

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Momentos de funções de estrutura na QCD em ordem dominante \*

Natália de Lima Calleya

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a  
orientação do Professor Dr. Emerson Luna

Porto Alegre  
Dezembro de 2012.

---

\* Trabalho financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

# Resumo

Será feita uma revisão histórica dos acontecimentos que levaram a formulação da Cromodinâmica Quântica (QCD), introduzindo o formalismo necessário através do estudo de experimentos de espalhamento inelástico profundo (DIS). Os resultados desses experimentos são discutidos e mostram as primeiras evidências para a existência da força forte e seus mediadores - os glúons. Ao investigar as funções de estrutura, obtém-se as equações de evolução para as densidades partônicas, conhecidas como equações DGLAP.

Dadas as equações DGLAP, essas são resolvidas utilizando o método dos momentos, o qual faz uso da transformada de Mellin para tornar a equação original integro-diferencial em outra equação apenas diferencial. É um método amplamente empregado para resolver as DGLAP, pois simplifica a resolução sem perda de generalidade. Os cálculos feitos ao longo do trabalho são apresentados no texto ou então em seus apêndices.

# Abstract

A historical review of the events that led to the development of Quantum Chromodynamics (QCD) will be presented, introducing the necessary formalism by studying deep inelastic scattering (DIS) experiments. The results of these experiments will be discussed and show the first evidence for the existence of the strong force and its carries - the gluons. By investigating structure fuctions, the evolution equations for the partonic densities are obtained, known as DGLAP equations.

Given the DGLAP equations, theses are solved by the moment method, which uses the Mellin transform to turn the original integro-differential equation into a differential one. It is a broadly used method to solve DGLAP equations, because it simplifies the solving without loss of generality. The calculations made throughout this work are presented either in the text or its appendices.

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| Introdução . . . . .  | 3         |
| <b>1. A evolução da QCD . . . . .</b>                         | <b>5</b>  |
| 1.1 Modelo a Quarks . . . . .                                 | 5         |
| 1.2 Modelo Quark-Párton . . . . .                             | 7         |
| 1.2.1 Modelo a Pártons . . . . .                              | 9         |
| 1.2.2 Escalamento de Bjorken . . . . .                        | 10        |
| 1.3 Novo número quântico: cor . . . . .                       | 12        |
| 1.3.1 Princípio de Pauli . . . . .                            | 12        |
| 1.3.2 Aniquilação de $e^-e^+$ em hádrons . . . . .            | 12        |
| 1.4 Surgimento dos glúons . . . . .                           | 13        |
| 1.4.1 Violações de Escalamento . . . . .                      | 13        |
| 1.4.2 Momentum faltante . . . . .                             | 14        |
| <b>2. QCD Perturbativa . . . . .</b>                          | <b>16</b> |
| 2.1 A Lagrangiana da QCD . . . . .                            | 16        |
| 2.2 Modelo a Pártons da QCD . . . . .                         | 18        |
| 2.2.1 Emissão de glúons . . . . .                             | 18        |
| 2.2.2 Interpretação das funções de <i>splitting</i> . . . . . | 20        |
| 2.3 Cálculo de momentos . . . . .                             | 20        |
| 2.3.1 Dimensões Anômalas . . . . .                            | 21        |
| 2.4 Solução no espaço de momentos . . . . .                   | 22        |
| <b>3. Conclusões e Perspectivas . . . . .</b>                 | <b>24</b> |
| <b>A. Constante de acoplamento forte . . . . .</b>            | <b>25</b> |
| <b>B. Dimensões Anômalas . . . . .</b>                        | <b>27</b> |

**Índice** **2**

---

**Referências** . . . . . **30**

# Introdução

A física de partículas busca pelos componentes fundamentais da natureza e pela compreensão das interações entre estes. Para isso, os experimentos realizados envolvendo espalhamento entre partículas são imprescindíveis para provar modelos teóricos propostos e também apontar novas possibilidades ainda não previstas.

O experimento de Rutherford, por exemplo, realizado em 1911, tinha como objetivo verificar o modelo atômico “pudim de passas” de Thomson [6]. Porém, após incidir um feixe de partículas alfa - que são núcleos de Hélio - sobre uma delgada folha de ouro, o resultado obtido por Rutherford demonstrou que o modelo de Thomson não estava correto. Ao estudar a distribuição angular das partículas espalhadas, Rutherford concluiu que o átomo deveria ser composto por um núcleo com carga positiva, de dimensão muito menor que o átomo do qual faz parte. A partir de então, a ideia que os componentes dados como fundamentais da matéria - como o elétron e o próprio núcleo atômico - poderiam ser compostos por outras partículas mais elementares pareceu natural.

Os desenvolvimentos teóricos que seguiram levaram ao surgimento do conceito de *quarks* como constituintes do próton e outros hádrons da mesma maneira que o primeiro é constituinte do núcleo atômico. Gell-Mann, depois de propor a *Eightfold Way*[2] em 1961 como forma de classificar e organizar as partículas encontradas até a época, sugeriu os *quarks* como componentes básicos de hádrons.

Esse modelo foi questionado devido ao fato que nenhum quark livre fora observado e problemas com o Princípio de Exclusão de Pauli [5], mas em 1964 Greenberg propôs mais um atributo aos quarks: a *cor*[6]. Assim, cada quark poderia ter uma de três cores ou anticolors possíveis: verde, vermelho e azul. Ainda, é proposto que todos os hádrons não possuam carga de cor e com isso tem-se uma justificativa para o confinamento dos quarks.

Para a prova experimental dessa nova subestrutura da matéria, o SLAC - sigla em inglês para Centro de Aceleração Linear de Stanford - desempenhou um papel importante ao realizar experimentos de espalhamento inelástico profundo entre elétrons e prótons. De maneira análoga ao experimento de Rutherford, os resultados não apontaram o próton como uma esfera rígida, mas sim formado por três partículas pontuais.

Foi através deste tipo de espalhamento - *Deep Inelastic Scattering*, DIS em inglês - que foi possível decifrar a estrutura do próton: parametrizando essa pelas chamadas funções

de estrutura  $F_1$  e  $F_2$ , que são funções da escala de energia; também foi descoberto que havia mais constituintes no próton que seus originais 3 quarks. A partir de então, foram introduzidas as distribuições de pártons, assim chamados os componentes de um próton.

A Cromodinâmica Quântica (QCD), teoria que se propõe a estudar as interações entre os quarks e glúons - bósons mediadores da força forte, uma das quatro forças fundamentais da natureza - procura entender como estas distribuições partônicas evoluem através das equações de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, ou simplesmente equações DGLAP. O interesse na compreensão do comportamento das distribuições é justificado por estas serem partes centrais no cálculo de seções de choque hadrônicas em altas energias, sendo assim importantes para o entendimento de processos envolvendo QCD.

Neste trabalho é feita uma revisão sobre o desenvolvimento da física das interações fortes que evoluiu para a QCD: o modelo a quarks, experimentos de DIS que levaram a formulação do modelo quark-párton e outros testes quantitativos da QCD. Em seguida, o formalismo para o DIS e suas implicações são estudados para posteriormente introduzir as equações de evolução das distribuições partônicas, DGLAP. Ainda, são apresentadas funções de *splitting* e as dimensões anômalas; as funções de distribuição partônica são estudadas utilizando a transformada de Mellin e as equações DGLAP são vistas em termos dos momentos das distribuições. Finalmente, obtém-se a solução da evolução DGLAP no espaço de Mellin.

## Capítulo 1

# A evolução da QCD

Apenas recentemente, com o desenvolvimento de robustos aceleradores de partículas, foi possível revelar a estrutura das partículas em escalas menores e responder à pergunta: do que é feita a matéria? Neste capítulo serão apresentadas as evidências experimentais que levaram a formulação da Cromodinâmica Quântica - QCD, teoria que investiga a interação forte.

### 1.1 Modelo a Quarks

A história da QCD remonta à física nuclear, quando percebeu-se que deveria atuar sobre os prótons e nêutrons uma força além da eletromagnética para que o núcleo fosse estável. Yukawa, em 1934, elaborou a primeira teoria para explicar essa nova força, que além de evidentemente forte agia em distâncias muito curtas, como visto em experimentos que seguiram [7]. Em sua teoria, Yukawa explica o alcance da força introduzindo bósons pesados como mediadores - chamados mésons - e prevê que esses tenham uma massa em torno dos 100 MeV. Na década de 40 o pión foi observado, com massa de 140 MeV, sustentando a hipótese de Yukawa, mas, devido ao alto valor medido experimentalmente para a constante de acoplamento, essa teoria não obteve resultados satisfatórios[10].

Ainda, notou-se que era possível criar novas partículas a partir de experimentos entre núcleos, com tempos de vida variando entre muitas ordens de grandeza. Os tempos curtos são associados a decaimentos via interações fortes, enquanto que longos via interação fraca. Partículas que apresentavam tempos de vida intermediários, sendo produzidas através da interação forte, porém que decaíam fracamente, tiveram seu comportamento anormal explicado por Gell-Mann e Pais, ao introduzirem um novo número quântico: a *estranheza*. Essa nova propriedade atribuída aos hádrons é conservada pela força forte, podendo entretanto não ser pela força fraca.

Na década de 60, devido a quantidade de partículas já descobertas, havia motivação para criar um método de classificação para o conjunto. A tentativa de Gell-Mann e Ne'emann



em 1961 utilizou dois números quânticos para fazer isto: o isospin e a estranheza proposta anos antes. Esse método, chamado *eightfold way* organizou as partículas em multipletos do grupo  $SU(3)$ , como mostrado abaixo, e ainda que a ideia fora desacreditada em seu início, posteriormente foi comprovada. A descoberta da partícula  $\Omega^-$ , com estranheza  $S = -3$  prevista por Gell-Mann em seu modelo, comprovou que era possível descrever as regularidades entre os hádrons empregando teoria de grupos [11].

Todas as representações utilizadas para classificar as partículas eram de dimensão mais altas que a representação fundamental do  $SU(3)$ , enquanto essa não era utilizada. Novamente Gell-Mann, juntamente com Zweig, postularam a existência de 3 novas partículas: os *quarks* up, down e strange. Os quarks seriam partículas hipotéticas, que poderiam construir todos os hádrons, mas para tal deveriam possuir carga elétrica fracionária, algo nunca observado em laboratório. Tinha-se um modelo que descrevia muito bem todas as partículas conhecidas até então, contudo não existia nenhuma comprovação experimental deste.

| Quark     | Spin | Parity | $e_q$ | $I$ | $I_3$ | $S$ | $B$  |
|-----------|------|--------|-------|-----|-------|-----|------|
| u         | 1/2  | +1     | +2/3  | 1/2 | +1/2  | 0   | +1/3 |
| d         | 1/2  | +1     | -1/3  | 1/2 | -1/2  | 0   | +1/3 |
| s         | 1/2  | +1     | -1/3  | 0   | 0     | -1  | +1/3 |
| $\bar{u}$ | 1/2  | -1     | -2/3  | 1/2 | -1/2  | 0   | -1/3 |
| $\bar{d}$ | 1/2  | -1     | +1/3  | 1/2 | +1/2  | 0   | -1/3 |
| $\bar{s}$ | 1/2  | -1     | +1/3  | 0   | 0     | +1  | -1/3 |

Fig. 1.1: Tabela com algumas propriedades dos quarks mais leves.

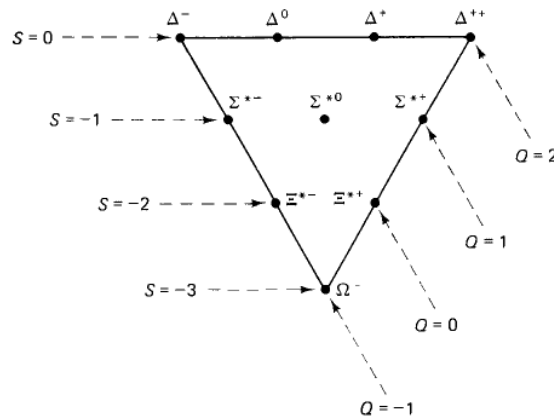


Fig. 1.2: Multipletto do  $SU(3)$  indicando as propriedades da partícula  $\Omega^-$ . Aqui os bárions estão distribuídos conforme sua estranheza  $S$  e carga elétrica  $Q$

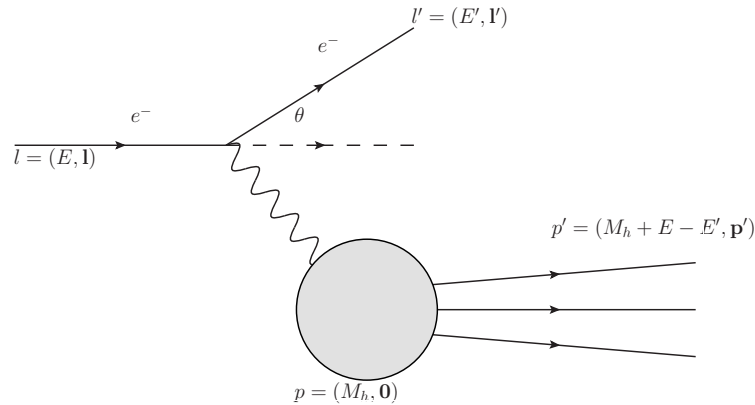
Usando-se quarks, os hádrons foram separados em dois grupos: os *bárions*, formados por 3 quarks; e os *mésons*, formados por um par quark anti-quark. É interessante notar

que apenas os multipletos nos quais há uma diferença igual a um múltiplo de três entre o número de quarks e anti-quarks são observáveis, garantindo que todas as partículas tenham carga elétrica inteira[11].

## 1.2 Modelo Quark-Párton

Por volta dos anos 50, os experimentos mostraram que o próton era uma partícula extensa, com dimensão da ordem de 1 fm e não uma partícula pontual. Entre as décadas de 60 e 70, foi possível identificar os quarks no interior do próton no Acelerador Linear de Stanford (SLAC). Apesar disso, nenhum quark livre fora observado e para muitos físicos esses não passavam de uma conveniência matemática.

Sendo o DIS de extrema importância para a compreensão da estrutura dos hádrons e da própria QCD, bem como para introduzir a nomenclatura necessária, será feita uma breve análise desse experimento. A analogia com o experimento de Rutherford é imediata: assim como foi provado que o núcleo possuía uma subestrutura, com o DIS é possível saber se há também subestrutura em hádrons: mais especificamente, o tratamento será feito para um próton.



**Fig. 1.3:** Cinemática do processo de DIS entre um elétron e um próton.

Para entender o processo de espalhamento mostrado na figura acima 1.3, trabalhará-se com unidades naturais, ou seja,  $c = 1$ . Seja um elétron com energia  $E$  espalhado por um próton inicialmente em repouso no referencial do laboratório, com energia igual a  $M_p$ . O espalhamento ocorre via a troca de um fóton virtual, e o estado final é caracterizado pela energia do elétron  $E'$  e da massa invariante de sistema hadrônico emergente,  $W$ . A Figura 1.3 contém todas as variáveis cinemáticas envolvidas. É útil introduzir novas variáveis para o tratamento desse experimento considerando o próton como uma partícula constituída por

três outras partículas pontuais. A primeira delas é o quadrado do momentum transferido, carregado pelo fóton virtual:

$$Q^2 = -(l - l')^2 = -(p - p')^2. \quad (1.1)$$

Por conviniência, é feita a seguinte convenção:  $Q^2 = -q^2$ . A partir de agora, apenas será utilizado a variável  $q$ . Tem-se ainda a perda de energia do elétron:

$$\nu = E - E' = \frac{q \cdot p}{2M_p}, \quad (1.2)$$

e a variável de Bjorken, que ficou conhecida assim devido a proposição do cientista da existência de um escalamento (*scaling*) - fenômeno que deveria ocorrer caso o próton fosse composto por partículas pontuais, ou seja, que o espalhamento dependa da razão

$$x_B = \frac{Q^2}{2M_p\nu}, \quad (1.3)$$

e não das variáveis  $Q^2$  e  $\nu$  independentemente. Percebe-se que  $x_B$  é uma variável adimensional e varia no intervalo entre 0 e 1. O escalamento de Bjorken foi observado no SLAC em 1968, porém a estrutura do próton não foi imediatamente ligada aos quarks de Gell-Mann [1]. A propriedade de escalamento será discutida novamente mais adiante. Na mesma época, Feynman propusera o entendimento dos espalhamentos hádron-hádron por meio de seus constituintes, os quais chamou de *pártons* e logo percebeu que os resultados do SLAC implicavam em partículas pontuais compondo o próton. Mesmo assim, levou-se um período de tempo para que essas fossem aceitas como quarks.

Após essa descoberta do SLAC, outros laboratórios realizaram medidas em energias mais altas e seus resultados foram apresentados em termo das *funções de estrutura*, que serão definidas agora. Para isso, é preciso conhecer a forma da seção de choque para o espalhamento entre um elétron e uma partícula de spin- $\frac{1}{2}$  com massa  $M_p$  e carga  $e_q$ , dada por [5]:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{E}{E'} \left\{ W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (1.4)$$

Na fórmula acima,  $\alpha$  representa a constante de estrutura fina e os dois fatores de forma  $W_1(Q^2, \nu)$  e  $W_2(Q^2, \nu)$  são chamados de funções de estrutura. Essas funções parametrizam a falta de conhecimento detalhado sobre a estrutura do próton, como indica a figura acima

1.3. São medidas experimentalmente através do ângulo de espalhamento e do momentum transferido pelo fóton no processo.

A forma das funções de estrutura para o caso oposto, espalhamento elástico, será relevante para a discussão sobre o modelo a pártons, sendo assim, neste caso  $W_1$  e  $W_2$  tornam-se:

$$W_1^{el}(Q^2, \nu) = e_q^2 \frac{Q^2}{4M_p^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_p}\right) ; \quad W_2^{el}(Q^2, \nu) = e_q^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_p}\right). \quad (1.5)$$

onde  $e_q$  representa a carga do quark atingido no espalhamento. Aqui a função delta garante que apenas um valor de  $\nu$  contribuirá ao realizar a integração .

### 1.2.1 Modelo a Pártons

No modelo a pártons o processo de espalhamento é tratado em um referencial no qual o próton está movendo-se muito rápido e assim, devido a dilatação do tempo, a taxa de interações entre seus constituintes diminui consideravelmente [5]. Como consequência disso, tem-se que um único processo não ocorre entre o elétron e o próton como um todo, mas sim com apenas um de seus constituintes - os pártons. Essa representação é válida quando a energia da partícula incidente é suficientemente grande para conseguir determinar a estrutura do alvo.

O processo elétron-próton é descrito então em termos de somas incoerentes de probabilidades de espalhamento elástico entre o fóton virtual e a partícula pontual dentro do nucleon. Para realizar esta descrição, é necessário dividir o quadrimomentum do próton entre todos seus pártons, fazendo então que cada um possua uma fração  $x_i$  do momentum total. Introduce-se junto à partição do momentum as chamadas *funções de distribuição partônicas*, do inglês *parton distribution functions* - PDF's, que indicam a probabilidade de um constituinte do próton carregar uma fração  $x_i$  de seu momentum.

Partindo desse modelo, as funções de estrutura podem ser reescritas como uma superposição de funções de estrutura elásticas, vide 1.5, com pesos  $f_i(x)$  e após somar sobre todos os pártons e integrar sobre as deltas, tem-se:

$$W_1(Q^2, \nu) = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) e_i^2 \frac{Q^2}{4x_i^2 M_p^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2x_i M_p}\right) = \sum_i e_i^2 f_i(x_B) \frac{1}{M_p} \quad (1.6)$$

e

$$W_2(Q^2, \nu) = \sum_i \int_0^1 dx_i f_i(x_i) e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2x_i M_p}\right) = \sum_i e_i^2 f_i(x_B) \frac{x_B}{\nu}. \quad (1.7)$$

É possível aqui identificar a variável de Bjorken,  $x_B$ , como a fração do momentum carregada pelo parton que fora atingido,  $x$ . É interessante notar que associação não é trivial já que  $x_B$  é um parâmetro experimental e  $x$  é parte do modelo teórico.

É comum redefinir as funções de estrutura da seguinte maneira:

$$F_1(x) \equiv M_p W_1 = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (1.8)$$

$$F_2(x) \equiv \nu W_2 = \sum_i x e_i^2 f_i(x). \quad (1.9)$$

Percebe-se que o espalhamento inelástico profundo entre um lépton carregado e um núcleon, ambos não polarizados, pode ser descrito através de funções que dependem apenas da distribuição do momentum do núcleon entre seus pártons. A função  $F_1$  mede a densidade de pártons e  $F_2$  a densidade de momentum ??, ambas dependentes apenas de  $x$ .

Já que a seção de choque obedece um escalamento, dependendo apenas da variável adimensional de Bjorken, sabe-se que que o próton é constituído por partículas pontuais - a adimensionalidade mostra que não há dependências em comprimento, excluindo a possibilidade de existir alguma estrutura extensa. Como fora citado anteriormente, o escalamento observado no SLAC contribuiu fundamentalmente para o entendimento dos hádrons.

## 1.2.2 Escalamento de Bjorken

Foi observado pela primeira vez na colaboração entre o MIT e o SLAC, no final dos anos 60[8]. Sabendo que o próton é constituído por partículas pontuais, é possível então investigar as propriedades dessas. A relação de Callan-Gross

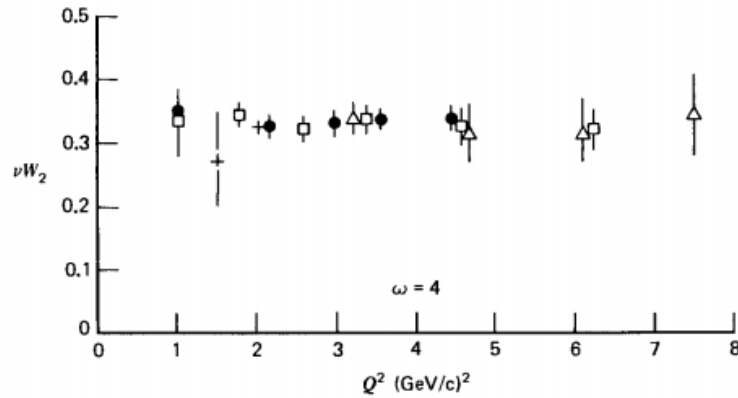
$$F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (1.10)$$

é válida para partículas com spin  $\frac{1}{2}$ , a qual foi também comprovada no SLAC experimentalmente - assim, os pártons que compõe o próton possuem spin  $\frac{1}{2}$ [3].

Alguns resultados experimentais são mostrados na figura 1.6 abaixo - nota-se que o comportamento da função de estrutura  $F_2$  depende essencialmente de  $x$ , tendo pouca dependência em  $Q^2$ .

Pode-se obter informações independentes sobre os pártons ao utilizarem-se neutrinos como partículas incidentes. Dessa maneira, os mediadores da interação serão os bósons  $W^\pm$  e  $Z$ , já que neutrinos interagem apenas através da interação fraca. Com a comparação entre as medidas das seções de choque elétron-próton e neutrino-próton é possível conhecer a carga elétrica dos pártons.

Usando-se a seguinte notação



**Fig. 1.4:** *Dados experimentais do SLAC comprovando o escalamento de Bjorken de  $F_2$ . Aqui cada forma para os pontos representa um experimento distinto. Todas as medidas foram realizadas com  $x$  fixo em 0,25 ( $\omega = 4$ )*

$$u = u_p(x) \quad d = d_p(x) \quad \bar{u} = \bar{u}_p(x) \quad \bar{d} = \bar{d}_p(x), \quad (1.11)$$

para as densidades de quarks e anti-quarks up e down no interior do próton, as medidas para as funções de estrutura podem ser usadas para identificação dos “tipos” de quarks, conhecidos como *sabores* - up, down ou strange. A partir de 1.9, tem-se:

$$F_2^{ep}(x) = x \left\{ \frac{4}{9}(u + \bar{u}) + \frac{1}{9}(d + \bar{d}) \right\}, \quad (1.12)$$

e como em um nêutron os quarks  $u$  do próton são equivalentes aos seus quarks  $d$  devido a simetria de isospin, tem-se que a função de estrutura para o espalhamento elétron-nêutron é igual a:

$$F_2^{en}(x) = x \left\{ \frac{4}{9}(d + \bar{d}) + \frac{1}{9}(u + \bar{u}) \right\}. \quad (1.13)$$

Aqui, como as contribuições devidas a quarks mais pesados são pequenas, essas não foram consideradas. Vale notar que a forma das funções de estrutura já leva em os quarks de mar (*sea quarks*), que são pares quark-antiquark emitidos pelos glúons. [7].

Em todos os experimentos de DIS, o modelo quark-párton descrevia muito bem os processos estudados. Porém, não importando quanta energia despendia-se, nenhum quark fora observado - este estava *confinado* no interior do próton. Assim, dizer que os quarks comportam-se como livres não é completamente preciso. É necessário compreender a interação entre

os quarks e incluir essas no modelo quark-párton. A QCD fornece uma possibilidade de explicação para o confinamento de quarks, com o conceito de cor, que será apresentado em seguida.

### 1.3 Novo número quântico: cor

Apesar de todo o sucesso do modelo quark-párton, algumas questões ainda estavam em aberto, mostrando que era preciso aprimorá-lo. Ao estudar esses pontos críticos acumulou-se evidências que levaram ao desenvolvimento da QCD e a um novo número quântico: a *cor*.

#### 1.3.1 Princípio de Pauli

Pelo princípio de exclusão de Pauli, dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico. Mas, tomando como exemplo a partícula  $\Delta^{++}$ , que possui spin  $\frac{3}{2}$  e é composta por três quarks  $u$ : os spins estão completamente alinhados, violando o princípio [1]. Em 1964, Greenberg propôs que os quarks possuíam um atributo a mais, a *cor*, que pode assumir valores *red*, *blue* e *green*. Além disso, hádrons são postulados como “incolores” ou então “brancos”: mais precisamente, são singletos de cor do grupo  $SU(3)$ , construídos a partir do tripleto de cor  $(q_R, q_B, q_G)$ . Assim bárions  $(qqq)$  e mésons  $(q\bar{q})$  são permitidos, pois não apresentam cor.

A partir disso, foi possível explicar a existência de partículas como a  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^-$  e  $\Omega^-$  - sendo as últimas constituídas por 3 quarks  $d$  e três quarks  $s$ , respectivamente - e também o confinamento de quarks: como esses carregam cor, não podem ser observados. Efetivamente, troca-se o problema do confinamento de quarks pelo confinamento da cor.

#### 1.3.2 Aniquilação de $e^-e^+$ em hádrons

O estudo da produção de hádrons a partir da aniquilação de um par elétron-pósitron em um par quark-antiquark revela mais uma evidência para cor. Assumindo que a produção de  $Z$  é desprezível, o par quark-antiquark será formado a partir do fóton virtual criado na aniquilação [7]. Comparando com o processo de produção de múons, percebe-se que esses são idênticos, exceto pela diferença das cargas, no limite de altas energias. As seções de choque podem ser comparadas diretamente pois possuem a mesma forma.

Com isso, tem-se a razão :

$$R_\gamma = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{hádrons})}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)} = N_c \sum e_q^2. \quad (1.14)$$

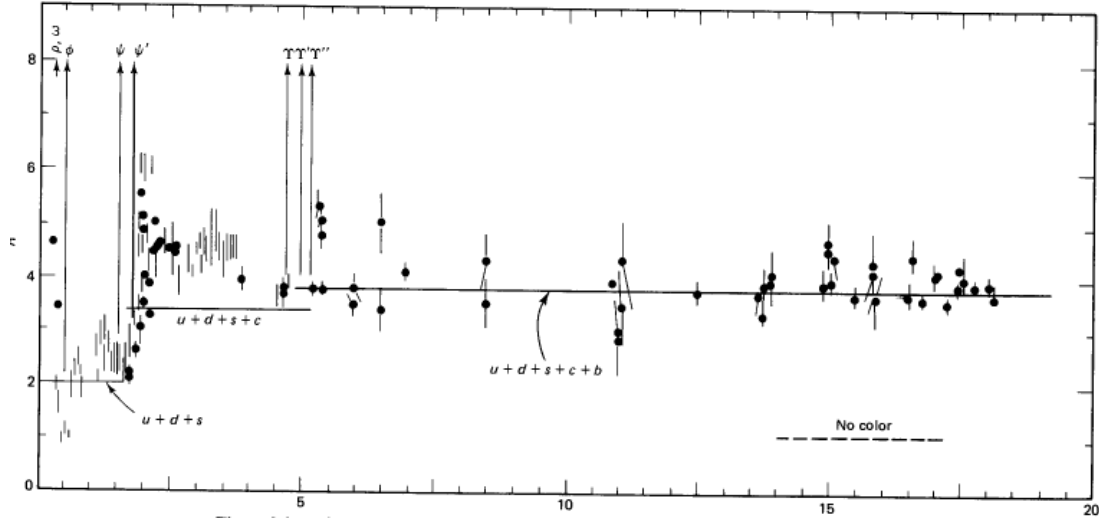


Fig. 1.5: Dados experimentais com valores para  $R$ .

Considerando contribuições de cinco sabores de quarks, essa razão tem o valor de

$$R_\gamma = N_c \left( 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right) = N_c \frac{11}{9} \tag{1.15}$$

No gráfico 1.5, tem-se medidas dessa razão - nota-se que longe das ressonâncias, obtém-se um valor de  $N_c$  de aproximadamente 3[5]. Novamente tem-se evidência de um novo número quântico: a cor introduz uma degenerescência para os estados finais de quarks que é observada experimentalmente. A pequena diferença entre experimento e teoria é explicada pela QCD em correções de mais alta ordem. Aqui percebe-se que a cor tem papel fundamental nas interações fortes e é mais que apenas uma nova característica usada para corroborar o modelo vigente.

## 1.4 Surgimento dos glúons

Depois de apresentar os indícios que mostram que quarks carregam o número quântico novo, a cor, agora se discute alguns pontos que levaram a conclusão que quarks interagem fortemente e a proposta da existência de glúons como mediadores.

### 1.4.1 Violações de Escalamento

O escalonamento foi deduzido partindo da suposição que os pártons eram partículas pontuais não interagentes. Mas é sabido que quarks possuem carga elétrica, então esses



devem ser capazes de "sentir" ao menos a força eletromagnética enquanto dentro do próton.

Da mesma maneira que ao investigar o próton foram observadas violações de escalamento que indicam uma subestrutura para esse hádron, experimentos de DIS também revelam novas violações, o que poderia significar que pártons possuem subestrutura. Porém, como será discutido mais tarde, essas violações são explicadas pela QCD, e são resultado dos quarks de mar e glúons que surgem ao atingir-se o próton com uma grande energia.

Em experimentos com energias mais altas, a resolução espacial e temporal será melhorada, podendo sondar inclusive as flutuações do vácuo. Nesse regime, um quark que era visto como uma partícula pontual em baixa energia será resolvido como vários pártons - como se em volta do quark houvesse uma "nuvem" de partículas virtuais. O momentum total do próton é dividido então entre mais constituintes, e a probabilidade de encontrar um quark com uma fração menor de momentum aumenta. Como constata-se na figura abaixo, o comportamento qualitativo da função de estrutura  $F_2(x)$  é distinto para processos com alta e baixa transferência de momentum  $Q^2$ .

Ao estimar o tamanho da correção na função de estrutura levando em conta a interação eletromagnética, o valor encontrado é proporcional a  $\alpha$ , ou seja, aproximadamente  $\frac{1}{137}$ . Contudo, as correções encontradas são da ordem de 0.16, o que indica que uma força muito mais forte que a eletromagnética está agindo entre os quarks[7].

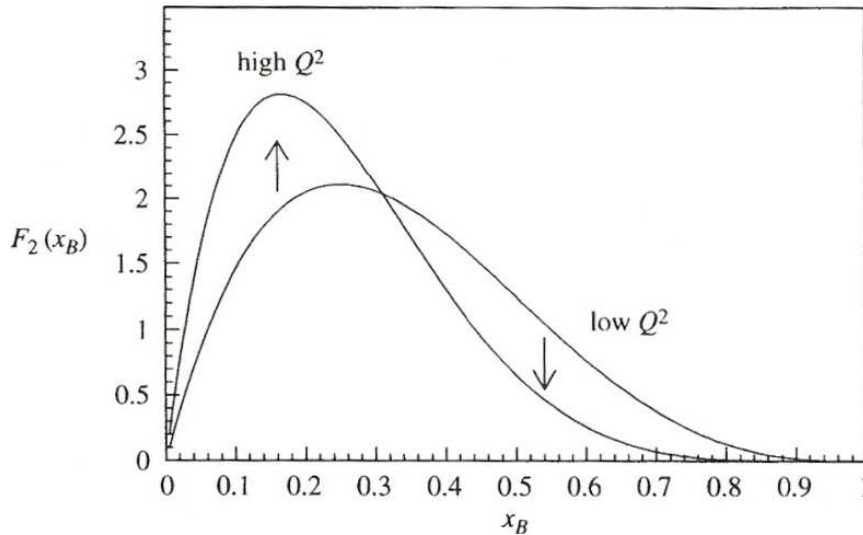


Fig. 1.6: Comportamento qualitativo para a função de estrutura  $F_2$ .

### 1.4.2 Momentum faltante

Com as medidas feitas através do DIS de  $F_2^{ep}(x)$ , que indica a fração do momentum total

do próton que está sendo transportada por cada quark, é possível somar todas essas frações e saber qual a contribuição dos constituintes carregados eletricamente para o momentum total do próton. Ao realizar esse cálculo, encontra-se:

$$\int_0^1 x(u + \bar{u} + d + \bar{d})dx \simeq 0.5. \quad (1.16)$$

Com isso, tem-se que apenas 50% do momentum está contido nos quarks. Aqui apresenta-se pela primeira vez a possibilidade de que dentro do próton haja outros constituintes que carregam os 50% restantes do momentum desse, porém não possuem carga elétrica por não interagirem com o fóton virtual no DIS. Também não são detectados no espalhamento envolvendo neutrinos, o que mostra que não interagem fracamente. Dessa maneira, essas novas componentes devem estar ligadas exclusivamente com a força forte. Esses são os *glúons* da QCD.

## Capítulo 2

# QCD Perturbativa

Começa-se o capítulo com uma pequena introdução sobre a teoria das interações fortes, a QCD. Após introduzir o modelo a pártons “ingênuo”, tem-se como objetivo aprimorar esse ao incorporar correções devidas a QCD. Neste capítulo, será apresentado o modelo a pártons da QCD, que inclui contribuições de emissão de glúons para o DIS. A partir de então, encontram-se as equações que regem a dependência em  $Q^2$  das distribuições partônicas (PDF's), as equações DGLAP. Partindo de uma DGLAP, resolve-se esta através do método dos momentos: ao aplicar a transformada de Mellin na equação substitui-se a equação integro-diferencial por outra apenas diferencial. Com isso, torna-se mais acessível encontrar as suas soluções. Neste trabalho, foram realizados os cálculos em primeira ordem de aproximação, isto é, *leading order* em  $\alpha_s$ , a constante de acoplamento da QCD.

## 2.1 A Lagrangiana da QCD

Do capítulo anterior, obtem-se as seguintes afirmações:

- hádrõns são compostos por quarks, que possuem carga fracionária;
- quarks existem em três cores diferentes e são férmions de spin- $\frac{1}{2}$ ;
- há evidências que a cor está associada a uma simetria do grupo SU(3);
- quarks estão sujeitos a uma força forte;
- existem outros pártons além dos quarks no interior do próton, e esses não sentem a força eletromagnética nem a força fraca.

A cor, que fora proposta para explicar partículas como a  $\Delta^{++}$ , agora é entendida como um campo, um *campo de cor*. Esse campo une os quarks, formando observáveis, os hádrõns, e seus quantas são os glúons. Se esses glúons acoplam apenas com a cor, nos experimentos de DIS realizados serão “invisíveis” explicando o momentum faltante (seção 1.4.2) no próton.

Ainda, se esse campo for forte o suficiente, as violações de escalamento observadas nas funções de estrutura (seção 1.4.1) também são explicadas, pois depende da constante de acoplamento da interação entre quark e glúon.

Pode-se então construir uma teoria de campos renormalizável baseada na carga de cor dos quarks. Assim, propõe-se uma teoria de Yang-Mills baseada na simetria SU(3) [6], para a qual a forma geral da densidade Lagrangiana é[7]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_q \bar{q}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_q)_{ij} q_j, \quad (2.1)$$

onde  $m_q$  representa a massa dos quarks; o tensor de campo  $F_{\mu\nu}^a$  e a derivada covariante  $D_\mu$  tem suas expressões escritas abaixo:

$$\begin{aligned} (m_q)_{ij} &= m_q \delta_{ij}, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - 4\pi\sqrt{\alpha_s} f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ (D_\mu)_{ij} &= \delta_{ij} \partial_\mu + 4i\pi\sqrt{\alpha_s} T_{ij}^a A_\mu^a. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nas expressões acima,  $A_\mu^a$  são os campos gluônicos,  $\alpha_s$  o acoplamento da teoria,  $f^{abc}$  as constantes de estrutura e  $T_{ij}^a$  os geradores do grupo de Lie que define a simetria de gauge - neste caso, SU(3). É possível encontrar as equações de movimento partindo da densidade lagrangiana utilizando o princípio variacional [6]. Nota-se que os parâmetros livres da teoria são as massas dos quarks, que são independentes da cor do mesmo, e a constante de acoplamento. As constantes de estrutura citadas acima são definidas através dos comutadores:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (2.3)$$

e são antisimétricas em relação a todos os índices.

Uma maneira mais intuitiva de compreender a lagrangiana da QCD é através da FIGURA:

Aqui, a primeira parte foi obtida a partir do tensor de campo e consiste em um termo livre e dois termos de interação entre os glúons. O fato dos glúons interagirem entre si mostra que a teoria é não-abeliana, na qual os portadores da força possuem a carga da interação, nesse caso a cor. Na segunda parte há a soma sobre todos os sabores de quarks, novamente com o termo livre e um termo de interação entre um quark e um glúon. Os termos de interação entre três glúons e quark-glúon são proporcionais a  $\alpha_s$  e a interação entre quatro glúons a  $\alpha_s^2$ . Como mostra a FIGURA, a interação é proporcional a constante de estrutura  $f^{abc}$  para os glúons e ao elemento de matriz  $T_{ij}^a$  no caso quark-glúon[7].

## 2.2 Modelo a Pártons da QCD

O modelo a pártons foi criado antes do surgimento da QCD e baseia-se na descrição dos hádrons como um conjunto de constituintes independentes. Esses constituintes, os pártons, são espalhados por um lépton em um processo de DIS e interagem com o mesmo através do fóton virtual. A QCD perturbativa (pQCD), através da liberdade assintótica [Apêndice A], é capaz de justificar o tratamento dos pártons como independentes e ainda sugere candidatos para explicar a violação da regra de soma de momentum, conforme seção 1.4.2.

Uma vez que o modelo independe da forma exata da QCD, essa só se torna relevante no momento que introduz correções às funções de estrutura. Com isso, essas funções deixam de obedecer um escalamento, passando a depender tanto de  $x$  quanto de  $Q^2$ . As correções incluem contribuições de emissão de glúons pelos quarks no interior do próton em um processo de DIS.

Como consequência, as distribuições de quarks e de glúons também irão depender de  $Q^2$  e a sua evolução é descrita pelas equações DGLAP, acrônimo feito com as iniciais dos principais contribuidores: Dokshitzer, Lipatov, Gribov, Altarelli e Parisi. A partir dessas equações, dado um momentum transferido de referência  $Q_0^2$ , é possível encontrar a forma da distribuição de densidade em um outro  $Q^2$  qualquer.

### 2.2.1 Emissão de glúons

No experimento de DIS, um quark pode emitir um glúon antes de interagir com o fóton incidente. Dessa maneira, deve-se contabilizar esse glúon dentro do cálculo da  $F_2(x, Q^2)$  e para descrevê-lo são necessárias duas novas variáveis:  $k_T$  e  $y$ [3]. A primeira representa o momentum transversal do glúon e a segunda a fração do momentum total do próton que o quark atingido antes da emissão ocorrer. Assim  $x$  torna-se a fração do momentum após o glúon ser irradiado.

A função de estrutura  $F_2(x, Q^2)$  levando em consideração esses elementos torna-se:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) \left[ \delta \left( 1 - \frac{x}{y} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu} \right]. \quad (2.4)$$

onde  $P_{qq}$  é uma função conhecida e será introduzida mais tarde como função de *splitting*.

A presença do termo  $\ln \frac{Q^2}{\mu}$  aponta que o escalamento previsto pelo modelo a pártons deve ser violado. A quebra do escalamento de Bjorken é um indicativo da existência de emissão dos glúons.

A expressão acima pode ser entendida como os dois primeiros termos da expansão em  $\alpha_s$  de  $F_2$ . A expansão parece razoável, já que  $\alpha_s \sim (\ln Q^2)^{-1}$  para  $Q^2$  grande. Porém percebe-se

que o termo  $\alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu}$  não desaparece para valores maiores de  $Q^2$  [5]. Para contornar isso, reescreve-se  $F_2$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} &\equiv \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} (q(y) + \Delta q(y, Q^2)) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) \\ &= \sum_q e_q^2 (q(x) + \Delta q(x, Q^2)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\Delta q(x, Q^2)$  é dado por

$$\Delta q(x, Q^2) \equiv \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right). \quad (2.6)$$

Com isso, as densidades de quarks  $q(x, Q^2)$  passam a depender não somente de  $x$ , mas também de  $Q^2$ . Dessa maneira, entende-se que, quando o momentum do fóton é aumentado até um certo  $Q_0^2$ , esse já é capaz de distinguir dentro do próton partículas pontuais - os quarks de valência. Porém, a QCD prevê que ao aumentar ainda mais seu momentum, até que esse seja muito maior que  $Q_0^2$ , o fóton passa a perceber uma nuvem de pártons ao redor do quark atingido. Dessa maneira, o número de pártons resolvidos no interior do próton aumenta com  $Q^2$  e há maior chance de encontrar-se um quark com menor fração de momentum  $x$  que com uma fração maior. Isso deve-se ao fato que os quarks com  $x$  maior perdem momentum irradiando glúons.

A equação 2.6 determina a evolução das densidades de quarks com  $Q^2$  usando QCD. Diferenciando-se a expressão em ambos os lados por  $\ln Q^2$ , encontra-se:

$$\frac{\partial q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right). \quad (2.7)$$

A expressão acima é uma equação DGLAP: mostra a evolução da densidade de quarks em função de  $Q^2$ . A função  $P_{qq}$  é conhecida, chamada de função de *splitting* e representa a probabilidade de ocorrer o processo de irradiação de um glúon por um quark. O parâmetro  $\mu$  que aparece antes da diferenciação de 2.7 está mencionado no Apêndice A.

O que foi visto mostra como a QCD prediz a violação de escalamento e permite calcular como a densidade de quarks depende em  $Q^2$  com a equação 2.7. Com a DGLAP é possível saber  $q(x, Q^2)$  dado uma  $q(x, Q_0^2)$  como referência. Agora apresenta-se o papel das funções de *splitting* em mais detalhes.

### 2.2.2 Interpretação das funções de *splitting*

As densidades de quarks encontradas dão informações sobre o próton e seus constituintes, e como independem da partícula incidente são ditas como universais[5]. A evolução das mesmas depende das funções de *splitting*,  $P_{ab}\left(\frac{x}{y}\right)$ , que indicam a probabilidade de processo  $b \rightarrow aX$  ocorrer. Essas podem ser escritas como uma série de potências em  $\alpha_s$  :

$$P_{ab}(x, \alpha_s) = P_{ab}^{(0)}(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ab}^{(1)}(x) \dots \quad (2.8)$$

Porém, neste trabalho será usado apenas o primeiro termo,  $P_{ab}^{(0)}$ . Ainda, as funções associadas com os processos  $q \rightarrow \bar{q}$  e  $q \rightarrow q$  são divididas em parte singlete(S) e não-singlete(NS), tratando, respectivamente, da evolução dos quarks de mar e de valência. Nos cálculos desenvolvidos para esse projeto foram tratadas com densidades não-singlete.

Assim,  $P_{qq}$  na equação 2.7 representa a possibilidade de, no interior do próton, encontrar-se um quark com fração de momentum  $x$  proveniente de um quark com fração de momentum  $y$  após esse emitir um glúon, processo que fora introduzida no modelo a pártons da QCD,  $q \rightarrow qg$ .

## 2.3 Cálculo de momentos

Dada uma função  $f(x)$  define-se a sua transformada de Mellin [9] como

$$f(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} f(x) dx. \quad (2.9)$$

Essa transformação pode ser invertida através do seguinte procedimento:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-n} f(n) dn, \quad (2.10)$$

onde  $c$  é uma constante e o contorno deve estar a direita de todas as singularidades no plano.

Antes de aplicar a transformada de Mellin na equação 2.7, realiza-se uma substituição de variáveis para tornar o cálculo mais simples. Introduzindo uma nova variável  $z$ , através de uma função delta dentro da integral:

$$\frac{\partial q_{NS}(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 q_{NS}(y, Q^2) dy \int_0^1 \frac{1}{y} \delta\left(z - \frac{x}{y}\right) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) dz, \quad (2.11)$$

e a partir disso, pode-se então reescrever a expressão com o mesmo limite de integração para as duas integrais já que a função delta inserida anteriormente garante que não há alteração dado que essa é zero em todos os pontos menos na curva  $z = \frac{x}{y}$ . A expressão final é:

$$\frac{\partial q_{NS}(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 q_{NS}(y, Q^2) \int_0^1 P_{qq}(z) \delta(x - yz) dz, \quad (2.12)$$

onde foi usada a propriedade da função delta que  $\delta(f(z)) = \delta(z - z_0)/|f'(z_0)|$  [9], na qual  $z_0$  representa o zero da função .

Agora será aplicada a transformação 2.9 nos dois lados da equação DGLAP, obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \int_0^1 x^{n-1} q_{NS}(x, Q^2) dx = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 y^{n-1} q_{NS}(y, Q^2) dy \int_0^1 z^{n-1} P_{qq}(z, \alpha_S) dz. \quad (2.13)$$

Finalmente, encontra-se uma equação linear diferencial para os momentos:

$$\frac{\partial q_{NS}^{(n)}}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}^{(n)} q_{NS}^{(n)}. \quad (2.14)$$

Para encontrar a solução dessa equação, é preciso calcular a transformada de Mellin das funções de *splitting*, conhecidas como *dimensões anômalas*.

### 2.3.1 Dimensões Anômalas

As dimensões anômalas contém toda a informação sobre a forma das soluções das equações DGLAP. Abaixo, segue o cálculo da  $\gamma_{qq}^{(0)}$ . Os cálculos para  $\gamma_{gg}^{(0)}$ ,  $\gamma_{qg}^{(0)}$  e  $\gamma_{gq}^{(0)}$  procedem analogamente:

$$\begin{aligned} \gamma_{qq}^{(0)} &= C_F \int_0^1 \left[ \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] x^{n-1} dx \\ &= C_F \int_0^1 \left[ \frac{x^{n-1}-1}{1-x} + \frac{x^{n+1}-1}{1-x} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] dx \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$= \frac{3}{2} C_F + C_F \int_0^1 \left[ \frac{x-1}{1-x} \sum_{k=0}^{n-2} x^k + \frac{x-1}{1-x} \sum_{k=0}^n x^k \right] dx \quad (2.16)$$

onde foi usado que

$$\begin{aligned} x^k - 1 &= (x-1) \sum_{j=0}^{k-1} x^j, \\ \int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)_+} dx &= \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$



Assim, após realizar a integração, aplicar seus limites e substituir  $k$  por  $j - 1$  no somatório, tem-se:

$$\gamma_{qq}^{(0)} = \frac{C_F}{n} - \frac{1}{2}C_F - \frac{C_F}{n+1} - 2C_F \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}. \quad (2.18)$$

E, finalmente, encontra-se a expressão final de  $\gamma_{qq}$ :

$$\gamma_{qq}^{(0)} = C_F \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} - 2 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right], \quad (2.19)$$

As outras dimensões anômalas são dadas pelas expressões :

$$\gamma_{gg}^{(0)} = 2C_A \left[ \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{12} - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] - \frac{n_f}{6}. \quad (2.20)$$

$$\gamma_{qg}^{(0)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n+2)} \right], \quad (2.21)$$

e

$$\gamma_{gq}^0 = C_F \left[ \frac{2+n+n^2}{n(n^2-1)} \right]. \quad (2.22)$$

O gráfico para  $\gamma_{qq}^{(0)}$  e o cálculo para as demais dimensões anômalas estão contidos no Apêndice B.

## 2.4 Solução no espaço de momentos

Já conhecidas as dimensões anômalas, a solução para a equação 2.14 considerando  $\alpha_s$  constante é imediata[3]:

$$q_{NS}^{(n)}(Q^2) = c_n \exp(\gamma^{(n)} \ln Q^2) = c_n [Q^2]^{\gamma^{(n)}}, \quad (2.23)$$

Considerando  $\alpha_s$  *running*, conforme Apêndice A, a solução de 2.14 torna-se:

$$q_{NS}^{(n)}(Q^2) = c_n \{ \alpha_s(Q^2) \}^{-\gamma^{(n)}/2\pi b_0}. \quad (2.24)$$

Partindo da solução no espaço de momentos, obtém-se a solução no espaço direto utilizando a transformada de Mellin inversa, equação 2.10[3].

Nesse trabalho, apenas a equação DGLAP para a densidade de quarks considerando a possibilidade de emissão de glúons fora resolvida. Porém, com o formalismo e os cálculos realizados, é possível também encontrar a solução para densidades de glúons.

## Capítulo 3

# Conclusões e Perspectivas

Este trabalho tinha como objetivo estudar alguns aspectos relacionados à QCD em ordem dominante: as funções de estrutura, o espalhamento inelástico profundo entre lépton e hádrons e as equações de evolução DGLAP. Foi apresentada uma breve revisão histórica sobre o desenvolvimento da QCD desde as primeiras evidências experimentais para uma subestrutura dos hádrons até a necessidade de um número quântico novo e dos glúons.

Ainda, foram estudadas as violações de escalamento das funções de estrutura sob o ponto de vista da QCD, levando ao seu modelo à partons e as equações DGLAP que ditam o comportamento das densidades partônicas dentro de um núcleon. Para resolver uma DGLAP foi utilizado o método dos momentos, que usa a transformada de Mellin para tornar a equação DGLAP em outra mais simples para encontrar a solução. Juntamente com o método de convolução, o método dos momentos é amplamente empregado para solucionar DGLAPs[4].

Dado que esse projeto foi realizado em *leading order*, a extensão para *next to leading order* é natural. É interessante levar em consideração outros processos, como produção de pares quark-antiquark através dos glúons e também processos de mais alta ordem.

## Apêndice A

# Constante de acoplamento forte

Os cálculos de reações usando QCD são, em sua maioria, feitos através da QCD perturbativa (pQCD). Isso deve-se ao fato que cálculos e correções não-perturbativas são difíceis e apenas alguns aspectos foram calculados por meio desse método. Para poder usar pQCD, é preciso que a constante de acoplamento  $\alpha_s$  seja suficientemente pequena. É possível mostrar que, em primeira ordem de aproximação,  $\alpha_s$  é dada por [12]:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + b_0 \alpha_s(\mu^2) \log(Q^2/\mu^2)}, \quad (\text{A.1})$$

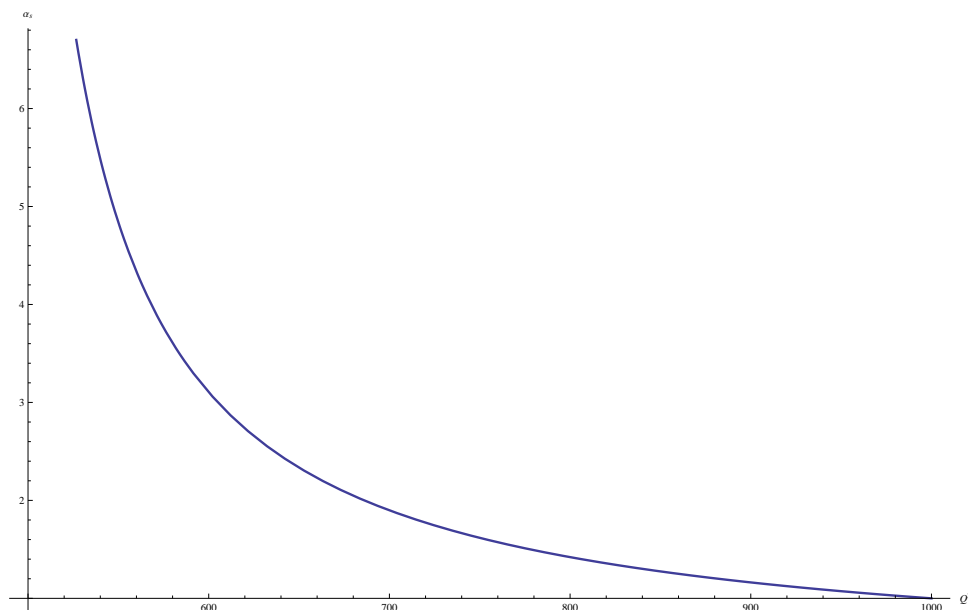
onde

$$b_0 = \frac{n_f}{6\pi} + \frac{33}{12\pi}. \quad (\text{A.2})$$

Aqui  $n_f$  é o número de sabores de quarks que contribuem, neste trabalho é utilizado  $n_f = 4$ . O parâmetro  $\mu$  introduzido em A.1 é uma escala de referência, que se faz necessária para tornar a teoria renormalizável[3].

Ao analisar A.1, percebe-se que  $\alpha_s$  depende do momentum transferido no processo,  $Q^2$ : a "constante" é pequena para grandes transferências e grande para transferências menores. Essa característica das teorias de gauge não-abelianas é chamada *liberdade assintótica*. Ainda que não justifique o confinamento dos quarks, isso mostra que é possível que quarks quando sondados em altas energias - e consequentemente grande  $Q^2$  - pareçam quase livres dentro do próton.

Esse comportamento de  $\alpha_s$  pode ser compreendido qualitativamente ao entender a propriedade de *antiscreening* da QCD [12]. Analogamente a Eletrodinâmica Quântica (QED), há uma contribuição devida aos férmions - neste caso, quarks - que aumenta a constante de acoplamento em distâncias curtas, conhecida como *screening*. Porém, devido ao fato que os glúons interagem entre si na QCD - com vértices fundamentais de três e quatro interagentes - contribui com o sinal oposto: ocorre *antiscreening*, e as duas contribuições competem entre si para a forma de  $\alpha_s$ .



**Fig. A.1:** *Comportamento de  $\alpha_s$  em função de  $Q^2$ .*

Para melhor compreensão do *antiscreening*, apresenta-se o seguinte exemplo: dada uma carga de cor teste azul, essa será sondada por um glúon vermelho-*azul* (anti-azul), ilustrado na Figura A.2. Enquanto o glúon de prova está a caminho da partícula de teste, essa pode irradiar um glúon azul-*verde*, tornando-se verde. A carga de cor não está mais localizada em um ponto, mas sim está distribuída de forma difusa, devido a absorção e emissão de glúons[4]. Como resultado, a verificação em distâncias maiores é necessária para medir os efeitos da carga de cor por completo.



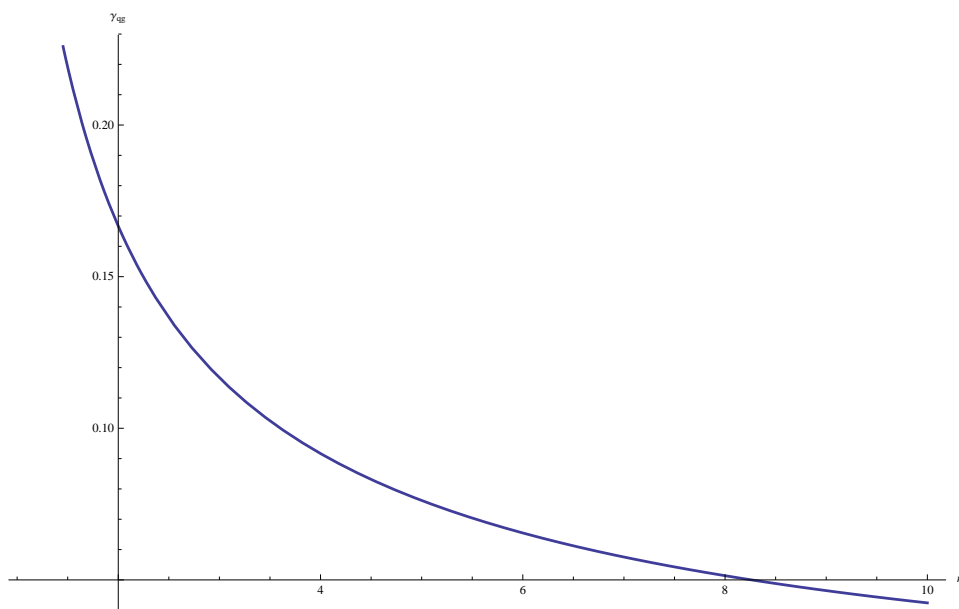
**Fig. A.2:** *Exemplo de antiscreening.*

## Apêndice B

# Dimensões Anômalas

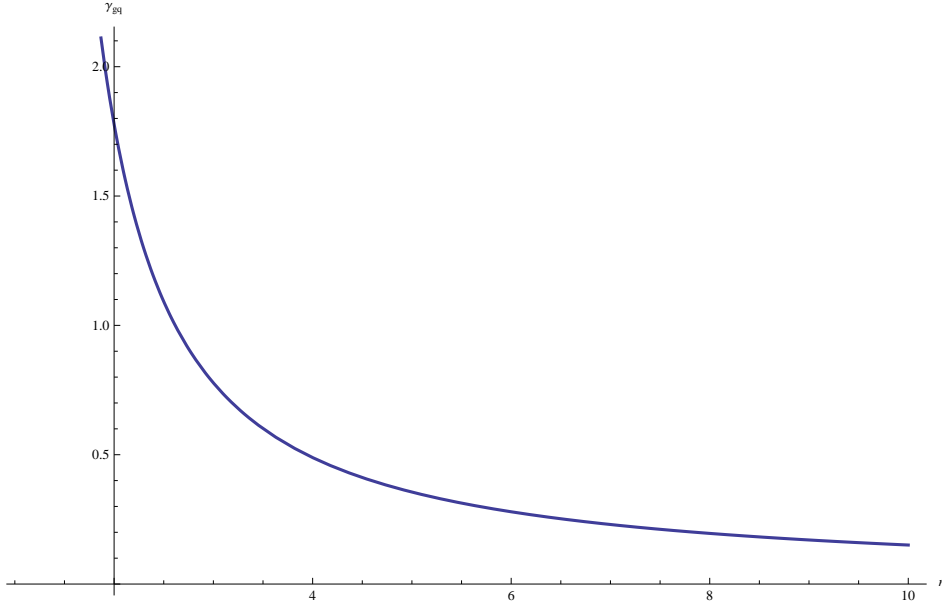
Apresenta-se aqui o cálculo das dimensões anômalas não mostrados no texto.

$$\begin{aligned}\gamma_{qg}^{(0)} &= \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2 + (1-x)^2] x^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}\tag{B.1}$$



**Fig. B.1:** Gráfico para  $\gamma_{qg}^{(0)}$  como função de  $n$ .

$$\begin{aligned}
 \gamma_{gq}^{(0)} &= C_F \int_0^1 \frac{x^2 + (1-x)^2}{x} x^{n-1} dx \\
 &= C_F \int_0^1 [2x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2}] dx \\
 &= C_F \left[ \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} \right] \\
 &= C_F \frac{n^2 - n + 2}{n(n^2 - 1)}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

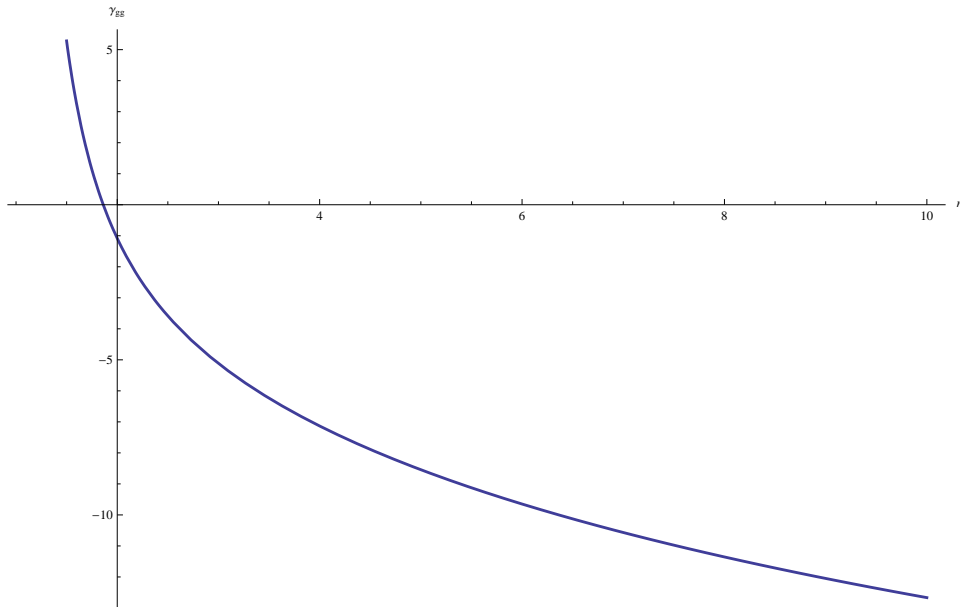


**Fig. B.2:** Gráfico para  $\gamma_{gq}^{(0)}$  como função de  $n$ .

$$\begin{aligned}
 \gamma_{gg}^{(0)} &= 2C_A \int_0^1 \left[ \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right] x^{n-1} dx \\
 &= 2C_A \int_0^1 \left[ \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right] x^{n-1} dx + \frac{11C_A - n_f}{6} \int_0^1 x^{n-1} \delta(1-x) dx \\
 &= 2C_A \int_0^1 \left[ x^{n-2} - x^{n-1} + x^n - x^{n-2} + \frac{x-1}{1-x} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right] dx + \frac{11C_A - n_f}{6}, \\
 &= 2C_A \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right] + \frac{11C_A - n_f}{6} \\
 &= 2C_A \left[ -1 + \frac{11}{12} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] - \frac{n_f}{6}.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

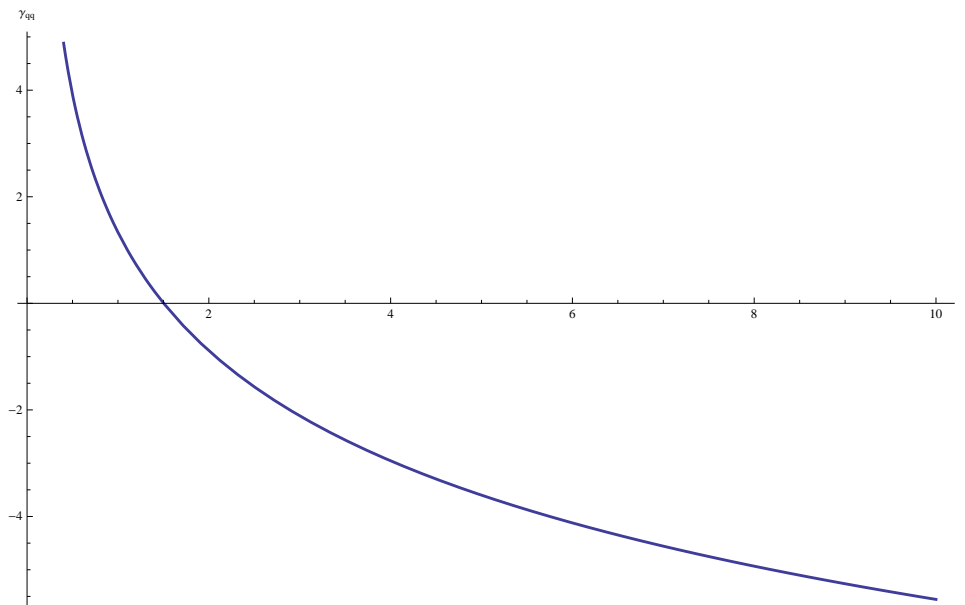
(B.4)

onde novamente foram usadas as expressões contidas na equação 2.17.



**Fig. B.3:** Gráfico para  $\gamma_{gg}^{(0)}$  como função de  $n$ .

E finalmente, o gráfico para  $\gamma_{qq}^{(0)}$ , que teve o cálculo apresentado no capítulo 2:



**Fig. B.4:** Gráfico para  $\gamma_{qq}^{(0)}$  como função de  $n$ .



# Referências

- [1] MARTIN, A. D.; The Structure of the Proton, *Contemporary Physics* v. 36, 1995.
- [2] SUNDARESAN, M. K.; Handbook of Particle Physics, *CRC Press*, 2001.
- [3] MARTIN, A. D.; Proton Structure, Partons, QCD, DGLAP and beyond, *Acta Physica Polonica B* v. 39, 2008.
- [4] FIELD, R. D.; Applications of Perturbative QCD, *Addison-Wesley*, 1995.
- [5] HALZEN, F.; MARTIN, A. D.; Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics, *John Wiley and Sons*, 1984.
- [6] GRIFFITHS, D. J.; Introduction to Elementary Physics, *Wiley-VCH*, 2008.
- [7] DISSERTORI, G.; KNOWLES, I.; SCHMELLING, M.; Quantum Chromodynamics, *Oxford*, 2003.
- [8] FRIEDMAN, J. I.; Deep Inelastic Scattering: Comparisons with the Quark Model, *Review of Modern Physics*, v. 63, 1991.
- [9] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J; Mathematical Methods for Physicists, *Elsevier Press*, 2005.
- [10] WILLIAMS, W. S. C.; Nuclear and Particle Physics, *The Bath Press*, 1992.
- [11] BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D; Teoria de grupos para Físicos, *Editores Livraria da Física*, 2007.
- [12] QUIGG, C.; Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, *Westview*, 1997.