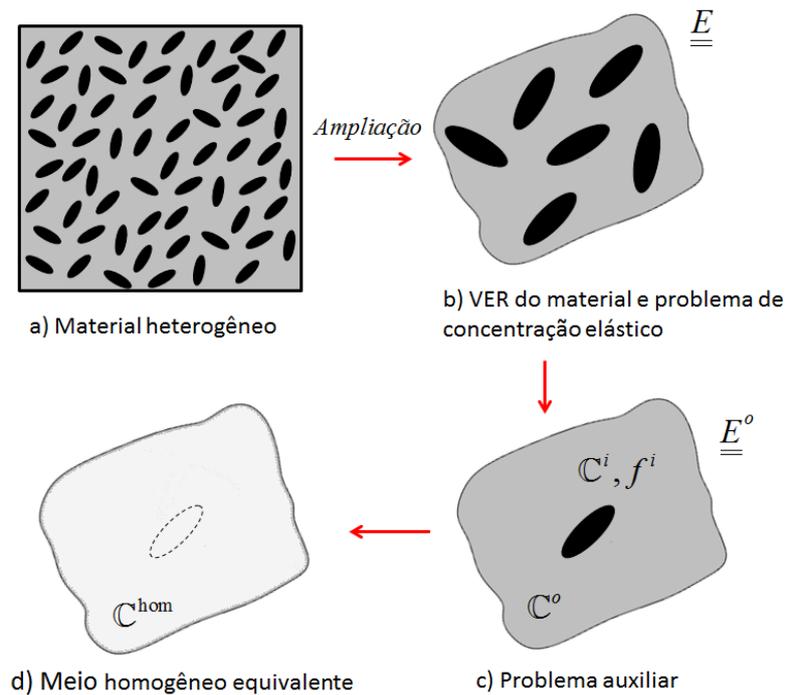


Figura 3.8: processo de homogeneização baseado na solução de Eshelby

### 3.5.3.1. Estimativa Diluída

Neste caso, as heterogeneidades estão distribuídas na matriz homogênea, mas a interação entre elas é desprezada, assim como a interação com a fronteira do VER. Logo, cada heterogeneidade é definida estando localizada em um domínio infinito sujeito a um campo uniforme de deformação  $\underline{\underline{E}}^0 = \underline{\underline{E}}$  (figura 3.9).

A hipótese da inexistência de interação é válida quando a dimensão característica das heterogeneidades é pequena em relação a sua distância das demais ou à distância da fronteira do VER, onde o carregamento é aplicado. As soluções obtidas sob estas condições são, em

geral, válidas para pequenas frações volumétricas  $\sum_{i=1}^{n-1} f^i \ll 1$ , ou seja,  $f^m \approx 1$ .

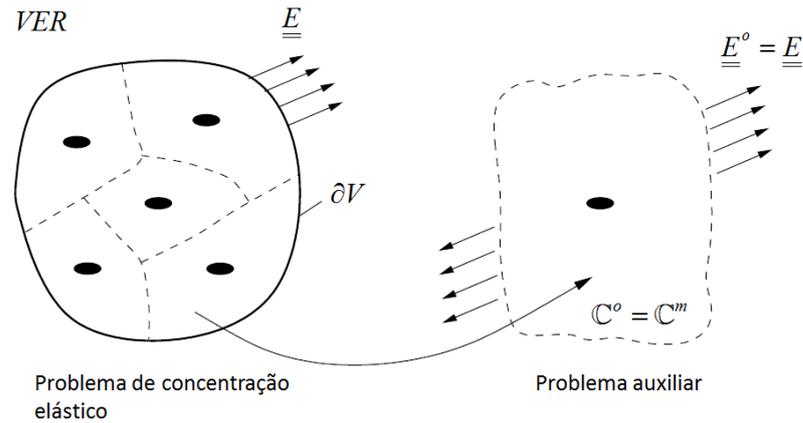


Figura 3.9: esquema da estimativa diluída

Para as heterogeneidades elipsoidais, a deformação no seu interior é constante e dada pelo tensor de concentração de Eshelby, introduzido na seção anterior. Portanto, o tensor de elasticidade efetivo de um material, que contém uma distribuição diluída de heterogeneidades elipsoidais, é escrito como:

$$\mathbb{C}_{dil}^{hom} = \mathbb{C}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) : \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) \right]^{-1} \quad (3.52)$$

Devido à equivalência entre as abordagens com deformação e tensão homogêneas, os resultados dados por (3.52) são válidos independentemente das condições adotadas no contorno.

A estimativa diluída pode, por sua vez, mesmo no caso de um material formado por duas fases isotrópicas, apresentar comportamento anisotrópico devido a, por exemplo, uma dada orientação preferencial das inclusões, cujas características estão tratadas dentro dos tensores de Eshelby e Hill.

### 3.5.3.2 Estimativa Auto-Consistente

Para o caso de desordem perfeita, onde não é possível identificar claramente uma fase matriz, o método auto-consistente foi desenvolvido. Supõe-se que cada inclusão é envolta por uma matriz infinita, definida pelo meio homogeneizado a ser determinado (figura 3.10).

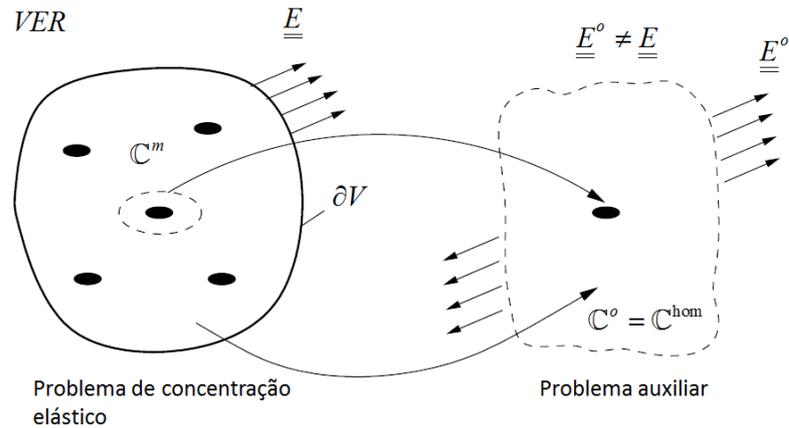


Figura 3.10: esquema da estimativa auto-consistente

Em outras palavras, a solução do respectivo problema de contorno (uma só inclusão submetida ao carregamento  $\underline{\underline{E}}^0$ ) ocorre pela substituição na equação do tensor de concentração das propriedades elásticas do domínio infinito  $\mathbb{C}^0$ , pelas propriedades efetivas a serem calculadas  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . Ou seja, o método auto-consistente representa uma expressão implícita do tensor homogeneizado, na forma:

$$\mathbb{C}_{\text{aut}}^{\text{hom}} = \sum_{i=1}^{n-1} f^i \mathbb{C}^i : \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}_{\text{aut}}^{\text{hom}}) \right]^{-1} : \left\langle \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}_{\text{aut}}^{\text{hom}}) \right]^{-1} \right\rangle \quad (3.53)$$

A expressão acima destaca que, na estimativa, nenhum material desempenha o papel de matriz e, portanto, a interação entre as inclusões é considerada de modo implícito.

Há uma desvantagem do método tratado aqui, pois as hipóteses formuladas implicam na mistura dos níveis macro e microscópicos que, a princípio, devem ser rigorosamente separados. A inclusão, definida apenas na escala micro, é inserida em um meio efetivo definido apenas no nível macroscópico (PASA DUTRA, 2012).

Para compensar esta incoerência, Nemat-Nasser e Hori (1999) propuseram um método mais elaborado chamado esquema auto-consistente generalizado. A inclusão é suposta inserida em uma camada de matriz que, por sua vez, é colocada em um meio de referência infinito (figura 3.11). Deste modo, não apenas as interações entre inclusões são consideradas, mas também a interação entre inclusões e matriz.

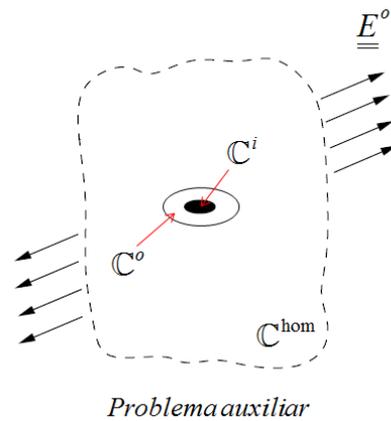


Figura 3.11: esquema da estimativa auto-consistente generalizada

### 3.5.3.3 Esquema Diferencial

No esquema auto-consistente, toda a fração volumétrica de cada fase é inserida na matriz efetiva em uma única etapa. Por outro lado, no esquema diferencial a inserção é dada em uma sucessão de etapas infinitesimais. Assim, a cada passo, um volume infinitesimal  $dV$  da fase que caracteriza as inclusões é inserido na matriz (meio dito infinito). Em uma dada etapa arbitrária, a matriz é caracterizada pelas propriedades efetivas  $\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i)$ , correspondentes à fração volumétrica inserida  $f^i = V^i / V$  (figura 3.12).

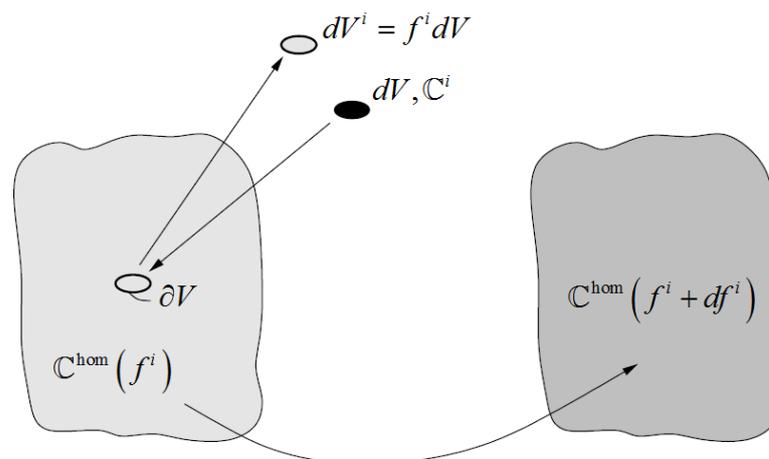


Figura 3.12: esquema da estimativa diferencial

Sabendo que não há variação do volume total  $V$ , cada acréscimo de volume infinitesimal  $dV$  da fase das inclusões corresponde à retirada de mesmo volume de material da matriz efetiva. Logo, a fração volumétrica de heterogeneidade passa a ser  $f^i + df^i$  e o equilíbrio do volume, durante esta etapa é:

$$(f^i + df^i)V = f^iV - f^i dV + dV \rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{df^i}{1 - f^i} \quad (3.54)$$

Considerando a relação do modelo diluído, contando que apenas um volume infinitesimal  $dV$  é inserido, a situação atual fica:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i + df^i) = \mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i) + \frac{dV}{V} [\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i)] : \mathbb{A}[\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i)] \quad (3.55)$$

Fica evidente que o tensor de concentração depende do material da matriz efetiva. Utilizando as relações  $\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i + df^i) = \mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i) + d\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i)$  e (3.54), o esquema diferencial pode ser escrito como a expressão não-linear a seguir:

$$d\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i) = \frac{df^i}{1 - f^i} [\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i)] : \mathbb{A}[\mathbb{C}^{\text{hom}}(f^i)] \quad (3.56)$$

#### 3.5.3.4 Estimativa Mori-Tanaka

Na estimativa diluída apresentada anteriormente, admite-se a hipótese de que, a uma dada distância suficiente de cada inclusão, o carregamento externo constante em deformação  $\underline{\underline{E}}$  prevalece. A partir desta consideração, é possível propor um refinamento deste modelo, de modo a considerar as situações de interação entre as heterogeneidades e validar a aplicação do método em casos contendo maiores frações volumétricas.

O modelo Mori-Tanaka (1973) supõe que, a uma dada distância da heterogeneidade, o campo de deformações da matriz pode ser aproximado pelo campo constante  $\underline{\underline{E}}^0 = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m$ . Assim, o carregamento de cada uma das heterogeneidades é dependente da existência das demais através da média da deformação da matriz  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m$  (Figura 3.13).

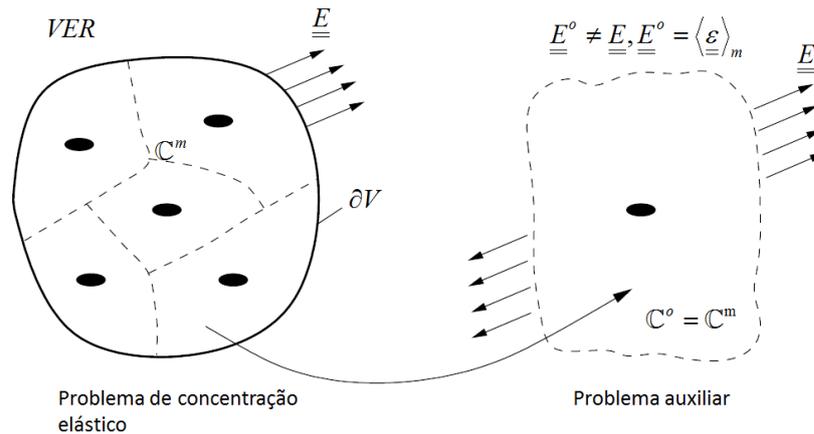


Figura 3.13: esquema da estimativa Mori-Tanaka

Para uma só heterogeneidade incluída em um meio infinito de elasticidade  $\mathbb{C}^m$ , submetida ao carregamento  $\underline{\underline{E}}^0$ , observa-se que o esquema Mori-Tanaka é formalmente equivalente à estimativa diluída e permite, portanto, a aplicação do já citado tensor de concentração que representa a média da deformação na heterogeneidade.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^i = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_i = \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \quad (3.57)$$

Considerando a média das deformações no VER igual à deformação macroscópica, ou seja,  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}$ , a relação entre a deformação aplicada no VER e àquela aplicada no problema auxiliar é dada por:

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left\langle \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) \right]^{-1} \right\rangle : \underline{\underline{E}} \quad (3.58)$$

sendo as constantes elásticas homogeneizadas calculadas por:

$$\mathbb{C}_{mt}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) : \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) \right]^{-1} : \left\langle \left[ \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (3.59)$$

A estimativa Mori-Tanaka é o esquema de homogeneização mais utilizado para materiais compostos por uma matriz com inclusões inseridas no seu interior, principalmente quando a fração volumétrica de inclusões é moderada. O modelo compreende a interação entre as inclusões e dada certa disposição geométrica das heterogeneidades, pode-se gerar uma anisotropia macroscópica.

### 3.5.3.5 Estimativas no âmbito da mecânica dos meios porosos

Para os meios porosos, a estimativa diluída é restrita a uma porosidade infinitesimal, ou seja, casos em que a interação mecânica entre os poros pode ser negligenciada. O esquema diferencial é uma forma de superar essa restrição, representando a interação mecânica entre eles.

A estimativa Mori-Tanaka trata da interação mecânica dos poros, baseada no problema de Eshelby. Portanto, este sistema deverá ser aplicável somente quando a morfologia da microestrutura é aquela onde os poros podem ser considerados como inclusões incorporadas numa matriz sólida.

De outra forma, na situação de uma morfologia desordenada, onde nem a fase sólida, nem o espaço dos poros podem ser considerados como matriz, o uso do esquema auto-consistente permite assumir que cada partícula de uma dada fase (poro ou sólido) reage como se tivesse sido incorporado no meio homogêneo equivalente, que é procurado. Uma descrição detalhada dos métodos das estimativas em meios porosos pode ser obtida em Dormieux et al. (2006).

## 4 POROELASTICIDADE LINEAR

Os maciços rochosos são, por sua natureza, dotados de fraturas e poros que são saturados com uma ou mais fases de fluidos (ar, água, óleo ou gás). Estes fluidos terão uma grande influência sobre o comportamento mecânico do mesmo. As pressões do fluido nos poros originam deformações elásticas macroscópicas no maciço. Logo, a deformação mecânica do conjunto é, por consequência, dependente da pressão dos fluidos. Além disso, o fluxo através da porosidade da rocha, que geralmente ocorre em resposta aos gradientes de poropressão, podem também escoar devido às alterações das tensões macroscópicas, por causas naturais tais como as forças de origem tectônica ou ainda por efeitos causados pela ação do homem, como a perfuração de poços ou demais obras subterrâneas. Destas afirmações, fica evidente que o comportamento mecânico e hidráulico do maciço é totalmente acoplado.

A maioria das análises dos problemas mecânicos em rocha ou de escoamentos subterrâneos ignora este acoplamento. Em geral, os trabalhos sobre os problemas de fluxo na hidrologia, engenharia de petróleo ou geofísica são conduzidos sob o pressuposto de que o maciço é poroso, mas completamente rígido. Da mesma forma, grande parte das análises de mecânica das rochas ignoram os efeitos do fluido pressurizado nas juntas ou então supõem que as pressões podem ser obtidas de forma independente da deformação mecânica. Embora tais suposições sejam muitas vezes aceitáveis, há inúmeras situações nas quais o acoplamento entre a deformação e as pressões originadas nos poros, além do comportamento do fluxo devem obrigatoriamente ser contabilizados (JAEGER et al., 2007).

Este capítulo é dedicado à derivação das equações de estado, por meio do procedimento de mudança de escalas, para um meio poroso saturado, composto por uma fase sólida elástica linear e um espaço poroso saturado por uma única fase fluida. Como já destacado anteriormente, a abordagem micromecânica apresentada a seguir baseia-se na solução de um problema de valor de contorno sobre um VER, que está simultaneamente sujeito a uma condição de deformação uniforme no contorno e ainda de uma pressão do fluido, também uniforme na interface sólido-líquido.

O estudo do comportamento mecânico de meios porosos foi primeiramente formulado por Terzaghi, na década de 1930. Biot (1941) propôs a primeira formulação geral do comportamento reversível de meios porosos em parâmetros definidos na dita escala do Engenheiro. Até hoje, a teoria é Biot ainda representa uma referência na geomecânica. A partir dos conceitos da mecânica dos meios contínuos, Coussy (2004) desenvolveu um quadro termodinâmico para a formulação de equações de comportamento de meios porosos.

Um material poroso, na escala microscópica, pode ser descrito por uma matriz sólida, também chamada de esqueleto, na qual podem existir poros oclusos, e ainda por um espaço formado pelos poros interconectados preenchidos por um fluido, seja líquido ou gasoso. Ele é definido pela sobreposição dos diferentes meios contínuos que interagem entre si. Na escala macroscópica, uma partícula do meio poroso saturado é a superposição de duas partículas localizadas no mesmo ponto geométrico, onde uma partícula pertence ao esqueleto e outra ao fluido (figura 4.1).

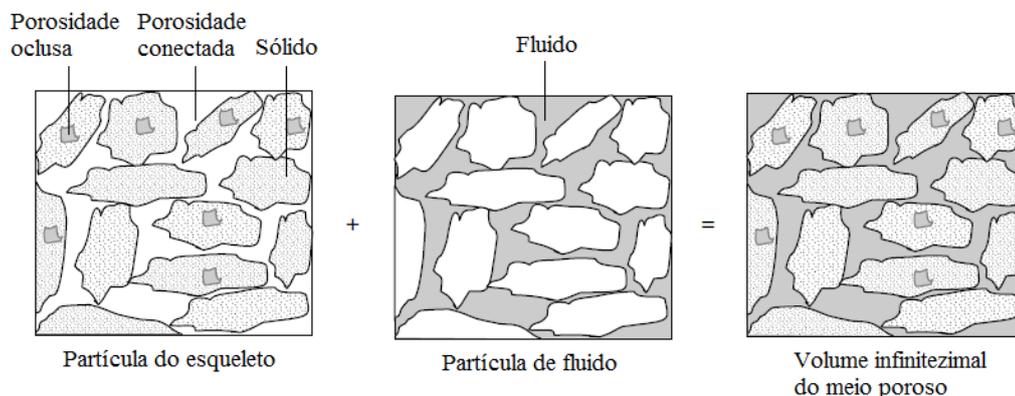


Figura 4.1: meio poroso representado pela superposição dos meios contínuos (COUSSY, 2004)

Esta abordagem provou a sua eficiência na análise de geomateriais e geoestruturas onde, por natureza, não há informações sobre o comportamento local dos componentes, sobre a morfologia dos poros, e mais geralmente, sobre a microestrutura física.

O espaço poroso conectada é aquele no qual o fluido na realidade escoar, cujos pontos são ligados por um caminho inteiramente situado em seu interior, de modo que a fase fluida permanece lá. Pode também ocorrer uma porosidade oclusa na matriz, com poros saturados ou não, mas através dos quais não ocorre infiltração (COUSSY, 2004). A presença de um fluido

no interior do espaço poroso abre o caminho para o estudo de vários tipos de fenômenos físicos, tais como o transporte, a difusão de um soluto e o efeito mecânico deste sobre o esqueleto (BARTHELEMY, 2005).

#### 4.1 CARREGAMENTO APLICADO SOBRE O VER

A teoria micromecânica aqui apresentada está baseada no trabalho de Dormieux et al. (2006) e se encontra dentro dos limites de aplicação da lei de Darcy. Os gradientes de pressões micro e macroscópicas são da mesma ordem de magnitude. Portanto, a variação do campo de pressão microscópicas  $p(\underline{x})$  em torno de sua média  $P(\underline{X})$  no VER  $\Omega$  é insignificante. Desta forma, a interação mecânica entre o fluido e o sólido ao nível microscópico pode ser considerada através de uma pressão uniforme macroscópica, que é aplicada na interface sólido-líquido. Assim, a pressão  $P(\underline{X})$  macroscópica e a deformação macroscópica  $\underline{E}(\underline{X})$  desempenham o papel de carregamentos sobre o VER, de modo que o campo de tensões microscópico  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  em  $\Omega$  depende de  $P(\underline{X})$  e  $\underline{E}(\underline{X})$ . As tensões macroscópicas  $\underline{\Sigma}(\underline{X})$  podem ser determinadas através da regra das médias anteriormente destacada. No que se segue, para fins de simplificação de notação, o vetor posição  $\underline{X}$  na escala macroscópica é omitido. Novamente, a fase sólida é considerada com comportamento elástico linear, representado pelo tensor  $\mathbb{C}^s$ .

Assumindo que a transformação macroscópica do VER é infinitesimal (ou seja, que  $\|\nabla \underline{\xi}\| \ll 1$ ) e que a resposta do VER na escala microscópica também satisfaz as condições de deformação infinitesimal e de pequenos deslocamentos, o VER  $\Omega$ , formado pela fase sólida  $\Omega^s$  e pela fase fluída  $\Omega^f$ , terá as seguintes condições de contorno aplicadas:

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= \underline{E} \cdot \underline{x} && \text{em } \partial\Omega \\ \underline{T} &= -P\underline{n} && \text{em } \partial\Omega^f \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $\underline{\xi}$  denota o campo de deslocamentos microscópicos na fase sólida e  $\underline{n}$  é o vetor unitário normal à superfície.

Admite-se que a massa fluida é capaz de adentrar ou sair do VER através de pequenos canais, que supostamente não tem nenhum efeito sobre o comportamento mecânico geral (figura 4.2).

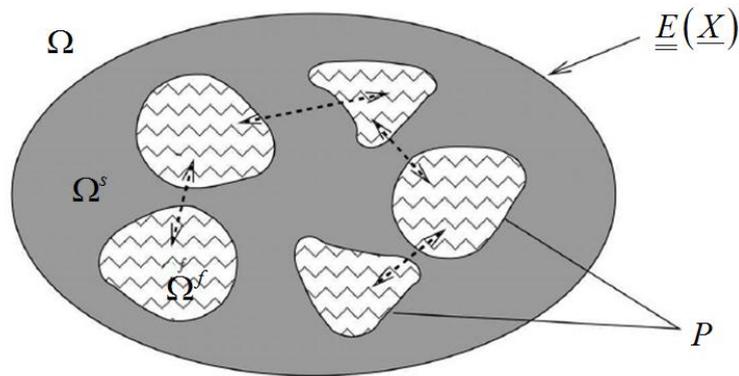


Figura 4.2: VER submetido às condições de contorno (DORMIEUX et al., 2006)

A variação de volume do VER, derivada diretamente de (4.1), é dada por:

$$|\Omega| - |\Omega_0| = \int_{\partial\Omega_0} \underline{\xi} \cdot \underline{n} \, dS = |\Omega_0| \operatorname{tr} \underline{E} \quad (4.2)$$

A denominada porosidade Lagrangeana  $\phi$  é a razão entre o volume ocupado pelo fluido em relação ao volume inicial total do VER  $|\Omega^f| / |\Omega_0|$ .  $\phi$  é diferente da chamada porosidade Euleriana  $\varphi$ , que representa a fração de volume do fluido em relação à configuração atual do VER,  $|\Omega^f| / |\Omega|$ . As duas definições estão relacionadas pela equação de transporte:

$$\phi = (1 + \operatorname{tr} \underline{E}) \varphi \quad (4.3)$$

Nota-se que em condições iniciais,  $\phi_0 = \varphi_0$ . A variação da porosidade Lagrangeana é proporcional à alteração de volume do poro. Esta é sua principal vantagem sobre a porosidade

Euleriana. A variação  $\phi - \phi_0$  da porosidade Lagrangeana é útil para a descrição das mudanças de volume dos poros:

$$\phi - \phi_0 = \frac{|\Omega^f| - |\Omega_0^f|}{|\Omega_0|} \quad (4.4)$$

## 4.2 EQUAÇÕES DE ESTADO HOMOGENEIZADAS

Com base nos pressupostos admitidos na seção anterior, é possível compreender que os campos de tensão e deformação  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  definidos em  $\Omega^s$  são funções lineares dos carregamentos  $\underline{\underline{E}}$  e  $P$ . Como já demonstrado no capítulo 3, esta propriedade pode ser expressa por meio da introdução do tensor de quarta ordem  $\underline{\underline{A}}$ , que considera a deformação local induzida pela deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$ , e o tensor de segunda ordem  $\underline{\underline{A}}'$ , que trata da deformação local induzida pela pressão  $P$ .

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}'(\underline{x}) P \quad (4.5)$$

$\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{A}}'$  podem ser referidos como tensores de concentração. A equação de estado microscópica referente ao comportamento elástico da matriz produz a expressão do campo de tensões microscópico  $\underline{\underline{\sigma}}$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}^s : \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{C}}^s : \underline{\underline{A}}'(\underline{x}) P \quad (4.6)$$

A tensão macroscópica  $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x})$  pode ser obtida mediante a aplicação da regra das médias (3.5) na expressão (4.6):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega_0} = \frac{1}{|\Omega_0|} \left( \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) dV - \int_{\Omega^f} P \underline{\underline{1}} dV \right) = (1 - \varphi_0) \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle^s - P \varphi_0 \underline{\underline{1}} \quad (4.7)$$

Inserindo a expressão (4.7) em (4.6):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}}P \quad (4.8)$$

onde  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  são dados por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = (1 - \varphi_0) \mathbb{C}^s : \langle \underline{\underline{A}} \rangle^s = (1 - \varphi_0) \langle {}^t \underline{\underline{A}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{A}} \rangle^s \quad (4.9)$$

$$\underline{\underline{B}} = \varphi_0 \underline{\underline{1}} + (1 - \varphi_0) \mathbb{C}^s : \langle \underline{\underline{A}} \rangle^s \quad (4.10)$$

A relação (4.8) é a primeira equação de estado macroscópica da poroelasticidade linear. Para  $P = 0$ , é fácil ver que (4.8) se reduz a equação de estado (3.14) determinada anteriormente para o comportamento elástico drenado.

A variação do volume dos poros preenchidos pelo fluido  $\Delta\Omega^f$  está relacionada com o campo de deslocamentos microscópicos  $\underline{\underline{\xi}}$  por:

$$\Delta\Omega^f = - \int_{\partial\Omega^f} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{n}} dS \quad (4.11)$$

Esta mudança no volume de poros  $\Delta\Omega^f$  é proporcional à variação de porosidade Lagrangeana. Portanto, a expressão (4.11), através da sua ligação a  $\underline{\underline{\xi}}$ , implica que  $\phi - \phi_0$  é uma função linear dos parâmetros de carregamento de  $\underline{\underline{E}}$  e  $P$ , isto é:

$$\Delta\Omega^f = |\Omega_0|(\phi - \phi_0) = - \int_{\partial\Omega^f \cup \partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{n}} \, dS + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{n}} \, dS = - \int_{\Omega^s} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \, dV + |\Omega_0| \text{tr} \underline{\underline{E}} \quad (4.12)$$

Finalmente, aplicando (4.5) em (4.12), tem-se a segunda equação de estado em poroelasticidade:

$$\phi - \phi_0 = \frac{P}{M} + \underline{\underline{B}}' : \underline{\underline{E}} \quad (4.13)$$

onde  $M$  e  $\underline{\underline{B}}'$  são dados por:

$$\frac{1}{M} = (1 - \varphi_0) \text{tr} \langle \underline{\underline{A}}' \rangle^s = \underline{\underline{1}} : \mathbb{C}^{s-1} : (\underline{\underline{B}} - \varphi_0 \underline{\underline{1}}) \quad (4.14)$$

$$\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{1}} - (1 - \varphi_0) \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{A}}' \rangle^s \quad (4.15)$$

Dormieux et al. (2006) demonstram que  $\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{B}}$ . Esta condição estabelece a simetria das equações de estado homogeneizadas (4.8) e (4.13). Sendo válido este resultado, será possível determinar um potencial termodinâmico para o comportamento macroscópico de um meio poroso constituído por uma matriz sólida elástica.

Mais uma vez, para  $P = 0$ , o comportamento do meio poroso é reduzido ao de um sólido elástico linear homogêneo definido pelo tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . Logo,  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  representa o tensor dos módulos de elasticidade em condições drenadas. Do mesmo modo, o tensor adimensional  $\underline{\underline{B}}$  nos permite avaliar a variação de volume dos poros induzida sob condições drenadas devido a uma dada deformação macroscópica. Além disso, este tensor de segunda ordem, que é referido como o tensor dos coeficientes de Biot, expressa a tensão macroscópica induzida no meio saturado por um aumento de pressão nos poros sob condições de tensão macroscópicas nulas.

O módulo de Biot  $M$  pode ser utilizado para avaliar a variação de volume dos poros, em consequência de um aumento de pressão. Por fim, relação  $\underline{\underline{\Sigma}} + P\underline{\underline{B}}$  controla a deformação macroscópica. É, portanto, referida como tensão macroscópica efetiva.

O conhecimento do tensor de elasticidade drenado  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  é suficiente para a determinação completa das propriedades poroelásticas. De fato, a combinação de (4.9) e (4.15) conduz a:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{1}} : \mathbb{C}^{s^{-1}} : \mathbb{C}^{\text{hom}} \quad (4.16)$$

Vale lembrar que  $M$  é definido por (4.14). No caso de isotropia local e global, tem-se:

$$\underline{\underline{B}} = b\underline{\underline{1}} \quad \text{com} \quad b = 1 - \frac{k^{\text{hom}}}{k^s} \quad (4.17)$$

e ainda:

$$\frac{1}{M} = \frac{b - \varphi_o}{k^s} + \frac{\varphi_o}{k^f} \quad (4.18)$$

onde  $k^s$ ,  $k^f$  e  $k^{\text{hom}}$  são, respectivamente os módulos volumétricos da fase sólida, do fluido e do meio poroso homogeneizado.

## 5 EQUAÇÕES DO COMPORTAMENTO POROELÁSTICO DE ROCHAS FRATURADAS

As seções a seguir são diretamente inspiradas nos trabalhos desenvolvidos por Dormieux et al. (2002) e Maghous et al. (2013), nos quais os autores abordam o problema dos meios rochosos com descontinuidades aplicando conceitos da micromecânica. O objetivo desta seção é formular o comportamento poroelástico linear de rochas com descontinuidades como um meio homogeneizado, dando ênfase nas especificidades do meio poroso homogeneizado, em relação a um meio poroso normal. Em particular, é discutida a questão relacionada à conexão entre a rigidez drenada macroscópica, o coeficiente de Biot e o tensor de Biot macroscópico.

### 5.1 LEMA DE HILL PARA OS MEIOS COM DESCONTINUIDADES

A presença das juntas ou descontinuidades altera a forma clássica do tensor de Hill destacado no item 3.1. Assim, nesta seção é demonstrada a extensão para o caso proposto, de acordo com o trabalho desenvolvido por Dormieux et al. (2002). Para definição da expressão adequada ao caso em estudo, é necessária a escolha de um VER, denotado por  $\Omega$  na configuração atual e por  $\Omega_0$  na configuração inicial.

Supõe-se que o VER representa estatisticamente o meio rochoso no qual existe uma distribuição discreta de juntas  $\omega = \bigcup_i \omega_i$ , sendo que o tamanho  $d$  das heterogeneidades (juntas) é bastante inferior à dimensão  $l$  característica do VER. Como já salientado anteriormente, a necessidade de respeitar estes limites é a base para validade dos resultados obtidos com a aplicação das técnicas de homogeneização.

A rede de juntas existentes no maciço é formada por juntas longas e curtas. As ditas juntas longas são aquelas que atravessam o VER. As juntas curtas são pequenas se comparadas ao VER, e poderiam ser compreendidas como microfissuras, ou seja, elementos capazes de transferir esforços. A definição do VER implica numa clara separação de escalas. Para o meio

fraturado, isto implica no tamanho das juntas curtas e no espaçamento médio das juntas longas. A matriz rochosa ocupa todo o domínio  $\Omega \setminus \omega$ , onde o símbolo  $\setminus$  representa a diferença do conjunto. Assim, as tensões e deformações são definidas apenas sobre  $\Omega \setminus \omega$  e não sobre o VER inteiro.

Na escala microscópica, cada junta é modelada como uma interface, descrita geometricamente por uma superfície  $\omega_i$ , cuja orientação é definida pelo vetor unitário normal  $\underline{n}$ . Em uma escala ainda menor, a junta deve ser descrita como um volume de espessura finita com limites (superfícies) superior e inferior distintos,  $\omega_i^+$  e  $\omega_i^-$  respectivamente (figura 5.1).

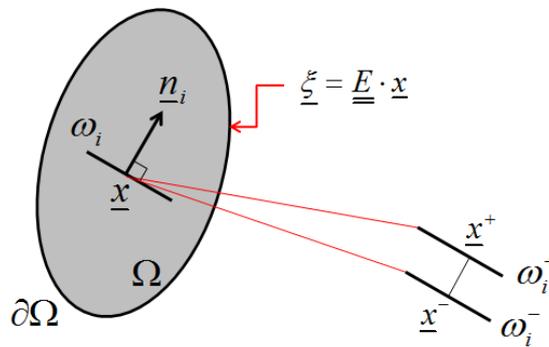


Figura 5.1: VER de um meio rochoso com descontinuidades com o carregamento aplicado e a caracterização da junta

Devido ao deslocamento relativo das superfícies  $\omega_i^+$  e  $\omega_i^-$ , o deslocamento do ponto  $\underline{x}$  não é único. Na escala inferior à microscópica,  $\underline{x}$  é substituído por um segmento paralelo a  $\underline{n}_i = \underline{n}_i(\underline{x})$ , cujos limites são  $\underline{x}^- \in \omega_i^-$  e  $\underline{x}^+ \in \omega_i^+$ . Logo, o deslocamento relativo é dado por:

$$[\underline{\xi}(\underline{x})] = \underline{\xi}(\underline{x}^+) - \underline{\xi}(\underline{x}^-) = \underline{\xi}^+(\underline{x}) - \underline{\xi}^-(\underline{x}) \quad (5.1)$$

Supondo uma deformação homogênea macroscópica  $\underline{E}$  aplicada no contorno  $\partial\Omega$ , do VER, introduz-se o conjunto  $\mathcal{C}$  de campos de deslocamentos  $\underline{\xi}'$  cinematicamente admissíveis com  $\underline{E}$ , que são campos contínuos, diferenciáveis em  $\Omega \setminus \omega$  e respeitam a condição de contorno demonstrada na figura 5.1. Do mesmo modo,  $\mathcal{S}$  denota o conjunto de campos de tensões

estaticamente admissíveis, definidos em  $\Omega$ , satisfazendo a equação de equilíbrio local  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}' = 0$  e a continuidade do vetor tensão  $\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}_i$  na interface com a junta  $\omega_i$ . Para todo  $\underline{\underline{\sigma}}'$  e  $\underline{\underline{\xi}}'$ , é possível estabelecer que:

$$\Omega_v \langle \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\xi}}' \rangle = \int_{\Omega \setminus \omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\xi}}' dV = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}}' \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} dV + \int_{\partial\omega} \underline{T}' \cdot \underline{\underline{\xi}}' dS \quad (5.2)$$

onde  $\underline{\underline{\xi}}'$  é o tensor de deformações linearizado e o vetor tensão  $\underline{T}'$  é definido como:

$$\begin{cases} T'^{++} = -\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}_i & \text{ao longo de } \omega_i^+ \\ T'^{-} = \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}_i & \text{ao longo de } \omega_i^- \end{cases} \quad (5.3)$$

Considerando a deformação homogênea aplicada e a continuidade do vetor tensão  $\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}_i$  ao atravessar a junta  $\omega_i$ , o lema de Hill na forma clássica mostra que:

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}}' \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} dV = \Omega_v \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (5.4)$$

e ainda, que:

$$\int_{\partial\omega_i} \underline{T}' \cdot \underline{\underline{\xi}}' dS = \int_{\omega_i^+} \underline{T}'^{++} \cdot \underline{\underline{\xi}}' dS + \int_{\omega_i^-} \underline{T}'^{-} \cdot \underline{\underline{\xi}}' dS = \int_{\omega_i^+} \underline{T}'^{++} \cdot [\underline{\underline{\xi}}'] dS \quad (5.5)$$

Identificando, na escala do VER, a superfície  $\omega_i$  como  $\omega_i^+$  e introduzindo a notação  $\underline{T}'^{m_i} = \underline{T}'^{-} = -\underline{T}'^{++} = \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}_i$ , pode-se escrever:

$$\int_{\partial\omega} \underline{T}' \cdot \underline{\xi}' \, dS = \int_{\omega} \underline{T}^m \cdot [\underline{\xi}'] \, dS \quad (5.6)$$

onde  $\underline{n} = \underline{n}_i$  ao longo de  $\omega_i$ . A expressão do lema de Hill para meios com descontinuidades é encontrada mediante combinação de (6.2), (6.4) e (6.6):

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle + \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} \underline{T}^m \cdot [\underline{\xi}'] \, dS \quad (5.7)$$

Nota-se que  $\underline{\underline{\Sigma}}$  expressa a tensão macroscópica equilibrada pelos campos de tensões microscópicos. Logo, o trabalho de  $\underline{\underline{\Sigma}}$  na deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$  compreende a contribuição das forças internas dentro da matriz rochosa e também o trabalho desenvolvido pelo vetor tensão agindo na descontinuidade, no deslocamento relativo de seus limites.

Para um dado tensor  $\underline{\underline{a}}$ , simétrico, o campo de tensão uniforme  $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{a}}$  é obviamente estaticamente admissível. Aplicando (5.7) para qualquer valor de  $\underline{\underline{a}}$ , tem-se:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle + \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} [\underline{\xi}'] \otimes^s \underline{n} \, dS \quad (5.8)$$

onde o símbolo  $\otimes^s$  expressa a parte simétrica do produto tensorial. Fisicamente, (5.8) demonstra que a deformação macroscópica é a soma de duas contribuições, referentes à deformação da matriz rochosa e ao deslocamento relativo existente nas descontinuidades.

Como já salientado anteriormente, a equivalência entre as abordagens por tensão ou deformação homogênea no contorno do VER, é implicitamente assumida quando a relação  $d/l$  tende a zero. Do contrário, tal afirmação não pode ser tomada como verdadeira.

## 5.2 FORMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO MACROSCÓPICO PARA O CASO DRENADO

Esta seção segue baseada nos trabalhos de Dormieux et al. (2002) e de Maghous et al. (2013). Assume-se que a matriz rochosa tem caráter linear elástico, com tensor de rigidez  $\mathbb{C}^s$ . O comportamento individual das juntas é presumido como permanecendo linear, considerando a magnitude das deformações consideradas. A rigidez da junta  $\omega_i$ , denominada  $\underline{k}^i$ , se relaciona com o vetor tensão através do deslocamento relativo. Portanto:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \mathbb{C}^s : \underline{\varepsilon} & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \underline{T}^n = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{k} \cdot \left[ \underline{\xi} \right] & \text{ao longo de } \omega \end{cases} \quad (5.9)$$

com  $\underline{n} = \underline{n}_i$  e  $\underline{k} = \underline{k}^i$  ao longo de  $\omega_i$ . A rigidez das juntas é tradicionalmente determinada em laboratórios, em espécimes rochosos contendo apenas uma junta.

Nota-se que a equação de estado da junta demonstra que ela é capaz de transferir esforços. Com esta proposição, os autores estendem o modelo mecânico clássico onde nenhum esforço é transmitido através das descontinuidades, ou seja, onde se teria  $\underline{T} = 0$  ao longo de  $\omega$ .

Na escala adotada no modelo, juntas curtas e longas são tratadas do mesmo modo. São modeladas como interfaces e a deformação associada é descrita pela lei fenomenológica demonstrada na segunda equação em (5.9), relacionando o vetor tensão e o deslocamento relativo.

Segundo os autores, a maior limitação desta abordagem decorre desta lei fenomenológica, pois a relação entre a rigidez da junta com a geometria e as propriedades elásticas da mesma ocorre somente de maneira global. Atualmente, algumas pesquisas têm desenvolvido modelos conceituais com o intuito de formular  $\underline{k}$  explicitamente.

A determinação da equação de estado macroscópica é obtida mediante solução do problema elástico definido no VER, cuja condição de contorno permanece sendo:

$$\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_o \quad (5.10)$$

A solução deste problema é o par  $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}})$  em  $\mathfrak{S}$  e  $\mathcal{C}$ . Claramente  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{\xi}}$  dependem do carregamento  $\underline{\underline{E}}$ . Tal propriedade é geralmente expressa pelo tensor de concentração das deformações  $\mathbb{A}$ , já destacado no capítulo 3. Neste contexto,  $\mathbb{A}$  expressa a conexão entre as deformações microscópicas na matriz rochosa e as deformações macroscópicas aplicadas no VER. Além do mais, como  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}$ , é possível escrever:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^s : \mathbb{A} : \underline{\underline{E}} \quad (5.11)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}^s : \mathbb{A} \rangle \quad (5.12)$$

Do mesmo modo, os tensores de concentração são introduzidos para relacionar as componentes do deslocamento relativo com o carregamento imposto  $\underline{\underline{E}}$ . Supondo que o par de vetores  $(\underline{t}_i, \underline{t}'_i)$  componha o plano ortonormal ao plano tangente a  $\omega_i$  no ponto  $\underline{x}$  (figura 5.2), as componentes normal e tangencial de  $[\underline{\underline{\xi}}]$  são expressas como:

$$[\underline{\underline{\xi}}] = (\underline{a}^n : \underline{\underline{E}}) \underline{n}_i + (\underline{a}^t : \underline{\underline{E}}) \underline{t}_i + (\underline{a}'^t : \underline{\underline{E}}) \underline{t}'_i \quad \text{ao longo de } \omega \quad (5.13)$$

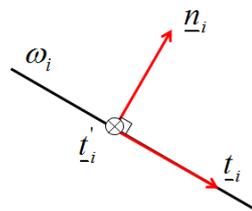


Figura 5.2: eixos locais para a junta  $\omega_i$

com  $\underline{n} = \underline{n}_i$ ,  $\underline{t} = \underline{t}_i$  e  $\underline{t}' = \underline{t}'_i$  ao longo de  $\omega_i$ . Os tensores  $\underline{\underline{a}}^n$ ,  $\underline{\underline{a}}^t$  e  $\underline{\underline{a}}^{t'}$  são tensores concentração para os deslocamentos relativos normais e tangenciais de  $\underline{\xi}$ .

Como demonstrado em (5.8), a presença das juntas invalida a regra das médias dada em (3.4) para este VER. Portanto, a média do tensor  $\mathbb{A}$  não é igual ao tensor identidade de quarta ordem  $\mathbb{I}$ . Esta diferença decorre da existência de uma parcela de deformação macroscópica nas juntas. A anisotropia das propriedades elásticas dos maciços fraturados está diretamente relacionada com a orientação destas juntas. Como  $\langle \mathbb{A} \rangle \neq \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  não é igual ao tensor  $\mathbb{C}^s$  da matriz. Assim, utilizando a expressão (5.13), pode-se escrever:

$$\left[ \underline{\xi} \right]^s \otimes \underline{n} = \left( \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{\underline{a}}^n + \underline{t} \otimes \underline{n} \otimes \underline{\underline{a}}^t + \underline{t}' \otimes \underline{n} \otimes \underline{\underline{a}}^{t'} \right) : \underline{E} \quad (5.14)$$

Combinando as expressões (5.8) e (5.14), tem-se:

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I} - \frac{1}{\Omega_o} \int_{\omega} \left( \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{\underline{a}}^n + \underline{t} \otimes \underline{n} \otimes \underline{\underline{a}}^t + \underline{t}' \otimes \underline{n} \otimes \underline{\underline{a}}^{t'} \right) dS \quad (5.15)$$

Mais uma vez, o símbolo  $\otimes^s$  expressa a parte simétrica do produto tensorial. A equação (5.15) demonstra claramente a diferença entre o tensor de concentração das deformações e o tensor identidade de quarta ordem, decorrente da existência das descontinuidades.

A solução do problema para o caso drenado só fica completa com a determinação de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  ou, de modo equivalente, dos tensores  $\underline{\underline{a}}^n$ ,  $\underline{\underline{a}}^t$  e  $\underline{\underline{a}}^{t'}$ . Considerando que o VER contém juntas curtas e longas, algumas considerações precisam ser feitas sobre a obtenção de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ .

As estimativas para a rigidez global, baseadas no método da inclusão equivalente de Eshelby, apresentadas anteriormente, só são aplicáveis para o caso de juntas curtas, ou seja, elementos que não atravessam o VER. Outra forma de determinar  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  seria a aplicação da abordagem

variacional, como o limite de Reuss para rigidez macroscópica, que teoricamente conduz ao valor inferior da rigidez global.

As juntas curtas devem ser tratadas como inclusões incorporadas dentro da matriz rochosa. Seguindo a teoria de Eshelby, elas são modeladas como elipsoides oblongos. A interação com a vizinhança pode ser abordada pela adoção de um esquema de homogeneização adequado como, por exemplo, Mori-Tanaka.

Para a solução do problema da existência de juntas longas, que atravessam o VER, podem-se destacar os trabalhos desenvolvidos por de Buhan e Maghous (1997) e Maghous et al. (2000; 2008), nos quais são apresentadas expressões explícitas para  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , inclusive para comportamento não linear dos elementos constituintes do maciço. Casos mais gerais em meios rochosos requerem a aplicação de métodos numéricos específicos para obter estimativas de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , como o método dos elementos finitos.

### 5.3 FORMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO MACROSCÓPICO PARA O CASO DE UMA REDE DE JUNTAS SATURADAS

Supõe-se agora uma rede juntas interconectadas, preenchidas com um fluido numa pressão  $p$ , admitida como uniforme no VER. O comportamento elástico da matriz rochosa permanece o mesmo adotado na seção anterior, ou seja:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{em } \Omega / \omega \quad (5.16)$$

O comportamento das juntas é substituído pela formulação poroelástica, com o intuito de considerar o efeito da pressão do fluido na relação entre o vetor tensão agindo na junta e o correspondente deslocamento relativo. No caso da junta, as equações de estado poroelásticas são:

$$\begin{cases} \underline{T}^n = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{k} \cdot [\underline{\xi}] + \underline{T}^p \\ \phi = \frac{p}{m} + \alpha [\underline{\xi}] \cdot \underline{n} \end{cases} \quad \text{ao longo de } \omega = \cup_i \omega_i \quad (5.17)$$

onde  $\alpha = \alpha_i$ ,  $m = m_i$  e  $\underline{T}^p = -\alpha_i p \underline{n}$ , ao longo de  $\omega_i$ .

O termo escalar  $\alpha_i$  representa o coeficiente de Biot para a junta  $\omega_i$ , modelada como um meio poroso generalizado. Portanto, o deslocamento relativo  $[\underline{\xi}]$ , que expressa a deformação da junta, é controlado pelo vetor tensão efetivo  $\underline{T}^n + \alpha p \underline{n}$ . A segunda equação de estado em (5.17) apresenta a variação da porosidade  $\phi$  para uma pressão  $p$  do fluido em relação ao deslocamento relativo da junta  $[\underline{\xi}]$ . O escalar  $m_i$  é o módulo de Biot para uma junta  $\omega_i$ .

O carregamento usado neste caso é composto por dois parâmetros: a deformação macroscópica  $\underline{E}$  e a pressão do fluido  $p$ . A solução do problema em  $\Omega \setminus \omega$ , denotada por (P), é o campo de tensões  $\underline{\sigma}$  em  $\mathfrak{S}$  e o campo de deslocamentos  $\underline{\xi}$  em  $\mathcal{C}$ . Estes campos se relacionam através da relação constitutiva dos meios que compõem o maciço, ou seja, as equações dadas em (5.16) e (5.17).

A linearidade no comportamento dos materiais possibilita a aplicação do princípio da superposição no problema. Isto é feito para separar (P) em dois problemas complementares, denominados (P1) e (P2), conforme demonstrado na figura 5.3. Os carregamentos sobre eles são:

- a)  $(\underline{E}, p = 0)$ , em (P1);
- b)  $(\underline{E} = 0, p)$ , em (P2).

O problema complementar (P1) descreve a situação de um meio rochoso fraturado, na ausência de fluidos, ou seja, é justamente a situação apresentada na seção anterior. No entanto, (P2) corresponde a uma rede de juntas pressurizadas, tendo a deformação macroscópica impedida.

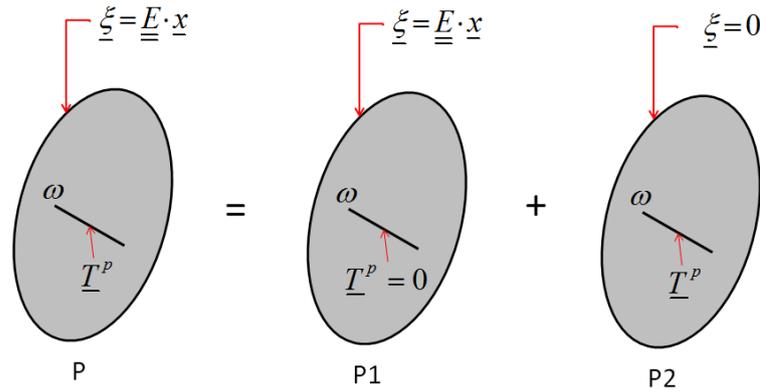


Figura 5.3: decomposição do problema (P) em dois problemas elementares (P1 e P2)

Adotam-se os índices 1 e 2 para referenciar os campos de deslocamentos, deformações e tensões no VER aos respectivos aos problemas (P1) e (P2), portanto,  $(\underline{\xi}_1, \underline{\varepsilon}_1, \underline{\sigma}_1)$  e  $(\underline{\xi}_2, \underline{\varepsilon}_2, \underline{\sigma}_2)$ . A solução do problema (P) é diretamente obtida pela soma dos campos, ou seja,  $\underline{\xi} = \underline{\xi}_1 + \underline{\xi}_2$ ,  $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_1 + \underline{\varepsilon}_2$  e  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2$ .

### 5.3.1 Definição da primeira equação de estado

As relações do problema (P1) já foram analisadas na seção anterior, logo:

$$\underline{\Sigma}_1 = \langle \underline{\sigma}_1 \rangle = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{E} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}^s : \mathbb{A} \rangle \quad (5.18)$$

onde o tensor concentração de deformações  $\mathbb{A}$  relaciona  $\underline{\varepsilon}_1$  com o carregamento  $\underline{E}$  em (P1):

$$\underline{\varepsilon}_1 = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{E} \quad (5.19)$$

Já em (P2),  $\underline{\Sigma}_2 = \langle \underline{\sigma}_2 \rangle$  constitui a tensão macroscópica associada à pressão intersticial  $p$  do fluido na junta que é necessária para evitar qualquer deformação macroscópica. Para avaliar

$\underline{\underline{\sigma}}_2$ , utiliza-se duas vezes o lema de Hill (5.7). Primeiramente, ele é aplicado com o par

$$\left( \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}}_2, \underline{\underline{\xi}}' = \underline{\underline{\xi}}_1 \right):$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}_2 : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_2 \rangle : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_2 : \underline{\underline{\varepsilon}}_1 \rangle + \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} [\underline{\underline{\xi}}_1] \cdot \left( \underline{\underline{k}} \cdot [\underline{\underline{\xi}}_2] + \underline{\underline{T}}^p \right) dS \quad (5.20)$$

Agora, aplica-se o lema de Hill ao par  $\left( \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}}_1, \underline{\underline{\xi}}' = \underline{\underline{\xi}}_2 \right)$ :

$$0 = \langle \underline{\underline{\sigma}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_2 \rangle + \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} [\underline{\underline{\xi}}_2] \cdot \underline{\underline{k}} \cdot [\underline{\underline{\xi}}_1] dS \quad (5.21)$$

O zero no lado esquerdo da equação (5.21) aparece porque o campo de deslocamentos  $\underline{\underline{\xi}}_2$  do problema (P2) é cinematicamente admissível com a deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}} = 0$ . As equações de estado da matriz rochosa,  $\underline{\underline{\sigma}}_1 = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}_1$  e  $\underline{\underline{\sigma}}_2 = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}_2$  garantem a igualdade:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_2 : \underline{\underline{\varepsilon}}_1 \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_2 \rangle \quad (5.22)$$

A combinação das expressões (5.20), (5.21) e (5.22) permite escrever:

$$\underline{\underline{\Sigma}}_2 : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} \underline{\underline{T}}^p \cdot [\underline{\underline{\xi}}_1] dS \quad (5.23)$$

Inserindo a expressão de  $\underline{\underline{T}}^p = -\alpha p n_i$  em (5.23) e substituindo  $[\underline{\underline{\xi}}_1]$  pela equação (5.13) do caso drenado (P1), tem-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}}_2 : \underline{\underline{E}} = -p \frac{1}{\Omega_\omega} \int \alpha \underline{\underline{a}}^n dS : \underline{\underline{E}} \quad (5.24)$$

Como a tensão macroscópica do problema (P2) é independente de  $\underline{\underline{E}}$ , a equação (5.24) fica:

$$\underline{\underline{\Sigma}}_2 = -p \underline{\underline{B}} \quad (5.25)$$

com:

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{\Omega_\omega} \int \alpha \underline{\underline{a}}^n dS \quad (5.26)$$

Assim, a primeira equação de estado resulta da soma das expressões (5.18) e (5.25):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_1 + \underline{\underline{\Sigma}}_2 = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} - p \underline{\underline{B}} \quad (5.27)$$

De maneira similar a um meio poroso comum, segundo a teoria de poroelasticidade, a deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$  é governada por uma tensão efetiva de Biot  $\underline{\underline{\Sigma}} + p \underline{\underline{B}}$ . Pode-se entender o tensor  $\underline{\underline{B}}$  como o tensor dos coeficientes de Biot para o meio com descontinuidades. A anisotropia das juntas é expressa através do tensor de concentração normal  $\underline{\underline{a}}^n$ . A diferença fundamental de um meio rochoso fraturado e um meio poroso comum consiste na ligação do tensor de Biot  $\underline{\underline{B}}$  com o tensor elástico homogeneizado  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ .

Para um meio poroso comum, a clássica relação  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}} : \left[ \mathbb{I} - (1 - \phi') \mathbb{C}^{s^{-1}} : \mathbb{C}^{\text{hom}} \right]$ , onde  $\phi'$  é a porosidade do meio, demonstra que o tensor de Biot macroscópico está inteiramente definido, uma vez que o tensor elástico homogeneizado foi determinado. Para o meio com descontinuidades, segue da expressão (5.16) que:

$$\underline{\underline{1}} : (\mathbb{I} - \langle \mathbb{A} \rangle) = \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} \underline{\underline{a}}^n dS \quad (5.28)$$

Lembrando que  $\mathbb{A}$  pode ser relacionado com  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e  $\mathbb{C}^s$  pela expressão (5.18), (5.28) pode ser usada para a obtenção de:

$$\underline{\underline{1}} : (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{s^{-1}} : \mathbb{C}^{\text{hom}}) = \frac{1}{\Omega_v} \int_{\omega} \underline{\underline{a}}^n dS \quad (5.29)$$

A partir de (5.29) duas situações podem ser avaliadas. Na primeira delas, admite-se que todas as juntas tem o mesmo coeficiente de Biot ( $\forall i, \alpha_i = \alpha$ ). Nesta alternativa, a comparação de (5.26) e (5.29) fornece a relação:

$$\underline{\underline{B}} = \alpha \underline{\underline{1}} : (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{s^{-1}} : \mathbb{C}^{\text{hom}}) \quad (5.30)$$

A equação (5.30) estende a relação clássica entre os coeficientes do tensor de Biot e as tensões elásticas para o meio com descontinuidades.

O caso limite de fechamento das juntas pode ser caracterizado pela condição  $\underline{\underline{a}}^n \rightarrow 0$ . Tal consideração demonstra que, nesta condição limite, a parcela normal do deslocamento relativo desaparece. Portanto, a pressão do fluido não tem efeito ( $\underline{\underline{B}} = 0$ ) sobre a relação macroscópica entre tensão e deformação no domínio elástico.

Na segunda alternativa, as juntas possuem distintos coeficientes de Biot. Aqui não há conexão direta entre  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e as propriedades elásticas da matriz rochosa. A determinação de  $\underline{\underline{B}}$  passa diretamente pelo conhecimento de  $\underline{\underline{a}}^n$ .

### 5.3.2 Definição da segunda equação de estado

A segunda equação de estado completa a formulação do comportamento poroelástico global de um meio com descontinuidades. Na sua forma clássica, esta equação relaciona a variação do volume dos poros à pressão do fluido e à deformação macroscópica. Nos meios com descontinuidades, a variação de volume dos poros se deve exclusivamente às alterações no volume das juntas. Assim, utiliza-se a variação de porosidade Lagrangeana, que de acordo com (5.17) é definida por:

$$\Phi = \frac{1}{\Omega_v} \int \phi \, dS = \frac{1}{\Omega_v} \int \left( \frac{p}{m} + \alpha [\underline{\xi}] \cdot \underline{n} \right) dS \quad (5.31)$$

Pela decomposição de  $\underline{\xi}$  em dois problemas complementares, (5.31) pode ser escrita como:

$$\Phi = \frac{1}{\Omega_v} \int \frac{p}{m} dS + \frac{1}{\Omega_v} \int \alpha [\underline{\xi}_1] \cdot \underline{n} \, dS + \frac{1}{\Omega_v} \int \alpha [\underline{\xi}_2] \cdot \underline{n} \, dS \quad (5.32)$$

O primeiro termo do lado direito da expressão (5.32) pode ser escrito como:

$$\frac{1}{\Omega_v} \int \frac{p}{m} dS = \frac{p}{\bar{m}} \quad (5.33)$$

onde o módulo de Biot médio é dado por:

$$\frac{1}{\bar{m}} = \frac{1}{\Omega_v} \int \frac{1}{m} dS = \sum_i S_i \frac{1}{m_i} \quad (5.34)$$

com  $S_i$  representando a área específica da junta  $\omega_i$ .

A definição (5.13), que relaciona o deslocamento relativo da junta e a tensão macroscópica aplicada, permite escrever o segundo termo do lado direito da expressão (5.32) como:

$$\frac{1}{\Omega_o} \int_{\omega} \alpha \left[ \underline{\underline{\xi}}_1 \right] \cdot \underline{n} \, dS = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \quad (5.35)$$

Por fim, a última integral do lado direito da expressão (5.32) pode ser avaliada considerando a linearidade dos elementos. Ou seja, a resposta  $\underline{\underline{\xi}}_2$  e o consequente deslocamento relativo  $\left[ \underline{\underline{\xi}}_2 \right]$ , associados ao carregamento  $\left( \underline{\underline{E}} = 0, p \right)$ , são proporcionais à pressão do fluido  $p$ . Assim, existe um escalar  $\tilde{m}$ , de tal modo que:

$$\frac{1}{\Omega_o} \int_{\omega} \alpha \left[ \underline{\underline{\xi}}_2 \right] \cdot \underline{n} \, dS = \frac{p}{\tilde{m}} \quad (5.36)$$

A partir da combinação de (5.34), (5.35) e (5.36), tem-se a segunda equação de estado para o meio com descontinuidades.

$$\Phi = \frac{p}{M} + \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \quad (5.37)$$

onde  $M$  constitui o módulo de Biot macroscópico:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\tilde{m}} + \frac{1}{\tilde{m}} \quad (5.38)$$

Portanto, as expressões (5.27) e (5.37) governam o comportamento de um meio poroso na presença de juntas.

De maneira similar ao caso anterior, a ligação entre  $M$  e as propriedades elásticas homogeneizadas  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  é abordada de duas maneiras distintas. Se todas as juntas possuem o mesmo coeficiente de Biot ( $\forall i, \alpha_i = \alpha$ ), como já demonstrado na expressão (5.30), o tensor  $\underline{\underline{B}}$  é determinado através do conhecimento de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e das propriedades elásticas do meio. Para definir uma expressão para  $M$ , observa-se que  $\bar{m}$  é dado por (5.34), de acordo com as áreas específicas individuais das juntas. Como o campo de deslocamento  $\underline{\underline{\xi}}_2$  é cinematicamente admissível com a deformação macro  $\underline{\underline{E}} = 0$  (problema P2), a equação (5.8) fornece:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_2 \rangle + \frac{1}{\Omega_o} \int_{\omega} [\underline{\underline{\xi}}_2] \otimes \underline{n} dS = 0 \quad (5.39)$$

que implica em:

$$\frac{1}{\Omega_o} \int_{\omega} [\underline{\underline{\xi}}_2] \cdot \underline{n} dS = -\underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_2 \rangle \quad (5.40)$$

A igualdade acima demonstra que a deformação volumétrica associada ao deslocamento relativo normal da junta é equilibrada pela variação de volume da matriz rochosa. Portanto, a alteração de volume do VER é nula. Através da equação de estado da matriz rochosa  $\underline{\underline{\sigma}}_2 = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}_2$ , pode-se escrever:

$$\underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_2 \rangle = \underline{\underline{1}} : \mathbb{C}^{s^{-1}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}_2 \rangle \quad (5.41)$$

Tendo que a tensão média determinada por (5.25) é igual a  $\underline{\underline{\Sigma}}_2 = -p\underline{\underline{B}}$  e a partir das expressões (5.40) e (5.41), pode-se deduzir que:

$$\frac{1}{\Omega_\omega} \int \alpha \left[ \underline{\underline{\xi}}_2 \right] \cdot \underline{n} \, dS = \alpha p \underline{1} : \mathbb{C}^{s^{-1}} : \underline{\underline{B}} \quad (5.42)$$

Comparando as equações (5.36) e (5.42) observa-se que:

$$\frac{1}{\tilde{m}} = \alpha \underline{1} : \mathbb{C}^{s^{-1}} : \underline{\underline{B}} \quad (5.43)$$

Logo:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\bar{m}} + \frac{1}{\tilde{m}} = \sum_i S_i \frac{1}{m_i} + \alpha \underline{1} : \mathbb{C}^{s^{-1}} : \underline{\underline{B}} \quad (5.44)$$

As relações (5.30) e (5.44) demonstram que as propriedades globais  $M$  e  $\underline{\underline{B}}$  são inteiramente conhecidas quando o tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  estiver determinado. Estas expressões estendem as relações clássicas da poroelasticidade para o caso dos meios com discontinuidades, onde tanto o tensor quanto o módulo de Biot são funções de  $\mathbb{C}^s$  e  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . Em outras palavras, a solução para os tensores efetivos é resumida ao problema de homogeneização elástico para o caso drenado.

Outra situação possível ocorre quando nem todas as juntas tem o mesmo coeficiente de Biot. Logo, como já citado anteriormente, não há conexão direta entre  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e as propriedades elásticas da matriz rochosa. O mesmo vale para  $\tilde{m}$ , e por consequência, para  $M$ . Assim, a determinação de  $\underline{\underline{B}}$  requer o conhecimento do tensor de concentração  $\underline{\underline{a}}^n$ . A obtenção de  $\tilde{m}$  dependerá do conhecimento do campo de deslocamentos  $\underline{\underline{\xi}}_2$  do problema (P2).

O problema focado neste trabalho é a determinação das propriedades homogeneizadas de um meio rochoso fraturado, onde as juntas estão preenchidas por um fluido pressurizado. A presença do fluido requer o uso de uma abordagem poroelástica para descrever corretamente o acoplamento hidromecânico entre as fases que compõem este meio heterogêneo. A teoria apresentada nesta seção demonstra que a obtenção das propriedades homogeneizadas deste

meio rochoso específico é determinada a partir da solução para o caso drenado, supondo que todas as juntas tem o mesmo coeficiente de Biot ( $\forall i, \alpha_i = \alpha$ ).

Logo, a solução do problema de concentração sobre o VER adotado é obtida pela introdução de um esquema micromecânico adequado como, por exemplo, o esquema Mori-Tanaka e ainda pelo conhecimento dos módulos elásticos da matriz rochosa e da rigidez das juntas, cujos valores são tipicamente avaliados em laboratórios. Este desenvolvimento é detalhado nas seções 7.1 e 7.2.

## 6 MODELO COESIVO

A proposta de modelo coesivo data do início da década de sessenta, quando Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) desenvolveram um modelo de fraturamento, que considera a ideia de uma zona de coesão na ponta da trinca. O objetivo era representar de forma simplificada a zona de processos que ocorre na ponta das mesmas. Esta região é decorrente do escoamento no caso de materiais dúcteis, ou da formação de microfaturas para materiais quase frágeis, como os elementos rochosos. Estes modelos assumem a presença de forças coesivas agindo ao longo da zona de processamento da fratura.

A teoria de Barenblatt é baseada em três postulados, onde se admite que as forças de coesão se distribuem em pequenas zonas de comprimento  $d_o$ , desprezível quando comparada ao tamanho da fratura (figura 6.1).

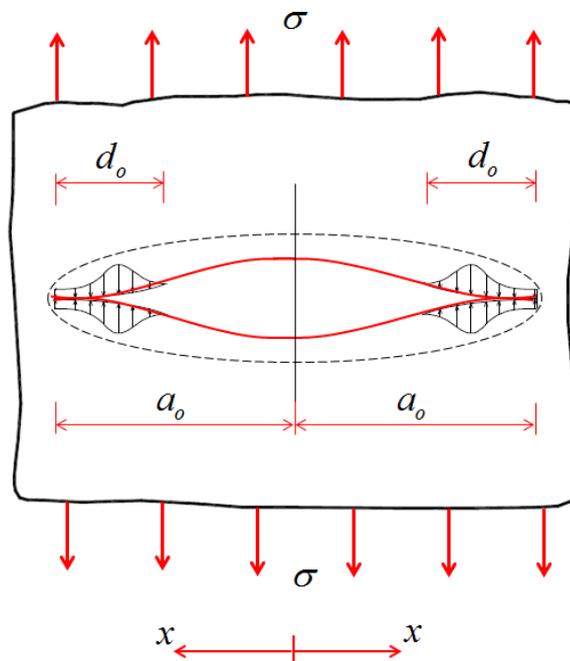


Figura 6.1: modelo coesivo proposto por Barenblatt

Barenblatt (1962) define uma resistência teórica, onde começa a separação das faces da zona coesiva. Tipicamente, a tensão de coesão e a abertura da zona coesiva representam uma relação constitutiva, sendo considerada uma propriedade do material.

Ainda na figura 6.1, pode se observar que, inicialmente, uma fratura é definida por uma linha fina, mas quando submetida a uma tensão normal, ela assume a forma de uma elipse esbelta, considerando que não existam forças aplicadas nas faces da mesma, conforme a teoria elástica linear.

O primeiro postulado da teoria de Barenblatt afirma que as forças coesivas induzem tensões singulares de compressão nas pontas da fratura, no sentido de unir as faces da mesma, enquanto que as singularidades induzidas pela tensão externa são de caráter trativo. O cancelamento que ocorre entre elas torna o campo final das tensões não singular.

O segundo postulado da teoria indica que a distribuição de forças coesivas  $G_m(x)$  é limitada a uma zona pequena dentro de uma distância  $d_o$ , que se estende da ponta da fratura em  $x = a$ , conforme indicação na figura 6.1. Assim,  $G_m(x)$  é significativa na zona coesiva  $a - d_o < x < a$ , mas desaparece para  $0 < x < a - d_o$ . Considera-se que a relação  $d_o/a$  tem valores pequenos se comparado com a unidade ( $d_o/a \ll 1$ ).

O terceiro postulado diz que, na região dos extremos da fratura, a forma da seção normal da superfície da mesma, e a conseqüente distribuição de forças de coesão sobre a superfície fraturada não dependem do carregamento aplicado, permanecendo idêntica para um dado material submetido às mesmas condições de temperatura, composição e pressão ambiente. Ou seja, a distribuição das tensões coesivas  $G_m(x)$  permanece a mesma, sendo transladada junto com a ponta da fratura. Assim, ela pode ser tratada como uma propriedade do material (BARENBLATT, 1962).

## 6.1 INTERFACES COESIVAS APLICADAS AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

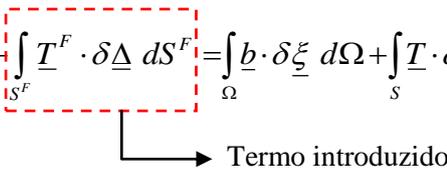
Nas análises numéricas deste trabalho (seção 7.3) é adotado o modelo de fratura discreta, onde a junta é tida como uma descontinuidade explícita. É utilizado o conceito das interfaces coesivas aplicadas ao método dos elementos finitos (MEF). Assim, a fratura é representada através da inserção de elementos de ligação entre as faces dos elementos finitos. As interfaces coesivas são elementos virtuais que permitem controlar a abertura de fraturas por meio de

relações constitutivas entre o deslocamento e a tensão aplicada nos elementos. O método permite descrever comportamento de descontinuidades capazes de transmitir esforços entre suas faces.

No âmbito do método dos elementos finitos, a implementação computacional das interfaces coesivas, é realizada pela inclusão do termo de trabalho interno da interface no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

O PTV estabelece o equilíbrio entre um campo de tensões internas e um campo de forças externas atuando sobre um corpo. O princípio determina que o trabalho virtual realizado por um campo de tensões estaticamente admissível  $\underline{\underline{\sigma}}$  em um campo de deformações virtuais  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  é equivalente ao trabalho virtual devido a um sistema de forças externas  $(\underline{T}, \underline{b})$  no deslocamento virtual  $\delta \underline{\underline{\xi}}$  associado às deformações virtuais  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ . O símbolo  $\delta$  representa uma variação arbitrária, virtual e compatível. O problema pode ser descrito, então, como:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{S^F} \underline{T}^F \cdot \delta \underline{\underline{\Delta}} \, dS^F = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \delta \underline{\underline{\xi}} \, d\Omega + \int_S \underline{T} \cdot \delta \underline{\underline{\xi}} \, dS \quad (6.1)$$



onde:

$\underline{T}$ : vetor tensão no contorno de  $\Omega$ ;

$\underline{T}^F$ : vetor de tensões coesivas nas interfaces da trinca;

$\underline{b}$ : vetor de forças de volume;

$S$ : superfície que define o contorno de  $\Omega$ ;

$\Omega$ : domínio de um corpo;

$S^F$ : região da superfície da trinca;

$\underline{\underline{\Delta}}$ : vetor de deslocamentos da interface.

## 6.2 DESCRIÇÃO DAS INTERFACES COESIVAS

Como já citado anteriormente, as interfaces coesivas são elementos virtuais de ligação entre as faces dos elementos finitos, cuja função é estabelecer uma lei constitutiva para simular as forças de coesão na região da ponta da fratura, também chamada de zona coesiva. O aparecimento e a propagação da fratura são regulados através destas leis constitutivas que relacionam o deslocamento dos nós das interfaces e a tensão aplicada nos elementos solicitados. Na figura 6.2 a seguir é indicado o elemento de interface coesiva, na qual  $\underline{n}$  e  $\underline{t}$  são as direções normal e transversal à interface coesiva.

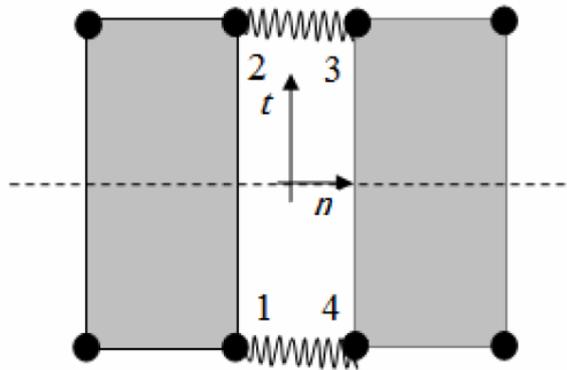


Figura 6.2: desenho esquemático da interface coesiva nos elementos finitos

Conforme destacado na figura anterior, o elemento de interface é composto por quatro nós, definidos em sentido horário, onde os dois primeiros nós pertencem a um mesmo elemento volumétrico. Obviamente, quando os elementos finitos não estão carregados, há coincidência de coordenadas entre os nós 1 e 4, assim como entre os nós 2 e 3.

As malhas de elementos finitos que recebem elementos coesivos devem receber tratamento especial, já que cada elemento da malha apresenta seus nós superpostos e independentes, possibilitando assim a propagação da fratura ao longo do contorno dos elementos, pois os deslocamentos relativos dos elementos são independentes. A ruptura da interface ocorre quando a energia especificada na lei constitutiva das interfaces coesivas é consumida. Estando os elementos finitos que compartilham a mesma interface submetidos a um estado de tração, a mesma também será solicitada, gerando um trabalho para sua abertura dado por:

$$W = \int_{S^F} \underline{T}^F \cdot \underline{\Delta} dS^F \quad (6.2)$$

onde:

$\underline{T}^F = \{T_n \quad T_t\}$ : vetor de tensões da interface (componentes normal e tangencial);

$\underline{\Delta} = \left\{ \begin{matrix} \Delta_n \\ \Delta_t \end{matrix} \right\}$ : vetor de deslocamentos da interface (componentes normal e tangencial).

A ação da interface aparece à medida que os elementos finitos tendem a se afastar entre si, iniciando um processo de coesão, que tenderá a reaproximá-los. Fenômeno semelhante ocorre quando os elementos estão sujeitos a gerar uma interpenetração. Neste caso, a interface atua no sentido de impedir tal processo. As tensões na interface ( $\underline{T}^S$ ) devido aos deslocamentos relativos entre os elementos que a compartilham são dadas por:

$$\underline{T}^S = \frac{\partial \phi_{\text{int}}}{\partial \underline{\Delta}} \quad (6.3)$$

onde  $\phi_{\text{int}}$  representa o potencial da interface. Xu e Needdleman (1994) definem o potencial da interface como:

$$\phi_{\text{int}}(\underline{\Delta}) = \phi_n + \phi_t \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left[ 1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \frac{1-q}{r-1} - \left[ q + \left( \frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2 \right\} \quad (6.4)$$

onde:

$q = \phi_t / \phi_n$ :  $\phi_t$  e  $\phi_n$  são os trabalhos de separação tangencial e normal;

$\Delta_n = \underline{n} \cdot \underline{\Delta}$  e  $\Delta_t = \underline{t} \cdot \underline{\Delta}$ : deslocamentos da interface nas direções normal e tangencial;

$r = \Delta_n^* / \delta_n$ : onde  $\Delta_n^*$  é o valor de  $\Delta_n$  após a separação total por cisalhamento com tensão normal nula ( $T_n = 0$ );

$\delta_n$  e  $\delta_t$ : comprimentos característicos normal e tangencial do material.

Ainda segundo Xu e Needleman (1994), os trabalhos  $\phi_t$  e  $\phi_n$  expressam a resistência do material ao crescimento da fratura e podem ser determinados por:

$$\phi_n = e\sigma_{m\acute{a}x}\delta_n \quad (6.5)$$

$$\phi_t = \sqrt{\frac{e}{2}}\tau_{m\acute{a}x}\delta_t \quad (6.6)$$

onde  $e$  é o número de Euler,  $\sigma_{m\acute{a}x}$  e  $\tau_{m\acute{a}x}$  são as resistências normal e tangencial máximas que a interface é capaz de suportar. Assim, as tensões na interface podem ser escritas como:

$$T_n = -\frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2 + \frac{1-q}{r-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2 \right] \left[ r - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \right\} \quad (6.7)$$

$$T_t = -\frac{\phi_n}{\delta_n} \left( 2 \frac{\delta_n}{\delta_t} \right) \frac{\Delta_t}{\delta_t} \left[ q + \left( \frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2 \quad (6.8)$$

As tensões definidas pelas expressões (6.7) e (6.8) estão retratadas nas curvas da figura 6.3. As áreas cobertas pelas curvas  $T_n$  e  $T_t$  correspondem às energias de separação normal ( $\phi_n$ ) e tangencial ( $\phi_t$ ) das interfaces nos modos I e II de ruptura. Essas energias precisam ser liberadas para que seja iniciado o processo de ruptura, possibilitando o crescimento da fratura.

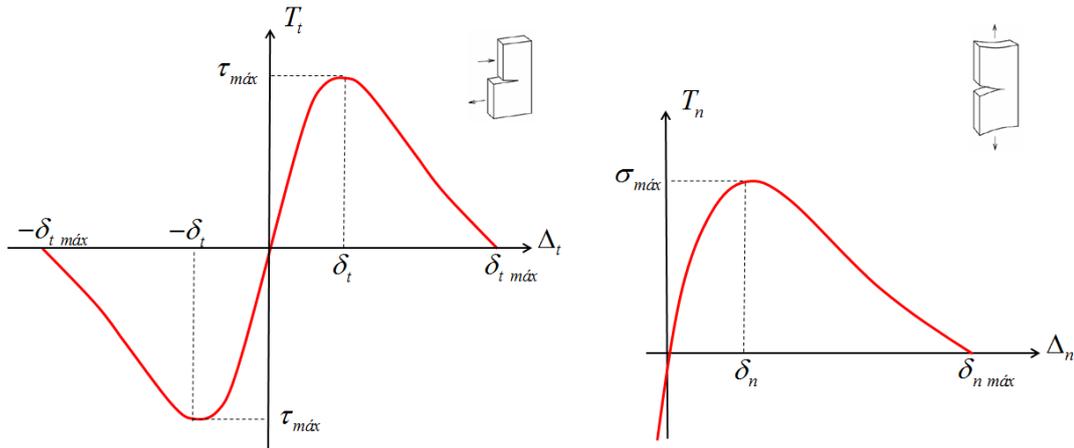


Figura 6.3: tensões tangenciais e normais na interface segundo as expressões propostas por Xu e Needleman (1994)

Nas análises numéricas realizadas neste trabalho, propõe-se a adoção das leis de separação bi-lineares para as interfaces. Logo, procura-se aproximar as curvas exponenciais de Xu e Needleman (1994) por duas retas, assumindo o formato indicado na figura 6.4.

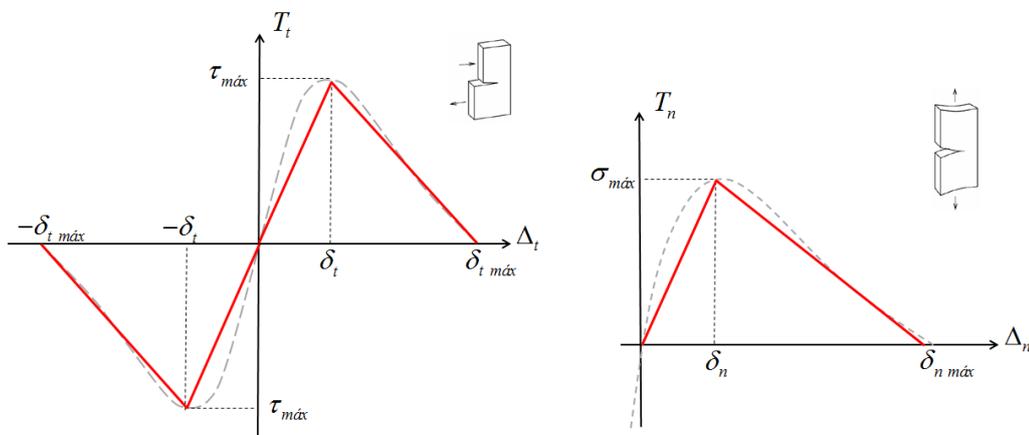


Figura 6.4: tensões tangenciais e normais na interface considerando as leis de separação bi-lineares

É importante lembrar que os modos de fratura demonstram as diferentes maneiras nas quais um elemento pode romper. O modo I (abertura) representa a abertura normal das superfícies, devido a carregamento de tração. O modo II (cisalhamento) é definido pelo deslizamento tangencial entre as superfícies, com deslocamento perpendicular à propagação da fratura. O modo III (rascamento) é definido pelo deslizamento tangencial entre as superfícies, com deslocamento paralelo à propagação da fratura. A deformação de qualquer tipo de fratura pode ser descrita pela combinação destes três modos de ruptura (figura 6.5).

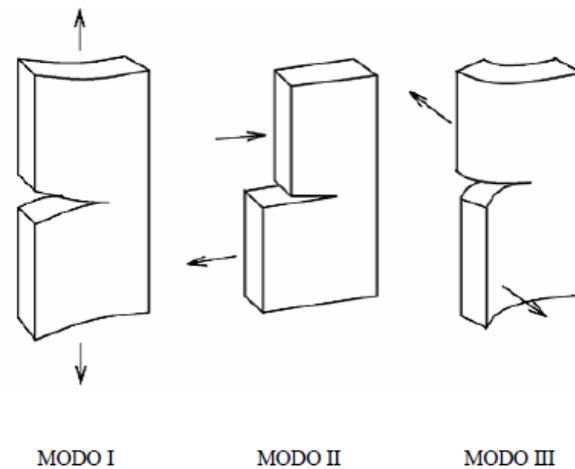


Figura 6.5: modos fundamentais de fratura

Ainda de acordo com Xu e Needleman (1994), o trabalho de separação normal da superfície  $\phi_n$  representa a resistência de um dado material ao crescimento da trinca em modo I.  $\phi_n$  corresponde à energia de fratura do material  $G_c$ , quando há somente modo I de ruptura e pode ser obtido de tabelas. Considerando a expressão (6.5), que relaciona  $\phi_n$  a  $\delta_n$  e  $\sigma_{máx}$ , o comportamento da interface coesiva é definido a partir de apenas dois parâmetros.  $\delta_n$  expressa um comprimento característico do material e não possui interpretação física.  $\sigma_{máx}$  é a máxima tensão normal resistente, cuja abertura normal  $\Delta_n$  corresponde ao comprimento característico  $\delta_n$ .

O valor de  $\sigma_{máx}$  depende do tipo de material, de acordo com seu comportamento, ou seja, dúctil ou frágil. Para os materiais dúcteis, essa tensão é função da tensão de escoamento. Para os materiais frágeis, como os meios rochosos, os valores de tensão são adotados dentro do seguinte intervalo:

$$\sigma_{máx} \cong \left( \frac{E}{100} \text{ a } \frac{E}{10} \right) \quad (6.9)$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Considerando o modo II de ruptura, para que o material resista ao crescimento de fraturas, é necessário consumir um trabalho de separação tangencial  $\phi_t$ . De maneira similar à situação

anterior, este trabalho é definido pela máxima tensão de corte  $\tau_{máx}$  e pelo comprimento característico  $\delta_t$ , além da abertura máxima  $\delta_{máx}$ .

Xu e Needleman (1994) igualam os valores dos comprimentos característicos e os trabalhos de separação normal e tangencial, com o intuito de encontrar  $\tau_{máx}$ . Logo:

$$\delta_n = \delta_t \quad e \quad \phi_n = \phi_t \quad (6.10)$$

$$\tau_{máx} = \sqrt{2e} \sigma_{máx} \frac{\delta_n}{\delta_t} \rightarrow \tau_{máx} \cong 2,33 \sigma_{máx} \quad (6.11)$$

Adotam-se para determinar as rigidezes elásticas normal ( $k_n^e$ ) e tangencial ( $k_t^e$ ) do elemento coesivo, as expressões destacadas a seguir:

$$k_n^e = \alpha \frac{E}{l_c} \quad (6.12)$$

$$k_t^e = \alpha \frac{\mu}{l_c} \quad (6.13)$$

onde  $E$  e  $\mu$  são os módulos de elasticidade longitudinal e de cisalhamento do material.  $l_c$  é o comprimento característico da malha de elementos finitos e  $\alpha$  é o fator de escala para os deslocamentos elásticos coesivos.

Salienta-se que, neste trabalho, durante o processo de carregamento do VER, em nenhum momento é atingido o limite de ruptura da interface. O objetivo não é avaliar a propagação das fraturas, mas sim o comportamento do meio homogeneizado. Assim, as solicitações são aplicadas no VER de modo a garantir esta condição. Com relação às interfaces coesivas, elas são aplicadas apenas nos elementos que compõem a junta, com o propósito de simular a transferência de esforços ao longo da mesma.

## 7 APLICAÇÕES

Neste capítulo, algumas situações particulares referentes aos maciços rochosos fraturados são apresentadas, baseadas nas considerações teóricas anteriormente destacadas. Primeiramente, duas análises no âmbito da micromecânica são realizadas, partindo da existência de uma família de juntas curtas paralelas e também da situação onde as juntas curtas estão aleatoriamente distribuídas no maciço.

Na aplicação dos modelos micromecânicos em rochas fraturadas, é usual adotar que as cavidades sejam consideradas com geometria elipsoidal. É também comum considerar as mesmas como inclusões esféricas ou cilíndricas. Nos dois casos a seguir (seções 7.1 e 7.2), considera-se que as juntas são uma situação limite de esferoides oblongos, fazendo um dos eixos do elipsoide tender a zero, como demonstrado na figura 7.1.

A inclusão tem formato de um elipsoide de revolução em torno do eixo  $e_1$ . Logo, nas outras direções,  $e_2$  e  $e_3$ , os eixos possuem o mesmo comprimento, isto é,  $a_2 = a_3 = a$ . A relação entre o comprimento do terceiro eixo  $e_1$  e os demais é chamada de fator de aspecto  $X$ . Para o elipsoide em questão,  $a_1 < a_2$ , portanto,  $X < 1$ .

$$X = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{c}{a} \quad (7.1)$$

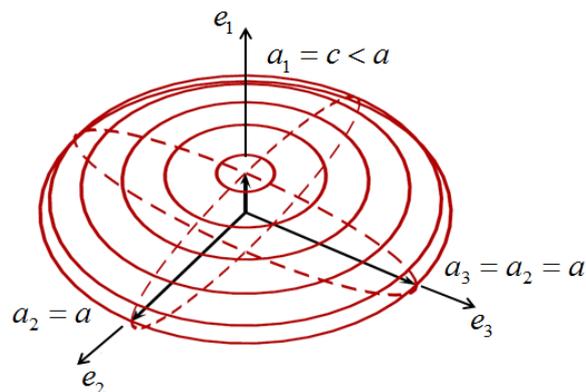


Figura 7.1: elipsoide oblongo (BARTHELEMY, 2005)

Em virtude da geometria do esferoide, a junta é modelada impondo a condição  $X \rightarrow 0$ . A geometria da inclusão determina as componentes do tensor de Eshelby  $\mathbb{S}$ , necessário para uso das estimativas baseadas na solução do problema da inclusão em um meio infinito determinada pelo próprio Eshelby. As expressões completas para estes coeficientes podem ser obtidas em Mura (1987).

Dormieux et al. (2006) afirmam que para  $X \ll 1$ , é suficiente expandir as componentes de  $\mathbb{S}$  para primeira ordem em relação a  $X$ . No eixo ortonormal local  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , com vetor unitário normal ao plano junta  $\underline{n} = \underline{e}_1$ , obtêm-se as seguintes componentes não nulas de  $S_{ijkl}$ :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= 1 - \frac{1-2\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\pi}{4} X & S_{2222} &= S_{3333} = \frac{13-8\nu_s}{32(1-\nu_s)} \pi X \\
 S_{2233} &= S_{3322} = \frac{8\nu_s-1}{32(1-\nu_s)} \pi X & S_{2211} &= S_{3311} = \frac{2\nu_s-1}{8(1-\nu_s)} \pi X \\
 S_{1122} &= S_{1133} = \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \left( 1 - \frac{4\nu_s+1}{8\nu_s} \pi X \right) & S_{1212} &= S_{1313} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\nu_s-2}{1-\nu_s} \frac{\pi}{4} X \right)
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

A isotropia transversal e a simetria devido aos eixos 2 e 3 implica que o coeficiente  $S_{2323}$  seja escrito como:

$$S_{2323} = \frac{1}{2} (S_{3333} - S_{2233}) \tag{7.3}$$

As demais componentes do tensor de Eshelby são obtidas mediante aplicação das relações de simetria citadas anteriormente  $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ . Expressões do tensor de Eshelby para outras formas de inclusões estão indicadas no Apêndice A.

Na seção 7.3, resultados numéricos para caso das juntas curtas paralelas são apresentados, baseados na implementação de uma abordagem via homogeneização numérica. É utilizado o conceito de interfaces coesivas no método dos elementos finitos, mediante aplicação do programa *Metafor*, cuja utilização tem sido realizada em inúmeros trabalhos voltados à Mecânica da Fratura desenvolvidos pelo PPGE.

A partir deste ponto, uma ressalva é importante. As soluções analíticas das seções 7.1 e 7.2, oriundas da abordagem micromecânica são válidas em um contexto tridimensional. Uma das limitações do programa *Metafor* é justamente a impossibilidade de análises tridimensionais. Sua aplicação é, atualmente, restrita a problemas de estado plano de deformações – EPD. Esta pode ser considerada a principal limitação deste trabalho.

Em vista deste obstáculo, outra situação teve de ser desenvolvida para permitir uma correta comparação dos resultados. No caso de estado plano, uma junta não deve mais ser modelada como um esferoide, mas sim como um cilindro infinito (figura 7.2), pois assim, ela acompanha a dimensão também tida como infinita para o VER. As expressões do tensor de Eshelby, utilizadas no estudo, para o caso das inclusões cilíndricas são detalhadas no Apêndice A.

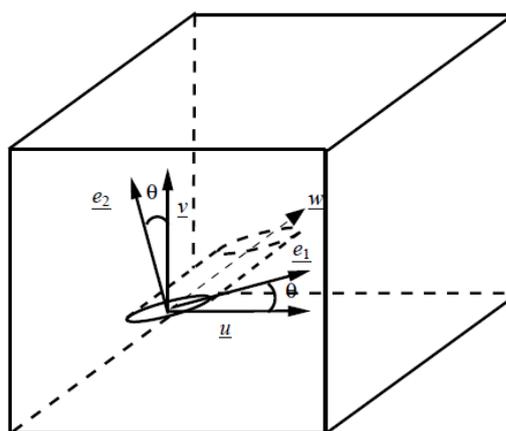


Figura 7.2: inclusão modelada como um cilindro infinito para solução analítica em EPD (GRUESCU, 2004)

## 7.1 MEIO ROCHOSO COM JUNTAS CURTAS PARALELAS

Considera-se aqui o caso de elementos rochosos fraturados, nos quais as únicas heterogeneidades presentes no meio são juntas curtas, ou seja, elementos capazes de transferir esforços. Esta solução, desenvolvida por Maghous et al. (2013) pode ser considerada uma extensão dos resultados clássicos em proelasticidade, nos quais as discontinuidades não transferem esforços.

Como já citado anteriormente, uma junta pode ser tratada como um esferoide oblongo, na qual é introduzida um plano ortonormal  $(\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$ , onde  $\underline{n}$  denota o plano normal a mesma, conforme demonstrado na figura 7.3.

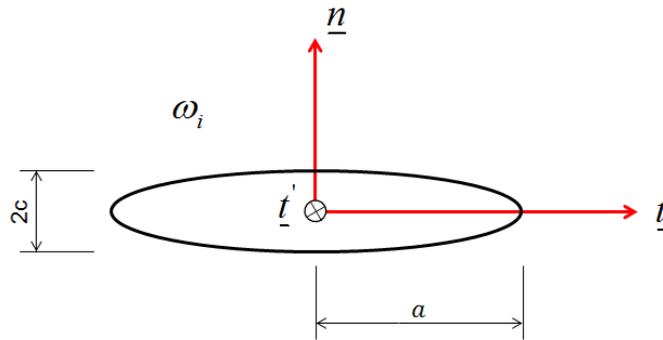


Figura 7.3: plano ortonormal na junta representada por um esferoide

Como visto na figura anterior, a geometria do esferoide é definida pelo raio da junta  $a$  e pela sua abertura  $c$ . Admite-se que a relação denominada fator de aspecto  $X = c/a$  é submetida à condição de  $X \ll 1$ , devido à forma da mesma.

Supõe-se que o comportamento da matriz rochosa é elástico linear isotrópico, descrito pelo tensor  $\mathbb{C}^s$ , conforme a equação a seguir:

$$\mathbb{C}^s = 3k^s \mathbb{J} + 2\mu^s \mathbb{K} \quad (7.4)$$

onde  $k^s$  e  $\mu^s$  são, respectivamente, os módulos de compressibilidade e de cisalhamento da matriz. Os tensores de quarta ordem  $\mathbb{J}$  e  $\mathbb{K}$  são definidos como:

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad \text{e} \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (7.5)$$

A rigidez da junta  $\underline{\underline{k}}$  é definida da forma:

$$\underline{\underline{k}} = k_n \underline{n} \otimes \underline{n} + k_t (\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{t}' \otimes \underline{t}') \quad (7.6)$$

onde  $k_n$  e  $k_t$  denotam, respectivamente as rigidezes normal e transversal da junta.

Considerando uma rocha homogênea onde existem apenas juntas curtas paralelas, definidas pelo raio  $a$  e pelo fator de aspecto  $X$ , define-se a fração volumétrica das mesmas no meio como:

$$f = \frac{4}{3} \pi \varepsilon X \quad (7.7)$$

onde  $\varepsilon = \mathcal{N}a^3$  é o parâmetro denominado densidade de fraturas, introduzido por Budiansky e O'Connell (1976), para um conjunto de juntas paralelas.  $\mathcal{N}$  denota o número de juntas por unidade de volume.

Usando o esquema Mori-Tanaka, a estimativa do tensor elástico para o caso drenado  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  é dada por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left( \mathbb{C}^s + f \mathbb{C}^j : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^j - \mathbb{C}^s) \right)^{-1} \right) : \left( \mathbb{I} + f \left( \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^j - \mathbb{C}^s) \right)^{-1} \right)^{-1} \quad (7.8)$$

onde  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(X, \underline{n})$  representa o tensor de Hill. Como já citado anteriormente, ele é determinado a partir das expressões do tensor de Eshelby, através da relação  $\mathbb{P} = \mathbb{S} : (\mathbb{C}^s)^{-1}$ .

$\mathbb{C}^j$  é o tensor relacionado com a rigidez das juntas, definido como:

$$\mathbb{C}^j = 3Xa \left( k_n - \frac{4}{3} k_t \right) \mathbb{J} + 2Xa k_t \mathbb{K} \quad (7.9)$$

As componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  no contexto da estimativa Mori-Tanaka, no plano local ( $\underline{e}_1 = \underline{n}$ ,  $\underline{e}_2 = \underline{t}$ ,  $\underline{e}_3 = \underline{t}'$ ) são então:

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi \kappa_1 (1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi \kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi \varepsilon} \\
C_{2222}^{\text{hom}} = C_{3333}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi(1 + 16/3\varepsilon)\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi \kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi \varepsilon} \\
C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi(\kappa_1 + 8/3\varepsilon)(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi \kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi \varepsilon} \\
C_{1122}^{\text{hom}} = C_{1133}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi \kappa_1 (1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi \kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi \varepsilon} \\
C_{1212}^{\text{hom}} = C_{1313}^{\text{hom}} &= 2\mu^s \frac{4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)}{4\kappa_3 + 16/3\pi \varepsilon(1 - \kappa_1) + \pi(1 + 2\kappa_1)(1 - \kappa_1)} \\
C_{2323}^{\text{hom}} &= 2\mu^s
\end{aligned} \tag{7.10}$$

onde os parâmetros adimensionais  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  são dados por:

$$\kappa_1 = \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_2 = \frac{3k_n a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_3 = \frac{3k_t a}{3k^s + 4\mu^s} \tag{7.11}$$

Considerando que todas as juntas têm as mesmas propriedades elásticas, a estimativa Mori-Tanaka do tensor de Biot é dada por:

$$\underline{\underline{B}} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} f \underline{\underline{1}} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^j - \mathbb{C}^s) \right)^{-1} : \left( \mathbb{I} + f \left( \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^j - \mathbb{C}^s) \right)^{-1} \right)^{-1} \tag{7.12}$$

A estimativa para o módulo de Biot pode ser deduzida da expressão anterior:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\bar{m}} + \alpha \underline{\underline{1}} : (\mathbb{C}^s)^{-1} : \underline{\underline{B}} \quad (7.13)$$

A partir de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , as componentes das expressões acima são dadas em (7.14) e (7.15). Salienta-se que apenas as componentes diagonais de  $\underline{\underline{B}}$  tem valor não nulo.

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{4\alpha\pi\varepsilon}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ B_{22} = B_{33} &= \frac{4\alpha\pi\varepsilon(3k^s - 2\mu^s)}{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1) + 4\pi\varepsilon)(3k^s + 4\mu^s)} \\ B_{ij} &= 0 \quad \text{se } i \neq j \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{\pi}{am}\varepsilon + \frac{12\alpha^2\pi\varepsilon}{(3k^s + 4\mu^s)(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1) + 4\pi\varepsilon)} \quad (7.15)$$

Em virtude de ilustrar as soluções obtidas, os gráficos das figuras 7.4 e 7.5 demonstram a variação das componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , com relação ao parâmetro densidade de fraturas  $\varepsilon$ . Na figura 7.4, as componentes de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{\text{hom}}$  são apresentadas adimensionalizadas pelo módulo de elasticidade da matriz, admitido como  $E_s = 30 \text{ GPa}$ . Assume-se que o coeficiente de Poisson é igual a 0.25 e que o volume  $\Omega$  do VER é unitário.

Analisando as expressões dadas em (7.10) e (7.11), é possível observar que a relação  $\mathbb{C}^{\text{hom}}/E_s$  é uma função dos parâmetros  $\nu^s$ ,  $ak_n/E_s$ ,  $ak_t/E_s$  e  $\varepsilon$ , ou seja,  $\mathbb{C}^{\text{hom}}/E_s = f(\nu^s, ak_n/E_s, ak_t/E_s)$ . A partir de valores experimentais de rochas usuais, uma relação razoável entre as rigidezes normal e transversal pode ser adotada como  $k_n/k_t = 2.5$ . Para obtenção dos gráficos da figura (7.4) é imposto que  $ak_t/E_s = 0.1$ .

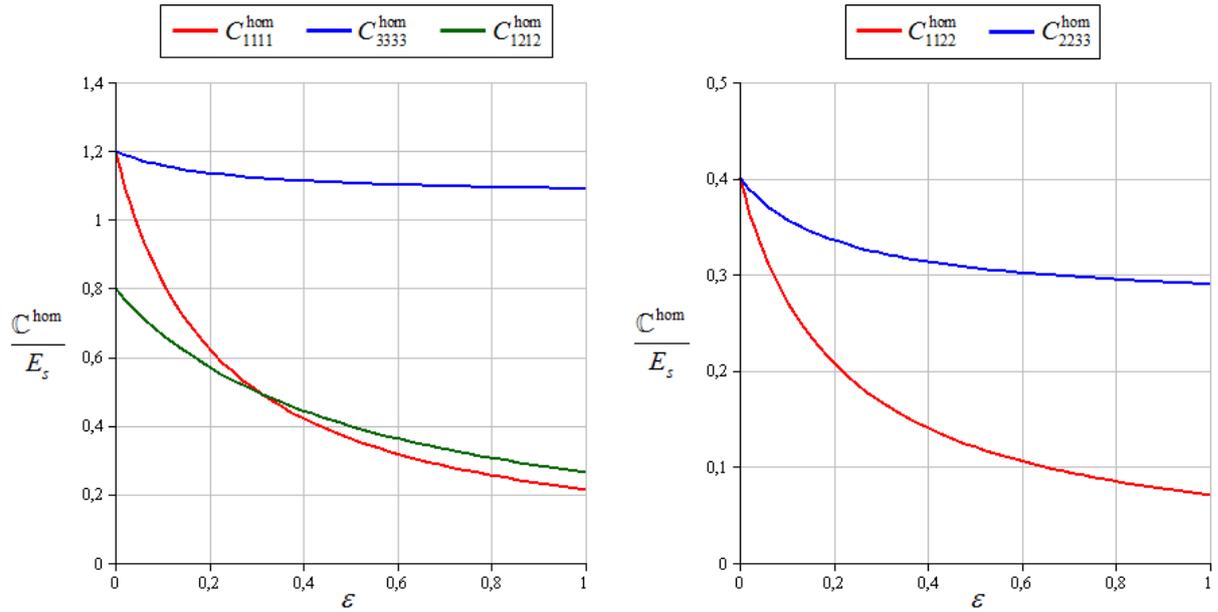


Figura 7.4: componentes de  $\mathbb{C}^{hom}$  para um meio rochoso com juntas curtas paralelas

Na figura 7.5 a seguir, o problema anterior é novamente avaliado, mas agora efetuando uma redução de mil vezes nos valores das rigidezes normal e transversal da junta ( $ak_t / E_s = 0.1 \times 10^{-3}$ ), buscando simular a situação onde não há transferência de esforços ao longo das microfraturas.

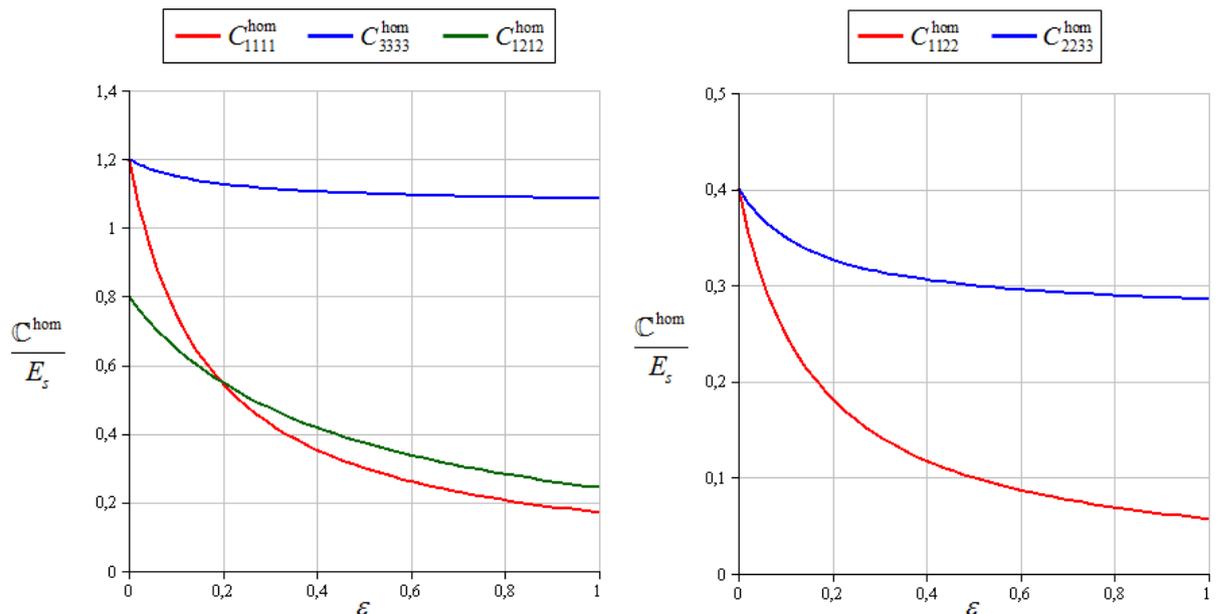


Figura 7.5: componentes de  $\mathbb{C}^{hom}$  para um meio rochoso com juntas curtas paralelas considerando  $k_n \ll E_s$  e  $k_t \ll E_s$

As duas figuras acima demonstram o resultado esperado, pois para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o resultado retorna a um problema elástico linear sem a presença da descontinuidade, ou seja, sem o efeito da junta. Agora, quando a densidade de fraturas  $\varepsilon$  aumenta, a rigidez do maciço é fortemente alterada, indicando a importância das juntas no comportamento mecânico do mesmo.

Outra análise é realizada, baseada nos mesmos parâmetros anteriormente citados, mas avaliando agora o comportamento dos componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  a partir da variação de  $k_n$  e  $k_t$  (figura 7.6). Mantendo a mesma relação entre as rigidezes já citada acima ( $k_n / k_t = 2.5$ ), é introduzido o parâmetro  $\lambda = k_n / k_n^o$ , onde  $k_n^o = 50 \text{ GPa} / \text{m}$  é um valor de referência para a rigidez normal.  $\lambda$  é então multiplicado pelas rigidezes da junta. A figura 7.6 indica o impacto da redução da rigidez no comportamento global do maciço.

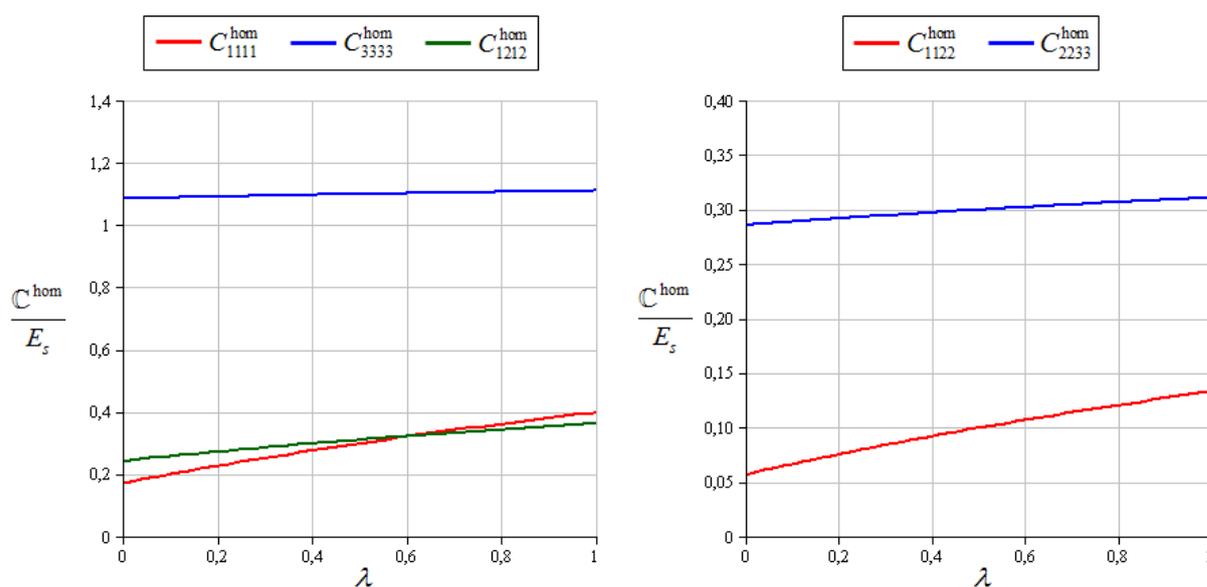


Figura 7.6: componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  para um meio rochoso com juntas curtas paralelas, com relação à variação das rigidezes da junta  $k_n$  e  $k_t$

Avaliando os resultados da figura 7.6 acima, é possível notar que o maior impacto é observado na direção 1, ou seja, na direção normal às fraturas.

## 7.2 MEIO ROCHOSO COM JUNTAS CURTAS DISTRIBUÍDAS ALEATORIAMENTE

Os resultados destacados na seção anterior são aqui estendidos para o caso de juntas curtas distribuídas com orientação completamente aleatória na matriz. Admite-se que a desordem nas descontinuidades ocorre de forma a garantir que seu comportamento macroscópico possa ser tratado como isotrópico.

Como destacado anteriormente, as juntas são modeladas como inclusões elipsoidais. A orientação de uma inclusão pode ser descrita pelo vetor unitário  $\underline{p}$  (figura 7.7), cujas componentes, relacionadas aos ângulos esféricos  $\theta$  e  $\phi$  são:

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos(\theta) \\ p_2 &= \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ p_3 &= \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \end{aligned} \quad (7.16)$$

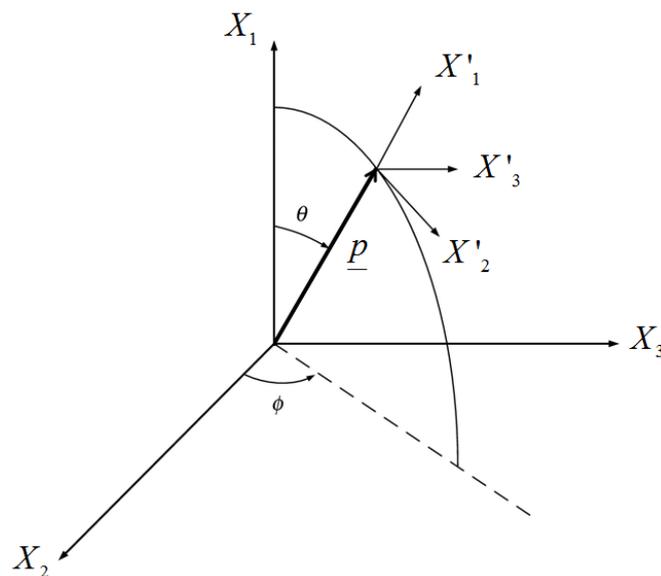


Figura 7.7: sistemas de coordenadas locais ( $X'_i$ ) e globais ( $X_i$ )

Maiores detalhes sobre o processo de transformação de coordenadas são tratados no Apêndice B. O conjunto de todas as orientações possíveis de  $\underline{p}$  é dado por uma esfera unitária. A

integral de uma quantidade  $\mathcal{Q}$  sobre a superfície da esfera, ou seja, sobre todas as possíveis direções de  $\underline{p}$  é escrita como:

$$\int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\theta=\pi} \mathcal{Q}(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi \quad (7.17)$$

De acordo com Advani e Tucker (1987), a orientação da inclusão no espaço pode ainda ser descrita de modo geral através da denominada função distribuição de orientação  $\psi(\underline{p})$ . De acordo com os autores, esta função é definida como a probabilidade de se encontrar uma inclusão entre os ângulos  $\theta_1$  e  $(\theta_1 + d\theta)$ , e  $\phi_1$  e  $(\phi_1 + d\phi)$ , ou seja:

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + d\theta, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 + d\phi) = \psi(\theta_1, \phi_1) \text{sen}\theta_1 d\theta d\phi \quad (7.18)$$

A função  $\psi(\underline{p})$  precisa satisfazer certas condições físicas. A primeira determina que uma inclusão com uma orientação definida por  $(\theta, \phi)$  não se distingue de uma inclusão com uma orientação  $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ . Logo,  $\psi(\underline{p})$  deve ser uma função periódica:

$$\psi(\theta, \phi) = \psi(\pi - \theta, \phi + \pi) \quad \text{ou} \quad \psi(\underline{p}) = \psi(-\underline{p}) \quad (7.19)$$

A segunda condição diz que  $\psi(\underline{p})$  deve ser normalizada, uma vez que cada inclusão tem uma orientação:

$$\int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\theta=\pi} \psi(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi = 1 \quad (7.20)$$

Para o caso de um conjunto de inclusões, de mesmas dimensões, aleatoriamente distribuídas na matriz, onde todas as inclusões têm o mesmo tamanho, a função distribuição de orientação  $\psi(\underline{p})$  possui valor constante (distribuição uniforme):  $\psi(\theta, \phi) = 1/4\pi$ .

Sendo  $dN$  o número de juntas por unidade de volume, a fração volumétrica de fibras  $df$  pode ser escrita como (DÉUDE, 2002):

$$df = \frac{4}{3} \pi a^2 c dN = \frac{X}{3} a^3 \mathcal{N} \text{sen}(\theta) d\phi d\theta \quad (7.21)$$

Em virtude das hipóteses formuladas acima, a estimativa Mori-Tanaka para o caso das juntas curtas aleatoriamente distribuídas na matriz é dada pela integração ao longo de todas as possíveis orientações das juntas. Assim, a solução para o problema é escrita como:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left( \overline{\mathbb{C}^s + \mathbb{C}^j : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^j - \mathbb{C}^s))^{-1}} \right) : \left( \overline{\mathbb{I} + (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^j - \mathbb{C}^s))^{-1}} \right)^{-1} \quad (7.22)$$

O símbolo  $\overline{\mathcal{Q}}$  denota a integral sobre as coordenadas esféricas angulares  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ :

$$\overline{\mathcal{Q}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{4\pi a^3}{3} \mathcal{N} X \mathcal{Q}(\theta, \phi) \frac{\sin \theta}{4\pi} d\phi \quad (7.23)$$

O meio homogeneizado definido pela expressão (7.22) é isótropo. O tensor elástico se escreve como  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = 3k_{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu_{\text{hom}} \mathbb{K}$ .

Mais uma vez, no contexto da estimativa Mori-Tanaka, os coeficientes não nulos do tensor isótropo  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  determinados a partir de (7.22) são:

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\text{hom}} = C_{2222}^{\text{hom}} = C_{3333}^{\text{hom}} &= k_{\text{hom}} + \frac{4}{3} \mu_{\text{hom}} \\
C_{1122}^{\text{hom}} = C_{1133}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} = C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= k_{\text{hom}} - \frac{2}{3} \mu_{\text{hom}} \\
C_{1212}^{\text{hom}} = C_{1313}^{\text{hom}} = C_{2323}^{\text{hom}} &= 2\mu_{\text{hom}}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

onde as constantes elásticas do meio homogeneizado isótropo, representadas pelo módulo de compressão  $k_{\text{hom}}$  e pelo módulo de cisalhamento  $\mu_{\text{hom}}$  são:

$$k_{\text{hom}} = \frac{k^s}{\left( 1 + \frac{\frac{4}{3} \pi k^s}{\pi \kappa_1 + \frac{a k_n}{\mu^s}} \varepsilon \right)} \tag{7.25}$$

$$\mu_{\text{hom}} = \frac{\mu^s}{1 + \frac{6\kappa_2 + 4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(3\kappa_1 + \kappa_4)}{15(3\pi\kappa_1\kappa_4 + \kappa_2)(4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4))} 16\pi\kappa_4\varepsilon}$$

Os parâmetros adimensionais  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  e  $\kappa_4$  são definidos como:

$$\kappa_1 = \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_2 = \frac{3k_n a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_3 = \frac{3k_t a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_4 = \frac{\mu^s}{3k^s + 4\mu^s} \tag{7.26}$$

Assim como na seção anterior, os componentes não nulos do tensor de Biot continuam sendo os termos diagonais:

$$B_{11}^{\text{hom}} = B_{22}^{\text{hom}} = B_{33}^{\text{hom}} = \frac{4\varepsilon\pi\alpha}{4\varepsilon\pi + \frac{3\pi\kappa_1\mu^s}{k^s} + \frac{3ak_n}{k^s}} \quad (7.27)$$

$$B_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

A estimativa do módulo de Biot é então:

$$\frac{1}{M} = \frac{\pi}{am} \varepsilon + \frac{4\varepsilon\pi\alpha^2}{4\varepsilon\pi k^s + 3\pi\kappa_1\mu^s + 3ak_n} \quad (7.28)$$

A partir das mesmas hipóteses formuladas na seção 7.1, os gráficos da figura 7.8 a seguir destacam as componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  novamente em relação à variação do parâmetro densidade de fraturas  $\varepsilon$ .

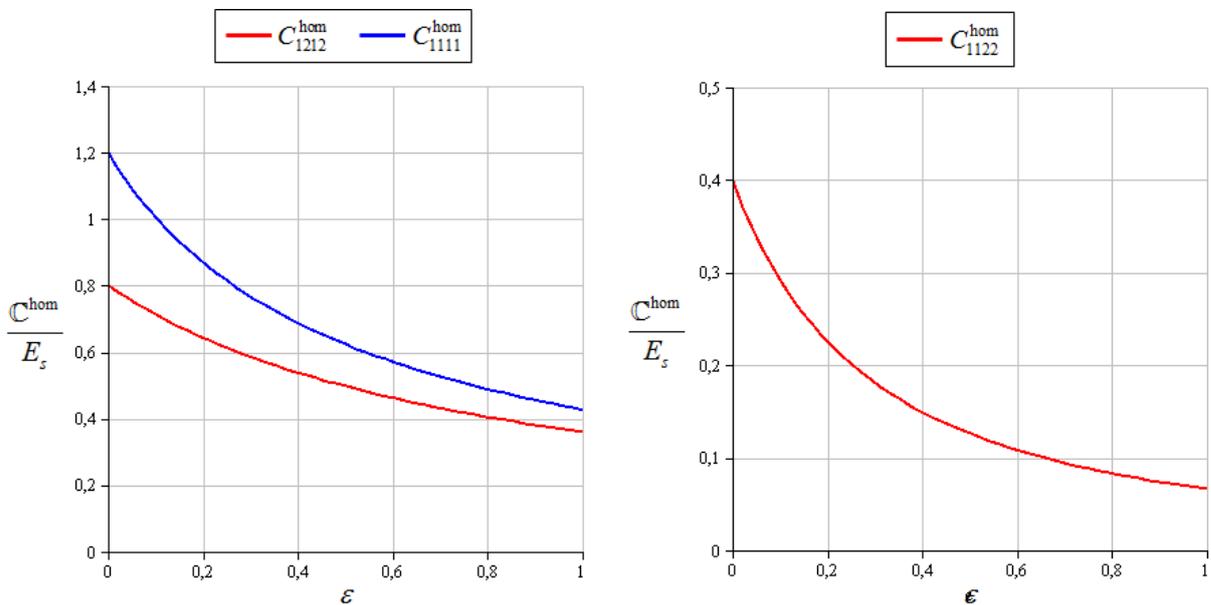


Figura 7.8: componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas

Na figura 7.9, assim como na seção anterior, a solução obtida é analisada sob a partir da redução de mil vezes para as rigidezes normal e transversal da junta.

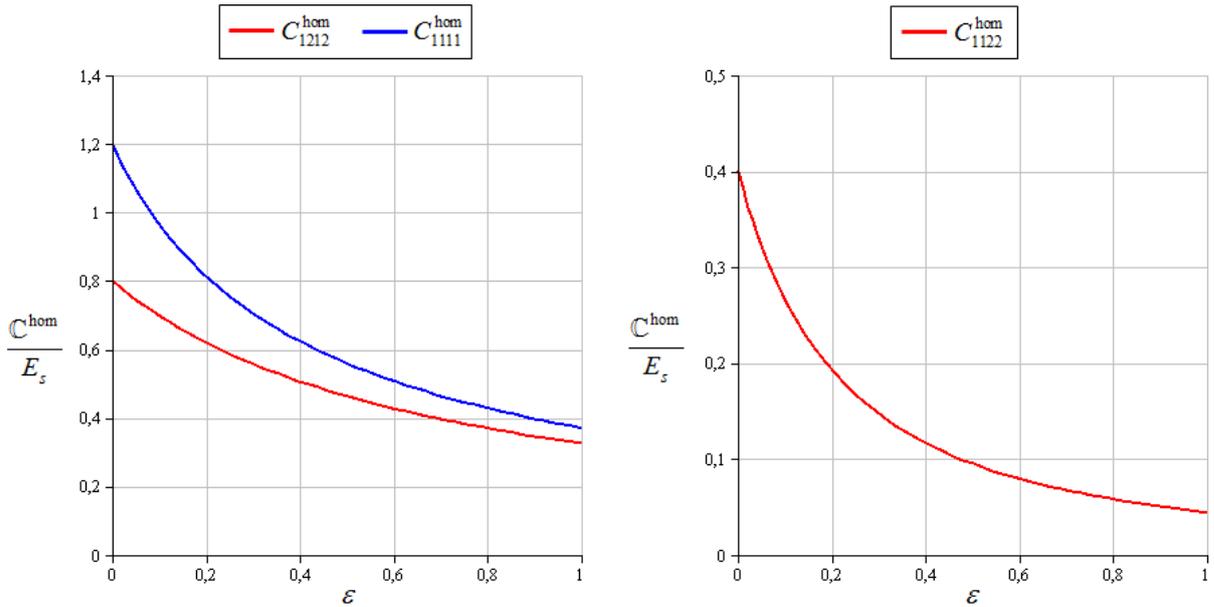


Figura 7.9: componentes de  $\mathbb{C}^{hom}$  para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, considerando  $k_n \ll E_s$  e  $k_t \ll E_s$

Mais uma vez, os resultados apresentados condizem com o comportamento esperado e, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o resultado retorna ao problema elástico linear na ausência de qualquer descontinuidade. Novamente, o aumento da densidade de fraturas  $\epsilon$  também indica a redução na rigidez do maciço. A situação da variação das rigidezes  $k_n$  e  $k_t$  da junta é novamente tratada, onde se utiliza do parâmetro  $\lambda$  para indicar a redução das mesmas (figura 7.10).

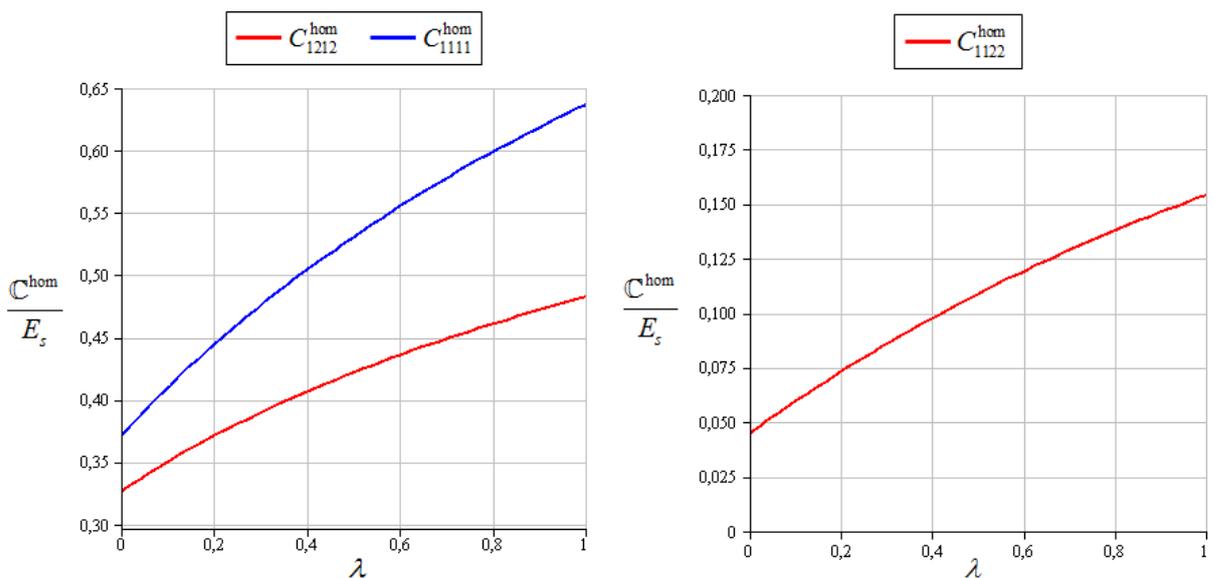


Figura 7.10: componentes de  $\mathbb{C}^{hom}$  para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, em relação à variação das rigidezes da junta  $k_n$  e  $k_t$

As variações das constantes elásticas, adimensionalizadas da forma  $k_{\text{hom}}/k^s$  e  $\mu_{\text{hom}}/\mu^s$ , que representam o meio efetivo, com relação ao parâmetro  $\varepsilon$  são demonstradas na figura 7.11.

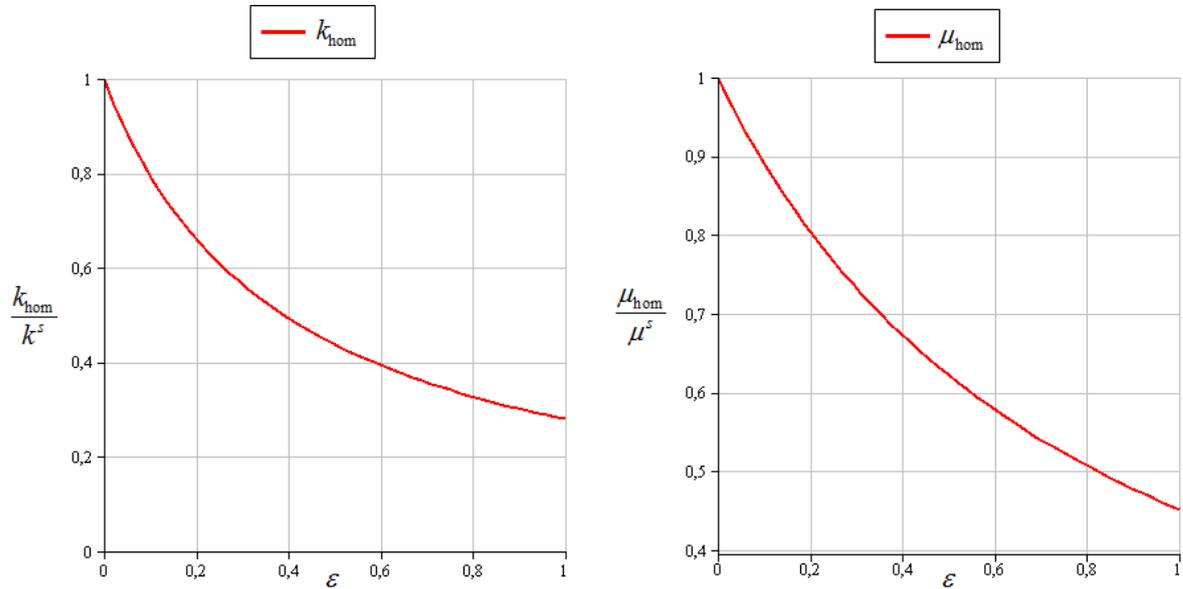


Figura 7.11: constantes elásticas  $k_{\text{hom}}$  e  $\mu_{\text{hom}}$  para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, com relação ao parâmetro  $\varepsilon$

As propriedades poroelásticas ( $B^{\text{hom}}$  e  $M$ ) são destacadas na figura 7.12. Como salientado anteriormente, considera-se que todas as juntas têm o mesmo coeficiente de Biot ( $\alpha_i = \alpha = 0.65$ ) e também o mesmo módulo de Biot ( $m_i = m = 30 \text{ GPa}$ ).

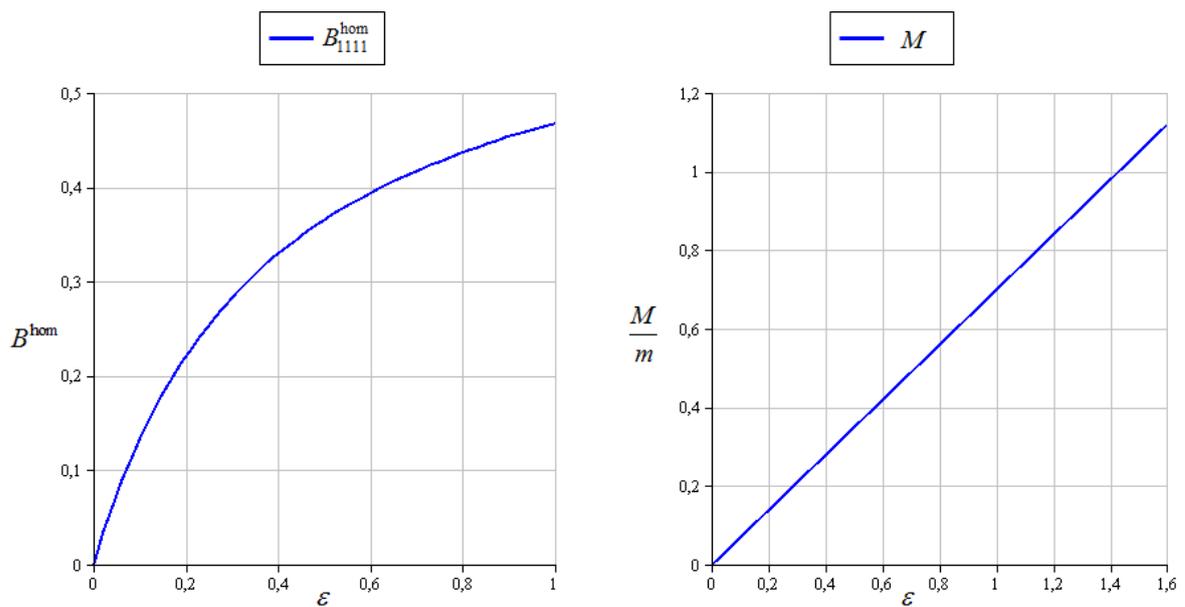


Figura 7.12: propriedades poroelásticas ( $B^{\text{hom}}$  e  $M$ ) para um meio rochoso com juntas curtas aleatoriamente distribuídas, com relação ao parâmetro  $\varepsilon$

### 7.3 ANÁLISE NUMÉRICA – MACIÇO ROCHOSO COM JUNTAS CURTAS PARALELAS

O objetivo desta seção é comparar os resultados oriundos de aplicações numéricas com aqueles obtidos mediante aplicação da metodologia micromecânica já desenvolvida anteriormente. É importante ressaltar que os resultados numéricos são comparados com a solução obtida para um VER cuja inclusão é dada por um cilindro infinito, retratando especificamente a situação de estado plano de deformações. A principal diferença desta solução em relação ao trabalho desenvolvido na seção 7.1 diz respeito ao tensor de Eshelby que, neste caso, é alterado em função da geometria da inclusão. Outro item a salientar se refere ao parâmetro densidade de fraturas  $\varepsilon$  que, diferentemente dos dois problemas anteriores é agora definido sobre uma superfície e não mais sobre o volume do VER. Portanto, tem-se que  $\varepsilon = \mathcal{N}a^2$ . No Apêndice C são apresentadas as expressões analíticas obtidas mediante o uso de inclusões cilíndricas simulando as juntas usando a estimativa Mori-Tanaka.

Aqui, a lógica do processo numérico em homogeneização consiste em estabelecer uma célula de base unitária, contendo uma junta, na qual devem ser introduzidas adequadas condições de contorno de forma a permitir a operação sobre as médias de tensão e deformação, visando obter as propriedades elásticas efetivas. Em um meio fraturado, o problema se resume à situação destacada na figura 7.13 abaixo.

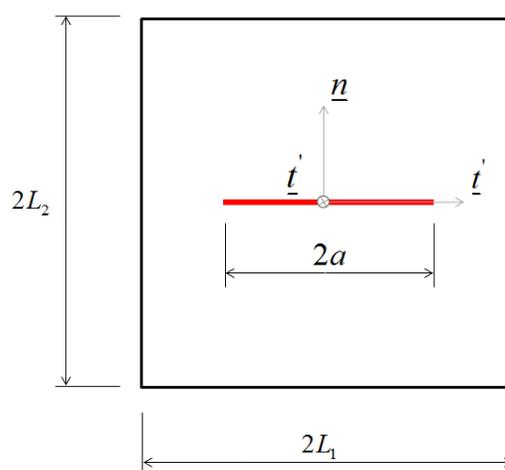


Figura 7.13: célula de base contendo uma junta

A geometria destacada na figura 7.13 indica que a célula de base descreve a mesma situação avaliada na seção 7.1. Ou seja, os resultados numéricos apresentados a seguir limitam-se a situação de um meio rochoso fraturado, permeado por uma família de juntas paralelas.

A rigor, a célula de base constitui a menor porção representativa de um meio periódico. Logo, as condições de contorno sobre a mesma devem respeitar os critérios citados na seção 3.4.3. Em geral, a implementação computacional das imposições exigidas pela periodicidade são difíceis de incorporar ao modelo. Lembrando que as condições de periodicidade se escrevem como:

$$\begin{cases} \underline{\xi} - \underline{E} \cdot \underline{x} & \text{periódico} & (\partial C) \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} & \text{antiperiódico} & (\partial C) \end{cases} \quad (7.29)$$

onde  $\underline{n}$  é o vetor normal externo a  $\partial C$ . Estas condições significam que  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  toma valores opostos e  $\underline{\xi} - \underline{E} \cdot \underline{x}$  toma valores iguais, em pontos localizados em faces opostas de  $\partial C$ .

Em situações particulares de simetria material, Maghous (1991) demonstra que é possível analisar o problema de concentração restringindo-se a uma parte (oitavo, quarto ou metade) da célula de base com condições de contorno clássicas. No caso bidimensional, paralelamente ao plano  $Ox_1x_2$ , a lei de comportamento na escala macroscópica pode ser formalmente escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{\text{hom}} & C_{1122}^{\text{hom}} & 0 \\ C_{2211}^{\text{hom}} & C_{2222}^{\text{hom}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Devido à linearidade do problema de concentração, a solicitação macroscópica pode ser decomposta em três solicitações elementares:

$$\begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & E_{12} \\ E_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

De acordo com Maghous (1991), em vista destes casos destacados acima, é possível limitar a análise ao quarto da célula  $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ , com condições de contorno definidas na figura 7.14. Mais especificamente:

- a) deformação uniforme  $E_{11}e_1 \otimes e_1$  (figura 7.14a);
- b) deformação uniforme  $E_{22}e_2 \otimes e_2$  (figura 7.14b);
- c) deformação cisalhante  $E_{12}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$  (figura 7.14c).

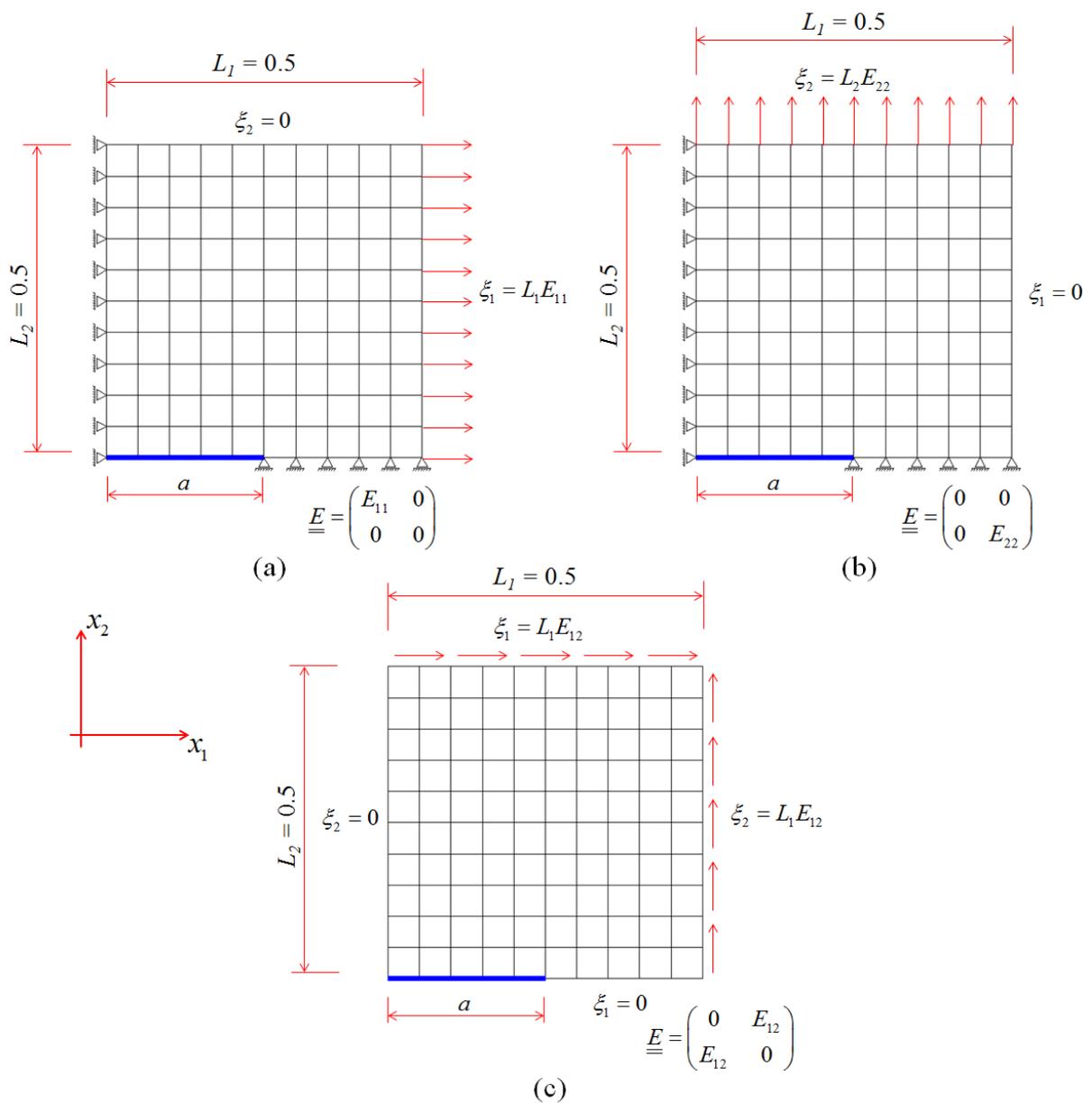


Figura 7.14: condições de contorno aplicadas sobre a célula unitária

No caso (a), a expressão (7.29) se reduz a:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{\text{hom}} & C_{1122}^{\text{hom}} & 0 \\ C_{2211}^{\text{hom}} & C_{2222}^{\text{hom}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

A relação acima permite determinar  $C_{1111}^{\text{hom}}$  e  $C_{2211}^{\text{hom}}$ . As tensões macroscópicas  $\Sigma_{11}$  e  $\Sigma_{22}$  são obtidas diretamente da regra das médias, agora particularizada como uma média sobre uma superfície  $S$  e não mais sobre um volume, ou seja:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_c = \frac{1}{S} \int_c \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \, dS \quad (7.33)$$

Similarmente, as mesmas considerações acima são válidas para os demais estados de deformação indicados por (b) e (c). Assim, de (b), se calcula  $C_{2222}^{\text{hom}}$  e  $C_{1122}^{\text{hom}}$  e a partir de (c) é possível determinar  $C_{1212}^{\text{hom}}$ .

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^{\text{hom}} & C_{1122}^{\text{hom}} & 0 \\ C_{2211}^{\text{hom}} & C_{2222}^{\text{hom}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ E_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

$$\Sigma_{12} = C_{1212}^{\text{hom}} \cdot E_{12} \quad (7.35)$$

Para efetuar a avaliação segundo o método dos elementos finitos nas situações indicadas anteriormente são adotados valores numéricos condizentes com as propriedades elásticas de meios rochosos ( $k_s = 36 \text{ GPa}$ ,  $\mu_s = 12 \text{ GPa}$  e  $\nu_s = 0,25$ ). As rigidezes normal e transversal da junta são definidas como  $k_n = 50 \text{ GPa/m}$  e  $k_t = 20 \text{ GPa/m}$ . Quanto à geometria da

célula de base, tem-se que  $L_1 = L_2 = 0,5 \text{ m}$ . Como  $\mathcal{N} = 1$  (uma junta na célula), o parâmetro densidade de fraturas é agora igual a  $\varepsilon = a^2$  (particularizado para análise bidimensional).

As análises são realizadas de modo a variar o comprimento  $a$  da junta, com  $a = [0.1, 0.2, 0.3]$ . Adotou-se a hipótese de efetuar os estudos sempre através de três malhas com refinamentos distintos (figura 7.15). Apenas os nós que formam a descontinuidade são dotados de elementos coesivos, que simulam a transferência de esforços ao longo de toda a extensão da mesma. Neste ponto, o problema analisado aqui difere da teoria desenvolvida por Barenblatt, onde as tensões coesivas são restritas a uma pequena zona na ponta da fratura.

Logo, a teoria de Barenblatt é aqui aplicada em outro âmbito, com o propósito de simular a transferência de esforços ao longo de toda a junta, ou seja, um problema típico de meios rochosos fraturados e não como um problema clássico de Mecânica da Fratura.

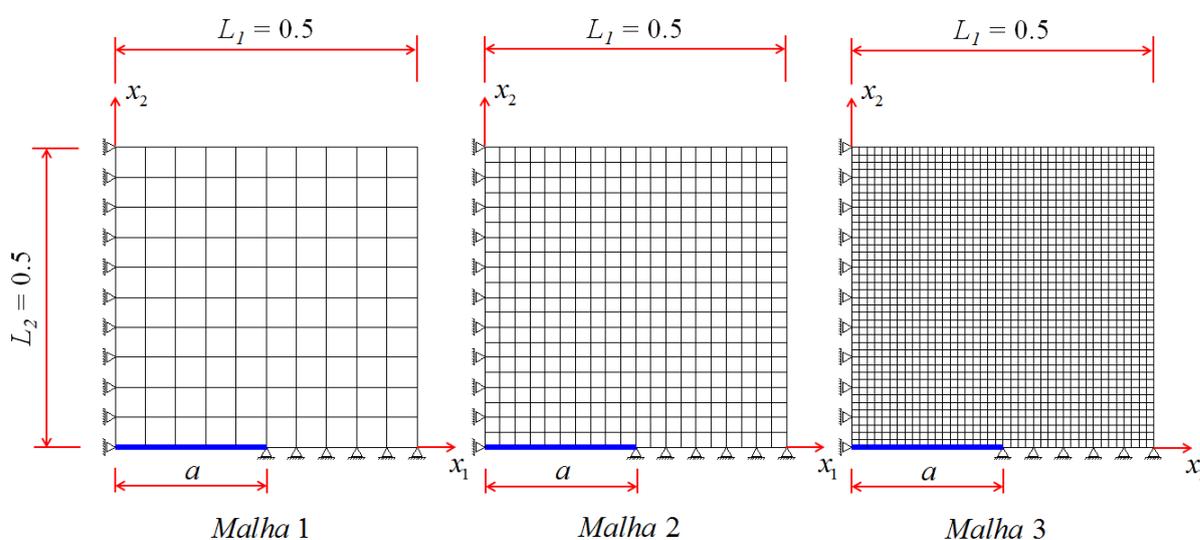


Figura 7.15: malhas do estudo com diferentes refinamentos, para  $L_1 = L_2 = 0,5 \text{ m}$

As três malhas utilizadas são compostas por elementos finitos quadriláteros de quatro nós (elementos volumétricos), além de, obviamente, os elementos coesivos inseridos apenas nos nós que representam a descontinuidade para cada comprimento de  $a$ . Elas possuem as seguintes características:

- a) malha 01 – 100 elementos volumétricos e 2/4/6 elementos coesivos;
- b) malha 02 – 400 elementos volumétricos e 4/8/12 elementos coesivos;

c) malha 03 – 800 elementos volumétricos e 8/16/24 elementos coesivos.

Os resultados para as componentes do tensor elástico homogeneizado são demonstrados na figura 7.16. A curva indica a solução encontrada via abordagem micromecânica pelo uso da estimativa Mori-Tanaka. Os pontos indicam as respostas obtidas via elementos finitos, segundo as três malhas empregadas no estudo para diferentes comprimentos da junta,  $a = [0.1, 0.2, 0.3]$ .

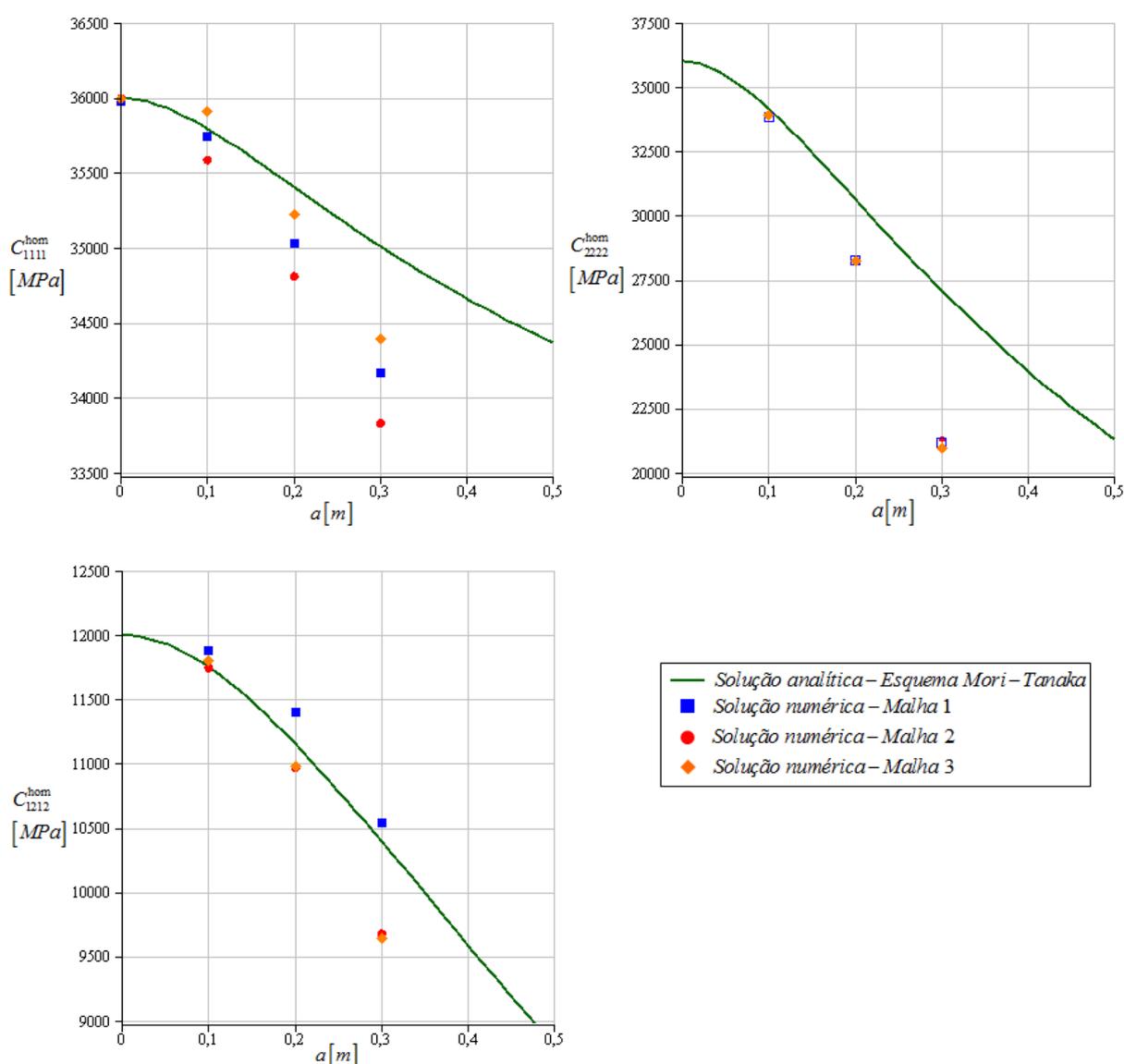


Figura 7.16: comparação dos resultados da análise numérica para as componentes do tensor elástico homogeneizado

Em virtude da figura 7.16, pode-se notar que as respostas são razoavelmente próximas, principalmente para valores pequenos de  $a$ . Salienta-se que a escala dos gráficos foi modificada para melhor retratar os resultados para as três malhas distintas. No caso da ausência da descontinuidade ( $a = 0$ ), retorna-se ao problema elástico simples, onde a primeira componente do tensor dos módulos elásticos é  $C_{1111}^s = 36 \text{ GPa} = 36000 \text{ MPa}$ . A figura 7.16 demonstra que este limite é atingido com as três malhas adotadas quando se faz  $a = 0$ .

É necessário ressaltar que a comparação dos resultados numéricos e analíticos deve ser avaliada tomando-se em conta a periodicidade arbitrada na análise via método dos elementos finitos. Na solução utilizando a estimativa Mori-Tanaka, admite-se que as fraturas são paralelas, mas sua disposição no VER não respeita uma determinada regularidade espacial. Já no caso da célula de base (análise numérica), a condição de periodicidade das fraturas impõe uma distribuição espacial ordenada do meio macroscópico. Logo, as variações dos resultados para o tensor elástico demonstradas na Figura 7.16 decorrem desta diferença.

Ainda assim, para valores de  $a$  bastante inferiores ao tamanho da célula de base, as respostas via soluções numéricas e analíticas são semelhantes. Deve-se lembrar de que a solução pela estimativa Mori-Tanaka é baseada no trabalho de Eshelby para uma inclusão em um meio infinito. Logo, ela foi desenvolvida sobre um VER. Neste caso, para garantir uma separação de escalas bem definida, o tamanho da descontinuidade deve ser reduzido se comparado à dimensão do VER. Nos meios periódicos, tal condição não precisa ser respeitada. Logo, não é conveniente utilizar a estimativa Mori-Tanaka para situações onde o comprimento  $a$  da junta é da mesma ordem do tamanho do VER.

A simetria do tensor elástico, obviamente, continua válida no estudo em questão. Portanto a igualdade  $C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}}$  permanece verdadeira. Como estas duas componentes são determinadas em diferentes estados de deformação, tal verificação se torna uma boa referência para medição da qualidade dos resultados obtidos. Esta comparação está demonstrada na figura 7.17.

Novamente a escala do gráfico é alterada para melhor indicar a variação dos valores encontrados. Como já citado anteriormente, os resultados para o tensor elástico são muito próximos para valores pequenos de  $a$ . Os resultados para  $C_{1122}^{\text{hom}}$  e  $C_{2211}^{\text{hom}}$  via análise numérica

são semelhantes, indicando convergência na solução segundo os dois diferentes estados de carga aplicados.

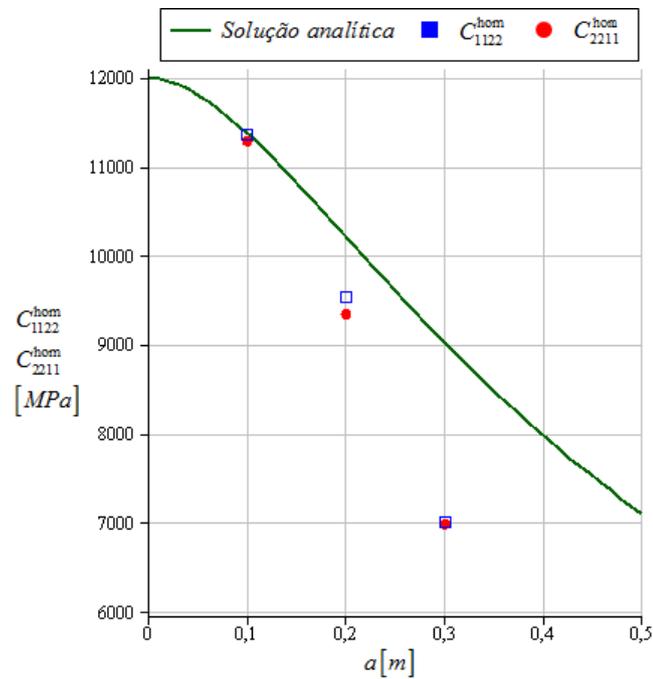


Figura 7.17: verificação da simetria do tensor elástico para as componentes  $C_{1122}^{hom}$  e  $C_{2211}^{hom}$  via homogeneização numérica

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, a análise micromecânica do comportamento de maciços rochosos fraturados, cujas cavidades são preenchidas por um fluido pressurizado foi apresentada. Inspirado nos resultados de Maghous et al. (2013), demonstrou-se o conceito de tensor de concentração de tensões no âmbito dos meios que apresentam descontinuidades, mediante consideração do deslocamento relativo ao longo das superfícies das juntas.

Também foram apresentadas as duas equações de estado para o meio rochoso fraturado, saturado com um fluido pressurizado, com uma rede interconectada de descontinuidades. Estes resultados podem ser vistos como uma extensão da teoria de Biot em poroelasticidade para tais materiais sob estas condições específicas.

O papel específico desempenhado pelo coeficiente de Biot das juntas merece ser discutido em detalhe. Na situação em que todas as juntas são caracterizadas pelo mesmo coeficiente de Biot, é demonstrado que o coeficiente de Biot homogeneizado e módulo Biot estão relacionados com o tensor homogeneizado dos módulos drenados. Isto significa estender para o caso de rochas com descontinuidades as relações clássicas disponíveis para meios porosos. Do ponto de vista prático, isto significa que a determinação das propriedades poroelásticas se reduz a um problema de homogeneização elástico no caso drenado, ou seja, na ausência do fluido pressurizado.

A solução do problema de localização sobre o VER é apresentado mediante a resolução de dois problemas elementares: um problema (P1), que corresponde ao caso drenado e um problema (P2), que descreve situação onde as juntas estão preenchidas por um fluido pressurizado com deformação macroscópica impedida. Por se tratar de um problema linear, tal decomposição é possível. Logo, os campos de tensão e deformação são resultados da soma das parcelas individuais oriundas de (P1) e (P2).

Maghous et al. (2013) propõem uma solução para um meio fraturado contendo juntas curtas paralelas, reproduzida aqui, na seção 7.2. Neste trabalho, este resultado foi estendido para a situação onde as descontinuidades estão distribuídas aleatoriamente em todas as direções do

maciço. Em ambos os casos, aplicações numéricas ilustram as expressões obtidas, demonstrando o comportamento dos parâmetros envolvidos.

As soluções analíticas encontradas estão baseadas em estimativas, cuja própria definição não permite estabelecer a precisão das respostas determinadas, indicando apenas uma propensão. Assim, as análises numéricas são realizadas no intuito de avaliar comparativamente a abordagem utilizada na solução dos dois problemas destacados em 7.1 e 7.2. Obviamente, o método dos elementos finitos não representa uma resposta definitiva sobre os problemas propostos e, portanto, não deve ser tratado como uma solução exata.

No entanto, a convergência dos resultados em ambas as análises, principalmente quando a junta possui dimensão reduzida se comparada à CUR, é um forte indicativo da adequação das soluções analíticas apresentadas. A diferença ocasionada pelo uso do VER na solução analítica e da CUR nos estudos aplicando o MEF conduz a um distanciamento nas soluções encontradas, justamente quando o comprimento da junta atinge dimensões similares ao tamanho da porção representativa. Ou seja, para maiores valores de  $a$ , a aplicação da estimativa Mori-Tanaka já não é conveniente. Tal situação é esperada, já a que a mesma é desenvolvida sobre o trabalho de Eshelby para uma inclusão em um meio infinito. Neste caso, tipicamente, a dimensão da inclusão é reduzida em relação ao meio no qual está inserida.

Algumas considerações específicas foram tomadas para analisar numericamente o problema em estado plano de deformações. As juntas, antes modeladas como esferoides oblongos, são então tratadas como inclusões cilíndricas. Apesar desta limitação, os resultados permaneceram dentro de limites adequados.

Mesmo com os avanços da informática, implementar diretamente as heterogeneidades da microestrutura acarreta um grande esforço computacional. Assim, a técnica de homogeneização apresenta uma ampla vantagem nos problemas de Engenharia, pois simplifica consideravelmente a análise do comportamento dos materiais. Contudo, as diferentes malhas usadas nas análises, com diferentes níveis de refinamento, mostraram que, em problemas elásticos, mesmo uma malha grosseira tende a boas respostas. Isto acontece porque as propriedades efetivas são determinadas em função das médias das tensões. Esta operação acaba por diluir qualquer efeito das tensões localizadas na ponta da fratura.

Por fim, em caráter geral, os resultados obtidos demonstraram ser coerentes, pois ambas as abordagens (analítica e numérica) conduziram a respostas convergentes dentro da faixa onde ambas apresentam validade. A metodologia aplicada indica de maneira adequada o comportamento dos maciços rochosos fraturados, considerando inclusive o acoplamento hidráulico-mecânico causado pela presença do fluido pressurizado.

Um aspecto importante para trabalhos futuros é a implementação de modelos numéricos tridimensionais, que permitissem a avaliação das expressões dadas na seção 7.1. Além disso, a aplicação de uma rotina para geração aleatória das descontinuidades permitiria avaliar os resultados expostos na seção 7.2, inclusive do ponto de vista estatístico. Também seria possível verificar a qualidade dos resultados para uma grande quantidade de juntas e ainda verificar de modo aprofundado o impacto do refinamento da malha na solução.

Seria também interessante expandir as análises apresentadas com o acréscimo das condições de escoamento do fluido presente nas fraturas, cuja aplicação é de grande interesse na Engenharia de petróleo ou na questão dos reservatórios subterrâneos. Compreender o movimento dos fluidos permite elaborar projetos adequados às reais condições do maciço, além de evitar sérios riscos ambientais quanto à dispersão de resíduos tóxicos em lençóis freáticos.

## REFERÊNCIAS

- ADVANI, S. G.; TUCKER, C. L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. **Journal of Rheology**, vol. 31, n. 8, p. 751-784, 1987.
- ATTA, A. **Analyse par homogénéisation élastoplastique des ouvrages en milieux rocheux fracturés**. 2004. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media**. Kluwer, New York, 1984.
- BANDIS, S.; LUMSDEN, A.; BARTON, N. Fundamentals of Rock Joint Deformation. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, Great Britain, vol. 6, n. 6, p. 249 -268, 1983.
- BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium of crack in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, vol.7, p. 55-129, 1962.
- BARTHELEMY, J. F. A. **Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux**. 2005. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- BARTON, N.; LIEN, R.; LUNDE, J. Engineering classification of rock masses for the design of tunnel support. **Rock Mechanics**. vol. 6, 189-236, 1974.
- BEKAERT, A.; MAGHOUS, S. Three-dimensional yield strength properties of jointed rockmass as a homogenized medium. **Mechanics of Cohesive-frictional Materials**, vol. 1, p. 1-24, 1996.
- BENSOUSSAN, A. J.; LIONS, L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic analysis for periodic structures**. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1978.
- BIENIAWSKI, Z.T. **Engineering Rock Mass Classifications**. John Wiley & Sons, 1989.
- BIOT M. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, vol. 12, p. 155-164, 1941.
- BUDIANSKY B.; O'CONNELL R.J. Elastic moduli of cracked solid. **International Journal of Solids and Structures**; vol. 12, p. 81-97, 1976.
- COUSSY, O. **Poromechanics**. John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- DE BUHAN P.; MAGHOUS S. Comportement élastique non linéaire macroscopique d'un matériau comportant un réseau de joints. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy**, Paris; vol. 324, p. 209-218, 1997.
- DEUDÉ, V. **Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux: apport des méthodes de changement d'échelle**. 2002. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.

DORMIEUX L.; MAGHOUS S.; KONDO D.; SHAO J. F. Macroscopic poroelastic behavior of a jointed rock. In: AURIAULT et al., editors. Proceedings of the 2nd Biot conference, **Poromechanics II**, Grenoble, 2002. p. 179-183.

DORMIEUX L.; KONDO D.; ULM F. J. **Microporomechanics**. John Wiley & Sons Ltd, 2006.

DUGDALE, D.S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, vol. 8, p. 100-108, 1960.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society of London**, vol. A 241, p. 376-396, 1957.

FARMER, I. W. **Engineering Properties of Rocks**. Spon Editors, London, 1968.

GROSS, D.; SEELIG, T. Micromechanics and homogenization. In: **Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics (Mechanical Engineering Series)**. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Germany. Cap. 8, p. 217-287. 2006.

GRUESCU, C. **Approche par changement d'échelle de l'endommagement des matériaux anisotropes**: application aux composites à matrice fragile. 2004. Thèse de Doctorat, Université de Lille.

HASHIN, Z. Analysis of composite materials – A survey. **Journal Applied Mechanics**, vol. 50, p. 481-505, 1983.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 10, p. 335-342, 1962.

HILL R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 11, p. 357-372, 1963.

HILL R. The essential structures of constitutive laws for metal composites and polycrystals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 15, p. 79-95, 1967.

HOEK, E. **Practical Rock Engineering**. 2007. Disponível em: [http://www.rocscience.com/hoek/pdf/Practical\\_Rock\\_Engineering.pdf](http://www.rocscience.com/hoek/pdf/Practical_Rock_Engineering.pdf)

JAEGER, J. C.; NEVILLE G. W.; N. G. W.; ZIMMERMAN, R. **Fundamentals of Rock Mechanics**, 4th edition, Wiley-Blackwell, 2007.

MAGHOUS, S. **Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique**: approche numérique. 1991. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.

MAGHOUS S.; DE BUHAN P.; DORMIEUX L.; GARNIER D. Comportement élastoplastique homogénéisé d'un milieu rocheux fracturé. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics**, Paris, vol. 328, p. 701-708, 2000.

MAGHOUS S.; BERNAUD D.; FRÉARD J.; GARNIER D.; Elastoplastic behavior of jointed rock masses as homogenized media and finite element analysis. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, vol. 45, p. 1273-1286, 2008.

MAGHOUS S.; DORMIEUX L.; KONDO D.; SHAO J. F.; Micromechanics approach to poroelastic behavior of a jointed rock. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, vol. 37, p. 111-129, 2013.

MANDEL, J.; **Plasticité classique et viscoplasticité**. CISM Lecture Notes, n. 97, Springer, 1972.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metallurgica**, vol. 21, p. 571-574, 1973.

MURA, T. **Micromechanics of Defects in Solids**. 2<sup>nd</sup> edition. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers; 1987.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids. **Mechanics of Materials**, vol. 31, p. 673-688, 1999.

NOGOSEKE, E. **Compartimentação de maciços rochosos para projetos básicos de PCH's usando o sistema RMR**: Aplicação no projeto básico da PCH Morro Grande - RS. 2009. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.

OSTOJA-STARZEWSKI, M. Material spatial randomness: From statistical to representative volume element. **Probabilistic Engineering Mechanics**, vol. 21, p. 112-132, 2006.

PASA DUTRA, V. F. **Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização**. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

POUYA, A.; M. GHOREYCHI, M. Determination of rock mass strength properties by homogenization. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, vol. 25, p. 1285-1303, 2001.

REUSS, A. Berchung der Fiessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. **Z. Angew. Math. Mech**, vol. 9, p. 49–58, 1929.

SACHS, G. Zur Ableitung einer Fliessbedingung. **Z. Ver. Dtsch. Ing.**, vol. 72, p. 734-736, 1928.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non-homogeneous Media and Vibration Theory**. Lecture Note in Physics, vol 127, Springer, Berlin, 1981.

SUQUET, P. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In SANCHEZ-PALENCIA E.; ZAOUI A. (Eds), **Homogenization Techniques for Composite Media**, Springer, Berlin, p. 193-278, 1987.

TAYLOR, G. I. Plastic strain in metals. **J. Inst. Met.**, vol. 62, p. 307-324, 1938.

TERZAGUI, K. **Theoretical soil mechanics**. John Wiley & Sons Ltd, New York, 1943.

VALLEJO, L. I. G.; FERRER, M.; ORTUÑO, L.; OTEO, C. **Ingeniería Geológica**. Prentice Hall, Madrid, 2002.

VOIGT, W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. **Wied. Ann**, vol. 38, p. 573–587, 1889.

XU, X. P.; NEEDLEMAN, A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. **Journal Mech. Phys. Solids**, vol.42, p.1397-1424, 1994.

ZAOUI, A. Continuum Micromechanics: Survey. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 128, n. 8, p. 808-816, 2002.

## Apêndice A

### EXPRESSÕES PARA O TENSOR DE ESHELBY

No capítulo 7, foram apresentadas as expressões do tensor de Eshelby para inclusões modeladas como esferoides oblongos. Aqui, são expostas expressões para duas outras geometrias também bastante utilizadas: esferoides alongados e cilindros de comprimento infinito (figura A.1).

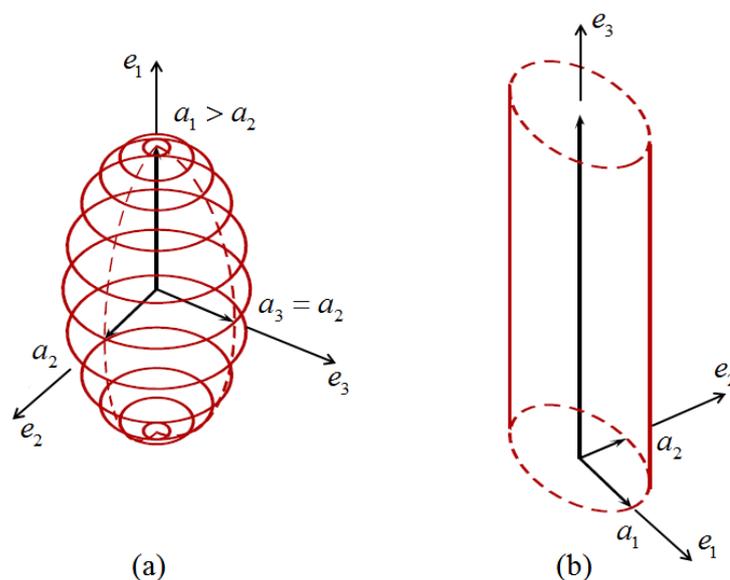


Figura A.1: elipsoide alongado (a) e cilindro de comprimento infinito (b)  
(BARTHELEMY, 2005)

Os esferoides alongados são muito usados no estudo de compósitos ou até mesmo do concreto, simulando o comportamento de uma matriz reforçada pela presença de fibras. As condições de simetria detalhadas para o esferoide oblongo permanecem válidas neste caso. Novamente, a inclusão tem formato de um elipsoide de revolução em torno do eixo  $e_1$ . Ou seja, nas outras direções,  $e_2$  e  $e_3$ , os eixos possuem o mesmo comprimento ( $a_2 = a_3$ ). O fator de aspecto continua sendo  $X = a_1 / a_2 = a_1 / a_3$ . Agora, tem-se que  $a_1 > a_2$ , portanto,  $X > 1$ .

Para o caso limite onde  $X \rightarrow +\infty$ , ou seja, quando as inclusões se resumem a uma fibra, os coeficientes não nulos de  $S_{ijkl}$  para primeira ordem em relação a  $X$  são:

$$\begin{aligned}
S_{2222} = S_{3333} &= \frac{1}{8} \frac{5-4\nu_s}{1-\nu_s} - \frac{1}{4} \frac{1-2\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\ln X}{X^2} & S_{1111} &= \frac{2-\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\ln X}{X^2} \\
S_{2233} = S_{3322} &= -\frac{1}{8} \frac{1-4\nu_s}{1-\nu_s} + \frac{1}{4} \frac{1-2\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\ln X}{X^2} & S_{2211} = S_{3311} &= -\frac{1}{2} \frac{1-2\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\ln X}{X^2} \\
S_{1122} = S_{1133} &= \frac{1}{2} \frac{\nu_s}{1-\nu_s} + \frac{1}{2} \frac{1+\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\ln X}{X^2} & S_{1212} = S_{1313} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1+\nu_s}{1-\nu_s} \frac{\ln X}{X^2}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

As demais componentes do tensor de Eshelby são obtidas das relações de simetria citadas anteriormente  $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ . O coeficiente  $S_{2323}$  pode, mais uma vez ser calculado por  $S_{2323} = 1/2(S_{3333} - S_{2233})$ .

As inclusões cilíndricas, inseridas em uma matriz isotrópica, devem ser entendidas como uma extensão do caso do elipsoide alongado destacado acima, onde uma das dimensões é muito maior do que as demais ( $a_3/a_1 \rightarrow \infty$  e  $a_3/a_2 \rightarrow \infty$ ). O fator de aspecto é dado por  $X = a_2/a_1$ . Não se trata de um elipsoide de revolução, mas sim uma base elíptica dirigida ao longo do eixo  $e_3$ . As componentes não nulas de  $\mathbb{S}$  são mostradas em (A.2). As demais são novamente determinadas pelas relações de simetria  $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ .

$$\begin{aligned}
S_{1111} &= \frac{X(3+2X-2\nu_s(1+X))}{2(1+X)^2(1-\nu_s)} & S_{2222} &= \frac{2+3X-2\nu_s(1+X)}{2(1+X)^2(1-\nu_s)} \\
S_{1122} &= \frac{X(-1+2\nu_s(1+X))}{2(1+X)^2(1-\nu_s)} & S_{2211} &= \frac{-X+2\nu_s(1+X)}{2(1+X)^2(1-\nu_s)} \\
S_{1133} &= \frac{\nu_s X}{(1-\nu_s)(1+X)} & S_{2233} &= \frac{\nu_s}{(1-\nu_s)(1+X)} \\
S_{1212} &= \frac{1+X^2+X-\nu_s(1+X)^2}{2(1+X)^2(1-\nu_s)} & S_{1313} &= \frac{X}{2(1+X)} \\
S_{2323} &= \frac{1}{2(1+X)}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

No contexto de estado plano de deformação, para as inclusões cilíndricas de base elíptica, as componentes do tensor de Eshelby não envolvem as relações na direção  $\underline{e}_3$ .

## Apêndice B

### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A integração das descontinuidades ao longo de todas as direções possíveis requer que o tensor de Eshelby possa ser escrito em termos de coordenadas globais. Consideram-se duas bases ortogonais  $X_i$  e  $X'_i$ , de acordo com a figura B.1:

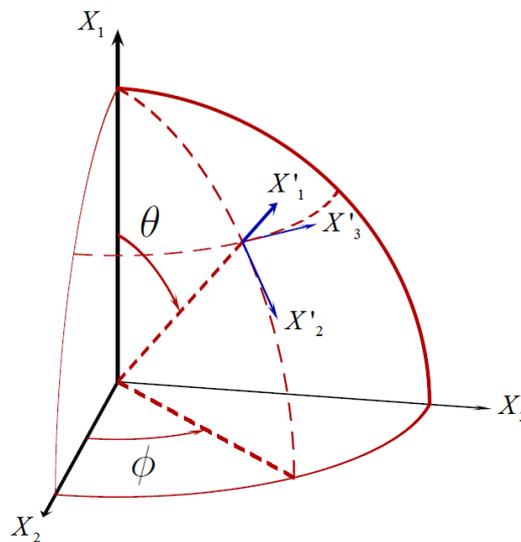


Figura B.1: sistemas de coordenadas e a descrição dos ângulos de Euler  $\theta$  e  $\phi$  (BARTHELEMY, 2005)

Através dos ângulos de Euler  $\theta$  e  $\phi$ , um dado vetor unitário  $e'_i$  no sistema local, fixado na inclusão, se relaciona a um vetor unitário  $e_i$  no sistema global da seguinte forma:

$$e_i = q_{ij} e'_i \quad (\text{C.1})$$

onde:

$$q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta)\cos(\phi) & \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Um tensor de quarta ordem  $\mathbb{H}$  em coordenadas globais  $ijkl$  se relaciona com o tensor  $\mathbb{H}'$  em coordenadas locais  $pqrs$  como:

$$H_{ijkl} = q_{pi}q_{qj}q_{rk}q_{sl}H'_{pqrs} \quad (\text{C.3})$$

## Apêndice C

### COMPONENTES DO TENSOR ELÁSTICO HOMOGENEIZADO PARA O CASO DE JUNTAS MODELADAS COMO INCLUSÕES CILÍNDRICAS

Para o caso das juntas modeladas como inclusões cilíndricas, respeitando-se a circunstância de estado plano de deformações, fazendo o fator de aspecto  $X = b/a \rightarrow 0$ , as componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , no contexto da estimativa Mori-Tanaka, no plano local ( $\underline{e}_1 = \underline{n}$ ,  $\underline{e}_2 = \underline{t}$ ) são então:

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^{\text{hom}} = C_{2222}^{\text{hom}} &= \frac{(3k^s + 4\mu^s)(12k^s \pi \varepsilon \mu^s + 6k^s \mu^s + 3k^s a k_n + 4\pi \varepsilon \mu^{s^2} + 4a k_n \mu^s + 2\mu^{s^2})}{18k^s \mu^s + 9k^s a k_n + 12a k_n \mu^s + 6\mu^{s^2} + 9k^{s^2} \pi \varepsilon + 24k^s \pi \varepsilon \mu^s + 16\pi \varepsilon \mu^{s^2}} \\
 C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} &= \frac{(3k^s - 2\mu^s)(6k^s \mu^s + 3k^s a k_n + 4a k_n \mu^s + 2\mu^{s^2})}{18k^s \mu^s + 9k^s a k_n + 12a k_n \mu^s + 6\mu^{s^2} + 9k^{s^2} \pi \varepsilon + 24k^s \pi \varepsilon \mu^s + 16\pi \varepsilon \mu^{s^2}} \\
 C_{1212}^{\text{hom}} &= \frac{2\mu^s (6k^s \mu^s + 3k^s a k_t + 4a k_t \mu^s + 2\mu^{s^2})}{6k^s \mu^s + 2\mu^{s^2} + 3k^s a k_t + 4a k_t \mu^s + 3k^s \pi \varepsilon \mu^s + 4\pi \varepsilon \mu^{s^2}}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$