

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

REMANEJO DE MALHAS EM PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS
DE GRANDES DEFORMAÇÕES

José Luís Farinatti Aymone

Tese apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte os requisitos para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

2000

Título: REMANEJO DE MALHAS EM PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS DE
GRANDES DEFORMAÇÕES

Autor: José Luís Farinatti Aymone

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

Orientador: _____

Prof. Guillermo Juan Creus, D.Sc. pela COPPE/UFRJ

Co-orientador: _____

Prof. Eduardo Bittencourt, D.Sc. pela UFRGS

Prof. Francisco P. S. L. Gastal

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Banca Examinadora:

Prof. Ademar Gilberto Groehs, D.Sc. pela COPPE/UFRJ

Prof. Mario Storti, Ph.D. pela Universidad del Litoral, Santa Fé - Argentina

Prof. Miguel Vaz Júnior, Ph.D. pela University of Wales Swansea - Inglaterra

Porto Alegre, setembro de 2000.

Dedico aos meus pais, José Antonio e Luicinda,
e ao meu irmão Rafael.

AGRADECIMENTOS

Registro meu sincero agradecimento a todas as pessoas que colaboraram para a realização deste trabalho.

Aos Professores Guillermo Juan Creus (Orientador) e Eduardo Bittencourt (Co-orientador), pelo empenho, interesse e dedicação, imprescindíveis ao desenvolvimento e conclusão do trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora Professores Ademar Groehs, Mario Storti e Miguel Vaz Jr. pelas valiosas observações e comentários que em muito contribuíram para o engrandecimento deste trabalho.

Ao Prof. Fábio Gonçalves Teixeira, parceiro na execução de alguns exemplos aqui apresentados.

Aos colegas de Pós-Graduação, em especial àqueles integrantes do CEMACOM, pela agradável convivência ao longo dos últimos quatro anos.

Ao Departamento de Expressão Gráfica da Faculdade de Arquitetura desta Universidade, do qual há dois anos faço parte, pela compreensão e apoio recebidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela formação de qualidade que recebi nos seus cursos de Mestrado e Doutorado.

À FAPERGS, PROPESQ/UFRGS e Faculdade de Arquitetura, pelo auxílio concedido para a apresentação de trabalhos relacionados à tese em congressos.

À CAPES, pela bolsa concedida durante parte do curso de Doutorado.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que me proporcionou um ensino gratuito e de qualidade, e da qual tenho a satisfação de pertencer ao quadro de professores.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS.....	xi
LISTA DE QUADROS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
RESUMO	xvii
ABSTRACT	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (LEA)	4
2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA COM REMALHAMENTO	10
2.3 AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO	11
2.4 AVALIAÇÃO DO ERRO	12
2.5 TRANSFERÊNCIA DE DADOS.....	13
3 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (LEA) PARA PROBLEMAS DE GRANDES DEFORMAÇÕES EM SÓLIDOS	17
3.1 CINEMÁTICA DA FORMULAÇÃO LEA	17
3.2 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO NA FORMULAÇÃO LEA.....	20
3.3 FORMA INTEGRAL DE GALERKIN DO BALANÇO DE MOMENTO.....	21
3.4 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	21
3.5 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS EM GRANDES DEFORMAÇÕES	23
3.6 MATRIZ TANGENTE PARA A FORMULAÇÃO LEA.....	25
3.7 TÉCNICA DE SEPARAÇÃO DO OPERADOR LEA	29
3.7.1 <i>Passo LA</i>	29
3.7.2 <i>Passo Euleriano</i>	30
3.8 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA.....	31
3.8.1 <i>O método de Newton-Raphson</i>	32
3.8.2 <i>O método das Diferenças Centrais</i>	33
3.9 LEIS CONSTITUTIVAS	37
4 TÉCNICAS DE REALOCAÇÃO NODAL.....	39
4.1 MÉTODO DA MÉDIA PONDERADA (MMP).....	41
4.1.1 <i>Nós internos: NEC=6 ou NEC=8</i>	42
4.1.2 <i>Nós de superfícies planas: NEC=3 ou NEC=4</i>	45
4.2 MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO NODAL QUADRÁTICA (MINQ).....	48
4.3 OBSERVAÇÕES SOBRE AS TÉCNICAS DE REALOCAÇÃO NODAL.....	51
4.4 CORREÇÃO DE POSIÇÃO PARA NÓS DE CONTATO	53
5 TRANSFERÊNCIA DE DADOS	54
5.1 PASSO 1: TÉCNICA DE SUAVIZAÇÃO	55
5.2 PASSO 2: TRANSFERÊNCIA DE DADOS PROPRIAMENTE DITA	57
5.2.1 <i>Desenvolvimento das tensões em séries de Taylor</i>	58
5.2.2 <i>Algoritmo de busca e interpolação</i>	59
5.2.2.1 <i>Redução do conjunto de busca</i>	62

5.2.2.2	Projeção dos nós realocados sobre o contorno LA	63
5.2.2.3	Interpolação de dados	65
6	AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO GEOMÉTRICA E DO ERRO.....	66
6.1	AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO GEOMÉTRICA	66
6.1.1	Fator de qualidade Q	66
6.1.2	Razão de aspecto.....	67
6.1.3	Ângulo de borda entre as faces.....	68
6.1.4	Ângulo de obliquidade das faces	68
6.1.5	Ângulo de empenamento das faces	69
6.1.6	Razão de afilamento das faces	70
6.1.7	Ângulo de torção entre as faces.....	71
6.2	AVALIAÇÃO DO ERRO EM GRANDES DEFORMAÇÕES	72
7	APLICAÇÕES.....	74
7.1	BARRA DE TAYLOR	74
7.1.1	Formulação LEA - Caso 1	76
7.1.2	Formulação LEA - Caso 2 - Realocação nodal iterativa.....	83
7.1.3	Formulação LEA - Caso 3 - Algoritmo de busca e interpolação.....	84
7.1.4	Formulação LEA - Caso 4 - MINQ em superfícies livres e planas.....	86
7.2	PUNÇIONAMENTO HEMISFÉRICO	87
7.2.1	Formulação LEA.....	88
7.3	INDENTAÇÃO POR UM CILINDRO	97
7.4	COMPRESSÃO DE UM CILINDRO METÁLICO	108
7.5	HIDROCONFORMAÇÃO DE UM TUBO	112
7.6	ESTRICÇÃO DE UMA BARRA.....	119
8	CONCLUSÕES	122
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125
	ANEXO A - FORMULAÇÃO LA COM REMALHAMENTO.....	132
A.1	Avaliação da distorção e do erro	132
A.2	Geração de uma nova malha.....	133
A.3	Transferência de dados	134
A.4	Reinício da análise	134
A.5	Comparativo entre a formulação LEA e a formulação LA com remalhamento	136
A.6	Refinamento para a formulação LA	140
	APÊNDICE A - CÁLCULO DE β PARA O MÉTODO DO RETORNO RADIAL.....	147

LISTA DE FIGURAS

Nº	Título	Pág.
1	Formulação LA – SRM.	5
2	Formulação Euleriana – SRE.	5
3	Formulação LEA - SRC.	6
4	Inversão paramétrica para obter os dados no nó i da malha realocada.	14
5	Tipos de nós: q (quina), b (borda), f (face), i (interno).	40
6	Número de elementos concorrentes em um nó (NEC).	41
7	Face interna de uma malha de hexaedros.	45
8	Identificação de superfícies planas para $NEC=4$.	45
9	Face externa (quadrilátera) de um hexaedro.	46
10	Quadrilátero dividido em dois triângulos.	46
11	Triângulo de lados com comprimento a^1 , a^2 e a^3 e vértices (nós) 1, 2 e 3.	47
12	Nó 2 com $NEC=2$ e nós vizinhos 1 e 3.	49
13	Curva quadrática definida pelos nós 1, 2 e 3.	49
14	NÓ 2 com $NEC=4$ e nós vizinhos 1 e 3.	50
15	Nó externo com $NEC=6$.	52
16	Malha concentrada. (a) No início do processo. (b)Após várias etapas de realocação.	52
17	Pontos de Gauss da malha LA (●) e da malha realocada (*).	54
18	Faces de hexaedros vizinhos divididas em direções diferentes. (a) Elementos hexaédricos vizinhos. (b) Face dividida ABCD.	60
19	Divisão do hexaedro em 24 tetraedros.	61
20	Um elemento hexaédrico é subdividido em dois pentaedros.	61
21	Cada pentaedro é subdividido em três tetraedros.	61
22	Nó realocado (●) e o mesmo nó na malha LA (○).	63
23	Obtenção do ponto $\chi^{N,PR}$.	63
24	Coordenadas triangulares do ponto $\chi^{N,PR}$.	64
25	Distâncias entre os centros das faces de um hexaedro (h_1, h_2, h_3).	67
26	Ângulo (α_i) entre duas faces adjacentes.	68
27	Sistema de coordenadas do elemento.	69
28	Ângulo de obliquidade (α_i).	69
29	Ângulo de empenamento (θ) de um quadrilátero.	70

30	Razão de afilamento de um quadrilátero.	70
31	Ângulo de torção entre duas faces opostas.	71
32	Configuração inicial da barra de Taylor. (a) Problema completo. (b) Malha empregada devido à simetria.	75
33	Malha deformada da barra de Taylor na formulação LA. (a) $t = 20\mu s$. (b) $t = 40\mu s$ (c) $t = 60\mu s$. (d) $t = 80\mu s$.	75
34	Malha deformada final na formulação LA.	76
35	Malha deformada da barra de Taylor na formulação LEA. (a) $t = 20\mu s$. (b) $t = 40\mu s$. (c) $t = 60\mu s$. (d) $t = 80\mu s$.	76
36	Malha deformada final na formulação LEA.	77
37	\bar{E}^p e malha deformada final nas formulações LA e LEA- vista plana YZ. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	77
38	Vista do plano YZ das malhas finais nas formulações LA e LEA. (a) Vista do cilindro inteiro. (b) Ampliação na parte inferior do cilindro.	78
39	Fator de qualidade Q nas formulações LA e LEA. (a) Q na Formulação LA. (b) Q na Formulação LEA.	78
40	Fator de obliquidade das faces. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	79
41	Razão de aspecto. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	79
42	Gráfico tempo x variação de volume.	80
43	Caso 3: \bar{E}^p e malha deformada final na formulação LEA.	84
44	Gráfico tempo x variação de volume.	85
45	Caso 4: \bar{E}^p e malha deformada final na formulação LEA.	86
46	Puncionamento hemisférico. (a) Cilindro completo. (b) Simetria do problema. (c) Malha empregada.	87
47	Malha deformada em (%) do deslocamento da punção na formulação LA. (a) 25%. (b) 50%.	88
48	Malha deformada em (%) do deslocamento da punção na formulação LEA. (a) 25%. (b) 50%. (c) 75%. (d) 100%.	88
49	Malha deformada a 50% do deslocamento da punção. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	89
50	Malha deformada a 100% do deslocamento da punção na formulação LEA.	89
51	\bar{E}^p na formulação LA e LEA a 50 % do deslocamento da punção - plano YZ. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	90
52	\bar{E}^p na formulação LEA a 100 % do deslocamento da punção - plano YZ.	90
53	Fator de obliquidade das faces a 50% do deslocamento da punção. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA	91
54	Fator de obliquidade das faces a 100% do deslocamento da punção -Formulação LEA.	91
55	Ângulo de borda das faces a 50% do deslocamento da punção. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	92
56	Ângulo de borda das faces a 100% do deslocamento da punção -Formulação	92

	LEA.	
57	Gráfico deslocamento da punção (%) x variação de volume (%).	94
58	Deslocamento da punção (%) x Força de conformação.	96
59	Indentação por um cilindro. (a) Problema completo. (b) Simetria do problema. (c) Malha empregada	97
60	Malha deformada nas formulações LA e LEA com $d_y = 0,4$ cm . (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	98
61	\bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA	98
62	Malha deformada nas formulações LA e LEA com $d_y = 0,8$ cm . (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	99
63	\bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	100
64	Fator de qualidade Q - vista do plano XY. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	101
65	Indicador de remalhamento \dot{I}^p - vista do plano XY. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	102
66	Deslocamento na direção Y (cm) x variação de volume (%).	102
67	Deslocamento da matriz x Força de conformação	103
68	Malha deformada nas formulações LA e LEA com $d_y = 0,4$ cm . (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	104
69	\bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	104
70	Indentação 3D - Malha deformada na formulação LA.	105
71	Indentação 3D - Malha deformada na formulação LEA.	105
72	\bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY. (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	106
73	Deslocamento na direção Y (cm) x variação de volume (%).	106
74	Deslocamento da matriz x Força de conformação.	107
75	Simplificação do problema devido à simetria do cilindro. (a) Cilindro inteiro. (b) Simetria: 1/8 do cilindro.	108
76	Seção do cilindro modelada na posição inicial.	109
77	\bar{E}^p e malha deformada final na formulação LA. (a) Vista do plano XZ (b) Vista em perspectiva.	109
78	\bar{E}^p e malha deformada final na formulação LEA. (a) Vista do plano XZ (b) Vista em perspectiva (c) Malha deformada completa com espelhamento.	110
79	Processo de hidroconformação para a formação de uma conexão tubular em Tê.	112
80	Blanque tubular modelado devido à simetria. (a) 1/4 do blanque. (b) Seção transversal.	113
81	Malha empregada na hidroconformação.	113

82	Pressão da água sobre o blanque tubular.	114
83	Matrizes de conformação (1/4 da geometria real devido à dupla simetria)	114
84	Hidroconformação - formulação LA com valores de \bar{E}^p .	115
85	Vista plana YZ com valores de \bar{E}^p . (a) Formulação LA. (b) Formulação LEA.	115
86	Formulação LA- Vista de dentro do tubo.	116
87	Deslocamento do tubo (mm) x Força de conformação (N).	117
88	Estricção de uma barra.	119
89	Estricção de uma barra. Malha deformada na formulação LA.	120
90	Formulação LEA utilizando a \bar{E}^p como fator de ponderação	120
91	Hexaedro de 8 nós colapsado em tetraedro de 4 nós com conectividades.	136
92	Compressão de um cilindro com valores de \bar{E}^p . (a) Malha de hexaedros usando a formulação LEA. (b), (c), (d) Malha de tetraedros usando a formulação LA com remalhamento.	138
93	Degeneração de hexaedros em pentaedros (elementos hachurados).	140
94	Faces do hexaedro que estão ficando paralelas.	141
95	Nós para o refinamento (\bullet), nós da faces paralelas que não são refinados (Δ).	141
96	Refinamento ao longo de uma linha que atravessa o sólido	142
97	Valores de \bar{E}^p na malha velha no momento da interrupção da análise - Formulação LEA. (a) Vista do plano XZ. (b) Vista em perspectiva.	143
98	Valores de \bar{E}^p na malha refinada no momento da interrupção da análise - Formulação LA. (a) Vista do plano XZ. (b) Vista em perspectiva.	143
99	Valores de \bar{E}^p na malha original no final do análise - Formulação LA. (a) Vista do plano XZ. (b) Vista em perspectiva.	144
100	Valores de \bar{E}^p na malha refinada no final do análise. (a) Vista do plano XZ. (b) Vista em perspectiva.	144
101	Gráfico deslocamento da matriz x força de conformação.	145

LISTA DE TABELAS

Nº	Título	Pág.
1	Resultados da barra de Taylor para as formulações LA e LEA	81
2	Barra de Taylor - Comparação dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA com análises de outros autores	82
3	Resultados do puncionamento hemisférico para as formulações LA e LEA	93
4	Comparação entre os resultados da formulação LEA a 100% do deslocamento da punção com análises 2D de outros autores	95
5	Resultados da indentação por um cilindro para as formulações LA e LEA	100
6	Compressão de um cilindro - Resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA	111
7	Hidroconformação - Resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA	116
8	Valores de Q nos diversos remalhamentos	139
9	Resumo dos resultados obtidos na formulação LA sem e com refinamento	145

LISTA DE QUADROS

Nº	Título	Pág.
1	Passos de cálculo da formulação LEA	38
2	Passos para a realocação nodal usando o MMP para nós internos	43
3	Passos do processo iterativo de realocação nodal	44
4	Passos para a realocação nodal usando o MMP para nós de superfícies planas	48
5	Passos para a realocação nodal utilizando o MINQ	51

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1

MEF - Método dos Elementos Finitos

CAPÍTULO 2

LEA - Formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária

LA - Formulação Lagrangeana Atualizada

\mathbf{X} - Coordenadas materiais

SRM - Sistema de referência material

t - Tempo

Δt - Intervalo de tempo

\mathbf{x} - Coordenadas espaciais

SRE - Sistema de referência espacial

SRC - Sistema de referência computacional

χ - Coordenadas da malha

METAFOR (METAl FORming) - Código de elementos finitos para conformação mecânica

2D - Bidimensional

3D - Tridimensional

CAPÍTULO 3

\mathbf{u} - Deslocamento da matéria

$\hat{\mathbf{u}}$ - Deslocamento da malha

${}^0 t$ - Tempo inicial

$\left| \right|_X$ - Ponto fixo no sistema material \mathbf{X}

$\left| \right|_\chi$ - Ponto fixo no sistema referencial χ

\mathbf{v} - Velocidade da matéria

$\hat{\mathbf{v}}$ - Velocidade da malha

\mathbf{c} - Velocidade convectiva

f_i - Função vetorial arbitrária

ρ - Densidade

σ_{ij} - Tensor das tensões de Cauchy

b_i - Forças de massa por unidade de volume

${}^x \Omega$ - Volume instantâneo no sistema espacial x

δu_i - Deslocamento virtual arbitrário

u_i^N - Deslocamento do nó N na direção i

ϕ^N - Função de interpolação no nó N
 NNE - Número de nós por elemento
 $NELEM$ - Número de elementos da malha
 ${}^x\Gamma^E$ - Superfície instantânea no sistema espacial x , para o elemento E
 ${}^xV^E$ - Volume do elemento E no sistema espacial x
 ${}^\chi V^E$ - Volume do elemento E no sistema de referência χ
 ${}^xS^E$ - Superfície do elemento E no sistema espacial x
 $F_i^{N,int}$, $F_i^{N,ext}$ - Forças internas e externas no nó N na direção i respectivamente
 J - Determinante do Jacobiano entre os domínios espacial e referencial
 J^S - Relação escalar entre $\partial^x V^E / \partial^\chi V^E$
 \dot{f}_i - Derivada temporal da função vetorial f_i no sistema material
 f_i^* - Derivada temporal da função vetorial f_i no sistema referencial
 \mathbf{K}^T - Matriz tangente
 δ_{jk} - Delta de Kronecker
 $\dot{\sigma}_{ij}$ - Derivada material no tempo do tensor das tensões de Cauchy
 $v_{(k,l)}$, $v_{[k,l]}$ - Partes simétrica e antissimétrica do gradiente de velocidade respectivamente
 \bullet - Operador que indica produto escalar de vetores
 : - Operador que indica produto escalar de matrizes
 Ω - Domínio em uso que segue o movimento do corpo
 Γ - Contorno do domínio e compreende Γ^U (com deslocamentos prescritos), Γ^F (forças de superfície prescritas) e Γ^C (contorno de contato)
 \mathbf{U} , \mathbf{G} - Campo de deslocamentos em Ω e Γ^C respectivamente
 C^0 - Função contínua
 C^1 - Função e derivada primeira contínua
 $\ddot{\mathbf{X}}$ - Campo de aceleração em Ω
 \mathbf{F} , \mathbf{B} - Forças de superfície e de volume prescritas respectivamente.
 \mathbf{T} - Forças de contato em Γ^C
 \mathbf{F}^{int} , \mathbf{F}^{ext} - Forças internas e externas nos nós dos elementos finitos
 $\ddot{\mathbf{X}}$ - Aceleração nodal
 \mathbf{M} - Matriz de massa consistente
 \mathbf{r} - Resíduo
 ε - Tolerância
 $\| \cdot \|$ - Norma Euclidiana
 NGL - Número de graus de liberdade por nó
 $F_i^{N,inércia}$ - Força de inércia no nó N na direção i
 \mathbf{M}^E - Matriz de massa consistente do elemento
 $\mathbf{F}^{E,inércia}$ - Força de inércia no elemento E
 $\ddot{\mathbf{X}}^E$ - Aceleração no elemento E
 Δt^{crit} - Intervalo de tempo crítico para o método das Diferenças Centrais
 T^{min} - Período de vibração mínimo da estrutura
 ω^{max} - Máxima frequência de vibração da estrutura

α - Fator de segurança para o método das Diferenças Centrais
 E - Módulo de elasticidade
 ν - Coeficiente de Poisson
 L^{\min} - Menor comprimento percorrido para atravessar um elemento finito
 D_{kl}^c - Tensor velocidade de deformação avaliado em um sistema corrotacional
 H_{ijkl}^c - Tensor das relações constitutivas avaliado em um sistema corrotacional
 t^f - Tempo final
 ${}^{0-1}\mathbf{F}$ - Gradiente de deformação espacial
 ${}^{0-1}\mathbf{R}$, ${}^{0-1}\mathbf{U}$ - Tensores de rotação e deformação pura respectivamente
 K - Módulo de incompressibilidade
 G - Módulo de elasticidade transversal
 ${}^1\boldsymbol{\sigma}^c$ - tensões de Cauchy em eixos corrotacionais (c)
 $p^{e,c}$ - Pressão hidrostática do tensor de Cauchy
 $s_{ij}^{e,c}$ - Componentes desviadoras do tensor de Cauchy no preditor elástico do Retorno Radial
 ${}^1s_{ij}^c$ - Componentes desviadoras do tensor de Cauchy no corretor plástico do Retorno Radial
 β - Correção para as componentes desviadoras no corretor plástico
 ${}^{0-1}\mathbf{E}^{\ln,c}$ - Tensor de deformação logarítmica

CAPÍTULO 4

NEC - Número de elementos concorrentes no nó
 ν_j - Cossenos diretores da normal externa à superfície
 t_i - Forças de superfície
 MMP - Método da Média Ponderada
 $MINQ$ - Método da Interpolação Nodal Quadrática
 V^T - Volume total dos elementos que rodeiam um nó
 V^J - Volume do elemento J
 $X_1^{G,J}$, $X_2^{G,J}$, $X_3^{G,J}$ - Coordenadas do centro de gravidade do elemento J
 X_1^I , X_2^I , X_3^I - Coordenadas nodais do elemento J
 χ_1, χ_2, χ_3 - Coordenadas do nó realocado
 \mathbf{n} - Vetor normal a um plano
 γ - Ângulo entre dois vetores
 A^T - Área total das faces que concorrem em um nó
 A^J - Área do quadrilátero J
 sp - Semiperímetro de um triângulo
 a^1, a^2, a^3 - Comprimento de cada lado de um triângulo
 ξ - Coordenada reduzida unidimensional entre [-1;1]
 ξ^r - Coordenada reduzida unidimensional entre [0;1]
 $Dist^{I-2}$ - Distância entre os pontos I e 2
 c_i^N - Correção da posição nodal na direção i normal ao corpo rígido
 k_i - Fator de penalidade normal na direção i

CAPÍTULO 5

${}^X \sigma^{PG}$ - Tensor das tensões nos pontos de Gauss da malha LA

${}^X \sigma^N$ - Tensor das tensões nodais na malha LA

Φ - Matriz das funções de interpolação

PG - Ponto de Gauss

${}^X \sigma_i^{PG}$ - Componente de tensão avaliada no ponto de Gauss PG da malha realocada

${}^X \sigma_i^N$ - Componente de tensão avaliada no nó realocado N

$\partial^X \sigma_i^{PG} / \partial X_j$ - Gradiente de tensão próximo ao ponto de Gauss PG da malha LA

J - Matriz do Jacobiano

L^N - Coordenadas volumétricas do nó realocado no elemento tetraédrico

$\chi^{N,PR}$ - Projeção do nó realocado N sobre o contorno LA

χ^N - Coordenadas do nó realocado N

π - Plano sobre o contorno da malha LA

n - Vetor normal a um plano

$Dist(\chi^N \pi)$ - Distância entre χ^N e o plano π

CAPÍTULO 6

Q - Fator de qualidade para a avaliação da distorção geométrica

P - Perímetro de um hexaedro ou tetraedro

h_1, h_2, h_3 - Distância entre faces opostas de um hexaedro

\dot{I}^φ - Taxa do indicador de fratura

\bar{E}^p - Deformação plástica equivalente

$\dot{\bar{E}}^p$ - Taxa de deformação plástica equivalente

E_{ij}^p - Tensor de deformação plástica

φ - Fator usado para cálculo do indicador de fratura

p - Pressão

$\bar{\sigma}$ - Tensão equivalente de von Mises

CAPÍTULO 7

${}^0 \sigma^v$ - Tensão de escoamento

h - Módulo de endurecimento linear

APÊNDICE A

Ψ - Fator utilizado no corretor plástico do método do Retorno Radial

${}^0 \sigma^e$ - Tensão limite elástico do material

h^{iso} - Módulo de endurecimento isótropo

RESUMO

Este trabalho apresenta propostas para o remanejo de malhas em problemas tridimensionais de grandes deformações. É focalizada a aplicação de uma formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária, capaz de manter uma boa qualidade dos elementos finitos ao longo de processos como conformação mecânica e impacto. Esta formulação é uma alternativa a formulações Lagrangeanas, nas quais a malha de elementos finitos fica "colada" à matéria, o que ocasiona uma distorção excessiva da mesma. Para introduzir a formulação LEA, os aspectos relacionados à cinemática da formulação, o princípio dos trabalhos virtuais, a técnica de separação do operador LEA em dois passos (Lagrangeano Atualizado-LA e Euleriano), os métodos de solução numérica do problema e as leis constitutivas são revistos. Em seguida, são descritas as técnicas de realocação nodal para o remanejo de malhas e os procedimentos para a transferência de dados (utilizados após a realocação nodal para a passagem dos valores das variáveis de estado da malha do passo LA para a malha realocada do passo Euleriano). Finalmente, são apresentados critérios de avaliação da distorção e do erro, empregados para a verificação da qualidade da malha e dos resultados obtidos em aplicações numéricas realizadas. A formulação LEA mostrou ser uma alternativa eficiente em muitos casos, porque possibilita um remanejo de malhas automático com resultados de boa qualidade sem precisar interromper a análise.

ABSTRACT

This work presents remeshing techniques for three-dimensional large deformation problems. It is focused on the application of an Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation, which is able to maintain the finite elements shape during processes such as metal forming and impact. This formulation is an alternative to Lagrangian formulations, where the finite element mesh, attached to the material, suffers excessive mesh distortion. To introduce the ALE formulation, the aspects related to kinematic, virtual work principle, operator splitting technique in two steps (Updated Lagrangian-UL and Eulerian), numerical solution methods and constitutive laws are revised. Then, nodal relocation techniques for mesh adaptation and data transfer procedures (employed after the nodal relocation to transfer state variables from UL mesh to relocated mesh of the Eulerian step) are described. Finally, mesh distortion and error evaluation criteria are presented and used for verifying mesh quality and results accuracy in the numerical applications performed. The ALE formulation is shown to be an efficient alternative in many cases, because it provides automatic remeshing with good quality results without interrupting the analysis.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver e aprimorar técnicas de remanejo de malhas aplicadas a problemas tridimensionais de grandes deformações, usando o método dos elementos finitos (MEF).

A justificativa para a escolha deste tema reside no fato de que a utilização de técnicas eficientes de remanejo de malhas possibilita a análise completa de problemas de grandes deformações, mantendo a boa qualidade dos resultados ao longo de todo o processo. O tema proposto é ainda uma área que se está começando a investigar, já que a maioria dos trabalhos publicados na área tratam problemas bidimensionais, os quais são muito mais simples que a simulação de problemas 3D.

O campo de emprego de análises de grandes deformações é amplo, tendo como exemplos processos de conformação mecânica, tais como forjamento e estampagem, e também a simulação de pós-flambagem e impacto.

Na simulação de problemas de conformação mecânica faz-se necessário o emprego de algoritmos que sejam capazes de considerar fenômenos complexos que agem simultaneamente (contato e atrito; grandes deformações plásticas; retorno elástico da peça após a conformação; tensionamento das ferramentas de conformação entre outros). A simulação destes processos tem importância estratégica pois permite à indústria metal-mecânica reduzir custos (evita-se a quebra das ferramentas de trabalho e a necessidade de trabalho mecânico posterior) e obter um produto final de maior qualidade.

Em problemas que envolvem impacto são exigidos algoritmos capazes de simular os fenômenos anteriormente mencionados, com a dificuldade adicional de considerar efeitos dinâmicos. Este tipo de simulação é empregado no projeto estrutural de automóveis, ônibus e aviões, onde a procura por projetos mais seguros é cada vez mais um item exigido. Além disso, pode ser empregado no estudo de estruturas civis, tais como usinas nucleares, que devem ter suas partes estruturais testadas nas mais diversas condições de acidente/impacto.

Em processos de conformação mecânica, pode-se atingir valores de deformação plástica muito altos. Quando se emprega uma formulação Lagrangeana Atualizada (LA) (McMeeking e Rice, 1975), na qual a malha fica "colada" à matéria, essas deformações levam a uma distorção excessiva da malha de elementos finitos. De modo a evitar a distorção da malha, técnicas de remalhamento¹ ou "*remeshing*" para problemas 2D (Cheng e Kikuchi, 1986; Cheng, 1988; Habraken e Cescotto, 1990) e 3D (Coupez, Soyris e Chenot, 1991; Szentmihali et al., 1994), usando a formulação LA, vêm sendo desenvolvidas. Essas técnicas são, em geral, compostas de diversos passos, tais como: avaliação da distorção da malha, interrupção da análise se a malha é considerada distorcida, geração de uma nova malha mais uniforme, transferência de dados da malha antiga (distorcida) para a malha nova e reinício da análise. Além disso, no caso de problemas 3D, deve-se frisar que o remalhamento no contorno de um sólido tridimensional é uma tarefa complicada, visto que é difícil manter a correta representação da sua superfície quando os nós externos mudam de posição. Deve-se considerar também que a geração de uma malha não-estruturada 3D de boa qualidade, especialmente de elementos hexaédricos, é um problema que ainda está sendo investigado.

Diferentemente da formulação LA, a formulação Euleriana, em que a malha é fixa e a matéria se move através dela, não é apropriada para representar o movimento dos contornos.

Para superar essas dificuldades, a formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (LEA) foi proposta. Ela foi desenvolvida inicialmente para fluidos (Hughes, Liu e Zimmermann, 1981; Donea, Giuliani e Halleux, 1982) e mais tarde para problemas de grandes deformações em sólidos (Haber, 1984; Liu, Belytschko e Chang, 1986). Nesta formulação, o movimento da malha é desacoplado do movimento da matéria, podendo-se reduzir a distorção dos elementos finitos e manter os nós externos aderidos aos contornos. O remanejamento de malhas é efetuado através da realocação dos nós da malha, sem mudar a sua quantidade ou suas funções de interpolação. Já existem vários trabalhos a respeito desta formulação para problemas 2D (Liu et al., 1988; Ponthot, 1995; Ghosh e Raju, 1996; Gadala e Wang, 1999), mas este não é o caso em 3D. Alguns fatores ainda fazem com que a utilização da formulação LEA em 3D seja uma tarefa complexa, uma vez que é mais difícil representar corretamente a superfície dos corpos e evitar a perda de volume, bem como definir técnicas eficientes de realocação nodal.

¹ O termo "remalhamento", inexistente na língua portuguesa, é empregado como a tradução do inglês para a palavra "remeshing".

Alternativamente, a formulação LEA poderia ser utilizada em conjunto com um remalhamento. Esta formulação seria usada até o momento em que se julgasse ser necessário um remalhamento. Neste ponto a análise seria interrompida, uma nova malha mais uniforme gerada e a formulação LEA utilizada novamente ao se reiniciar a análise.

Em vista do que foi mostrado, o presente trabalho propõe-se, para problemas tridimensionais, a: apresentar a formulação LEA e desenvolver técnicas de realocação nodal para a mesma; avaliar a distorção geométrica e o erro nas análises efetuadas; investigar e propor técnicas de transferência de dados.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em função dos objetivos citados na introdução, a presente revisão bibliográfica compreende os aspectos relacionados à formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (LEA), ao remalhamento para a formulação Lagrangeana Atualizada (LA), à avaliação da distorção geométrica e do erro e à transferência de dados da malha distorcida (ou antiga) para a malha realocada (ou nova).

2.1 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (LEA)

A formulação LEA surgiu com o propósito de superar as dificuldades encontradas quando se utiliza a formulação Euleriana ou a formulação LA em processos como conformação mecânica, onde ocorrem grandes deformações.

Na formulação Lagrangeana (McMeking e Rice, 1975), o sistema de referência é preso ao corpo, ficando a malha "colada" à matéria. Este sistema é chamado de sistema de referência material (SRM), de coordenadas materiais X . Dependendo da configuração de referência empregada, tem-se um tipo de formulação Lagrangeana. Os três tipos de configuração de referência possíveis são: a configuração inicial (formulação Lagrangeana Total), a última configuração equilibrada conhecida (formulação Lagrangeana Atualizada - LA) e uma configuração intermediária qualquer (formulação Lagrangeana Generalizada).

A título de comparação, neste trabalho será considerada a formulação LA por ser mais apropriada a leis constitutivas que dependem da história de deformação, como a elastoplástica. Na Fig. 1 tem-se um corpo que sofre uma deformação entre os tempos t e $t + \Delta t$. Usando a formulação LA, os elementos se movem junto com o corpo deformado e, portanto, podem ficar muito distorcidos. Essa distorção pode causar problemas numéricos e de precisão nos resultados.

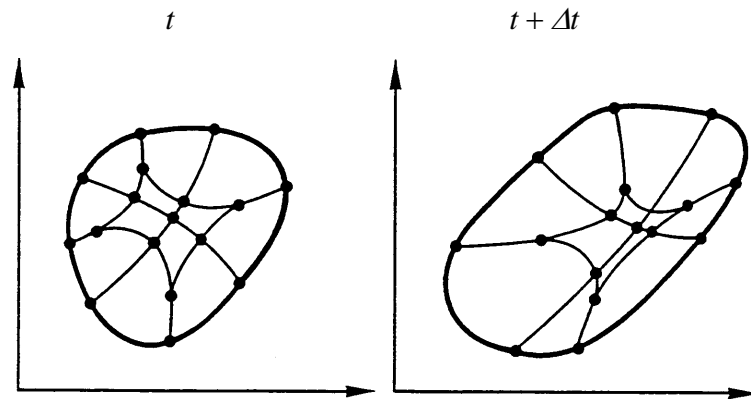


FIGURA 1 - Formulação LA - SRM

Por outro lado, na formulação Euleriana, o sistema de referência é fixo no espaço, sendo chamado de sistema de referência espacial (SRE), de coordenadas espaciais x . Pelo fato de o sistema ser fixo no espaço, os elementos finitos também estão fixos no espaço e o contorno do corpo deformado nem sempre coincide com um lado do elemento (Fig. 2). Isso torna complicado levar em conta as condições de contorno materiais mas, por outro lado, a distorção da malha é inexistente.

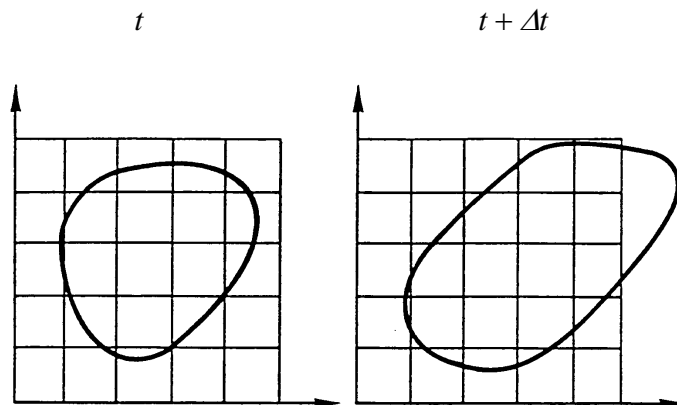


FIGURA 2 - Formulação Euleriana - SRE

A formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (LEA) desvincula o movimento da malha do movimento da matéria. Por isso, é possível usar técnicas para realocar os nós da malha, colocando-os em posições mais favoráveis e melhorando, assim, a qualidade da mesma. Essa realocação pode ser feita em cada passo de tempo da análise, a fim de evitar o aparecimento de elementos muito distorcidos.

A diferença existente entre a formulação LEA e as formulações Euleriana e LA está no sistema de referência utilizado. Na formulação LEA, ele não é fixo no espaço e nem preso ao corpo. Esse sistema é chamado de sistema de referência computacional (SRC). Nele, cada ponto é identificado de forma unívoca pelas coordenadas da malha χ . Como a posição dos pontos SRC não é dada, ela pode ser escolhida livremente, conferindo bastante liberdade na formulação do modelo matemático. Pode-se fixar o SRC no espaço, levando a uma formulação Euleriana, ou então prendê-lo ao corpo, recaindo na formulação Lagrangeana. Ao se escolher convenientemente a posição dos pontos no SRC, utilizando a formulação LEA, pode-se diminuir consideravelmente a distorção dos elementos (Fig. 3).

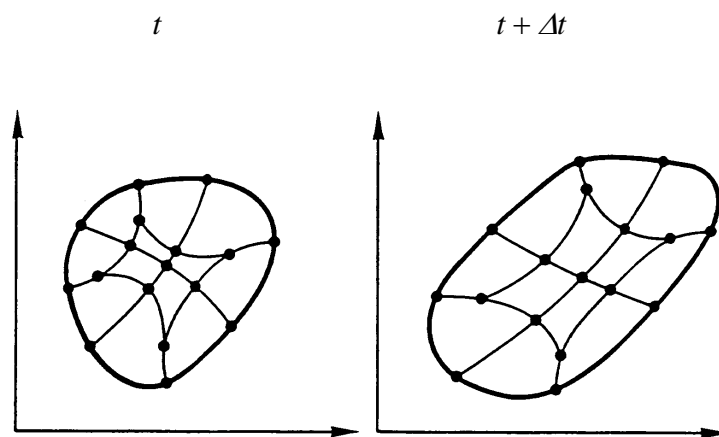


FIGURA 3 - Formulação LEA - SRC

A formulação LEA, em conjunto com o método dos elementos finitos ou das diferenças finitas, foi usada inicialmente para simular processos de gases, fluidos e interação fluido-estrutura (Hughes, Liu e Zimmermann, 1981; Donea, Giuliani e Halleux, 1982).

Donea, Giuliani e Halleux (1982) apresentaram modelos usando o método dos elementos finitos para prever a resposta não-linear de sistemas fluido-estrutura submetidos a cargas dinâmicas transientes. A formulação LEA utilizada conduziu a um tratamento eficaz das interfaces fluido-estrutura, onde os nós se movem independentemente do movimento do domínio e não aparece uma distorção excessiva da malha.

A aplicação da formulação LEA em processos de conformação mecânica começou logo em seguida (Haber, 1984; Liu, Belytschko e Chang, 1986; Schreurs, Veldpaus e Brekelmans, 1986).

Pela revisão da literatura realizada, o primeiro trabalho que tratou da formulação LEA em sólidos foi o de Haber (1984), que apresentou a descrição cinemática, o princípio dos trabalhos virtuais e a energia potencial estacionária para a formulação LEA de forma incremental. Foram mostradas, ainda, aplicações no campo das grandes deformações, nas áreas de contato com atrito e mecânica da fratura.

Dois anos depois, Liu, Belytschko e Chang (1986) formularam as leis de conservação, as equações constitutivas e a equação de estado para materiais dependentes do caminho de carga para a formulação LEA. Foi proposto também um procedimento explícito para a implementação computacional desta formulação em análises não-lineares e apresentada uma aplicação em um problema 1D de propagação elastoplástica de onda.

Na mesma época, Schreurs, Veldpaus e Brekelmans (1986) definiram os sistemas de referência SRM, SRE e SRC, já mencionados, e um procedimento para a adaptação automática de malhas em que os nós são realocados sem mudar a topologia da malha. Este procedimento mostrou-se eficaz, por conseguir melhorar a geometria dos elementos distorcidos. A formulação LEA foi empregada em processos de conformação axissimétricos.

Em 1988 Liu et al., partindo do trabalho de Liu, Belytschko e Chang (1986), derivaram as matrizes de rigidez tangente e geométrica através de um processo de linearização consistente. Os exemplos da barra de Taylor e de puncionamento 2D apresentaram bons resultados.

Huetink, Vreede e Van Der Lugt (1990) propuseram um processo de suavização local e global das tensões com o intuito de evitar instabilidades numéricas. A formulação do MEF foi estendida para levar em conta o fenômeno de contato. Para realocar nós de contorno empregou-se uma curva do tipo "spline", procurando assim evitar a perda de volume.

Ponthot e Hogge (1991) e Ponthot (1995) também apresentaram a formulação LEA para 2D, utilizando a técnica de mapeamento transfinito para a realocação nodal, implementando computacionalmente a formulação no código de elementos finitos para conformação mecânica METAFOR (METAL FORMing). No METAFOR, ambos os sistemas de referência SRM e SRC são utilizados. Em cada instante do processo há uma relação biunívoca entre os dois sistemas de referência. As posições nodais SRC podem ser prescritas ou determinadas de modo que a distorção dos elementos se mantenha em níveis aceitáveis. Por outro lado, duas dificuldades surgem no uso da formulação LEA. Termos convectivos

aparecem na equação de balanço de momento devido ao movimento relativo entre a malha e a matéria. Além disso, as equações de equilíbrio têm duas vezes mais incógnitas que equações. Para lidar com essas dificuldades sem que haja um custo computacional alto, como em Liu et al. (1988) que resolve o problema de forma acoplada, propôs-se a divisão do operador LEA, em cada passo de tempo, em dois passos: um passo LA seguido por um passo Euleriano (Benson, 1989; Ponthot e Hogge, 1991). No passo LA, a malha se movimenta junto com a matéria e, portanto, não há termos convectivos. Neste passo, para casos quasi-estáticos, itera-se até atingir o equilíbrio usando o método de Newton-Raphson. Em casos dinâmicos, emprega-se o método das Diferenças Centrais. Em seguida, o passo Euleriano é executado, impondo-se uma nova posição da malha (mais uniforme) através da realocação nodal. Ao impor-se o movimento da malha, elimina-se as incógnitas em excesso existentes nas equações de equilíbrio. Os dados (variáveis de estado) são transferidos da malha LA para a malha realocada utilizando um desenvolvimento em séries de Taylor das tensões (Ponthot e Hogge, 1991), que pode ser empregado quando a realocação nodal é aplicada em cada passo de tempo e a distância entre essas malhas é pequena. Após isso, a análise continua no passo de tempo seguinte. Segundo Benson (1989), a divisão do operador LEA, por desacoplar os fenômenos físicos nas equações governantes do problema, faz com que a precisão da solução seja potencialmente reduzida. A vantagem é que se consegue separar equações complicadas em equações mais simples que são resolvidas mais facilmente. Ainda segundo ele, algoritmos que usam a divisão do operador têm, em geral, menor custo computacional e são mais robustos que aqueles que tentam resolver o problema de forma acoplada.

Bittencourt e Creus (1995) estenderam a formulação LEA para casos 3D no METAFOR. A malha LEA é obtida através da realocação nodal, fazendo uma média das coordenadas dos nós vizinhos ao nó a ser realocado. A formulação tem a limitação de não conseguir realocar os nós de contorno. A transferência de dados é feita através do desenvolvimento das tensões em série de Taylor proposto por Ponthot e Hogge (1991), válido se a malha LA está próxima da malha realocada.

Os trabalhos mais recentes na área, como os anteriores apresentados, tratam de problemas 2D. Pijaudier-Cabot e Bodé (1995) empregaram a formulação LEA em análises transientes não-lineares e propuseram uma técnica de remanejamento de malhas baseada na distribuição uniforme de um indicador que quantifica o salto de uma variável de estado escolhida (dano ou deformação plástica equivalente) na interface entre os elementos.

Ghosh e Raju (1996) utilizaram uma técnica de realocação nodal que mistura adaptação do tipo r , que realoca os nós através de uma média ponderada das coordenadas dos nós vizinhos para minimizar a distorção dos elementos, com adaptação do tipo s , que utiliza elementos hierárquicos em zonas de alto gradiente de deformação plástica a fim de capturar a progressão da deformação plástica com mais precisão.

Ponthot e Belytschko (1998) apresentaram a formulação LEA para o método dos elementos Free Galerkin, também utilizando a separação do operador LEA. Este é um método que resolve as equações diferenciais parciais sem utilizar malha. Há apenas nós, sem conectividades. O método permite realocar os nós, concentrando a malha em zonas de propagação de trincas para problemas dinâmicos de fratura.

Gadala e Wang (1999) utilizaram o mapeamento transfinito para realocar os nós da malha. Novamente, o operador LEA é separado.

Askes, Rodríguez-Ferran e Huerta (1999) aplicaram a formulação LEA em uma análise adaptativa de linhas de ruptura em placas. É proposto um indicador de remanejamento de malhas que captura linhas de ruptura que vão aparecendo, bem como aquelas que já se formaram. Este indicador leva em conta a tensão equivalente de von Mises e a deformação plástica em cada ponto de integração.

Nota-se que não se encontra ainda na literatura trabalhos utilizando a formulação LEA para problemas 3D, com exceção do trabalho de Bittencourt e Creus (1995) que não realoca no contorno. Este é um dos objetivos do presente trabalho. As técnicas de realocação nodal a serem propostas devem ser eficientes na obtenção de malhas de boa qualidade e capazes de realocar os nós de contorno, representando corretamente a superfície dos corpos e evitando a mudança de volume em relação à formulação LA.

A realocação nodal na formulação LEA pode ser vista como a aplicação de um método de refinamento do tipo r (Diaz, Kikuchi e Taylor, 1983; Carey e Kennon, 1987; Kita e Kamiya, 1994) em cada passo de tempo, no qual os nós são realocados sem modificar a sua quantidade nem o grau das suas funções de interpolação. Neste método é preciso apenas gerar uma malha, a malha inicial (a topologia da malha é mantida ao longo da análise), aplicar a realocação nodal e transferir dados após esta.

2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA COM REMALHAMENTO

Em problemas de conformação mecânica, a utilização de uma formulação LEA nem sempre é suficiente para manter uma boa qualidade dos elementos ao longo de toda a análise. A qualidade dos resultados obtidos na análise depende, em grande parte, da forma dos elementos que constituem a malha. Se um elemento for regular, um hexaedro de forma próxima a um cubo por exemplo, os resultados serão de boa qualidade; caso contrário, não. Uma alternativa para melhorar a qualidade da malha de elementos finitos é usar uma formulação LA (McMeking e Rice, 1975) e, uma vez atingido um certo nível de distorção da mesma, substituir a malha por outra mais uniforme (Hartley, Sturgess e Rowe, 1982).

Cheng e Kikuchi (1986) demonstraram, para casos bidimensionais, que a redefinição de malhas é, muitas vezes, indispensável, visto que a malha vai se distorcendo continuamente ao longo do tempo em que é realizada a análise, devido a ela ficar "colada" à matéria na formulação LA. A idéia proposta é redefinir a malha em uma determinada configuração deformada. Todos os dados ou grandezas dependentes do tempo são transferidos da malha velha (distorcida) para a malha nova (mais uniforme). Essa redefinição de malhas pode ser repetida várias vezes, até que se chegue ao fim da análise com uma malha de boa qualidade.

Além desses trabalhos, existem vários outros onde foram desenvolvidas técnicas de remalhamento para 2D (Cheng, 1988; Habraken e Cescotto, 1990; Dyduch, Habraken e Cescotto, 1992; Zhu, Zacharia e Cescotto, 1997) e também alguns trabalhos em 3D (Coupez, Soyris e Chenot, 1991; Szentmihali et al., 1994).

Cheng (1988) apresentou os passos a serem seguidos em um processo de remalhamento: avaliação da distorção e do erro, interrupção da análise quando a malha está distorcida, geração da nova malha, transferência de dados da malha velha para a nova e reinício da análise a partir do momento no qual ela havia sido interrompida.

Um processo de remalhamento para problemas 2D já está implementado no código METAFOR (Olm, Bittencourt e Creus, 1996).

Para casos 3D, Coupez, Soyris e Chenot (1991) e Szentmihali et al. (1994) apresentaram técnicas de remalhamento, usando elementos tetraédricos quadráticos de 10 nós, em problemas de forjamento. As técnicas desenvolvidas foram capazes de simular todo o processo de forjamento de peças industriais de geometria complexa. Com relação ao tipo de

elemento utilizado, o elemento tetraédrico se adapta melhor a contornos complexos e, além disso, o tetraedro quadrático não sofre do problema de "*locking*" ou travamento da malha, que pode ocorrer com tetraedros lineares de 4 nós.

2.3 AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO

Os passos de avaliação da distorção e do erro e a transferência de dados, necessários para a formulação LA com remalhamento, são também utilizados na formulação LEA. Portanto, as considerações a seguir sobre esses aspectos são aplicáveis também a esta formulação.

A avaliação da distorção e do erro tem grande importância no processo de remalhamento, visto que é ela quem vai indicar qual o momento mais adequado para a geração da nova malha. Além disso, esta avaliação serve também para a verificação da qualidade da nova malha gerada (ou da malha realocada na formulação LEA). Vários trabalhos apresentam técnicas de avaliação da distorção geométrica (Habraken e Cescotto, 1990; Golias e Tsiboukis, 1994; Frey, Sarter e Gautherie, 1994; Zavatieri, Dari e Buscaglia, 1996) que servem, em muitos casos, não apenas para problemas de grandes deformações mas também para pequenas deformações.

Habraken e Cescotto (1990) propuseram quatro critérios de avaliação da distorção aplicados a elementos quadriláteros de 8 nós. No primeiro critério divide-se um quadrilátero em quatro triângulos, verificando a relação entre a área máxima e a mínima dos triângulos. No segundo, calcula-se os ângulos de borda entre os lados adjacentes dos quadriláteros. No terceiro, verifica-se a posição dos nós do meio dos lados e, no quarto, a esbeltez dos elementos quadriláteros. Cada critério tem valores limites a partir do qual os elementos são considerados distorcidos.

Para elementos tetraédricos, Golias e Tsiboukis (1994) definiram um fator de qualidade que indica a relação entre o raio da esfera inscrita e o raio da esfera circunscrita a um tetraedro. Já Frey, Sarter e Gautherie (1994) propuseram um fator que indica a relação entre o raio da esfera inscrita e o diâmetro do tetraedro (valor máximo entre os comprimentos dos lados).

Zavatieri, Dari e Buscaglia (1996), também seguindo a idéia do fator de qualidade, apresentaram um fator que relaciona o volume de um elemento com o seu perímetro. Este fator serve tanto para elementos hexaédricos como para tetraédricos. O fator será igual a 1 quando o elemento for um cubo ou tetraedro equilátero. Este critério é utilizado neste trabalho (ver seção 6.1.1).

O programa de geração de malhas e de visualização de resultados PATRAN (MSC/PATRAN, 1996) possui vários critérios de avaliação da distorção geométrica para elementos hexaédricos, tais como: razão de aspecto (*aspect ratio*), ângulo de borda entre as faces (*edge angle*), ângulo de obliquidade entre as faces (*face skew angle*), ângulo de empenamento das faces (*face warp angle*), razão de afilamento das faces (*face taper ratio*) e ângulo de torção entre as faces (*twist angle*). Devido à diversidade e abrangência dos critérios oferecidos pelo PATRAN, eles são uma boa opção para a verificação das características das malhas de elementos finitos. Os critérios de distorção do PATRAN também são adotados e estão detalhados nas seções 6.1.2 a 6.1.7.

2.4 AVALIAÇÃO DO ERRO

Estimadores de erro vêm sendo considerados um aspecto importante na análise numérica de estruturas desde o trabalho de Babuska e Rheinboldt (1978), que propuseram um estimador *a posteriori*² para o método dos elementos finitos usando as normas dos espaços de Sobolev. Este estimador era aplicado a problemas elástico-lineares de pequenas deformações.

Mais tarde, Zienkiewicz e Zhu (1987) desenvolveram um estimador de erros, também *a posteriori*, que se tornou um dos mais conhecidos e empregados até hoje. Em conjunto com o estimador, foi proposta uma técnica de refinamento de malhas nas zonas de maior erro. O estimador de erros desenvolvido é baseado na diferença que existe entre as tensões exatas e as tensões aproximadas obtidas através do método dos elementos finitos. Como em muitas situações não se conhece as tensões exatas, elas são estimadas através de uma projeção e suavização das tensões aproximadas obtidas. Este estimador é aplicado a problemas lineares elípticos e serviu de base para alguns estimadores empregados em problemas de conformação mecânica.

² O significado de *a posteriori* é que o erro é estimado após ter sido calculada a solução do problema.

Zienkiewicz, Liu e Huang (1988) apresentaram, para conformação mecânica, um estimador para problemas de extrusão em regime estacionário usando uma formulação rígido-plástica (sem parte elástica). Eles usaram a projeção e suavização das tensões desenvolvida por Zienkiewicz e Zhu (1987) e propuseram um estimador de erros baseado na taxa de dissipação de energia. Este estimador foi empregado também para problemas de localização de bandas de cisalhamento (Zienkiewicz e Huang, 1990) e para materiais porosos (Zienkiewicz, Huang e Liu, 1990).

Cheng (1988) elaborou um critério que define o erro de um elemento como sendo a diferença entre a deformação plástica equivalente nesse elemento e nos elementos adjacentes.

Fourment e Chenot (1995) modificaram o estimador de erros de Zienkiewicz e Zhu (1987) para aplicá-lo a materiais viscoplásticos.

Em problemas de localização, Péric, Yu e Owen (1994) apresentaram um estimador de erros para casos elastoplásticos de pequenas deformações usando a formulação termodinâmica do problema. A extensão a problemas de grandes deformações elastoplásticas foi proposta por Marusich e Ortiz (1995).

Vaz Jr., Dutko e Owen (1998) desenvolveram um estimador de erros que leva em consideração diversos aspectos, tais como: grandes deformações, dano e fratura do material. São usadas a taxa de trabalho plástico, a taxa de trabalho do dano e a taxa do indicador de fratura como parâmetros sinalizadores de erro, e comparados os resultados obtidos com cada uma dessas taxas. Segundo os autores, o estimador de erros proposto reflete a natureza dinâmica dos fenômenos físicos envolvidos, sendo capaz de capturar a progressão da deformação plástica e produzir malhas refinadas em regiões de possível falha do material. Este estimador será empregado neste trabalho (ver seção 6.2).

2.5 TRANSFERÊNCIA DE DADOS

Após a geração da nova malha na formulação LA com remalhamento, deve ser realizada a transferência de dados da malha velha para a nova para que, após isso, a análise possa ser retomada no passo de tempo seguinte. Na formulação LEA, técnicas de transferência de dados também devem ser utilizadas de modo a assegurar uma boa precisão

nos resultados. Portanto, para fins de transferência de dados na formulação LEA, a malha do passo LA (distorcida) corresponde à malha velha, e a malha realocada corresponde à malha nova. As considerações a seguir são pertinentes a ambas as formulações.

Vários trabalhos propõem técnicas de transferência de dados (Cheng, 1988; Crawford, Anderson e Waggenpack, 1989; Kiridena et al., 1989; Martins et al., 1994).

No trabalho de Cheng (1988), a transferência de dados da malha LA para a malha realocada é feita usando os valores nodais das grandezas. Para isso, primeiramente é feita a interpolação dos dados (variáveis de estado) calculados nos pontos de Gauss da malha LA para os nós da mesma. Esta interpolação é feita utilizando a técnica de suavização dos mínimos quadrados proposta por Hinton e Campbell (1974). Em seguida, utiliza-se o mapeamento isoparamétrico que aproxima os dados nodais a serem transferidos como um vetor unitário desenhado do centróide do elemento da malha LA ao nó da malha realocada em questão. Feito isso, transfere-se os dados usando as funções de interpolação do elemento quadrilátero.

Crawford, Anderson e Waggenpack (1989) propuseram a técnica de inversão paramétrica para a transferência de dados da malha LA para a malha realocada em problemas 2D utilizando elementos quadriláteros. Essa técnica consiste em encontrar o elemento da malha LA ao qual cada nó da malha realocada pertence. Para isso, faz-se a inversão das funções de interpolação dos elementos da malha LA que, para elementos quadriláteros de 4 nós, tem solução direta. O elemento da malha LA, onde o nó realocado se localiza, é encontrado quando as coordenadas reduzidas do nó estão no intervalo $[-1;1]$. Na Fig. 4, o nó i do elemento I da malha realocada pertence ao elemento formado pelos nós i_1, i_2, i_3 e i_4 da malha LA.

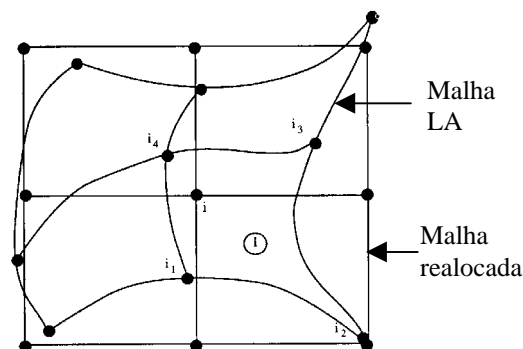


FIGURA 4 - Inversão paramétrica para obter os dados no nó i da malha realocada

Os passos para a transferência de dados são:

(i) Transferência dos dados dos pontos de Gauss para os nós da malha LA usando a técnica de suavização de Hinton e Campbell (1974) e obtendo os dados nodais suavizados.

(ii) Realocação nodal e obtenção da malha realocada ou geração da malha nova.

(iii) Encontrar o elemento da malha LA ao qual cada nó da malha realocada pertence, usando a técnica de inversão paramétrica de Crawford, Anderson e Waggenpack (1989), e obter as coordenadas reduzidas do nó neste elemento da malha LA.

(iv) Transferir os dados nodais suavizados dos nós LA para cada nó da malha realocada usando as funções de interpolação do elemento LA correspondente e as coordenadas reduzidas do nó neste elemento.

(v) Transferir os dados nodais da malha realocada para os pontos de Gauss dos seus elementos usando as funções de interpolação dos elementos da malha realocada.

Habraken e Cescotto (1990) propuseram uma fórmula de transferência de dados usando os valores das variáveis de estado em nós da malha LA próximos ao nó realocado e a distância entre eles.

Martins et al. (1994) desenvolveram um algoritmo para a implementação computacional da técnica de inversão paramétrica em problemas 3D utilizando elementos hexaédricos de 8 nós, baseados no trabalho de Crawford, Anderson e Waggenpack (1989) que trata casos bidimensionais. Para resolver o sistema de equações não lineares obtido no processo, é utilizado o método iterativo de Newton-Raphson. O elemento da malha LA é encontrado quando as coordenadas reduzidas do nó realocado estão localizadas dentro dos limites do espaço reduzido do elemento $[-1;1]$. Em problemas 3D com remalhamento, pode ocorrer que alguns nós da malha nova se encontrem fora da superfície externa da malha velha. Nesses casos, é selecionada a posição mais próxima do nó localizada sobre a malha velha através de uma projeção do nó sobre a mesma. Obtida essa posição, são calculadas as suas coordenadas reduzidas através da inversão paramétrica, possibilitando a transferência de dados.

De forma a evitar soluções iterativas, Kiridena et al. (1989) propuseram subdividir um elemento hexaédrico em 24 tetraedros. A solução é encontrada diretamente invertendo-se a matriz de coordenadas volumétricas tetraédricas apresentada por Ergatoudis (1968). O

elemento da malha LA é encontrado quando as coordenadas volumétricas do nó realocado se localiza dentro dos limites $[0;1]$.

Uma outra abordagem existente é transferir os dados nodais da malha LA diretamente para os pontos de Gauss da malha realocada (Yang, Heinstein e Shih, 1989; Jayadeva e Narasimhan, 1995). Segundo PavanaChand e KrishnaKumar (1998), o problema desta abordagem acontece quando os pontos de Gauss da malha realocada se encontram em elementos diferentes da malha LA. Para quadriláteros de 4 nós podem ser até 4 elementos diferentes e para hexaedros de 8 nós até 8 elementos. Neste caso, as funções de interpolação de até oito elementos, se forem hexaedros, serão usadas para calcular os dados nos pontos de Gauss da malha realocada. Portanto, os valores calculados podem não ser consistentes com a variação do campo de deslocamentos nos elementos da malha realocada.

Com relação à transferência de dados em problemas de grandes deformações plásticas, destaca-se o trabalho de Lee e Bathe (1994) e o de Peric, Vaz Jr. e Owen (1999). O trabalho de Lee e Bathe (1994) trata da avaliação de critérios de remalhamento e a questão da transferência de dados nas fronteiras do problema. Já o trabalho de Peric, Vaz Jr. e Owen (1999) apresenta, além de técnicas de transferência de dados para materiais elastoplásticos sujeitos a grandes deformações, estratégias de adaptação de malhas aplicadas a estes casos.

Neste trabalho, para os casos em que as malhas LA e realocada estão próximas, a transferência de dados é feita através de um desenvolvimento das tensões em séries de Taylor (Ponthot e Hogge, 1991) (ver seção 5.2.1). Por outro lado, para situações em que essas malhas estão afastadas, é proposto um algoritmo de busca e interpolação não iterativo (ver seção 5.2.2).

3 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (LEA) PARA PROBLEMAS DE GRANDES DEFORMAÇÕES EM SÓLIDOS

Neste capítulo são apresentados diversos aspectos relacionados à formulação LEA: a cinemática da formulação, as suas equações de conservação, a técnica de separação do operador LEA, o método dos elementos finitos, o princípio dos trabalhos virtuais, a matriz tangente, os métodos de solução numérica de Newton-Raphson e das Diferenças Centrais e as leis constitutivas empregadas.

A implementação computacional foi realizada tomando como base o código de elementos finitos para conformação mecânica METAFOR (METAL FORMing), desenvolvido por Ponthot e Hogge (1991) e Bittencourt (1994).

3.1 CINEMÁTICA DA FORMULAÇÃO LEA

Neste trabalho, serão definidos três domínios para introduzir a formulação LEA e comparar as suas características em relação à formulação Lagrangeana Atualizada (LA) e à formulação Euleriana. Na formulação LA é usado o domínio material (SRM), composto das coordenadas materiais ${}^3\mathbf{X}$. O domínio espacial, com coordenadas espaciais fixas \mathbf{x} , é característico da formulação Euleriana (SRE). Para a formulação LEA, um domínio de referência (SRC), composto das coordenadas da malha $\boldsymbol{\chi}$ é empregado.

Estes domínios necessitam de transformações biunívocas entre as coordenadas espaciais e as coordenadas materiais e da malha para relacionar o movimento da malha com o movimento da matéria. Com esse propósito, as coordenadas espaciais podem ser expressas

³ Com relação à notação empregada para identificação de vetores e tensores, são utilizadas duas opções: letras em negrito ou com índice subscrito. Os índices subscritos são componentes dos vetores ou tensores. Os índices sobrescritos à direita em itálico indicam nós, pontos de Gauss ou nomes de variáveis. Os índices sobrescritos à esquerda indicam domínio (material, espacial ou referencial) ou instante de tempo.

como função das coordenadas materiais \mathbf{X} e do tempo t ($\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$) (Malvern, 1969) ou como função das coordenadas da malha $\boldsymbol{\chi}$ e do tempo t ($\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},t)$).

Usando estas expressões, os deslocamentos da matéria (\mathbf{u}) e da malha ($\hat{\mathbf{u}}$), tomando 0t como o tempo inicial, são dados por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{x}(\mathbf{X},{}^0t), \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\chi},t) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},{}^0t).$$

Diferenciando as coordenadas espaciais expressas como função das coordenadas materiais, ($\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$), com respeito ao tempo t e mantendo fixas as coordenadas materiais \mathbf{X} , a velocidade da matéria \mathbf{v} pode ser obtida como

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}. \quad (2)$$

De forma similar, para as coordenadas da malha $\boldsymbol{\chi}$, diferenciando ($\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},t)$) com respeito ao tempo t tem-se

$$\hat{\mathbf{v}} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}}. \quad (3)$$

A diferença entre a velocidade da matéria e a velocidade da malha é chamada de velocidade convectiva \mathbf{c}

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}. \quad (4)$$

De forma a assegurar que os nós externos da malha de um corpo sólido permaneçam sobre o contorno do mesmo, o contorno da malha (SRC) e da matéria (SRM) devem coincidir. Para isso, a condição a seguir (Schreurs, Veldpaus e Brekelmans, 1986)

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{n}^{cp} = 0, \quad (5)$$

onde \mathbf{n}^{cp} é a normal unitária ao contorno do corpo, deve ser imposta como uma restrição no funcional que define o problema. Isto não é feito no presente estudo, sendo esta condição

apenas verificada a-posteriori. Se ela é cumprida, não ocorre movimento da malha na direção normal ao contorno do corpo, mas apenas na direção tangencial.

Para uma função vetorial arbitrária f_i , a derivada material no tempo é dada pela derivada convectiva

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial x_j}{\partial t} \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x + v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (6)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação contém a taxa local de variação da função f_i na vizinhança de x_j , enquanto que o segundo termo contém a taxa convectiva de variação de f_i (gradiente) na vizinhança de um ponto à medida que ele se move para um lugar com uma função f_i diferente (Malvern, 1969).

Similarmente, pode-se definir uma derivada referencial no tempo como

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial x_j}{\partial t} \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x + \hat{v}_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad (7)$$

Combinando as Eq. (6) e (7), a derivada material resulta

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x + c_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (8)$$

onde o último termo representa o efeito convectivo devido ao movimento relativo entre a matéria e a malha.

A relação da Eq. (8) tem dois casos particulares:

a) Formulação Lagrangeana ($v_j = \hat{v}_j$): a matéria e a malha estão "coladas"

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x,$$

b) Formulação Euleriana ($\hat{v}_j = 0$): a malha está fixa

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x + v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

3.2 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO NA FORMULAÇÃO LEA

Das leis de conservação, o balanço de massa é dado por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (9)$$

onde ρ é a densidade e v_i é a velocidade da matéria.

A equação da quantidade de movimento é

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (10)$$

que é verificada de forma trivial se é utilizado o tensor das tensões de Cauchy σ_{ij} . A condição de simetria deste tensor é o resultado da aplicação da equação de conservação da quantidade de movimento e representa o balanço de momento angular.

A conservação da quantidade de movimento deve ser satisfeita em qualquer ponto do interior do corpo, através da equação de balanço de momento

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_x \right) \quad (11)$$

onde b_i são as forças de massa por unidade de volume. As forças de inércia estão colocadas no lado direito da equação. Em problemas quasi-estáticos, nos quais as forças de inércia podem ser desprezadas, a Eq. (11) se torna

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (12)$$

As expressões (11) e (12) representam um conjunto de três equações cada. Para a solução destas equações, é necessário definir o volume e a superfície em consideração. Por se empregar as tensões de Cauchy, tanto o volume quanto a superfície devem ser referidos à configuração instantânea do corpo, que varia ao longo de um processo de grandes deformações.

Em problemas não-lineares, como os de grandes deformações, é muito difícil se fazer a necessária estimativa inicial da solução das equações de equilíbrio ou da configuração equilibrada final. Isto pode ser resolvido dividindo os carregamentos que agem na estrutura em várias etapas ou passos lineares, através de processos de linearização das equações do problema. Assim, se o passo de carga for muito pequeno, tem-se uma configuração equilibrada num determinado passo de tempo muito semelhante a do passo anterior. Como esta configuração equilibrada do passo anterior já é conhecida, a mesma pode ser empregada como estimativa da solução para o passo atual, resolvendo esta questão. Este tipo de formulação é denominado incremental.

Da mesma forma que em problemas lineares, o conjunto de equações diferenciais que caracterizam o equilíbrio são substituídas por equações integrais através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

3.3 FORMA INTEGRAL DE GALERKIN DO BALANÇO DE MOMENTO

Como a expressão (12) é válida para qualquer ponto do corpo, a soma da mesma para todos os pontos do volume instantâneo ${}^x\Omega$, no sistema espacial x , deve continuar resultando no valor zero:

$$\int_{{}^x\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d^xV = 0 \quad (13)$$

onde δu_i é um deslocamento virtual arbitrário. Nesta expressão, as três equações de equilíbrio do contínuo são então transformadas em uma única equação escalar, que representa o trabalho virtual feito por forças de superfície e de volume.

3.4 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No método dos elementos finitos, o corpo ou o domínio de interesse é dividido em subdomínios, denominados elementos finitos. Estes elementos são interconectados através de nós situados no seu contorno, sendo o deslocamento destes nós a incógnita básica do problema.

Um conjunto de funções, normalmente conhecidas como funções de interpolação, estabelece uma relação única entre os deslocamentos no interior de cada elemento e seus deslocamentos nodais, conforme a expressão

$$u_i = \sum_{N=1}^{NNE} \phi^N u_i^N, \quad (14)$$

onde u_i^N representa o deslocamento do nó N na direção i , ϕ^N é uma função arbitrária e linearmente independente no nó N (função de interpolação) e NNE é o número de nós por elemento. A partir do campo de deslocamentos u_i , são calculadas as deformações e, após isso, com as relações constitutivas, são obtidas as tensões. O método convergirá para a solução do problema desde que a soma das integrais sobre cada elemento forneça o valor da integral sobre o corpo inteiro:

$$\int_{x\Omega} () d^{xV} = \sum_{E=1}^{NELEM} \int_{x\Omega^E} () d^{xV^E}, \quad (15)$$

onde $NELEM$ é o número de elementos da malha de elementos finitos. A Eq. (15) é válida desde que haja continuidade dos deslocamentos entre os elementos. Sendo as deformações calculadas como a derivada primeira dos deslocamentos, os mesmos deverão ser contínuos para que não ocorram valores de deformações infinitos na interface elementar, os quais podem invalidar a Eq. (15). Se as funções de interpolação dos elementos finitos cumprem a continuidade dos deslocamentos interelementares, estes elementos são denominados conformes. Se elas são polinômios completos, os elementos são também denominados completos. As funções de interpolação dos elementos finitos devem ser conformes e completas para que haja a convergência do método dos elementos finitos.

O deslocamento virtual em um elemento finito pode ser dado por

$$\delta u_i = \phi^N \delta u_i^N \quad (16)$$

Para um elemento hexaédrico isoparamétrico de 8 nós, as funções de interpolação são expressas como

$$\phi^N = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi^N) (1 + \eta \eta^N) (1 + \zeta \zeta^N), \quad (17)$$

onde (ξ, η, ζ) são as coordenadas reduzidas isoparamétricas.

3.5 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS EM GRANDES DEFORMAÇÕES

A linearização do princípio dos trabalhos virtuais é feita para a equação constitutiva específica do material, sendo restringida a equações constitutivas que podem ser expressas em taxas, tais como Truesdell e Jaumann.

Para um elemento finito E , substituindo a Eq. (16) na Eq. (13) tem-se

$$\int_{x\Omega^E} \phi^N \delta u_i^N (\sigma_{ij,j} + b_i) d^xV^E = 0. \quad (18)$$

Como δu_i^N é arbitrário no elemento, ele pode ir para fora da integral e ser eliminado

$$\delta u_i^N \int_{x\Omega^E} \phi^N (\sigma_{ij,j} + b_i) d^xV^E = \int_{x\Omega^E} \phi^N (\sigma_{ij,j} + b_i) d^xV^E = 0. \quad (19)$$

Empregando o teorema de Gauss no termo das tensões em (19), tem-se

$$\int_{x\Omega^E} \phi^N \sigma_{ij,j} d^xV^E = \int_{x\Omega^E} (\phi^N \sigma_{ij})_{,j} d^xV^E - \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \sigma_{ij} d^xV^E, \quad (20)$$

onde

$$\int_{x\Omega^E} (\phi^N \sigma_{ij})_{,j} d^xV^E = \int_{x\Gamma^E} \phi^N \sigma_{ij} \nu_j d^xS^E. \quad (21)$$

Nesta equação, ${}^x\Gamma^E$ é a superfície instantânea na qual as forças são prescritas. Sabendo que a equação de Cauchy é

$$t_i = \sigma_{ij} \nu_j, \quad (22)$$

onde ν_j são os cossenos diretores da normal externa à superfície e t_i são as forças de superfície, a Eq. (21) fica

$$\int_{x_{\Omega^E}} (\phi^N \sigma_{ij})_{,j} d^x V^E = \int_{x_{\Gamma^E}} \phi^N t_i d^x S^E. \quad (23)$$

Substituindo (23) em (20),

$$\int_{x_{\Omega^E}} \phi^N \sigma_{ij,j} d^x V^E = \int_{x_{\Gamma^E}} \phi^N t_i d^x S^E - \int_{x_{\Omega^E}} \phi_{,j}^N \sigma_{ij} d^x V^E. \quad (24)$$

Finalmente, substituindo (24) em (19), chega-se ao princípio dos trabalhos virtuais linearizado com equilíbrio de forças

$$\int_{x_{\Omega^E}} \phi_{,j}^N \sigma_{ij} d^x V^E = \int_{x_{\Gamma^E}} \phi^N t_i d^x S^E + \int_{x_{\Omega^E}} \phi^N b_i d^x V^E \quad \text{ou} \quad (25)$$

$$F_i^{N,int} = F_i^{N,ext}, \quad (26)$$

onde $F_i^{N,int}$ e $F_i^{N,ext}$ são respectivamente as forças internas e externas no nó N na direção i .

O princípio dos trabalhos virtuais apresentado não difere, aparentemente, da teoria empregada na análise linear. Contudo, nota-se que o volume e a superfície do corpo estão continuamente mudando, fato que não ocorre em pequenas deformações. Assim, além das tensões de Cauchy, o volume no qual são integradas as tensões também é dependente dos deslocamentos. Devido a isso, a Eq. (25) torna-se não-linear, não importando a relação constitutiva empregada. Esta não-linearidade é usualmente chamada de geométrica. O mesmo vale para os termos do trabalho virtual externo, que pode também ser dependente dos deslocamentos, pois nenhuma restrição foi feita quanto ao tipo de carga externa aplicada.

A integração do princípio dos trabalhos virtuais é realizada sobre a superfície e o volume instantâneos do corpo (configuração deformada), pois o mesmo está descrito em termos de tensão de Cauchy, que é a medida de tensão verdadeira ou real e, por isso, é sempre referida à configuração instantânea do corpo.

3.6 MATRIZ TANGENTE PARA A FORMULAÇÃO LEA

A matriz tangente é empregada em problemas não-lineares quasi-estáticos, utilizando códigos implícitos onde os sistemas de equações são resolvidos iterativamente através do método de Newton-Raphson.

O objetivo deste item é mostrar as características da matriz tangente na formulação LEA, comentando as dificuldades que aparecem na sua solução, devido ao excesso de incógnitas, e introduzir a técnica de separação do operador LEA, utilizada para superar essas dificuldades. Apesar de casos dinâmicos serem tratados pelo método explícito das Diferenças Centrais, no qual não há matriz tangente, a técnica de separação do operador LEA a ser apresentada também é empregada nesses casos, por facilitar a obtenção da solução do problema.

Para se obter a matriz tangente na formulação LEA, a linearização do princípio dos trabalhos virtuais é executada mantendo as coordenadas de referência fixas, diferentemente da formulação Lagrangeana, onde as coordenadas materiais são mantidas constantes. A expressão (25) pode ser transformada para o domínio de referência como

$$\int_{\Omega^E} \frac{\partial \phi^N}{\partial \chi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \sigma_{ij} J d^{\chi} V^E = \int_{\Gamma^E} \phi^N t_i J^S d^{\chi} S^E + \int_{\Omega^E} \phi^N b_i J d^{\chi} V^E \quad (27)$$

onde J^S é a relação escalar entre $\partial^{\chi} V^E / \partial^{\chi} V^E$ e J é o determinante do Jacobiano entre os domínios espacial e referencial

$$J = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \right). \quad (28)$$

De forma a simplificar a notação utilizada, a derivada convectiva da Eq. (8),

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_{\chi} + (v_j - \hat{v}_j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

nos passos seguintes será dada por

$$\dot{f}_i = f_i^* + (v_j - \hat{v}_j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (29)$$

onde

$$\dot{f}_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_x \quad \text{e} \quad f_i^* = \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|_\chi.$$

Considerando as forças externas como conservativas, a matriz tangente \mathbf{K}^T

$$\mathbf{K}^T = \frac{\partial \mathbf{F}^{int}}{\partial \boldsymbol{\chi}}, \quad (30)$$

correspondente à Eq. (27), pode ser obtida considerando as forças internas em taxas com a configuração de referência mantida constante

$$F_i^{N,int*} = \left. \frac{\partial F_i^{N,int}}{\partial t} \right|_\chi = \frac{\partial F_i^{N,int}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = \mathbf{K}^T \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} \quad \text{ou}$$

$$F_i^{N,int*} = \int_{\Omega^E} \frac{\partial \phi^N}{\partial \chi_m} \left[\left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \right)^* \sigma_{ij} J + \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \sigma_{ij}^* J + \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \sigma_{ij}^* J \right] d^{\chi} V^E. \quad (31)$$

Na Eq. (31) existem três grandezas em taxas. A primeira delas, que relaciona as coordenadas χ e x , pode ser manipulada considerando a seguinte identidade

$$\frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \chi_m} = \delta_{jk} \quad (32)$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Aplicando a derivada temporal no domínio de referência (*) na Eq. (32), tem-se

$$\left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \chi_m} \right)^* = (\delta_{jk})^*. \quad (33)$$

Fazendo a derivada do produto no termo à esquerda e a derivada de uma constante no termo à direita esta expressão fica

$$\left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \right)^* \frac{\partial x_k}{\partial \chi_m} + \frac{\partial \chi_n}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \chi_n} \right)^* = 0, \quad (34)$$

onde, no termo entre parênteses da direita, pode-se inverter a ordem de aplicação das derivadas da seguinte forma

$$\frac{\partial x_k}{\partial \chi_n} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial \chi_n} \right)^* \quad (35)$$

Assim, a partir da Eq. (32), chega-se à (Liu et al., 1988)

$$\left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \right)^* \frac{\partial x_k}{\partial \chi_m} + \frac{\partial \chi_n}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \chi_n} = 0, \quad (36)$$

onde

$$x_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} \Big|_{\chi} = \hat{v}_k \quad (37)$$

é a velocidade da malha. Isolando $(\partial \chi_m / \partial x_j)^*$ na Eq. (36) e nela substituindo \hat{v}_k , tem-se

$$\left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \right)^* = - \frac{\partial \chi_m}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial \chi_n} = - \frac{\partial \chi_m}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial x_j}. \quad (38)$$

O segundo termo da Eq. (31) contém a derivada convectiva das tensões, obtida substituindo σ_{ij} na Eq. (8) como

$$\sigma_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij} - c_k \sigma_{ij,k}, \quad (39)$$

onde

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} v_{(k,l)} + S_{ijkl} v_{[k,l]}. \quad (40)$$

Nesta equação $\dot{\sigma}_{ij}$ é a derivada material das tensões no tempo; $v_{(k,l)}$ e $v_{[k,l]}$ são respectivamente as partes simétrica e antissimétrica do gradiente de velocidade. O tensor constitutivo elástico da taxa de tensão de Cauchy é dado por C_{ijkl} . O termo $C_{ijkl} v_{(k,l)}$ pode ser interpretado como a parte de deformação pura para a taxa de mudança das tensões de Cauchy.

Para obtê-lo, pode-se empregar uma taxa de tensão como Jaumann ou Truesdell. Neste trabalho utiliza-se a taxa de Jaumann com relação constitutiva isótropa. O tensor S_{ijkl} contém a parte rotacional da taxa de tensão de Cauchy, que é nula em casos como tração e compressão simples onde não há rotação.

No terceiro termo da Eq. (31) aparece o determinante do Jacobiano em forma de taxa que, segundo Donea, Giuliani e Halleux (1982) e Liu et al. (1988), é dado por

$$J^* = J \hat{v}_{k,k}. \quad (41)$$

Substituindo (38) e (41) em (31), e colocando J em evidência

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \frac{\partial \phi^N}{\partial \chi_m} \left[-\frac{\partial \chi_m}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \sigma_{ij}^* + \frac{\partial \chi_m}{\partial x_j} \sigma_{ij} \hat{v}_{k,k} \right] J d^x V^E. \quad (42)$$

A Eq. (42) pode ser transformada de volta ao domínio espacial x como

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \frac{\partial \phi^N}{\partial x_j} \left[-\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_k} \sigma_{ik} + \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij} \hat{v}_{k,k} \right] J d^x V^E \quad \text{ou} \quad (43)$$

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \left[-\hat{v}_{j,k} \sigma_{ik} + \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij} \hat{v}_{k,k} \right] J d^x V^E,$$

onde no primeiro termo é trocado o índice j por k . Substituindo (39) em (43)

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \left[-\hat{v}_{j,k} \sigma_{ik} + \dot{\sigma}_{ij} - c_k \sigma_{ij,k} + \hat{v}_{k,k} \sigma_{ij} \right] J d^x V^E. \quad (44)$$

Para separar os termos relacionados à velocidade da matéria v_i (formulação LA) dos termos relacionados à velocidade convectiva c_i (formulação LEA), substitui-se $\hat{v}_i = v_i - c_i$ na Eq. (44)

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \left[-(v_{j,k} - c_{j,k}) \sigma_{ik} + \dot{\sigma}_{ij} - c_k \sigma_{ij,k} + (v_{k,k} - c_{k,k}) \sigma_{ij} \right] J d^x V^E \quad \text{ou} \quad (45)$$

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \left[-v_{j,k} \sigma_{ik} + c_{j,k} \sigma_{ik} + \dot{\sigma}_{ij} - c_k \sigma_{ij,k} + v_{k,k} \sigma_{ij} - c_{k,k} \sigma_{ij} \right] J d^x V^E .$$

Separando os termos LA dos termos convectivos

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \left[(\dot{\sigma}_{ij} - v_{j,k} \sigma_{ik} + v_{k,k} \sigma_{ij}) + (c_{j,k} \sigma_{ik} - c_k \sigma_{ij,k} - c_{k,k} \sigma_{ij}) \right] J d^x V^E . \quad (46)$$

onde $\dot{\sigma}_{ij}$ é dado pela Eq. (40). Os termos agrupados à esquerda na Eq. (46) são idênticos aos da formulação LA. Na formulação LA, as velocidades da malha e da matéria são iguais ($\hat{v}_i = v_i$) e, conseqüentemente, $c_i = 0$. Neste caso, desaparecem os termos convectivos e a Eq. (46) recai na formulação LA. Contudo, no caso da formulação LEA, \hat{v}_i e v_i estão desacoplados e as equações de equilíbrio têm duas vezes mais incógnitas (\hat{v}_i e v_i têm três incógnitas por nó cada, o que dá seis incógnitas por nó ao todo) do que equações (três por nó). Para resolver o problema do excesso de incógnitas é utilizada, em cada passo de tempo, a separação do operador LEA.

3.7 TÉCNICA DE SEPARAÇÃO DO OPERADOR LEA

A separação do operador LEA utilizada foi proposta por Benson (1989) e Ponthot e Hogge (1991) e consiste em aplicar um passo LA seguido de um passo Euleriano.

3.7.1 Passo LA

No passo LA, o movimento da malha e da matéria estão acoplados ($\hat{v}_i = v_i$). Neste passo, em se tratando de um código implícito, calcula-se a matriz tangente para a solução do problema (Eq. (46)) e, ao se atingir o equilíbrio, obtém-se uma malha geralmente distorcida. A matriz tangente é calculada sem necessidade de avaliar os termos convectivos ($c_i = 0$)

$$F_i^{N,int*} = \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \left[\dot{\sigma}_{ij} - v_{j,k} \sigma_{ik} + v_{k,k} \sigma_{ij} \right] J d^x V^E . \quad (47)$$

Detalhes na determinação da matriz tangente para problemas de contato usada neste trabalho podem ser encontrados em Bittencourt e Creus (1998).

3.7.2 Passo Euleriano

Após ser atingido o equilíbrio no passo LA, é executado o passo Euleriano, onde os nós da malha são realocados de forma a diminuir a distorção dos elementos. Esta realocação nodal produz um efeito que pode ser interpretado como a eliminação das incógnitas \hat{v}_i da Eq. (46), visto que a nova posição dos nós é imposta de forma a controlar a deformação da malha e reduzir a sua distorção. De fato, as incógnitas \hat{v}_i não aparecem nas equações governantes do problema e não são calculadas, uma vez que é utilizada a Eq. (47), a qual é a mesma da formulação LA.

Ainda no passo Euleriano, transfere-se os dados (variáveis de estado) da malha do passo LA para a malha realocada. Técnicas de realocação nodal para melhorar a qualidade da malha são propostas no capítulo 4.

Após a aplicação de uma técnica de realocação nodal, a transferência de dados da malha LA para a malha realocada pode ser feita com a aplicação da derivada convectiva das tensões (Eq. (39))

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right|_X - c_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}. \quad (48)$$

Neste trabalho, a transferência de dados é realizada através da integração no tempo desta expressão, onde a velocidade convectiva é substituída pela distância entre um determinado ponto de Gauss na malha LA e na malha realocada. Este procedimento está descrito no capítulo 5 e é válido se a malha realocada está próxima da malha LA. As características de um algoritmo de transferência de dados (acuracidade, dispersivo, dissipativo, monotônico e conservativo) são discutidas por Olovsson (1997).

No passo Euleriano não é verificado o equilíbrio. Depois deste passo, o processo iterativo de cálculo continua no passo de tempo seguinte, onde novamente se utiliza a separação do operador LEA. De acordo com Ponthot e Hogge (1991), a transferência de dados da malha LA para a malha realocada pode causar algum trabalho extra no início do

passo LA do passo de tempo seguinte, especialmente em problemas de contato. Se a realocação nodal não for bem feita, ou seja, não mantiver aproximadamente o contorno LA ou se tiver a malha ficar com uma forma muito distorcida, o processo iterativo tenderá a divergir.

Tanto para problemas quasi-estáticos (usando um código implícito onde se utiliza a matriz tangente) quanto para problemas dinâmicos (usando um código explícito no qual não há matriz tangente), é feita a separação do operador LEA.

3.8 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Os cálculos do método dos elementos finitos para atingir o equilíbrio são executados no passo LA, no qual $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}$ e todos os termos convectivos desaparecem. A forma fraca completa da Eq. (11), incluindo termos de contato e de inércia, pode ser escrita como (Bittencourt e Creus, 1998)

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{X}} \bullet \delta \mathbf{u} dV = \int_{\Omega} \mathbf{B} \bullet \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma^F} \mathbf{F} \bullet \delta \mathbf{u} dS + \int_{\Gamma^C} \mathbf{T} \bullet \delta \mathbf{G} dS \quad (49)$$

Na Eq. (49) Ω é o domínio em uso que segue o movimento do corpo; Γ é o contorno do domínio e compreende o contorno com deslocamentos prescritos Γ^U , o contorno com forças de superfície prescritas Γ^F e o contorno de contato Γ^C . Além disso, $(:)$ representa o produto escalar de matrizes e (\bullet) representa o produto escalar de vetores. \mathbf{X} , \mathbf{G} representam o campo de deslocamentos no corpo (Ω) e no contorno de contato (Γ^C) respectivamente; requer-se que ambos sejam C^0 (funções contínuas). $\ddot{\mathbf{X}}$ é o campo de aceleração no corpo (Ω). \mathbf{F} , \mathbf{B} são as forças de superfície e de volume prescritas, respectivamente. $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo do tensor das Cauchy, que se requer que seja C^1 (função e derivada primeira contínua). \mathbf{T} são as forças de contato no contorno de contato (Γ^C) (veja detalhes em Bittencourt e Creus, 1998) e ρ é a densidade. O prefixo δ significa uma variação arbitrária, virtual e compatível.

Após definir-se um modelo pelo método dos elementos finitos para o corpo e eliminando os deslocamentos nodais virtuais, a Eq. (49) pode ser reescrita como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext} = 0, \quad (50)$$

onde \mathbf{F}^{int} e \mathbf{F}^{ext} representam, respectivamente, as forças internas e externas atuando nos nós dos elementos finitos. $\ddot{\mathbf{X}}$ é a aceleração nodal e \mathbf{M} é a matriz de massa consistente, obtida do segundo termo da esquerda da Eq. (49).

Para problemas dinâmicos, a Eq. (49) é resolvida, neste trabalho, empregando o método explícito das Diferenças Centrais. Não existe, portanto, uma matriz tangente (ver seção 3.8.2). Para problemas elastoplásticos, a deformação plástica é um fenômeno dissipativo e, por essa razão, atua como um amortecimento em casos dinâmicos. Em metais, o amortecimento das deformações elásticas é pequeno e pode ser desprezado. Sendo assim, não é necessário considerar o termo de amortecimento na Eq. (50).

Para problemas quasi-estáticos, os efeitos da inércia são desprezados e o primeiro termo à esquerda da Eq. (50) desaparece e tem-se

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{F}^{ext}. \quad (51)$$

O conjunto de equações não-lineares da Eq. (51) é resolvido, neste trabalho, através do método de Newton-Raphson (ver seção 3.8.1).

3.8.1 O método de Newton-Raphson

Na prática, é impossível obter a igualdade na Eq. (51). Em vista disso, é aceitável um resíduo \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext}, \quad (52)$$

desde que a expressão abaixo seja menor que a tolerância ε

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{F}^{ext}\|} \leq \varepsilon, \quad (53)$$

na qual $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e onde pode ser adotado o valor de $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$. A norma Euclidiana do resíduo é dada por

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{1}{NGL} \sqrt{\sum_{i=1}^{NGL} r_i^2}, \quad (54)$$

onde NGL é o número de graus de liberdade por nó.

Para verificar a Eq. (53), é necessário minimizar \mathbf{r} . Isto é feito através do método de Newton-Raphson, onde ${}^{j+1}\mathbf{r}$ é o resíduo na iteração $j+1$, linearizado utilizando o seu desenvolvimento em série de Taylor limitada ao primeiro termo. Lembrando que a busca de uma configuração equilibrada é feita no passo LA do operador LEA, tem-se

$${}^{j+1}\mathbf{r} \cong {}^j\mathbf{r} + d^j\mathbf{r} = 0, \quad (55)$$

e desenvolvendo o resíduo em série de Taylor limitada ao primeiro termo

$${}^{j+1}\mathbf{r} \cong {}^j\mathbf{r} + \left[\frac{\partial {}^j\mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \right] d\mathbf{X} = 0. \quad (56)$$

Isolando o deslocamento incremental $d\mathbf{X}$ em (56), obtém-se

$$d\mathbf{X} = -{}^j\mathbf{r} \left[\frac{\partial {}^j\mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \right]^{-1} \quad (57)$$

onde

$$\mathbf{K}^T = \frac{\partial {}^j\mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \quad (58)$$

é a matriz tangente na iteração j . Uma aproximação melhor é obtida pela expressão

$${}^{j+1}\mathbf{X} = {}^j\mathbf{X} + d\mathbf{X} \quad (59)$$

O processo iterativo é repetido até que a precisão desejada para ${}^{j+1}\mathbf{r}$ seja atingida. O método de Newton-Raphson é um método implícito pois as equações são empregadas no tempo ${}^{j+1}t$ para calcular a matriz tangente no tempo ${}^{j+1}t$.

3.8.2 O método das Diferenças Centrais

Em determinados tipos de problema, como quando ocorre impacto entre corpos, é necessário levar em consideração os efeitos de inércia na equação de balanço de momento (11) da seguinte forma

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_X \right) = \rho \left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial t} \Big|_X \right), \quad (60)$$

onde o termo da direita representa as forças de inércia de d'Alembert. A solução é calculada no passo LA do operador LEA.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, com equilíbrio de forças, na Eq. (60) tem-se uma expressão similar à Eq. (25), apenas acrescida do termo de inércia

$$\int_{x\Omega^E} \rho \phi^N \ddot{X}_i^N \phi^K d^xV^E + \int_{x\Omega^E} \phi_{,j}^N \sigma_{ij} d^xV^E = \int_{x\Gamma^E} \phi^N t_i d^xS^E + \int_{x\Omega^E} \phi^N b_i d^xV^E, \quad (61)$$

onde $\ddot{X}_i = \phi^N \ddot{X}_i^N$ é aceleração na direção i . O termo de inércia pode ser rearranjado como

$$\int_{x\Omega^E} \rho \phi^K \phi^N \ddot{X}_i^N d^xV^E = F_i^{N,inércia}, \quad (62)$$

que representa a força de inércia no nó N na direção i . As forças de inércia que atuam em um elemento podem ser escritas como

$$\mathbf{F}^{E,inércia} = \mathbf{M}^E \dot{\mathbf{X}}^E, \quad (63)$$

onde \mathbf{M}^E é a matriz de massa consistente do elemento, a qual é calculada levando em conta a densidade ρ , os valores das funções de interpolação ϕ^N e ϕ^K e o volume do elemento (Jacobiano). Na formulação LEA, após o passo Euleriano, a matriz de massa consistente deve ser refeita porque o volume dos elementos pode mudar devido à aplicação de uma técnica de realocação nodal no passo Euleriano.

A Eq. (50), reescrita abaixo, é dependente do tempo e pode ser resolvida através de um método de integração temporal direta, que consiste em solucionar esta equação em tempos discretos

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext} = 0.$$

No intervalo entre um tempo de análise e outro assume-se uma certa variação de deslocamentos, velocidades e acelerações. A forma de se considerar esta variação vai determinar a precisão e a estabilidade do método empregado. Utiliza-se, neste trabalho, o

método explícito das Diferenças Centrais, onde as velocidades e acelerações se relacionam com os deslocamentos através das expressões

$${}^{j+1/2}\dot{\mathbf{X}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{j+1}\mathbf{X} - {}^j\mathbf{X} \right), \quad (64)$$

$${}^j\ddot{\mathbf{X}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{j+1/2}\dot{\mathbf{X}} - {}^{j-1/2}\dot{\mathbf{X}} \right). \quad (65)$$

Nas equações acima, os super-índices identificam o passo de tempo da análise: $j = {}^j t$, $j+1 = {}^{j+1} t + \Delta t$ e $j+1/2 = ({}^{j+1} t - {}^j t)/2$. Pode-se considerar que a variação do Δt nesses passos de tempo é desprezível, então $\Delta t = \Delta t = \Delta t$.

A partir das Eq. (64) e (65) é possível calcular os deslocamentos no passo $j+1$, ${}^{j+1}\mathbf{X}$, conhecidos os deslocamentos no passo j . A aceleração no passo j pode ser calculada usando a Eq. (50) como

$${}^j\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1} \left({}^j\mathbf{F}^{ext} - {}^j\mathbf{F}^{int} \right). \quad (66)$$

Conhecendo (66), pode-se isolar ${}^{j+1/2}\dot{\mathbf{X}}$ na Eq. (65)

$${}^{j+1/2}\dot{\mathbf{X}} = {}^{j-1/2}\dot{\mathbf{X}} + \Delta t {}^j\ddot{\mathbf{X}}, \quad (67)$$

onde ${}^{j-1/2}\dot{\mathbf{X}}$ é conhecido do passo precedente. Tendo calculado ${}^{j+1/2}\dot{\mathbf{X}}$, pode-se obter ${}^{j+1}\mathbf{X}$ isolando este termo na Eq. (64)

$${}^{j+1}\mathbf{X} = {}^j\mathbf{X} + \Delta t {}^{j+1/2}\dot{\mathbf{X}} \quad \text{ou} \quad (68)$$

$${}^{j+1}\mathbf{X} = {}^j\mathbf{X} + \Delta t \left[{}^{j-1/2}\dot{\mathbf{X}} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \left({}^j\mathbf{F}^{ext} - {}^j\mathbf{F}^{int} \right) \right],$$

onde ${}^j\mathbf{X}$ é conhecido do passo anterior. Utilizando o valor de ${}^{j+1}\mathbf{X}$, calcula-se \mathbf{F}^{int} e \mathbf{F}^{ext} para o passo seguinte.

Para dar início ao processo, é preciso conhecer os deslocamentos iniciais ${}^0\mathbf{X}$ e as velocidades iniciais ${}^0\dot{\mathbf{X}}$. Além disso, considera-se que ${}^{-1/2}\dot{\mathbf{X}} = {}^0\dot{\mathbf{X}}$.

Este algoritmo é denominado de explícito porque as equações (64) até (68) são empregadas no tempo ${}^j t$ para calcular ${}^{j+1}\mathbf{X}$ no tempo ${}^{j+1} t$. A matriz de massa da Eq. (66) é

diagonalizada, sendo a sua inversa trivial. A diagonalização, para os elementos lineares aqui utilizados, é feita através da soma das linhas da matriz na diagonal. Assim, as acelerações da Eq. (66) são obtidas diretamente, sem a necessidade da solução de um sistema de equações. A diagonalização da matriz de massa leva a uma redução das frequências naturais, o que é compensado pelo aumento das frequências causado pelo método das Diferenças Centrais.

O efeito da não-linearidade (física e geométrica) está presente apenas no cálculo de \mathbf{F}^{int} e \mathbf{F}^{ext} . Sendo assim, o algoritmo do método das diferenças centrais é igual ao utilizado em casos lineares. Este método é condicionalmente estável, isto é, o passo de tempo Δt empregado deve ser menor que um passo de tempo crítico para evitar que o método se instabilize

$$\Delta t < \Delta t^{crit}. \quad (69)$$

O valor do Δt^{crit} pode ser determinado pela condição de Courant-Friedrichs-Levy que, desprezando o amortecimento, fica

$$\Delta t^{crit} = \frac{2}{\omega^{max}} = \frac{T^{min}}{\pi} \quad (70)$$

onde T^{min} é o período de vibração mínimo da estrutura e ω^{max} é a máxima frequência de vibração da mesma. Em elementos finitos, uma forma equivalente de respeitar a condição (69) é utilizar um passo de tempo que seja inferior ao tempo necessário para que uma onda de pressão atravesse o menor elemento finito da malha. Neste caso, a expressão do Δt^{crit} para problemas 3D é dada por

$$\Delta t^{crit} = \frac{\alpha L^{min}}{vo} = \alpha L^{min} \sqrt{\frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}} \quad (71)$$

onde α é um fator de segurança (usualmente 0,8), E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson, L^{min} é o menor comprimento percorrido para atravessar um elemento finito e vo é a velocidade de propagação da onda de pressão. Este tempo crítico deveria, teoricamente, ser calculado a cada passo de tempo, devido a geometria da malha de elementos finitos ser modificada em cada passo de tempo. Contudo, para valores usuais de tamanho do elemento e das constantes dos materiais, Δt^{crit} é muito pequeno, de forma que L^{min} varia

pouco de um passo para outro. Para diminuir o tempo de análise, o cálculo do Δt^{crit} é feito após um determinado número de passos de tempo.

A Eq. (71) é válida somente para materiais elásticos. Todavia, neste trabalho pode-se considerar materiais elasto-(visco)plásticos. Neste tipos de material, a velocidade de propagação das ondas no meio é menor do que em um material elástico. Portanto, a Eq. (71) fornece valores de passo crítico menores que o necessário, estando a favor da segurança quando se trabalha com materiais (visco)plásticos.

3.9 LEIS CONSTITUTIVAS

Um modelo hipoeelástico é usado para simular o comportamento elastoplástico através da expressão

$$\dot{\sigma}_{ij}^c = H_{ijkl}^c D_{kl}^c, \quad (72)$$

onde $\dot{\sigma}_{ij}^c$ é o tensor das taxas de tensão de Cauchy, D_{kl}^c é o tensor velocidade de deformação e H_{ijkl}^c é o tensor que contém relações constitutivas, todos eles avaliados em um sistema corrotacional.

A Eq. (72) é integrada de forma objetiva usando o chamado método da Rotação Instantânea Final (Braudel, Abouaf e Chenot, 1986; Nagtegaal, 1982), no qual o processo é separado em dois passos. Primeiramente, a integração é feita nos eixos corrotacionais assumindo que a rotação é nula e D_{kl}^c permanece constante. Esta integração, para um material elastoplástico ou elasto-visco-plástico, é executada com o método do Retorno Radial. Em seguida, uma rotação dos eixos corrotacionais para os eixos globais é aplicada. Uma matriz de rotação da última configuração equilibrada para a configuração instantânea é usada para definir os eixos corrotacionais. Este procedimento é adequado para problemas elastoplásticos com endurecimento isótropo e pequenas deformações elásticas. Detalhes sobre este método podem ser encontradas em (Ponthot, 1995). Procedimentos alternativos mais genéricos para integração são apresentados por Marcon, Bittencourt e Creus (1999). Os passos do processo de integração adotado estão descritos no Quadro 1.

QUADRO 1- Passos de cálculo da formulação LEA

1 INICIALIZAÇÃO. *Entrada de dados:* tempo inicial (0t) e final (ft), geometria (nós e elementos), condições de contorno, cargas, leis constitutivas, matrizes de conformação (para problemas de contato).

2 OPERADOR LEA

2.1 Passo LA

${}^{j+1}t = {}^jt + \Delta t$ - Laço sobre o passo de tempo

2.1.1 Aplicar o método de Newton-Raphson ou Diferenças Centrais para, a partir da configuração de referência ${}^0\mathbf{X} = {}^j\mathbf{X}$, encontrar uma nova configuração instantânea ${}^1\mathbf{X} = {}^{j+1}\mathbf{X}$

2.1.2 Calcular o gradiente de deformação espacial ${}^{0-1}\mathbf{F}$ em cada ponto de Gauss

$${}^{0-1}\mathbf{F} = \frac{\partial {}^1\mathbf{X}}{\partial {}^0\mathbf{X}} \text{ onde } {}^{0-1}\mathbf{F} = {}^{0-1}\mathbf{R} {}^{0-1}\mathbf{U} \quad {}^{0-1}\mathbf{R}, {}^{0-1}\mathbf{U} \text{ - tensores de rotação e deformação}$$

pura

2.1.3 Cálculo das tensões de Cauchy ${}^1\boldsymbol{\sigma}$

2.1.3.1 Calcular a matriz ${}^{0-1}\mathbf{U}$

$${}^{0-1}\mathbf{U} = \sqrt{{}^{0-1}\mathbf{F}^T {}^{0-1}\mathbf{F}} \text{ esta raiz requer que autovalores e autovetores sejam avaliados}$$

2.1.3.2 Calcular a matriz ${}^{0-1}\mathbf{R}$

$${}^{0-1}\mathbf{R} = {}^{0-1}\mathbf{U}^{-1} {}^{0-1}\mathbf{F}$$

2.1.3.3 Obtenção das tensões de Cauchy (${}^1\boldsymbol{\sigma}^c$), em eixos corrotacionais (c), através da integração da Eq. (72)

2.1.3.3.1 Preditor elástico (e)

$$p^{e,c} = {}^0p^c + K {}^{0-1}E_{ii}^{\ln,c} \text{ - pressão hidrostática (K-módulo de incompressibilidade)}$$

$$s_{ij}^{e,c} = {}^0s_{ij}^c + 2G {}^{0-1}E_{ij}^{\ln,c} \text{ -componentes desviadoras (G-mód. de elastic. transversal)}$$

$${}^{0-1}\mathbf{E}^{\ln,c} = \frac{1}{2} \ln[{}^{0-1}\mathbf{U}^2] \text{ - tensor de deformação logarítmica (requer que autovalores e}$$

autovetores sejam avaliados para calcular o ln da matriz \mathbf{U})

2.1.3.3.2 Corretor plástico: trazer as tensões desviadoras para a superfície de escoamento. Aplica-se o método do Retorno Radial, onde

$${}^1s_{ij}^c = \beta s_{ij}^{e,c} \text{ (ver o cálculo de } \beta \text{ no Apêndice A)}$$

Obs: como a pressão não precisa ser corrigida, ${}^1p^c = p^{e,c}$

$${}^1\boldsymbol{\sigma}_{ij}^c = {}^1s_{ij}^c + {}^1p^c \delta_{ij} \text{ - tensões de Cauchy em eixos corrotacionais}$$

2.1.3.4 Rotação de ${}^1\boldsymbol{\sigma}^c$ (${}^1p^c$, ${}^1s_{ij}^c$) para os eixos globais

$${}^1\boldsymbol{\sigma} = {}^{0-1}\mathbf{R} {}^1\boldsymbol{\sigma}^c {}^{0-1}\mathbf{R}^T$$

2.2 Passo Euleriano

2.2.1 Técnicas de realocação nodal (Cap. 4)

2.2.2 Correção da posição dos nós de contato (só para problemas de contato) (seção 4.3)

2.2.3 Transferência de dados da malha LA para a malha realocada (Cap. 5)

3 AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO E DO ERRO (para pós-processamento) (Cap. 6)

4 SE ${}^{j+1}t < {}^ft$ VAI PARA O PASSO 2, SENÃO

5 FIM

4 TÉCNICAS DE REALOCAÇÃO NODAL

A qualidade dos resultados obtidos em análises de elementos finitos depende, em grande parte, da qualidade da malha utilizada no método. A utilização de uma formulação LA pura leva a uma distorção considerável da malha, devido a ela ficar "colada" à matéria. Algumas alternativas para superar este problema são: utilizar uma formulação LA com remalhamento ou utilizar uma formulação LEA.

No caso da formulação LA com remalhamento, existem diversos trabalhos que propõem técnicas para a geração de malhas em problemas bidimensionais de grandes deformações (Cheng e Kikuchi, 1986; Cheng, 1988; Habraken e Cescotto, 1990; Olmi, 1997) e alguns trabalhos para problemas 3D (Coupez, Soyris e Chenot, 1991; Szentmihali et al., 1994). Essas técnicas são geralmente compostas de vários passos: avaliação da distorção da malha, interrupção da análise se a malha é considerada distorcida, geração de uma nova malha mais uniforme, transferência de dados da malha antiga (distorcida) para a malha nova e reinício da análise. Em problemas de sólidos 3D, os quais são abordados neste trabalho, tem-se a dificuldade adicional em manter a correta representação da superfície dos sólidos quando os nós de contorno mudam de posição no remalhamento.

Com o intuito de evitar técnicas complicadas de remalhamento para a formulação LA, utiliza-se a formulação LEA. Para se conseguir bons resultados com a formulação LEA, deve-se obter no passo Euleriano da mesma uma malha menos distorcida que a malha do passo LA. Alguns comentários podem ser tecidos com relação às técnicas para atingir esse objetivo. Uma técnica de realocação 2D que considera a velocidade do nó realocado como a média da velocidade dos nós vizinhos foi proposta por (Donea et al., 1980, citado por Donea, 1983). Esta técnica foi aplicada a um problema de detonação de explosivos em um recipiente cheio de água. Já o mapeamento transfinito (Ponthot e Hogge, 1991; Gadala e Wang, 1998), por exigir uma pré-definição de regiões e pólos, é de implementação complexa em problemas 3D. Por outro lado, a realocação nodal utilizando informações de nós vizinhos (Bittencourt e Creus, 1995) não necessita de nenhum dado adicional além daqueles exigidos pela formulação

LA. Este tipo de realocação nodal pode ser visto como um refinamento do tipo r , onde o número de nós e o grau das funções de interpolação dos elementos permanecem inalterados.

Bittencourt e Creus (1995) propuseram uma técnica de realocação nodal onde cada nó é realocado no centro de gravidade dos nós que o rodeiam. A técnica proposta tem a limitação de não realocar nós de superfícies livres e de contato.

Neste trabalho, são propostas duas técnicas de realocação nodal: o Método da Média Ponderada (MMP) e o Método da Interpolação Nodal Quadrática (MINQ), sendo que este último é capaz de realocar nós de superfícies livres e de contato (Aymone, Bittencourt e Creus, 1999). Para empregar estes métodos, deve-se começar a análise com uma malha estruturada, gerada de acordo com regras que definem o número de divisões da mesma em cada direção. Os nós de malhas estruturadas estão classificados em quatro grupos, de acordo com o número de elementos concorrentes no nó (NEC) (Fig. 5):

- a) Nós de quina (q): $NEC=1$
- b) Nós de borda (b): $NEC=2$
- c) Nós de face (f): $NEC=3$ ou $NEC=4$
- d) Nós internos (i): $NEC=6$ ou $NEC=8$

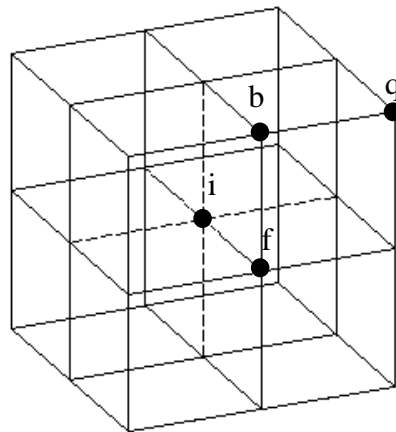


FIGURA 5 - Tipos de nós: q(quina), b (borda), f (face), i (interno)

Na Fig. 6 são mostrados exemplos de nós com o número de elementos que neles concorrem (NEC).

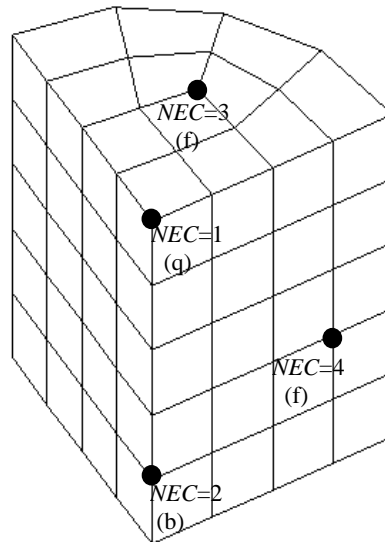


FIGURA 6 - Número de elementos concorrentes em um nó (NEC).

Os nós de quina não são realocados porque a geometria do corpo seria modificada. Dependendo do tipo de nó, é empregada uma técnica de realocação diferente. Para os tipos mostrados acima, tem-se

- a) Nós internos: MMP ($NEC=6$ ou 8)
- b) Nós de face: $NEC=3$ (MMP), $NEC=4$ (MMP ou MINQ)
- c) Nós de borda: MINQ ($NEC=2$)

A seguir são descritas as técnicas de realocação nodal. Em todas elas os nós externos são realocados primeiro, para que, quando os nós internos forem realocados, eles utilizem como base o contorno já totalmente melhorado.

4.1 MÉTODO DA MÉDIA PONDERADA (MMP)

O MMP é empregado para realocar nós internos e nós de superfícies planas. Nós de superfícies não-planas são realocadas usando o MINQ (ver seção 4.2).

Usando os valores das coordenadas do centro de gravidade dos elementos ao redor de um nó, e o volume desses elementos como fator de ponderação, a nova posição do nó é calculada. As duas situações possíveis, nós internos e externos, são analisadas a seguir.

4.1.1 Nós internos: $NEC=6$ ou $NEC=8$

Primeiramente, o volume total (V^T) dos elementos que rodeiam o nó a ser realocado é calculado como

$$V^T = \sum_{J=1}^{NEC} V^J, \quad (73)$$

onde NEC é o número de elementos concorrentes nesse nó.

Em seguida, as coordenadas do centro de gravidade de cada elemento J ($X_1^{G,J}, X_2^{G,J}, X_3^{G,J}$) da malha LA ao redor do nó a ser realocado são calculadas através das expressões

$$X_1^{G,J} = \frac{\sum_{N=1}^{NNE} X_1^N}{NNE}, \quad X_2^{G,J} = \frac{\sum_{N=1}^{NNE} X_2^N}{NNE}, \quad X_3^{G,J} = \frac{\sum_{N=1}^{NNE} X_3^N}{NNE}, \quad (74)$$

onde (X_1^N, X_2^N, X_3^N) são as coordenadas nodais do elemento J e NNE é o número de nós por elemento (8 para o elemento hexaédrico usado).

Finalmente, através de uma média ponderada, as coordenadas do nó realocado (χ_1, χ_2, χ_3) são obtidas

$$\chi_1 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_1^{G,J} V^J}{V^T}, \quad \chi_2 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_2^{G,J} V^J}{V^T}, \quad \chi_3 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_3^{G,J} V^J}{V^T}, \quad (75)$$

onde o fator de ponderação é o volume de cada elemento (V^J) no entorno do nó. O objetivo do fator de ponderação é equalizar o volume desses elementos, isto é, o centro de gravidade ($X_1^{G,J}, X_2^{G,J}, X_3^{G,J}$) dos elementos de maior volume contribui mais para a nova posição nodal que o centro de gravidade de elementos menores.

Alternativamente, em vez da média ponderada, pode-se usar uma média aritmética. Neste caso, a soma do centro de gravidade dos elementos ao redor de um nó é dividida pelo número de elementos ao redor do nó da seguinte forma

$$\chi_1 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_1^{G,J}}{NEC}, \quad \chi_2 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_2^{G,J}}{NEC}, \quad \chi_3 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_3^{G,J}}{NEC}. \quad (76)$$

As expressões em (76) são um caso particular de (75), quando todos os elementos têm o mesmo volume. A média aritmética tende a mover menos os nós que a média ponderada, por não considerar a diferença de volume que pode existir entre os elementos.

Independentemente da técnica de realocação empregada, as coordenadas do nó realocado (χ_1, χ_2, χ_3) são armazenadas no mesmo vetor auxiliar que contém as coordenadas materiais (X_1, X_2, X_3) . Isto quer dizer que, ao realocar um nó adjacente (X_1^N, X_2^N, X_3^N) a um nó já realocado (χ_1, χ_2, χ_3) , será utilizada a nova posição do nó já realocado (χ_1, χ_2, χ_3) para calcular a nova posição do nó adjacente em questão. Por outro lado, as coordenadas materiais calculadas no passo LA continuam inalteradas. Elas serão utilizadas em conjunto com as coordenadas realocadas para a transferência de dados (ver Cap.5).

Os passos para a realocação nodal usando o MMP para nós internos estão descritos no Quadro 2.

Quadro 2 - Passos para a realocação nodal usando o MMP para nós internos

<p>1 Laço sobre os nós (<i>NO</i> variando de 1 ao Número de Nós)</p> <p>1.1 Laço sobre os elementos (<i>J</i>) ao redor do nó <i>NO</i> (<i>J</i> variando de 1 a <i>NEC</i>)</p> <p>1.1.1 Calcular o volume total dos elementos ao redor de <i>NO</i> V^T (Eq. 73)</p> <p>1.1.2 Calcular o centro de gravidade de cada elemento ao redor de <i>NO</i> $X_1^{G,J}, X_2^{G,J}, X_3^{G,J}$ (Eq. 74)</p> <p>Fim de 1.1</p> <p>1.2 Calcular as coordenadas do nó realocado <i>NO</i> χ_1, χ_2, χ_3 (Eq. 75)</p> <p>1.3 Atualizar as coordenadas materiais do nó realocado $X_1 = \chi_1 \quad X_2 = \chi_2 \quad X_3 = \chi_3$</p> <p>1.4 Calcular a norma euclidiana de cada nó (ver Eq. 77)</p> <p>Fim de 1</p>

Um processo iterativo de realocação nodal pode ser empregado até que a maior diferença relativa entre as normas euclidianas das coordenadas dos nós em duas iterações subsequentes seja menor que uma tolerância, cujo valor padrão é $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$. A norma Euclidiana de cada nó na iteração i é calculada pela expressão

$$\|{}^i \mathcal{X}\| = \sqrt{{}^i \chi_1^2 + {}^i \chi_2^2 + {}^i \chi_3^2}. \quad (77)$$

A maior diferença relativa das normas euclidianas entre todos os nós deve ser menor que ε e é dada por

$$\frac{\text{MAX}(\|{}^{i+1} \mathcal{X}\| - \|{}^i \mathcal{X}\|)}{\|{}^{i+1} \mathcal{X}\|} < \varepsilon. \quad (78)$$

O número máximo de iterações permitido é 4. O Quadro 3 apresenta os passos do processo iterativo de realocação nodal. Este quadro é válido para o MMP e o MINQ. Os passos "1" e "Fim de 1" no Quadro 3 dizem respeito aos laços e também aos sub-laços do Quadro 2. Para utilizar a realocação nodal iterativa com o MINQ, deve-se substituir estes passos pelos correspondentes no quadro do MINQ (seção 4.2).

Quadro 3 - Passos do processo iterativo de realocação nodal

<p>$i=1$</p> <p>(a) Iteração i</p> <p>1</p> <p>Fim de 1</p> <p>(b) Iteração $i+1$</p> <p>1</p> <p>Fim de 1</p> <p>(c) Calcular a diferença relativa máxima entre as normas euclidianas nos passos i e $i+1$</p> $DIFMAX = \frac{\text{MAX}(\ {}^{i+1} \mathcal{X}\ - \ {}^i \mathcal{X}\)}{\ {}^{i+1} \mathcal{X}\ }$ <p>(d) Se $i \leq 4$ e $DIFMAX > \varepsilon$ então $i=i+1$ e vai para (b), senão vai para (e)</p> <p>(e) Fim do processo iterativo de realocação</p>
--

4.1.2 Nós de superfícies planas: $NEC=3$ ou $NEC=4$

O procedimento é similar ao descrito na seção 4.1.1 para nós internos. Contudo, em vez de utilizar volumes, a área das faces externas dos elementos é usada como fator de ponderação para a realocação nodal.

O primeiro passo é identificar as faces externas da malha de elementos finitos. Isto é feito através da verificação do número de elementos que compartilham cada face. Para isso, internamente no algoritmo, cada elemento hexaédrico é dividido em seis faces. Depois, faz-se uma varredura nas faces dos elementos, comparando as conectividades de cada face de um elemento com as conectividades das faces dos outros elementos. Se houver duas faces com as mesmas conectividades, essas faces são internas, pertencendo a dois hexaedros diferentes (Fig. 7). Se a face for externa, ela pertencerá a apenas um elemento. Uma idéia similar é utilizada por Bet (1989) e Szczygiel et al. (1992) para a identificação de faces externas.

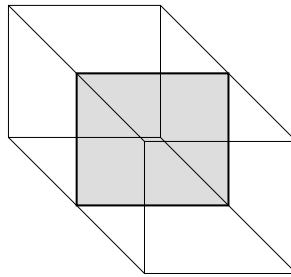


FIGURA 7 - Face interna de uma malha de hexaedros

O passo seguinte é verificar se as faces externas que rodeiam um nó são planas. O procedimento para isso é ilustrado na Fig. 8 para nós com $NEC=4$.

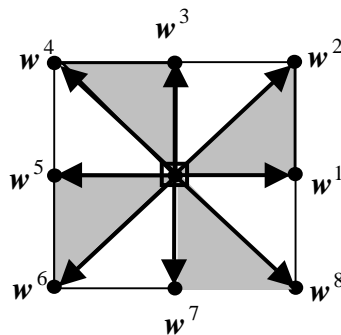


FIGURA 8 - Identificação de superfícies planas para $NEC=4$

Na Fig. 8, vetores são definidos do nó em questão aos nós dos elementos ao seu redor e é feito um produto vetorial, indicado por \times , entre cada par de vetores da seguinte forma

$$\mathbf{n}^a = \mathbf{w}^1 \times \mathbf{w}^2 \quad \mathbf{n}^b = \mathbf{w}^3 \times \mathbf{w}^4 \quad \mathbf{n}^c = \mathbf{w}^5 \times \mathbf{w}^6 \quad \mathbf{n}^d = \mathbf{w}^7 \times \mathbf{w}^8. \quad (79)$$

Se os vetores resultantes dessa operação estão todos na mesma direção, isto é, o ângulo entre eles é menor que um valor prescrito γ , cujo valor padrão é 1×10^{-6} , as faces em volta do nó são consideradas planas. O ângulo γ é calculado por

$$\cos \gamma^{ab} = \frac{\mathbf{n}^a \cdot \mathbf{n}^b}{\|\mathbf{n}^a\| \|\mathbf{n}^b\|} \quad \cos \gamma^{ac} = \frac{\mathbf{n}^a \cdot \mathbf{n}^c}{\|\mathbf{n}^a\| \|\mathbf{n}^c\|} \quad \cos \gamma^{ad} = \frac{\mathbf{n}^a \cdot \mathbf{n}^d}{\|\mathbf{n}^a\| \|\mathbf{n}^d\|}. \quad (80)$$

Uma superfície é considerada plana se

$$\cos \gamma^{ab} \cong \cos \gamma^{ac} \cong \cos \gamma^{ad} \cong 1,0 \quad \text{ou} \quad (\gamma^{ab} \cong \gamma^{ac} \cong \gamma^{ad} \cong 0^\circ), \quad (81)$$

aceitando a tolerância abaixo

$$\cos \gamma^{ab} - \cos \gamma^{ac} \cong \cos \gamma^{ab} - \cos \gamma^{ad} \leq 1 \times 10^{-6}. \quad (82)$$

Sendo a superfície plana, o procedimento para a obtenção da posição do nó realocado continua.

A área das faces que concorrem em um nó pode ser calculada de maneira simples (devido às faces serem planas), dividindo cada face quadrilátera em dois triângulos. A área de um quadrilátero J , A^J , é dada por $A^J = A^1 + A^2$

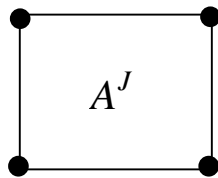


FIGURA 9 - Face externa (quadrilátera) de um hexaedro.

=

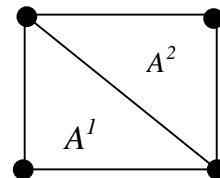


FIGURA 10 - Quadrilátero dividido em dois triângulos.

Após isso, aplica-se a fórmula para cálculo da área de um triângulo a partir das coordenadas dos seus vértices (nós) (fórmula de Heron):

$$A^1 \text{ ou } A^2 = \sqrt{sp(sp - a^1)(sp - a^2)(sp - a^3)}, \quad (83)$$

onde sp é o semiperímetro do triângulo

$$sp = \frac{a^1 + a^2 + a^3}{2} \quad (84)$$

e a^1 , a^2 e a^3 são o comprimento de cada lado do triângulo (Fig. 11).

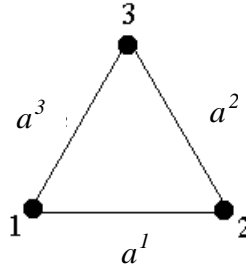


FIGURA 11 - Triângulo de lados com comprimento a^1 , a^2 e a^3 e vértices (nós) 1, 2 e 3

Os comprimentos a^1 , a^2 e a^3 são calculados em função das coordenadas dos vértices ou nós, utilizando a fórmula da distância entre 2 pontos

$$a^l = Dist^{l-2} = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2} \quad (85)$$

Alternativamente, a área de um triângulo a partir dos seus vértices 1 (X_1^1, X_2^1, X_3^1), 2 (X_1^2, X_2^2, X_3^2) e 3 (X_1^3, X_2^3, X_3^3) pode ser calculada pela expressão (Weast e Selby, 1975)

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} X_2^1 & X_3^1 & 1 \\ X_2^2 & X_3^2 & 1 \\ X_2^3 & X_3^3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_3^1 & X_1^1 & 1 \\ X_3^2 & X_1^2 & 1 \\ X_3^3 & X_1^3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1^1 & X_2^1 & 1 \\ X_1^2 & X_2^2 & 1 \\ X_1^3 & X_2^3 & 1 \end{vmatrix}^2} \quad (86)$$

Depois de obtida a área das faces que concorrem em um nó, calcula-se a sua área total, substituindo a Eq. (73) por

$$A^T = \sum_{J=1}^{NEC} A^J, \quad (87)$$

onde A^T é a área total das faces que concorrem em um nó.

De maneira similar, as equações (75) se tornam

$$\chi_1 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_1^{G,J} A^J}{A^T}, \quad \chi_2 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_2^{G,J} A^J}{A^T}, \quad \chi_3 = \frac{\sum_{J=1}^{NEC} X_3^{G,J} A^J}{A^T}, \quad (88)$$

onde $(X_1^{G,J}, X_2^{G,J}, X_3^{G,J})$ são as coordenadas do centro de gravidade de cada face J da malha LA que concorre no nó que está sendo realocado, cujas coordenadas são (χ_1, χ_2, χ_3) .

Novamente, uma média aritmética pode ser usada, sendo o valor de NEC a única diferença em relação à Eq. (76).

Os passos para a realocação nodal usando o MMP para nós de superfícies planas estão descritos no Quadro 4.

Quadro 4 - Passos para a realocação nodal usando o MMP para nós de superfícies planas

<p>1 Laço sobre os nós (NO variando de 1 ao Número de Nós)</p> <p>1.1 Verificar se as faces ao redor do nó NO são planas Se as faces NÃO forem planas, VAI PARA 1.6</p> <p>1.2 Laço sobre as faces (J) ao redor de NO (J variando de 1 a NEC)</p> <p>1.2.1 Calcular a área total das faces ao redor de NO A^T (Eq. 87)</p> <p>1.2.2 Calcular o centro de gravidade de cada face ao redor de NO $X_1^{G,J}, X_2^{G,J}, X_3^{G,J}$</p> <p>Fim de 1.2</p> <p>1.3 Calcular as coordenadas do nó realocado NO χ_1, χ_2, χ_3 (Eq. 88)</p> <p>1.4 Atualizar o vetor auxiliar das coordenadas materiais do nó realocado $X_1 = \chi_1 \quad X_2 = \chi_2 \quad X_3 = \chi_3$</p> <p>1.5 Calcular a norma euclidiana de cada nó (Eq. 77)</p> <p>1.6 Continuar</p> <p>Fim de 1</p>
--

4.2 MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO NODAL QUADRÁTICA (MINQ)

Este método permite lidar com o problema da realocação nodal em superfícies não-planas. Nestas superfícies se deseja evitar, tanto quanto possível, alterações no volume e na forma do contorno dos corpos. O método pode também ser usado em superfícies planas.

O procedimento proposto é aplicado a nós externos com $NEC=2$ e $NEC=4$. Para $NEC=2$, os elementos que compartilham o nó 2 são identificados. Nestes elementos, outros dois nós com $NEC=1$ ou $NEC=2$, chamados 1 e 3, são também identificados (ver Fig. 12).

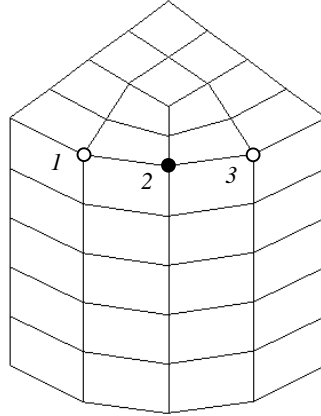


FIGURA 12 - Nó 2 com $NEC=2$ e nós vizinhos 1 e 3

Estes três nós são usados para definir uma curva quadrática, que é empregada para realocar o nó 2.

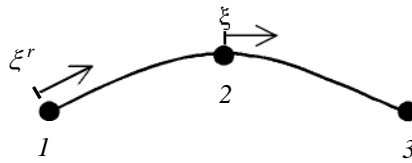


FIGURA 13 - Curva quadrática definida pelos nós 1, 2 e 3

Para aplicar este método, a distância entre os nós 1 e 2 é calculada por uma expressão similar à (85)

$$Dist^{1-2} = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2}.$$

A distância entre os nós 2 e 3 ($Dist^{2-3}$) é definida similarmente. O objetivo deste método é obter a nova posição do nó 2 que equaliza estas distâncias.

Dois sistemas de coordenadas reduzidas unidimensionais ξ e ξ^r (Bathe, 1996) são usados. Inicialmente, a coordenada reduzida ξ^r , dentro dos limites $[0;1]$, é calculada pela expressão

$$\xi^r = \frac{Dist^{2-3}}{Dist^{1-2} + Dist^{2-3}}. \quad (89)$$

Após isso, ξ [-1;1] é determinado substituindo ξ^r na equação

$$\xi = 2\xi^r - 1, \quad (90)$$

$$\text{ou diretamente } \xi = \frac{Dist^{2-3} - Dist^{1-2}}{Dist^{2-3} + Dist^{1-2}}.$$

A nova posição do nó 2 é calculada usando a coordenada ξ . Primeiramente, os valores das funções de interpolação (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) da curva quadrática, que passa pelos três nós, são obtidos substituindo o valor de ξ nas expressões

$$\phi^1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi), \quad \phi^2 = 1 - \xi^2, \quad \phi^3 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi). \quad (91)$$

Por fim, a nova posição do nó 2 (χ_1, χ_2, χ_3) é calculada utilizando as funções de interpolação em (91) e as coordenadas dos nós 1, 2 e 3 obtidas no passo LA

$$\chi_1 = \sum_{N=1}^3 \phi^N X_1^N, \quad \chi_2 = \sum_{N=1}^3 \phi^N X_2^N, \quad \chi_3 = \sum_{N=1}^3 \phi^N X_3^N. \quad (92)$$

As Eq. (89) e (90) devem ser utilizadas apenas para obter a nova posição do nó 2, e não a posição dos nós 1 e 3 que já são conhecidas a priori. Para nós com $NEC=4$, a mesma técnica de realocação é empregada duas vezes, usando os quatro nós que formam duas linhas com o nó 2 (Fig. 14).

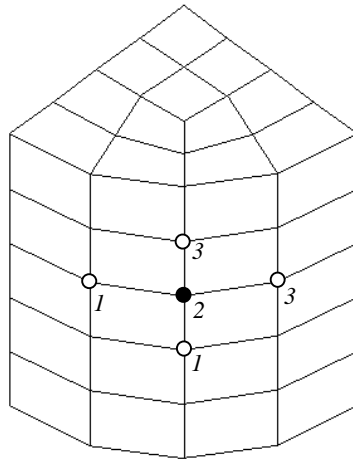


FIGURA 14 - NÓ 2 com $NEC=4$ e nós vizinhos 1 e 3

Como no MMP, o vetor que armazena (χ_1, χ_2, χ_3) no MINQ é o mesmo vetor auxiliar que contém as coordenadas materiais (X_1^N, X_2^N, X_3^N) .

Os passos para a realocação nodal utilizando o MINQ estão descritos no Quadro 5.

Quadro 5 - Passos para a realocação nodal utilizando o MINQ

- 1 Laço sobre os nós (*NO2* variando de 1 ao Número de Nós)
- 1.1 Para o nó *NO2*, identificar os nós vizinhos *NO1* e *NO3*
- 1.2 Calcular as distâncias entre os nós
 $Dist^{1-2}, Dist^{2-3}$ (Eq. 85)
- 1.3 Calcular a coordenada reduzida entre [0;1]
 ξ^r (Eq. 89)
- 1.4 Calcular a coordenada reduzida entre [-1;1]
 ξ (Eq. 90)
- 1.5 Calcular as funções de interpolação de curvas quadráticas usando ξ
 ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 (Eq. 91)
- 1.6 Calcular as coordenadas do nó realocado *NO2*
 χ_1, χ_2, χ_3 (Eq. 92)
- 1.7 Atualizar o vetor auxiliar das coordenadas materiais de *NO2*
 $X_1 = \chi_1 \quad X_2 = \chi_2 \quad X_3 = \chi_3$
- 1.8 Calcular a norma euclidiana de cada nó (Eq. 77)
- Fim de 1

A realocação nodal deve ser executada em cada passo de tempo para facilitar a transferência de dados da malha LA para a malha realocada. Procedimentos para a transferência de dados são tratados no capítulo 5.

4.3 OBSERVAÇÕES SOBRE AS TÉCNICAS DE REALOCAÇÃO NODAL

As técnicas de realocação nodal foram propostas inicialmente considerando os casos de *NEC* anteriormente apresentados. A generalização destas técnicas a casos com *NEC* diferente destes (Fig. 15) ou de malhas não-estruturadas é relativamente simples no MMP, bastando apenas identificar se o nó em questão é interno ou externo e realizar o processo de realocação

considerando o número de elementos (para nós internos) ou faces (para nós externos) que estão ao redor deste nó.

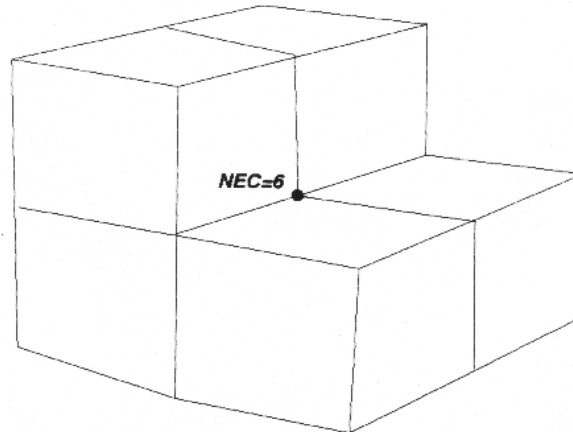
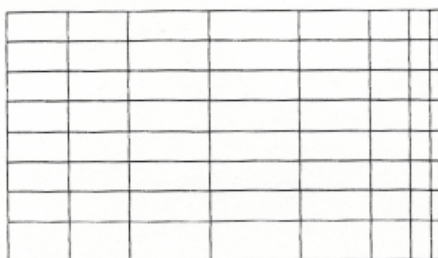


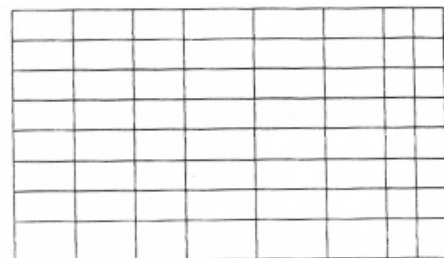
FIGURA 15 - Nó externo com $NEC=6$

Este número pode ser bastante variável no caso de malhas não-estruturadas. Já no caso do MINQ, a generalização do método é mais complexa, visto que não haverá necessariamente nós formando 1 ou 2 linhas ao redor do nó a ser realocado. Deveria-se utilizar uma técnica mais geral de realocação aplicável a superfícies livres para casos de malhas não-estruturadas. Poderia ser realizado o mapeamento da superfície externa dos sólidos, com superfícies paramétricas por exemplo, tornando possível um controle global do processo de realocação e, assim, possibilitar a realocação em superfícies livres quaisquer.

As técnicas de realocação apresentadas são mais apropriadas a malhas estruturadas com elementos igualmente espaçados, visto que o objetivo destas técnicas é equalizar o tamanho dos elementos ao redor dos nós. Sendo assim, zonas com malhas mais finas que outras tendem a diminuir este refinamento, uniformizando o tamanho dos elementos ao longo de todo o sólido em questão (Fig. 16).



(a) No início do processo



(b) Após várias etapas de realocação

FIGURA 16 - Malha concentrada

Uma forma de evitar isso seria a utilização de um controle global do processo de realocação que permitiria concentrar a malha em zonas onde isso fosse necessário. A utilização do mapeamento por superfícies paramétricas, comentada no parágrafo anterior, seria uma alternativa neste sentido. Nas aplicações apresentadas, a malha inicial não é refinada. Este refinamento não se faz necessário uma vez que, em geral, a tendência ao longo do processo de análise destas aplicações é que os elementos fiquem naturalmente menores nas zonas mais deformadas onde uma malha fina seria importante.

4.4 CORREÇÃO DE POSIÇÃO PARA NÓS DE CONTATO

Em problemas de contato, é necessário fazer uma correção na posição dos nós de contato após ser efetuada a realocação nodal, uma vez que as técnicas de realocação propostas não garantem que esses nós cumpram as restrições de contato. A correção da posição nodal (c_i^N) na direção da normal ao corpo rígido, para um nó que o tenha penetrado ou se afastado, é calculada como

$$c_i^N = \frac{F_i^{N,ext} - F_i^{N,int}}{k_i} \quad (93)$$

onde o termo no numerador indica as forças desequilibradas no nó de contato, na direção normal ao corpo rígido, e k_i é o fator de penalidade normal. Nota-se que se não há forças desequilibradas, não é necessária nenhuma correção na posição nodal. Detalhes sobre esta correção de posição e outros aspectos relacionados a problemas envolvendo contato entre corpos podem ser encontrados em Bittencourt e Creus (1998).

5 TRANSFERÊNCIA DE DADOS

No passo Euleriano do operador LEA (Cap. 3), após a obtenção da malha realocada, deve-se transferir as variáveis de estado da malha do passo LA para a malha realocada, de forma a permitir a continuação da análise no passo de tempo seguinte. No passo LA, são calculadas as tensões nos pontos de Gauss da malha LA. Essas tensões devem ser transferidas para os pontos de integração da malha realocada (Fig. 17).

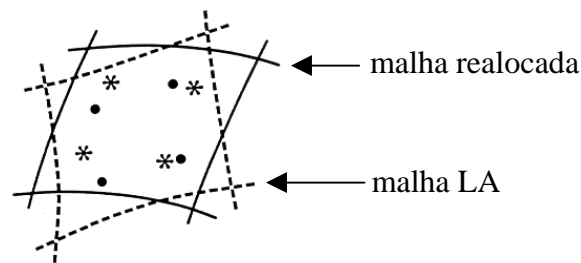


FIGURA 17 - Pontos de Gauss da malha LA (•) e da malha realocada (*)

O processo de transferência de dados utilizado é constituído de dois passos:

Passo 1

Suavização: As tensões nos nós da malha LA são obtidas utilizando os valores calculados nos pontos de Gauss desta malha, através da técnica de suavização pelos mínimos quadrados locais proposta por Hinton e Campbell (1974) (ver seção 5.1). Esta técnica foi escolhida porque evita a obtenção de valores de tensão abaixo dos reais nas fronteiras do domínio e em zonas muito deformadas (Ponthot, 1995). Por outro lado, caso fosse empregada uma suavização global, a tendência seria distribuir por todo o sólido efeitos localizados de concentração de tensões, diminuindo a precisão dos resultados.

Passo 2

Transferência de dados propriamente dita: As variáveis de estado são transferidas da malha LA para a malha realocada. Duas técnicas são abordadas na seção 5.2. A transferência de dados pode ser realizada utilizando um desenvolvimento em série de Taylor das tensões

quando os pontos de Gauss de um elemento na malha realocada pertencem ao mesmo elemento na malha LA (ver seção 5.2.1). Caso contrário, um processo de busca e interpolação deve ser empregado (ver seção 5.2.2).

5.1 PASSO 1: TÉCNICA DE SUAUIZACÃO

As tensões nos pontos de Gauss ${}^X\sigma^{PG}$ se relacionam com as tensões nodais ${}^X\sigma^N$ da malha LA através da matriz das funções de interpolação Φ como

$${}^X\sigma^{PG} = \Phi {}^X\sigma^N. \quad (94)$$

Os termos na matriz Φ são avaliados nos pontos de integração de Gauss. A função de interpolação ϕ^N para o nó N de um elemento hexaédrico linear de 8 nós é dada pela Eq. (17)

$$\phi^N = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi^N)(1 + \eta\eta^N)(1 + \zeta\zeta^N).$$

São utilizados oito pontos de integração. A função de interpolação ϕ^N , para o ponto de Gauss $PG=1$, é obtida a seguir a título de exemplificação. As coordenadas reduzidas do ponto de Gauss $PG=1$ são

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \zeta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

e as coordenadas reduzidas do nó 1 (ξ^1, η^1, ζ^1) do elemento hexaédrico são (-1,-1,-1). Então, a função de interpolação ϕ^1 fica

$$\phi^1 = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi^1)(1 + \eta\eta^1)(1 + \zeta\zeta^1) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta).$$

Substituindo os valores de (ξ, η, ζ) na equação acima tem-se

$$\phi^1 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 0,490562$$

Este procedimento é repetido para as funções de interpolação ϕ^2 até ϕ^8 do ponto de Gauss $PG=1$, e para os outros pontos de Gauss até $PG=8$. Sendo assim, a matriz Φ pode ser obtida analiticamente

$$\Phi = \begin{bmatrix} C & D & F & D & D & F & G & F \\ D & C & D & F & F & D & F & G \\ F & D & C & D & G & F & D & F \\ D & F & D & C & F & G & F & D \\ D & F & G & F & C & D & F & D \\ F & D & F & G & D & C & D & F \\ G & F & D & F & F & D & C & D \\ F & G & F & D & D & F & D & C \end{bmatrix}, \quad (95)$$

onde cada linha da matriz contém os valores da Eq. (17) para um determinado ponto de Gauss. Os valores de C , D , F e G são

$$C = \phi^1 = \frac{1}{8}A^3, \quad D = \phi^2 = \phi^4 = \phi^5 = \frac{1}{8}A^2B,$$

$$F = \phi^3 = \phi^6 = \phi^8 = \frac{1}{8}AB^2, \quad G = \phi^7 = \frac{1}{8}B^3,$$

com A e B iguais a

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,577350, \quad B = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,422650.$$

Invertendo a Eq. (94), as tensões nodais são obtidas como

$${}^X \sigma^N = \Phi^{-1} {}^X \sigma^{PG}, \quad (96)$$

onde os coeficientes da matriz Φ^{-1} são

$$C = \frac{5+3\sqrt{3}}{4} \cong 2,549037, \quad D = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \cong -0,683012,$$

$$F = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \cong 0,183012, \quad G = \frac{5-3\sqrt{3}}{4} \cong -0,049037.$$

Nota-se que a matriz Φ^{-1} é constante para todos os elementos durante a análise. A interpolação das tensões dos pontos de Gauss para os nós dentro de um elemento é usualmente chamada de técnica de suavização por mínimos quadrados (Hinton e Campbell, 1974).

Para a pressão (tensão hidrostática), que é avaliada em apenas um ponto de Gauss para evitar o travamento da malha, transfere-se diretamente o seu valor do ponto de Gauss para os nós do elemento, sem aplicar a suavização.

Em todas as aplicações desenvolvidas se utiliza o elemento hexaédrico de oito nós com oito pontos de integração de Gauss, com exceção da pressão, onde se usa apenas um ponto de Gauss.

De forma a assegurar que um nó, para uma determinada componente de tensão, possua apenas um valor da mesma, independentemente do elemento ao qual ele pertença, deve ser feita uma média dos valores desta tensão nos elementos que concorrem no nó em questão. Esta média é feita para cada componente de tensão. O processo é repetido para todos os nós da malha LA.

5.2 PASSO 2: TRANSFERÊNCIA DE DADOS PROPRIAMENTE DITA

Se o processo de realocação é aplicado freqüentemente, sendo que o passo de tempo é usualmente pequeno para problemas altamente não-lineares como conformação mecânica, a malha LA se encontra próxima da malha realocada. Neste caso, os pontos de Gauss de um elemento na malha realocada pertencem ao mesmo elemento na malha LA (Fig. 17) e um desenvolvimento em séries de Taylor, limitado ao primeiro termo, pode ser empregado para a transferência de dados. Caso contrário, um processo de busca que utiliza a técnica de inversão paramétrica (Crawford, Anderson e Waggenpack, 1989; Martins et al., 1994) faz-se necessário.

Para que se possa empregar a formulação LEA em processos de conformação mecânica onde a velocidade relativa entre a malha e a matéria é alta, deve-se implementar outras técnicas de transferência de dados, tais como a de Godunov ou Petrov-Galerkin (Boman e

Ponhot, 2000). Um caso típico onde isto ocorre é o da laminação, quando o regime estacionário é atingido.

5.2.1 Desenvolvimento das tensões em séries de Taylor

Esta técnica é usada quando a distância entre as malhas LA e realocada é pequena. Ela também pode ser vista como a integração no tempo da derivada convectiva das tensões (Eq. (48)). A expressão utilizada é

$$\chi \sigma_i^{PG} = {}^X \sigma_i^{PG} + (\chi_j^{PG} - X_j^{PG}) \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial X_j}, \quad (97)$$

onde $\chi \sigma_i^{PG}$ é uma componente de tensão avaliada em um ponto de Gauss da malha realocada; ${}^X \sigma_i^{PG}$ é a mesma componente de tensão avaliada em um ponto de Gauss da malha LA (Eq. (94)); $(\partial^X \sigma_i^{PG} / \partial X_j)$ é o gradiente de tensão próximo ao ponto de Gauss da malha LA. Este gradiente tem componentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial X_1} &= \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \xi^{PG}} \frac{\partial \xi^{PG}}{\partial X_1} + \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \eta^{PG}} \frac{\partial \eta^{PG}}{\partial X_1} + \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \zeta^{PG}} \frac{\partial \zeta^{PG}}{\partial X_1}, \\ \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial X_2} &= \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \xi^{PG}} \frac{\partial \xi^{PG}}{\partial X_2} + \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \eta^{PG}} \frac{\partial \eta^{PG}}{\partial X_2} + \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \zeta^{PG}} \frac{\partial \zeta^{PG}}{\partial X_2}, \\ \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial X_3} &= \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \xi^{PG}} \frac{\partial \xi^{PG}}{\partial X_3} + \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \eta^{PG}} \frac{\partial \eta^{PG}}{\partial X_3} + \frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \zeta^{PG}} \frac{\partial \zeta^{PG}}{\partial X_3}, \end{aligned} \quad (98)$$

onde

$$\frac{\partial^X \sigma_i^{PG}}{\partial \xi^{PG}} = \sum_{N=1}^8 \frac{\partial \phi^N}{\partial \xi^{PG}} {}^X \sigma_i^N, \quad (99)$$

${}^X \sigma_i^N$ é uma componente de tensão no nó N da malha LA, obtida no *Passo 1* com a técnica de suavização (Eq. (96)). Um cálculo similar à Eq. (99) aplica-se para $\partial^X \sigma_i^{PG} / \partial \eta^{PG}$ e $\partial^X \sigma_i^{PG} / \partial \zeta^{PG}$.

Para calcular os termos na equação (98) que relacionam as coordenadas globais (X_1, X_2, X_3) com as reduzidas $(\xi^{PG}, \eta^{PG}, \zeta^{PG})$, a matriz do Jacobiano deve ser invertida

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi^{PG}} & \frac{\partial X_1}{\partial \eta^{PG}} & \frac{\partial X_1}{\partial \zeta^{PG}} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \xi^{PG}} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta^{PG}} & \frac{\partial X_2}{\partial \zeta^{PG}} \\ \frac{\partial X_3}{\partial \xi^{PG}} & \frac{\partial X_3}{\partial \eta^{PG}} & \frac{\partial X_3}{\partial \zeta^{PG}} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

onde

$$\frac{\partial X_1}{\partial \xi^{PG}} = \sum_{N=1}^8 \frac{\partial \phi^N}{\partial \xi^{PG}} X_1^N \quad (101)$$

e X_1^N é a componente na direção 1 das coordenadas do nó N da malha LA. Um cálculo similar é aplicado aos outros termos de \mathbf{J} .

5.2.2 Algoritmo de busca e interpolação

A malha realocada pode não estar próxima da malha LA se a técnica de realocação não é aplicada frequentemente. Consequentemente, os pontos de Gauss de um elemento da malha realocada podem não pertencer ao mesmo elemento da malha LA. Neste caso, é preciso utilizar um algoritmo de busca e interpolação, cujo objetivo é encontrar o elemento da malha LA no qual um nó realocado se localiza e interpolar os dados dos nós deste elemento para o nó realocado.

Para elementos hexaédricos, Martins et al. (1994) propuseram uma técnica de inversão paramétrica iterativa que usa o método de Newton-Raphson. O elemento da malha LA é encontrado quando as coordenadas reduzidas do nó realocado estão dentro dos limites do espaço reduzido do elemento $[-1,1]$.

Com o objetivo de evitar soluções iterativas, Kiridena et al. (1989) propuseram subdividir um elemento hexaédrico em 24 tetraedros. A solução é encontrada invertendo-se a matriz de coordenadas volumétricas tetraédricas. O elemento tetraédrico da malha LA é encontrado quando as coordenadas volumétricas do nó realocado estão localizadas dentro dos limites $[0,1]$.

Neste trabalho propõe-se um algoritmo onde um hexaedro da malha LA é subdividido em seis elementos tetraédricos, de acordo com Naylor (1999). O algoritmo proposto tem duas vantagens em relação ao de Kiridena et al. (1989), no qual cada face do hexaedro subdividido possui um nó adicional e existem quatro vezes mais tetraedros para efetuar a busca do que no método aqui proposto (24 em vez de 6). Este algoritmo não deve ser utilizado frequentemente no processo de análise, visto que há uma perda de precisão na suavização de tensões.

Alternativamente, um hexaedro pode ser dividido em 5 tetraedros (Naylor, 1999), o que traz uma pequena diminuição no tempo de processamento. Por outro lado, a divisão em 6 tetraedros parece ser geometricamente mais intuitiva já que se divide inicialmente um hexaedro em 2 pentaedros e, após, cada pentaedro em 3 tetraedros.

Um outro aspecto a considerar é que ao se dividir um hexaedro em 5 ou 6 tetraedros, em direções diferentes, há uma possibilidade de que haja um vazio ou uma sobreposição entre faces de tetraedros originários de elementos hexaédricos vizinhos (Fig. 18).

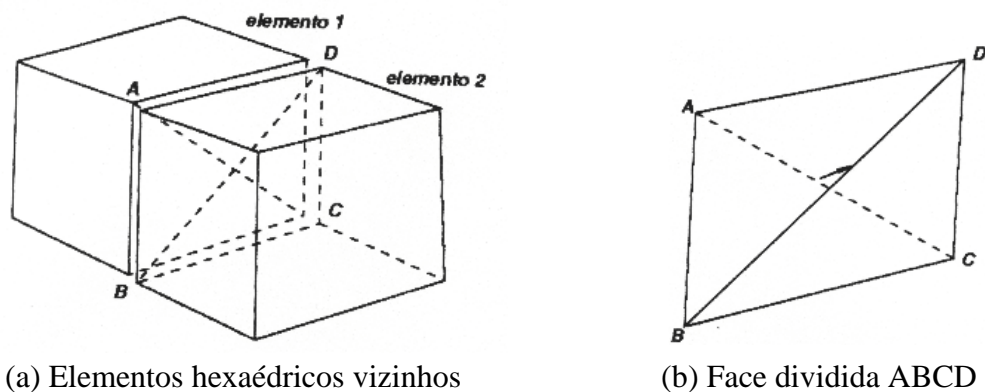


FIGURA 18 - Faces de hexaedros vizinhos divididas em direções diferentes

Na Fig. 18 a face comum aos hexaedros é a ABCD. Se a face do lado do elemento 1 é dividida pela diagonal AC e pelo lado do elemento 2 ela é dividida pela diagonal BD, as faces dos tetraedros originários desta divisão não coincidirão. Isto pode ocasionar problemas de vazios ou sobreposição quando os hexaedros a serem divididos possuem faces externas curvas. Nos testes de transferência de dados realizados tais problemas não ocorreram, uma vez que é feito um teste que avisa se o elemento tetraédrico da malha LA não é encontrado, interrompendo a transferência de dados. A subdivisão proposta por Kiridena et al.(1989) (Fig. 19) evita este tipo de problema porque há sempre uma correspondência entre faces de

elementos vizinhos devido ao nó adicional colocado no centro das faces externas do hexaedro ao subdividi-lo em tetraedros.

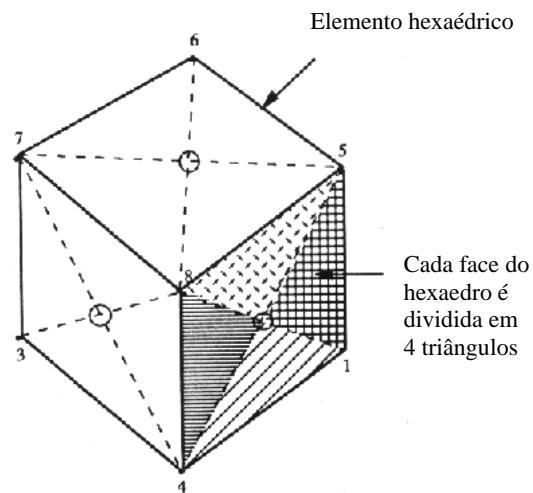


FIGURA 19 - Divisão do hexaedro em 24 tetraedros

Uma outra maneira de evitar este problema é controlar a direção pela qual se começa a divisão de um hexaedro, de forma a manter a mesma direção nas faces dos elementos vizinhos de toda a malha.

A subdivisão hexaédrica proposta neste trabalho é mostrada nas Fig. 20 e 21. Ela pode ser implementada modificando-se a conectividade dos elementos hexaédricos internamente no algoritmo.

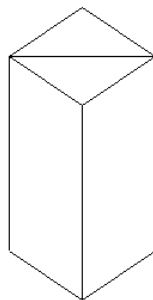


FIGURA 20 - Um elemento hexaédrico é subdividido em dois pentaedros

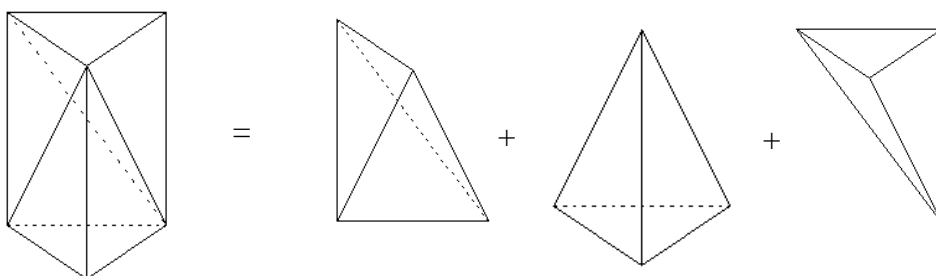


FIGURA 21 - Cada pentaedro é subdividido em três tetraedros

Para cada tetraedro da malha LA, o sistema de equações proposto por Ergatoudis (1968) é resolvido

$$\begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 & X_1^4 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 \\ X_3^1 & X_3^2 & X_3^3 & X_3^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^1 \\ L^2 \\ L^3 \\ L^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

onde

(χ_1, χ_2, χ_3) são as coordenadas do nó realocado (conhecido);

(X_1^N, X_2^N, X_3^N) são as coordenadas do nó N de um tetraedro da malha LA (conhecido);

L^N são as coordenadas volumétricas do nó realocado neste elemento (incógnita).

A solução é encontrada quando um nó realocado se encontra dentro de um tetraedro da malha LA, isto é, as coordenadas volumétricas cumprem a condição

$$0 \leq L^1, L^2, L^3, L^4 \leq 1. \quad (103)$$

5.2.2.1 Redução do conjunto de busca

No processo acima, todos os tetraedros são procurados para cada nó realocado, o que torna o processo computacionalmente lento. Com o objetivo de reduzir o conjunto de busca, utiliza-se informações do número de elementos e de faces ao redor dos nós.

Para nós internos, onde NEC (número de hexaedros que concorrem em um nó) é 6 ou 8, a busca é feita apenas nos elementos da malha LA ao redor do nó realocado. O valor de NEC já é conhecido das técnicas de realocação nodal do Cap. 4. O uso desta redução do conjunto de busca baseia-se na hipótese de que um nó da malha realocada estará contido em um dos elementos da malha LA ao seu redor, o que geralmente ocorre na formulação LEA devido à mudança de posição nodal na realocação ser pequena em cada passo de tempo. Cada elemento hexaédrico da malha LA ao redor do nó realocado é dividido em 6 tetraedros, conforme descrito anteriormente, e o sistema de equações em (99) é resolvido para encontrar o tetraedro da malha LA ao qual o nó realocado pertence. Outras formas de reduzir o conjunto de busca podem ser encontradas nas referências Benson e Hallquist (1990) e Benson (1992).

Nós de contorno podem se posicionar, após a realocação, fora da malha LA. Neste caso, o critério acima descrito não funcionará. Para estas situações, o nó será projetado sobre a face da malha LA que o rodeia mais próxima, de modo a permitir a transferência de dados. Este método é detalhado a seguir.

5.2.2.2 Projeção dos nós realocados sobre o contorno LA

A projeção dos nós realocados sobre o contorno LA visa apenas possibilitar a obtenção dos valores das variáveis de estado nestes nós, sem modificar a sua posição no espaço. Com o objetivo de determinar a projeção do nó realocado, $\chi^{N,PR}$, assume-se a hipótese de que um nó externo da malha realocada se encontra em uma das faces dos elementos LA ao seu redor (Fig. 22).

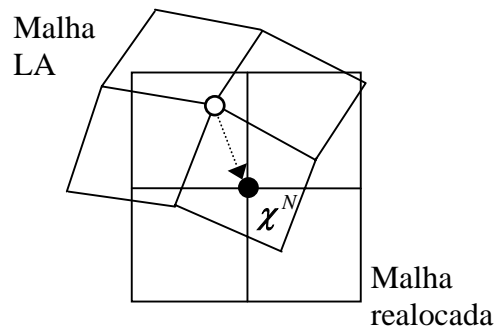


FIGURA 22 - Nó realocado (●) e o mesmo nó na malha LA (○)

Essas faces quadriláteras são divididas em dois triângulos, similarmente ao que é feito na Fig. 10 da seção 4.1.2. Em seguida, calcula-se a distância entre o nó realocado χ^N e os planos formados pelos triângulos. A Fig. 23 ilustra o processo

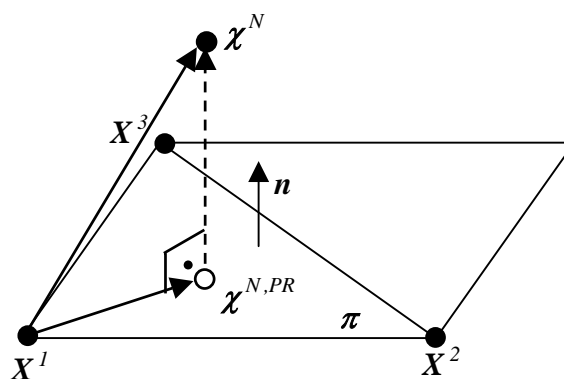


FIGURA 23 - Obtenção do ponto $\chi^{N,PR}$

A distância entre o nó realocado χ^N e o plano π é dada pela expressão

$$Dist(\chi^N \pi) = |\chi^{N,PR} \bullet \chi^N| = |(\chi^N - X^I) \bullet \mathbf{n}| \quad (104)$$

onde X^I é um vértice do triângulo que define o plano π (nó da malha LA) e \mathbf{n} é a normal ao plano, calculada como

$$\mathbf{n} = (X^2 - X^I) \times (X^3 - X^I). \quad (105)$$

O ponto $\chi^{N,PR}$, projeção do nó χ^N sobre o plano π , pode ser encontrado como

$$\chi^{N,PR} = \chi^N - Dist(\chi^N \pi) \mathbf{n}. \quad (106)$$

Como o plano π é infinito, é preciso verificar se o nó projetado se localiza dentro do triângulo formado pelos nós da malha LA (X^1, X^2, X^3). Em vista disso, a projeção é feita para cada triângulo (face quadrilátera dividida) da malha LA ao redor de um nó externo realocado até encontrar aquele triângulo ao qual o nó pertence. O triângulo será encontrado quando as coordenadas triangulares (L^1, L^2, L^3) do nó realocado estiverem dentro dos limites $[0;1]$. As coordenadas triangulares são calculadas dividindo o triângulo em três, usando para isso o ponto $\chi^{N,PR}$ conforme a Fig. 24.

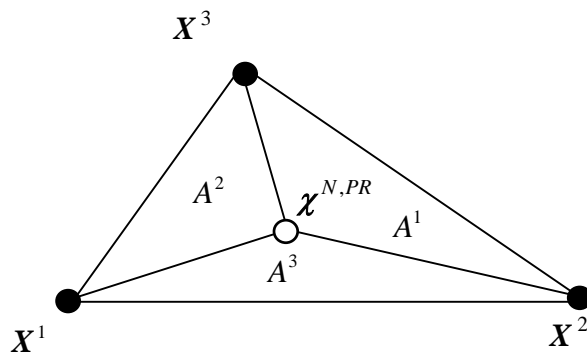


FIGURA 24 - Coordenadas triangulares do ponto $\chi^{N,PR}$

Na Fig. 24, A^1 , A^2 e A^3 são as áreas dos triângulos que formam o triângulo total de área A . Essas áreas podem ser calculadas pelas Eq. (83) ou (86) da seção 4.1.2. As coordenadas triangulares são determinadas pelas expressões

$$L^1 = \frac{A^1}{A}, \quad L^2 = \frac{A^2}{A}, \quad L^3 = \frac{A^3}{A}. \quad (107)$$

O ponto $\chi^{N,PR}$ se localiza dentro do triângulo formado pelos nós (X^1, X^2, X^3) se

$$0 \leq L^1, L^2, L^3 \leq 1. \quad (108)$$

5.2.2.3 Interpolação de dados

As tensões obtidas no *Passo 1* com a técnica de suavização (seção 4.1) são interpoladas dos nós do tetraedro da malha LA que cumpre a condição em (103) para o nó realocado usando as coordenadas volumétricas L^1, L^2, L^3, L^4 como

$$\chi \sigma_i^N = \sum_{M=1}^4 L^M \chi \sigma_i^M, \quad (109)$$

onde $\chi \sigma_i^N$ é uma componente de tensão avaliada no nó realocado N e $\chi \sigma_i^M$ é a mesma componente de tensão avaliada no nó M do tetraedro da malha LA.

Para nós realocados que são projetados sobre o contorno LA (seção 5.2.2.2) de forma a possibilitar a transferência de dados, tem-se coordenadas triangulares L^1, L^2, L^3 ao invés de coordenadas volumétricas. Neste caso, a expressão (109) fica

$$\chi \sigma_i^N = \sum_{M=1}^3 L^M \chi \sigma_i^M. \quad (110)$$

As tensões nodais na malha realocada obtidas pela Eq. (109) ou (110) são interpoladas para os pontos de Gauss da mesma usando a Eq. (111), similar à Eq. (94) mas com as coordenadas χ em vez de X

$$\chi \sigma^{PG} = \Phi \chi \sigma^N. \quad (111)$$

6 AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO GEOMÉTRICA E DO ERRO

A avaliação da distorção geométrica e do erro em problemas de grandes deformações é bastante importante, pois possibilita a comparação da qualidade da malha de elementos finitos e da precisão dos resultados obtidos com as formulações LA e LEA. Sendo assim, esta avaliação é utilizada na formulação LEA para fins de pós-processamento e não como critério de interrupção da análise. Alternativamente, a avaliação da distorção poderia servir como um indicativo da necessidade da execução de um passo Euleriano, ou seja, vários passos LA seriam realizados até que uma medida de distorção indicasse a necessidade de realocação nodal.

Neste trabalho utiliza-se vários critérios de avaliação da distorção geométrica (seção 6.1) e um critério de avaliação do erro (seção 6.2).

6.1 AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO GEOMÉTRICA

Com exceção do fator de qualidade da seção 6.1.1, implementado computacionalmente no METAFOR, todos os outros critérios utilizados estão disponíveis no programa PATRAN (MSC/PATRAN, 1996). São eles: razão de aspecto (*aspect ratio*) (seção 6.1.2), ângulo de borda entre as faces (*edge angle*) (seção 6.1.3), ângulo de obliquidade entre as faces (*face skew*) (seção 6.1.4), ângulo de empenamento das faces (*face warp*) (seção 6.1.5), razão de afilamento das faces (*face taper*) (seção 6.1.6) e ângulo de torção entre as faces (*twist*) (seção 6.1.7). A notação empregada nos critérios de distorção do PATRAN é a mesma do manual do programa, de forma a unificar as variáveis utilizadas.

6.1.1 Fator de qualidade Q

O critério de distorção geométrica proposto por Zavatieri, Dari e Buscaglia (1996) é usado para avaliar a qualidade da malha em ambas as formulações LA e LEA. Este critério

leva em conta o fator de aspecto entre os lados do elemento e o ângulo entre as faces do mesmo.

O fator de qualidade Q , que relaciona o volume e o perímetro de um elemento hexaédrico, é dado por

$$Q = 1728 \frac{V}{ph^3}, \quad Q [0;1] \quad (112)$$

onde V é o volume do hexaedro e ph é o seu perímetro (soma dos comprimentos das arestas). Usando o número 1728 na Eq. (112), um cubo terá um valor de qualidade máximo ($Q=1$). À medida que um elemento vai sendo distorcido durante a análise, o valor de Q diminui até o mínimo de zero. Este critério é mais indicado quando não há uma grande diferença de dimensões entre os lados dos elementos.

6.1.2 Razão de aspecto

A razão de aspecto (*aspect ratio*) é calculada como a razão das distâncias entre faces opostas de um hexaedro. Esta distância é determinada considerando cada face hexaédrica como uma superfície quadrilátera. Calcula-se a normal a cada face e a distância entre os centros de cada par de faces opostas (Fig. 25).

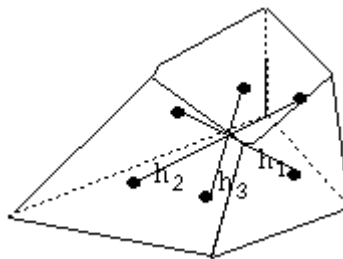


FIGURA 25 - Distâncias entre os centros das faces de um hexaedro (h_1, h_2, h_3)

A razão de aspecto é a divisão da maior distância entre duas faces quaisquer pela menor distância entre duas faces

$$\text{Razão de aspecto} = \frac{\max(h_1, h_2, h_3)}{\min(h_1, h_2, h_3)}. \quad (113)$$

Em todos os critérios de distorção do PATRAN há valores limite sugeridos pelo programa, a partir dos quais considera-se que o elemento falhou no critério. Estes valores serão utilizados

neste trabalho ao se mostrar figuras com escala de cores. Para a razão de aspecto, o valor limite é 5,0. Um cubo tem razão de aspecto igual a um.

6.1.3 Ângulo de borda entre as faces

O ângulo de borda (*edge angle*) é aquele existente entre duas faces que se encontram em uma aresta do hexaedro. O ângulo ideal entre as faces de um hexaedro é 90° . Para faces curvas, calcula-se o ângulo entre as normais das faces. O valor máximo do ângulo de borda para cada elemento é dado por

$$\text{valor máximo do ângulo de borda} = \text{Max} (90^\circ - \alpha_i) . \quad (114)$$

onde i varia de 1 ao número de bordas do hexaedro (12 ao todo) e α_i é o ângulo entre duas faces do mesmo (Fig.26). O valor limite sugerido pelo PATRAN para o ângulo de borda é 30° .

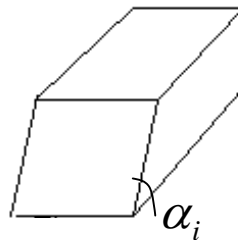


FIGURA 26 - Ângulo α_i entre duas faces adjacentes

6.1.4 Ângulo de obliquidade das faces

Testa-se cada face de um hexaedro como se ela fosse um elemento quadrilátero. Para calcular o ângulo de obliquidade das faces (*face skew angle*) do quadrilátero cria-se um sistema de coordenadas de referência pela bissetriz das quatro arestas (*edges*). A origem do sistema é a dada pela média das coordenadas dos vértices. O eixo x vai da origem à bissetriz da aresta 2. O eixo z está na direção do produto vetorial do eixo x com o vetor da origem à bissetriz da aresta 3. O eixo y está na direção do produto vetorial dos eixos x e z (Fig. 27).

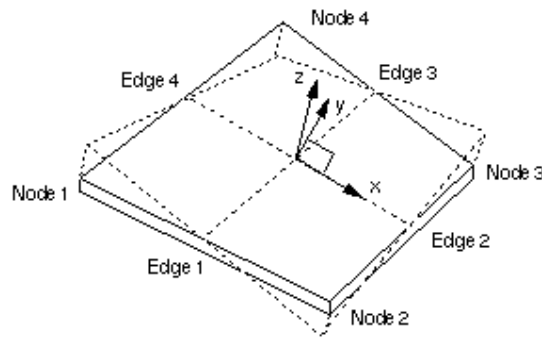
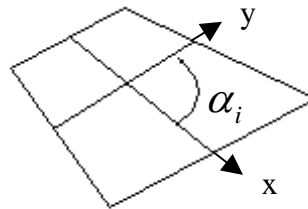


FIGURA 27 - Sistema de coordenadas do elemento

O ângulo α_i é medido entre os eixos x e y (Fig. 28).

FIGURA 28 - Ângulo de obliquidade (α_i)

O ângulo de obliquidade de um hexaedro (valor máximo entre as faces) é dado por

$$\hat{\text{ângulo de obliquidade do hexaedro}} = \text{Max} (90^\circ - \alpha_i). \quad (115)$$

O valor limite sugerido pelo PATRAN para o ângulo de obliquidade é 30° . Um quadrado tem $\alpha_i=90^\circ$ e ângulo de obliquidade igual a zero.

6.1.5 Ângulo de empenamento das faces

Testa-se cada face de um hexaedro como se ela fosse um elemento quadrilátero. Para calcular o ângulo de empenamento das faces quadriláteras (*face warp angle*) utiliza-se um sistema de coordenadas de referência similar ao do ângulo de obliquidade (seção 6.1.4). A normal ao plano da face está na direção do eixo z. Cada vértice do quadrilátero estará a uma distância "h" do plano da face. O comprimento de cada meia-aresta é medido e o menor comprimento é chamado de "l". O ângulo de empenamento θ é o arco-seno da razão da altura projetada "h" e "l" (Fig. 29)

$$\theta = \arcsen\left(\frac{h}{l}\right). \quad (116)$$

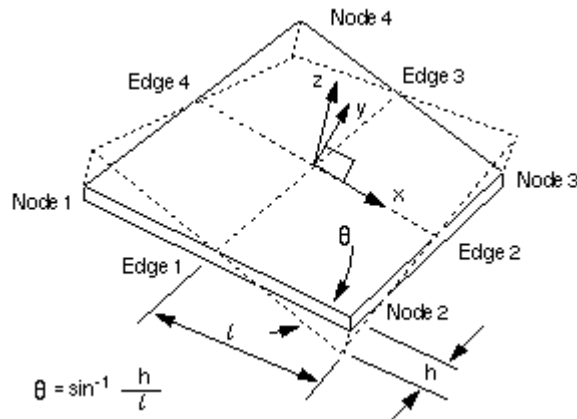


FIGURA 29 - Ângulo de empenamento (θ) de um quadrilátero

Um elemento plano tem ângulo de empenamento igual a zero. O ângulo de empenamento de um hexaedro é o maior entre os ângulos θ de suas faces. O valor limite sugerido pelo PATRAN para o ângulo de empenamento é 7° .

6.1.6 Razão de afilamento das faces

Testa-se cada face de um hexaedro como se ela fosse um elemento quadrilátero. Cada quadrilátero é dividido em quatro triângulos. A área dos triângulos é calculada e somada. A razão da área do menor triângulo com a área total é a razão de afilamento (*face taper ratio*) (Fig. 30)

$$\text{Razão de afilamento} = \frac{4a_{\text{menor}}}{a1 + a2 + a3 + a4}. \quad (117)$$

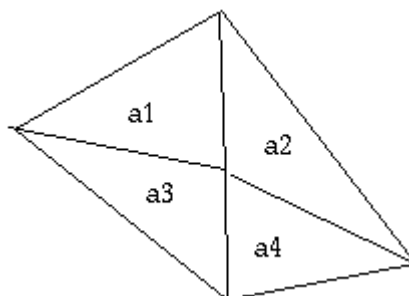


FIGURA 30 - Razão de afilamento de um quadrilátero

O menor valor obtido entre as faces é tomado como a razão de afilamento do hexaedro. O valor limite sugerido pelo PATRAN para a razão de afilamento é 0,8. Um quadrado tem razão de afilamento igual a um.

6.1.7 Ângulo de torção entre as faces

Primeiramente, calcula-se o ângulo de torção entre duas faces opostas (*twist angle*) de um hexaedro (Fig. 31).

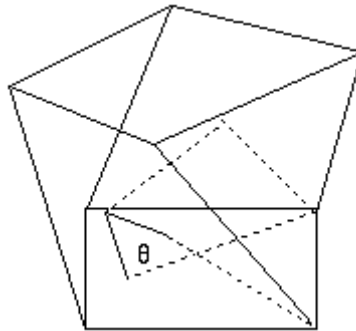


FIGURA 31 - Ângulo de torção entre duas faces opostas

Em seguida, o valor mais alto entre os ângulos calculados é tomado como o ângulo de torção do hexaedro. O valor limite sugerido pelo PATRAN para o ângulo de torção é 45°. Um cubo tem ângulo de torção igual a zero.

6.2 AVALIAÇÃO DO ERRO EM GRANDES DEFORMAÇÕES

Na revisão bibliográfica foram feitas algumas considerações com relação à avaliação do erro para casos de pequenas e grandes deformações. O indicador de fratura desenvolvido por Vaz Jr., Dutko e Owen (1998), feito para problemas de grandes deformações, foi escolhido para implementação neste trabalho por conseguir capturar a progressão da deformação plástica e indicar zonas de possível falha do material. O que se deseja com este indicador é: verificar a evolução do mesmo ao longo da análise, para possibilitar a comparação do desempenhos das formulações LA e LEA; empregá-lo como indicador de remalhamento, apontando as zonas que devem possuir uma malha mais refinada.

Não se vai utilizar o valor do erro para prever o tamanho do elemento que deve ser usado para minimizá-lo. Por isso, não é necessário efetuar o cálculo da projeção e suavização do erro, executados tanto no estimador de erros de Zienkiewicz e Zhu (1987) como no estimador de Vaz Jr., Dutko e Owen (1998). Além disso, não existe ainda uma avaliação matemática criteriosa da validade dos estimadores de erro para problemas elastoplásticos, sendo mais prudente chamá-los de indicadores de remanejo de malhas.

O indicador de remanejo de malhas utilizado é a taxa do indicador de fratura, \dot{I}^φ , dada pela expressão

$$\dot{I}^\varphi = \varphi \dot{\bar{E}}^p, \quad (118)$$

onde

$$\dot{\bar{E}}^p = \frac{\partial \bar{E}^p}{\partial t} \quad (119)$$

é a taxa de deformação plástica equivalente⁴. Numericamente, esta taxa é obtida pela equação

$$\dot{\bar{E}}^p = \frac{\Delta \bar{E}^p}{\Delta t}, \quad (120)$$

⁴ A deformação plástica equivalente, \bar{E}^p , é calculada pela expressão $\bar{E}^p = \sqrt{\frac{2}{3} E_{ij}^p E_{ij}^p}$, onde E_{ij}^p é o tensor de deformação plástica.

onde $\Delta \bar{E}^p$ é a variação da deformação plástica no intervalo de tempo Δt . O parâmetro φ em (118) é obtido a partir da integração desacoplada do modelo de dano contínuo de Lemaître (1985) e é calculado como

$$\varphi = \frac{(\bar{\sigma})^2}{2E} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{p}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right], \quad (121)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente de von Mises⁵, ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de elasticidade e p é a pressão. O indicador \dot{I}^φ é calculado para cada nó da malha, utilizando os valores nodais de $\dot{\bar{E}}^p$, $\bar{\sigma}$ e p . A fórmula recursiva para a avaliação de \dot{I}^φ , em forma de taxa, em um processo incremental no passo $j+1$ é

$${}^{j+1}\dot{I}^\varphi = {}^j\dot{I}^\varphi + {}^{j+1}\varphi {}^{j+1}\dot{\bar{E}}^p = {}^j\dot{I}^\varphi + {}^{j+1}\varphi \frac{\Delta {}^{j+1}\bar{E}^p}{\Delta t}. \quad (122)$$

⁵ A tensão equivalente de Von Mises é dada pela expressão $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$, onde s_{ij} é o tensor das componentes desviadoras das tensões de Cauchy.

7 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos utilizando os processos de realocação nodal propostos para a formulação LEA (Cap. 4). Neles, são feitos comparativos entre os resultados obtidos com as formulações LEA e LA. Além disso, sempre que possível, são colocados resultados encontrados na literatura. As técnicas de transferência de dados apresentadas (Cap. 5) também são comparadas entre si, com o intuito de verificar qual delas é a mais adequada em cada caso. Os valores de distorção e erro (Cap. 6) são utilizados como indicadores da qualidade da malha e dos resultados obtidos.

A linguagem utilizada para a implementação computacional neste trabalho é o FORTRAN. Os exemplos a seguir foram analisados em um microcomputador Pentium II 300 MHz com 128 Mb de memória RAM.

7.1 BARRA DE TAYLOR

Esta aplicação consiste em projetar um cilindro, com uma velocidade inicial, contra uma superfície rígida. O método das Diferenças Centrais é empregado para a solução do problema dinâmico. A velocidade inicial é $v_z = 227 \text{ m/s}$, e o período de observação é $80 \mu\text{s}$ ($80 \times 10^{-6} \text{ s}$). Neste momento, quase toda a energia cinemática inicial já está dissipada como trabalho plástico. Os parâmetros do material são:

Módulo de elasticidade	$E = 117 \text{ GPa}$
Lei constitutiva elastoplástica com endurecimento isótropo linear, cujos dados são:	
-Tensão de escoamento	${}^0\sigma^v = 400 \text{ MPa}$
-Módulo de endurecimento linear	$h = 100,85543 \text{ MPa} \quad \bar{\sigma} = {}^0\sigma^v + h \bar{E}^p$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,35$
Densidade	$\rho = 8.930 \text{ kg/ m}^3$

Devido à dupla simetria, apenas $\frac{1}{4}$ do cilindro é modelado (Fig. 32b). As condições de contorno nos planos de simetria são: restrição na direção X na face YZ do cilindro e restrição

na direção Y na face XZ do mesmo. Além disso, uma superfície rígida no plano XY (na coordenada $Z=0$) com restrição em Z é usada para o impacto.

A altura e o raio do cilindro são 32,4mm e 3,2mm respectivamente. A malha tem 1.157 nós e 1.080 elementos hexaédricos de 8 nós. A Fig. 32 mostra a barra de Taylor na configuração inicial.

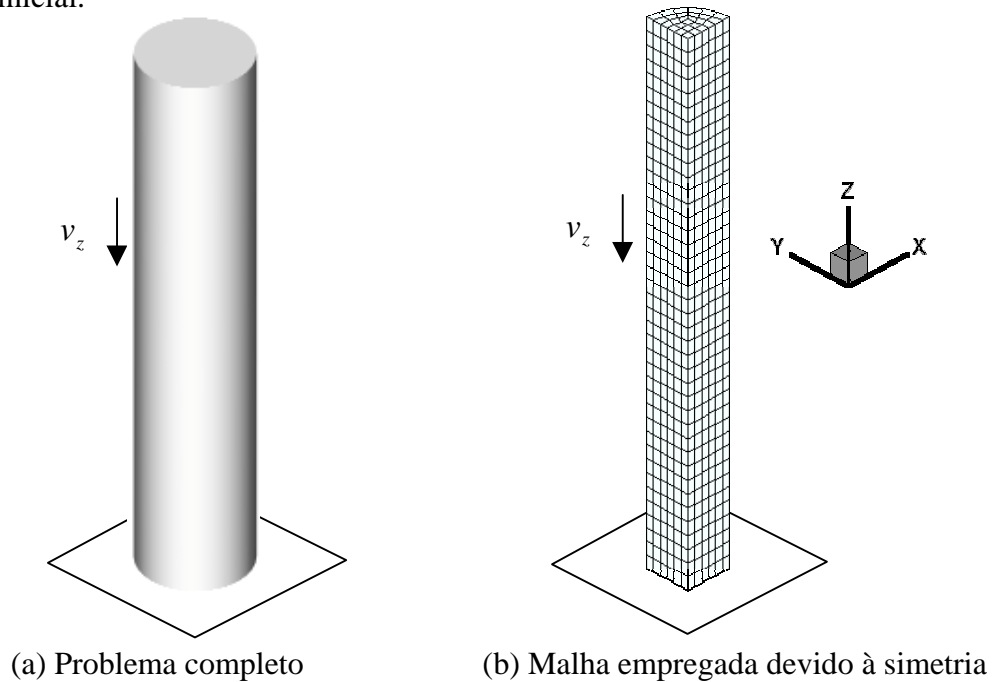


FIGURA 32 - Configuração inicial da barra de Taylor

Na Fig. 33 é mostrada a malha deformada nos tempos 20, 40, 60 e 80 μs utilizando a formulação LA.

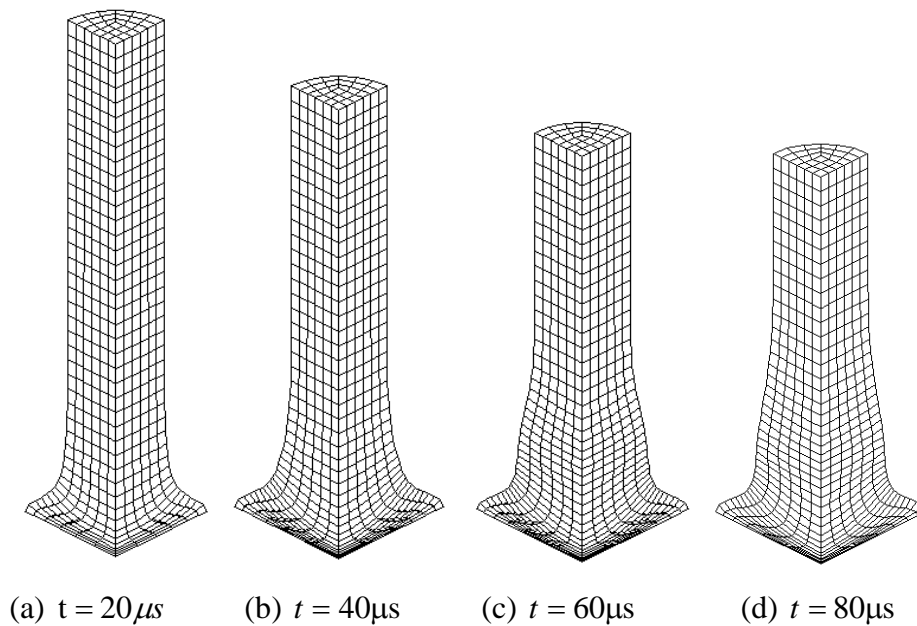


FIGURA 33 - Malha deformada da barra de Taylor na formulação LA

A malha deformada final completa (com espelhamento) na formulação LA está colocada na Fig. 34.

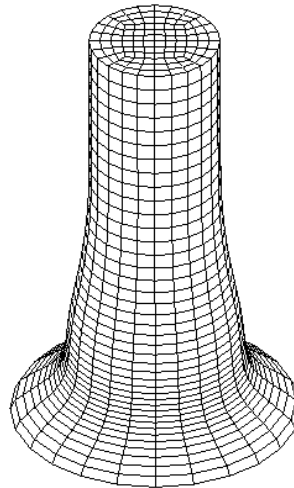


FIGURA 34 - Malha deformada final na formulação LA

Para a formulação LEA, serão analisados vários casos com o intuito de comparar os resultados obtidos com as diferentes técnicas de realocação nodal e de transferência de dados.

7.1.1 Formulação LEA - Caso 1

Primeiramente, é utilizado o MMP (seção 4.1.2) para a realocação nodal em superfícies planas. A transferência de dados é realizada, em cada passo de tempo, através do desenvolvimento das tensões em série de Taylor (seção 5.2.1). Na Fig. 35 é mostrada a malha deformada nos tempos 20, 40, 60 e 80 μs .

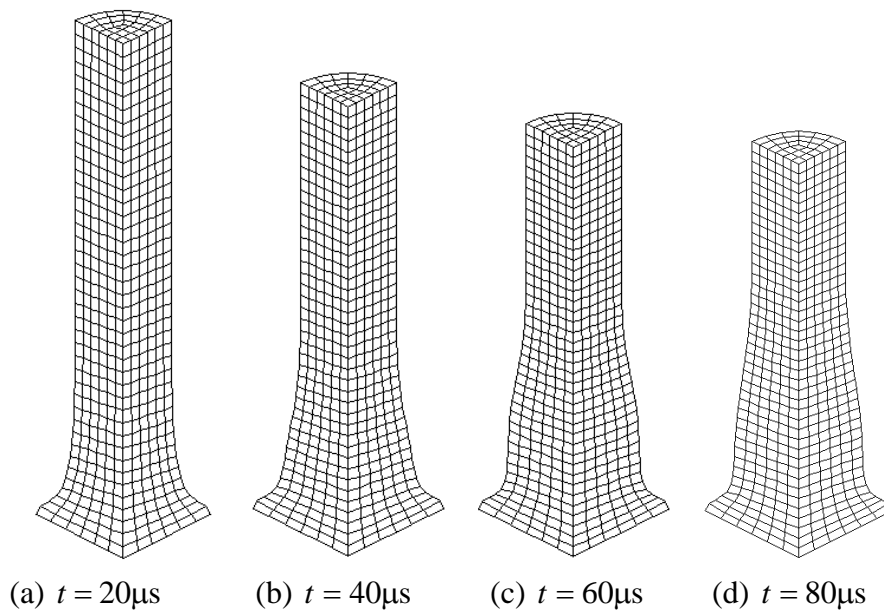


FIGURA 35 - Malha deformada da barra de Taylor na formulação LEA

A malha deformada final completa (com espelhamento) na formulação LEA está colocada na Fig. 36.

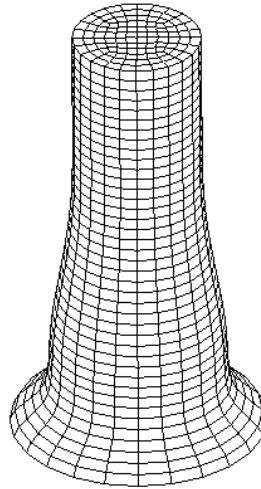


FIGURA 36 - Malha deformada final na formulação LEA

A Fig. 37 mostra a vista ortográfica do plano YZ (plano de simetria) com a malha final deformada ($t = 80\mu\text{s}$) e os valores de deformação plástica equivalente (\bar{E}^p) para as formulações LA e LEA.

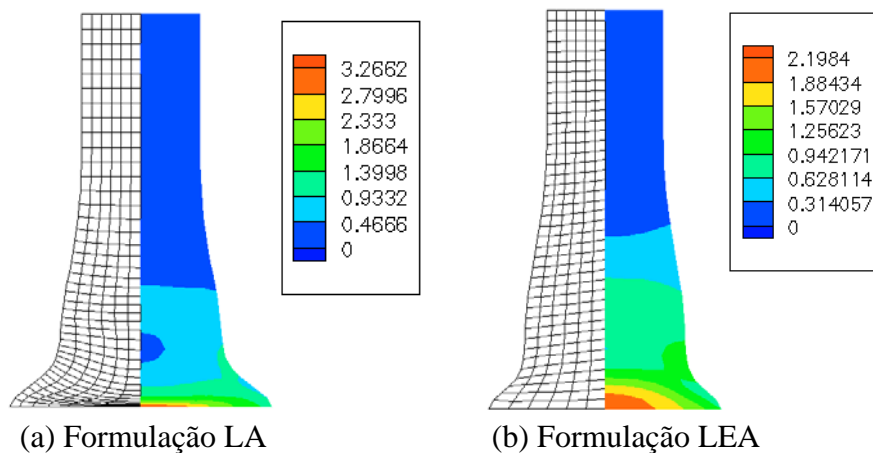
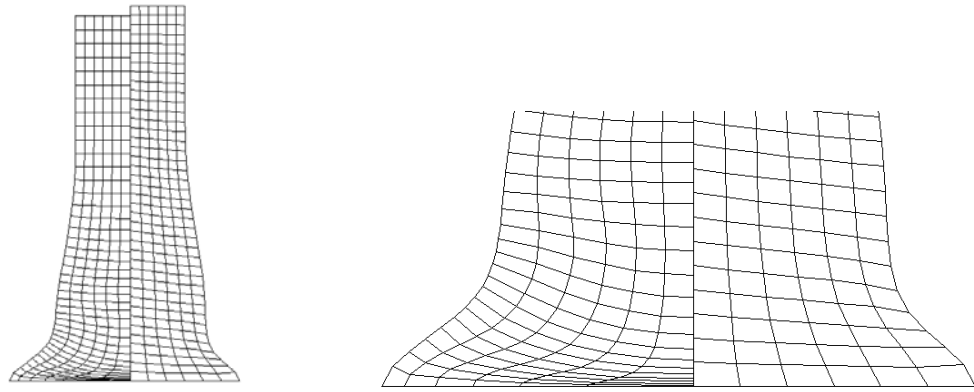


FIGURA 37 - \bar{E}^p e malha deformada final nas formulações LA e LEA- vista plana YZ

Observando as Fig. 37(a) e 37(b), nota-se que a zona que possui altos valores de \bar{E}^p é a parte inferior do cilindro. Nesta zona, os elementos encontram-se bastante distorcidos na formulação LA, mas têm uma forma razoável na formulação LEA. Os valores máximos de \bar{E}^p são mais baixos na formulação LEA. Para comparar a malha final em ambas as formulações, a Fig. 38 mostra a malha LA final lado-a-lado com a malha LEA final. Uma ampliação na parte inferior do cilindro é apresentada na Fig. 38(b).

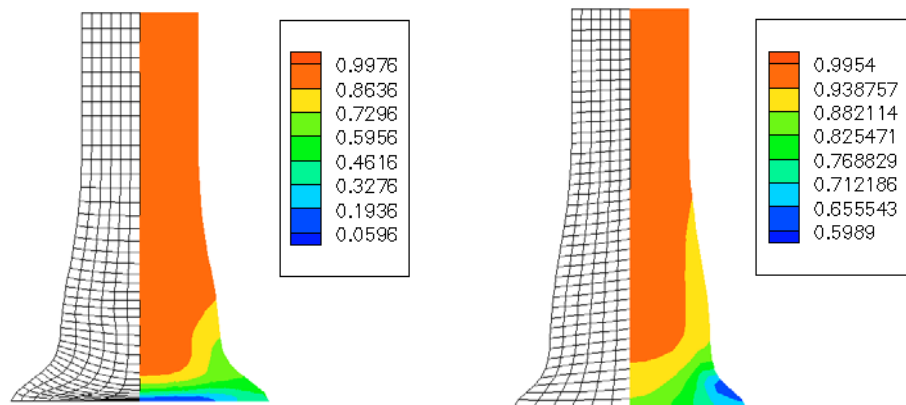


(a) Vista do cilindro inteiro

(b) Ampliação na parte inferior do cilindro

FIGURA 38 - Vista do plano YZ das malhas finais nas formulações LA e LEA

Comparando as malhas na Fig. 38, nota-se a diminuição da distorção da malha na formulação LEA. Isto pode ser verificado também através da visualização do fator de qualidade Q (Eq. (112)). Para isso, o valor de Q de cada elemento é transferido para os nós da malha, através da média do seu valor nos elementos que concorrem em cada nó (Fig. 39).

(a) Q na Formulação LA(b) Q na Formulação LEAFIGURA 39 - Fator de qualidade Q nas formulações LA e LEA

Algumas figuras dos critérios de avaliação da distorção disponíveis no programa PATRAN são mostradas a seguir. O fator de obliquidade das faces (seção 6.1.4) para as formulações LA e LEA está colocado na Fig. 40. O valor limite de 30° , sugerido pelo PATRAN, é utilizado. Para a razão de aspecto (seção 6.1.2) (Fig. 41), o valor limite utilizado é 5,0.

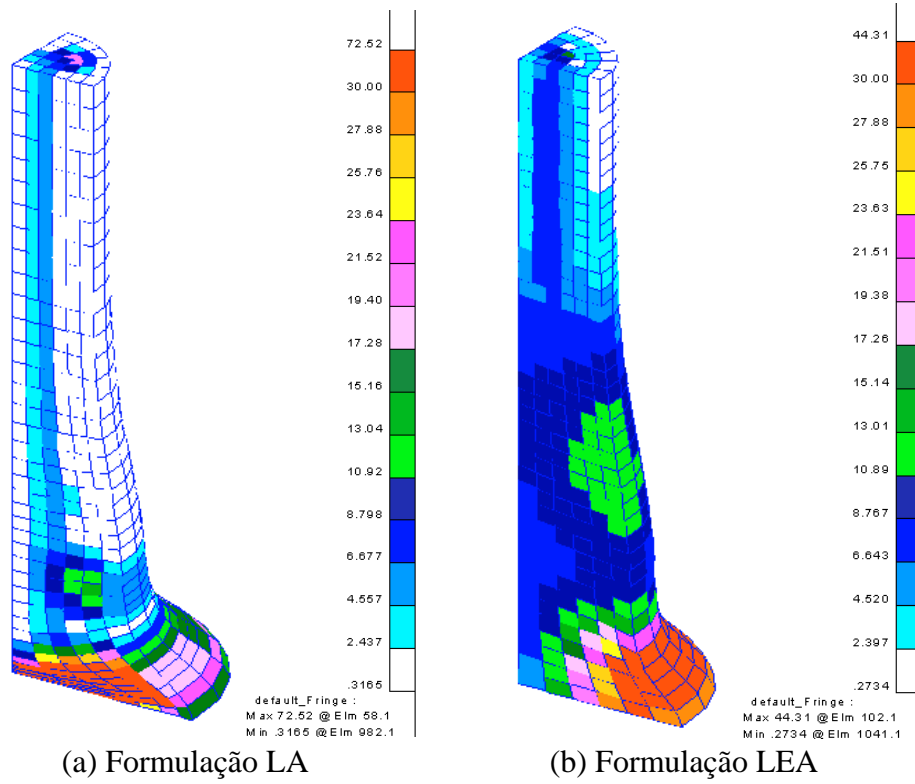


FIGURA 40 - Fator de obliquidade das faces

A razão de aspecto (seção 6.1.2) para as formulações LA e LEA está colocada na Fig. 41.

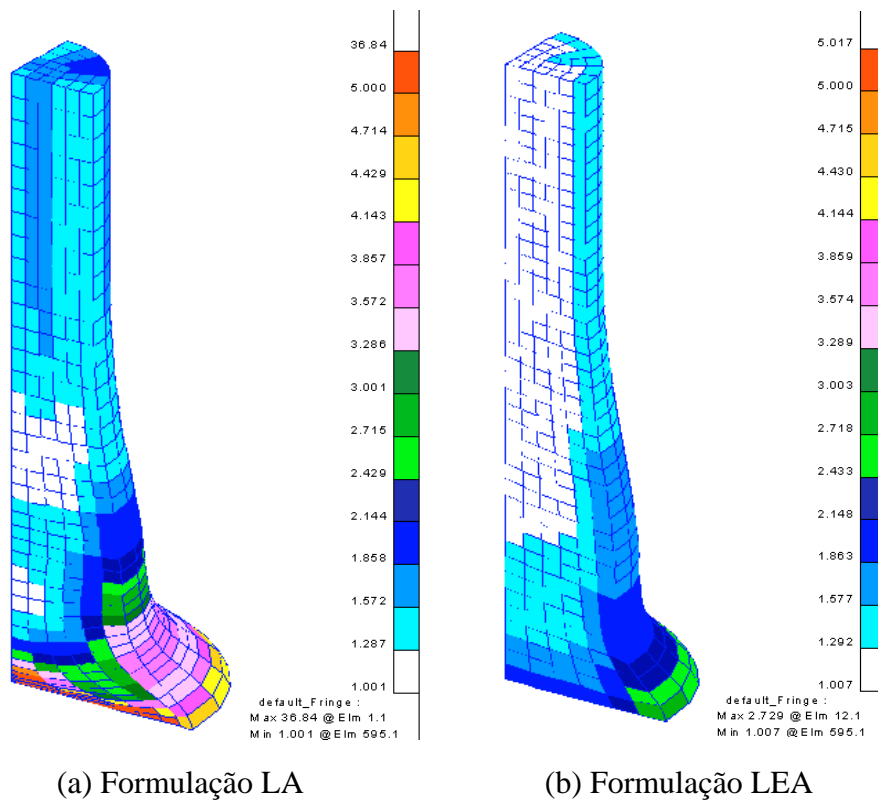


FIGURA 41 - Razão de aspecto

Na Fig. 40 pode-se observar que o valor máximo do fator de obliquidade na formulação LA é 72,52 e na formulação LEA é 44,31, o que mostra que a malha na formulação LEA está bem menos distorcida. A razão de aspecto (Fig. 41) também indica isto, visto que na formulação LA o seu valor máximo é 36,84 e na formulação LEA é 2,729. Os valores dos outros critérios de distorção do PATRAN estão colocados na Tab. 1.

A Fig. 42 apresenta um gráfico onde está representada a variação de volume ao longo do tempo em (%) para a formulação LA e para a formulação LEA, com o objetivo de verificar se as técnicas de realocação nodal conseguem manter inalterado o volume da peça em relação à formulação LA. Deve-se lembrar que as deformações plásticas não causam variação de volume, apenas as elásticas.

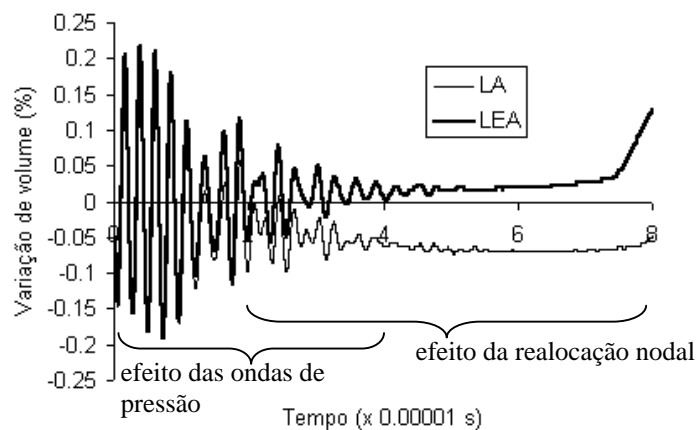


FIGURA 42 - Gráfico tempo x variação de volume

No gráfico acima nota-se que a diferença da variação de volume entre as formulações LA e LEA é pequena, o que indica uma boa precisão para a formulação LEA. No início do processo a variação de volume é causada pela pulsação devido às ondas de pressão que batem na superfície externa da barra. Esta pulsação tem uma forma próxima a uma vibração amortecida. Uma vez cessado o efeito das ondas de pressão, tem-se o efeito da realocação nodal sozinha sobre a variação de volume, o qual é pequeno.

A variação de volume em (%) no passo de tempo j é calculada pela expressão

$$\Delta^j V = 100 \left(\frac{jV^T}{{}^0V^T} - 1 \right), \quad (123)$$

onde ${}^jV^T$ e ${}^0V^T$ são o volume total no passo j e no início da análise.

A Tab. 1 apresenta um resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA.

TABELA 1 - Resultados da barra de Taylor para as formulações LA e LEA

Item	Configuração inicial	Config. final - Formulação	
		LA	LEA
Nº total de passos	-	7.878	1.940
Tempo de CPU (min) ⁶	-	83	25
Raio max. (mm)	3,200	7,100	6,3838
Altura do cilindro (mm)	32,400	21,440	22,065
Volume (mm ³)	257,54	257,40	257,84
\bar{E}^p máxima	0	3,2662	2,1984
Q médio	0,9186	0,8190	0,9368
Q máximo	0,9564	0,9990	0,9955
Q mínimo	0,8183	0,0600	0,5996
Razão de aspecto	1,8987	36,843	2,7293
Ângulo de borda (°)	0,0	0,0	0,0
Ângulo de obliquidade (°)	20,642	72,522	44,314
Ângulo de empenamento (°)	0,0	10,1506	1,4695
Ângulo de torção (°)	3,6622	53,0139	6,4370
Razão de afilamento	0,8344	0,67264	0,8044

Os valores de Q mínimo nas formulações LA e LEA são respectivamente 6% e 60%, o que mostra que a técnica de realocação é capaz de manter os elementos com uma boa forma durante toda a análise. Todos os parâmetros de distorção do PATRAN são mais favoráveis na formulação LEA.

O número de passos também mostra o efeito da diminuição da distorção, uma vez que ele decresce de 7.878 na formulação LA para 1.940 na formulação LEA. Em ambas as formulações o volume permanece aproximadamente o mesmo.

Como o incremento de tempo no método das Diferenças Centrais é muito pequeno, aproximadamente 4×10^{-8} s, a mudança de posição nodal em cada passo de tempo durante a realocação também é pequena. Em consequência dessa proximidade entre as malhas LA e realocada, os resultados obtidos com a formulação LEA, usando ou não o desenvolvimento em séries de Taylor para a transferência de dados, são praticamente os mesmos.

Deve-se cuidar para não empregar o desenvolvimento em séries de Taylor se a realocação nodal não é realizada frequentemente, visto que esta técnica só é válida se os

⁶ Sem realizar a transferência de dados. Tempo medido em um PC Pentium II 300 MHz com 128 Mb RAM.

pontos de Gauss de um elemento da malha realocada se encontram no mesmo elemento da malha LA.

Na Tab. 2, os resultados obtidos com a análise 3D neste trabalho são comparados com análises de outros autores.

TABELA 2 - Comparação dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA com análises de outros autores

Autor	Formulação	Passos	Raio máx. (mm)	Altura final (mm)	\bar{E}^p máxima
Este trabalho 3D	LA	7.878	7,1	21,44	3,26
	LEA	1.940	6,38	22,06	2,20
Ponthot 2D(1995)	LA	9.496	7,13	21,43	3,04
	LEA	1.466	6,51	21,87	2,23
Liu 2D(1988)	LA	8.000	7,15	21,42	-
	LEA	2.000	6,87	21,53	-
Donea et al., citado por Ponthot (1995, p.ix.54)	LA	31.700	7,17	21,42	-
	LEA	1.900	7,13	21,49	-
Hallquist 2D (1982)	LA	-	7,127	21,47	-
Zienkiewicz 3D (1998)	LA	-	7,11	21,48	-
Hallquist 2D (1979)	LA	-	7,068	21,47	-
Benson 2D(1989)	LA	9.565	-	-	3,03
	LEA	4.202	-	-	2,93

Da Tab. 2, observa-se que os resultados obtidos na análise 3D realizada são compatíveis com os resultados de análises encontrados na literatura. O número de passos, o raio máximo e a máxima \bar{E}^p são menores na formulação LEA em todos os trabalhos apresentados acima. A altura final, o raio máximo e a máxima \bar{E}^p obtidos têm valores próximos aos encontrados na literatura.

7.1.2 Formulação LEA - Caso 2 - Realocação nodal iterativa

Apesar de no Caso 1 a mudança de posição nodal ser pequena em cada passo de tempo e a malha ser de boa qualidade, é interessante verificar se esta malha poderia ainda ser melhorada. Para isso, um processo iterativo de realocação nodal (seção 4.1.1) é empregado em cada passo de tempo, até que a maior diferença relativa entre as normas euclidianas das coordenadas dos nós em duas iterações subsequentes seja menor que uma tolerância, cujo valor padrão é $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$.

O número de passos de tempo desta análise é 1.940, o mesmo número do Caso 1. O valor de \bar{E}^p máxima sofre uma modificação muito pequena, passando de 2,1984 para 2,1997. Os valores do fator de qualidade Q também são praticamente os mesmos, Q máximo é 0,9955, Q médio é 0,9347 e Q mínimo é 0,5993. O volume permanece inalterado, 257,84 mm³.

Como o passo de tempo é muito pequeno, aproximadamente 4×10^{-8} s, no esquema de integração explícito empregado e a realocação nodal é efetuada em cada passo de tempo, a maior diferença entre as normas euclidianas dos nós está abaixo da tolerância em quase todos os passos de tempo. Sendo assim, o processo iterativo não traz modificações significativas em relação aos resultados do Caso 1 neste exemplo.

7.1.3 Formulação LEA - Caso 3 - Algoritmo de busca e interpolação

Conforme visto na seção 5.2.2, a malha realocada pode não estar próxima da malha LA se a técnica de realocação nodal não é aplicada frequentemente. Neste caso, faz-se necessário utilizar o algoritmo de busca e interpolação para a transferência de dados. Esta é a situação analisada nesta seção. As técnicas de realocação nodal são aplicadas a cada 20 passos de tempo. A Fig. 43 mostra os resultados de \bar{E}^p e a malha deformada final utilizando a formulação LEA.

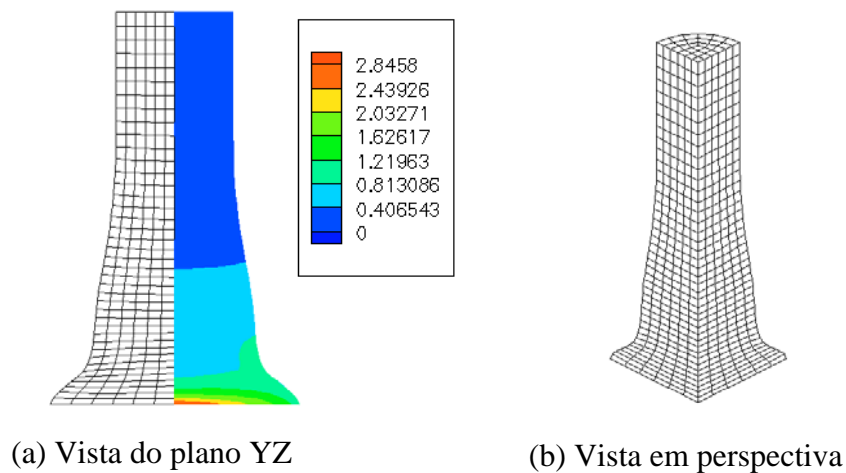


FIGURA 43 - Caso 3: \bar{E}^p e malha deformada final na formulação LEA

Neste caso ocorrem nós externos realocados fora do contorno LA, sendo utilizada a técnica de projeção dos mesmos sobre o contorno LA (seção 5.2.2.2) para se realizar a transferência de dados. Pela distribuição dos valores de \bar{E}^p na Fig. 43, nota-se que o algoritmo de busca proposto para a transferência de dados apresenta bons resultados.

O número de passos de tempo desta análise é 1.957 e o volume final é 257,4678 mm³. A Fig. 44 apresenta o gráfico da variação de volume ao longo do tempo em (%) para a formulação LA e para a formulação LEA.

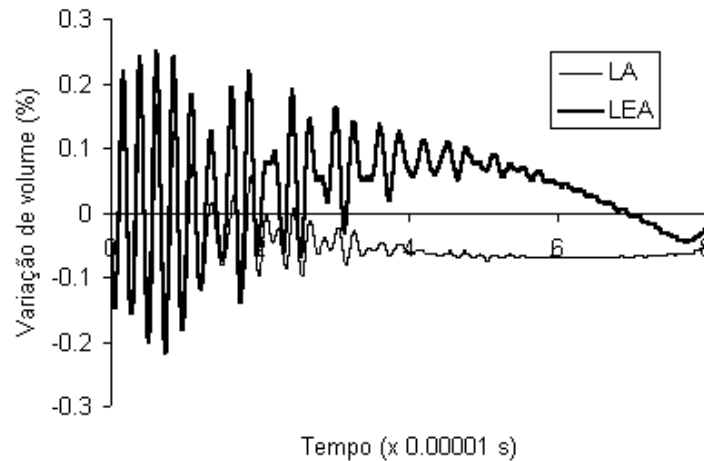


FIGURA 44 - Gráfico tempo x variação de volume

Como no caso 1, observa-se que a diferença da variação de volume entre as formulações LA e LEA é pequena.

Para a formulação LEA, o fator de qualidade Q médio é 0,8784, Q máximo é 0,9961 e Q mínimo é 0,4693. O raio máximo e a altura final são 6,8323 mm e 21,584 mm respectivamente. Os resultados obtidos com o fator Q indicam um aumento da distorção da malha em relação ao Caso 1, fato esperado devido à realocação ser realizada menos frequentemente. Os valores de \bar{E}^p também sofreram modificações, sendo que o máximo passou de 2,1984 para 2,8458.

Os resultados obtidos se encontram no meio termo entre o Caso 1 e a formulação LA. Isto acontece porque a realocação nodal é feita a cada 20 passos LA, estando os elementos mais distorcidos, e se aproximando da forma da malha LA.

Deve-se tomar o cuidado de não empregar a técnica de inversão paramétrica quando a realocação é realizada muito frequentemente, porque esta técnica ocasiona uma perda de precisão dos resultados devido à passagem dos dados dos pontos de Gauss para os nós e também na interpolação dos dados dos tetraedros da malha LA para os nós realocados. Além disso, as funções de interpolação utilizadas para as tensões são as mesmas dos deslocamentos, o que por si só já é uma aproximação.

7.1.4 Formulação LEA - Caso 4 - MINQ em superfícies livres e planas

Este caso se diferencia do primeiro apenas na técnica de realocação nodal utilizada em superfícies planas. Aqui, o MINQ (seção 4.2) é empregado tanto em superfícies livres como planas, possibilitando um comparativo entre ele e o MMP em superfícies planas.

As diferenças deste caso em relação ao Caso 1 são pequenas. O número de passos baixou de 1.940 para 1.938, o volume total é passado de 257,84 para 257,86 mm³. Os valores do fator de qualidade Q também são praticamente os mesmos, Q máximo é 0,9979, Q médio é 0,9297 e Q mínimo é 0,5628.

A Fig. 45 mostra os resultados de \bar{E}^p e a malha deformada final utilizando a formulação LEA.

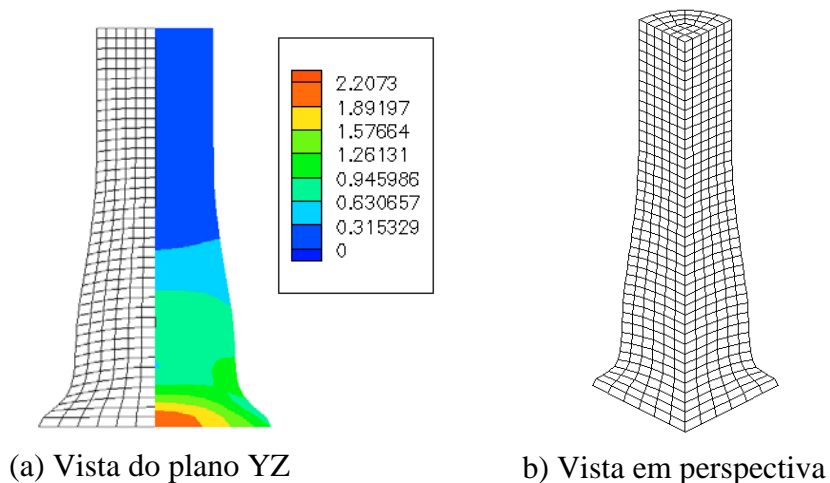


FIGURA 45 - Caso 4: \bar{E}^p e malha deformada final na formulação LEA

Devido à grande proximidade dos resultados do Caso 4 com o Caso 1, o MINQ apresenta-se como uma alternativa mais interessante, em termos computacionais, que o MMP para superfícies planas. Isto porque o MINQ também se aplica a superfícies livres, podendo ser sempre utilizado, sem a necessidade de verificar, como no MMP, se as superfícies são planas (seção 4.1.2).

7.2 PUNÇIONAMENTO HEMISFÉRICO

Este exemplo trata do puncionamento de um cilindro metálico por uma matriz de conformação rígida hemisférica (Fig. 46a). Devido à simetria, apenas $\frac{1}{4}$ do cilindro é modelado (Fig. 46b). Um deslocamento $d_z = 50 \text{ mm}$ é aplicado à matriz rígida (punção). É empregada uma integração implícita para o problema quasi-estático. A penalidade normal para o contato deslizante é de 618 MN/m. Os parâmetros do material são:

Módulo de elasticidade $E = 206 \text{ GPa}$
 Coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Lei constitutiva elastoplástica com endurecimento isótropo linear, cujos dados são:

-Tensão de escoamento $\sigma^v = 346,4 \text{ MPa}$
 -Módulo de endurecimento linear $h = 138 \text{ MPa}$ $\bar{\sigma} = \sigma^v + h \bar{E}^p$

A altura e o raio do cilindro são 100mm. O raio da matriz de contato esférica é 50mm. O número de nós é 1.521 e o de elementos 1.176 (14 x 14 x 8 subdivisões nas direções X, Y e Z respectivamente - Fig. 46c). As condições de contorno nos planos de simetria são: restrição na direção X na face YZ do cilindro e restrição na direção Y na face XZ do mesmo. Além disso, há uma superfície rígida no plano XY (na coordenada Z=0) com restrição em Z.

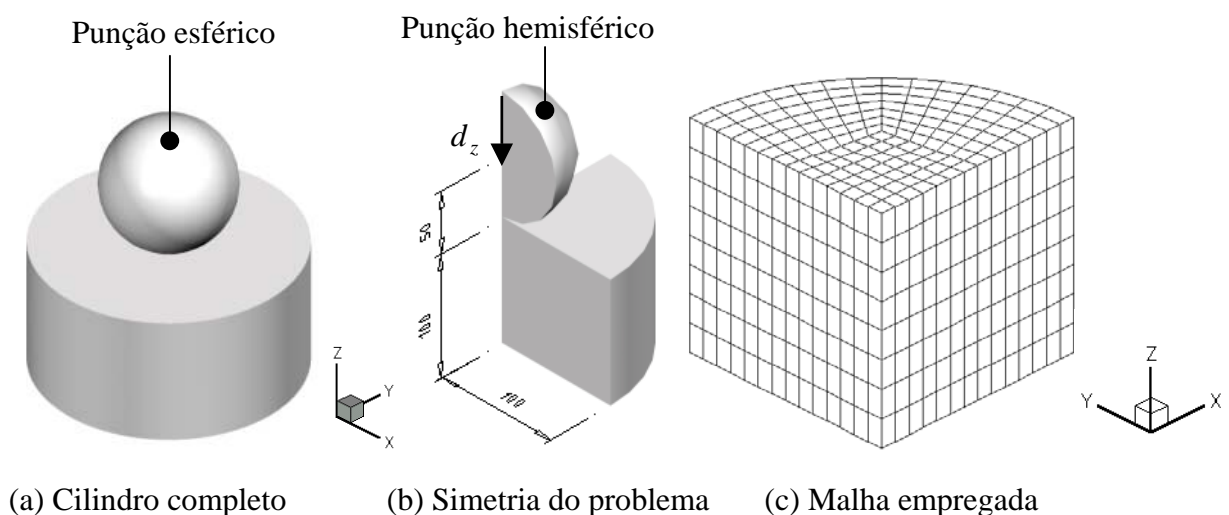


FIGURA 46 - Puncionamento hemisférico

Na Fig. 47 está colocada a malha deformada na formulação LA com 25% e 50% do deslocamento total do punção. A análise foi interrompida neste ponto devido à elevada distorção dos elementos.

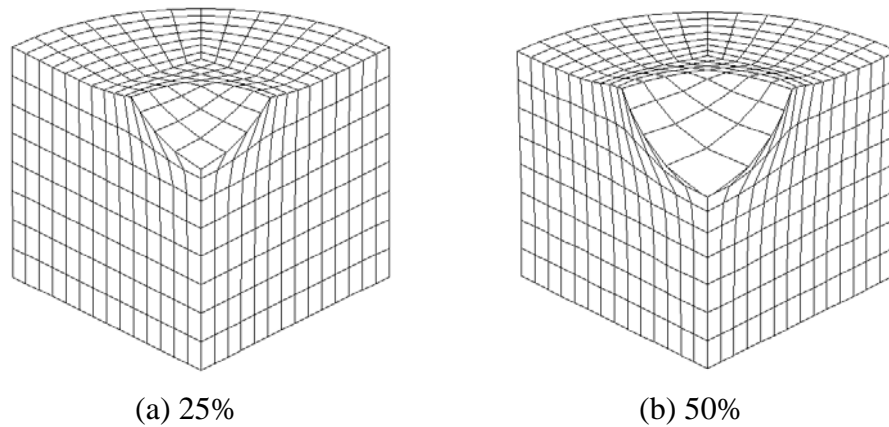


FIGURA 47 - Malha deformada em (%) do deslocamento do punção na formulação LA

7.2.1 Formulação LEA

O MMP é usado para a realocação nodal em superfícies planas. A transferência de dados é realizada, em cada passo de tempo, através do desenvolvimento das tensões em série de Taylor, aplicado após a correção da posição dos nós de contato (seção 4.3). A Fig. 48 mostra a malha deformada a 25, 50, 75 e 100% do deslocamento total do punção.

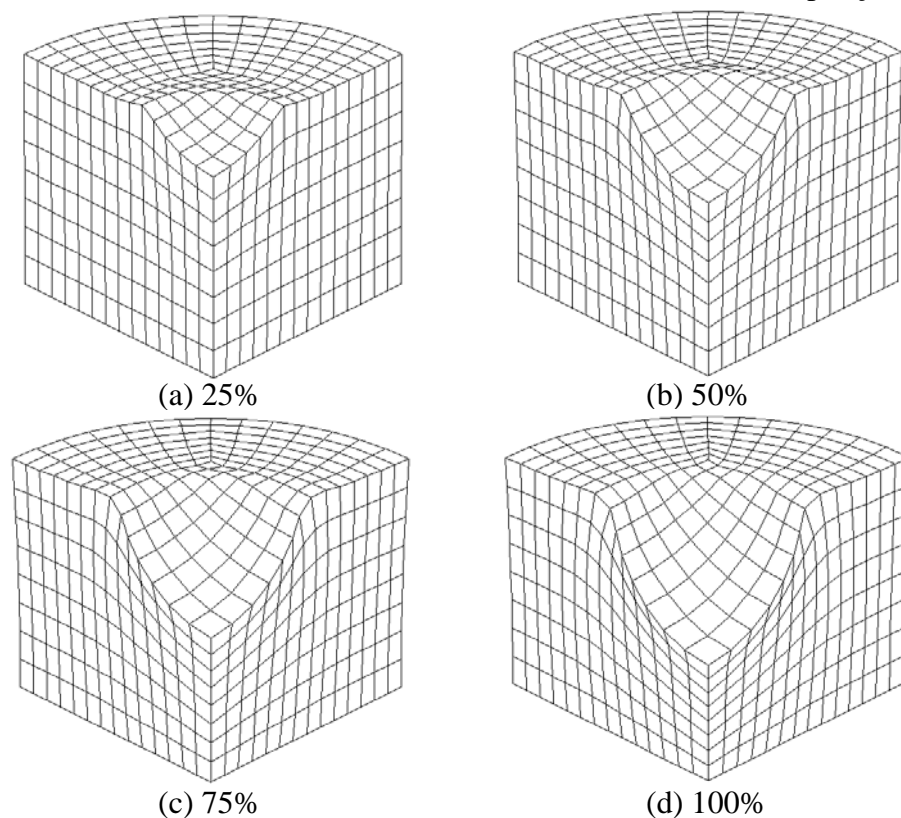


FIGURA 48 - Malha deformada em (%) do deslocamento do punção na formulação LEA

A malha deformada completa (com espelhamento) a 50% do deslocamento do punção nas formulações LA e LEA está colocada na Fig. 49.

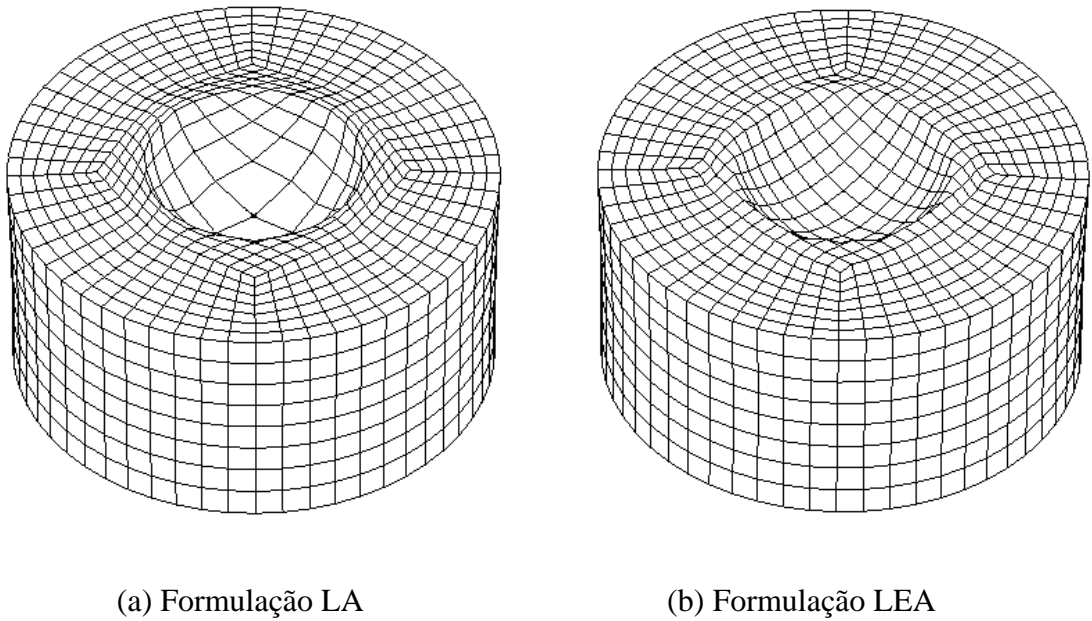


FIGURA 49 - Malha deformada a 50% do deslocamento do punção

A malha deformada completa a 100% do deslocamento do punção na formulação LEA é mostrada na Fig. 50.

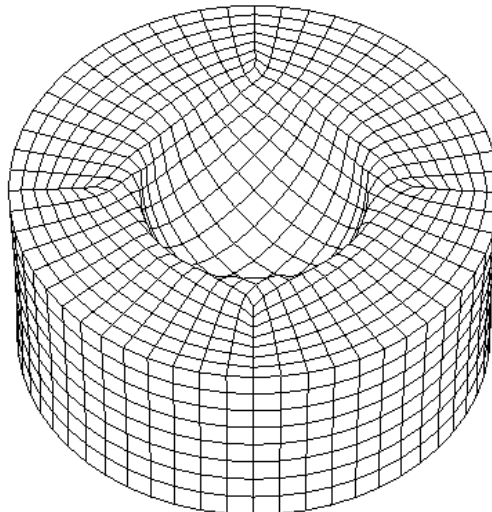
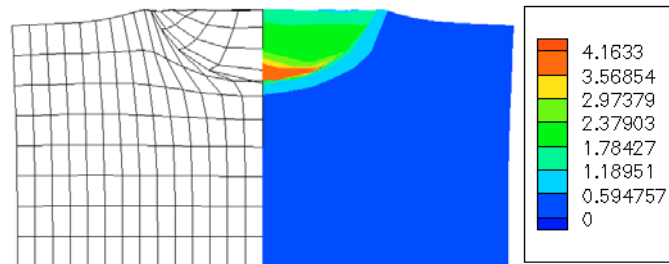
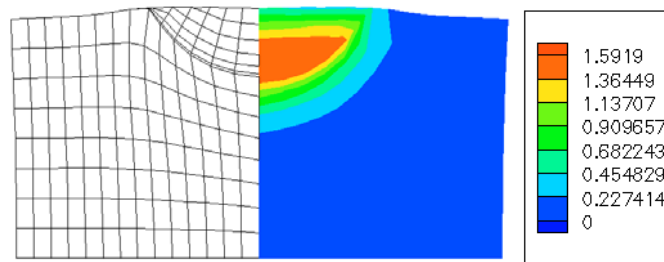


FIGURA 50 - Malha deformada a 100% do deslocamento do punção na formulação LEA

Neste problema, apenas a formulação LEA é capaz de realizar toda a análise, devido à excessiva distorção da malha na zona de contato quando se utiliza a formulação LA. A Fig. 51 mostra a vista do plano YZ com a malha deformada e os valores de \bar{E}^p para a formulação LA e LEA com 50% do deslocamento total do punção.



(a) Formulação LA



(b) Formulação LEA

FIGURA 51 - \bar{E}^p na formulação LA e LEA a 50 % do deslocamento do punção - plano YZ

Na Fig. 52 está colocada a vista do plano YZ com a malha deformada e os valores de \bar{E}^p para a formulação LEA com 100% do deslocamento total do punção.

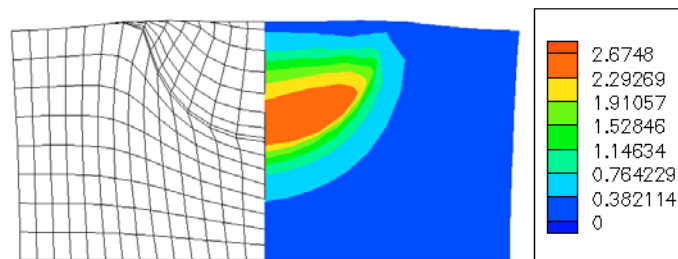
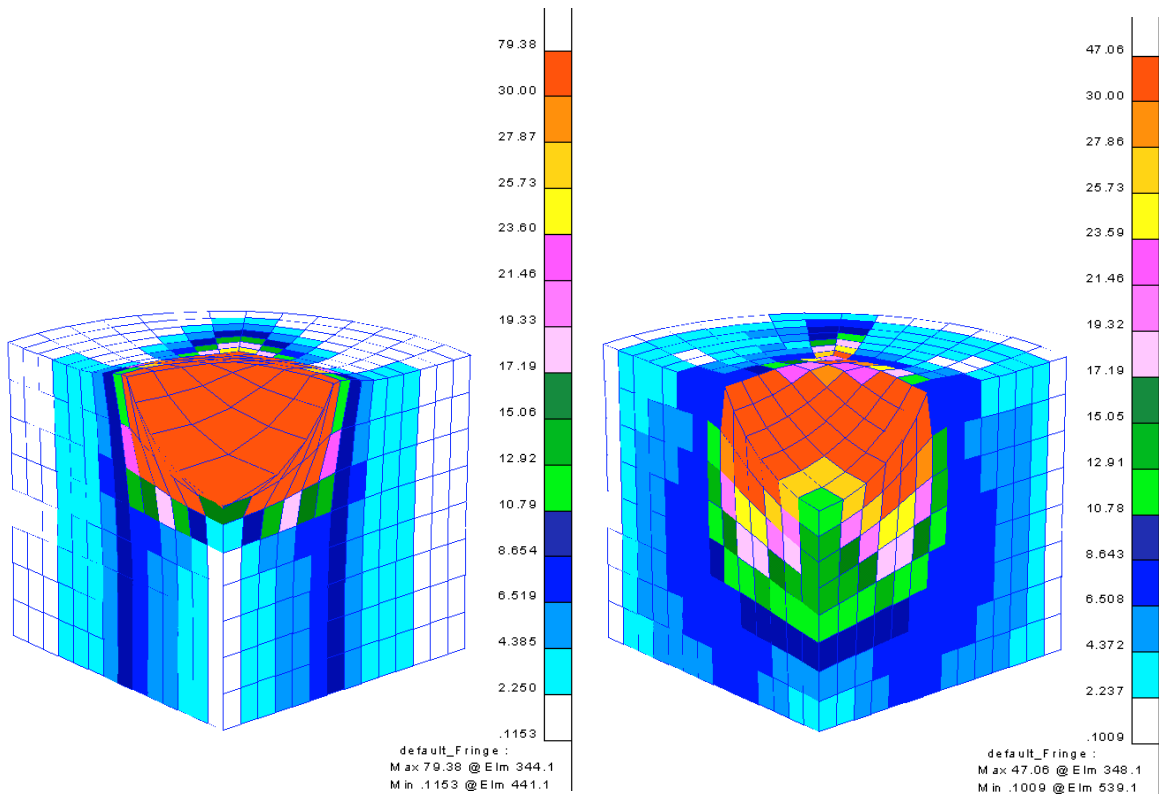


FIGURA 52 - \bar{E}^p na formulação LEA a 100 % do deslocamento do punção - plano YZ

Nas Fig. 53 e 54 está colocado o fator de obliquidade das faces (seção 6.1.4) para as formulações LA e LEA (valor limite de 30°).



(a) Formulação LA

(b) Formulação LEA

FIGURA 53 - Fator de obliquidade das faces a 50% do deslocamento do punção

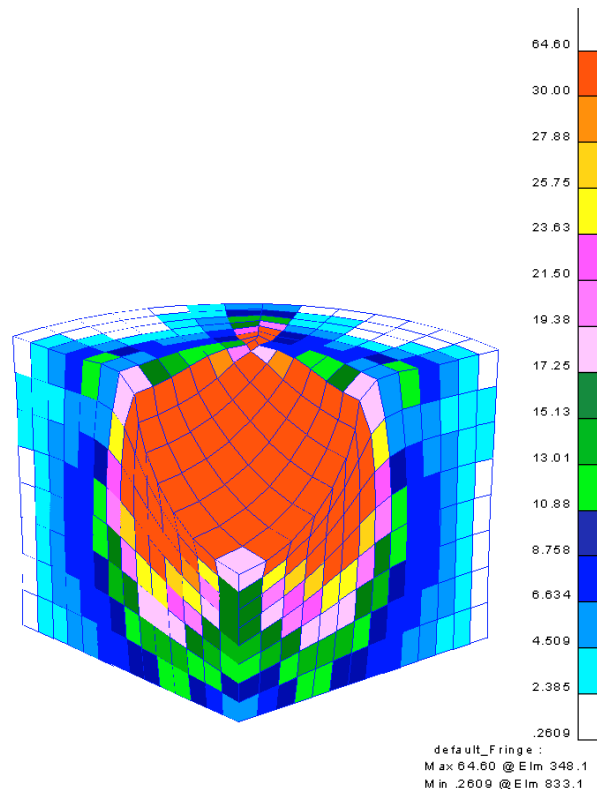


FIGURA 54 - Fator de obliquidade das faces a 100% do deslocamento do punção -
Formulação LEA

Os valores do ângulo de borda entre as faces (seção 6.1.3) são mostrados nas Fig. 55 e 56 (valor limite de 30°).

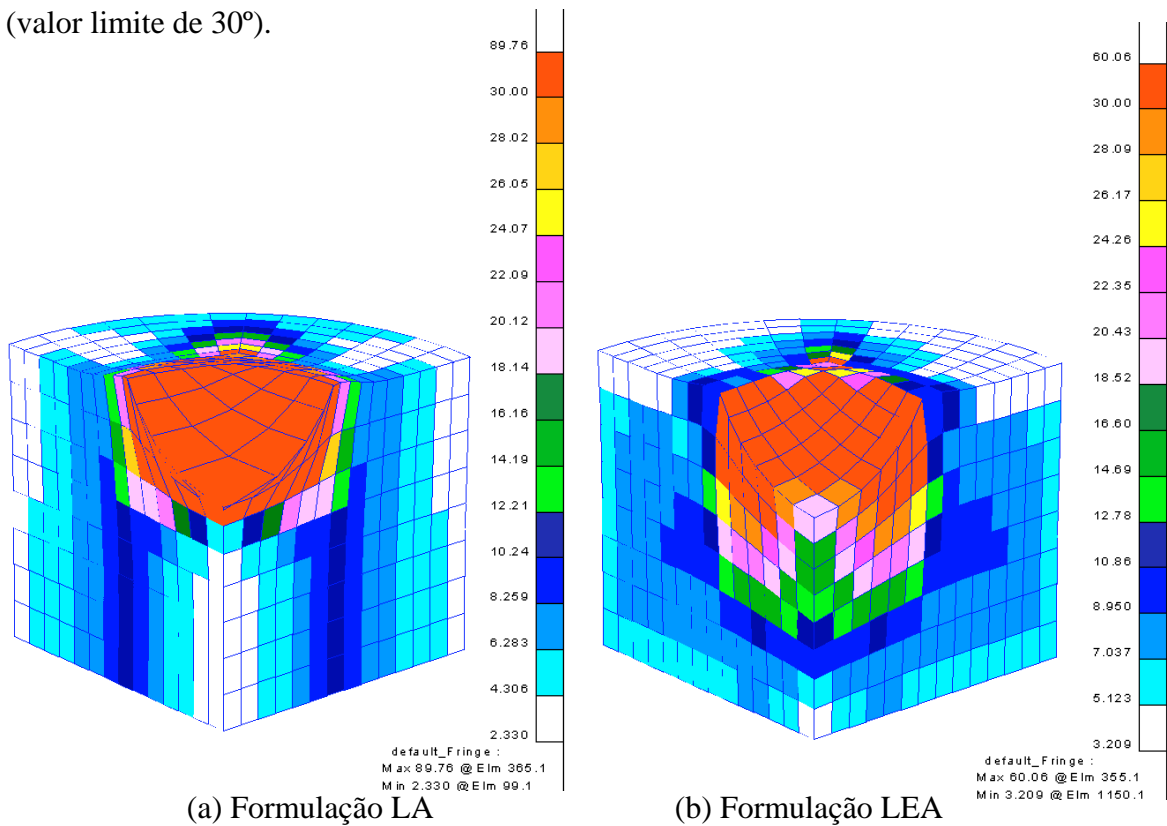


FIGURA 55 - Ângulo de borda das faces a 50% do deslocamento do punção

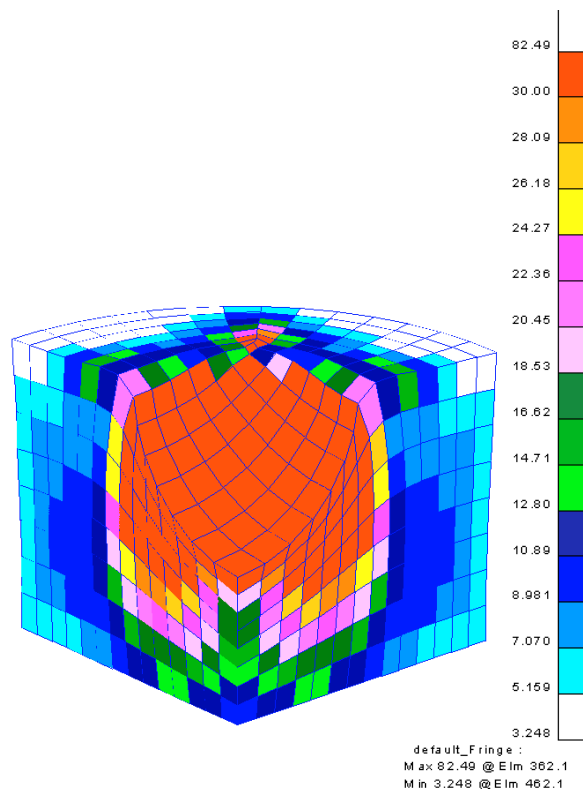


FIGURA 56 - Ângulo de borda das faces a 100% do deslocamento do punção -Formulação LEA

Das Fig. 53 a 56 pode-se observar que os resultados na formulação LEA a 50% do deslocamento do punção são melhores que os da formulação LA, tanto para o ângulo de obliquidade como para o ângulo de borda. Os dois critérios têm uma distribuição em cores similar. Por outro lado, mesmo na formulação LEA, o valor máximo ultrapassa o limite sugerido de 30°, devido à necessidade dos elementos em contato se ajustarem à forma do punção hemisférico. Os valores máximos de ambos os critérios são mais baixos a 100% do deslocamento do punção na formulação LEA do que a 50% do mesmo na formulação LA.

Os resultados obtidos estão resumidos na Tab. 3. O fator de qualidade Q é calculado usando a Eq. (112).

TABELA 3 - Resultados do puncionamento hemisférico para as formulações LA e LEA

Item	Deslocamento do punção (%)			
	0 %	50 %		100 %
		LA	LEA	LEA
Nº total de iterações	-	150	84	147
Nº total de passos	-	62	41	63
Volume (mm ³)	783.781	783.176	781.861	779.853
\bar{E}^p máxima	0	4,1633	1,5919	2,6748
Q médio	0,8818	0,8539	0,8699	0,8598
Q máximo	0,9409	0,9833	0,9541	0,9865
Q mínimo	0,7029	0,2283	0,5193	0,2051
Razão de aspecto	2,1443	4,4251	2,9223	2,8585
Ângulo de borda (°)	35,754	89,758	60,058	82,487
Ângulo de obliquidade (°)	27,534	79,382	47,062	64,600
Ângulo de empenamento (°)	0,0	13,847	18,549	23,590
Ângulo de torção (°)	2,1941	42,483	11,925	22,783
Razão de afilamento	0,9193	0,058	0,8244	0,5803

Uma vez que a análise utilizando a formulação LA é interrompida a 50% do deslocamento total do punção, primeiramente serão comparados os resultados neste ponto. A qualidade mínima neste momento para a formulação LA é 0,2283 e para a formulação LEA é 0,5193, o que mostra que as técnicas de realocação nodal evitam a excessiva distorção da malha. Praticamente todos os critérios de distorção do PATRAN trazem resultados melhores para a formulação LEA. A única exceção é o ângulo de empenamento, que indica a não-planaridade dos elementos em contato com o punção hemisférico, o que é necessário para obedecer a sua forma.

Os valores de \bar{E}^p máxima são novamente menores na formulação LEA. O número de iterações é mais baixo na formulação LEA, mostrando uma melhor taxa de convergência desta formulação.

Como os valores obtidos com a técnica de transferência de dados na formulação LEA são diferentes quando a posição dos nós realocados muda, esta técnica deve ser aplicada após a correção de posição para nós de contato. O valor máximo de deformação plástica equivalente obtido aplicando-se a transferência de dados antes da correção da posição nodal é 2,6277 e, após ela, como pode ser visto na Tab. 3, é 2,6748. A convergência também melhora quando a transferência de dados é aplicada após a correção de posição dos nós de contato, visto que desta forma a transferência é feita para as posições nodais corrigidas que respeitam as restrições de contato. O número de iterações diminui de 193 para 147 e o número de passos cai de 88 para 63.

Há uma pequena perda de volume na formulação LEA devido a malha não ser muito fina. A técnica de realocação nodal tenta aproximar a curvatura na interface do cilindro com a matriz hemisférica movendo os nós de contorno utilizando uma função quadrática (Eq.(92)). Este processo é uma aproximação e, conseqüentemente, causa variação de volume. Notou-se que se o número de elementos é aumentado, a perda de volume diminui. Para verificar isso, inicialmente usou-se uma malha menos refinada, com 800 elementos (10x10x8 subdivisões), e a perda de volume foi 0,82%. Com a malha apresentada acima, a perda de volume é 0,50%, mostrando a tendência de diminuir a perda de volume com malhas mais refinadas. Na figura 57 mostra-se um gráfico onde se representa a variação de volume em função do deslocamento do punção.

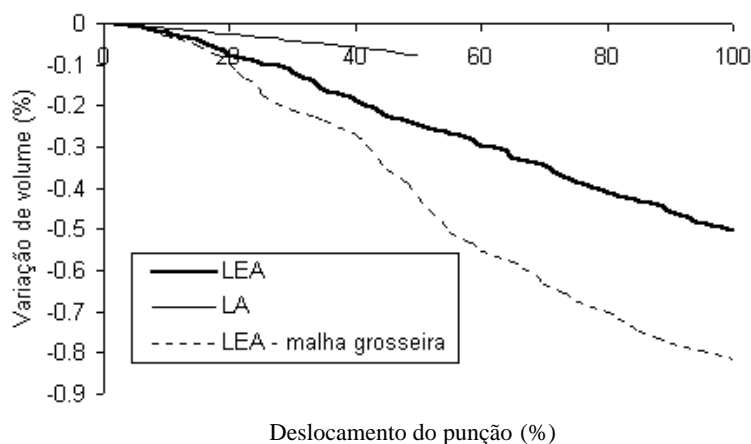


FIGURA 57 - Gráfico deslocamento do punção (%) x variação de volume (%)

Convém salientar que parte da perda de volume deve-se à deformação elástica. A perda máxima devido à deformação elástica, em (%), pode ser calculada de forma aproximada pela expressão

$$\frac{\Delta V}{V} = 100 \frac{p}{K}, \quad (124)$$

onde K é o módulo de incompressibilidade e p é a pressão máxima existente. Neste exemplo tem-se

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{206.000}{3(1-0,6)} = 171.666,67 \text{ e}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 100 \frac{-411,38}{171.666,67} = -0,2396\% .$$

Portanto, a perda de volume elástica máxima é aproximadamente 0,24%. Esse valor é o limite máximo de perda, que poderia ser atingido se todos os elementos fossem submetidos à pressão máxima.

A Tab. 4 apresenta um comparativo entre os resultados obtidos a 100% do deslocamento do punção neste trabalho com os trabalhos 2D de Stainier (1995) e Olmi (1997). Nestes dois trabalhos 2D, foram utilizados processos de remalhamento.

TABELA 4 - Comparação entre os resultados da formulação LEA a 100% do deslocamento do punção com análises 2D de outros autores

Autor	Nº de divisões da malha (x,y,z)	Formulação	\bar{E}^p máx.
Este trabalho	(14,14,8)	LEA	2,6748
Stainier (1995)	(10,10,0)*	LA com remalhamento	2,754
Olmi (1997)	(10,10,0)*	LA com remalhamento	2,6110

Observando a Tab. 4, nota-se que os valores máximos de deformação plástica equivalente são similares em todos os casos, especialmente em relação ao trabalho de Olmi (1997), que utiliza o METAFOR 2D como base.

* No início da análise

A Fig. 58 apresenta um gráfico comparativo da força de conformação em (N/rad), onde rad é o raio do cilindro, entre este trabalho, Stainier (1995) e Olmi (1997).

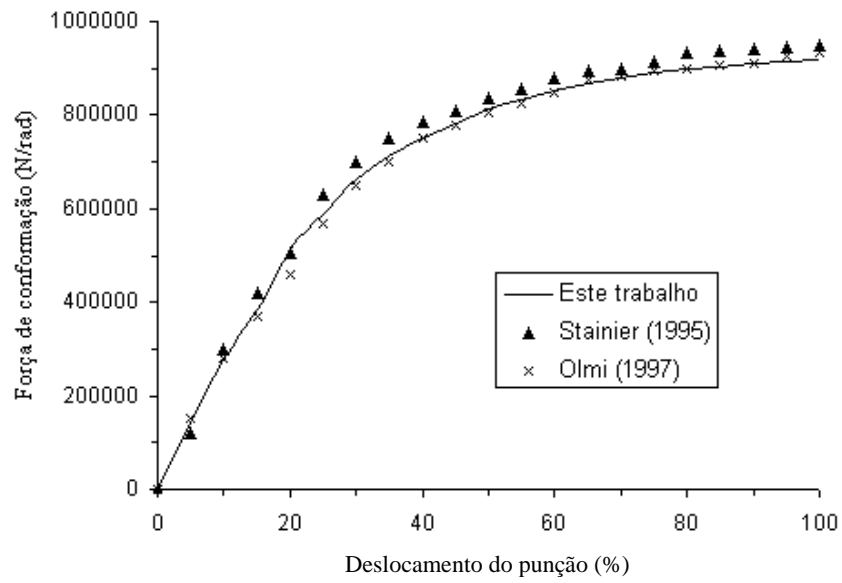


FIGURA 58 - Deslocamento do punção (%) x Força de conformação

7.3 INDENTAÇÃO POR UM CILINDRO

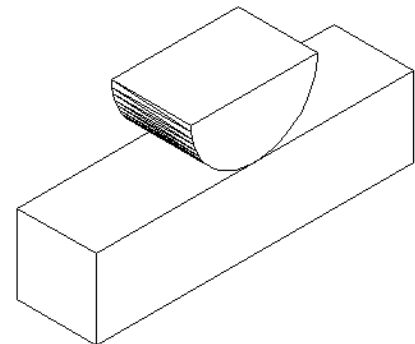
Neste exemplo trata-se da indentação de um cilindro rígido sobre uma base flexível. A matriz de conformação rígida cilíndrica tem raio 0,8 cm. A largura da base flexível é 2cm, a profundidade e a altura são 1cm (Fig. 59).

Um deslocamento ($d_y = 0,8\text{ cm}$) é aplicado à matriz rígida. É empregada uma integração implícita para o problema quasi-estático. A penalidade normal para o contato deslizante é de 7.500 N/cm. Os parâmetros do material são:

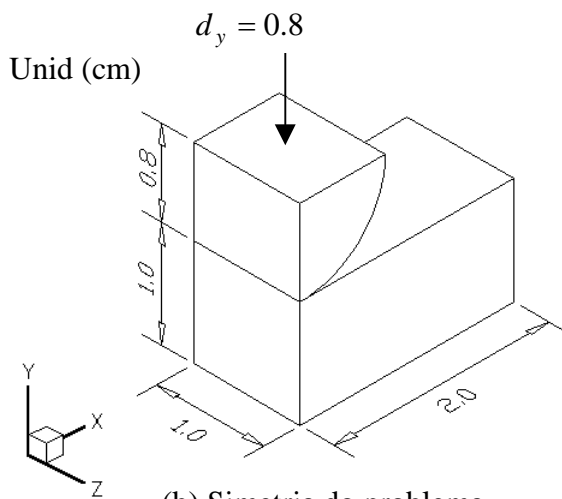
Módulo de elasticidade $E = 1.000\text{ N/cm}^2$
 Coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$

O material é elastoplástico com uma lei constitutiva elastoplástica com endurecimento isótropo linear:

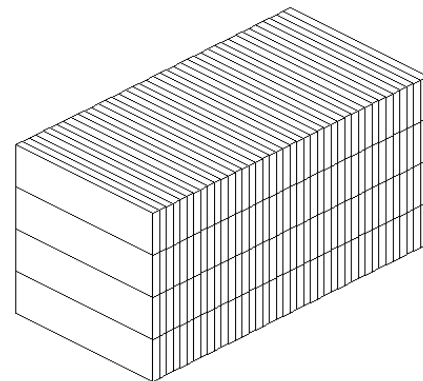
-Tensão de escoamento ${}^0\sigma^v = 10\text{ N/cm}^2$
 -Módulo de endurecimento linear $h = 5\text{ N/cm}^2$
 $\bar{\sigma} = {}^0\sigma^v + h\bar{E}^p$



(a) Problema completo



(b) Simetria do problema



(c) Malha empregada

FIGURA 59 - Indentação por um cilindro

Devido à simetria no plano YZ, apenas a metade do problema é modelada. Neste plano, os nós estão restritos na direção X. Todos os nós estão restritos na direção Z, de forma a simular um estado plano de deformações. A malha utilizada tem 410 nós e 160 elementos hexaédricos de 8 nós. Este exemplo não tem comparativo com dados de outros autores, visando somente observar a eficiência das técnicas de realocação nodal e de transferência de

dados apresentadas neste trabalho. Na formulação LEA, a realocação nodal é realizada em cada passo de tempo. O MINQ é utilizado para realocação em superfícies planas. A transferência de dados é feita, em cada passo de tempo, através do desenvolvimento das tensões em série de Taylor, aplicado após a correção da posição dos nós de contato (seção 4.4). A Fig. 60 apresenta a malha deformada com $d_y = 0,4$ cm nas formulações LA e LEA.

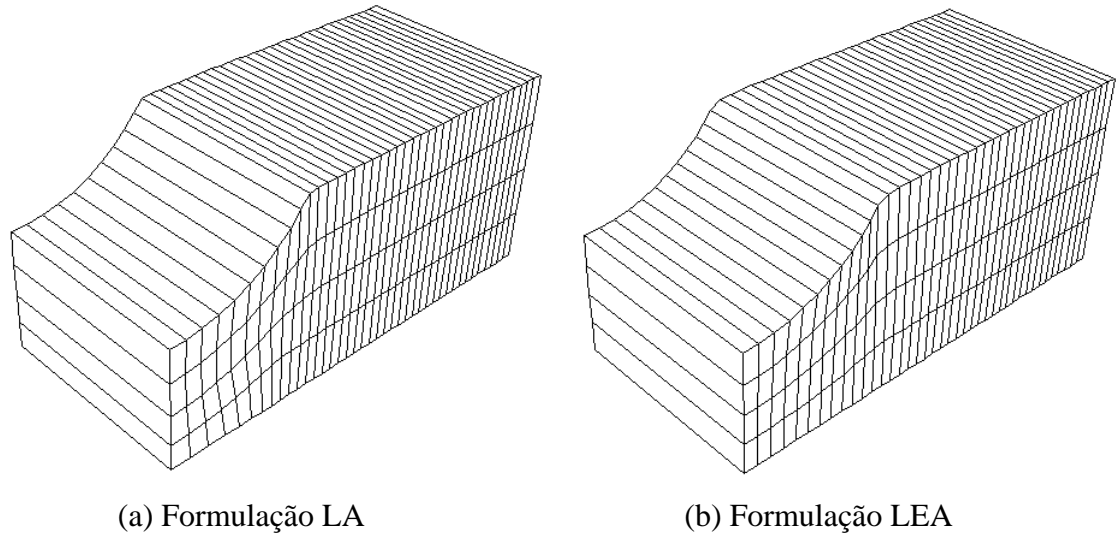


FIGURA 60 - Malha deformada nas formulações LA e LEA com $d_y = 0,4$ cm

A Fig. 61 mostra a vista ortográfica do plano XY da malha deformada com $d_y = 0,4$ cm e os valores de \bar{E}^p para as formulações LA e LEA.

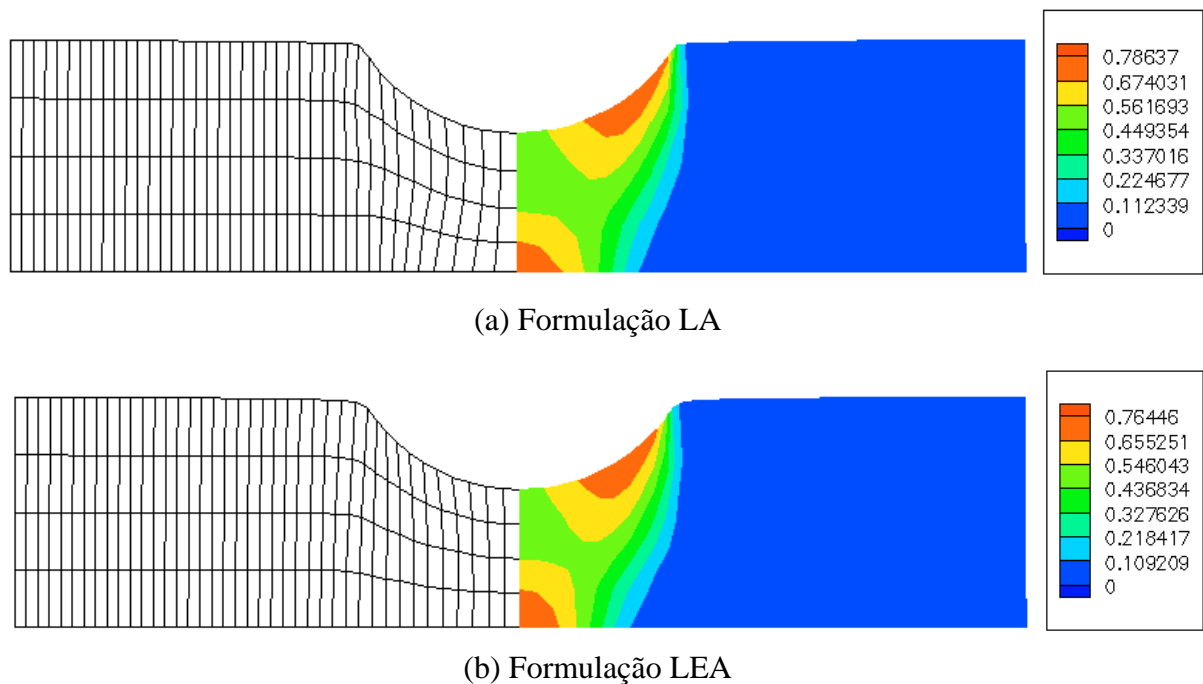
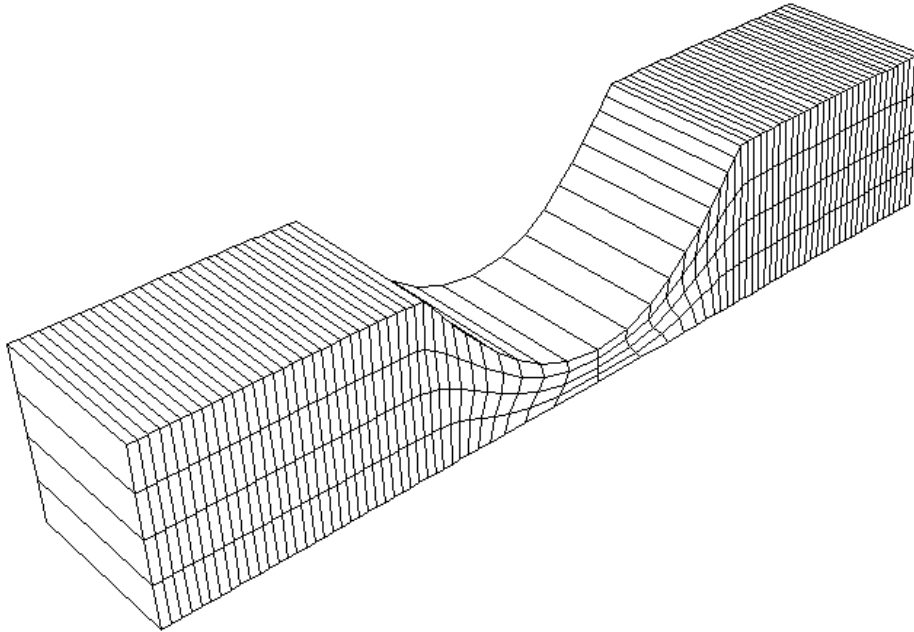
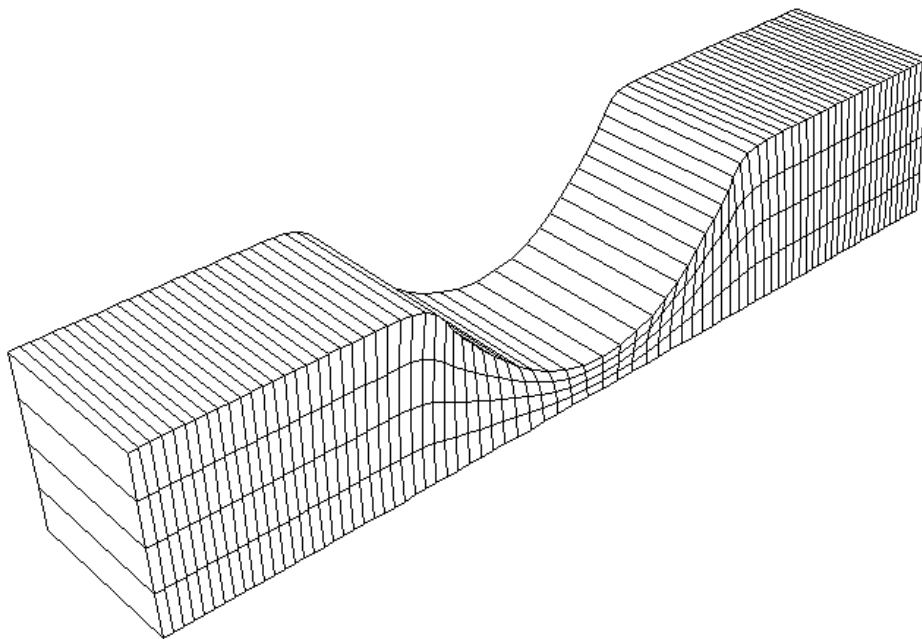


FIGURA 61 - \bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY

A Fig. 62 apresenta a malha deformada completa com $d_y = 0,8$ cm nas formulações LA e LEA .



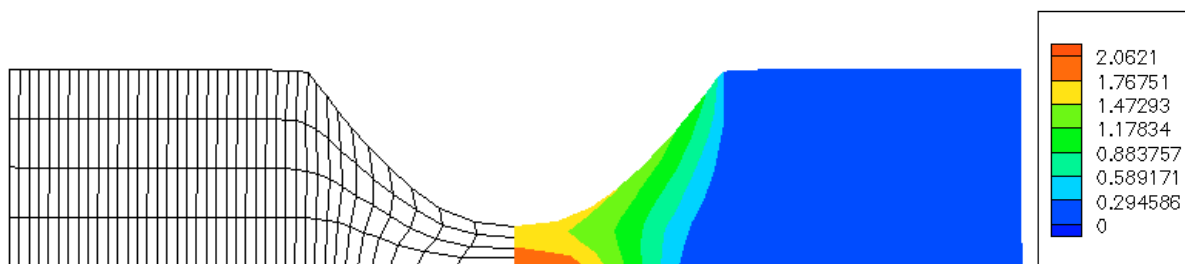
(a) Formulação LA



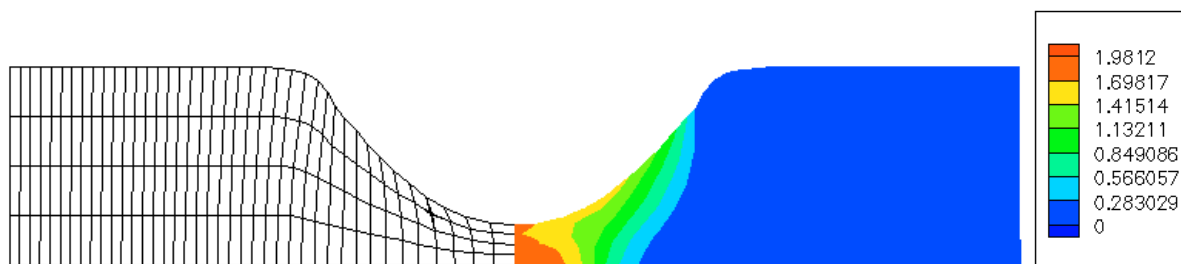
(b) Formulação LEA

FIGURA 62 - Malha deformada nas formulações LA e LEA com $d_y = 0,8$ cm

A Fig. 63 mostra a vista ortográfica do plano XY com $d_y = 0,8$ cm .



(a) Formulação LA



(b) Formulação LEA

FIGURA 63 - \bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY

Comparando a malha deformada nas Fig. 63a e 63b, observa-se que se consegue diminuir a distorção da mesma ao se utilizar a formulação LEA, especialmente quando $d_y = 0,8$ cm. A Tab. 5 apresenta um resumo dos resultados obtidos na indentação.

TABELA 5 - Resultados da indentação por um cilindro para as formulações LA e LEA

Item	Deslocamento do cilindro				
	0 cm	$d_y = 0,4$ cm		$d_y = 0,8$ cm	
		LA	LEA	LA	LEA
Nº total de iterações	-	197	216	375	387
Nº total de passos	-	103	100	180	184
Volume (cm ³)	2	1,99789	1,99680	1,99952	1,99751
\bar{E}^p máxima	0	0,78637	0,76446	2,06210	1,98120
Q médio	0,1536	0,15758	0,15783	0,15669	0,15891
Q máximo	0,1536	0,18319	0,17805	0,18310	0,20216
Q mínimo	0,1536	0,14766	0,12705	0,14317	0,09391
Razão de aspecto	20,0	20,1823	19,9800	21,6630	19,5503
Ângulo de borda (°)	0,0	52,9827	52,6913	57,5020	58,1344
Ângulo de obliquidade (°)	0,0	43,4584	44,8354	52,1656	50,6868
Ângulo de empenamento (°)	0,0	0,00506	0,00626	0,01474	0,01143
Ângulo de torção (°)	0,0197	7,82975	6,42443	7,74339	8,28210
Razão de afilamento	1,0	0,90991	0,89911	0,77049	0,87301

Da Tab. 5 pode-se notar que a \bar{E}^p máxima é um pouco maior na formulação LA, tanto no meio da análise ($d_y = 0,4$ cm) como no final ($d_y = 0,8$ cm).

O fator de qualidade Q tem valores baixos desde o início da análise. Isto acontece porque há uma dimensão nos elementos (comprimento em Z) bem maior que as outras. Vê-se também que os valores de Q são maiores na formulação LA que na LEA, apesar de alguns elementos estarem visualmente mais distorcidos na formulação LA (Fig. 64a). Por outro lado, estes elementos são maiores na direção X , o que confere valores mais altos de Q . Em função disso, o fator de qualidade Q não parece ser apropriado quando há uma grande diferença entre as dimensões dos elementos.

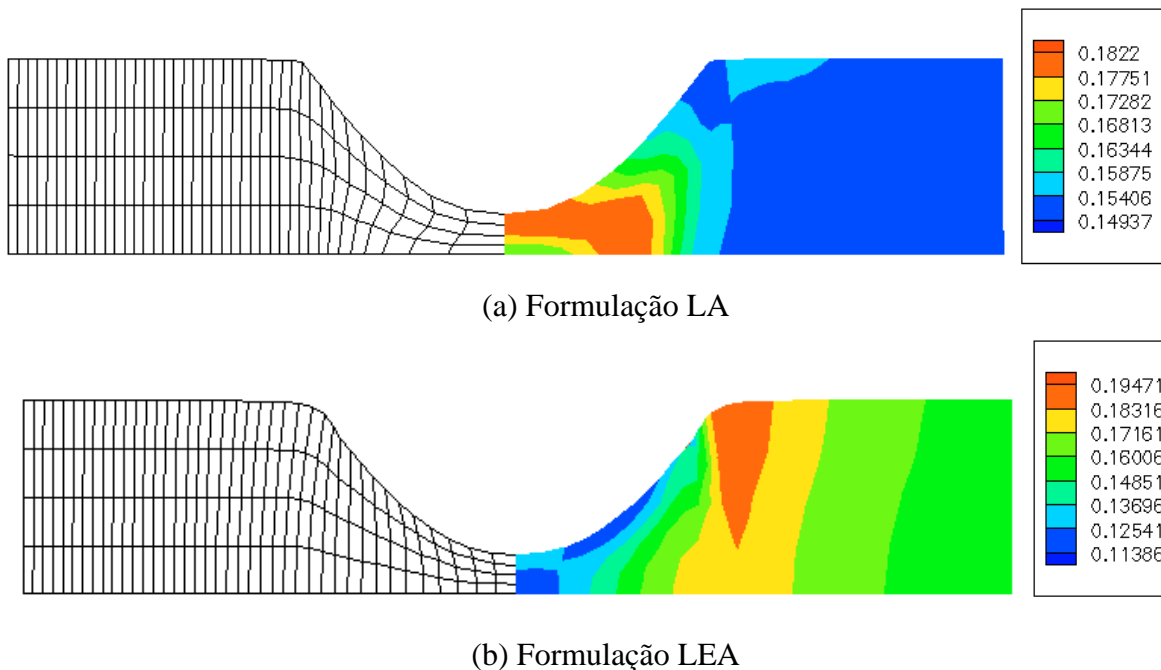


FIGURA 64 - Fator de qualidade Q - vista do plano XY

Para resolver este problema, se poderia calcular um fator de qualidade considerando apenas a área das faces externas dos elementos A e o seu perímetro ph como

$$Q = 16 \frac{A}{ph^2}. \quad (125)$$

Com relação aos outros critérios de distorção, quase todos eles têm valores próximos nas formulações LA e LEA, com exceção da razão de afilamento. Este critério indica uma

melhora na distorção para a formulação LEA, visto que o seu valor mínimo é 0,87 para esta formulação e 0,77 para a formulação LA no final da análise ($d_y = 0,8$ cm).

Além disso, o indicador de remalhamento (fratura do material) (Eq. (118)) apresenta valores mais altos na formulação LA, o que mostra que a formulação LEA consegue concentrar a malha na zona mais crítica (Fig. 65).

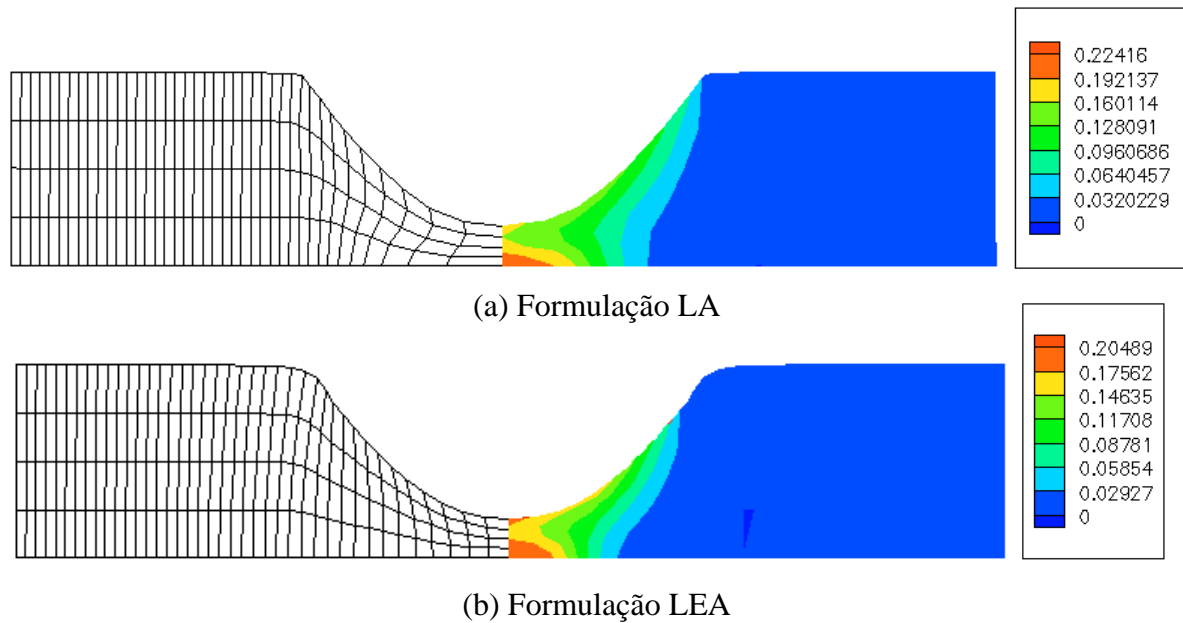


FIGURA 65 - Indicador de remalhamento \dot{I}^{φ} - vista do plano XY

O gráfico Deslocamento da matriz na direção Y x Variação de volume está colocado na Fig. 66.

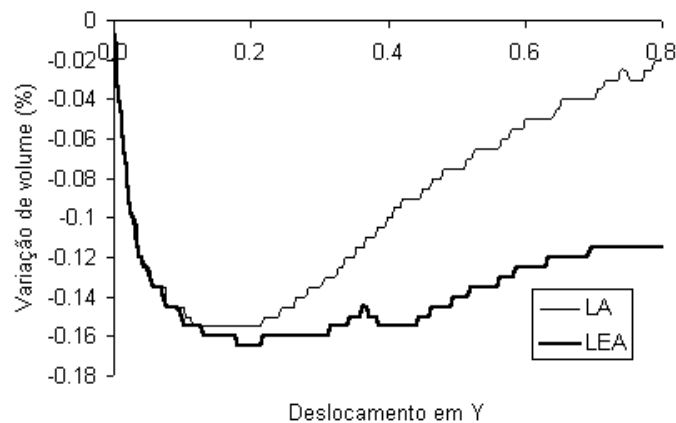


FIGURA 66 - Deslocamento na direção Y (cm) x variação de volume (%)

Nesta figura nota-se que a perda de volume na formulação LEA é pequena, 0,125%. A perda de volume elástica máxima pode ser calculada aproximadamente por

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{1.000}{3(1-0,6)} = 833,33 \text{ e}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 100 \frac{p}{K} = 100 \frac{-5,1}{833,33} = -0,69\% .$$

A perda de volume máxima é de 0,69%, sendo que a perda que ocorre na formulação LEA é bem menor que o limite máximo.

Na figura 67 apresenta-se o gráfico Deslocamento da matriz x Força de conformação para as formulações LA e LEA, os quais estão bem próximos.

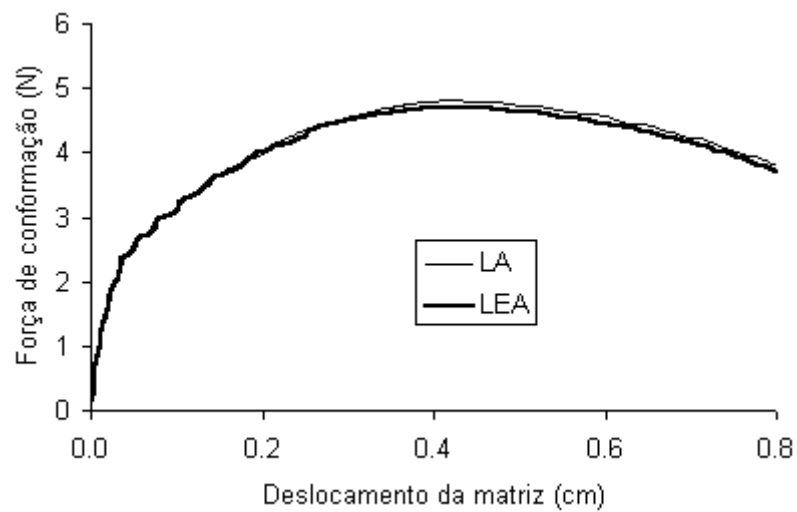


FIGURA 67 - Deslocamento da matriz x Força de conformação

O mesmo exemplo, aplicando-se atrito do tipo Coulomb-Mohr-Tresca no problema de contato é analisado a seguir. A penalidade normal de contato é 3.500 N/cm, a penalidade tangencial de contato é 350 N/cm, o coeficiente de atrito estático é 0,3 e a lei de contato é linear.

A Fig. 68 apresenta a malha deformada com $d_y = 0,4$ cm nas formulações LA e LEA.

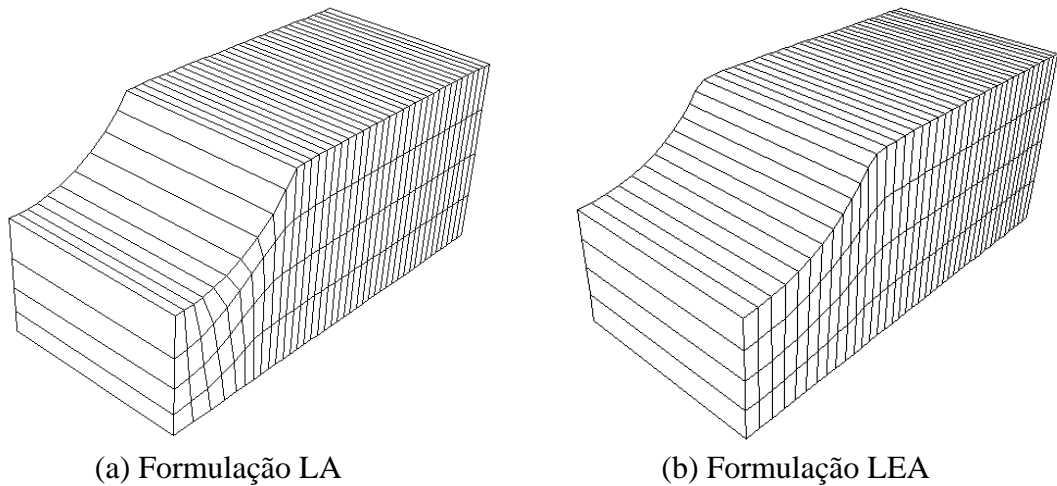


FIGURA 68 - Malha deformada nas formulações LA e LEA com $d_y = 0,4$ cm

A Fig. 69 mostra a vista ortográfica do plano XY da malha deformada com $d_y = 0,4$ cm e os valores de \bar{E}^p para as formulações LA e LEA.

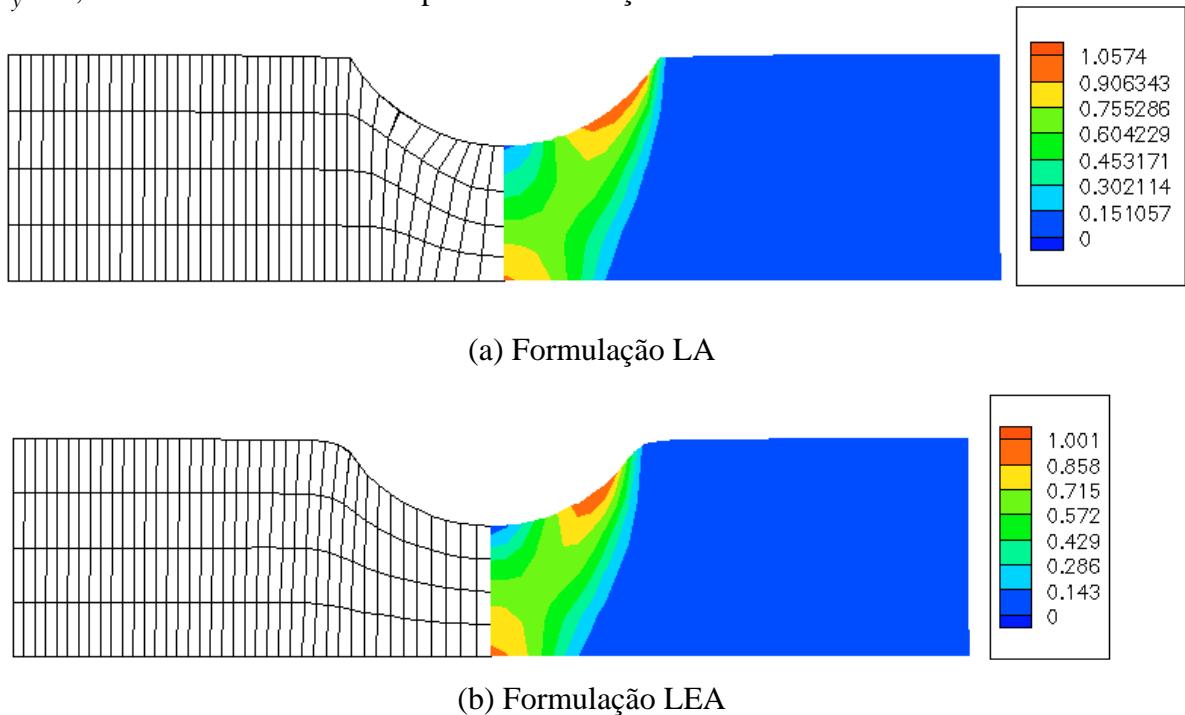


FIGURA 69 - \bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY

Os valores de \bar{E}^p também são próximos nas formulações LA e LEA para o caso de contato com atrito. A formulação LEA consegue diminuir a distorção da malha.

Neste exemplo, além de simular um estado plano de deformações, pode-se também simular um caso 3D. Para isso, a restrição na direção Z na face com $Z=1\text{cm}$ é removida (Fig. 59b). Devido à dupla simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da peça é modelada. Nas Fig. 70 e 71 estão colocadas vistas em perspectiva da malha deformada com $d_y = 0,8\text{cm}$ para as formulações LA e LEA.

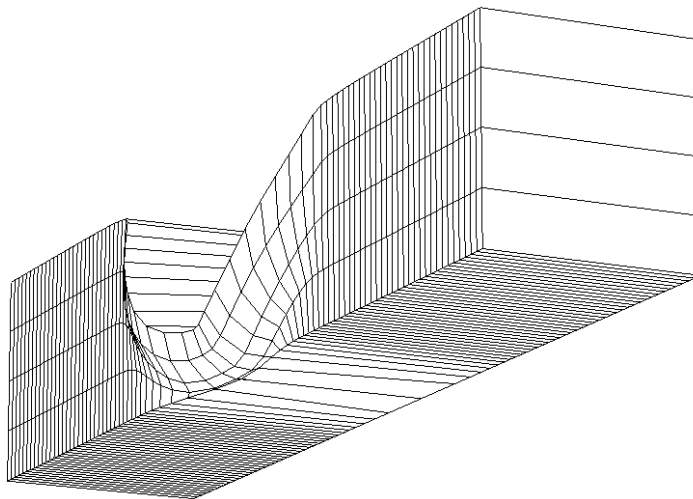


FIGURA 70 - Indentação 3D - Malha deformada na formulação LA

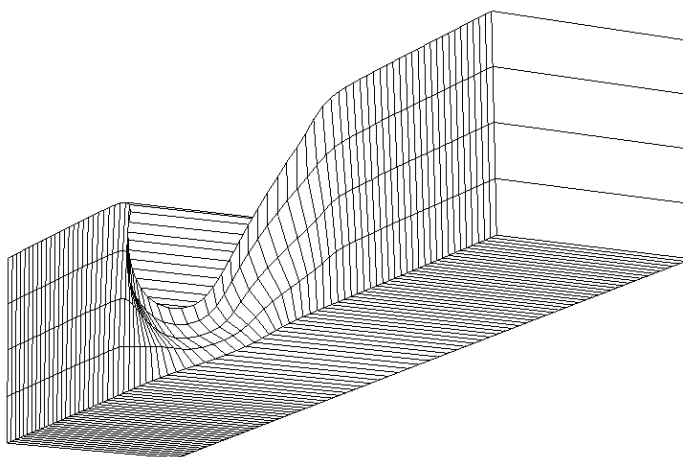


FIGURA 71 - Indentação 3D - Malha deformada na formulação LEA

Na Fig. 71 observa-se que a malha está bem menos distorcida na formulação LEA. Isto também pode ser visto na Fig. 72, onde está colocada a vista do plano XY com os valores de \bar{E}^p .

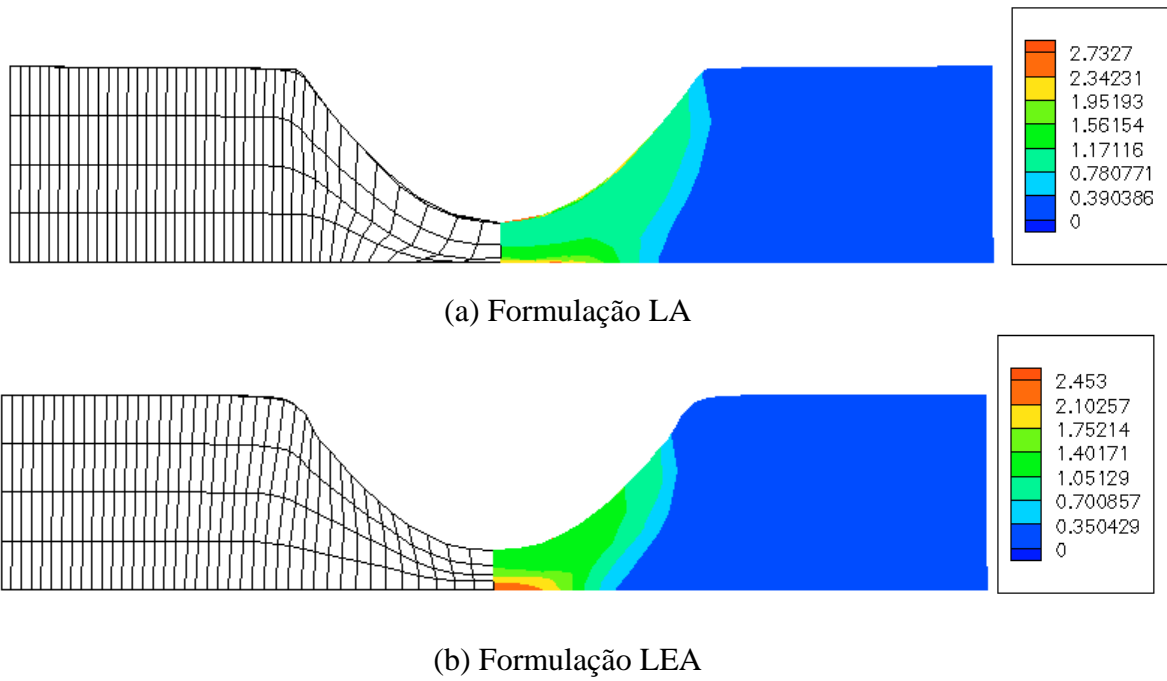


FIGURA 72 - \bar{E}^p e malha deformada nas formulações LA e LEA- vista do plano XY

A Fig. 73 contém o gráfico Deslocamento da matriz na direção Y x Variação de volume nas formulações LA e LEA, que mostra a pequena variação de volume existente em ambas as formulações.

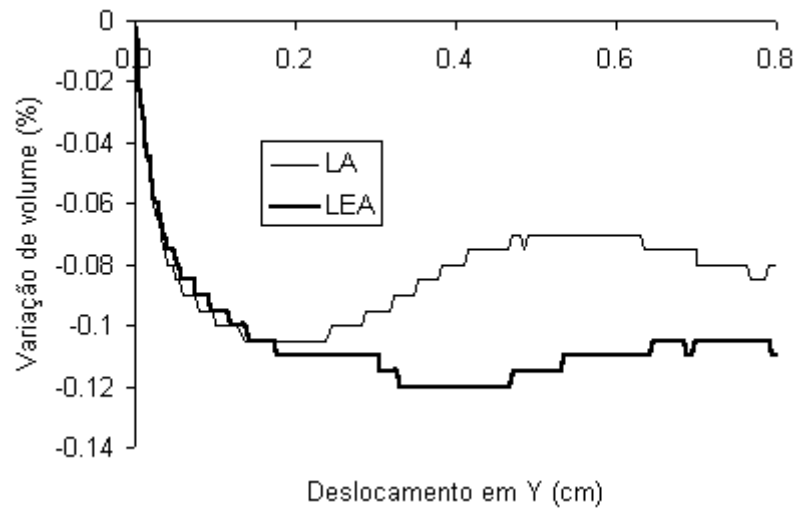


FIGURA 73 - Deslocamento na direção Y (cm) x variação de volume (%)

O gráfico Deslocamento da matriz na direção Y x Força de conformação para as formulações LA e LEA é apresentado na Fig. 74.

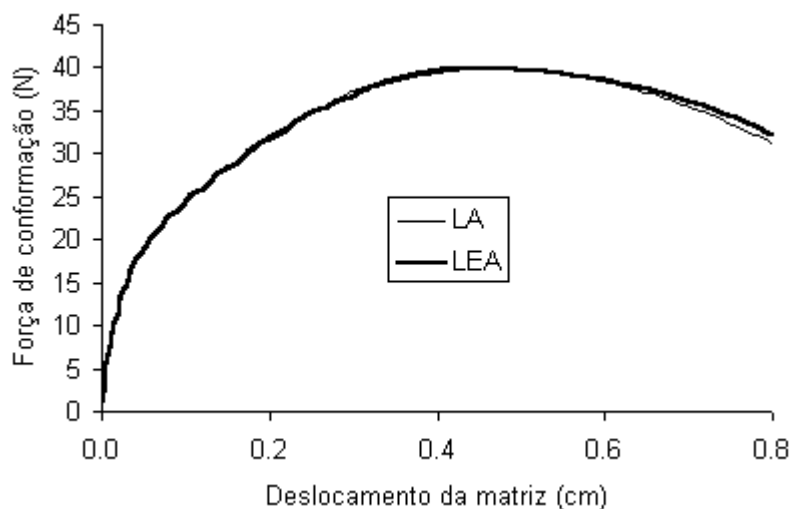


FIGURA 74 - Deslocamento da matriz x Força de conformação

Observa-se que as curvas das duas formulações estão bem próximas, apesar de a malha na formulação LA estar bastante distorcida e, portanto, sujeita a uma degradação dos resultados. Em vista disso, deve-se analisar com cautela este gráfico porque, visto isoladamente sem considerar a malha, ele pode não ser um bom indicativo da precisão dos resultados.

7.4 COMPRESSÃO DE UM CILINDRO METÁLICO

Nesta aplicação é apresentada a compressão de um cilindro metálico por uma matriz de conformação rígida plana. Este exemplo, conhecido na literatura como "upsetting", é um teste padrão muito utilizado em conformação mecânica (Taylor e Becker, 1983).

O esquema de integração empregado para a solução do problema quasi-estático é implícito, utilizando o método de Newton-Raphson (seção 3.8.1). Utiliza-se a lei de contato com atrito colante sem deslizamento, calculada pelo método da penalidade (Ponthot, 1995), onde a penalidade normal é $3,5 \times 10^5$ N/mm e a penalidade tangencial é $3,5 \times 10^4$ N/mm.

Os parâmetros do material são:

Módulo de elasticidade $E = 200.000$ N/mm² ou 200 GPa

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Lei constitutiva elastoplástica com endurecimento isótropo linear, cujos dados são:

-Tensão de escoamento $\sigma^v = 700$ N/mm²

-Módulo de endurecimento linear $h = 300$ N/mm² $\bar{\sigma} = \sigma^v + h \bar{E}^p$

Devido à simetria, apenas 1/8 do cilindro é modelado (Fig. 75b).

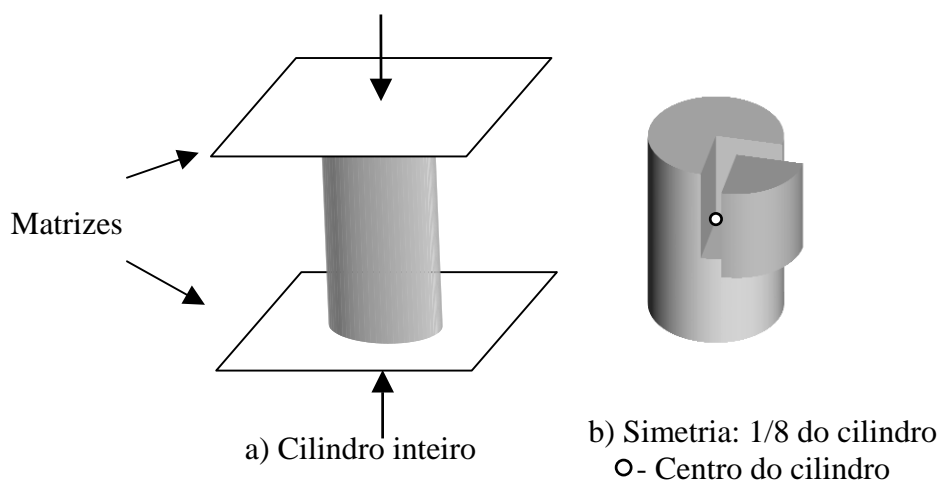


FIGURA 75 - Simplificação do problema devido à simetria do cilindro

A matriz de conformação plana se encontra no plano XY na face superior do cilindro (Fig. 76). Esta matriz sofre um deslocamento de 8mm no sentido negativo do eixo Z.

As condições de contorno nos planos de simetria são: restrição na direção X na face YZ do cilindro, restrição na direção Y na face XZ e restrição em Z na face XY (na coordenada $Z=0$).

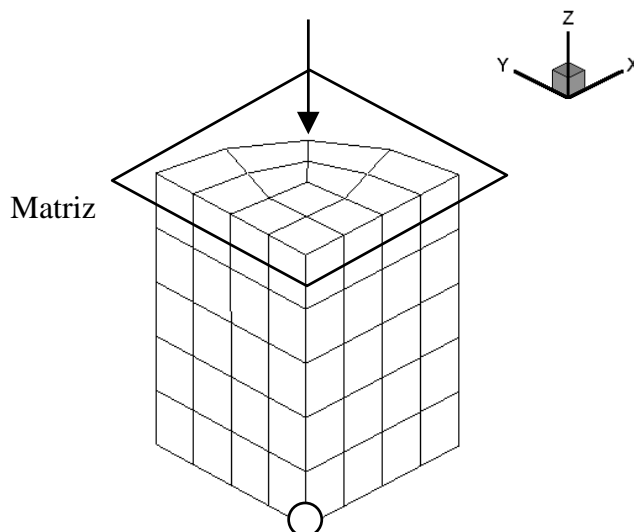
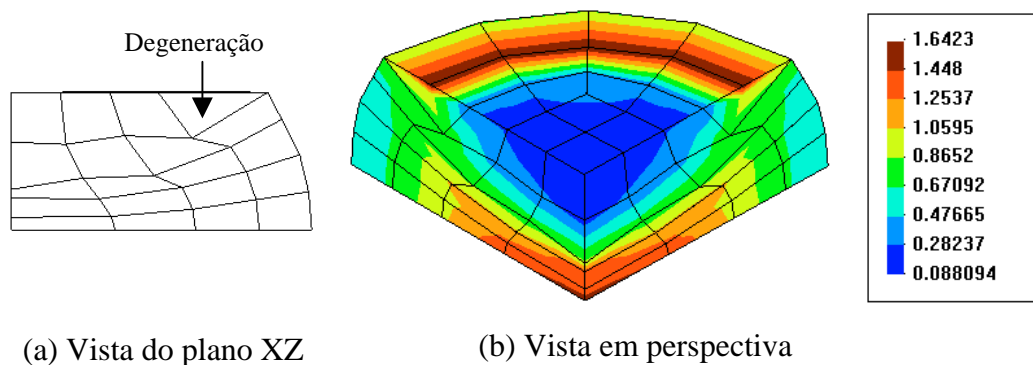


FIGURA 76 - Seção do cilindro modelada na posição inicial O - centro do cilindro

A altura e o raio do 1/8 de cilindro são 15mm e 10mm respectivamente. A malha é constituída de 114 nós e 60 elementos hexaédricos de 8 nós.

Na Fig. 77 estão colocados a malha final deformada (deslocamento da matriz=8mm) e os valores de deformação plástica equivalente (\bar{E}^p) para a formulação LA. A malha apresenta alguns elementos bastante distorcidos. Os valores máximos de \bar{E}^p estão na zona onde ocorre a degeneração dos hexaedros em pentaedros e no centro da peça.



(a) Vista do plano XZ

(b) Vista em perspectiva

FIGURA 77 - \bar{E}^p e malha deformada final na formulação LA

Para a formulação LEA, os valores de \bar{E}^p final e a malha deformada são mostrados na Fig. 78.

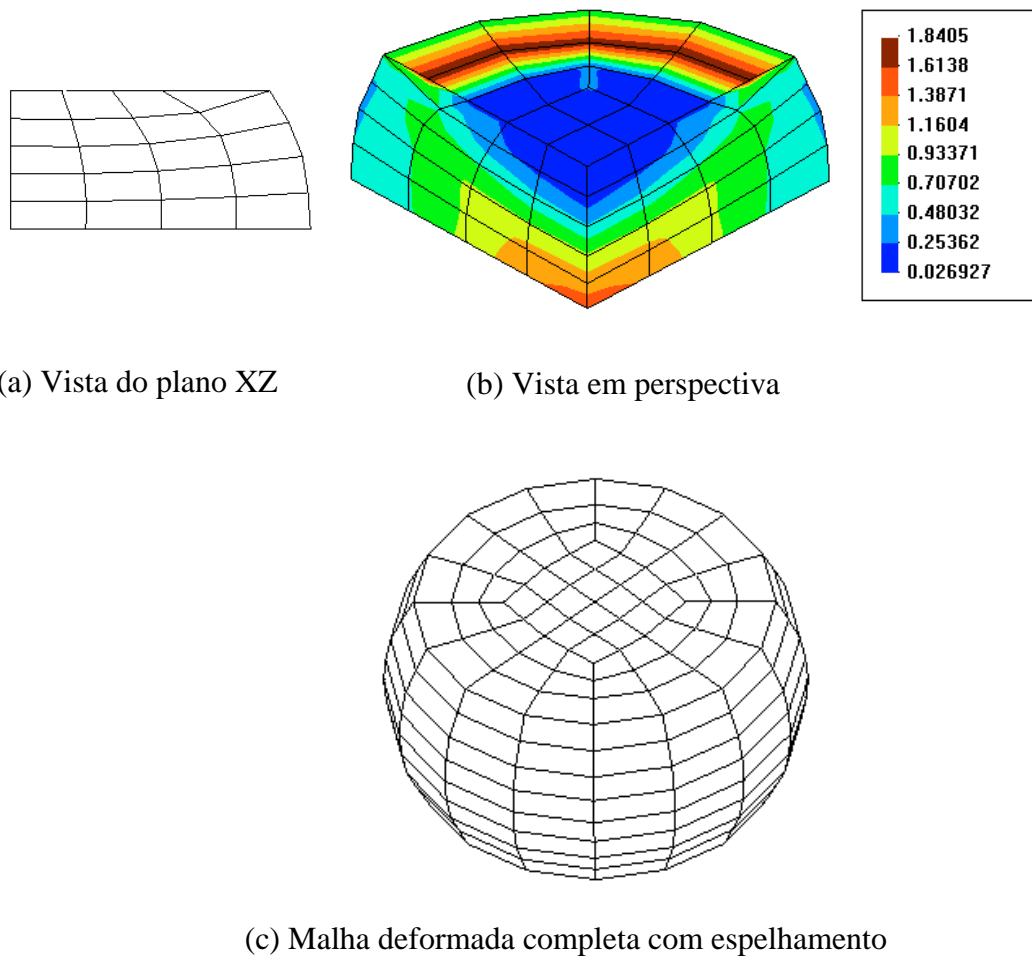


FIGURA 78 - \bar{E}^p e malha deformada final na formulação LEA

A formulação LEA não consegue evitar o aparecimento de elementos pentaédricos. Os valores de \bar{E}^p máximos ocorrem na zona onde se encontram esses elementos e não no centro da peça, onde, se sabe, eles deveriam ocorrer. Taylor e Becker (1983), utilizando elementos triangulares, conseguiram evitar o surgimento de elementos pentaédricos e obter valores máximos de \bar{E}^p no centro da peça.

A Tab. 6 apresenta um resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA.

TABELA 6 - Resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA

Item	Configuração inicial	Config. final - Formulação	
		LA	LEA
\bar{E}^p máxima	0	1,6423	1,8405
Razão de aspecto	1,6797	6,9448	3,0001
Ângulo de borda (°)	0	89,578	89,874
Ângulo de obliquidade (°)	14,160	48,409	67,907
Ângulo de empenamento (°)	0,0	14,741	12,049
Ângulo de torção (°)	0,0	24,748	26,167
Razão de afilamento	0,8032	0,4029	0,4025

Da Tab. 6 observa-se que os valores máximos de distorção nas formulações LA e LEA estão próximos na maioria dos critérios utilizados. Isto se deve ao fato de o elemento crítico para a distorção ser aquele que se transforma em pentaedro, fenômeno que ocorre em ambas as formulações.

O anexo A apresenta alternativas para tentar evitar o aparecimento de elementos pentáedricos no caso da compressão de um cilindro. Neste anexo são propostos o remalhamento (anexo A.5) e o refinamento (anexo A.6) para a formulação LA.

7.5 HIDROCONFORMAÇÃO DE UM TUBO

A hidroconformação é um método para a manufatura de componentes que alia, às tradicionais matrizes de conformação, o uso da água sob pressão. Este método tem uma série de vantagens, dentre elas a alta precisão e a eliminação de defeitos comuns aos processos tradicionais (espessura não uniforme do conformado, flambagem localizada) (Leitloff, 1998).

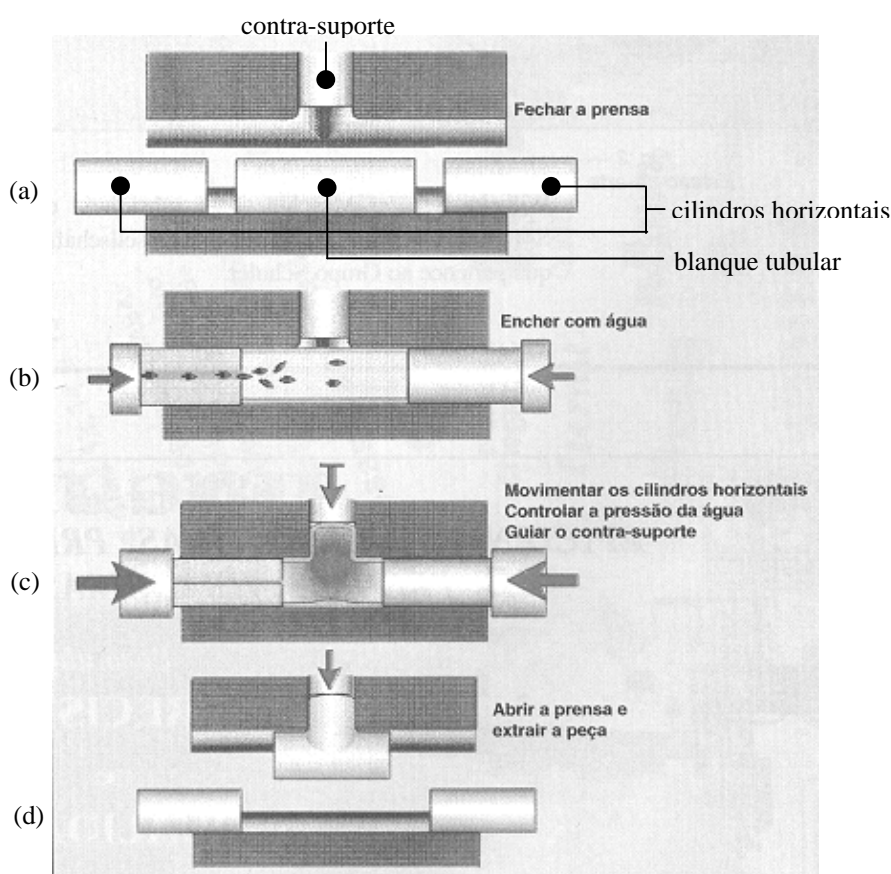


FIGURA 79 - Processo de hidroconformação para a formação de uma conexão tubular em Tê

O blanque tubular é carregado na matriz inferior, que é então fechada (Fig. 79a). O componente é selado em ambos os lados pelos êmbolos axiais e, depois disso, é introduzida internamente a água sob pressão (Fig. 79b). Durante a operação de conformação, os cilindros horizontais comprimem o blanque e, ao mesmo tempo, a água pressurizada o infla, de maneira que ele é forçado no contorno interno da cavidade da matriz. Além disso, o fluxo de material é controlado pelo contra-suporte (Fig. 79c). O componente é conformado pela pressão de calibração, de modo que a sua forma corresponde exatamente ao contorno da matriz. Finalmente, a matriz é aberta e o componente é retirado (Fig. 79d).

Na simulação numérica deste processo de hidroconformação, devido à simetria, apenas $\frac{1}{4}$ do blanque tubular é modelado (Fig. 80). Um deslocamento $d_y = -12,5$ mm é aplicado aos nós extremos na direção Y para simular o cilindro horizontal. O contra-suporte é representado por uma matriz de conformação móvel, rígida e plana.

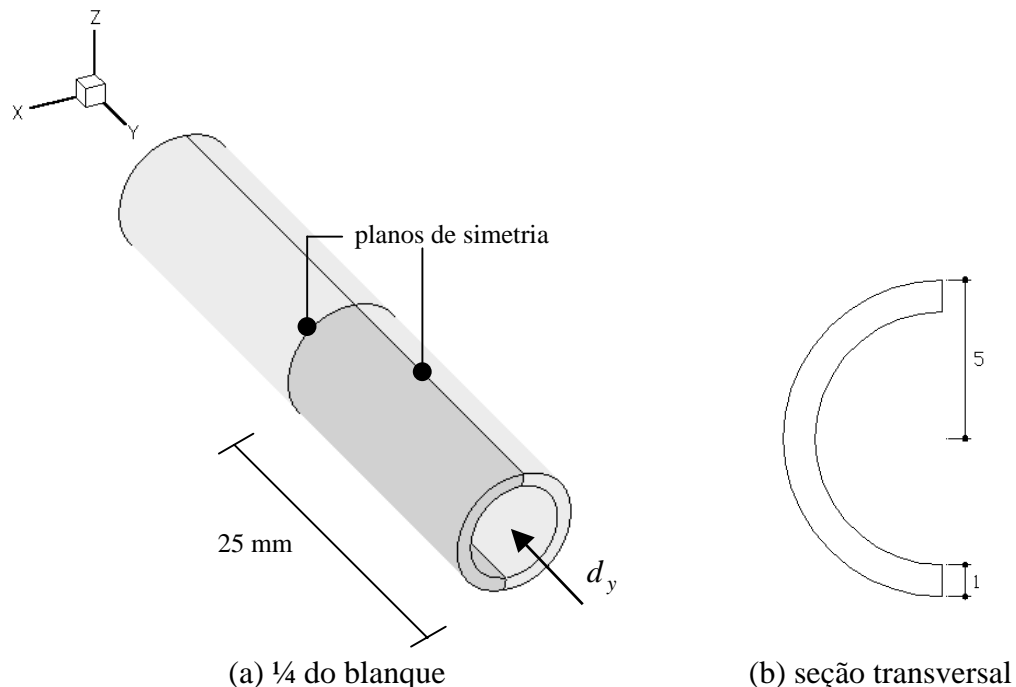


FIGURA 80 - Blanque tubular modelado devido à simetria

O comprimento do blanque é 25mm, o diâmetro é 10mm e a espessura da parede é 1mm. As condições de contorno nos planos de simetria são: restrição na direção X na face YZ do blanque e restrição na direção Y na face XZ com $Y=0$ do mesmo. O número de nós é 1.953 e o de elementos é 1.200 (Fig. 81).

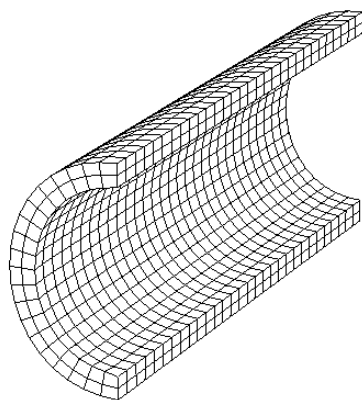


FIGURA 81 - Malha empregada na hidroconformação

A pressão da água, variando linearmente de 0 a 100 MPa, é aplicada para dar a forma das matrizes de conformação rígida e fixa à peça (Fig. 82).

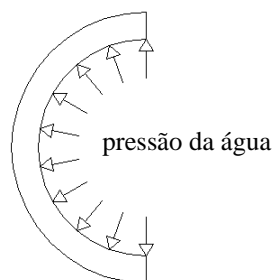


FIGURA 82 - Pressão da água sobre o blanque tubular

Há duas matrizes rígidas de conformação (Fig. 83). Uma delas é plana e móvel (contra-suporte). A outra é fixa e constituída de superfícies regradas e Coons. As matrizes são modeladas graficamente de maneira interativa no programa T-CADE (Teixeira, 1999). Após a geração das matrizes e a verificação de que elas estão corretas, os seus dados são convertidos para o formato texto que o programa METAFOR reconhece.

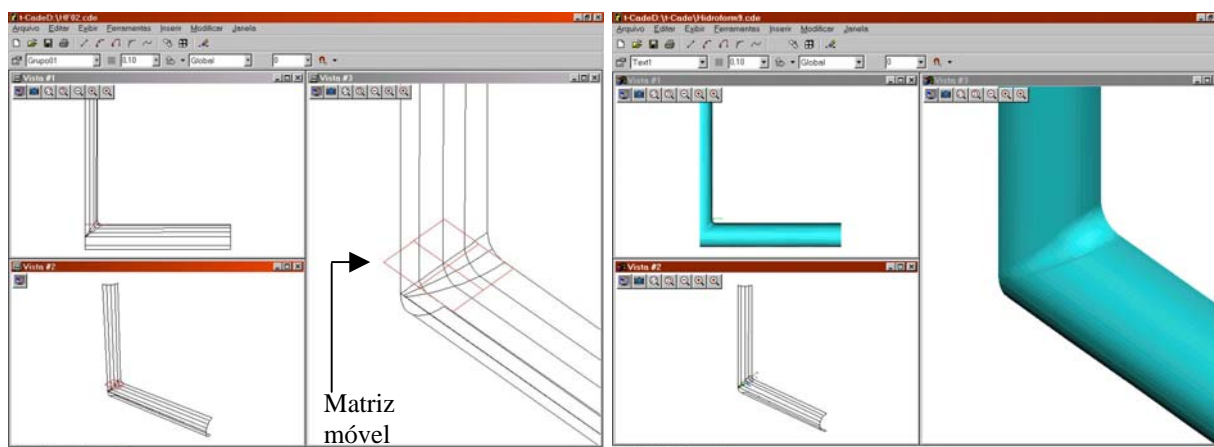


FIGURA 83 - Matrizes de conformação (1/4 da geometria real devido à dupla simetria)

A distância máxima entre nós e matriz de conformação, usada para testar se o nó está em contato com a mesma, é 0,1mm. Esta distância não deve ser muito grande, para que não se detecte contato entre nós e matrizes que estão afastadas. É empregada uma integração explícita para o problema dinâmico. A penalidade normal para o contato deslizante é de 100.000 MN/m. Os parâmetros do material são:

Módulo de elasticidade $E = 100.000 \text{ MPa (N/mm}^2\text{)}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Densidade $\rho = 0,0027 \text{ kg/m}^3$ (artificialmente aumentada para ampliar o passo de tempo)

Lei constitutiva elastoplástica com endurecimento isótropo linear, cujos dados são:

-Tensão de escoamento ${}^0\sigma^v = 70 \text{ MPa}$

-Módulo de endurecimento linear $h = 70 \text{ MPa}$ $\bar{\sigma} = {}^0\sigma^v + h \bar{E}^p$

A Fig. 84 mostra os resultados de \bar{E}^p da simulação numérica realizada com o METAFOR na formulação LA. Um duplo espelhamento é realizado para mostrar os resultados do problema completo.

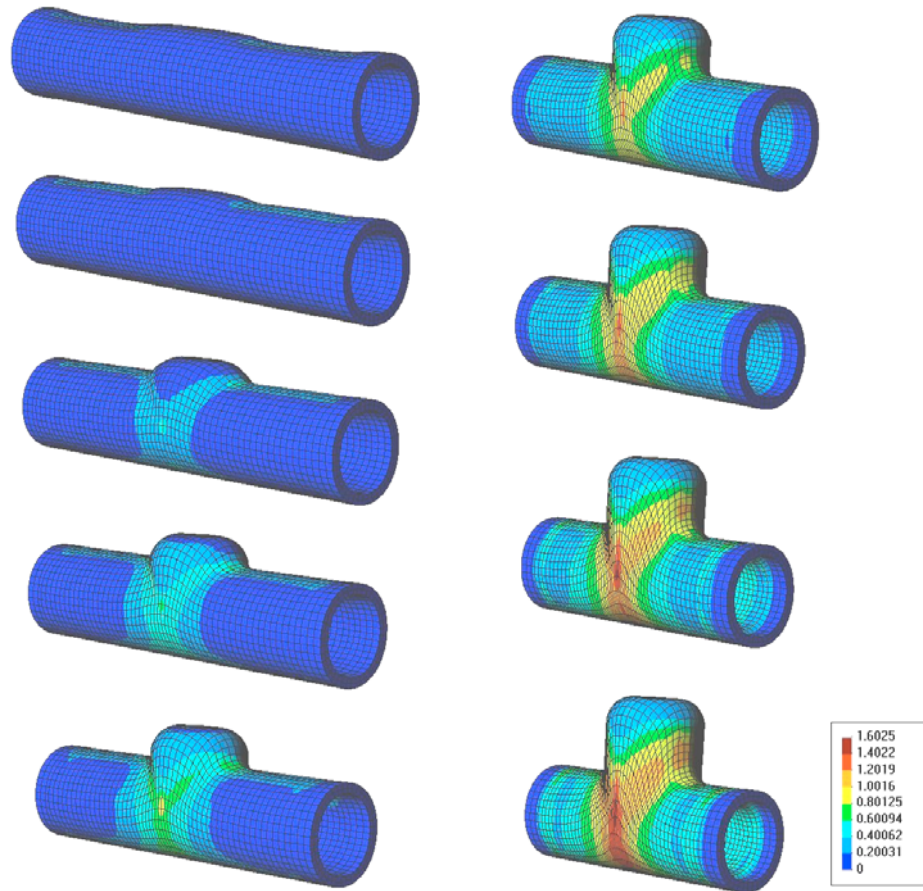
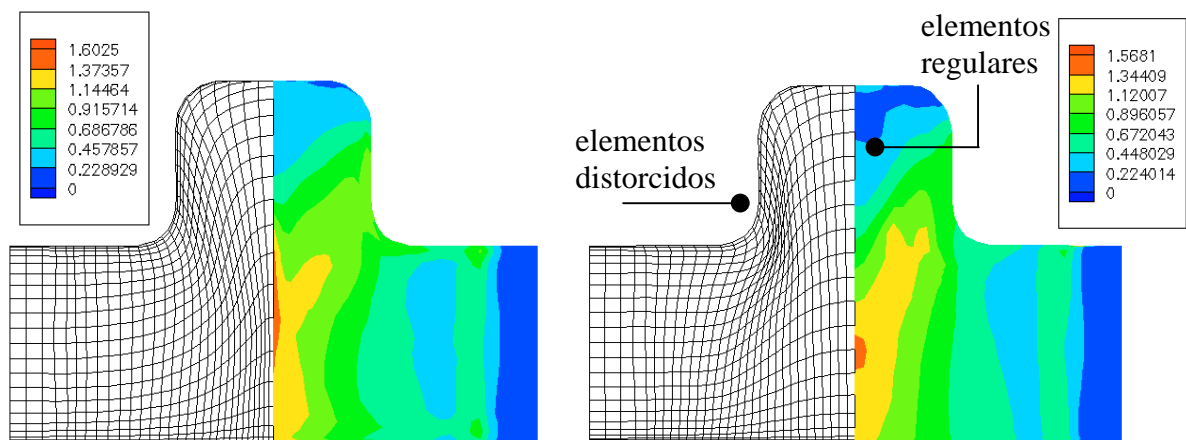


FIGURA 84 – Hidroconformação - formulação LA com valores de \bar{E}^p

A Fig. 85 apresenta uma vista do plano YZ com valores de \bar{E}^p nas formulações LA e LEA.



(a) Formulação LA

(b) Formulação LEA

FIGURA 85 - Vista plana YZ com valores de \bar{E}^p

Na Fig. 85 pode-se observar que a malha na formulação LEA apresenta, em relação à formulação LA, elementos mais regulares na zona próxima à simetria e elementos mais distorcidos na zona próxima à curva. Isto acontece devido a um fenômeno similar a um cisalhamento, que ocorre na zona próxima à curva. As técnicas de realocação nodal para a formulação LEA não conseguem melhorar a qualidade da malha neste tipo de situação. Cabe colocar que a solução para este problema também não foi encontrada na literatura.

A Fig. 86 apresenta uma vista interna do tubo para a formulação LA. Nesta vista nota-se que há um aumento da espessura do tubo devido à compressão do mesmo, o que também é verificado na prática. Pode-se ver também que há uma faixa de dois elementos na extremidade do tubo que não aumentam de espessura. Isto acontece porque estes elementos estão totalmente restritos, com o objetivo de evitar instabilidades no início do processo de hidroconformação.

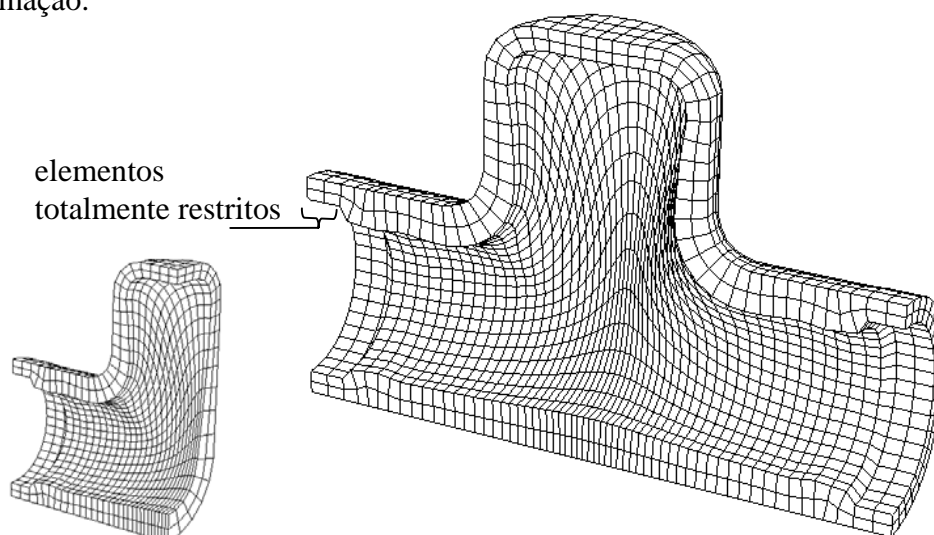


FIGURA 86 - Formulação LA- Vista de dentro do tubo

A Tab. 7 apresenta um resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA.

TABELA 7 - Resumo dos resultados obtidos nas formulações LA e LEA

Item	Configuração inicial	Config. final - Formulação	
		LA	LEA
Nº total de passos	-	90.913	136.475
\bar{E}^p máxima	0	1,6025	1,5681
Razão de aspecto	1,8024	7,7205	2,6586
Ângulo de borda (°)	10,191	66,793	88,253
Ângulo de obliquidade (°)	3,6338	65,466	82,674
Ângulo de empenamento (°)	2,9714	8,3722	14,027
Ângulo de torção (°)	1,3020	18,739	30,006
Razão de afilamento	0,9095	0,6619	0,4802

Da Tab. 7 nota-se que os valores máximos dos critérios de distorção são maiores na formulação LEA, devido ao fenômeno de cisalhamento já comentado. A exceção fica para a razão de aspecto que tem valor máximo de 2,6586 para a formulação LEA e 7,7205 para a formulação LA, apesar de os elementos terem uma distorção específica maior na formulação LEA. Isto mostra que se deve levar em conta vários critérios de distorção para avaliar de forma correta a qualidade da malha.

Foi realizado um comparativo da formulação LA com resultados experimentais de ensaios realizados no Laboratório de Transformação Mecânica (LdTM/UFRGS) utilizando o chumbo como material interno ao invés de água sob pressão. Isto foi feito porque não havia um equipamento capaz de realizar a conformação mecânica através da aplicação de água sob pressão. Após ser realizada a conformação da peça, ela é aquecida e, devido ao chumbo ter um ponto de fusão mais baixo que o cobre, ele é removido. Para possibilitar uma melhor comparação com os resultados experimentais, também se modelou o chumbo como material interno na simulação numérica. Os parâmetros dos materiais são:

Cobre:

Módulo de elasticidade $E = 100.000 \text{ MPa (N/mm}^2\text{)}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Densidade $\rho = 0,0027 \text{ kg/m}^3$

Material elastoplástico perfeito com tensão de escoamento $\sigma^v = 20 \text{ MPa}$

Chumbo:

Módulo de elasticidade $E = 20.000 \text{ MPa}$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Densidade $\rho = 0,0027 \text{ kg/m}^3$

Material elastoplástico perfeito com tensão de escoamento $\sigma^v = 150 \text{ MPa}$

A Fig. 87 apresenta um gráfico comparativo da força de conformação em função do deslocamento do tubo entre formulação LA e os resultados experimentais.

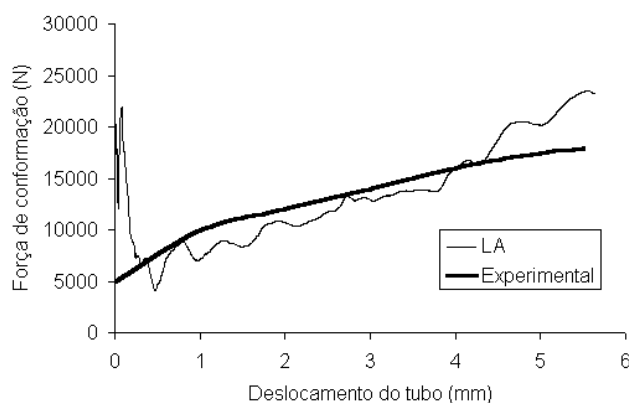


FIGURA 87 - Deslocamento do tubo (mm) x Força de conformação (N)

Da Fig. 87 nota-se que os resultados experimentais e os da formulação LA estão próximos em na maior parte do gráfico, mostrando que a simulação numérica representa com boa precisão o problema experimental proposto.

7.6 ESTRICÇÃO DE UMA BARRA

Esta aplicação consiste em tracionar uma barra pelas suas extremidades, causando uma estrição (diminuição da seção transversal) no centro da mesma. O tempo de análise é 2s. Devido à dupla simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da barra é modelada (Fig. 88).

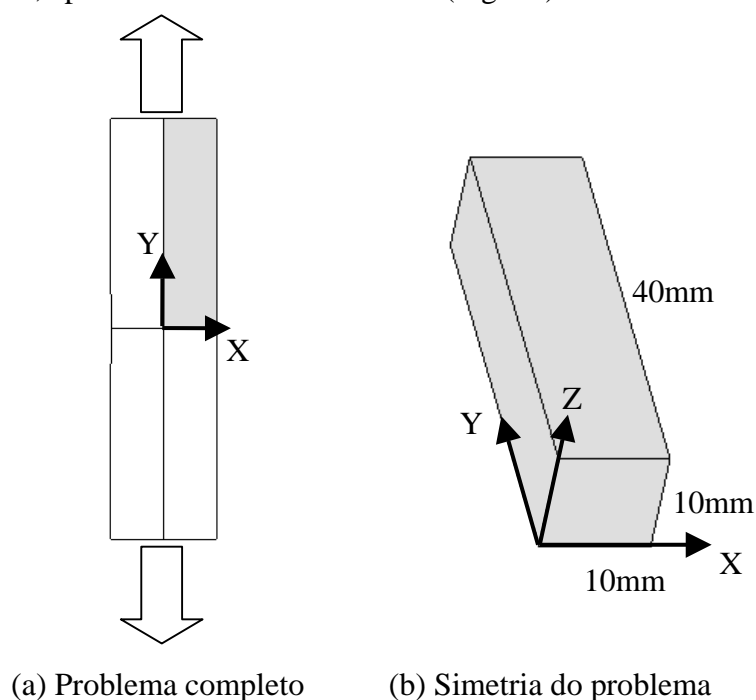


FIGURA 88 - Estrição de uma barra

As condições de contorno nos planos de simetria são: restrição na direção Y na face XZ e restrição na direção X na face YZ.

Os parâmetros do material são:

Módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ MPa}$
 Lei constitutiva elastoplástica com endurecimento isótropo linear, cujos dados são:
 -Tensão de escoamento $\sigma^v = 500 \text{ MPa}$
 -Módulo de endurecimento linear $h = 500 \text{ MPa}$ $\bar{\sigma} = \sigma^v + h \bar{E}^p$
 Coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$

A malha é composta de 630 nós e 400 elementos. Neste exemplo as técnicas de realocação nodal do cap.4 não produzem bons resultados, uma vez que utilizam volumes, áreas e distâncias como fator de ponderação, e esses parâmetros procuram equalizar o tamanho dos elementos. Aqui, faz-se necessário concentrar a malha na zona de estrição,

onde os elementos ficam bastante alongados (Fig. 89), e, por consequência, torná-la mais esparsa no resto do sólido.

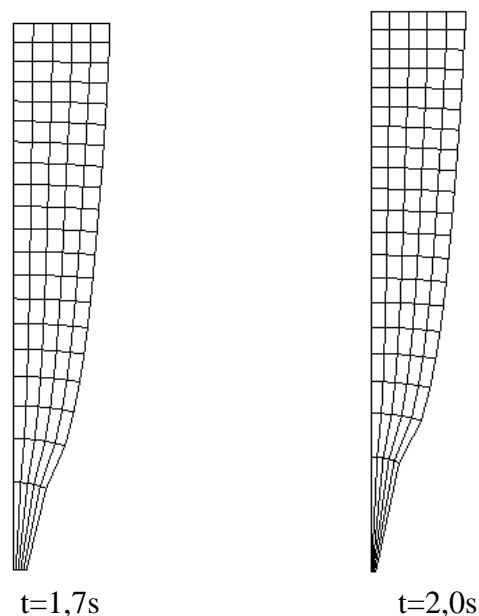


FIGURA 89 - Estricção de uma barra. Malha deformada na formulação LA.

Tentou-se utilizar o erro (seção 6.2) e também a deformação plástica equivalente como fator de ponderação (Askes e Sluys, 2000), ao invés dos volumes. Em ambos os casos, não se conseguiu concentrar satisfatoriamente a malha na zona de estricção (Fig. 90), onde ocorrem altos gradientes de deformação plástica equivalente. Isto se deve ao fato de que a realocação nodal é controlada em nível local, em função apenas dos nós dos elementos vizinhos. A análise foi interrompida quando $t=1,7s$ devido à alta distorção dos elementos.

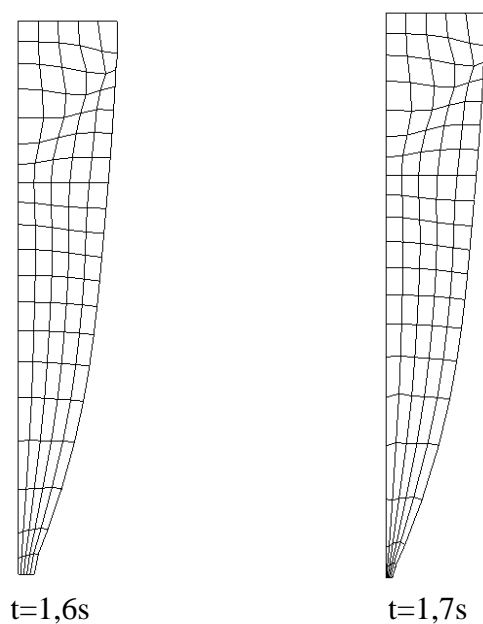


FIGURA 90 - Formulação LEA utilizando a \bar{E}^p como fator de ponderação

Para casos como o da estrição, uma solução adequada poderia ser obtida através da utilização de técnicas de realocação nodal em que seja possível um controle global do processo de realocação. O mapeamento de superfícies, com superfícies paramétricas por exemplo, poderia ser utilizado com este fim. Dessa forma, poderia-se empregar o erro ou uma grandeza como a deformação plástica equivalente para concentrar a malha em zonas mais críticas e deixá-la mais esparsa em zonas de pouca distorção ou deformação.

8 CONCLUSÕES

A formulação LEA apresentada permite reduzir, em muitos casos, problemas relacionados à distorção da malha que ocorrem na formulação LA devido ao movimento da malha e da matéria estarem acoplados. Ela é uma opção interessante para simular processos de grandes deformações, tais como conformação mecânica.

Como mostram os exemplos, os valores de deformação plástica equivalente e outros parâmetros de comparação obtidos com a formulação LEA 3D são compatíveis com os resultados encontrados na literatura para casos 2D. O número de passos e iterações na formulação LEA são, em geral, menores que na formulação LA, devido à formulação LEA evitar a distorção excessiva da malha e tornar mais rápida a obtenção de configurações em equilíbrio. Os exemplos deixam claro que a formulação LEA não é capaz de eliminar todo o tipo de distorção de malha, sendo indicado especialmente para regularizar malhas sujeitas a deformações longitudinais e nem tanto a malhas sujeitas à distorção específica (como no caso da hidroconformação).

Comparando os resultados obtidos com a formulação LEA proposta com os da formulação LA com remalhamento, pode-se observar que a formulação LEA é uma boa alternativa em termos de precisão e simplicidade. Usando uma descrição LEA, não é necessário seguir os passos usuais de um remalhamento: interrupção da análise quando a malha é considerada distorcida, geração de uma malha totalmente nova, transferência de dados e reinício do processo. Além disso, as técnicas de remalhamento podem ser menos eficazes que a formulação LEA se os nós de contorno não são realocados (ver anexo A5).

As técnicas de realocação nodal desenvolvidas são válidas para malhas estruturadas (malhas que têm o número de elementos ao redor de um nó de acordo com o Cap.4). O algoritmo computacional é simples e de fácil implementação. Não há necessidade de nenhuma definição prévia do usuário nem de informações adicionais além daquelas requeridas pela formulação LA. Não são criados novos nós ou elementos e, portanto, a topologia da malha original é mantida.

Se o processo de realocação é aplicado frequentemente, a malha LA permanece próxima da malha realocada. Neste caso, um desenvolvimento das tensões de séries de Taylor pode ser usado para a transferência de dados. Caso contrário, um algoritmo de busca e interpolação, tal como o algoritmo não-iterativo proposto, deve ser empregado. A redução do conjunto de busca, geralmente aplicável à formulação LEA, torna este algoritmo ainda mais rápido. Essas duas técnicas de transferência de dados podem ser utilizadas em processos onde a velocidade relativa entre a malha e a matéria é pequena em cada passo de tempo. Para se utilizar a formulação LEA em processos de conformação mecânica (tais como laminação) quando é atingido o regime estacionário, onde a velocidade relativa entre a malha e a matéria é grande, deve-se implementar técnicas de transferência de dados do tipo Godunov ou Petrov-Galerkin.

O processo de refinamento de malhas, empregado no caso da compressão de um cilindro no anexo A6, consegue evitar a degeneração de elementos hexaédricos em pentaedros, diminuindo a distorção da malha e melhorando os resultados de deformação plástica equivalente obtidos. Contudo, o refinamento realizado é uma solução específica para este caso, não podendo ser generalizado para outras situações.

Para utilizar a formulação LA com remalhamento de forma eficiente, deve-se pesquisar formas alternativas de geração de malhas 3D não-estruturadas que possibilitem a geração a partir de diversos pontos, tanto no contorno como no interior dos sólidos, com o objetivo de manter uma boa qualidade da malha em toda a peça. Além disso, o gerador de malhas deve ser capaz de aplicar as restrições na geometria e não nos elementos finitos, com o intuito de facilitar o processo de reinício da análise após o remalhamento. Cabe colocar também que o remalhamento é uma técnica mais geral que a formulação LEA, podendo vir a trazer melhores resultados para alguns problemas de grandes deformações, especialmente em casos onde haja cisalhamento.

Sugere-se como propostas para trabalhos futuros com a formulação LEA, a busca de formas mais gerais de realocação nodal que sejam aplicáveis a malhas não-estruturadas. O MMP pode ser facilmente generalizado. Por outro lado, no caso do MINQ, isso seria mais complicado visto que não haveria necessariamente nós formando 1 ou 2 linhas ao redor de nós externos a serem realocados. Poderia se investigar técnicas de realocação nodal que realizem o mapeamento de superfícies, com superfícies paramétricas por exemplo, tornando possível um controle global do processo de realocação. Essas técnicas poderiam ser empregadas em

conjunto com o erro ou uma grandeza como a deformação plástica equivalente para concentrar a malha em zonas mais críticas e deixá-la mais esparsa em zonas de pouca distorção ou deformação. Dessa forma, problemas como o da estrição, onde ocorre uma tração da peça e alguns elementos na zona de máxima deformação ficam bastante alongados, podem ter uma solução satisfatória.

A formulação LEA também poderia ser empregada em conjunto com um processo de remalhamento. Esta formulação seria usada até o momento em que se julgasse ser necessário um remalhamento. Neste ponto a análise seria interrompida, uma nova malha mais uniforme gerada e a formulação LEA utilizada novamente ao se reiniciar a análise.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ASKES, H.; RODRÍGUEZ-FERRAN, A.; HUERTA, A. Adaptive analysis of yield line patterns in plates with the arbitrary Lagrangian-Eulerian method. **Computers and Structures**, v. 70, p. 257-271, 1999.
- 2 ASKES, H.; SLUYS, L. J. Remeshing strategies for adaptive ALE analysis of strain localisation. **European Journal of Mechanics A-Solids**, v. 19, n. 3, p. 447-467, 2000.
- 3 AYMONE, J. L. F. **Implementação de estratégia de refinamento tipo h, sem formação de nós irregulares, no sistema GAELI**. Porto Alegre, 1996. 140p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- 4 AYMONE, J. L. F.; BITTENCOURT, E.; CREUS, G. J. A 3-D arbitrary lagrangian-eulerian formulation for metal-forming processes In: COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING'99 - 20th IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (XX CILAMCE), 20., 1999, São Paulo. **Proceedings**. p. 011.1-011.20.
- 5 AYMONE, J. L. F.; GROEHS, A. G. Refinamento automático múltiplo de malhas bi e tridimensionais sem criação de nós irregulares. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 17., 1995b, Curitiba. **Anais**. UFPR, 1995. v. 1, p. 191-206.
- 6 BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.C. A posteriori error estimates for the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 12, p. 1597-1615, 1978.
- 7 BATHE, K-J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- 8 BENSON, D. J. An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear FE programs. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 72, p. 305-350, 1989.
- 9 BENSON, D. J. Computational methods in lagrangian and eulerian hydrocodes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 99, p. 235-411, 1992.
- 10 BENSON, D. J.; HALLQUIST, J. O. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 78, p. 141-163, 1990.

- 11 BET, I. **Pós-processamento no sistema GAELI.** Porto Alegre, 1989. 141p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- 12 BITTENCOURT, E. **Tratamento do problema de contato e impacto em grandes deformações pelo método dos elementos finitos.** Porto Alegre, 1994. 223p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- 13 BITTENCOURT, E; CREUS, G. J. Finite element analysis of three-dimensional contact and impact in large deformation problems. **Computers and Structures**, v. 69, p. 219-234, 1998.
- 14 BITTENCOURT, E; CREUS, G. J. Uso de uma formulação lagrangeana-euleriana na solução de problemas de conformação mecânica tridimensional. In: CONGRESO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS Y SUS APLICACIONES, 9., 1995, Bariloche. **Proceedings**. p. 315-324.
- 15 BOMAN, R.; PONTHOT, J.-P. ALE methods for determining stationary solutions of metal forming processes. To appear in: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING (ECCOMAS 2000).
- 16 BRAUDEL, H. J.; ABOUAF, M.; CHENOT, J.-L. An implicit incrementally objective formulation for the solution of elastoplastic problems at finite strain by the FEM. **Computer and Structures**, v. 24, p. 825-843, 1986.
- 17 CAREY, G. F.; KENNON, S. Adaptive mesh redistribution for a boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 2315-2325, 1987.
- 18 CHENG, J-H. Automatic adaptive remeshing for finite element simulation of forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 26, n. 1, p. 1-18, 1988.
- 19 CHENG; J.; KIKUCHI, N. A mesh re-zoning technique for finite element simulations of metal forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 23, n. 2, p. 219-228, 1986.
- 20 CHENOT, J-L.; BAY, F. An overview of numerical modelling techniques. **Journal of Materials Processing and Technology**, v. 80-81, p. 8-15, 1998.
- 21 COUPEZ, T.; SOYRIS, N.; CHENOT, J-L. 3-D finite element modelling of the forging process with automatic remeshing. **Journal of Materials Processing and Technology**, v. 27, p. 119-133, 1991.
- 22 CRAWFORD, R.; ANDERSON, D.; WAGGENSPACK, W. Mesh rezoning of 2D isoparametric elements by inversion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 28, n. 3, p. 523-531, 1989.
- 23 DIAZ, A. R.; KIKUCHI, N.; TAYLOR, J. E. A method for grid optimization for finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 41 (1983) 29-45.
- 24 DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 33, nos. 1-3, p. 689-723, 1982.

- 25 DONEA, J.; FASOLI-STELLA, P.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P.; JONES, A. V. The computer code EURDYN-1M for transient dynamic fluid-structure interaction, Part. I: Finite element modelling, Report EUR 6751, Commission of the European Communities, 1980.
- 26 DONEA, J. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods., in: T. Belytschko e T. J. R. Hughes (Eds.) *Computational Methods for Transient Analysis*, p. 473-516. Elsevier, 1983.
- 27 DONEA, J.; HUERTA, A.; CASEDEI, F. Finite element models for transient dynamic fluid interaction, in: Ladaveze et al. (Eds.) *New advances in computational structural mechanics*, p. 335-346, 1992.
- 28 DYDUCH, M., HABRAKEN, A. M., CESCOTTO, S. Automatic adaptive remeshing for numerical simulations of metal forming. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 101, n. 1 a 3, p. 283-298, 1992.
- 29 ERGATOUDIS, J. G. **Isoparametric finite elements in two or three dimensional stress analysis**. Swansea, 1968. 141 p. Thesis (Phd. Course) - Division of Civil Engineering of School of Engineering, University College of Swansea.
- 30 FOURMENT, L.; CHENOT, J.-L. Error estimators for viscoplastic materials: Application to forming processes. **Engineering Computations**, v. 12, p. 469-490, 1995.
- 31 FREY, P.; SARTER, B.; GAUTHERIE, M. Fully automatic mesh generation for 3-D domains based upon voxel sets. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 37, n. 16, p. 2735-2753, 1994.
- 32 GADALA, M. S.; WANG, J. ALE formulation and its application in solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 167, p. 33-55, 1998.
- 33 GADALA, M. S.; WANG, J. Simulation of metal forming processes with finite element methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, p. 1397-1428, 1999.
- 34 GHOSH; S.; RAJU, S. R-S adapted arbitrary lagrangian-eulerian finite element method of metal-forming with strain localization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 3247-3272 1996.
- 35 GOLIAS, N. A.; TSIBOUKIS, T. D. An approach to refining three-dimensional tetrahedral meshes based on Delaunay transformations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 37, n. 5, p. 793-812, 1994.
- 36 HABER, R. B. A mixed eulerian-lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 43, n. 2, p. 277-292, 1984.
- 37 HABRAKEN, A. M., CESCOTTO, S. An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 1503-1525, 1990.
- 38 HALLQUIST, J. O. **NIKE 2D: An implicit, finite-deformation, finite element code for analyzing the static and dynamic response of three-dimensional solids**. California, USA, 1979. University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCRL-52678.

- 39 HALLQUIST, J. O. **User's manuals for DYNA 2D - An explicit two-dimensional hydrodynamic finite element code with interactive rezoning.** California, USA, 1982. University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-18756, Rev. 1.
- 40 HARTLEY, P.; STURGESS, C. E. N.; ROWE, G.W. Computer simulation of metal forming processes (elastic-plastic finite-element analysis of forging). **Advances in Engineering Software**, Oxford, v. 4, p. 20-25, 1982.
- 41 HINTON, E.; CAMPBELL, J. S. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, p. 461-480, 1974.
- 42 HUETINK, J.; VREEDE, P. T.; VAN DER LUGT, J. Progress in mixed eulerian-lagrangian finite element simulation of forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 1441-1457, 1990.
- 43 HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K.; ZIMMERMANN, T. K. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 29, n. 3, p. 329-349, 1981.
- 44 JAYADEVA, K. R.; NARASIMHAN, R. Finite element simulation of a wedge indentation. **Computer & Structures**, Oxford, Great Britain, v. 73, n. 3 e 4, p. 63-74, 1995.
- 45 KIRIDENA, V.; CHAUDHARY A.; GUNASEKENA, J.; MORGAN, J. A 3-D search and interpolate algorithm for remeshing in metal forming analysis, In: NUMIFORM '89 - International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, 3th, 1989, Fort Collins, Colorado. **Proceedings**. p. 185-189.
- 46 KITA, E.; KAMIYA, N. Recent studies on adaptive boundary element methods. **Advances in Engineering Software**, v. 19, p. 21-32, 1994.
- 47 LEE, N-S.; BATHE, K-J. Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis. **Finite Element Analysis and Design**, v. 16, p. 99-139, 1994.
- 48 LEITLOFF, F.-U. A hidroconformação de autopeças tem um bom potencial técnico econômico. **Máquinas e Metais**, n. 385, p. 115-124, 1998.
- 49 LEMAÎTRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. **Journal of Engineering Materials and Technology**, New York, v. 107, p. 83-89, 1985.
- 50 LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; CHANG, H. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for path-dependent materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 58, n. 2, p. 227-245, 1986.
- 51 LIU, W. K.; CHANG H.; CHEN, J-S.; BELYTSCHKO, T.; ZHANG, Y. F. Arbitrary lagrangian-eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 68, p. 259-310, 1988.
- 52 MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium.** Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1969.
- 53 MARCON, A.; BITTENCOURT, E.; CREUS, G. J. On the integration of stresses in large deformation plasticity. **Engineering Computations**, v. 16, p. 49-69, 1999.

- 54 MARTINS, P. A. F.; MARMELO, J. C. P.; RODRIGUES, J. M. C.; BARATA MARQUES, M. J. M. PLARMSH3 - A three dimensional program for remeshing in metal forming. **Computer & Structures**, Oxford, Great Britain, v. 53, n. 5, p. 1153-1166, 1994.
- 55 MARUSICH, T. D.; ORTIZ, M. Modelling and simulation of high-speed machining. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, p. 3675-3695, 1995.
- 56 McMEKING, R. M.; RICE J. R. FE formulation for problems of large elastic-plastic deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 11, p. 601-616, 1975.
- 57 MSC/PATRAN 7.5. **User's manual**. Part 4: Finite element modeling, The verify action, cap. 11, p.11-51 – 11-67, 1996.
- 58 NAGTEGAAL, J .C. On the implementation of inelastic constitutive equation with special reference to large deformation analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 33, p. 469-484, 1982.
- 59 NAYLOR, D. J. Filling space with tetrahedra. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, p. 1383-1395, 1999.
- 60 OLMÍ, F. **Uma técnica de remalhamento interativo aplicada a problemas de grandes deformações elastoplásticas**. Porto Alegre, 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- 61 OLMÍ, F.; BITTENCOURT, E.; CREUS, G. J. Uma técnica de remalhamento interativo aplicada a problemas bidimensionais envolvendo grandes deformações elastoplásticas. In: CONGRESO ARGENTINO DE MECÁNICA COMPUTACIONAL, 5., 1996, Tucumán, Argentina. **Proceedings**. v. 16, p. 133-141.
- 62 OLOVSSON, L. **Finite element analysis of metal cutting operations**. Linköping, 1997. Thesis (Phd. Course) - Linköping University.
- 63 PAVANACHAND, CH.; KRISHNAKUMAR, R. Remeshing issues in the finite element analysis of metal forming problems. **Journal of Materials Processing and Technology**, v. 75, p. 63-74, 1998.
- 64 PEANO, A. Gauss-Lobatto integration of high precision tetrahedral elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 18, p. 311-320, 1982
- 65 PERIC, D.; VAZ Jr.; OWEN, D. R. J. On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains: computational issues and industrial applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 176, n. 1-4, p. 279-312, 1999.
- 66 PERIC, D.; YU, J.; OWEN, D. R. J. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: Application to the numerical simulation of localization in classical and cosserat continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 1351-1379, 1994.
- 67 PIJAUDIER-CABOT, G.; BODÉ, L. Arbitrary lagrangian-eulerian finite element analysis of strain localization in transient problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, p. 4171-4191, 1995.

- 68 PONTHOT, J.-P. **Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis.** Liège, Belgique, 1995. Thesis (Phd. Course) - Université de Liège.
- 69 PONTHOT, J.-P.; BELYTCHKO, T. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for element-free Galerkin method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 152, n. 1-2, p. 19-46, 1998.
- 70 PONTHOT, J.-P.; HOGGE, M. The use of the eulerian-lagrangian FEM in metal forming applications including contact and adaptive mesh. In: ASME WINTER ANNUAL MEETING, 1991, Atlanta, Ga. Proceedings. Chandra and J. N. Reddy, eds. *Advances in Finite Deformation Problems in Material Processing AMD-125*, 1991, p. 44-64.
- 71 SCHREURS, P. J. G.; VELDPAUS, F. E.; BREKELMANS, W. A. M. Simulation of forming processes, using the arbitrary eulerian-lagrangian formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 58, n. 1, p. 19-36, 1986.
- 72 STAINIER, L. **Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement.** Liège, Belgium, 1995. Thesis (Phd. Course), Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- 73 SZCZYGIEL, I.; SZLEK, A.; BIALECKI, R.; NOWAK, A. J. Identification of the boundary surfaces in 3D finite element codes. **Advances in Engineering Software**, v. 14, p. 33-39, 1992.
- 74 SZENTMIHALI, V.; K., LANGE; TRONEL, Y.; CHENOT, J.-L.; DUCLOUX, R. 3-D finite element simulation of the cold forging of helical gears. **Journal of Materials Processing and Technology**, v. 43, p. 279-291, 1994.
- 75 TAYLOR, L. M.; BECKER, E. B. Some computational aspects of large deformation, rate-dependent plasticity problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 41, n. 3, p. 251-277, 1983.
- 76 TEIXEIRA, F.G. **Interface gráfica para geração de modelos de matrizes para conformação mecânica**, Seminário de Doutorado, Porto Alegre, 1999. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- 77 VAZ Jr., M.; DUTKO, M.; OWEN, D. R. J. Adaptive strategy for ductile fracture analysis in damaged elastoplastic solids, in: S. Idelsohn, E. Onate e E. Dvorkin (Eds.) *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, p. 1-19, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998.
- 78 WEAST, R. C.; SELBY, S. B. **Handbook of tables for mathematics.** 4.ed. Cleveland: CRC Press, 1975. 1152p.
- 79 YANG, H. T. Y.; HEINSTEIN, M.; SHIH, J. M. Adaptive 2D finite element simulation of metal forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 28, p. 1409-1428, 1989.
- 80 ZAVATIERI, P. D.; DARI, E. A.; BUSCAGLIA, G. C. Optimization strategies in unstructured mesh generation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 39, n. 12, p. 2055-2071, 1996.

- 81 ZHU, Y. Y.; ZACHARIA, T.; CESCOTTO, S. Application of fully automatic remeshing to complex metal-forming analyses. **Computer & Structures**, Oxford, Great Britain, v. 62, n. 3, p. 417-427, 1997.
- 82 ZIENKIEWICZ, O. C.; HUANG, G. C. A note on localization phenomena and adaptive finite-element analysis in forming processes. **Communications in Applied Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 6, p. 71-76, 1990.
- 83 ZIENKIEWICZ, O. C.; HUANG, G. C.; LIU, Y. C. Adaptive FEM computation of forming process - application to porous and non-porous materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 30, p. 1527-1553, 1990.
- 84 ZIENKIEWICZ, O. C.; LIU, Y. C.; HUANG, G. C. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 25, p. 23-42, 1988.
- 85 ZIENKIEWICZ, O. C.; ROJEK, J.; TAYLOR, R. L.; PASTOR, M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 43, p. 565-583, 1998.
- 86 ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sussex, England, v. 24, p. 337-357, 1987.

ANEXO A - FORMULAÇÃO LA COM REMALHAMENTO

Muitos dos desenvolvimentos executados neste trabalho podem ser aproveitados na implementação de um remalhamento para a formulação LA. Neste anexo serão feitos alguns comentários com relação às dificuldades e problemas a serem enfrentados para isso, além de um comparativo com a formulação LEA apresentada.

Os passos a serem seguidos quando se utiliza a formulação LA com remalhamento são: avaliação da distorção e do erro, interrupção da análise quando a malha é considerada distorcida, geração de uma nova malha, transferência de dados da malha velha para a nova e reinício da análise a partir do momento no qual ela havia sido interrompida.

Como se pode notar, vários desses passos são também necessários na formulação LEA e foram apresentados neste trabalho. A seguir faz-se comentários a respeito de cada um deles.

A.1 Avaliação da distorção e do erro

Durante a análise na formulação LA com remalhamento, é feita a avaliação da distorção e do erro para estimar a precisão dos resultados obtidos e para decidir o momento em que a análise deve ser interrompida. Esta avaliação está descrita no Cap. 6 e pode ser usada diretamente na formulação LA com remalhamento. Além disso, foi implementada a possibilidade de o usuário impor um limite máximo de distorção e/ou erro, a partir do qual a análise deve ser interrompida.

Serão empregados elementos tetraédricos (ver anexo A.2). O fator de qualidade Q para estes elementos é similar ao utilizado para elementos hexaédricos (Zavatieri, Dari e Buscaglia, 1996), mudando apenas o fator multiplicativo para obtenção de valores de Q entre 0 e 1.

$$Q = 1832 \frac{V}{P^3} \quad (126)$$

A.2 Geração de uma nova malha

Após a interrupção da análise, uma nova malha mais uniforme deve ser gerada. Para isso, a primeira providência é a identificação do contorno do sólido (nós e faces), o qual vai servir de base para a geração da nova malha. O processo de identificação das faces externas da malha de elementos finitos, apresentado na seção 4.1.2 para a realocação nodal em superfícies planas, pode ser empregado para este fim.

De posse dos dados do contorno do sólido, parte-se para a geração da malha nova. Aqui residem as maiores dificuldades da implementação de um remalhamento para a formulação LA.

Em problemas de sólidos 3D, manter a correta representação do contorno dos sólidos é uma tarefa complicada quando os nós de contorno mudam de posição no remalhamento. Além disso, é preciso evitar a mudança de volume, devido ao remalhamento, em relação à formulação LA pura.

Existe também o problema em relação ao tipo de elemento a ser utilizado. O elemento hexaédrico linear (de 8 nós) tem boa precisão, mas é difícil utilizá-lo em um gerador de malhas não-estruturadas por não se conseguir, no estado atual dos desenvolvimentos realizados na área, representar bem geometrias complexas.

Por outro lado, um elemento tetraédrico linear (de 4 nós) usual, que pode ser facilmente implementado colapsando nós de um hexaedro de 8 nós (Peano, 1984) e se adapta melhor a geometrias complexas, tem pouca precisão e pode levar a problemas de incompressibilidade. Este problema, também conhecido como travamento ou "*locking*" da malha, faz com que a malha não consiga se movimentar e a estrutura fique trancada, inviabilizando o prosseguimento da análise. O anexo A.5 apresenta resultados obtidos com um remalhamento para a formulação LA utilizando elementos tetraédricos lineares.

Diante dos problemas apresentados pelo hexaedro de 8 nós e pelo tetraedro linear usual, pode-se vislumbrar duas alternativas que podem conduzir a bons resultados. A primeira seria utilizar um tetraedro linear especial que não sofra do problema de travamento da malha. Alguns trabalhos já estão tratando deste tema, como o artigo de Chenot e Bay (1998), que propõe a utilização de um elemento linear com um nó adicional no seu centro de gravidade. Para evitar o travamento da malha, as velocidades são calculadas usando os 5 nós do elemento

e a pressão usando apenas os 4 nós externos. A segunda alternativa é usar um elemento tetraédrico quadrático (de 10 nós), que possui boa precisão e sobre o qual já há bons resultados (Coupez, Soyris e Chenot, 1991; Szentmihali et al., 1994).

A.3 Transferência de dados

Como a nova malha obtida pelo gerador de malhas não-estruturadas pode ser bem diferente da malha existente no momento da interrupção da análise, apenas a técnica de transferência de dados que utiliza um algoritmo de busca (seção 5.2.2) pode ser empregada.

Esta técnica é aplicável diretamente a elementos hexaédricos de 8 nós e a tetraedros de 4 nós. No caso de elementos tetraédricos de 10 nós, o sistema de equações em (102) não pode ser resolvido porque a matriz de coordenadas dos nós será 10x10 e não mais 4x4. Sendo assim, a transferência de dados torna-se mais complexa, devendo ser feita através de algum processo iterativo ou aproximando os tetraedros quadráticos por tetraedros lineares. Se esta aproximação é feita, o sistema de equações em (102) pode ser resolvido, mas há uma diminuição de precisão, resultante da perda de curvatura das arestas dos tetraedros quadráticos. Isto pode ocasionar a obtenção, no algoritmo de busca, de um elemento da malha antiga que não é aquele ao qual o nó da malha nova realmente pertence.

A.4 Reinício da análise

O algoritmo de reinício da análise consiste em:

a) atualizar a geometria do problema (nós e elementos), para que a análise recomece com a malha inicial sendo a última configuração gravada em arquivo antes da interrupção do processo;

b) atualizar o tempo inicial da análise, recomeçando do momento em que a mesma foi interrompida. Automaticamente, as matrizes de conformação móveis têm sua posição atualizada em função deste tempo;

c) atualizar os deslocamentos prescritos dos nós, descontando os deslocamentos já efetuados em função do tempo de análise decorrido antes da interrupção (válido para nós com deslocamento prescrito diferente de zero);

d) utilizar como condições iniciais: as tensões, deformações plásticas e pressão nos pontos de Gauss; as velocidades e acelerações nodais antes da parada.

O algoritmo de reinício da análise implementado⁷ funciona em casos onde os nós de contorno estão na mesma posição na malha velha (antes do remalhamento) e na nova (após o remalhamento). Isto é um aspecto muito limitante, visto que, a fim de melhorar a qualidade da nova malha, deve-se permitir que ela tenha nós em posição diferente da malha velha.

Para superar a necessidade de o contorno ser fixo, deve-se colocar as restrições e as informações de contato diretamente na geometria e não nos nós. Dessa forma, uma superfície do contorno que tenha restrição na direção X, por exemplo, terá esta restrição aplicada no reinício da análise em todos os nós pertencentes a ela, independentemente da posição dos mesmos. O gerador de malhas não-estruturadas utilizado deve possibilitar a atribuição das restrições e do contato na geometria (linhas, superfícies e volumes) e permitir a passagem desses dados, atribuídos à geometria, para os nós em cada remalhamento, com o intuito de criar o arquivo de dados do METAFOR para o reinício da análise.

⁷ Caso seja necessário, este algoritmo pode também ser aplicado à formulação LEA.

A.5 Comparativo entre a formulação LEA e a formulação LA com remalhamento

Com o objetivo de comparar resultados com a formulação LEA desenvolvida, fez-se a implementação de uma técnica de remalhamento para a formulação LA. O fator de qualidade Q para a avaliação de distorção (Cap. 6), a técnica de transferência de dados que utiliza o algoritmo de busca (seção 5.2.2) e o procedimento para o reinício da análise são os mesmos nas duas formulações.

A geração da malha nova, após a análise ter sido interrompida, foi executada utilizando os programas comerciais disponíveis ANSYS e PATRAN. Esses programas geram malhas não-estruturadas apenas com elementos tetraédricos, tanto lineares como quadráticos. Para evitar o travamento da malha, seria necessário usar elementos quadráticos. Aí surge um problema novo, porque o PATRAN aceita apenas superfícies quadriláteras de lados retos no contorno para o remalhamento, e o ANSYS, apenas superfícies planas. Sendo assim, se fosse utilizado o tetraedro quadrático, a geometria do contorno em superfícies livres (não-planas e de lados curvos) poderia mudar após o remalhamento. Em vista disso, o uso desse elemento foi descartado e o elemento empregado foi o tetraedro linear de 4 nós, implementado no programa METAFOR colapsando nós do elemento hexaédrico de 8 nós (Fig. 91).

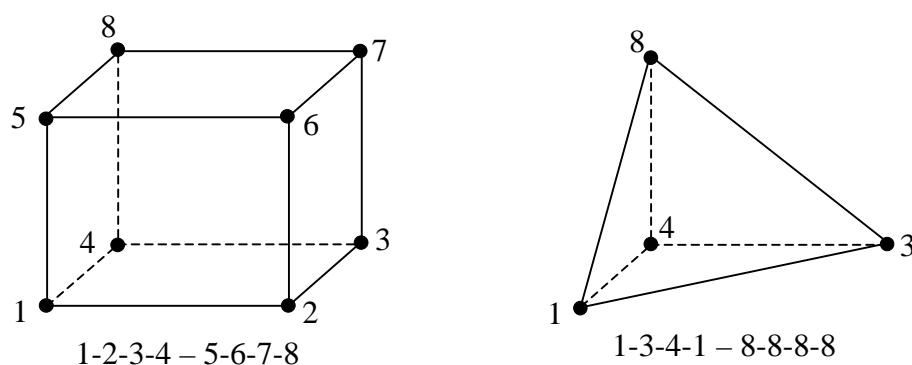


FIGURA 91 – Hexaedro de 8 nós colapsado em tetraedro de 4 nós com conectividades

Mesmo sabendo do problema de travamento da malha, o teste realizado com tetraedros de 4 nós se presta para tecer alguns comentários com relação aos programas de geração de malhas utilizados.

Os programas ANSYS e PATRAN utilizam algoritmos de geração de malhas não-estruturadas, para sólidos 3D, que começam a geração pelo seu contorno e se dirigem para o

centro do sólido. Isto leva à obtenção de elementos de boa qualidade em zonas próximas ao contorno se as faces externas não estão muito distorcidas. Por outro lado, no final da geração, próximo ao centro do sólido, os elementos ficam distorcidos, porque é preciso preencher de qualquer forma o volume que falta, o qual muitas vezes é bastante irregular. Portanto, mesmo se no contorno a malha é de boa qualidade, próximo ao centro do sólido os elementos tendem a ser distorcidos. Além disso, a geração de malhas leva em conta aspectos puramente geométricos como a distorção, sem considerar o erro.

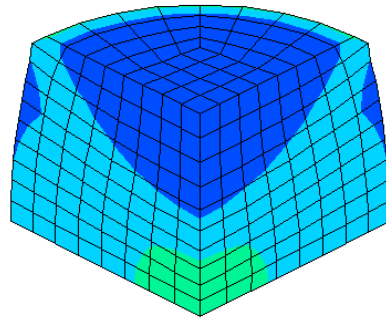
Como as restrições e os dados de contato são aplicados diretamente nos nós da malha, o contorno deve permanecer fixo no remalhamento para possibilitar o reinício da análise. Esta limitação diminui a eficiência do gerador de malhas, visto que é preciso modificar o contorno para que a malha dentro do sólido seja de boa qualidade.

Considerando os aspectos anteriores, aplica-se o remalhamento no exemplo de compressão de um cilindro por uma matriz rígida apresentado na seção 7.4. A malha inicial do cilindro (671 nós e 480 elementos hexaédricos) é mais fina que a da seção 7.4, com o intuito de aumentar o número de elementos tetraédricos de 4 nós ao se realizar o remalhamento, visto que esses elementos são menos precisos. O deslocamento máximo da matriz foi aumentado de 8mm para 12mm, para verificar o comportamento dos elementos tetraédricos.

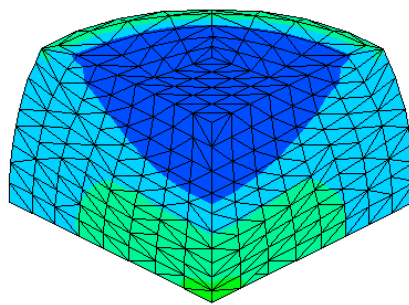
A formulação LEA é utilizada até o deslocamento da matriz, Δ^m , ser igual a 4,2mm (Fig. 92(a)). Neste momento, a análise é interrompida e uma nova malha de tetraedros de 4 nós é gerada no PATRAN, lembrando que o contorno é fixo. A análise é reiniciada utilizando a formulação LA, a qual é empregada a partir daqui até o final do processo. Quando $\Delta^m = 5,4\text{mm}$ (Fig. 92(b)) e $\Delta^m = 8,4\text{mm}$ (Fig. 92(c)), mais dois remalhamentos são feitos. A análise termina com $\Delta^m = 10,2\text{mm}$ (Fig. 92(d)) devido à excessiva distorção da malha. Em todas as figuras apresenta-se os valores de deformação plástica equivalente (\bar{E}^p).

Na Fig. 92(d) nota-se que, devido à falta de simetria da malha, a distribuição de \bar{E}^p não é simétrica. Nesta figura observa-se ainda que o sólido deformado não é simétrico. Isto pode acontecer devido à pouca precisão do tetraedro de 4 nós e ao travamento da malha.

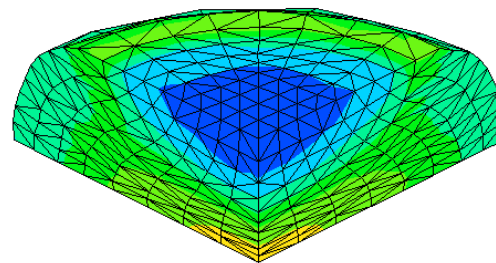
a) $\Delta^m = 4,2$ mm



b) $\Delta^m = 5,4$ mm



c) $\Delta^m = 8,4$ mm



d) $\Delta^m = 10,2$ mm

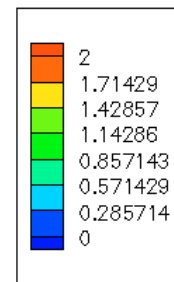
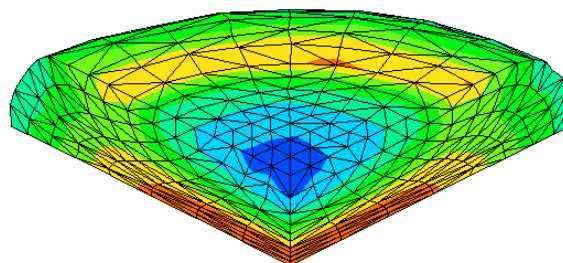


FIGURA 92 - Compressão de um cilindro com valores de \bar{E}^p

a) Malha de hexaedros usando a formulação LEA

b, c, d) Malha de tetraedros usando a formulação LA com remalhamento

Com relação à distorção da malha, pode-se verificar o fator de qualidade Q para tetraedros na Tab. 8.

TABELA 8 - Valores de Q nos diversos remalhamentos

	Δ^m (mm)		
	5,4	8,4	10,2
Q mínimo	0,1764	0,2018	0,1000
Q médio	0,6283	0,6278	0,5919
Q máximo	0,9881	0,9851	0,9707
Vol (mm ³)	1166,64	1164,63	1160,12

Os valores de Q mínimo na Tab. 8 são baixos e não variam muito ao longo do tempo da análise, mesmo aplicando três remalhamentos. Isto mostra que, apesar de os elementos do contorno em $\Delta^m = 5,4$ mm terem uma qualidade razoável, o valor de Q mínimo é próximo ao do tempo $\Delta^m = 10,2$ mm, onde o contorno está bem mais distorcido. Daí conclui-se que os elementos com menor qualidade não estão no contorno e sim próximos ao centro do sólido, devido à forma como é feita a geração da malha no PATRAN e também no ANSYS (de fora para dentro). Sendo assim, mesmo melhorando a qualidade dos elementos de contorno, este tipo de remalhamento não produzirá bons resultados.

Para evitar esse problema, deve-se empregar algoritmos de geração de malha que façam a geração da mesma a partir de diversos pontos, tanto no contorno como no interior, com o objetivo de manter uma boa qualidade da malha em todo o sólido.

Comparando a formulação LEA com o remalhamento apresentado para a formulação LA nota-se que, em muitos casos, se consegue manter uma qualidade razoável da malha ao longo de toda a análise na formulação LEA, o que não acontece na formulação LA com remalhamento. Deve-se pesquisar formas alternativas de geração de malhas 3D não-estruturadas que permitam um melhor aproveitamento do remalhamento para a formulação LA, o qual é uma técnica mais geral que a formulação LEA e pode vir a trazer bons resultados para problemas de grandes deformações (especialmente em casos de forjamento).

A.6 Refinamento para a formulação LA

Uma maneira alternativa de tentar evitar o aparecimento de elementos muitos distorcidos é o refinamento da malha. Quando se utiliza elementos hexaédricos em casos como o da compressão de um cilindro por uma matriz rígida (seção 7.4), observa-se a degeneração de alguns hexaedros em pentaedros (Fig. 93) devido à distorção da malha.

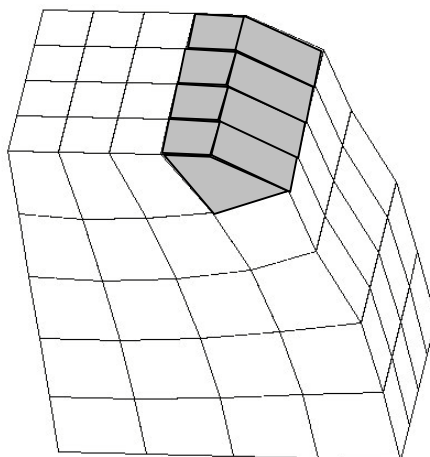


FIGURA 93 - Degeneração de hexaedros em pentaedros (elementos hachurados)

Este fenômeno é muito prejudicial à análise visto que as funções de interpolação empregadas (Eq. (17)) não mais fornecem resultados confiáveis.

Uma alternativa para retardar ou evitar o aparecimento de elementos pentaédricos é o refinamento dos elementos próximos à zona em que as faces estão ficando paralelas (Aymone e Groehs, 1995; Aymone, 1996). Para isso, deve-se primeiramente identificar as faces que estão ficando paralelas e, em seguida, refinar os elementos aos quais elas pertencem.

De modo a identificar faces paralelas em um mesmo elemento, usa-se o procedimento da seção 4.1.2, que verifica se as faces dos elementos estão no mesmo plano, ou seja, são paralelas. São calculados a normal a cada face do elemento e o ângulo entre as faces. Se for verificado que duas faces de algum elemento estão se tornando paralelas (Fig. 94), a análise é interrompida.

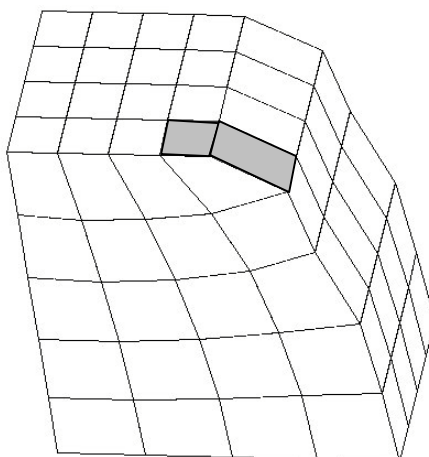


FIGURA 94 - Faces do hexaedro que estão ficando paralelas

O valor máximo aceitável do ângulo entre duas faces, que serve como critério de parada, deve ser indicado pelo usuário.

No momento em que a análise é interrompida, são gravados em arquivo os últimos dados de geometria e tensões. Além disso, são gravados os nomes dos nós ao redor dos quais vai-se realizar o refinamento. Esses nós são obtidos usando a idéia de que, no elemento distorcido, há 6 nós pertencentes às duas faces que estão ficando paralelas, os quais são indicados por (Δ) na Fig. 95. Dois nós do elemento não pertencem a elas. Esses dois nós, representados por (\bullet), devem ser usados para o refinamento.

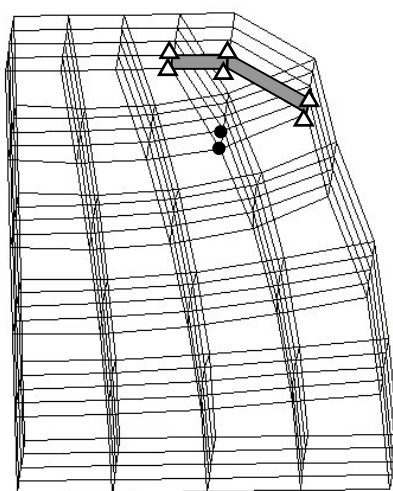


FIGURA 95 - Nós para o refinamento (\bullet), nós das faces paralelas que não são refinados (Δ)

Os elementos vizinhos ao elemento distorcido (Fig. 95) também são refinados para que não apareçam nós irregulares (sem correspondentes nos elementos vizinhos) (ver Fig. 96). Mesmo que apenas um elemento precise ser refinado, todos os elementos vizinhos também serão refinados para manter a compatibilidade (Fig. 96). Pode-se imaginar que o refinamento proposto funciona como um refinamento 2D com várias camadas.

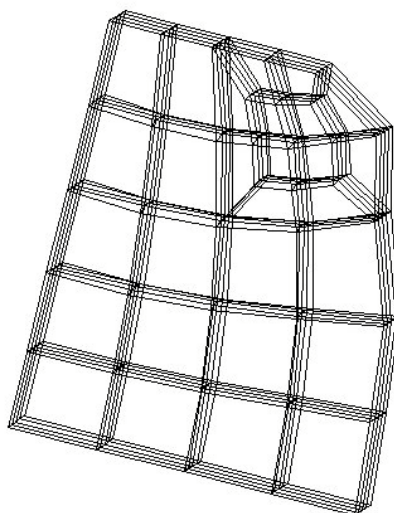
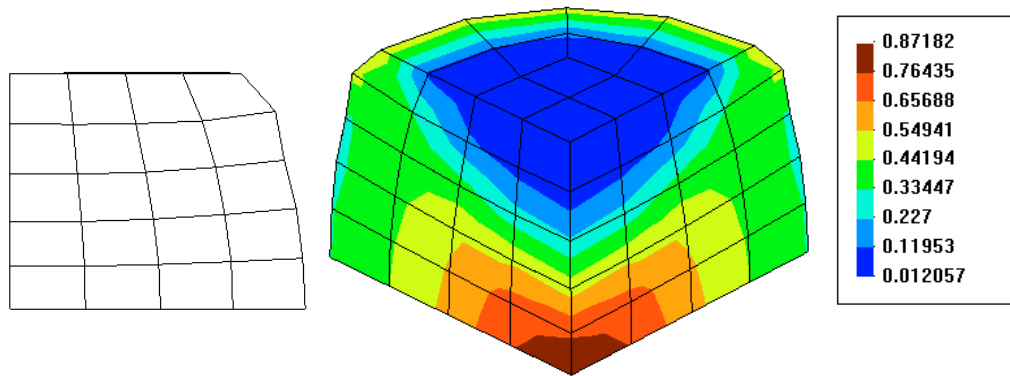


FIGURA 96 - Refinamento ao longo de uma linha que atravessa o sólido

Após o refinamento, são executados os passos usuais de um remalhamento: passagem de dados da malha velha para a malha refinada e reinício da análise a partir do ponto onde ela foi interrompida.

Para o caso da compressão de um cilindro (seção 7.4), apresenta-se a seguir os resultados obtidos com o refinamento.

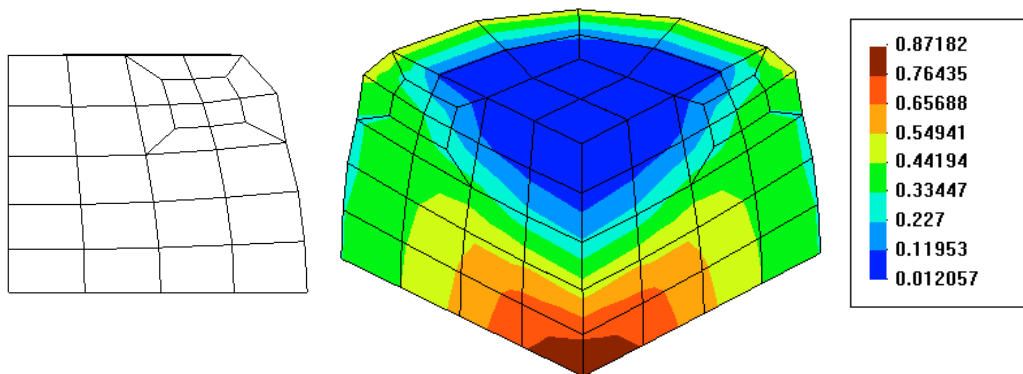
O processo de cálculo é implícito, utilizando o método de Newton-Raphson (seção 3.8.1). A análise começa empregando a formulação LEA, até o momento em que as faces tendem a tornar-se planas ($\gamma > 130^\circ$), quando a mesma é interrompida. Após isso, a malha é refinada e as variáveis de estado são transferidas para ela. As Fig. 97 e 98 mostram, respectivamente, os valores de deformação plástica equivalente (\bar{E}^p) nas malhas velha e refinada no momento da interrupção da análise (deslocamento da matriz=4,8mm). Pode-se observar a precisão da transferência de dados.



(a) Vista do plano XZ

(b) Vista em perspectiva

FIGURA 97 - Valores de \bar{E}^p na malha velha no momento da interrupção da análise -
Formulação LEA

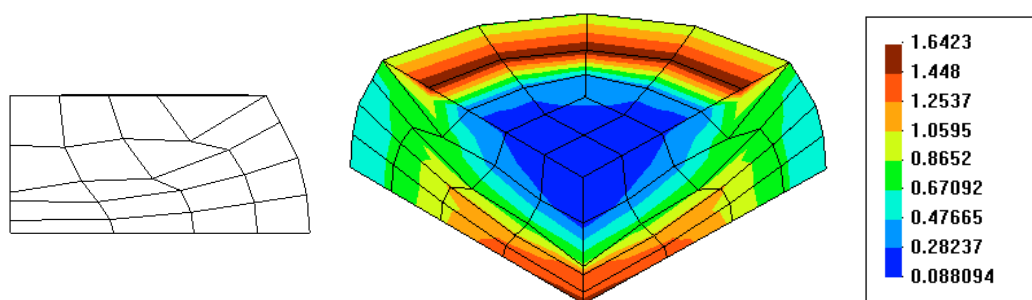


(a) Vista do plano XZ

(b) Vista em perspectiva

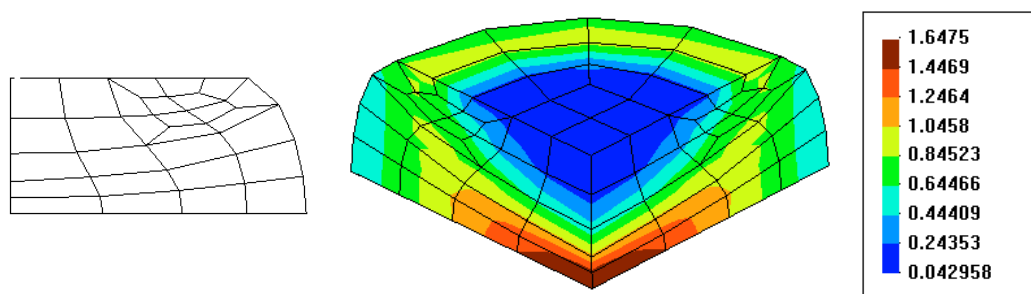
FIGURA 98 - Valores de \bar{E}^p na malha refinada no momento da interrupção da análise -
Formulação LA

Após a transferência de dados, a análise é reiniciada utilizando a formulação LA. As Fig. 99 e 100 mostram, respectivamente, a deformada e os valores de \bar{E}^p finais das malhas original (toda a análise usando a formulação LA) e refinada (formulação LEA antes e LA após o refinamento), nas quais o deslocamento da matriz é 8mm.



(a) Vista do plano XZ

(b) Vista em perspectiva

FIGURA 99 - Valores de \bar{E}^p na malha original no final do análise - Formulação LA

(a) Vista do plano XZ

(b) Vista em perspectiva

FIGURA 100 - Valores de \bar{E}^p na malha refinada no final do análise

Na Fig. 100 nota-se que o refinamento de malhas consegue diminuir a distorção da malha, evitando o aparecimento de elementos pentaédricos. Observa-se, ainda, que os valores de \bar{E}^p são um pouco diferentes nos dois casos, diminuindo o seu valor na zona onde houve refinamento. Isto indica uma melhora nos resultados, já que sabidamente a deformação plástica equivalente máxima neste exemplo deve ocorrer no centro da peça. Portanto, a deformação plástica equivalente é claramente afetada pelo aparecimento de elementos pentaédricos.

A Tab. 9 apresenta um resumo dos resultados obtidos na formulação LA sem e com refinamento.

TABELA 9 - Resumo dos resultados obtidos na formulação LA sem e com refinamento

Item	Configuração inicial	Config. final - Formulação	
		LA	LA com refinamento
\bar{E}^p máxima	0	1,6423	1,6475
Razão de aspecto	1,6797	6,9448	4,9557
Ângulo de borda (°)	0	89,578	69,113
Ângulo de obliquidade (°)	14,160	48,409	58,454
Ângulo de empenamento (°)	0,0	14,741	9,0377
Ângulo de torção (°)	0,0	24,748	21,821
Razão de afilamento	0,8032	0,4029	0,4511

Os valores máximos de distorção obtidos na formulação LA quando se usa refinamento são, em quase todos os critérios, mais baixos do que no caso em que ele não é usado. A única exceção é o ângulo de obliquidade. Sendo assim, pode-se obter resultados mais precisos de \bar{E}^p e diminuir a distorção da malha realizando o seu refinamento.

Com o objetivo de comparar as formulações empregadas, a Fig. 101 apresenta as curvas deslocamento da matriz x força de conformação nas formulações LA, LEA e utilizando o refinamento de malhas.

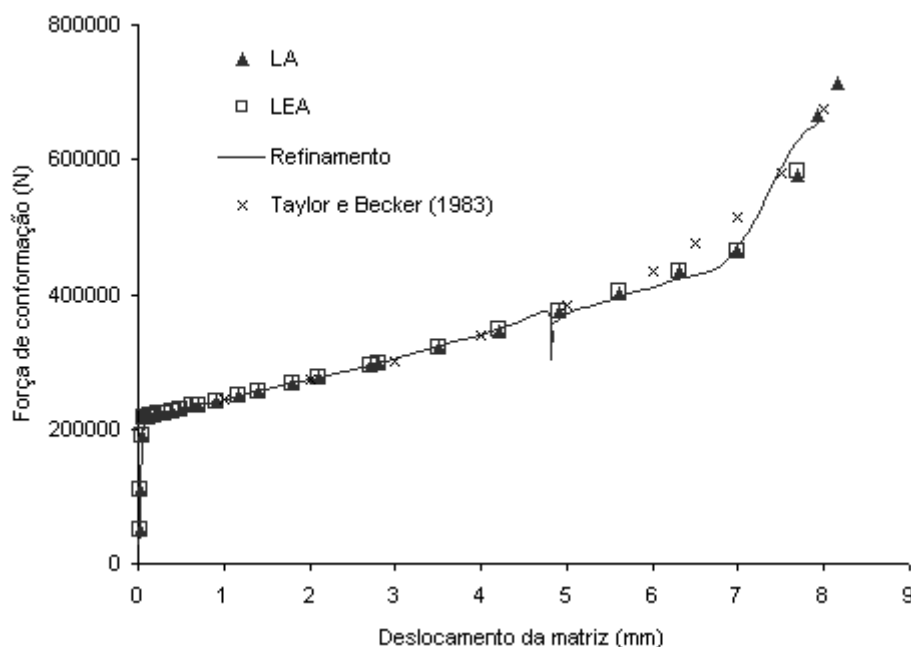


FIGURA 101 - Gráfico deslocamento da matriz x força de conformação

Da Fig. 101, nota-se que as curvas deslocamento x força de conformação nas formulações LA e LEA são praticamente idênticas, sofrendo alguma alteração no caso do

refinamento e do trabalho de Taylor e Becker (1983) que utiliza a formulação LA. Com relação ao refinamento, no momento do reinício da análise é feita uma correção da posição de todos os nós de contato (ver seção 4.4), projetando-os sobre as matrizes de conformação, de forma a corrigir eventuais problemas de interpenetração entre esses nós e as matrizes e garantir a convergência do processo de reinício da análise. No entanto, o método da penalidade não é exato, podendo ocorrer alguma interpenetração dos nós na matriz. É esta interpenetração que gera as forças de contato indicadas na Fig. 101. Ao projetar os nós sobre a matriz ocorre, momentaneamente, um zeramento das forças de contato, indicado pelo pico observado na Fig. 101 no instante em que o deslocamento da matriz é 4,8mm e o processo de análise é reiniciado após o refinamento. Contudo, nos passos de tempo logo após o reinício da análise, as interpenetrações características do método da penalidade voltam a aparecer em cada nó, fazendo com que o cálculo das forças de contato seja novamente válido (Olmi, 1997).

Foi feito um teste empregando-se o processo de cálculo explícito utilizando o método das Diferenças Centrais (seção 3.8.2). Neste teste, o número de passos de tempo no caso da formulação LA (sem refinamento) foi 314 e, no caso do refinamento, 434. O aumento do número de passos, quando se tem o refinamento, deve-se ao fato de o intervalo de tempo crítico (Eq. (71)) ser diretamente proporcional à distância entre os nós, a qual diminui ao se realizar o refinamento. Esta é uma característica do refinamento quando se utiliza um código explícito, se por um lado ganha-se em precisão, por outro a análise fica mais demorada.

APÊNDICE A - CÁLCULO DE β PARA O MÉTODO DO RETORNO RADIAL

No método do Retorno Radial, aplicado no corretor plástico (passo 2.1.3.3.2 do Quadro 1 da seção 3.9) para a obtenção das tensões de Cauchy em eixos corrotacionais, deve-se calcular o valor de β para corrigir as tensões desviadoras como

$${}^1s_{ij}^c = \beta s_{ij}^{e,c}. \quad (127)$$

No caso de materiais elastoplásticos com endurecimento isótropo linear, β tem uma expressão analítica dada por

$$\beta = 1 - 2G \frac{\Psi}{(s_{ij}^e s_{ij}^e)^{1/2}}, \quad (128)$$

na qual

$$\Psi = \frac{(s_{ij}^e s_{ij}^e)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^e}{2G \left(1 + \frac{h^{iso}}{3G}\right)}. \quad (129)$$

Em Ψ , σ^e é a tensão limite elástico do material (uma vez atingido este valor, tem início o escoamento ou o aparecimento de deformações plásticas) e h^{iso} é o módulo de endurecimento isótropo.

Para materiais elastoplásticos com endurecimento não-linear e materiais elasto-viscoplásticos, β é calculado através de um processo iterativo usando o método de Newton-Raphson.