

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
FELIPE LEITE ANTUNES

**ESTUDO SOBRE A PRODUÇÃO DE MICRO BURACOS NEGROS NO  
LARGE HADRON COLLIDER**

Porto Alegre  
2012

Felipe Leite Antunes

**ESTUDO SOBRE A PRODUÇÃO DE MICRO BURACOS NEGROS NO  
LARGE HADRON COLLIDER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Instituto de Física da Universidade Fe-  
deral do Rio Grande do Sul, como requisito  
parcial para obtenção do título de Bacharel  
em Física

Orientador: Magno V. T Machado

Porto Alegre

2012

# *Resumo*

Neste trabalho analisamos a produção de buracos negros no regime de energias do LHC, que ocorrem no contexto de modelos de dimensões extras, em particular nos modelos ADD (Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali) e Randall-Sundrum, além disso realizamos simulações numéricas para a seção de choque de produção no cenário ADD, a partir das quais estimamos o número de eventos esperados como  $10^8$  buracos negros por ano, dada a energia e luminosidade atuais, nas colisões próton-próton. Experimentalmente, nenhum desvio do *background*, em energias da ordem de TeV, foi encontrado e um limite para a massas dos buracos negros pode ser imposto.

Palavras-chave: micro buraco negro, dimensões extras, ADD, Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali, Randall-Sundrum, seção de choque.

# *Abstract*

In this work we explore the black hole production at LHC energy limits, which occurs in the context of extra dimensions, in special in the ADD and Randall-Sundrum models, moreover we perform numerical simulations for the production cross-section in ADD scenario, from which we estimate the expected events number as  $10^8$  black holes per year, given the current energy and luminosity in proton-proton collisions. Experimentally, no deviation of background, at TeV energy range, was found and a limit on black hole mass could be set.

Keywords: micro black holes, extra dimensions, ADD, Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali, Randall-Sundrum, cross section.

# *Lista de Figuras*

1	Relação entre as coordenadas de Minkowski e Rindler. . . . .	p. 12
2	Raio de Schwarzschild em 11 dimensões, como função da massa do buraco negro, para valores distintos de $M_D$ . . . . .	p. 15
3	Representação gráfica de $S^1/Z_2$ . As setas indicam os pontos identificados. . . . .	p. 21
4	Seção de choque geométrica <i>parton-parton</i> como função da massa do buraco negro, assumindo 11 dimensões. . . . .	p. 28
5	Seção de choque de produção como função de $M_{bh}$ e $M_D$ para uma colisão $pp$ a 8 TeV assumindo 11 dimensões. . . . .	p. 29
6	Seção de choque de produção como função de $M_{bh}$ com valores selecionados de $M_D$ para uma colisão $pp$ a 8 TeV assumindo 11 dimensões. . . . .	p. 30
7	Seção de choque de produção como função de $M_{bh}$ com valores selecionados de $M_D$ para uma colisão $pp$ a 14 TeV assumindo 11 dimensões. . . . .	p. 30
8	Energia transversa total ST, para eventos com multiplicidade $N \geq 4, 5, 6e7$ , respectivamente. Dados retratados como círculos cheios com barras de erro; a faixa escura é a predição do background obtida dos dados (linha contínua) com sua incerteza. Também é exibido o sinal predito para um buraco negro semi-clássico para três conjuntos distintos de parâmetros. . . . .	p. 33
9	Intervalo de confiança de 95% na massa do buraco negro como função da escala de Planck $M_D$ para vários modelos de buraco negro gerados pelo BLACKMAX. A área abaixo de cada curva foi excluída na última busca realizada no CMS. . . . .	p. 34

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 7
1.1	Contextualização . . . . .	p. 7
1.2	Revisão de Relatividade Geral . . . . .	p. 9
1.3	Buracos Negros em 4 Dimensões . . . . .	p. 9
1.4	Radiação Hawking . . . . .	p. 10
1.5	Buracos Negros em D Dimensões . . . . .	p. 13
1.6	Espaço-tempo de Anti-de-Sitter . . . . .	p. 14
<b>2</b>	<b>Teorias de Dimensões Extras</b>	p. 17
2.1	Dimensões Extras . . . . .	p. 17
2.2	Teoria de Kaluza-Klein . . . . .	p. 17
2.3	O modelo de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD) . . . . .	p. 18
2.4	O modelo Randall-Sundrum (RS) . . . . .	p. 20
<b>3</b>	<b>Buracos Negros no LHC</b>	p. 25
3.1	Condição Mínima para a Produção . . . . .	p. 25
3.2	Seção de Choque no Nível Partônico . . . . .	p. 26
3.3	Seção de Choque de Produção numa colisão $pp$ . . . . .	p. 28
3.4	Possíveis correções para Seção de Choque no Nível Partônico . . . . .	p. 31
3.5	Resultados Experimentais . . . . .	p. 32
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	p. 35

Apêndice A – Relação para o traço de uma matriz quadrada não singular	p. 36
Apêndice B – Equações de Einstein	p. 37
Apêndice C – Tensor de Einstein para o Modelo Randall-Sundrum	p. 41
Referências	p. 44

# 1 *Introdução*

O Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) a seguir, está estruturado de forma que o leitor possa, tanto entender a ideia por trás da produção de micro buracos negros, quanto conhecer as ferramentas matemáticas utilizadas para este propósito. Sempre que possível, demonstrações estarão dispostas no apêndice, de forma que o leitor possa aprofundar-se nos detalhes. Começarei apresentando resultados básicos da teoria da relatividade geral e a seguir os utilizarei para abordar a fenomenologia das colisões no Large Hadron Collider (LHC) e então testarei modelos de produção utilizando cálculos numéricos. Uma estimativa, e posterior análise do número de dimensões necessárias para os eventos de produção desejados, será fornecida no capítulo final.

## 1.1 Contextualização

Um dos maiores problemas em aberto na física é descrever a gravitação numa escala onde os fenômenos quânticos tornam-se importantes. O problema pode ser formulado em termos da *escala de Planck*,  $M_P \sim 10^{19} GeV$ , que caracteriza a interação gravitacional ( $G_N = 1/M_P^2$ ). Essa escala, tomada por muitas décadas como uma escala fundamental, quando comparada com a escala eletrofraca,  $m_{EW} \sim 100 GeV$ , leva ao chamado *Problema da Hierarquia*

$$\frac{M_P}{m_{EW}} \sim \frac{10^{19} GeV}{100 GeV} \sim 10^{17} \quad (1.1)$$

Essa diferença é problemática, em particular no setor escalar, pois se calcularmos correções de *loop* único para uma partícula como o Higgs, encontraremos uma divergência quadrática (em contraste com as divergências logarítmicas encontradas normalmente). Isto significa que para ter uma massa pequena (em relação a escala de Planck, que é presumidamente a escala natural para o *cutoff*) precisaríamos de um ajuste fino extremamente preciso (divergências logarítmicas não requerem tanta precisão, visto que a função *log* cresce mais lentamente). Este problema é resolvido na presença de simetrias adicionais



como a supersimetria [1].

Durante a década de 90, modelos baseados na existência de dimensões extras, um modelo de mundo brana com dimensões extras grandes (LED) planas (ADD [2], AADD [3]), e outro com 5-dimensões cuja dimensão extra é dobrada (WED) (Randall-Sundrum [4]), trouxeram uma abordagem totalmente nova para este problema. Nestes modelos, a brana, um tipo de muro de domínios ou sóliton topológico, é introduzida para confinar os campos do modelo padrão. Grávitons, por outro lado, podem propagar-se através do *bulk*<sup>1</sup>, e a intensidade efetiva da interação gravitacional é diluída pelo grande volume das dimensões extras dos modelos LED ou desviada para o vermelho pelo fator de dobra nos modelos WED, resultando numa interação gravitacional fraca como observamos. A verdadeira intensidade da interação gravitacional somente é percebida em escalas de distância menores do que o raio da compactificação ou do que o tamanho das dimensões extras. Logo, a verdadeira escala da gravidade,  $M_D$ , pode ser tão baixa quanto a escala eletrofraca e o *Problema da Hierarquia* é resolvido. Uma previsão deste cenário é a possibilidade de produção de buracos negros no LHC, tema deste trabalho de conclusão. Este tópico, embora seja muito popular, parece estar longe de verificação experimental: buracos negros feitos em laboratório requerem uma modificação na gravitação de Einstein devido à inserção de novas dimensões espaciais, que de acordo com os últimos experimentos ainda não foram detectadas [5]. Além disso, os últimos resultados experimentais excluem a formação de buracos negros com massa entre 3.8 até 5.3 TeV [6]. É natural perguntarmo-nos por que esses micros buracos negros continuam sendo importantes mesmo 10 anos após sua conjectura, e a resposta é que eles tem o potencial para revelar profundos *insights* sobre a gravitação quântica.

Um protótipo de gravitação quântica, que pode ser usado para testar os conceitos e processos, é a *teoria quântica de campos em espaço-tempos curvos* (QFTCS)[7], uma teoria onde podemos estudar física de partículas na presença de efeitos gravitacionais. Neste limite semi-clássico há um resultado robusto: buracos negros emitem radiação térmica quântica do tipo corpo negro com uma temperatura proporcional ao inverso de sua massa,  $T \propto 1/M$  [8]. Isto nos significa que micros buracos negros podem emitir radiação Hawking detectável pelos nossos experimentos.

---

<sup>1</sup>Espaço contendo as dimensões extras.

## 1.2 Revisão de Relatividade Geral

A descrição<sup>2</sup> da gravitação em (3+1) dimensões é feita através das equações de Einstein, que podem ser obtidas, de uma perspectiva mais moderna, partindo de um princípio de ação ( veja o Apêndice B). A ação é a integral, sobre todo espaço-tempo, de uma *densidade Lagrangiana*:

$$S_H = \frac{1}{16\pi G_4} \int \mathcal{L}_H d^4x \quad (1.2)$$

Esta densidade lagrangiana é uma densidade tensorial, que pode ser escrita como  $\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R$ , onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  e  $R$  é o escalar de Ricci<sup>3</sup>, sendo esta a escolha mais simples possível para a lagrangiana<sup>4</sup>. As equações de campo que decorrem desta ação, minimizando-a, são as equações de Einstein na ausência de matéria ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), ou com constante cosmológica nula ( $\lambda = 0$ ):

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.3)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein, definido como  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ .

## 1.3 Buracos Negros em 4 Dimensões

Schwarzschild, em 1917, apresentou a primeira solução não trivial das equações de campo de Einstein (equações (1.3)), descrita pela métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.4)$$

onde  $d\Omega^2$  é o elemento de linha da 2-esfera unitária e  $r_H = 2G_4 M_{bh}$ <sup>5</sup>. O horizonte de eventos para a geometria de um buraco negro estacionário ocorre quando o denominador do segundo termo vale zero. Para a solução de Schwarzschild, esta condição é a mesma que  $g_{tt} = 0$ , mas em geral, por exemplo para o buraco negro de Kerr, as duas condições não coincidem [9].

<sup>2</sup>Neste trabalho adotamos  $\hbar = c = k_B = 1$ , portanto  $G$  tem dimensão de  $[L]^2 = [M]^{-2}$ , o que define uma escala de massa  $1/\sqrt{G}$ , chamada escala de Planck,  $M_P$ .

<sup>3</sup> $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci.

<sup>4</sup>Podemos inserir ainda uma densidade lagrangiana que corresponde à matéria, a constante cosmológica, ou ambas.

<sup>5</sup> $G_4$  é constante da gravitação de Newton em 4D e  $M_{bh}$  é a massa do buraco negro.

## 1.4 Radiação Hawking

Embora a métrica de Schwarzschild possua uma singularidade aparente em  $r_H = r$ , neste ponto a curvatura não diverge, o que sugere que esta aparente singularidade pode ser removida com uma escolha adequada de coordenadas. Regge e Wheeler [9] redefiniram a coordenada radial para aproximar-se de  $-\infty$  para  $r$  aproximando-se de  $r_H$ , para evitar a inversão entre tempo-espaço que ocorre ao cruzarmos o horizonte de eventos:

$$r^* = r + r_H \ln \left| \frac{r}{r_H} - 1 \right| , \quad (1.5)$$

onde  $r^*$  é dita coordenada tartaruga. As coordenadas do espaço de Rindler, também conhecidas como coordenadas do Horizonte Próximo podem ser exploradas trocando  $r$  por uma coordenada  $\rho$  que mede a distância própria desde o horizonte

$$\rho = \int_{r_H}^r \sqrt{g_{rr}(r')} dr' \quad (1.6)$$

$$= \int_{r_H}^r \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dr' \quad (1.7)$$

$$= \sqrt{r(r - r_H)} + r_H \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{r}{r_H} - 1} \right) . \quad (1.8)$$

Em termos de  $\rho$  e  $t$  a métrica toma a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r(\rho)}\right) dt^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2 , \quad (1.9)$$

e próximo ao horizonte, temos, da Equação (1.8),

$$\rho \approx 2\sqrt{r_H(r - r_H)} , \quad (1.10)$$

e portanto,

$$ds^2 \cong \rho^2 \left( \frac{dt}{2r_H} \right)^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2 . \quad (1.11)$$

Estamos interessados numa pequena região angular do horizonte arbitrariamente centrada em  $\theta = 0$ , podemos trocar as coordenadas polares por cartesianas

$$x = r_H \theta \cos \phi , \quad (1.12)$$

$$y = r_H \theta \sin \phi , \quad (1.13)$$

ainda podemos introduzir um tempo adimensional  $\omega$ :

$$\omega = \frac{t}{2r_H}, \quad (1.14)$$

de forma que a métrica toma a forma

$$ds^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2, \quad (1.15)$$

onde fica evidente que  $\rho$  e  $\omega$  são as coordenadas radial e angular hiperbólica de um espaço de Minkowski usual. As coordenadas de Minkowski  $T$  e  $Z$ , podem ser definidas como

$$T = \rho \sinh \omega \quad (1.16)$$

$$Z = \rho \cosh \omega, \quad (1.17)$$

para obtermos uma forma mais familiar para a métrica

$$ds^2 = dT^2 - dZ^2 - dx^2 - dy^2. \quad (1.18)$$

Lembrando que estamos analisando as proximidades do horizonte numa pequena região angular, fica evidente que o mesmo não é singular e localmente indistinguível do espaço-tempo plano. A Figura 1 mostra a relação entre as coordenadas de Minkowski e as coordenadas de Rindler  $\rho$  e  $\omega$ . O espaço de Minkowski é dividido em quatro quadrantes. A região I fica fora do horizonte, que por sua vez está na origem  $T = Z = 0$ . É interessante notar que se trata de uma superfície bi-dimensional num espaço-tempo quadri-dimensional, pois o horizonte é definido originalmente apenas pelo vínculo  $r = r_H$  e, portanto, aparentemente deveria ser uma superfície tri-dimensional. No entanto, devemos lembrar que no horizonte  $g_{00}$  se anula, e portanto não há extensão na direção temporal. Esta região é conhecida como espaço de Rindler e  $\omega$  é dito tempo de Rindler. Inspirados na equação (1.15), propomos o seguinte *Ansatz* para a métrica:

$$ds^2 = F(R)[R^2 d\omega^2 - dR^2] - r^2 d\Omega^2, \quad (1.19)$$

onde para regiões próximas ao horizonte,  $R \approx \rho$ . Comparando com a métrica original de Schwarzschild temos os seguintes requerimentos:

$$R^2 F(R) = 4(2r_H)^2 \left(1 - \frac{r_H}{r}\right), \quad (1.20)$$

$$F(R) dR^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_H}{r}} dr^2, \quad (1.21)$$

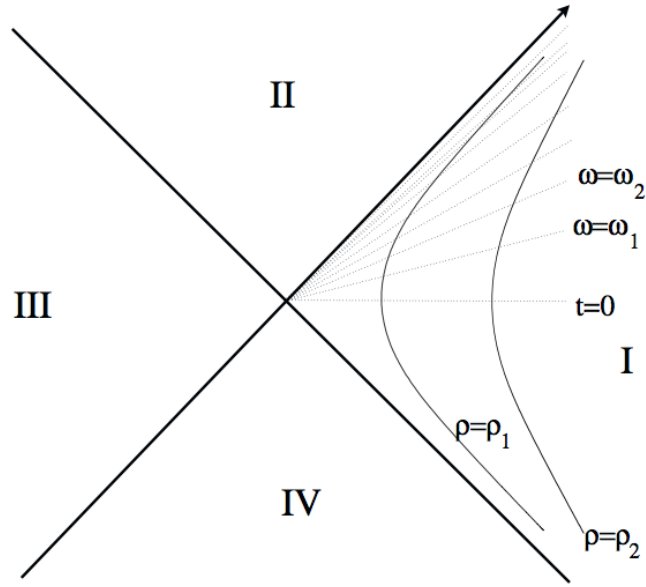


Figura 1: Relação entre as coordenadas de Minkowski e Rindler.

de onde segue que:

$$2r_H \log \left( \frac{2R}{r_H} \right) = r + 2MG \log \left( \frac{r - r_H}{r_H} \right) = r^* , \quad (1.22)$$

ou

$$R = \frac{r_H}{2} \exp \left( \frac{r^*}{2r_H} \right) , \quad (1.23)$$

portanto  $R$  e  $\omega$  podem ser pensados com as coordenadas radial e hiperbólicas de um espaço que é conforme ao espaço de Minkowski 1+1-dimensional. Definindo as coordenadas de Kruskal -Szekeres [??]

$$Re^\omega = V \quad (1.24)$$

$$Re^{-\omega} = -U , \quad (1.25)$$

podemos escrever

$$ds^2 = F(R)dUdV . \quad (1.26)$$

As superfícies com  $r = \text{constante}$  são as hipérboles tipo-tempo apresentadas. Para  $r \rightarrow r_H$ , essas hipérboles tendem as linhas  $H^-$  e  $H^+$ , e representam passado e futuro assintóticos, pois embora estejam em valores finitos nas coordenadas de Kruskal-Szekeres, eles estão localizados no tempo de Schwarzschild  $\pm\infty$ . Isso nos permite perguntar, dado um estado de vácuo em  $H^-$ , como ele se parece para outro observador? As transformações de Bogolioubov nos dizem exatamente isso; delas temos que coeficientes de Bogolioubov

não nulos dão origem a criação de partículas a partir deste vácuo [10]. Computando os coeficiente de Bogolioubov neste caso, encontramos

$$B_{\omega\omega'} = e^{-\pi\omega/\kappa} A_{\omega\omega'} , \quad (1.27)$$

onde  $\omega$  e  $\omega'$  representam as frequências no futuro e no passado, respectivamente,  $B$  descreve o quanto da frequência do passado é captada no futuro e  $\kappa = 1/(4G_4 M_{bh})$  refere-se a gravidade na superfície do buraco negro. Computando o valor esperado de  $N_i$ , o número futuro de partículas para o modo  $i$ , temos

$$\langle N_i \rangle = 1/e^{(2\pi\omega_i/k)-1} , \quad (1.28)$$

que corresponde a distribuição de Planck para um corpo negro a uma temperatura [8]

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi G_4 M_{bh}} , \quad (1.29)$$

chamada temperatura Hawking. A variação na entropia é dada por  $dS_H = dQ/T_H$ , mas a variação no calor está associado a variação da massa do buraco negro, portantoo

$$dS_H = 8\pi G_4 M_{bh} dM_{bh} = d(4\pi G_4 M_{bh}^2) , \quad (1.30)$$

mas lembrando que  $r_H = 2G_4 M_{bh}$ , obtemos

$$S_H = \frac{\pi r_H^2}{G_4} = \frac{A}{4G_4} , \quad (1.31)$$

onde  $A$  é a área da sua superfície. Também podemos reescrever

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H} . \quad (1.32)$$

## 1.5 Buracos Negros em $D$ Dimensões

Tangherlini, em 1963, generalizou a solução de Schwarzschild para  $D = 4+n$ , trocando a dependência  $1/r$  do potencial Newtoniano por  $1/r^{D-3}$ [11]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{r^{D-3}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{\mu}{r^{D-3}}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_{D-3}^2 , \quad (1.33)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de massa definido como

$$\mu = \frac{16\pi G_D M_{bh}}{(D-2)\Omega_{D-2}} , \quad (1.34)$$

$G_D$  é a constante de Newton em D dimensões, e

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} \quad (1.35)$$

é a área da  $n$ -esfera unitária. O horizonte de eventos é dado por  $r^{D-3} = \mu$ :

$$r_s = \mu^{\frac{1}{D-3}} = \left( \frac{16\pi G_D M_{bh}}{(D-2)\Omega_{D-2}} \right)^{\frac{1}{D-3}} \quad (1.36)$$

Definindo uma escala de Planck generalizada em D dimensões:

$$M_D \equiv \left( \frac{N_n}{8\pi G_D} \right)^{\frac{1}{2+n}} \quad (1.37)$$

onde  $N_n$  é um fator numérico, cuja definição varia de acordo com a literatura (neste trabalho adotaremos a convenção  $N_n = 8$ ), podemos reescrever  $r_s$  da seguinte maneira:

$$r_s = \left( \frac{k_n M_{bh}}{M_D} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{M_D}, \quad (1.38)$$

onde

$$k_n = \frac{N_n \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{(n+2)\pi^{(n+1)/2}}. \quad (1.39)$$

O comportamento do Raio de Schwarzschild em D=11 dimensões como função de sua massa,  $M_{bh}$ , e  $M_D$ , pode ser observado na Figura 2.

A temperatura Hawking e a área do horizonte (ou entropia) são dados, respectivamente, por

$$T_H = \frac{D-3}{4\pi r_s}, \quad (1.40)$$

$$S_H = \frac{r_s^{D-2} \Omega_{D-2}}{4G_D}. \quad (1.41)$$

Vemos que quanto maior  $M_{bh}$ , maior  $r_s$  e  $S_H$  e menor  $T_H$ .

## 1.6 Espaço-tempo de Anti-de-Sitter

O espaço-tempo de Anti-de-Sitter (AdS), é o background do modelo de Randall-Sundrum [4], analisado no próximo capítulo. O AdS é um espaço-tempo maximalmente simétrico, i.e as coordenadas temporais e espaciais estão em pé de igualdade, de assina-

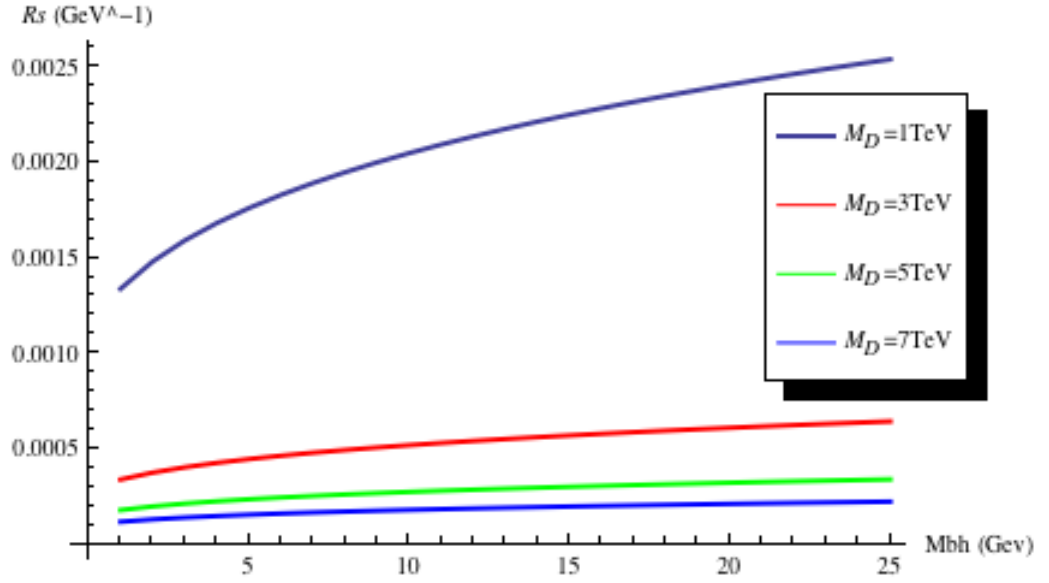


Figura 2: Raio de Schwarzschild em 11 dimensões, como função da massa do buraco negro, para valores distintos de  $M_D$ .

tura lorentziana  $(-, +, +, \dots, +)$ , mas com constante de curvatura negativa. É o análogo lorentziano do espaço de Lobachevski, cuja assinatura é euclidiana [13] e sua versão 5-dimensional é a arena do Modelo de Randall-Sundrum [4]. O AdS pode ser considerado em D dimensões como uma subvariedade de um espaço de imersão pseudo-euclidiano de D+1 dimensões com coordenadas

$$x = (x_0, x_{D+1}, x_1, \dots, x_{D-1}), \quad (1.42)$$

e assinatura da métrica  $(-, +, \dots, +, -)$ . Portanto, a distância entre dois pontos nesse espaço é invariante sob uma transformação do grupo  $SO(2, d-1)$ . A métrica deste espaço pode ser escrita em diferentes sistemas de coordenadas; em particular nas coordenadas de Poincaré, temos

$$ds_{AdS}^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 + dz^2) \quad (1.43)$$

onde  $-\infty < t, x_i < +\infty$ , mas  $0 < z < +\infty$ . Vê-se que, a menos de uma transformação conforme, temos o espaço de Minkowski em D dimensões. Nestas coordenadas, podemos entender o AdS como um espaço de Minkowski D-1 dimensional, com um "fator de dobra" (potencial gravitacional) que depende apenas da coordenada extra z.



---

Neste primeiro capítulo, concluímos o primeiro objetivo deste trabalho: iniciou-se com uma revisão da Relatividade Geral, que está por trás de todas seções subsequentes, incluindo os buracos negros em 4 ou mais dimensões, que entrarão em cena no último capítulo. O espaço-tempo de Anti-de-Sitter será utilizado no capítulo 2, quando abordaremos modelo de Randal-Sundrum, e finalmente a Radiação Hawking será retomada na conclusão, onde iremos abordar sucintamente outros estudos relacionados ao tema deste trabalho.

## 2 *Teorias de Dimensões Extras*

Um dos objetivos deste trabalho foi estudar as teorias envolvidas na produção de buracos negros decorrentes da colisão de duas partículas elementares. Para alcançá-lo, foi necessário um entendimento detalhado, além da Relatividade Geral, abordada no capítulo anterior, da Teoria Quântica de Campos e da Física de Partículas, para então abordar as Teorias de Dimensões Extras (TDE's). No que segue, analisaremos em detalhes estas TDE's e duas consequências para fenomenologia de produção de buracos negros.

### 2.1 Dimensões Extras

A ideia de usar dimensões extras espaciais para unificar forças, começou com Nordström[14] (1914) que, na tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo, propôs uma teoria de Maxwell com uma dimensão espacial extra, na qual o potencial-vetor incorporava o potencial gravitacional. Esta proposta não recebeu muita atenção, no entanto Kaluza[15] (1921), utilizou parte da ideia de Nordström numa generalização 5-dimensional da teoria da gravitação de Einstein que descrevia simultaneamente a gravitação e o eletromagnetismo. Em 1926 Klein[16] sugere que esta quarta dimensão espacial é curvada na forma de um círculo com um raio muito pequeno, chamado raio de compactificação. A teoria de Kaluza-Klein passou por um grande período de hibernação; porém em 1980 o interesse foi renovado no contexto das teorias de supergravidade e supercordas. Recentemente [2, 4], dimensões extras foram apresentadas como uma possível solução para o *Problema da Hierarquia*.

### 2.2 Teoria de Kaluza-Klein

Assumimos que nosso mundo, ao invés de quadri-dimensional, é de fato  $(4 + n)$ -dimensional, com  $n \geq 1$ , com as dimensões extras compactificadas. Para o caso  $n = 1$ , o espaço resultante é o produto direto do espaço de Minkowski quadri-dimensional  $M_4$  com

um círculo  $S_1$  de raio  $R$ , i.e.  $M^4 \times S^1$ .

Um campo escalar não massivo  $\phi(x^\mu, x^5)$  pode, então, ser escrito como:

$$\phi(x_\mu, x^5) = \phi(x_\mu, x^5 + 2\pi R) \quad , \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Esta periodicidade em  $x^5$  significa que podemos expressar esse campo  $\phi(x_\mu, x^5)$  como um série de Fourier,

$$\phi(x_\mu, x^5) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k(x_\mu) e^{ikx^5/R}. \quad (2.2)$$

Os coeficientes  $\phi_k$  são chamados de *modos*, e dependem somente das "nossas" coordenadas  $x_\mu$ . A equação da onda 5-dimensional,  $\square_5 \phi(x_\mu, x^5) \equiv (\partial_\mu^2 - \partial_5^2) \phi(x_\mu, x^5) = 0$ , substituindo a decomposição em modos acima, nos diz que cada modo deve satisfazer a equação de onda quadri-dimensional

$$\left( \partial_\mu^2 - \frac{k^2}{R^2} \right) \phi(x_\mu) = 0. \quad (2.3)$$

Desta equação, temos que o modo zero  $\phi_0$  é não massivo, enquanto os outros possuem massa  $m = |k|/R$  i.e., uma torre infinita de modos massivos é gerada. Se  $R^{-1}$  é grande quando comparado com a escala energia  $E$  ( $R^{-1} \gg E$ ), apenas o modo-zero permanece e a física é efetivamente quadridimensional - pois dada a escala de resolução associada a energia,  $r$ , temos  $r E^{-1} \gg R$  e as dimensões extras são menores do que nosso "microscópio" gravitacional. Note que para energias acima de  $R^{-1}$ , a torre de estados de Kaluza-Klein (KK) entra em jogo.

Um questão muito importante consiste no tamanho da dimensão extra compacta. Um limite experimental é imposto para o raio de compactação  $R$ , pois torres de estados de KK não são observadas em colisores até energias de TeV, portanto suas massas precisam ser maiores do que essa escala,  $k/R > TeV$ , o que vincula  $R$ :

$$R \leq 10^{-21} cm. \quad (2.4)$$

Essa minúscula dimensão está longe de ser provada experimentalmente por testes de gravitação, cujo limite de resolução fica entre  $100\mu m - 1 mm$  [17].

## 2.3 O modelo de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)

O modelo parte da suposição de que o espaço-tempo é  $(4+n)$ -dimensional, com  $n \geq 1$ , enquanto sua geometria é fatorizável em  $M_4 \times K_n$ . Enquanto o modelo padrão (MP) está localizado na  $(1+3)$ -brana, representada por  $M_4$ , a gravidade pode propagar-se por todas

as  $4 + n$  dimensões. A ação para este modelo pode ser escrita simbolicamente como

$$S = \frac{M_D^{2+n}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi R} d^n y \sqrt{g_{4+n}} R_{4+n} + \int d^4x \sqrt{g} (T + L_{MP}(\Phi_{SM})), \quad (2.5)$$

onde  $M_D$  é uma constante fundamental da gravidade,  $g_{4+n}$  e  $R_{4+n}$  são o determinante da métrica e o escalar de curvatura  $(4 + n)$ -dimensional,  $g$  é o determinante da métrica quadri-dimensional e  $L_{MP}$  é a lagrangeana que descreve todos os campos do MP. A escala típica associada com  $L_{MP}$  será a escala eletrofraca, denotada por  $m_{EW}$ ,

$$m_{EW} \sim 100 \text{ GeV}. \quad (2.6)$$

A constante  $T$  dever ser ajustada de forma que a constante cosmológica global seja nula. Temos por fim que  $y \equiv x^5$

Aplicando a expansão nos modos de Kaluza-Klein ao campo gravitacional, e mantendo somente o modo zero, que é independente da coordenada  $x_5$ , podemos realizar a integração no primeiro termo do lado direito, obtendo

$$\frac{M_D^{2+n}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi R_4} d^n y \longrightarrow \frac{1}{2} M_D^{2+n} V_n \int d^4x \sqrt{g} R, \quad (2.7)$$

onde  $V_n$  é o volume das dimensões extras,

$$V_n = (2\pi R)^n. \quad (2.8)$$

Essa identificação é válida para escalas de energias muito pequenas comparadas com  $R^{-1}$ , i.e.  $r \gg R$ , onde  $r$  é uma escala de distância associada com a referida escala de energia. Nesta escala, devemos recuperar o potencial gravitacional usual

$$V(r) \sim -\frac{G_4}{r}, \quad (2.9)$$

onde a constante de Newton  $G_4$ <sup>1</sup> é determinada pela equação (2.7),

$$G_4 = (M_D^{2+n} V_n)^{-1}. \quad (2.10)$$

Para uma distância  $r \ll R$ , a lei de Gauss em  $4+n$  dimensões dita o potencial

$$V(r) = -\frac{1}{M_D^{2+n} r^{1+n}} \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup>Relacionada com a constante de Planck via  $G_4 = \frac{1}{M_{Pl}^2}$ , desde que  $\hbar = c = 1$ .

Um observador quadri-dimensional, irá interpretar  $M_D^{2+n}V^n$  como a escala de Planck,

$$M_D^{2+n}V^n = M_{Pl}^2 \sim (10^{19}GeV)^2. \quad (2.12)$$

A escala fundamental "visível"  $M_{Pl}$  é separada de  $m_{EW}$  por um grande intervalo, criando uma enorme hierarquia de escalas.

No cenário ADD a escala fundamental genuína é  $M_D$  - esta é a energia na qual a gravidade  $4+n$  torna-se forte.  $M_D$  está relacionada com a escala fundamental "visível",  $M_{Pl}$ , da seguinte maneira

$$M_D = \left( \frac{M_{Pl}^2}{V^n} \right)^{\frac{1}{2+n}} \quad (2.13)$$

$$= (M_{Pl})^{\frac{2}{2+n}} (2\pi R)^{-1} (2\pi R)^{\frac{n}{2+n}} \quad (2.14)$$

O raio dessas dimensões extras pode ser obtido da Equação (2.12) tendo em vista a Equação (2.8):

$$R = \frac{1}{2\pi} \frac{(M_{Pl})^{\frac{2}{2+n}}}{(M_D)^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{2\pi M_D} \left( \frac{M}{M_D} \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (2.15)$$

No trabalho original os autores propõem que  $M_D \sim m_{EW}$ , portanto para  $M_D = 10 TeV$  e  $n = 1$ ,  $R \sim 10^{12} cm$  o que implicaria em desvios da gravitação em escalas dentro da nossa resolução experimental, o que não é observado. Portanto, esperamos  $n \geq 2$ , pois neste caso  $R \gtrsim 1 mm$ , sendo da ordem do limite experimental atual.

## 2.4 O modelo Randall-Sundrum (RS)

Na proposta de Randall-Sundrum [4], a hierarquia entre a escala eletrofraca,  $m_{EW}$ , e a escala de Planck  $M_{Pl}$  é explicada usando uma analogia extra-dimensional do redshift gravitacional clássico, num espaço-tempo curvo. Neste cenário, o espaço-tempo é 5-dimensional com a dimensão extra compactada em  $S^1/Z_2$ , i.e., um círculo projetado num segmento, por identificação de pontos opostos com respeito ao diâmetro (Figura 3). Cada ponto-final do seguimento é a localização de uma 3-brana. Cada par de 3-branas, individualmente, recebe o nome de brana infravermelha (IV), cuja tensão é negativa e onde os campos do modelo padrão (MP) estão localizados, e de brana ultravioleta (UV), cuja tensão é positiva. A constante cosmológica do *bulk* é ajustada de forma a termos uma constante

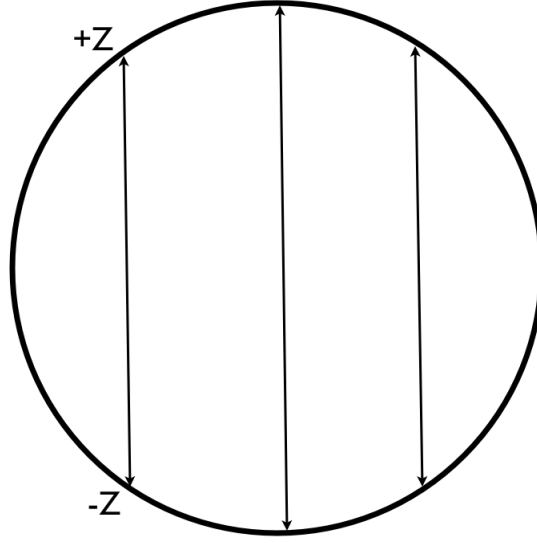


Figura 3: Representação gráfica de  $S^1/Z_2$ . As setas indicam os pontos identificados.

cosmológica efetiva nula. Passamos a estudar estas afirmações em mais detalhe: os ingredientes básicos do modelo são [18] incluir a tensão da brana (energia por unidade de 3-volume na brana) e a possibilidade de uma constante cosmológica 5D. Considera-se uma dimensão extra no espaço compactificado  $S^1/Z_2$ , isto é, com as simetrias

- Periodicidade:  $y \rightarrow y + 2y_c$
- Simetria da variedade orbital:  $y \rightarrow -y$

na coordenada  $y$  da dimensão extra.

Tomando as brana-UV e brana-IV, localizadas nos pontos fixos  $y = 0$  e  $y = L$ , respectivamente, a ação 5D desta configuração fica <sup>2</sup>

$$S = \int_{-L}^L dy \int d^4x [\sqrt{-g}(M^3 R - \Lambda)] \quad (2.16)$$

Primeiramente, precisamos encontrar a métrica para este cenário. Estamos olhando para soluções das equações de Einstein em 5D, e se queremos descrever o nosso mundo, precisamos que esta métrica preserve a invariância de Poincaré, i.e, o universo 4D desta

<sup>2</sup>Vamos adotar a notação onde  $g_{MN}$  são as componentes da métrica 5D,  $g$  seu determinante,  $M$  a escala fundamental de massa 5D,  $R$  o tensor de Ricci 5D e  $\Lambda$  a constante cosmológica 5D

teoria precisa ser plano e estático. Utilizando o seguinte *Ansatz* para a métrica

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.17)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  é a métrica do espaço de Minkowski 4D. O prefator  $e^{-2A(y)}$ , chamado fator de dobra, é escrito como um exponencial por conveniência. Sua dependência na coordenada da dimensão extra  $y$  torna a métrica não fatorizável, o que diferentemente das teorias usuais de Kaluza-Klein, não permite que ela seja expressa como um produto do espaço de Minkowski 4D e uma variedade das dimensões extras. Para determinar  $A(y)$ , precisamos calcular as equações de Einstein 5D:

$$R_{MN} - 1/2 g_{MN} R = \kappa^2 T_{MN}, \quad (2.18)$$

onde  $M$  e  $N$  tomam os valores 0,1,2,3 e 5, a constante de curvatura 5D é definida como

$$\kappa^2 \equiv \frac{1}{2M^3}, \quad (2.19)$$

onde  $M$  é a massa associada à curvatura, e o tensor energia-momento é dado por

$$T_{MN} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\Lambda)}{\delta g^{MN}}. \quad (2.20)$$

A componente 55 do tensor de Einstein é ( veja o Apêndice C)

$$G_{55} = 6A'^2 = -\frac{\Lambda}{2M^3}. \quad (2.21)$$

Note que uma solução real para  $A$  existe somente se  $\Lambda$  for negativa, o que implica que o espaço entre as branas é anti-de-Sitter, i.e.  $AdS_5$ . Da equação (2.21), temos que  $A'^2$  é igual a uma constante

$$A'^2 = \frac{-\Lambda}{12M^3} \equiv k^2. \quad (2.22)$$

Isto nos leva a uma expressão para  $A$ :

$$A(y) = \pm ky. \quad (2.23)$$

Como procuramos uma solução com invariância sob a transformação de simetria para  $y$ , escolhemos

$$A(y) = k|y|, \quad (2.24)$$

portanto, a métrica do *background* no modelo de RS é parametrizada por

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.25)$$

com  $-L < y < L$ .

Do Apêndice C, temos que

$$G_{\mu\nu} = (6A'^2 - 3A'')g_{\mu\nu} . \quad (2.26)$$

Diferenciando a equação (2.24), temos

$$A' = \frac{y}{|y|}k = \text{sgn}(y)k , \quad (2.27)$$

onde a função  $\text{sgn}(y)$  poder ser escrita como

$$\text{sgn}(y) = 2H(y) - 1 , \quad (2.28)$$

e, portanto,

$$A'' = 2k\delta(y) . \quad (2.29)$$

Ainda, levando em conta a periodicidade de  $y$ , temos

$$A'' = 2k[\delta(y) - \delta(y - L)] . \quad (2.30)$$

Usando esses resultados em (2.26), ficamos com

$$E_{\mu\nu} = 6k^2g_{\mu\nu} - 6k[\delta(y) - \delta(y - L)]g_{\mu\nu} . \quad (2.31)$$

O primeiro termo pode ser identificado com o tensor energia-momento

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = \kappa^2 \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\Lambda)}{\delta g^{\mu\nu}} = \kappa^2 \Lambda g^{\mu\nu} , \quad (2.32)$$

onde usamos a equação (B.5). Portanto, da definição (2.19),

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{2M^3} g_{\mu\nu} = -6k^2 g_{\mu\nu} , \quad (2.33)$$

onde a última igualdade decorre da definição feita em (2.22).

O segundo termo, para ser interpretado, precisa ser associado às densidades de energia das branas, chamadas de tensões. Isto é feito adicionando à ação termos correspondentes às tensões  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$S_1 = - \int d^4x \sqrt{-g_1} \lambda_1 = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \lambda_1 \delta(y) \quad (2.34)$$

$$S_2 = - \int d^4x \sqrt{-g_2} \lambda_2 = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \lambda_2 \delta(y - L) . \quad (2.35)$$



Os termos  $g_1$  e  $g_2$  são os determinantes das métricas induzidas na primeira e segunda brana respectivamente. As métricas induzidas permitem definir o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu \quad (2.36)$$

$$= g_{\mu\nu}(x, y_i) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.37)$$

onde  $i = 1, 2$  e  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = L$  e, dado que as branas devem ser localizadas em  $y = 0$  e  $y = L$ ,  $g_1 = g\delta(y)$  e  $g_2 = g\delta(y - L)$ , lembrando que  $g_{55} = 1$ . Comparando as equações de Einstein decorrentes da adição destes novos termos, com a equação (2.31), somos levados a condição

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 12kM^3, \quad (2.38)$$

além disso, da definição de  $k$ ,

$$\Lambda = -\frac{\lambda_1^2}{12M^3}. \quad (2.39)$$

Neste capítulo apresentamos a ideia de compactificação de Kaluza e Klein, e revisamos alguns aspectos dos modelos ADD e RS. Do primeiro, concluímos que podemos verificar desvios da gravitação em escalas dentro dos nossos limites experimentais impostos pelo LHC. O segundo modelo foi apresentado por completude e, embora o modelo utilizado nas buscas por buracos negros no LHC seja o primeiro, é um cenário consistente para o estudo da produção de buracos negros, que é o assunto do próximo capítulo.

## 3 *Buracos Negros no LHC*

De acordo com G. 't Hooft [19], o processo de espalhamento de duas partículas pontuais com energia do centro de massa CM da ordem da escala de Planck ou acima, é muito bem calculado usando as leis da física conhecidas, pois a troca de gravitons domina sobre todos os outros processos de interação. Para energias muito maiores do que a massa de Planck, a produção de buracos negros apresenta-se, acompanhada pela emissão coerente de gravitons. Sendo assim, a combinação da mecânica quântica e da relatividade geral conhecidas descrevem o processo de produção de buracos negros no LHC. Com o desenvolvimento das Teorias de Dimensões Extras, obtemos as ferramentas necessárias para descrever a produção de micro buracos negros em aceleradores e eventos de raios cósmicos. Faremos isso utilizando simulações numéricas da seção de choque, que está associada à probabilidade de detecção destes objetos. Utilizaremos dados experimentais recentes para analisar os resultados e poderemos então apresentar uma conclusão.

### 3.1 Condição Mínima para a Produção

Para a produção de buracos negros no LHC, um fator decisivo é o parâmetro de impacto  $b$ . Se o parâmetro de impacto é menor do que o raio de Schwarzschild relativos às partículas colisoras, o processo dominante é o da troca de gravitons. O raio de Schwarzschild para  $D = 4 + n$  dimensões segue da métrica de Schwarzschild-Tangherlini e é dado por

$$r_S = \frac{1}{M_D} \left( \frac{M_{bh}}{M_D} \right)^{\frac{1}{n+1}} k_n^{1/(n+1)}, \quad (3.1)$$

onde

$$k_n = \frac{8\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{(n+2)\sqrt{\pi}^{(n+1)}}. \quad (3.2)$$

O máximo valor do parâmetro de impacto pode ser obtido a partir da Conjectura do Laço, originalmente proposta por K. Thorne em 1972 [20]. Em quatro dimensões, a Conjectura

do Laço afirma que buracos negros com horizonte formam-se se e somente se a massa  $M_{bh}$  é compactada numa região na qual a circunferência em qualquer direção é dada por

$$C \lesssim 4\pi G_4 M_{bh} . \quad (3.3)$$

Para buracos negros em mais dimensões Ida e Nakao [21] sugerem uma inequação isoperimétrica  $V_{D-3} \lesssim G_D M_{bh}$ , onde  $V_{D-3}$  é o hiperlaço.

Em termos da energia do centro de massa  $\sqrt{\hat{s}}$ , precisamos que o comprimento de onda Compton da partícula colisora  $\lambda_C = 4\pi/\sqrt{\hat{s}}$  seja da ordem do seu raio de Schwarzschild i.e.,  $\frac{4\pi}{\sqrt{\hat{s}}} \leq r_S$  ou,

$$\frac{4\pi}{\left(\frac{\sqrt{\hat{s}}}{M_D}\right)^{n+1} k_D^{1/(n+1)}} \leq \frac{\sqrt{\hat{s}}}{M_D} , \quad (3.4)$$

esta inequação pode ser resolvida dada a razão  $x_{min} = \sqrt{\hat{s}}/M_D$ , necessária para a criação do buraco negro. Para  $n$  entre 2 e 7, esta razão fica entre  $x_{min} = 8,0$  e  $x_{min} = 11,2$  respectivamente. Portanto, destes resultados, conclui-se que a energia do centro de massa da colisão precisa ser aproximadamente uma ordem de grandeza maior do que a escala de Planck fundamental  $M_D$ . Em geral o termo  $4\pi$  é ignorado e exige-se que  $\sqrt{\hat{s}} \geq M_D$ . Conclui-se, portanto, que nosso modelo teórico pode ser testado no LHC. Apesar deste resultado clássico ser promissor, algumas questões devem ser levantadas: (I) quanta energia é consumida na criação do buraco negro, e (II) o quão favorável é esta produção. Estas perguntas requerem um estudo mais detalhado das colisões em altas energias, tema da próxima sessão.

## 3.2 Seção de Choque no Nível Partônico

Considere um processo de colisão entre duas partículas num espaço-tempo assintoticamente plano. Nele podemos definir um referencial para o CM no qual a soma total dos momenta espaciais é nula no limite assintótico. A energia do CM é obtida somando as energias neste mesmo referencial. Se a energia do CM,  $\sqrt{s}$ , é significativamente maior do que a energia de Planck, a colisão é dita trans-planckiana. Se as partículas que participam da colisão são compostas, a energia do CM pode ser obtida para os pártons, que podem ser quarks ou glúons. Essa energia do CM é chamada de energia do CM do nível partônico  $\sqrt{\hat{s}}$ , a qual é muito maior do que a soma das energias das massas de repouso dos pártons devido a contribuição da energia cinética, e por outro lado é menor do que a energia total

de colisão, pois outras partículas (espectadoras) que não contribuem para a colisão, levam parte da energia. Se dois pártons possuem a mesma massa, a energia do CM é

$$\sqrt{\hat{s}} = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2}} \equiv 2m\gamma(v), \quad (3.5)$$

onde  $v < 1$  é a velocidade de cada partícula no referencial do CM. Para uma colisão trans-planckiana  $\sqrt{\hat{s}} \gg M_D$ , entre pártons de massa  $m \ll M_D$ , um grande  $\gamma$  é necessário. Numa colisão entre prótons, os pártons, por exemplo quark-up, quark-down e glúons, carregam individualmente uma fração  $x$  da energia global da colisão ( $\sqrt{\hat{s}} = x\sqrt{s} \sim \gamma x m_{proton}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ). O fator  $\gamma$  necessário em uma colisão entre dois pártons, onde cada parton carrega a fração  $x_i$  da energia, onde  $i = 1, 2$ , pode ser estimado a ser

$$\gamma(v) \gg \frac{M_D}{\sqrt{x_1 x_2 m_{proton}^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \frac{M_D}{m_{proton}} \sim \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \frac{M_D}{TeV} \times 10^3. \quad (3.6)$$

Por outro lado, quando consideramos objetos "pesados", especialmente dois buracos negros colidores, suas massas podem ser assumidas como sendo muito maiores do que  $M_D$ <sup>1</sup>, de forma que o regime trans-planckiano com  $\gamma \sim \mathcal{O}(1)$ . Este regime de velocidade não é nada mais do que o regime clássico. Portanto a seção de choque no nível partônico pode ser formalmente dada pela seção de choque geométrica modificada por um "fator de forma"  $F$ :

$$\hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH} = F \pi r_s^2, \quad (3.7)$$

onde uma expressão possível para  $F$  é dada por [22]:

$$F_{IOP} \equiv \left[ \frac{2}{1 + \left(\frac{D-2}{2}\right)^2} \right]^{\frac{2}{D-3}}. \quad (3.8)$$

Este fator descreve a seção de choque levando em conta o momento angular do buraco negro e está apresentada na Figura 4 como função da massa do buraco negro, para alguns valores de  $M_D$  e  $D=11$ .

<sup>1</sup>A superfície aprisionada se forma antes das partículas colidirem, visto que os pártons viajam essencialmente com  $v=1$  e portanto podem acessar uma região menos do que  $r_s$  antes de qualquer sinal sobre sua chegada deforme a geometria

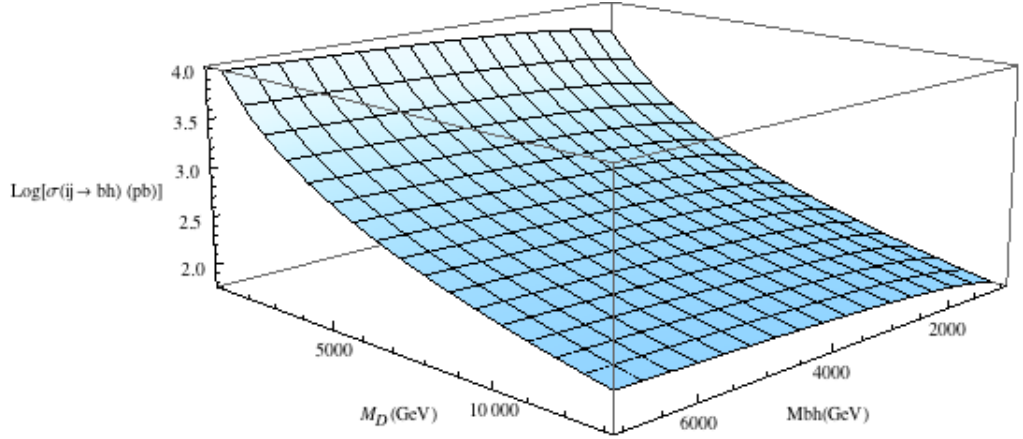


Figura 4: Seção de choque geométrica  $parton-parton$  como função da massa do buraco negro, assumindo 11 dimensões.

### 3.3 Seção de Choque de Produção numa colisão $pp$

A seção choque no nível hadrônico segue da convolução da seção de choque partônica com as Funções de Distribuição Partônicas ( $PDFs$ ),  $f(x)_i$ , somadas sobre todos os pares de partons  $i, j = (q, \bar{q}, g)$ , onde  $q = (u, d, s, c, b)$  que carregam energia suficiente para formação de buraco negro [23].

$$\sigma_{pp \rightarrow BH+X} = \sum_{ij} \int \frac{M_{bh}^2}{s} d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} f_i(x) f_j\left(\frac{\tau}{x}\right) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH}, \quad (3.9)$$

onde  $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH} = F_{IOP} \times r_s(\sqrt{\hat{s}} = M_{bh}^2)$ , onde  $\hat{s} \equiv s\tau \equiv s x_i x_j$ . A presença das PDFs, faz com a seção de choque seja fortemente suprimida. A escala de momentum  $Q$ , na qual as PDFs são avaliadas é determinada pelo inverso da escala de comprimento associada ao processo de espalhamento  $Q \sim r_s^{-1}$ , pois neste regime  $r_s$  é a escala relevante [24]. A seção de choque diferencial pode ser escrita como

$$\frac{d\sigma_{pp \rightarrow BH+X}}{d\tau} = \sum_{ij} \int_{\tau_m}^1 \frac{dx}{x} f_i(x) f_j\left(\frac{\tau}{x}\right) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH}. \quad (3.10)$$

Com  $\hat{s} = M^2$ , podemos fazer uma troca de variáveis de  $\tau$  para  $M_{bh}$ ,  $dM_{bh}/d\tau = s/(2M_{bh})$ , de forma que podemos escrever

$$\frac{d\sigma_{pp \rightarrow BH+X}}{dM} = \frac{2M}{s} \sum_{ij} \int_{\tau_m}^1 \frac{dx}{x} f_i(x) f_j\left(\frac{\tau}{x}\right) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH}. \quad (3.11)$$

Podemos reescrever essa expressão em termos da luminosidade partônica  $L$

$$\frac{d\sigma_{pp \rightarrow BH+X}}{dM_{bh}} = \frac{dL}{dM_{bh}} \hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH}, \quad (3.12)$$

onde

$$\frac{dL}{dM} = \frac{2M_{bh}}{s} \sum_{ij} \int_{\tau_m}^1 \frac{dx}{x} f_i(x) f_j\left(\frac{\tau}{x}\right). \quad (3.13)$$

Portanto, vemos que há uma fatorização da seção de choque. Enquanto a seção de choque partônica depende somente da massa do buraco negro, da escala de Planck e do número de dimensões extras, a luminosidade contém toda a informação sobre os pártons. A seção de choque total é apresentada nas Figuras 5 e 6, onde utilizamos as Funções de Distribuição Partônicas de Martin-Stirling-Thorne-Watts[25] com  $Q = r_s^{-1}$  para a escala, o número de dimensões extras  $n$  foi fixado em 7 e a energia do CM do LHC  $\sqrt{s} = 8TeV$ .

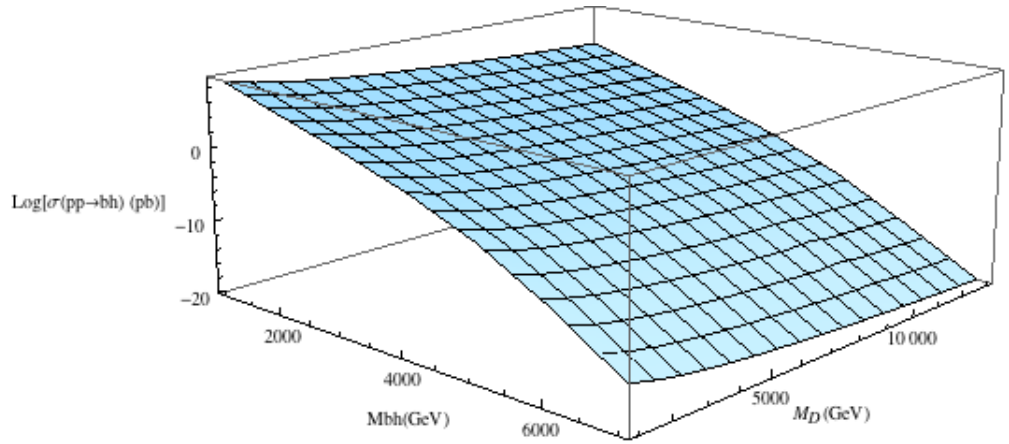


Figura 5: Seção de choque de produção como função de  $M_{bh}$  e  $M_D$  para uma colisão  $pp$  a 8 TeV assumindo 11 dimensões.

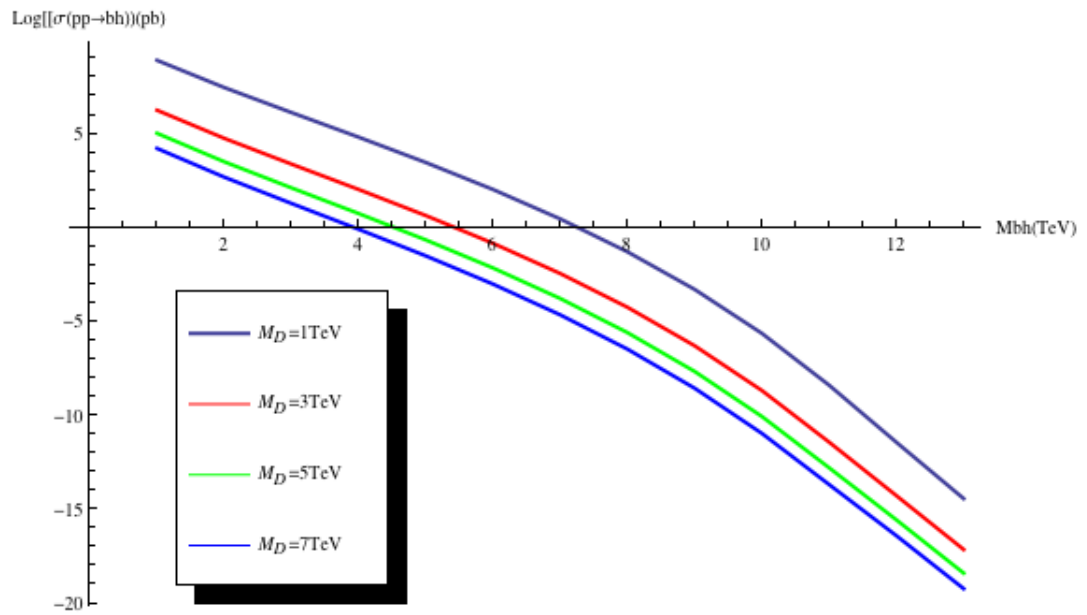


Figura 6: Seção de choque de produção como função de  $M_{bh}$  com valores selecionados de  $M_D$  para uma colisão  $pp$  a 8 TeV assumindo 11 dimensões.

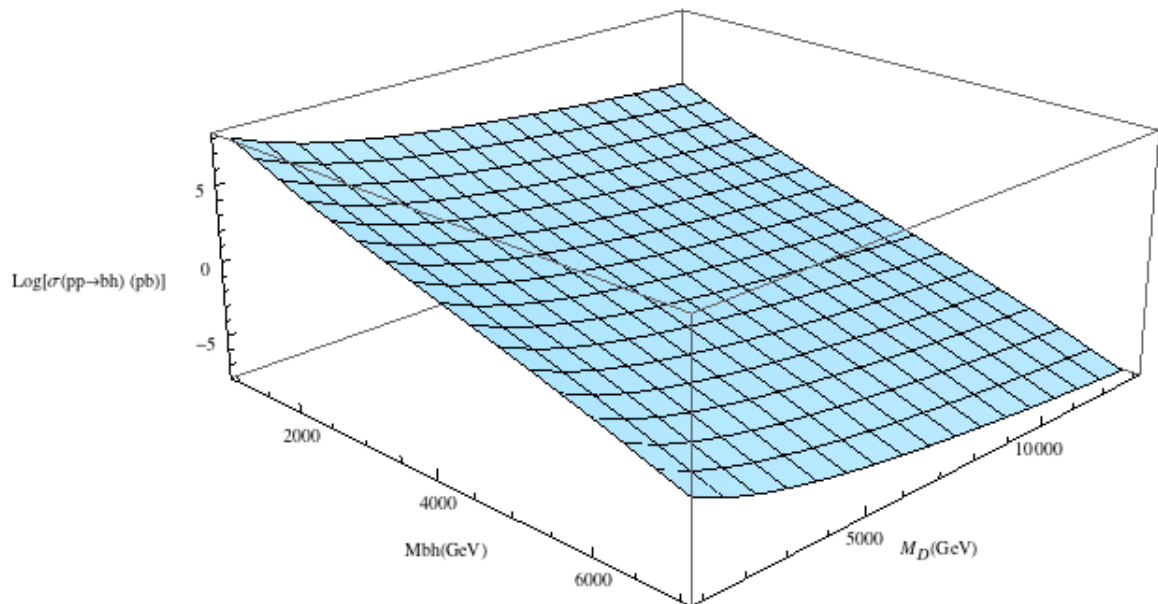


Figura 7: Seção de choque de produção como função de  $M_{bh}$  com valores selecionados de  $M_D$  para uma colisão  $pp$  a 14 TeV assumindo 11 dimensões.

O LHC com a luminosidade atual  $L \approx 10^5 pb^{-1}/ano$ , deveria produzir mais de  $10^8$  buracos negros por ano no caso mais promissor. A simulação foi repetida para uma colisão

a 14 TeV 7 e, utilizando a luminosidade atual, estimamos a produção de aproximadamente  $10^9$  eventos no cenário mais favorável.

### 3.4 Possíveis correções para Seção de Choque no Nível Partônico

É útil verificar como a descrição acima pode ser melhorada: na literatura[24] [26] encontramos as seguintes propostas, todas elas suprimindo a produção:

- **Forma mais geral para a seção de choque partônica:**

$$\sigma = F\pi r_h^{2+k}\Theta(M - M_{min}) , \quad (3.14)$$

onde  $F$  é um fator de forma,  $r_h$  é um horizonte mais geral que pode depender do momento angular e carga do buraco negro (usualmente tomado como  $r_H$ ),  $k$  é o número de dimensões extras nas quais as partículas do Modelo Padrão podem propagar (usualmente  $k = 0$ ), e  $\Theta$  é a função degrau de Heaviside que permite a produção de buracos negros apenas acima de determinada massa  $M_{min}$ .

- **Limiar de Massa:**

Existe um limiar para produção de buracos negros. Esse limite é da ordem de  $M_D$ , contudo seu valor exato não é conhecido, visto que efeitos de gravitação quântica podem entrar em cena. Em colisões de alta energia, se o parâmetro de impacto é menor do  $r_H$ , um buraco negro com massa  $M_{bh} \sim \sqrt{\hat{s}}$  pode ser produzido. Para garantir que estamos lidando no regime onde efeitos de gravitação quântica não entram em jogo, vamos impor que  $M \geq M_{min}$ , onde  $M_{min}$  precisa ser algumas vezes maior do que  $M_D$ <sup>2</sup>. No que segue, vamos definir o parâmetro adimensional.

$$x_{min} = \frac{M_{min}}{M_D} \quad (3.15)$$

e requerer  $x_{min} \geq 1$ .

- **Energia aprisionada:**

Cálculos usando relatividade geral sugerem que massa do buraco negro formado numa colisão frontal é de alguma forma menor do que a energia total do CM, i.e. a

---

<sup>2</sup>Na literatura as vezes  $M_{min}$  é tomado igual  $M_D$



colisão não é completamente inelástica. Portanto

$$M_{bh}(z) = y(z)\sqrt{\hat{s}}, \quad (3.16)$$

onde a inelasticidade  $y$  é função de  $z \equiv b/b_{max}$ , onde  $b$  refere-se ao parâmetro de impacto. Isto faz com que a seção de choque discutida anteriormente não seja mais fatorizável, pois o valor de *cutoff* inferior para fração de momentum partônica dependa do parâmetro de impacto. Utilizando a proposta de [27], podemos tomar a seção de choque para uma colisão  $pp$  como uma média pesada pelo parâmetro de impacto sobre a seção de choque partônica, com o limite inferior da fração de momentum partônica determinado pelo requerimento  $M_{min} = x_{min}M_D$ . Portanto, temos

$$\sigma_{pp \rightarrow BH+X} \geq \int_0^1 2z dz \sum_{ij} \int_{\frac{x_{min}M_D^2}{y^2s}}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} f_i(x) f_j\left(\frac{\tau}{x}\right) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow BH}(\tau s), \quad (3.17)$$

onde levamos em conta que as estimativas para a energia aprisionada são um limite inferior.

## 3.5 Resultados Experimentais

Para a busca de buracos negros no LHC, o seguinte conjunto de critérios e hipóteses para o sinal e o background são utilizados no detector CMS [6] do LHC:

- O modelo ADD é assumido com  $M_D \sim 1TeV$ . O buraco negro está contido na brana onde todas as partículas, exceto os grávitons, residem.
- Um buraco negro semi-clássico é esperado.
- Alta multiplicidade ( $N \geq 2-8$ ), com grande entropia e radiação Hawking fortemente isotrópica, típica de um buraco negro não rotante, é levada em conta para os sinais.
- Uma variável  $S_T$  é definida como a soma escalar da energia transversa ( $E_T$ ) dos objetos individuais: jets, elétrons, fótons e múons. Apenas objetos com  $E_T > 50GeV$  entram na soma de  $S_T$  e contam para a multiplicidade  $N$  do estado-final. Este corte na energia torna a análise insensível à eventos não desejados, permanecendo eficiente para buracos negros. Também adicionamos à  $S_T$  a energia perdida (missing energy),  $E_T^{miss}$ , se  $E_T^{miss} > 50GeV$ <sup>3</sup>. Esta análise é feita para  $M_D \in [1.5TeV, 2.5TeV]$  em

<sup>3</sup>Uma  $E_T^{miss}$  espúria pode surgir devido à jets cuja medição fora perdida.

$$D \in [6, 10].$$

- Os eventos são simulados utilizando o gerador monte-carlo BlackMax [28] e comparados com a simulação feita com PYTHIA [29].
- Os eventos *multi-jets* da QCD são o principal background, estimados utilizando as simulações mais bem estabelecidas na literatura ([30, 31]).

Os principais resultados estão apresentados nas Figuras 8 e 9. Sumariamente nenhum desvio do *background* foi identificado. Apenas estabeleceu-se um limite para a massa do buraco negro para dados valores de  $M_D$  da ordem de  $TeV$ . Os dados excluem buracos negros com massas entre 3.8 e 5.3  $TeV$ .

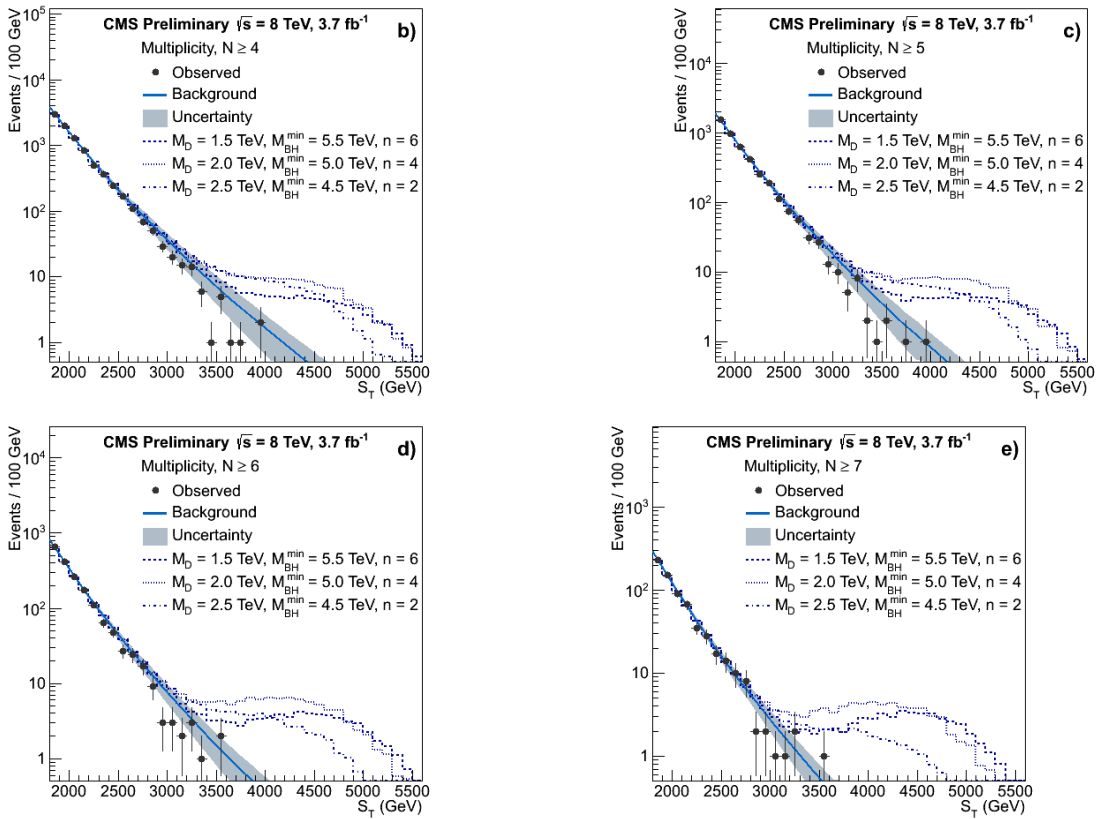


Figura 8: Energia transversa total  $ST$ , para eventos com multiplicidade  $N \geq 4, 5, 6, 7$ , respectivamente. Dados retratados como círculos cheios com barras de erro; a faixa escura é a predição do background obtida dos dados (linha contínua) com sua incerteza. Também é exibido o sinal predito para um buraco negro semi-clássico para três conjuntos distintos de parâmetros.

Utilizamos uma aproximação semi-clássica neste trabalho, pois não conhecemos a gravitação quântica, assim como os geradores Monte Carlo utilizados, e isto pode levar a grandes correções no resultado final. No entanto, um buraco negro semi-clássico parece estar fora do alcance do LHC com  $\sqrt{s} = 8 TeV$ .

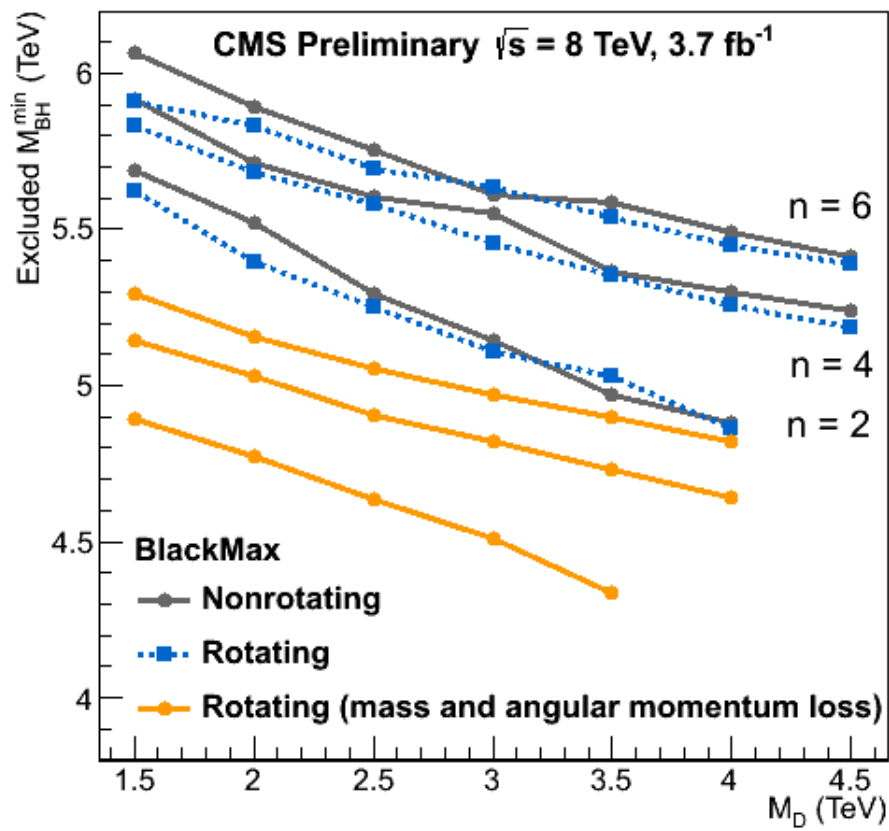


Figura 9: Intervalo de confiança de 95% na massa do buraco negro como função da escala de Planck  $M_D$  para vários modelos de buraco negro gerados pelo BLACKMAX. A área abaixo de cada curva foi excluída na última busca realizada no CMS.

## 4 *Conclusões*

Realizamos um estudo no contexto de teorias que preveem a existência de grandes dimensões extras ou dimensões extras dobradas, onde a intensidade é caracterizada por uma constante de Plank modificada,  $M_D$ , muito menor do que a 4-dimensional,  $M_{Pl}$ , tais como o ADD e o Randall-Sundrum. Estes modelos possuem uma previsão robusta: micro buracos negros de massa da de 1 TeV devem ser produzidos no LHC e suas assinaturas poderão nos levar a um entendimento mais profundo da gravitação quântica e da estrutura do espaço-tempo.

Neste estudo revisamos tanto a parte teórica, quanto experimental, envolvida na produção de buracos negros durante colisões de altas energias. Estudos analíticos e numéricos foram feitos para entender melhor o processo de formação no regime semi-clássico. Os cálculos nos levaram a uma taxa de produção de  $\sim 10^8$  buracos negros ao ano, no cenário mais favorável.

Resultados apresentados pelo CMS [6], no entanto, são bastante desfavoráveis a esta previsão. Porém, a interpretação dos resultados depende do modelo utilizado, e existem diversas correções propostas na literatura, ainda no regime semi-clássico, todas elas levando a uma taxa de produção menor e, portanto, apreciáveis somente com uma energia de colisão maior, isto sugere que ainda podemos observar alguma assinatura após os futuros upgrades do LHC. Portanto o resultado da busca do CMS deve ser tratado como indicativo, não preditivo, de que a aproximação semi-clássica não é válida na região dos parâmetros testados pelo experimento.

Finalmente, gostaria de acrescentar que não levamos em conta neste trabalho alguns observáveis que podem ser de grande valia, uns que aparecem quando tratamos de um buraco negro não-estático, cuja perda de energia, devido a rotação, na forma de radiação, leva ao caso tratado aqui, e a Radiação Hawking, que está presente mesmo no caso de um buraco negro do tipo Schwarzschild.

## *APÊNDICE A – Relação para o traço de uma matriz quadrada não singular*

Sendo  $M$  uma matriz quadrada não singular e diagonalizável, temos

$$\begin{aligned}
 \delta \ln(\det M) &\equiv \ln[\det(M + \delta M)] - \ln \det M \\
 &= \ln \left( \frac{\det(M + \delta M)}{\det M} \right) \\
 &= \ln (\det M^{-1}(M + \delta M)) \\
 &= \ln (\det(1 + M^{-1}\delta M)) , \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

além disso, o determinante,  $\det(1 + M^{-1}\delta M)$ , pode ser tomado como o produto dos autovalores,  $a_i$  de uma matriz diagonal  $A$ , obtida através de algum processo de diagonalização de  $M$ , portanto a equação (A.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \delta \ln(\det M) &= \ln(\prod_i a_i) \\
 &= \sum_i \ln(a_i) \\
 &= \text{Tr}(\ln A) , \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

utilizando o fato de que o traço é invariante, i.e  $\text{Tr}(\ln A) = \text{Tr}[\ln(1 + M^{-1}\delta M)]$  ficamos com

$$\begin{aligned}
 \delta \ln(\det M) &= \text{Tr}[\ln(1 + M^{-1}\delta M)] \\
 &\cong \text{Tr}(M^{-1}\delta M) , \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

onde desprezamos termos de segunda ordem em  $\delta M$ .

## APÊNDICE B – Equações de Einstein

A ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica é  $\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R + \lambda)$ , onde  $G$  é a constante de Newton em 4 dimensões,  $g$  é o determinante da métrica,  $R$  o escalar de Ricci e  $\lambda$  é a constante cosmológica em 4D.

Prova:

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \delta \int d^4x \sqrt{-g}(R + \lambda) \\
 &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left( \frac{\delta \sqrt{-g} R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta \sqrt{-g} \lambda}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left( \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} R + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \lambda \right) \delta g^{\mu\nu} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\implies \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} R + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \lambda = 0 . \tag{B.2}$$

Primeiramente, vamos avaliar o termo  $\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}$ : levando em conta o Apêndice (A),

$$Tr(M^{-1} \delta M) = \frac{1}{\det M} \delta(\det M) , \tag{B.3}$$

com  $M = g^{\mu\nu}$  e notando que  $g = \det g_{\mu\nu} = \det M^{-1}$ , temos

$$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = g \delta(g^{-1}) , \tag{B.4}$$

onde a soma em  $\mu$  e  $\nu$  está implícita. Usando a equação (B.4), o termo  $\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}$  fica

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta (-g^{-1})^{-1/2}}{\delta g^{\mu\nu}} \\
 &= -\frac{1}{2} (g^{-1})^{-3/2} \frac{\delta (g^{-1})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
 &= -\frac{1}{2} g^{1/2} g_{\mu\nu} ,
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Passamos a analisar o termo  $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$ : temos que  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , portanto

$$\delta R = (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} . \quad (\text{B.6})$$

Vamos mostrar que  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0$ : da definição do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} , \quad (\text{B.7})$$

temos

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \partial_{\kappa} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \partial_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}) \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} (\delta \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}) - (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}) \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} (\delta \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}) , \quad (\text{B.8})$$

com  $\nu \equiv \lambda$

$$\delta R_{\mu\kappa} = \partial_{\kappa} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \partial_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}) \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} (\delta \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}) - (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}) \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} (\delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}) , \quad (\text{B.9})$$

onde  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  pode ser obtido da definição dos Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) , \quad (\text{B.10})$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} (\delta g^{\lambda\rho}) (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} \delta g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} \delta g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) , \quad (\text{B.11})$$

A derivada covariante de  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  é

$$\delta \Gamma_{\mu\nu;\kappa}^{\lambda} = \partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\eta} \delta \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\eta\kappa}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \quad (\text{B.12})$$

a diferença

$$\delta \Gamma_{\mu\nu;\kappa}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\mu\kappa;\nu}^{\lambda} = \partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\eta\kappa}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} , \quad (\text{B.13})$$

é exatamente a equação (B.8). A igualdade

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \delta \Gamma_{\mu\nu;\kappa}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\mu\kappa;\nu}^{\lambda} \quad (\text{B.14})$$

é conhecida como Identidade de Palatini. Com  $\nu \equiv \lambda$ , desta identidade, temos

$$\delta R_{\mu\kappa} = \delta \Gamma_{\mu\lambda;\kappa}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\mu\kappa;\lambda}^{\lambda} . \quad (\text{B.15})$$

Segue que o termo  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  pode ser escrito como

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{;\lambda} , \quad (\text{B.16})$$

onde usamos o fato de que a derivada covariante da métrica é nula, i.e  $g_{;\kappa}^{\mu\nu} = 0$ . Podemos olhar para esta expressão de maneira diferente, pois trata-se da derivada covariante de um tensor contravariante de primeira ordem, pois só há um índice contravariante livre. De maneira geral, essa derivada segue da seguinte análise:

Seja  $v^\mu$  um tensor contravariante de primeira ordem, temos

$$v^\mu_{;\mu} = \partial_\mu v^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} v^\lambda, \quad (\text{B.17})$$

onde o termo  $\Gamma^\mu_{\mu\lambda}$  pode ser escrito, utilizando a equação (B.10), como

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} \partial_\lambda g_{\rho\mu} + g^{\mu\rho} \partial_\mu g_{\lambda\rho} - g^{\mu\rho} \partial_\rho g_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} \partial_\lambda g_{\rho\mu}), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde a última igualdade decorre da constatação que

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho} \partial_\mu g_{\rho\lambda} &= g^{\rho\mu} \partial_\rho g_{\mu\lambda} \\ &= g^{\mu\rho} \partial_\rho g_{\mu\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

onde na primeira igualdade trocamos a denominação dos índices mudos  $\rho \leftrightarrow \mu$  e na última utilizamos o fato da métrica ser simétrica na permutação dos seus índices. Ainda, utilizando a equação (A.3) com  $M$  sendo a matriz das componentes da métrica,  $[g]$ , e  $\delta \rightarrow \partial_\mu$ ,

$$\partial \ln(-\det[g]) = \text{Tr}[[g]^{-1} \partial[g]],$$

ou em termo das componentes

$$\partial_\lambda \ln(-g) = g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \ln(-g) \\ &= \partial_\lambda \frac{1}{2} \ln(-g) \\ &= \partial_\lambda \ln(-g)^{1/2} \\ &= \frac{1}{(-g)^{1/2}} \partial_\lambda (-g)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Portanto, a derivada covariante de um tensor contravariante de primeira ordem pode



ser reescrita como

$$v^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} v^\mu), \quad (\text{B.21})$$

expressão que, para o caso particular em que  $v^\nu = g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$ , fica

$$(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}), \quad (\text{B.22})$$

e, conseqüentemente, a equação (B.16) pode ser reescrita como

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) - \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda})); \quad (\text{B.23})$$

Tendo em vista o Teorema de Stokes,

$$\int_V \sqrt{-g} \partial_\nu v^\nu d^4x = \oint_S \sqrt{-g} v^\nu d^3x, \quad (\text{B.24})$$

com  $v^\nu = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$  e supondo que este termo se anule na superfície  $S$ ,

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{CQD.} \quad (\text{B.25})$$

Concluimos, utilizando a equação (B.25) na (B.6), que

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}, \quad (\text{B.26})$$

e, portanto, utilizando as equações (B.5) e (B.26) na equação (B.2),

$$\begin{aligned} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} R + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \lambda &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} R + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \lambda \\ &= 0 \\ \implies R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \lambda, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

da minimização da ação de Einstein-Hilbert obtemos as equações de Einstein na presença da constante cosmológica (B.27) .

## *APÊNDICE C – Tensor de Einstein para o Modelo Randall-Sundrum*

Vamos obter o tensor de Einstein em 5D,  $G_{MN} \equiv R_{MN} - 1/2g_{MN}R$ , a partir deste *Ansatz*. Primeiramente, vamos reescrever a métrica como

$$ds^2 = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (\text{C.1})$$

$$= g_{MN}(y)dx^M dx^N, \quad (\text{C.2})$$

com

$$g_{MN}(y) = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu} + \delta_M^5 \delta_N^5. \quad (\text{C.3})$$

<sup>1</sup> A métrica inversa é

$$g^{MN}(y) = e^{2A(y)}\eta^{\mu\nu} + \delta_5^M \delta_5^N. \quad (\text{C.4})$$

Com isso, podemos obter os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2}g^{PR}(\delta_M g_{NR} + \delta_N g_{RM} - \delta_R g_{MN}), \quad (\text{C.5})$$

levando em conta que  $g_{MN}$  é função apenas da dimensão extra, temos que

$$\delta_L g_{MN} = \delta_5 g_{MN} = \delta_5 g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.6})$$

Isso implica que os únicos símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{\mu\nu}^5 = \frac{1}{2}g^{5R}(-\delta_R g_{\mu\nu}) \quad (\text{C.7})$$

$$= \frac{1}{2}g^{55}(-\delta_5 g_{\mu\nu}) \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{2}A'e^{-2A}\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{C.9})$$

---

<sup>1</sup>Definimos  $y \equiv x^5$

e

$$\Gamma_{\mu 5}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu R}(-\delta_5 g_{R\mu}) \quad (\text{C.10})$$

$$= \frac{1}{2}e^{2A}\eta^{\nu\rho}(-2A'e^{-2A}\eta_{\rho\mu}) \quad (\text{C.11})$$

$$= -A'\delta_{\mu}^{\nu}. \quad (\text{C.12})$$

Podemos, então, determinar o tensor de Ricci

$$R_{MN} = \partial_P \Gamma_{MN}^P - \partial_N \Gamma_{MP}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{MN}^Q - \Gamma_{NQ}^P \Gamma_{MP}^Q, \quad (\text{C.13})$$

usando as equações (C.9) e (C.12), temos

$$R_{\mu\nu} = \partial_5 \Gamma_{\mu\nu}^5 + \Gamma_{\sigma 5}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^5 - \Gamma_{\nu 5}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^5 - \Gamma_{\nu\sigma}^5 \Gamma_{\mu 5}^{\sigma} \quad (\text{C.14})$$

$$= (A'' - 2A'^2)e^{-2A}\eta_{\mu\nu} - 4A'^2 e^{-2A}\eta_{\mu\nu} + A'^2 e^{-2A}\eta_{\mu\nu} + A'^2 e^{-2A}\eta_{\mu\nu} \quad (\text{C.15})$$

$$= (A'' - 4A'^2)g_{\mu\nu}, \quad (\text{C.16})$$

$$R_{\mu 5} = 0 \quad (\text{C.17})$$

e

$$R_{55} = -\delta_5 \Gamma_{5\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{5\rho}^{\sigma} \Gamma_{5\sigma}^{\rho} \quad (\text{C.18})$$

$$= 4A'' - 4A'^2. \quad (\text{C.19})$$

O escalar de Ricci fica, portanto,

$$R = g^{MN} R_{MN} \quad (\text{C.20})$$

$$= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{55} R_{55} \quad (\text{C.21})$$

$$= 4(A'' - 4A'^2) + 4A'' - 4A'^2 \quad (\text{C.22})$$

$$= 8A'' - 20A'^2 \quad (\text{C.23})$$

E, enfim, o tensor de Einstein é obtido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (\text{C.24})$$

$$= (6A'^2 - 3A'')g_{\mu\nu} \quad (\text{C.25})$$

$$G_{55} = R_{55} - \frac{1}{2}g_{55}R \quad (\text{C.26})$$

$$= 6A'^2. \quad (\text{C.27})$$

## *Referências*

- [1] AITCHISON, I. *Supersymmetry in Particle Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.
- [2] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, v. 429, p. 263–272, jun. 1998.
- [3] ANTONIADIS, I. et al. New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Phys.Lett.*, B436, p. 257–263, 1998.
- [4] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- [5] AAD, G. et al. Search for new phenomena with the monojet and missing transverse momentum signature using the atlas detector in proton–proton collisions. *Physics Letters B*, v. 705, n. 4, p. 294 – 312, 2011.
- [6] CHATRCHYAN, S. et al. Search for microscopic black holes in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7\text{TeV}$ . *Journal of High Energy Physics*, v. 4, p. 61, 2012.
- [7] WALD, R. M. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. [S.l.]: University Of Chicago Press, 1994.
- [8] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, v. 43, p. 199–220, 1975.
- [9] SUSSIKIND, L.; LINDESAY, J. *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*. [S.l.]: World Scientific, 2005.
- [10] PRAKASH, P. *Lecture Notes 8: Hawking Radiation*. 2011. Disponível em: <<http://www.cs.mcgill.ca/prakash/Qft/lecture8.pdf>>.
- [11] TANGHERLINI, F. Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Italian Physical Society, v. 27, p. 636–651, 1963. ISSN 1827-6121. 10.1007/BF02784569.
- [12] BERINGER, J. et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, 2012.
- [13] NASTASE, H. *Introduction to AdS-CFT*. Disponível em: <<http://www.ift.unesp.br/users/nastase/AdS-CFTnotes.pdf>>.
- [14] NORDSTRÖM, G. Über die möglichkeit, das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen. *Physikalische Zeitschrift*, v. 15, p. 504–506, 1914.

- [15] KALUZA, T. Zum unitätsproblem in der physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss*, p. 966–972, 1921.
- [16] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, v. 37, 1926.
- [17] LONG, J. C.; CHAN, H. W.; PRICE, J. C. Experimental status of gravitational-strength forces in the sub-centimeter regime. *Nuclear Physics B*, v. 539, p. 23–34, 1999.
- [18] GABELLA, M. The Randall-Sundrum Model. jun. 2006. Disponível em: <<http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf>>.
- [19] HOOFT, G. Graviton dominance in ultra-high-energy scattering. *Physics Letters B*, v. 198, n. 1, p. 61 – 63, 1987.
- [20] THORNE, K. S. Nonspherical gravitational collapse: A short review. 1972.
- [21] IDA, D.; NAKAO, K.-i. Isoperimetric inequality for higher dimensional black holes. *Phys.Rev.*, D66, p. 064026, 2002.
- [22] IDA, D.; ODA, K.-y.; PARK, S. C. Rotating black holes at future colliders: Greybody factors for brane fields. *Phys.Rev.*, D67, p. 064025, 2003.
- [23] PARK, S. C. Black holes and the lhc: A review. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 67, n. 3, p. 617 – 650, 2012.
- [24] GINGRICH, D. M. Black Hole Production at the Large Hadron Collider. *Int.J.Mod.Phys.*, A22, p. 5685–5699, 2007.
- [25] MARTIN, A. et al. Parton distributions for the lhc. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 63, p. 189–285, 2009.
- [26] GIDDINGS, S. B.; THOMAS, S. High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 056010, 2002.
- [27] ANCHORDOQUI, L. A. et al. Inelastic black hole production and large extra dimensions. *Physics Letters B*, v. 594, p. 363 – 367, 2004.
- [28] DAI, D.-C. et al. Manual of BlackMax, a black-hole event generator with rotation, recoil, split branes, and brane tension. 2009.
- [29] SJOSTRAND, T.; MRENNA, S.; SKANDS, P. Z. PYTHIA 6.4 Physics and Manual. *JHEP*, v. 0605, p. 026, 2006.
- [30] ALWALL, J. et al. MadGraph/MadEvent v4: The New Web Generation. *JHEP*, v. 0709, p. 028, 2007.
- [31] AGOSTINELLI, S. et al. Geant a simulation toolkit. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, v. 506, n. 3, p. 250 – 303, 2003.