UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

# NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PROPOSTA GEOMÉTRICA

CLÁUDIA ROSANA DA COSTA CALDEIRA

Porto Alegre, 2013

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

# NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PROPOSTA GEOMÉTRICA

**CLÁUDIA ROSANA DA COSTA CALDEIRA**

Dissertação realizada sob orientação do Prof.Dra. Luisa Rodriguez Doering, apresentada ao PPGEMAT do Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Porto Alegre, 2013

**CLÁUDIA ROSANA DA COSTA CALDEIRA**

**NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PROPOSTA GEOMÉTRICA**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PORTO ALEGRE, 26 de junho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

______________________________________________

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke - UFRGS

______________________________________________

Prof. Dra. Elisabete Zardo Búrigo - UFRGS

______________________________________________

Prof. Dr. Luiz Alberto Brettas - UFPEL

## AGRADECIMENTOS

À professora Dra. Luisa Rodriguez Doering, orientadora desta dissertação, pelos constantes incentivos e sugestões, sempre indicando a direção a ser tomada, nos momentos de maior dificuldade, para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço principalmente pela confiança no meu trabalho.

Aos colegas professores do Instituto Federal Sul-rio-grandense que, em muitas ocasiões, assumiram as minhas aulas.

Aos meus colegas de mestrado Betânia, Daner, Michelsch, Eduardo Pompermayer, Rodrigo Schroer e Tiago Vencato com os quais dividi conhecimentos, alegrias e tristezas. Mais que colegas tornaram-se meus amigos.

Ao Instituto Federal Sul-rio-grandense que tornou este projeto possível.

Aos docentes do PPGEMat: pela dedicação em manter este programa.

Aos componentes da banca examinadora: pelo aceite e sugestões para o nosso trabalho.

Ao meu marido, profissional que tenho como referência, exemplo de superação, força e coragem. Muito obrigada pelo apoio e incentivo e pela constante valorização dos meus potenciais.

A minha grande e amorosa família que, pacientemente, sempre me acolheu.

A minha amiga Bernadete Nobre pelas valorosas contribuições.

## RESUMO

Esta dissertação apresenta os resultados da aplicação de uma sequência didática que teve como objetivo o desenvolvimento de atividades que priorizassem a abordagem geométrica no ensino dos Números Complexos. A pesquisa foi realizada ao longo de nove encontros semanais no Instituto Federal Sul-rio-grandense, em Pelotas (RS), em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio Técnico de Eletrônica, na modalidade subsequente. Inicialmente, fizemos a revisão da temática valendo-nos da análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de diversos livros didáticos e também de pesquisas sobre o tema. Para a aplicação das atividades em sala de aula, consideramos a associação de pares ordenados e pontos do plano e também a associação da soma e da subtração dos pares ordenados com a soma e subtração de vetores. Definimos a unidade imaginária *i* como o ponto (0,1) e, posteriormente, trabalhamos as operações na forma algébrica. O referencial teórico que deu suporte a este trabalho baseou-se na Teoria de Registros de Representação Semióticas, de Raymond Duval, a qual trata dos aspectos cognitivos relacionados à aquisição de conhecimentos matemáticos. A coleta de dados foi feita por meio de anotações feitas pela professora pesquisadora, pela filmagem dos encontros e pelo material produzido pelos alunos durante as aulas. Após o término dos nove encontros, os alunos realizaram uma avaliação escrita na qual constatamos que os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios. Também verificamos o empenho dos alunos durante a resolução das diferentes tarefas que deram suporte a esta pesquisa.

**Palavras-chave**: Ensino de Matemática; Números Complexos; Geometria.

# ABSTRACT

This master's degree thesis shows the results from the application of a didactic sequence, which focused on the development of activities regarding Complex Numbers. The research was carried out during nine weekly meetings at the Instituto Federal Sul-rio-grandense in Pelotas/RS, in a 1st year class from the Secondary Technical School in Electronics. Initially, a review of the theme was carried out using the analysis of the National Curriculum Parameters for secondary schools not only from various course books but also from studies regarding the topic. In order to use the activities in the classroom, the association of ordered pairs and their respective points plan were considered as well as the association of the sum and subtraction of the ordered pairs with the sum and subtraction of vectors. The imaginary unit *i* was defined as point (0,1) and after this, the operations in algebraic form were dealt with. This work was based on Raymond Duval's Semiotic Representation Register Theory, which deals with the cognitive aspects related to the acquisition of mathematical knowledge. The data collection was carried out using the notes made by the researcher, by filming the meetings and using the material produced by the students during the classes. After the 9 (nine) meetings, students carried out a written assessment in which the obtained results were considered satisfactory. The effort made by the students was also verified during the performance of different tasks, which supported this research

**Keywords**: Mathematical teaching; Complex Numbers; Geometry

LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

| | |
|---|---|
| CEFET-RN | Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte |
| IFSul | Instituto Federal Sul-rio-grandense |
| MEC | Ministério da Educação |
| PCN+ | Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PCNEM | Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio |
| PNLDEM | Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio |
| PUC - SP | Pontifice Universidade Católica de São Paulo |
| RPM | Revista do Professor de Matemática |
| UFRGS | Universidade Federal do Rio Grande do Sul |
| UFRN | Universidade Federal do Rio Grande do Norte |

## SUMÁRIO

# 1 Introdução

Este trabalho procura analisar a viabilidade do ensino de Números Complexos a partir da geometria. Acreditamos que a abordagem proposta neste estudo possibilitará a retomada da discussão sobre o estudo dos Números Complexos no Ensino Médio, visto que o tema não está priorizado nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e que muitas instituições de ensino já o excluíram de seus conteúdos programáticos.

Acreditamos que o objetivo do ensino de Matemática não é incorporar às mentes dos estudantes uma enorme quantidade de informações. Entendemos, sim, que a Matemática possui relação direta com o cotidiano e com o desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade contemporânea, requerendo necessariamente o desenvolvimento do raciocínio lógico. Dessa forma, pensamos ser necessário investir no ensino dos Números Complexos, visto que tal tema está presente nas áreas de Engenharia e de Eletrônica.

A minha trajetória profissional, como professora de Matemática, iniciou em 1987 no Ensino Fundamental e, a partir de 1988, comecei a atuar no Ensino Médio. Nesse percurso, observei que os alunos apresentam algumas dificuldades referentes ao conteúdo de Números Complexos, mas, em geral, não o consideram de difícil entendimento. Porém, é muito comum ouvir que tal assunto não teria aplicação em suas vidas.

Já ouvi de um aluno a seguinte frase: "Se muito do que é real a gente já não utiliza, então o que faremos com o que é "imaginário"?" Tal frase confirma o nosso entendimento de que, abordando os Números Complexos apenas na forma algébrica, a unidade imaginaria *i* perde o seu significado geométrico e, então, a sua nomenclatura condiz com o entendimento dos alunos, pois esta não apresenta uma representação que permita sua visualização.

Quando são graficamente produzidas, as representações semióticas são objetos de apreensão visual perceptiva. Nesse sentido, visualização é sempre mostrada dentro da percepção visual ou dentro de sua extensão mental. E a visualização, em Matemática, permite uma organização de relações. Também pode dar pelo menos uma apreensão e o que a visualização apreende pode ser o início de uma série de transformações, o que faz o seu poder inventivo DUVAL (1999).

Priorizando a abordagem algébrica, dificilmente o aluno perceberá que os Números Complexos podem ser aplicados na resolução de problemas de Geometria e, também, não se beneficiará de sua visualização. Acredito que enxergar os Números Complexos em um plano atribui a esses números o seu significado geométrico. Ou seja, eles deixam de ser “imaginários” e se transformam em “reais”.

Anteriormente à aplicação da nossa proposta didática, para despertar o interesse dos alunos pelo assunto, apresentávamos as possíveis aplicações às áreas de Eletrônica, mas percebíamos que só isso não os deixava satisfeitos. Como cremos que, para nos apropriarmos de um conteúdo seja necessário, entre outras coisas, conhecer a sua dimensão histórica, elaboramos nossa proposta de dissertação retomando a formulação dos Números Complexos apresentada por Hamilton[1] na qual era utilizada a ideia de pares ordenados, possibilitando, assim, a correspondência do ponto (0,1) com a unidade imaginária *i*.

Dessa forma, os Números Complexos serão abordados, inicialmente, na forma geométrica e, com base na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, faremos as devidas articulações entre seus múltiplos registros de representação e suas interpretações geométricas no plano de Gauss. Estamos de acordo com Duval que nos adverte que

> a possibilidade, na Matemática, de usar vários tipos de registros – gráficos, algébricos, geométricos e outros – interfere de modo decisivo no aprendizado. A qualquer momento pode ser exigida uma troca de registro, ou a mobilização simultânea de pelo menos dois tipos de registros (DUVAL, 2003, p.14).

A partir de tais reflexões, começamos a buscar fundamentações e conhecimentos para elaborar este trabalho. Nesse momento, a nossa orientadora já tinha aceitado participar da elaboração desta proposta e foi dela a ideia de promover uma inversão na ordem usualmente apresentada no ensino dos Números Complexos, ou seja, começar pela forma geométrica. Inicialmente, foi realizada uma revisão da literatura por meio de artigos em revistas, monografias, dissertações, livros didáticos e páginas da *internet*, em que a temática fosse abordada. Depois, conversamos com professores de Matemática e das disciplinas técnicas do Instituto Federal Sul-rio-grandense (IFSul) que utilizavam os Números Complexos no desenvolvimento dos seus conteúdos. Tais conversas tinham o intuito de obter a opinião desses profissionais sobre a necessidade da reformulação da abordagem do conteúdo, ou seja, priorizar a abordagem geométrica e, também o objetivo de saber quais os assuntos utilizados em suas práticas pedagógicas.

Ao conversar com os colegas, verificamos que a abordagem adotada pelos professores de Matemática era a tradicionalmente apresentada nos livros didáticos, na qual se prioriza a

---

[1] William Rowan Hamilton foi matemático, físico e astrônomo. Contribuiu com trabalhos fundamentais ao desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra. Nasceu na Irlanda em 1805 e faleceu em 1865.

forma algébrica. Isso indica que essa é a concepção utilizada no ensino dos Números Complexos.

Também analisamos as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e percebemos que tais orientações salientam a importância da articulação entre a álgebra e a geometria, que são duas áreas da Matemática escolar.

A partir de tais reflexões, começamos a elaborar a nossa proposta, que possui como pergunta norteadora: A apresentação dos Números Complexos, no Ensino Médio, inicialmente na forma geométrica para posteriormente exibi-los na forma algébrica é bem aceita pelos alunos?

Os Números Complexos possuem várias aplicações em outras áreas do conhecimento, tais como: circuitos elétricos, astronomia, motores e mecânica quântica. Para operar com circuitos elétricos ou para apontar a movimentação de pontos e figuras no plano de forma conveniente, precisamos optar por uma das várias representações que esses números possuem. Para isso, é necessário conhecer e saber transitar entre essas diferentes representações.

Acreditamos que é possível priorizar o enfoque geométrico. Concordamos com Carneiro (2004) que nos adverte:

> O enfoque algébrico permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas a experiência tem mostrado que, quando se perde a chance de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, em geral esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece (quando aparece) a "forma trigonométrica" (pág. 08).

Os Números Complexos admitem diferentes formas de representação, e isso nos motivou a utilizar, como referencial teórico, a Teoria de Registros de Representação de Raymond Duval, com quem concordamos ser necessário considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, sendo a compreensão dessas representações essenciais ao desenvolvimento do conhecimento.

O trabalho foi implementado em nove encontros, durante o último semestre de 2012, em uma das turmas de 1º ano do ensino técnico, na modalidade subsequente, do Instituto Federal Sul-rio-grandense. A turma era composta por 20 alunos que, à época, tinham entre de 17 a 25 anos e que eram bastante participativos e interessados em sala de aula.

No segundo capítulo, apresentaremos uma breve revisão da literatura sobre o assunto. Discutiremos os Números Complexos nos PCN, nos livros didáticos e em trabalhos publicados por pesquisadores do tema. A seguir, no capítulo 3, descreveremos o referencial teórico utilizado, apresentando a Teoria de Registros de Representação de Raymond Duval e justificando a nossa escolha por tal teoria. No capítulo 4, será feito o detalhamento das atividades da sequência, o relato de sua aplicação e a análise das resoluções desenvolvidas pelos alunos. Também serão detalhados os objetivos das atividades, os conceitos e os conhecimentos abordados em cada uma das atividades. No último capítulo, apresentaremos as conclusões a que chegamos neste trabalho e apontaremos as sugestões para novos trabalhos referentes ao tema.

# 2 Estudos Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos um breve estudo da evolução histórica dos Números Complexos. Posteriormente, faremos uma análise sobre o seu ensino, fundamentada nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Também analisaremos alguns livros didáticos, dissertações e artigos relacionados ao tema.

## *2.1 A origem histórica dos Números Complexos*

Com o objetivo de tornar o ensino dos Números Complexos mais atrativo para os alunos, é bastante comum os professores afirmarem que eles nasceram para dar uma solução para equações do segundo grau que possuem coeficientes reais. Tal abordagem não confere com os fatos históricos, como veremos no decorrer da seção. Acreditamos que os professores optem por essa abordagem, pois, durante o ensino fundamental e médio, os alunos estão familiarizados somente com a resolução de equações de segundo grau. Como até então o conjunto universo não contemplava raízes quadradas negativas, seria fácil os alunos perceberem uma utilização para os novos números apresentados, ou seja, eles conseguiriam resolver equações cuja solução envolve raízes quadradas negativas.

Historicamente, sabemos que Nicola Fontana, apelidado de Tartaglia (gago em italiano) devido a um defeito na fala, escreveu, em 1531, em suas memórias, que tinha descoberto uma regra para resolver equações de terceiro grau. Segundo Garbi (2006, p.121), o resultado foi publicado na *Ars Magna* (A Grande Arte), por Girolamo Cardano (1501-1576), quebrando a promessa e juramentos feitos a Tartaglia de que não revelaria a fórmula.

A seguir, com a notação algébrica moderna, apresentamos os passos executados por Tartaglia e Cardano para a resolução da equação geral do terceiro grau dada por

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Essa solução encontra-se no Caderno do Professor, da proposta curricular do Estado de São Paulo (2008), para a 3ª série do ensino médio.

Primeiramente, como $a \neq 0$, dividem-se todos os coeficientes por $a$. Assim, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Tomando $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$ e $D = \frac{d}{a}$, e substituindo na equação acima, obtemos:

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{B}{3}$, para eliminarmos o termo em $x^2$:

$$\left(y - \frac{B}{3}\right)^3 + B\left(y - \frac{B}{3}\right)^2 + C\left(y - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

$$y^3 - y^2B + \frac{B^2}{3}y \quad - \frac{B^3}{27} + By^2 - 2\frac{B^2}{3}y + \frac{B^3}{9} + Cy - \frac{CB}{3} + D = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{B^2}{3} + C\right)y + \frac{2B^3}{27} - \frac{CB}{3} + D = 0$$

Tomando $M = \frac{B^2}{3}$ + C e $N = \frac{2B^3}{27} - \frac{CB}{3}$ + D obtemos a equação:

$$y^3 + My + N = 0. \qquad (1)$$

A equação (1) pode ser resolvida a partir da identidade:

$$(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 \qquad (2)$$

Essa pode ser reescrita do seguinte modo:

$$(p + q)^3 - 3pq(p + q) - (p^3 + q^3) = 0 \qquad (3)$$

Comparando (1) e (3) e tomando $y = p + q$ como solução da equação (1), temos:

$$\begin{cases} -3pq = M \\ -(p^3 + q^3) = N \end{cases} \quad \text{e portanto} \quad \begin{cases} p^3q^3 = -\frac{M^3}{27} \\ (p^3 + q^3) = -N \end{cases} \quad (4)$$

Se $p^3$ e $q^3$ são conhecidos, então a soma e o produto $-N\ e - \frac{M^3}{27}$ , respectivamente, também o serão. Logo, $p^3$ e $q^3$ são raízes da seguinte equação $z^2 + Nz - \left(\frac{M}{3}\right)^3 = 0$. Temos, então:

$$z = \frac{-N \mp \sqrt{N^2 + 4\left(\frac{M}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{N}{2} \mp \sqrt{\frac{N^2 + 4\left(\frac{M}{3}\right)^3}{4}} = -\frac{N}{2} \mp \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{4\left(\frac{M}{3}\right)^3}{4}}$$

Isto é, $z = -\frac{N}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}$

Assim, as raízes do sistema (4) serão:

$$p^3 = -\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \ \text{ e } \ q^3 = -\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \qquad \text{ou}$$

$$q^3 = -\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \ \text{ e } \ p^3 = -\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}$$

Em ambos os casos, como $y = p + q$, segue que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}}.$$

A equação anterior, chamada de fórmula de Cardano-Tartaglia, resolve as equações de 3º grau do tipo (1). Em certos casos, obtínhamos soluções "estranhas". Por exemplo, na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, sabemos que x = 4 é uma solução e, aplicando a fórmula de Cardano, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}$$

Ou seja, $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Em 1560, Rafael Bombelli, em seu livro *L'Algebra Parte Maggiore dell'Arithmetica*, propôs uma saída para essa questão. Ele acreditou ser possível operar com essa nova espécie de radical. Em vez de escrever sobre 2 + $\sqrt{-121}$, como "dois mais a raiz quadrada de menos 121", ele escrevia "dois mais de menos a raiz quadrada de 121", de modo que "mais de menos" se tornou código para somar raiz quadrada de um número negativo. Subtrair tal raiz quadrada tornou-se "menos de menos". Ele também se referia a isso como "dois mais de menos 11", explicando as regras de operação desta forma:

*mais de menos vezes mais de menos faz menos;*
*menos de menos vezes menos de menos faz menos;*
*mais de menos vezes menos de menos faz mais.*

Atualmente, é natural interpretar essa escrita como, respectivamente,

$i$ vezes $i$ é $-1$;
$-i$ vezes $-i$ é $-1$;
$i$ vezes $-i$ é 1.

Bombelli começou a operar com raízes quadradas negativas aplicando as regras usuais da Álgebra e mostrou que era necessário trabalhar com tais raízes para encontrar soluções reais. Tal fato fez com que outros matemáticos passassem a utilizar as raízes quadradas de números negativos, mesmo que ainda o fizessem de forma desconfiada. Foi só em 1629, no entanto, que o símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido por Albert Girardi. Em 1777, Leonhard Euler utilizou o símbolo *i* pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$. Porém, a notação *i* só apareceu impressa pela primeira vez em 1794.

É atribuído a Gauss o termo "números complexos". O uso do símbolo *i* foi o que tornou, em 1801, os Números Complexos amplamente aceitos entre os matemáticos. Alguns anos mais tarde, William Rowan Hamilton propôs uma nova abordagem na qual, inicialmente, utilizava o plano de Gauss, que é um plano cartesiano usado para representar, geometricamente, números complexos. Nele, a parte imaginária de um número complexo é representada pela ordenada e a parte real pela abscissa. Definia-se a soma e o produto de pares ordenados de maneira conveniente e chegava-se a algo que era idêntico aos Números

Complexos. Tal abordagem acabava com o misterioso *i*, já que este simplesmente correspondia ao ponto (0,1). É essa a abordagem, portanto, que utilizaremos em nossa proposta didática.

Nessa época, Hamilton tinha remodelado partes significativas da Física com auxílio dos Números Complexos. Já Euler e Gauss mostraram a utilidade dos complexos na Álgebra e na teoria dos números. Riemann, Weierstrass e outros tornaram tais números uma ferramenta matemática importante tanto na Matemática Pura quanto na Matemática Aplicada.

### *2.2 As orientações nacionais*

Um dos objetivos principais dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) é orientar as instituições de ensino da Educação Básica quanto às competências, às habilidades e aos conhecimentos fundamentais que se deseja que os alunos desenvolvam durante a vida escolar (Brasil, 2000).

Os PCNEM (Brasil, 2002) e os PCN+ (Brasil, 2002) destacam que o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, à compreensão, à comunicação, à investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Dessa forma, destacamos dos PCN+ que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (PCN+, 2002, p. 111).

Elaboramos nossa proposta didática pensando ser necessário contextualizar o ensino da Matemática. Para tanto, construímos atividades com contextos relacionados à área de Eletrônica do IFSul e também à área da Geometria Plana. Para resolvê-las, os alunos teriam de formular e testar hipóteses, tirando suas próprias conclusões.

Com o objetivo de articular as competências gerais que se pretende promover com o ensino médio, os PCN+ salientam que:

> Nessa etapa da escolaridade (Ensino Médio), portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza.[2] Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita

---

[2] A área de conhecimento denominada de Ciências da Natureza engloba as disciplinas de Física, Química e Biologia.

> relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber (PCN+, 2002, p.111).

Concordamos com tal orientação e faremos, neste capítulo, uma breve retomada da evolução histórica dos Números Complexos com o objetivo de articular tal evolução com as diferentes formas de representações a serem exploradas neste trabalho. Também discutiremos algumas aplicações dos Números Complexos em outras áreas do conhecimento, como Eletricidade e Eletrônica. Essas aplicações fazem parte de disciplinas estudadas pelos alunos que participarão da nossa pesquisa, já que estes são estudantes do curso técnico de Eletrônica, conforme referido anteriormente.

Especificamente sobre o ensino dos Números Complexo, o documento afirma que:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (PCN +, 2002, p. 122).

Acreditamos que os PCN+ não priorizam o ensino dos Números Complexos devido à abordagem excessiva e, em muitas situações, exclusivamente algébrica, que é adotada pela maioria das instituições de ensino. Na nossa proposta, que privilegia a abordagem geométrica, pretendemos mostrar algumas aplicações do estudo dos Números Complexos que não são apenas resolução de equações.

Com o objetivo de transitar entre as diferentes formas de representações de tal conjunto utilizaremos a Teoria de Registros de Representação, de Raymond Duval. E, investindo na abordagem geométrica, acreditamos que poderemos trabalhar, em nossa sequência didática, as seguintes competências apresentadas nos PCN:

- Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática;
- Ler e interpretar textos, dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas;
- Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações;
- Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas;

- Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática;
- Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia.
- Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos.

Acreditamos que a nossa sequência didática contemplará as competências citadas anteriormente e poderá articular a álgebra e a geometria. Elaboramos a sequência didática com o pensamento de que tal articulação proporcionará aos alunos o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias ao seu êxito como estudante.

### *2.3 Os Números Complexos nos livros didáticos*

Os livros didáticos estão presentes na maioria das instituições de ensino. As escolas públicas participam do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLDEM), que tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica.  Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico. O MEC[3] distribui os livros, de forma gratuita, para as instituições públicas. Acreditamos que esse material é a maior referência de conhecimento tanto para professores quanto para alunos.

Para a realização deste trabalho, pesquisamos oito livros didáticos dos quais obtivemos dados relativos a aspectos quantitativos e qualitativos. Apresentamos os dados dos livros escolhidos na Tabela 1, mostrada a seguir. Dos oito livros analisados, apenas dois, o de Bezerra (2001) e o de Mello (2005), não foram recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio. A escolha desses livros deve-se ao fato de já os utilizarmos em nossa prática pedagógica, pois ambos apresentam exercícios contextualizados sobre os Números Complexos.

---

[3] *portal.**mec**.gov.br*

No ano de 2012, o autor Iezzi (2004) teve a sua obra *Matemática, Ciência e Aplicações* recomendada pelo PNLDEM. A nossa pesquisa iniciou em fevereiro de 2011 e, por esse motivo, tal livro não foi analisado neste trabalho. A escolha do livro de Youssef (1998) deveu-se ao fato de que essa obra foi utilizada em nossa escola até o ano de 2012. Já o livro de Ribeiro(2011) foi escolhido pelo fato de que ele deve ser trabalhado entre os anos de 2013 e 2015.

**Tabela 1 – Livros didáticos analisados nesta pesquisa**

| Livro Didático | | | | Ano do PNLDEM |
|---|---|---|---|---|
| **Autor** | **Nome** | **Editora** | **Ano** | |
| Manoel J. Bezerra | Matemática para o ensino médio | Scipione | 2001 | 2007 |
| Luiz R. Dante | Matemática | Ática | 2005 | 2007 |
| Kátia Smole e Maria Ignez Diniz | Matemática: Ensino Médio | Saraiva | 2005 | 2007 e 2012 |
| Gelson Iezzi | Matemática – Volume Único | Atual | 2004 | ------- |
| Manoel Paiva | Matemática 3 | Moderna | 1996 | 2007 e 2012 |
| A. N. Youssef, V. P Fernandez e E. Soares | Matemática para o 2º Grau | Scipione | 1998 | 2007 |
| José Luiz Mello | Matemática, construção e significado | Moderna | 2005 | ------- |
| Jackson Ribeiro | Ciência, Linguagem e Tecnologias | Scipione | 2011 | 2012 |

Em relação aos aspectos quantitativos, analisamos o número de páginas que cada livro destina ao tema e também o número de exercícios propostos e resolvidos. Acreditamos que tal análise apresenta a relevância que os autores dão aos Números Complexos. A Tabela 2 apresenta os dados obtidos na análise dos livros didáticos.

**Tabela 2 – Análise do espaço destinado aos Números Complexos nos livros**

| Autor (es) | Ano de Publicação | Número Total de Páginas | Número de Páginas sobre Complexos | Número de Exercícios Propostos | Número de Exercícios Resolvidos |
|---|---|---|---|---|---|
| Bezerra, M. Jairo | 2001 | 495 | 11 | 50 | 14 |
| Dante, L. Roberto | 2005 | 672 | 13 | 40 | 31 |
| Diniz,I.D. e Smole, S.K. | 2005 | 349 | 32 | 57 | 16 |
| Iezzi, Gelson | 2004 | 643 | 27 | 138 | 26 |
| Mello, J.L. P. | 2005 | 791 | 22 | 83 | 20 |
| Paiva, M. R. | 2009 | 198 | 25 | 66 | 23 |
| Youssef,A. N; Fernandez, V. P.; Soares, E. | 2009 | 477 | 21 | 79 | 20 |
| Ribeiro J. | 2011 | 376 | 39 | 109 | 29 |

Observando o número de páginas destinadas ao tema, podemos observar que apenas três dos oito livros dedicam mais de 5% de suas páginas aos Números Complexos. Como esses três livros apresentam os conteúdos divididos em três volumes e os outros cinco são volume único, acreditamos que tal fato possibilita a dedicação de um número maior de páginas a essa temática.

Quanto ao número de exercícios propostos e resolvidos, acreditamos ser válido para o aprendizado dos alunos que os livros apresentem um grande número de exercícios. Também acreditamos que tais atividades devam ser diversificadas, a fim de que contemplem o maior número possível de competências a serem alcançadas pelos estudantes.

### *2.3.1 Introdução dos Números Complexos nos livros didáticos*

De todos os livros analisados, apenas os autores Dante (2005) e Youssef (1998) não citam, em seus livros, a história dos Números Complexos ao introduzir o tema. No final do estudo, tais autores apresentam uma seção de uma página dedicada à história do surgimento dos Números Complexos, conforme Figura 1. Os outros seis livros citam, ao introduzir o tema, a importância de Tartaglia, Cardano e Bombelli no surgimento do conjunto dos Números Complexos. Porém, os autores Bezerra (2001), Iezzi (2004) e Ribeiro (2011) apresentam que foi a necessidade de resolver equações do 2º grau o que levou os matemáticos a procurarem um conjunto em que o quadrado de certo número pudesse ser negativo. Tal fato não é condizente com os livros apresentados na dissertação de Rosa (1998) que tratam da história dos Números Complexos.

**De olho na história da Matemática**

**O surgimento dos números complexos**

Em 1545, o matemático, físico e médico italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou sua obra *Ars Magna*, causando grande impacto sobre os algebristas da época. Nessa obra, pela primeira vez, foram apresentadas as resoluções de equações de 3º grau (chamadas *cúbicas*) e de 4º grau (chamadas *quárticas*). Como o próprio Cardano afirmou em sua obra, a sugestão para a solução das cúbicas foi a ele fornecida pelo matemático italiano Niccolo Tartaglia (1500-1557) e a solução das quárticas tinha sido inicialmente descoberta por seu antigo auxiliar Ludovico Ferrari (1522-1565).

A importância da publicação do *Ars Magna* de Cardano foi tão grande que o ano de 1545 passou a ser considerado o marco inicial do período moderno da história da Matemática.

▲ Niccolo Tartaglia

A fórmula proposta por Cardano para a resolução das equações cúbicas do tipo $x^3 + ax + b = 0$ foi:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Anos mais tarde, em 1572, um outro matemático italiano, Raffaelle Bombelli (1526-1573), publicou uma obra denominada *Algebra*, na qual discutia um problema interessante. Ele sabia que a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$ tinha como soluções os seguintes valores: $x = 4$, $x = -2 + \sqrt{3}$ e $x = -2 - \sqrt{3}$. Porém, utilizando a fórmula de Cardano, encontrava:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Como $\sqrt{-121}$ não é um número real, Bombelli se propôs a determinar os números $a$ e $b$ positivos tais que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$$

Com algum desenvolvimento algébrico concluiu que $a = 2$ e $b = 1$, pois assim teria $x = 4$. Para isso, Bombelli começou a operar com o símbolo $\sqrt{-1}$ da mesma forma como operava com números reais. A partir desse momento, os matemáticos começaram a usar em seus trabalhos raízes quadradas de números negativos e, no século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) passou a representar $\sqrt{-1}$ por $i$. Ainda nesse século, Abraham de Moivre (1667-1754) introduziu métodos mais modernos na investigação das propriedades dos números complexos, além de ter proposto fórmulas de cálculo envolvendo esses números.

Finalmente, no início do século XIX, a Europa iria tomar contato com a representação geométrica dos números complexos no plano, criada, por meio de trabalhos independentes, pelo físico e astrônomo Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e pelo matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

▲ Carl Friedrich Gauss

Atualmente, a Álgebra dos números complexos tem inúmeras aplicações na Física e na tecnologia contemporânea, como, por exemplo, no estudo e representação de circuitos elétricos e suas propriedades e na representação de ondas eletromagnéticas. A aplicação do conjunto dos números complexos estende-se também a outras áreas da própria Matemática, da Computação gráfica e da Topologia, permitindo a definição e o equacionamento de figuras como os fractais, obtidas a partir de operações com números complexos, e a representação dos resultados obtidos no plano.

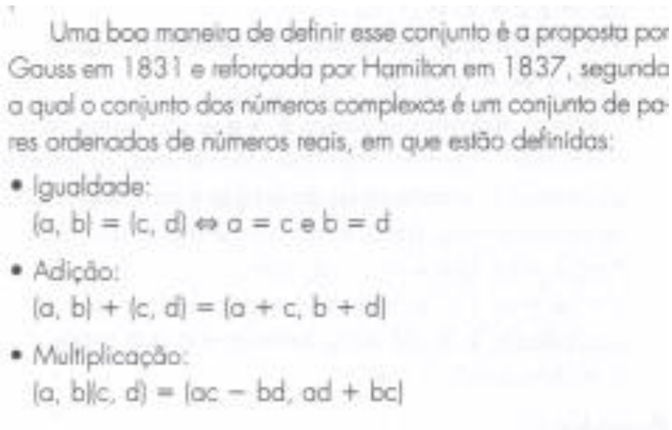
**Figura 1 - Seção destinada à história dos Números Complexos apresentada no livro de Youssef**

### *2.3.2 Definição dos Números Complexos nos livros didáticos*

Os livros dos autores Dante (2005), Iezzi (2004) e Ribeiro (2011) utilizam a definição proposta por Gauss, em 1831, e reforçada por Hamilton em 1837, em que o conjunto dos Números Complexos é definido como sendo todos os pares ordenados de números reais que satisfazem as propriedades da igualdade, adição e multiplicação. Tais propriedades estão definidas na Figura 2. Posteriormente, identificam o par ordenado ($x$, 0) com o número real $x$, e o par ordenado (0,1) com a unidade imaginária $i$, apresentando, dessa maneira, a forma algébrica dos Números Complexos. Esses autores não apresentam a representação dos pares ordenados no plano cartesiano. Tal fato confirma a abordagem exclusivamente algébrica, mesmo quando seria interessante transitar entre registros algébricos e geométricos.

Os outros autores definem o conjunto dos Números Complexos como ampliação dos reais. Definem $i^2 = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$, denominando que $i$ é a unidade imaginária e apresentam a + b$i$ como a forma algébrica de um Número Complexo. Após, propõem a resolução de equações quadráticas, justificando, assim, a utilização da unidade imaginária $i$.

A Figura 2 mostra a definição apresentada pelo autor Dante (2005).


Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo a qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas:

- Igualdade:
  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
- Adição:
  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Multiplicação:
  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

**Figura 2 – Seção destinada à história dos Números Complexos apresentada no livro de Youssef**

*2.3.3 Representações geométricas e trigonométricas dos Números Complexos*

Todos os autores cujas obras foram analisadas neste estudo apresentam a representação geométrica do número $z$ = a + b$i$ como um ponto de um plano apresentado como plano Argand-Gauss. Em seguida, eles definem geometricamente o módulo de um número complexo através do Teorema de Pitágoras. O ângulo cujo comprimento do vetor associado ao número complexo forma com o eixo $x$, medido no sentido anti-horário, é denominado pelos autores de argumento, sendo calculado através das funções trigonométricas *seno* e *cosseno*. Após, partindo da forma algébrica, os autores obtêm a forma trigonométrica, ou polar, fazendo as devidas substituições no triângulo retângulo.

Apenas Paiva (1996) define as coordenadas polares de um número complexo. Tal definição é apresentada antes da representação geométrica. Embora pouco utilizada nos livros didáticos, acreditamos que tal forma de registro deva ser apresentada aos alunos, estando presente, portanto, em nosso trabalho.

### 2.3.4 Operações com Números Complexos

Todos os autores dos livros analisados apresentam as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dos números complexos por meio de processos algébricos. Somente Ribeiro (2011) relaciona a soma e a subtração com os vetores, e apenas Paiva (1996) e Bezerra (2001) definem o inverso de um número complexo. Os autores Dante (2005), Iezzi (2004), Diniz (2005), Mello (2005), Ribeiro (2011) e Youssef (1998) definem o conjugado de um número complexo após as operações de adição, subtração e multiplicação. Já Paiva (1996) o define antes de começar a operar algebricamente com os números complexos. Dante (2005) é o único autor que apresenta a interpretação geométrica do conjugado. Essas constatações confirmam a abordagem exclusivamente algébrica que os autores aplicam ao ensino dos Números Complexos.

Os autores Iezzi(2004), Diniz (2005), Mello (2005), Paiva (1996) e Ribeiro (2011) apresentam a multiplicação e a divisão dos números complexos na sua forma trigonométrica. Para obter as respectivas fórmulas, eles trabalham, algebricamente, com as fórmulas de soma e subtração de arcos das funções *seno* e *cosseno*. Os autores Bezerra e Youssef não operam com os números complexos na forma trigonométrica. Dante é o único autor que apresenta interpretação geométrica da multiplicação, comentando a rotação do número (vetor) nessa operação. Como a nossa proposta prioriza a abordagem geométrica dos Números Complexos, apresentaremos a multiplicação da mesma forma que Dante. Lamentamos apenas que o autor, quando opera com a divisão, não apresente nenhuma interpretação geométrica para essa operação.

A Figura 3 apresenta a interpretação geométrica da multiplicação.

**Exemplo:**

Vamos calcular o produto $z_1z_2$ com

$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$ e

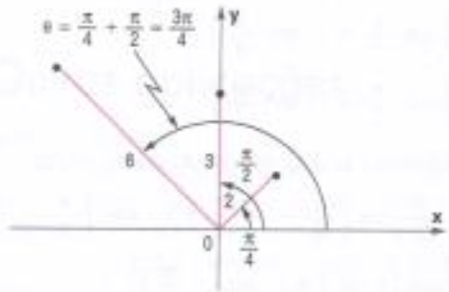
$z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}\right)$.

Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$z_1z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= 6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right)$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:



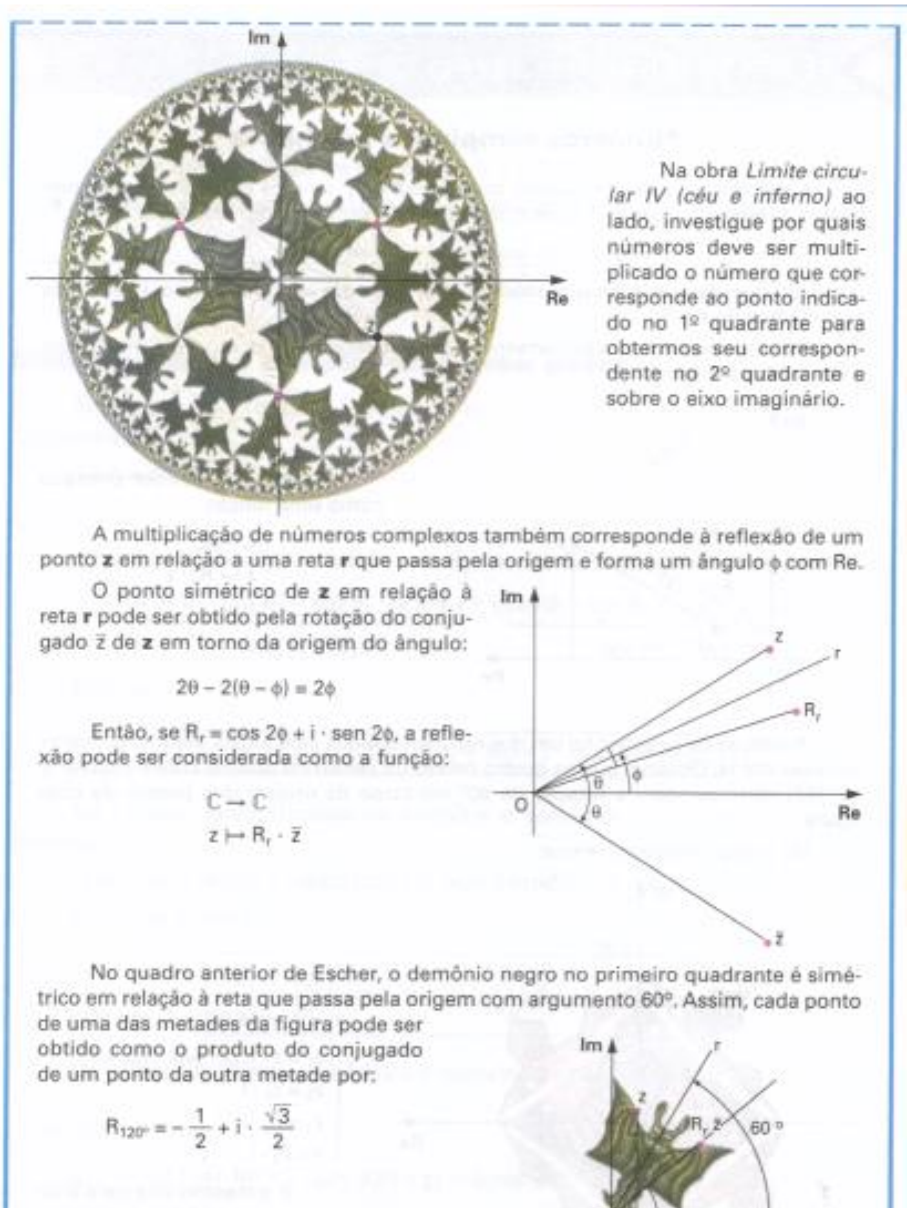

Em $z_1z_2$, houve uma rotação positiva a $\mathbf{z_1}$ de um ângulo igual ao ângulo de $\mathbf{z_2}$. Ou seja, nesse caso, houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a $\mathbf{z_1}$. Como o argumento de $\mathbf{z_1}$ era $\frac{\pi}{4}$ e $\mathbf{z_1}$ recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto $z_1z_2$ passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo de $z_1z_2$ é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$ ou $|z_1||z_2|$.

**Observação:** A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual *basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos*, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos.

**Figura 3- Interpretação geométrica da multiplicação conforme Dante (p. 439)**

Dante (2005) é, dentre os autores, o único que apresenta a representação geométrica da multiplicação de Números Complexos. Os outros autores utilizam a fórmula de De Moivre, sem representá-la geometricamente. Dante (2005), Paiva (1996) e Youssef (1998) não trabalham a radiciação na forma trigonométrica. Mello (2005) e Iezzi (2004) apresentam as raízes dos Números Complexos como vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência, fato que pretendemos explorar em nossa proposta. Denominam a radiciação como a segunda fórmula de De Moivre.

Os autores Diniz (2005), Ribeiro (2011), Mello (2005) e Iezzi (2004) trazem a interpretação geométrica das raízes n-ésimas de um número complexo. Diniz (2005) apresenta as figuras de Escher, conforme a Figura 4, utilizando-as para relacionar a multiplicação com a reflexão de um ponto em relação à reta que passa pela origem e forma um determinado ângulo com o eixo das abscissas. Também relaciona o simétrico de um Número Complexo com a rotação do conjugado desse número em relação à origem do ângulo. Acreditamos que tal abordagem possibilita aos alunos a inserção dos Números Complexos no seu mundo cotidiano, uma vez que eles trabalham com polígonos regulares e convivem, diariamente, com figuras geométricas.



Na obra *Limite circular IV (céu e inferno)* ao lado, investigue por quais números deve ser multiplicado o número que corresponde ao ponto indicado no 1º quadrante para obtermos seu correspondente no 2º quadrante e sobre o eixo imaginário.

A multiplicação de números complexos também corresponde à reflexão de um ponto **z** em relação a uma reta **r** que passa pela origem e forma um ângulo $\phi$ com Re.

O ponto simétrico de **z** em relação à reta **r** pode ser obtido pela rotação do conjugado $\bar{z}$ de **z** em torno da origem do ângulo:

$$2\theta - 2(\theta - \phi) = 2\phi$$

Então, se $R_r = \cos 2\phi + i \cdot \text{sen}\, 2\phi$, a reflexão pode ser considerada como a função:

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto R_r \cdot \bar{z}$$

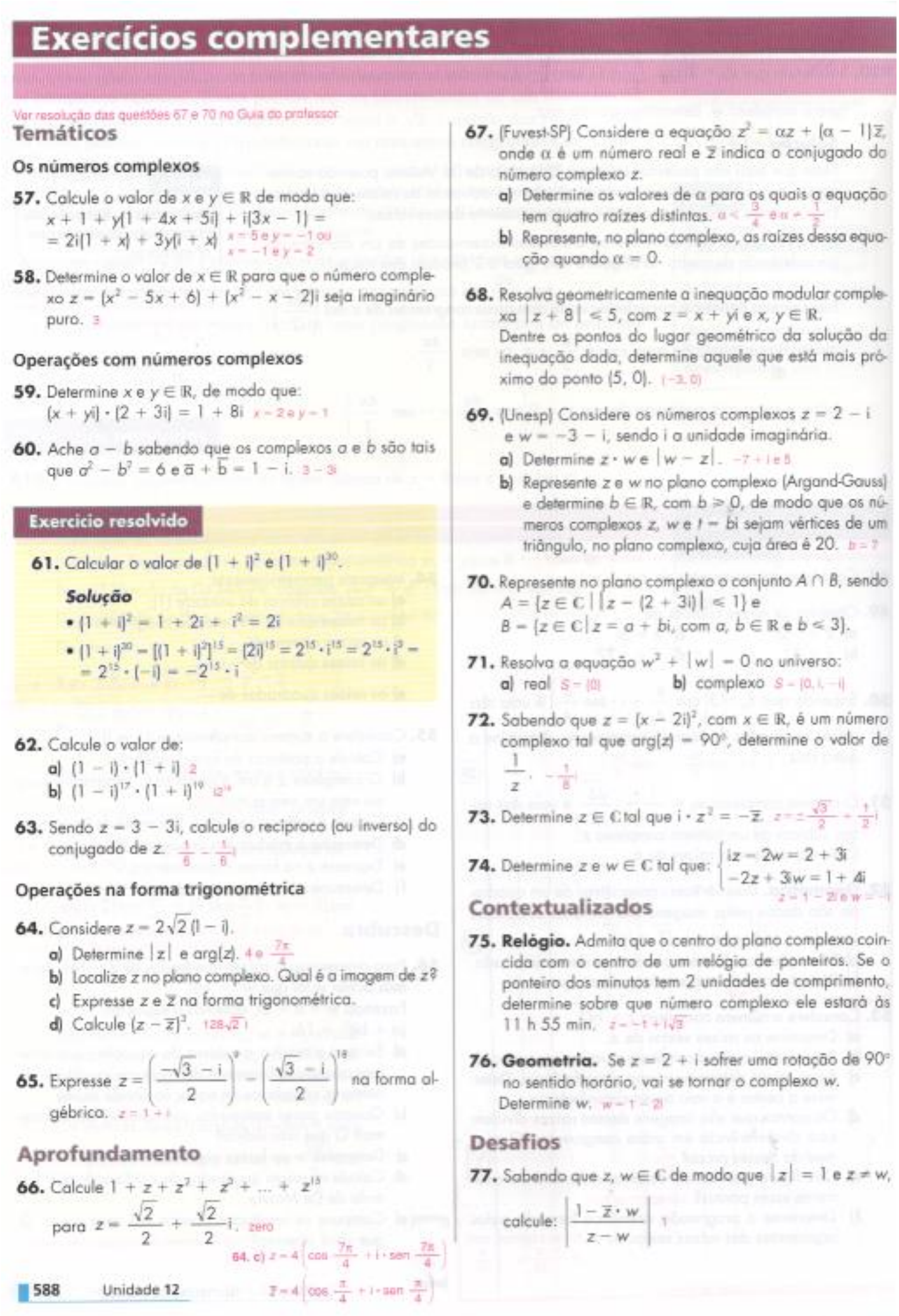
No quadro anterior de Escher, o demônio negro no primeiro quadrante é simétrico em relação à reta que passa pela origem com argumento 60º. Assim, cada ponto de uma das metades da figura pode ser obtido como o produto do conjugado de um ponto da outra metade por:

$$R_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Figura 4. Figuras de Escher conforme Diniz (pag 252)**

*2.3.5 Tipo de exercícios nos livros didáticos*

Todos os autores mantêm um padrão de apresentação dos exercícios. Após a exposição teórica, apresentam exemplos ou exercícios resolvidos. Posteriormente, propõem exercícios para que os alunos os resolvam. Em geral, tais atividades exigem, na sua maioria, procedimentos similares ou até iguais aos resolvidos nos exemplos de cada livro. São exercícios que exigem pouca interpretação e, geralmente, muitos cálculos. Apenas Mello (2005), Dante (2005) e Diniz (2005) propõem exercícios contextualizados que exigem que os alunos consigam aplicar os conhecimentos apreendidos de forma integrada, sem ser mera reprodução dos modelos apresentados pelo autor. A Figura 5 apresenta uma dessas propostas.



## Exercícios complementares

Ver resolução das questões 67 e 70 no Guia do professor

### Temáticos

**Os números complexos**

**57.** Calcule o valor de $x$ e $y \in \mathbb{R}$ de modo que:
$x + 1 + y(1 + 4x + 5i) + i(3x - 1) =$
$= 2i(1 + x) + 3y(i + x)$ $x = 5$ e $y = -1$ ou $x = -1$ e $y = 2$

**58.** Determine o valor de $x \in \mathbb{R}$ para que o número complexo $z = (x^2 - 5x + 6) + (x^2 - x - 2)i$ seja imaginário puro. 3

**Operações com números complexos**

**59.** Determine $x$ e $y \in \mathbb{R}$, de modo que:
$(x + yi) \cdot (2 + 3i) = 1 + 8i$ $x = 2$ e $y = 1$

**60.** Ache $a - b$ sabendo que os complexos $a$ e $b$ são tais que $a^2 - b^2 = 6$ e $\bar{a} + \bar{b} = 1 - i$. $3 - 3i$

**Exercício resolvido**

**61.** Calcular o valor de $(1 + i)^2$ e $(1 + i)^{30}$.

***Solução***

- $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1 + i)^{30} = [(1 + i)^2]^{15} = (2i)^{15} = 2^{15} \cdot i^{15} = 2^{15} \cdot i^3 = 2^{15} \cdot (-i) = -2^{15} \cdot i$

**62.** Calcule o valor de:
a) $(1 - i) \cdot (1 + i)$ 2
b) $(1 - i)^{17} \cdot (1 + i)^{19}$ $i2^{18}$

**63.** Sendo $z = 3 - 3i$, calcule o recíproco (ou inverso) do conjugado de $z$. $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i$

**Operações na forma trigonométrica**

**64.** Considere $z = 2\sqrt{2}(1 - i)$.
a) Determine $|z|$ e $\arg(z)$. 4 e $\frac{7\pi}{4}$
b) Localize $z$ no plano complexo. Qual é a imagem de $z$?
c) Expresse $z$ e $\bar{z}$ na forma trigonométrica.
d) Calcule $(z - \bar{z})^3$. $128\sqrt{2}i$

**65.** Expresse $z = \left(\frac{-\sqrt{3} - i}{2}\right)^9 - \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{18}$ na forma algébrica. $z = 1 + i$

### Aprofundamento

**66.** Calcule $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{15}$ para $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. zero

**67.** (Fuvest-SP) Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde $\alpha$ é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do número complexo $z$.
a) Determine os valores de $\alpha$ para os quais a equação tem quatro raízes distintas. $\alpha < \frac{3}{4}$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$
b) Represente, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

**68.** Resolva geometricamente a inequação modular complexa $|z + 8| \leq 5$, com $z = x + yi$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Dentre os pontos do lugar geométrico da solução da inequação dada, determine aquele que está mais próximo do ponto (5, 0). $(-3, 0)$

**69.** (Unesp) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$, sendo i a unidade imaginária.
a) Determine $z \cdot w$ e $|w - z|$. $-7 + i$ e 5
b) Represente $z$ e $w$ no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, com $b \geq 0$, de modo que os números complexos $z$, $w$ e $t = bi$ sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20. $b = 7$

**70.** Represente no plano complexo o conjunto $A \cap B$, sendo
$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (2 + 3i)| \leq 1\}$ e
$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \leq 3\}$.

**71.** Resolva a equação $w^2 + |w| = 0$ no universo:
a) real $S = \{0\}$ b) complexo $S = \{0, i, -i\}$

**72.** Sabendo que $z = (x - 2i)^2$, com $x \in \mathbb{R}$, é um número complexo tal que $\arg(z) = 90°$, determine o valor de $\frac{1}{z}$. $-\frac{1}{8}i$

**73.** Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $i \cdot z^2 = -\bar{z}$. $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

**74.** Determine $z$ e $w \in \mathbb{C}$ tal que: $\begin{cases} iz - 2w = 2 + 3i \\ -2z + 3iw = 1 + 4i \end{cases}$ $z = 1 - 2i$ e $w = -i$

### Contextualizados

**75. Relógio.** Admita que o centro do plano complexo coincida com o centro de um relógio de ponteiros. Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, determine sobre que número complexo ele estará às 11 h 55 min. $z = -1 + i\sqrt{3}$

**76. Geometria.** Se $z = 2 + i$ sofrer uma rotação de 90° no sentido horário, vai se tornar o complexo $w$. Determine $w$. $w = 1 - 2i$

### Desafios

**77.** Sabendo que $z, w \in \mathbb{C}$ de modo que $|z| = 1$ e $z \neq w$, calcule: $\left|\frac{1 - \bar{z} \cdot w}{z - w}\right|$ 1

64. c) $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$
$\bar{z} = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

588 Unidade 12

**Figura 5 - Exercícios contextualizados do livro *Matemática – construção e significado*, do autor José Mello**

### *2.3.6 Considerações finais sobre os livros didáticos analisados neste estudo*

Todos os livros aqui analisados trazem a contextualização histórica, feita antes ou depois da introdução do conteúdo, de maneira mais algébrica ou mais literária. Acreditamos que tal abordagem é um estímulo para o estudo do tema. As obras apresentam as três representações de um Número Complexo: par ordenado, forma algébrica e forma trigonométrica. Apenas o livro de Paiva apresenta, além das formas anteriormente citadas, a forma polar. Consideramos bastante importante a apresentação de tais representações, mas há, em todos os casos, uma supervalorização da abordagem algébrica.

Os livros que trabalham com a multiplicação e a divisão na forma trigonométrica quase não apresentam suas respectivas representações geométricas. Acreditamos que isso impeça uma visualização que tornaria mais significativas e atraentes essas operações. Também sentimos a falta de relação entre os Números Complexos e operações de soma e de subtração com os vetores. Os alunos, em geral, já estão familiarizados com os vetores, pois, no Ensino Médio, este é o primeiro tema abordado na disciplina de Física. Em geral, observamos que os livros apresentam um número excessivo de definições, de fórmulas e de propriedades, com poucas representações geométricas apresentadas.

## *2.4 Trabalhos anteriores sobre a temática abordada neste estudo*

Ao definir o tema desta dissertação, começamos uma busca por pesquisas sobre os estudos já realizados sobre o ensino dos Números Complexos. Começamos nosso levantamento nas bibliotecas digitais de universidades, onde encontramos quatro dissertações sobre o tema.

A Biblioteca Virtual da PUC–SP possui, em seu acervo, a dissertação de Oliveira (2010), intitulada *Números Complexos – Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos.* Esse trabalho foi realizado no mestrado em Educação Matemática da PUC–SP, tendo como orientadora a Prof.ª Dra. Maria José Ferreira da Silva. O estudo de Oliveira (2010) possui a seguinte questão norteadora: **Ensinar o conteúdo Números Complexos, enfatizando seus aspectos gráficos, torna seu aprendizado mais significativo?**

Para responder a tal questão, o autor elaborou e aplicou uma sequência didática, fazendo uso do *software* Geogebra, fundamentado na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Como metodologia, utilizou os princípios da Engenharia Didática, de Michèle Artigue.

O autor dividiu seu trabalho em quatro capítulos. No primeiro, apresentou a problemática e a fundamentação teórica, além de justificar a relevância da pesquisa, delimitar o problema e apresentar o quadro teórico e os procedimentos metodológicos. No segundo capítulo, intitulado Estudos Preliminares, o autor apresentou um estudo referente ao que dizem os PCN sobre o ensino. Fez a análise da abordagem dos Números Complexos nos livros didáticos e uma revisão histórica e epistemológica do assunto.

Nessa revisão, apresentou as diferentes abordagens que Diofanto, Viète, Cardano, Tartaglia, Bombelli, John Wallis, Wessel, Argand e Gauss faziam para os Números Complexos. O autor citou a utilização da fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Também salientou que já se sabia que 4 era uma das soluções da equação e, como durante os cálculos surgiu a raiz quadrada de $-121$, tornou-se necessário extrair a raiz quadrada de um número negativo, afirmando que isso conduziu à representação de $\sqrt{-1} = i$.

O terceiro capítulo refere-se aos registros de representação semiótica dos Números Complexos, divididos em registro de representação algébrica, pares ordenados, gráfica, trigonométrica e matrizes.

No quarto capítulo, o autor descreveu a pesquisa, apresentando os sujeitos que participaram do estudo. Fez, também, uma análise do questionário e uma descrição da aplicação. Após, exibiu a sequência didática com suas concepções, análises *a priori* e *a posteriori*, fazendo, por último, as considerações finais.

A sequência didática é constituída de duas partes: a primeira está dividida em cinco atividades, cujo propósito era fazer com que os alunos explorassem e compreendessem as propriedades gráficas relacionadas aos Números Complexos, no plano complexo; a segunda parte, relativa às atividades cinco e seis, envolveu a resolução de problemas. Para isso, os assuntos tratados em cada atividade ficaram assim divididos:

Atividade 1: Representação de números complexos no plano complexo, conjugado e oposto de um número complexo

Atividade 2: Adição de complexos

Atividade 3: Criação de ferramentas no Geogebra

Atividade 4: Multiplicação de complexos

Atividade 5: Divisão de complexos

Atividade 6: Resolução de problemas

Atividade 7: Resolução de problemas

Os sujeitos da pesquisa foram seis alunos pertencentes a uma escola particular de São Paulo. O experimento foi feito em um ambiente separado da sala de aula onde estudavam, com computadores disponíveis nos quais o *software* de geometria dinâmica *Geogebra* estava instalado. Além dos protocolos, em que os alunos anotaram suas resoluções e conclusões, o pesquisador contou com vídeo da experimentação. As identidades dos alunos, por motivo de privacidade, foram preservadas.

O autor concluiu que o ensino usual desse conteúdo falha no que diz respeito às conversões entre esses registros, embora os Números Complexos permitam vários registros de representações diferentes, ou seja, podem ser representados por pares ordenados de números reais, por vetores no plano, por matrizes, por números da forma $a + bi$, em que $a$ e $b$ são números reais, e também na forma trigonométrica. Essa falha foi percebida pelo autor, já que tais conversões permitiriam resolver, por exemplo, problemas de geometria plana com o uso de vetores representantes de números complexos de forma mais econômica, em termos de operações, do que seria com geometria analítica. Essa abordagem, porém, não é explorada no ensino dos Números Complexos.

A pesquisa de Oliveira (2010) mostrou potencialidades a serem exploradas. O autor questiona quais seriam as possibilidades e consequências de se apresentarem os Números Complexos, com enfoque em aspectos geométricos, a alunos que os veriam pela primeira vez, e como se estruturaria uma sequência didática com esse objetivo, uma vez que sua pesquisa foi aplicada a alunos que já tinham estudado o tema. A nossa proposta pretende responder a alguns desses questionamentos feitos pelo autor, já que possui enfoque geométrico e foi aplicada a alunos que ainda não tinham estudado os Números Complexos.

Outra dissertação que aborda os Números Complexos é a de Araújo (2006), com orientação da Profª Dra. Marlúcia Oliveira de Santana Varela, defendida no Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Motivada por indagações e por dificuldades dos alunos, detectadas na sala de aula quanto ao ensino dos Números Complexos, a autora apresenta uma proposta de mudança metodológica para o ensino-aprendizagem usual desse tema no ensino médio. As questões que nortearam o trabalho foram:

1. Que motivações são adequadas à aprendizagem do aluno em relação aos Números Complexos?

2. Que mudanças metodológicas podem favorecer a aprendizagem destes conteúdos?

3. Como implementar uma metodologia de ensino adequada?

Tomando como base as questões apresentadas, a autora decidiu utilizar, em sala de aula, uma sequência didática formada por atividades como alternativa metodológica, substituindo a tradicional aula expositiva para trabalhar o conteúdo dos Números Complexos. O uso de sequências didáticas formadas por atividades teve como referência os estudos realizados por Oliveira (2006) e Mendes (2001), os quais elaboraram, testaram e avaliaram suas propostas de ensino e aprendizagem também por meio de atividades. Araújo (2006) destacou como objetivos específicos:

1. Discutir a apresentação dos conteúdos dos Números Complexos nos livros didáticos, utilizando-se de uma amostra representativa para verificar se a forma como são apresentados os conteúdos tem interferência com a dificuldade de aprendizagem dos alunos;
2. Preparar uma sequência didática como parte de uma proposta de ensino dos Números Complexos através de atividades para serem trabalhadas pelos alunos na sala de aula, com a pretensão de verificar, através dos dados obtidos, se a metodologia de ensino através de atividades surte efeitos positivos;
3. Implementar a proposta de ensino em uma turma do 2º ano do Ensino Médio;
4. Analisar as dificuldades e/ou facilidades apresentadas pelos alunos durante o processo de ensino do tema por atividades.

A autora elegeu a Engenharia Didática como metodologia de sua pesquisa, objetivada em suas quatro fases. Na tentativa de contribuir para solucionar as questões apresentadas, o trabalho está estruturado em cinco capítulos, conforme a exposição a seguir.

Na introdução do estudo, apresentou os motivos que a levaram a escolher o problema, descreveu os objetivos da pesquisa e discutiu o contexto no qual se insere o ensino dos Números Complexos. Finalizou situando a necessidade de efetivar, na sala de aula, alternativas metodológicas a partir das quais investigamos características que facilitam a aprendizagem dos números complexos pelos alunos.

O segundo capítulo – *Os números complexos no ensino médio* – situa o trabalho enquanto uma pesquisa que articula a problemática do ensino de Matemática no Ensino Médio aos conteúdos de Números Complexos, presentes na sua evolução histórica a partir dos enfoques simbólico, numérico, geométrico e algébrico. Utilizando tais enfoques, a autora introduz a unidade imaginária *i*.

No enfoque geométrico, apresentou a correspondência existente entre os números complexos e os vetores, o que permite que seu uso seja aplicado nos mais diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Citou, como exemplo disso, o estudo da eletricidade, no qual os Números Complexos aparecem nos assuntos relacionados à corrente elétrica, voltagem, impedância, entre outros. No enfoque algébrico, a autora ressaltou que as operações de adição, subtração e multiplicação são mais intuitivas do que a representação por pares ordenados. No enfoque por multiplicação, por exemplo, disse que basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém deve-se observar que $i^2$ é um número real e vale $-1$, não havendo, portanto, necessidade de os alunos decorarem fórmulas.

No terceiro capítulo, intitulado *Os caminhos da pesquisa*, Araújo (2006) descreveu o ambiente, os participantes, o programa de disciplina, a metodologia de ensino e os instrumentos da pesquisa, sendo a engenharia didática a metodologia de pesquisa utilizada. A pesquisa foi realizada no CEFET-RN com alunos de uma turma do segundo ano.

A autora acredita que a dimensão técnica que acompanha toda a história do CEFET a obriga a ter uma atenção especial para a necessidade de buscar relacionar os conteúdos matemáticos aos conhecimentos técnicos, tendo em vista que, na grade curricular de quase todos os cursos oferecidos atualmente, existem disciplinas técnicas que requerem conhecimentos dos números complexos.

A autora fez dois levantamentos de dados para subsidiar a situação do ensino em Natal, particularmente no CEFET-RN: o primeiro foi relacionado a dados quantitativos e qualitativos sobre o conteúdo dos Números Complexos nos livros didáticos de Matemática utilizados no ensino médio, que continuam com aportes, predominantemente, formais; o segundo foi relacionado a dados coletados de entrevistas realizadas com vinte professores que trabalham com esse conteúdo no ensino médio do CEFET-RN. Nesse capítulo ainda, descreveu todo o desenvolvimento da pesquisa, o qual foi vivenciado na interação *professor x aluno x meio*, por meio da realização da fase da experimentação, conforme a metodologia da pesquisa e das sequências didáticas na sala de aula.

No capítulo destinado à *Discussão e análise dos resultados da pesquisa*, a autora apresentou a análise do estudo feito com a amostra de dez livros didáticos de Matemática em relação aos Números Complexos. Em seguida, apresentou os comentários das respostas das entrevistas realizadas com os professores que trabalham com Números Complexos no exercício de suas profissões. Os resultados obtidos forneceram subsídios para a autora concluir que sua proposta de ensino-aprendizagem de Números Complexos, por meio de atividades aos alunos, foi positivamente validada.

No capítulo das Considerações finais, inseriu o seu olhar reflexivo e crítico sobre o ensino e a aprendizagem dos Números Complexos. A autora ressaltou que as sequências didáticas selecionadas com todo o conteúdo programático e, em ordem crescente de dificuldade, certamente são uma estratégia que oportuniza os alunos a se familiarizarem com o conteúdo gradativamente. Resolver e comentar as atividades realizadas pelos alunos após a tentativa deles resultou em vários pontos positivos em sala de aula, como atenção, interesse, participação, concentração, motivação, discussão, interação e, consequentemente, aprendizagem.

Tal mudança metodológica no processo ensino-aprendizagem dos Números Complexos através do uso de atividades surtiu resultados positivos, uma vez que, na avaliação bimestral, apenas quatro alunos ficaram abaixo da média. Nesse sentido, a autora sugeriu o uso de atividades nas aulas de Números Complexos como um agente facilitador da aprendizagem. Concordamos com a autora quanto ao fato de que o uso de atividades nas quais os alunos precisam formular e testar hipóteses seja um facilitador e motivador da aprendizagem, de maneira que esse tipo de atividade estará presente em nossa proposta didática.

Outro trabalho referente ao tema tratado neste estudo é o trabalho de Monzon (2012), intitulado *Números Complexos e Funções de Variável Complexa no Ensino Médio – Uma Proposta Didática com Uso de Objeto de Aprendizagem* e desenvolvido no mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com orientação da Profª Dra. Maria Alice Gravina. A autora apresentou uma proposta didática para o ensino de Números Complexos e Funções de Variável Complexa, fazendo uso de um objeto de aprendizagem. Seu objetivo principal foi responder a esta questão norteadora: **Através de recursos tecnológicos na forma de objeto de aprendizagem, é possível implementar um ensino introdutório de Funções de Variável Complexa na educação escolar de nível médio?**

A autora dividiu o trabalho em seis capítulos. No primeiro, apresentou a sua trajetória profissional e suas inquietudes quanto ao ensino dos Números Complexos. Ela considerava que tal conteúdo era penoso e difícil de ser trabalhado, pois os alunos não demonstravam interesse por ele, não o compreendiam e não conseguiam relacioná-lo com outra área, tornando-se, assim, um ensino isolado e sem sentido.

No capítulo 2, *A Educação Matemática Na Escola Básica*, a autora desenvolveu a análise teórica que verifica as possibilidades de aprimorar o ensino, buscando conhecimentos em relação ao desenvolvimento cognitivo, influenciados por Piaget e Vygotsky. Também foi analisado o conteúdo relativo ao tema apresentado em três livros didáticos e algumas das dificuldades de aprendizagem que estão documentadas em outras pesquisas. As orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram abordadas nesse capítulo. Por fim, discutiu o potencial do uso das tecnologias e sua influência nos registros semióticos.

O desenvolvimento histórico dos Números Complexos até sua legitimidade como saber matemático foi abordado no capítulo *Os Números Complexos na História*. Tal desenvolvimento foi apresentado detalhadamente, uma vez que Monzon (2012) reconhece a importância da interpretação geométrica desses números, na qual se baseou a proposta didática da autora.

Monzon (2012),utilizando o objeto de aprendizagem *Números Complexos*, construído pela autora, apresentou, no capítulo *Tecnologias e Números Complexos: Posssibilidades para o Ensino***,** o conteúdo sobre Números Complexos e Funções de Variável Complexa. A autora utilizou duas ferramentas para tratar do assunto. A primeira foi o vídeo *Dimensions: une promenade mathematique*, produzido por Jos Leys, Étienne Ghys e Aurélien Alvarez, que consiste de nove capítulos disponíveis gratuitamente na Internet em diferentes línguas e legendas. O vídeo foi utilizado como ferramenta motivacional e possui como objetivo explicar a quarta dimensão. Outra ferramenta utilizada foi o objeto de aprendizagem "Números Complexos"[4], no qual há a possibilidade de manipulação de animações. Tais animações foram criadas no *software* Geogebra e dão dinamismo e movimento aos diferentes registros dos Números Complexos.

Para introduzir o tema, a autora apresentou a ideia que dá origem ao número imaginário *i*. Utilizou o vídeo fazendo uma reta graduada e interligando a geometria à álgebra, ao relacionar números com pontos da reta. Usou os pontos dessa reta para interpretar a soma e a multiplicação de números reais. Em seguida, utilizou o objeto virtual de aprendizagem, construído pela autora, para trabalhar as representações algébrica e trigonométrica dos Números Complexos e suas correspondentes interpretações como pontos do plano. As operações de adição, multiplicação e divisão foram trabalhadas no referido objeto.

As funções de variável complexa foram tratadas como transformações no plano. A autora utilizou o vídeo *Dimensões,* no qual o matemático Douady apresenta os efeitos de algumas transformações olhando para um subconjunto do domínio que corresponde a uma fotografia dele. Para cada uma das funções de variável complexa, foi feita uma exploração

[4] Disponível em : http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/numeros_complexos/.

geométrica que procurou relacionar conjuntos de pontos no domínio com o correspondente conjunto de pontos no contradomínio.

No quinto capítulo, Monzon (2012) tratou da concepção da proposta didática e da análise para sua validação. Para organizar, analisar e validar essa proposta, a metodologia de investigação escolhida foi a Engenharia Didática. Após identificar o problema a ser investigado e, levando em consideração as análises prévias, ela apresentou suas principais escolhas didáticas: fazer uso de tecnologias e propiciar a participação ativa dos alunos na construção dos seus conhecimentos.

A sequência de atividades da autora apresenta os menus do objeto NC e possui como conteúdos os Números Complexos e suas representações, as operações com Números Complexos e as funções de variável complexa. Foram realizadas seis atividades, conforme a Figura 6, cada uma exigindo a manipulação de uma animação, por meio da qual deviam ser respondidas às questões presentes na seção "Para pensar".

| **Atividades** | **Assunto** | **Menu do Objeto de aprendizagem** | **Questões "Para pensar"** |
|---|---|---|---|
| Atividade 1 | Definição e Representação algébrica do número complexo | Introdução e Representações | 10 questões |
| Atividade 2 | Representação trigonométrica do número complexo | Representações | 7 questões |
| Atividade 3 | Adição de complexos | Operações | 7 questões |
| Atividade 4 | Multiplicação na forma algébrica | Operações | 9 questões |
| Atividade 5 | Multiplicação na forma trigonométrica | Operações | 6 questões |
| Atividade 6 | Função F(Z) = A + Z | Funções | 3 questões utilizando a 1ª animação<br>5 questões utilizando a 2ª animação |

**Figura 6 – Atividades da sequência didática de Monzon (2012)**

A autora apresentou as análises *a priori* e *posteriori* de cada uma das atividades, as quais foram agrupadas em três blocos. No primeiro, encontram-se as atividades 1 e 2, relativas ao conceito do Número Complexo e suas representações. O bloco dois abrange as atividades 3, 4 e 5, as quais tratam das operações com os Números Complexos. O último bloco discute a atividade 6, que aborda as funções de variável complexa. Posteriormente, a autora confrontou tais análises com o objetivo de validar sua proposta didática.

O último capítulo apresenta os resultados do estudo, as reflexões dessa experiência como professora e também a influência do mestrado na postura da autora em sala de aula. Como resultados, salienta que a interpretação geométrica do número imaginário trouxe aos estudantes a recontextualização da reta numérica e também associou os pontos no plano aos seus números correspondentes. Acredita, igualmente, que os alunos entenderam os Números Complexos e suas representações, uma vez que operaram, algébrica e geometricamente, com tais números, tendo, assim, um primeiro contato com as funções de variável complexa. Monzon (2012) acredita que a apresentação da história dos Números Complexos aos alunos permitiu que eles enxergassem que a Matemática não nasceu pronta, mas foi desenvolvida ao longo do tempo a partir de dúvidas e questionamentos referentes a cada época.

A nossa proposta, assim como a de Monzon (2012) também investiu na abordagem geométrica, mas não utilizamos tecnologias digitais. Construímos, juntamente com os alunos, a forma algébrica e operamos com os Números Complexos nessa forma.

Continuando a revisão da literatura sobre o tema, encontramos a dissertação de Rosa (1998), intitulada *Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito*. O trabalho foi desenvolvido no Mestrado em Ensino da Matemática na PUC–SP, tendo como orientador o Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e como coorientador o Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva. O autor teve como objetivo criar uma sequência didática que propusesse a introdução dos Números Complexos da maneira como surgiram na História, ou seja, a ideia era propor a resolução de equações do 3º grau pelos alunos através do método de Cardano-Tartaglia, objetivando que eles operassem com esses números.

No primeiro capítulo, *O Objeto Matemático*, Rosa (1988) apresentou a construção do sistema de Números Complexos por uma extensão do sistema de Números Reais. Citou que, sempre que na Aritmética estendemos um sistema numérico, o novo sistema deve conservar todas as propriedades algébricas do sistema antigo e incluir todos os números de tal sistema, de maneira que as operações algébricas novas e antigas, quando aplicadas aos números do sistema antigo, sejam as mesmas. Disse que é necessário conter novos números, do tipo que necessitamos. Também deduziu as regras para operar com esses novos números. Fez, posteriormente, a representação gráfica e apresentou a forma trigonométrica. Para introduzir a unidade imaginária *i*, o autor afirma que o conjunto dos Números Complexos possui um elemento especial *i*, o qual goza da propriedade $i \cdot i = i^2 = -1$, dizendo que ela se chama unidade imaginária.

No capítulo *Problemática e Metodologia da Pesquisa*, o autor citou os problemas encontrados no ensino-aprendizagem dos Números Complexos e também apresentou sua metodologia, fundamentada na linha francesa da Didática da Matemática, que consiste em um estudo histórico e epistemológico do conceito de Números Complexos, da transposição didática desse conceito e da elaboração, aplicação e análise da série de atividades que os alunos deverão efetuar.

O estudo histórico e epistemológico dos Números Complexos foi apresentado no terceiro capítulo, onde o autor apresentou a origem, a evolução e os obstáculos epistemológicos desse conceito.

No quarto capítulo, intitulado *Estudo da Transposição Didática dos Números Complexos*, Rosa (1998) fez uma análise da Proposta Curricular para o Ensino da Matemática do 2º Grau (atualmente designado de ensino médio) do Estado de São Paulo e também de alguns livros didáticos. Para saber a concepção dos alunos sobre o conceito de números complexos, ele aplicou um questionário cujas respostas foram analisadas por dois *softwares*: o CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva) e o CHADOC (Ag. Almouloud. S. 1992).

No capítulo chamado *Sequência Didática*, o autor apresentou as atividades juntamente com uma análise que faz a previsão dos possíveis comportamentos dos alunos frente a tais atividades. A sequência apresentou forte conotação histórica e teve como objetivo principal propor aos alunos a resolução de uma equação do terceiro grau pelo método de Cardano-Tartaglia.

A *Realização da Sequência e Análise a Posteriori* foi o título do sexto capítulo, onde o autor descreveu como transcorreu a aplicação da sequência didática, apresentando uma análise a *posteriori* dessa aplicação.

O autor, no último capítulo, apresentou os resultados do teste aplicado dois meses depois com os alunos que efetuaram as atividades da sequência didática. Ele aplicou o mesmo teste a estudantes que haviam estudado os Números Complexos de maneira diferente da sua proposta. De posse de tais informações, pôde traçar um quadro comparativo dos resultados, concluindo que seu trabalho obteve sucesso.

Para o entendimento da temática discutida em nossa dissertação, analisamos também o estudo de Carneiro (2004), chamado *A Geometria e o Ensino dos Números Complexos*, que propõe uma abordagem geométrica dos Números Complexos. O autor afirma que definir os Números Complexos como "Um número complexo é um objeto da forma z = a + b$i$, onde $a$ e $b$ são reais, $i$ =$\sqrt{-1}$, e permanecem válidas as leis da álgebra" é análogo a introduzir as frações para um estudante que conheça números inteiros, do seguinte modo: "uma fração é um objeto da forma $\frac{a}{b}$, onde $a$ e $b$ são inteiros (sendo b $\neq$ 0), com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$, seguindo as seguintes leis da álgebra: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ". Ele acredita que introduzir o tema dessa maneira dificulta o entendimento dos alunos e o torna desinteressante.

Outro comentário feito pelo autor trata da unidade imaginária $i$. Ele acredita que definir $i$ =$\sqrt{-1}$ e colocar a frase "onde $i$ é a unidade imaginária" tende a desconcertar o iniciante, pois, durante anos, convencemos e fomos convencidos de que o quadrado de um número não pode ser negativo. O autor apresenta também o desenvolvimento histórico do conceito dos Números Complexos, visto que acredita que a abordagem predominante algébrica está vinculada à sua história, mas que a própria história permite a abordagem geométrica. Investindo na abordagem geométrica, apresenta os Números Complexos como pontos ou vetores do plano, e as operações entre eles aparecem como transformações geométricas capazes de serem visualizadas. Carneiro (2004) identifica a unidade imaginária $i$ com o ponto (0,1).

O autor acredita que o ensino de tal tema deva dar ênfase à operação de multiplicação, que é essencialmente uma composição de rotações e, por isso, que os complexos aparecem em problemas que envolvem rotação, círculo, funções trigonométricas, movimentos periódicos, etc. Tais propriedades, segundo ele, garantem a utilização dos Números Complexos no estudo de circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia, motores e mecânica quântica. Conclui o estudo afirmando que:

> A humanidade levou milhões de anos para descobrir os números complexos, mas somente 300 anos após começou a perceber o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação desta descoberta. Passados mais 200 anos, o ensino dos números complexos necessita beber mais nesta fonte que é a abordagem geométrica dos números complexos, ainda mais agora que possuímos o recurso dos programas de computador para a Geometria (pág.10).

Concordamos com o fato de que definir $i$ =$\sqrt{-1}$ não é adequado e, mais ainda, não está correto, já que $(-i)^2 = -1$, ou seja, $-\ i$ também é uma raiz de $-1$.

Concluímos aqui a revisão de estudos sobre Números Complexos ressaltando que a abordagem geométrica pode e deve ser utilizada no ensino do tema. Considerando o que acabamos de referir, ressaltamos que será dessa maneira que iremos apresentar a proposta didática a ser empreendida neste trabalho, a qual será detalhada no quarto capítulo.

# 3 Referencial Teórico

Ao iniciarmos o estudo dos Números Complexos, analisamos as pesquisas de Oliveira (2010), Monzon (2012), Araújo (2006) e Rosa (1998). Tal análise apontou a importância de se trabalhar as diferentes formas de representações dos Números Complexos e, a partir dessa revisão, escolhemos como referencial teórico para nosso trabalho a Teoria de Registros de Representação, de Raymond Duval, que trata dos aspectos cognitivos relacionados à aquisição de conhecimentos matemáticos. Concordamos com Damm (1999, p.135) quando afirma que "A teoria de Duval tem sido cada vez mais utilizada quando as pesquisas concernem à aquisição de conhecimento e à organização de situação de aprendizagem".

Para Duval (1999), a aprendizagem da matemática constitui um campo de estudo privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. Tal aprendizagem recorre à utilização de vários sistemas de expressão e de representação, por exemplo, de gráficos cartesianos, representações em perspectivas, redes, esquemas, linguagens paralelas à linguagem natural e outros.

É importante salientar que Semiótica é a "ciência dos signos" (SANTAELLA, 1990, p.7) e que também pode ser descrita como a "ciência de todas as linguagens". Santos (2011) diz que a Semiótica se ocupa de todas as linguagens, sejam elas verbais – como é a língua materna – ou não verbais, como é a fotografia, a pintura, a arquitetura e, respeitadas algumas condições, a matemática. Devemos salientar que as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 1993, p. 39).

O autor afirma que "As representações semióticas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, linguagem formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras de um objeto matemático" (1995, p. 3). Consideramos que signos são as formas pelas quais uma informação é representada. Tais representações permitem a comunicação do sujeito com o objeto matemático, possibilitando a sua apreensão.

Em uma atividade matemática, vários registros de representação semiótica (enunciado em linguagem natural, expressão algébrica, gráfico, figura geométrica) são mobilizados, sendo uns ligados ao funcionamento cognitivo comum, como a linguagem natural, e outros utilizados pela necessidade da própria atividade matemática.

Para Duval (2003), não há conhecimento matemático que possa ser adquirido sem o auxílio de uma representação. Não se pode ter compreensão em matemática se nós não distinguirmos um objeto de sua representação, visto que um mesmo objeto matemático pode ser dado através de diferentes representações. O autor afirma que “O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas” (DUVAL, 2003, p. 21). Para que um sistema semiótico seja um registro de representação, é necessário que ele exerça a função de comunicação, de tratamento e de conversão.

Segundo Duval (2003, p. 15: 16), “existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões”. Os tratamentos são transformações dos registros de representações semiótica que permanecem no mesmo sistema. Os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema semiótico de representação. Podemos citar o exemplo: efetuar a soma de dois Números Complexos expressos na forma algébrica e explicitar a resposta na mesma forma.

Já as conversões são transformações de um mesmo objeto por registros de representações com conteúdos diferentes. Assim, há mudança de sistema, mas conservam-se as referências ao mesmo objeto. Por exemplo, “passar” um Número Complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica.

O autor define *semíosis* como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* como os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto. Concordamos com Duval (2009, p. 15) quando afirma que, em matemática, “as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática.” Ou seja, a *semiósis* é imprescindível para a *noésis*. Não há *noésis* sem *semiósis*. A aprendizagem matemática ocorre à medida que os registros de representação são coordenados.

Segundo Duval (2009, p. 37), “a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão dos textos e à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos confrontam três fenômenos”, a saber:

a) A diversificação dos registros de representação semiótica;
b) A diferenciação entre representante e representado: essa diferenciação é normalmente associada à compreensão do que uma representação significa e a possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la aos procedimentos de tratamento;
c) A coordenação entre os diferentes registros: o conhecimento de regras de correspondência entre dois sistemas semióticos diferentes não é suficiente para que sejam mobilizados e utilizados juntos. É importante estar atento aos fenômenos de não-congruência entre as representações produzidas em sistemas diferentes.

Segundo Duval (2009), é necessário considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, e a compreensão destas representações são essenciais ao desenvolvimento do conhecimento. É comum observar uma confusão entre a representação do objeto matemático, que é a **forma** de representar, com o próprio objeto, ou seja, com o **conteúdo** a ser representado.

Neste trabalho, o objeto matemático é o conjunto dos Números Complexos. Iremos representá-los, na linguagem natural, com pares ordenados e através de vetores no plano cartesiano e nas formas trigonométrica e algébrica. Esses são os diferentes registros de representação.

Para analisar as dificuldades de aprendizagem da matemática, Duval (2009) acredita ser prioritário o estudo da conversão de representações e não os tratamentos, visto que se faz necessário que o estudante saiba transitar entre os diversos tipos de registros. Segundo o autor, quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto. Ele afirma que:

> O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em outra representação do mesmo objeto (DUVAL, 1999).

A dificuldade em realizar essas conversões, segundo Duval (2009), está ligada diretamente à *congruência* ou *não-congruência* das representações. Conforme registra o autor, para que haja o fenômeno da congruência na mudança de um registro de representação para outro, são necessários três critérios:

- Correspondência semântica entre unidades significantes que constituem os registros de representação, ou seja, correspondência uma a uma. Para cada elemento simples no registro de saída, um elemento simples correspondente no registro de chegada.
- Mesma ordem possível de apreensão destas unidades, nos dois registros de representação;
- Conversão de uma unidade significante do registro de representação de partida a uma só unidade significante no registro de representação de chegada.

Quando tais critérios não são observados, temos, então, a *não congruência*. Duval (2009, p. 65) dá um exemplo de *congruência*: "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" é correspondente a "$y > x$". Nesse caso, a conversão inversa permite reencontrar a expressão inicial do registro de partida. O autor dá também um exemplo de *não-congruência*: "o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal" é correspondente a " $xy > 0$ ", mas a conversão inversa não permite reencontrar a expressão inicial: " $xy > 0$ " , pois o "$> 0$" traduz tanto " de mesmo sinal" quanto " positivo". Logo, pode ser traduzido por "o produto da abscissa e da ordenada é superior a zero (positivo)", ou por "o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal".

Acreditamos que o essencial para que haja sucesso no ensino e aprendizagem de um conhecimento matemático não são somente os registros de representação utilizados, mas principalmente a maneira como devem ser utilizados. A conceitualização e a aquisição de conhecimentos ocorrem apenas quando o aluno consegue transitar com desenvoltura por diferentes registros.

Com base neste contexto teórico, elaboramos uma sequência didática para introduzir o estudo dos Números Complexos, trabalhando a dependência e o relacionamento entre as formas geométrica e algébrica na elaboração de atividades que privilegiam a articulação entre os diferentes registros de representação dos Números Complexos. Tomaremos como objeto de estudo inicial a forma geométrica, pretendendo construir as formas algébrica e trigonométrica. A articulação desses diferentes registros de representação semiótica foi o que nos motivou a utilizar a teoria de Duval (2009).

# 4 Apresentação e Descrição da Proposta Didática

Ao estudarmos os trabalhos publicados sobre o ensino dos Números Complexos, observamos que, usualmente, é priorizada a abordagem algébrica, confirmando o que já tínhamos constatado em nossa prática pedagógica. Sabemos que essa abordagem permite que os alunos operem com bastante facilidade com esses números, mas não permite que eles visualizem o significado geométrico de tais operações. Acreditamos que, com a abordagem exclusivamente algébrica, os estudantes não sintam interesse pelo assunto.

O estudo de um conteúdo precisa apresentar elementos que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos. Para atingir esse objetivo, apresentamos, ao longo dos nossos encontros, um pouco da história dos Números Complexos, por exemplo, no sétimo encontro quando definimos o conjunto dos Números Complexos dissemos que foi Gauss quem primeiro utilizou tal denominação. Percebemos, ao longo de nossa trajetória profissional, que a história da Matemática é um assunto que pode e deve ser mais explorado. Acreditamos que ela deve permear o desenvolvimento de cada tema estudado e, dessa forma, desenvolvemos a nossa sequência didática.

Como já mencionamos, a proposta aqui em foco tem por base a identificação dos Números Complexos com o plano cartesiano $IR^2$. Em $IR^2$, identificamos os Números Reais com o eixo $x$ das abscissas. Na estrutura geométrica do plano cartesiano, introduzimos operações (soma e produto) que estendem as operações com os Números Reais. A Trigonometria surge, então, como uma ferramenta indispensável para caracterizar a multiplicação dos pares ordenados por meio da forma polar. A associação dos Números Complexos com o plano cartesiano $IR^2$ nos permite transitar entre as várias formas de representação desses números. Esse fato vai ao encontro da teoria dos registros das representações semióticas de Duval, na qual nossa proposta foi fundamentada.

Iniciamos nossas atividades com a soma e a subtração dos pares, associando-os à soma e à subtração de vetores. Na sequência, investimos na abordagem geométrica, ao apresentar a forma polar dos Números Complexos, associando ao par ordenado $(a, b) \in IR^2$ um comprimento $r$ e um ângulo $\theta$. Trabalhar com a forma polar de um Número Complexo possibilitou a visualização da multiplicação dos pares ordenados. Assim, introduzimos a unidade imaginária $i$ de maneira diferente daquela utilizada tradicionalmente, na qual $i$ é apresentado como $\sqrt{-1}$. Considerando nossas experiências didáticas anteriores, concluímos que dizer aos alunos que $i = \sqrt{-1}$ não faz muito sentido, uma vez que não há razão aparente para tal afirmação e, além disso, eles estudavam, até então, que os números negativos não possuíam raízes quadradas.

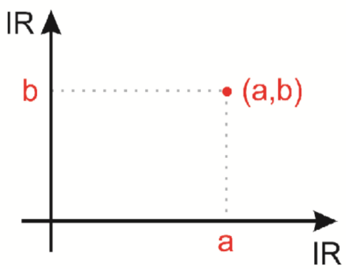
Utilizando a ideia de pares ordenados, apresentamos um significado geométrico para o *i*, o que possibilitou, dessa forma, a correspondência do ponto (0,1) com a unidade imaginária *i*, ideia essa introduzida por Hamilton em 1837. Somente após introduzirmos a unidade imaginária *i* da forma citada anteriormente, é que chegamos à forma algébrica dos Números Complexos, trabalhando todas as operações com essa abordagem, o que aconteceu apenas no 6º encontro.

Como o nosso trabalho foi aplicado em uma turma do curso técnico de Eletrônica, apresentamos algumas aplicações dos Números Complexos nessa área como um fator de motivação ao aprendizado dos alunos. A nossa sequência de atividades foi planejada a fim de responder à seguinte questão: A apresentação dos Números Complexos, no Ensino Médio, inicialmente na forma geométrica para posteriormente exibi-los na forma algébrica é bem aceita pelos alunos?

Em linhas gerais, acreditamos que, como poderá ser conferido neste capítulo, obtivemos êxito em nossa proposta, visto que observamos que os alunos ficaram motivados com a abordagem apresentada e com sua aprendizagem. A seguir, descrevemos, em detalhes, os nove encontros que compuseram a sequência didática.

### *4.1 Primeiro Encontro*

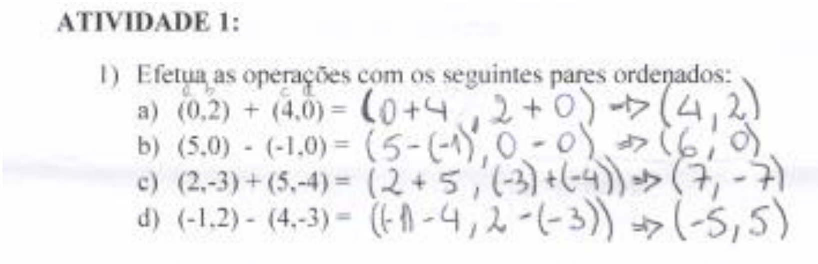
Inicialmente, apresentamos aos 18 alunos presentes em sala de aula a nossa proposta didática, dividindo a turma em grupos. Esse encontro teve a duração de 90 minutos. Apresentamos o conjunto $IR^2 = IR \times IR, = \{(a, b); a, b \in IR\}$ e o identificamos com o plano cartesiano:




Definimos a soma e a subtração de dois pontos (a, b) e (c, d) $\in IR^2$, componente a componente, ou seja:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \ \text{ e } \ (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

Propusemos a nossa primeira atividade retomando a soma e a subtração de pares ordenados, já que esse conteúdo foi trabalhado em semestres anteriores. A Figura 7 apresenta a atividade resolvida por um aluno.



**ATIVIDADE 1:**

1) Efetua as operações com os seguintes pares ordenados:

a) (0,2) + (4,0) = (0+4 , 2+0) -> (4,2)

b) (5,0) - (-1,0) = (5-(-1), 0-0) => (6,0)

c) (2,-3) + (5,-4) = (2+5 , (-3)+(-4)) => (7,-7)

d) (-1,2) - (4,-3) = ((-1)-4 , 2-(-3)) => (-5,5)

**Figura 7. Resolução da Atividade 1 por um aluno.**

Os 18 alunos presentes desenvolveram a questão sem apresentar dificuldades. Apenas um, porém, cometeu um erro de sinal. Poucos estudantes apresentaram dificuldades na resolução do exercício, sendo a dificuldade relacionada à utilização da regra de sinais nas operações de adição e subtração. Acreditamos que a facilidade demonstrada se deve ao fato de os alunos estarem trabalhando com o plano cartesiano na disciplina de Física. Prosseguindo com as atividades, apresentamos as seguintes observações:

1) Se identificarmos (a, b) com o vetor *v* de origem (0,0) e extremidade (a, b) e, de maneira análoga, (c, d) com o vetor *u* de origem (0,0) e extremidade (c, d), podemos observar que a soma e a subtração definidas anteriormente são as mesmas soma e subtração de vetores (vistos em Física).

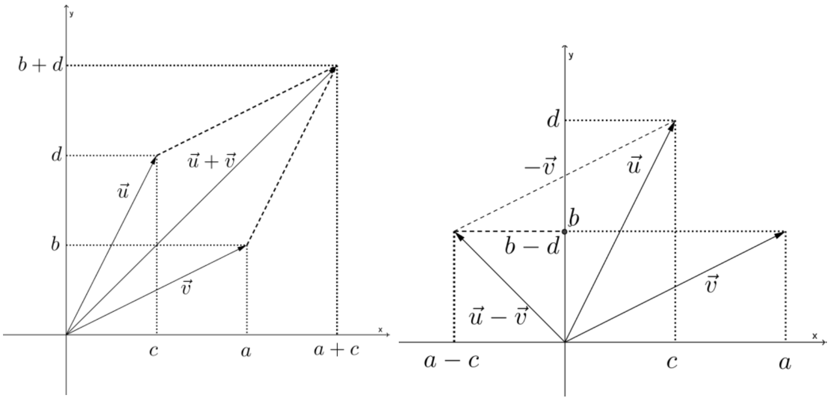


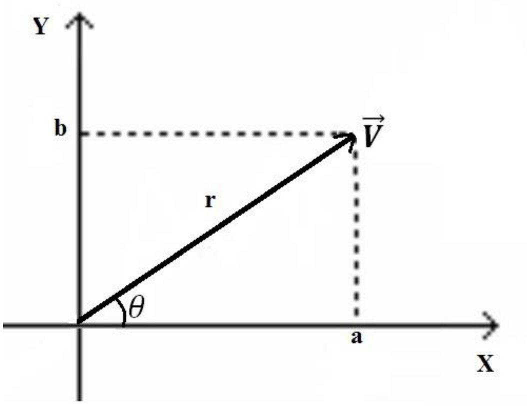

**Figura 8 – Soma e subtração de vetores**

2) Identificando a $\in$ IR com (a, 0) $\in$ IR$^2$, ou seja, a $\equiv$ (a, 0), temos (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) $\equiv$ a + b e (a, 0) $-$ (b, 0) = (a $-$ b, 0) $\equiv$ a – b. Desse modo, a soma e a subtração definidas nos pares ordenados são "as mesmas" soma e subtração de números reais.

Ao relacionarmos a soma e a subtração dos pares ordenados com as mesmas operações nos vetores, utilizamos o que Duval (2009) denominou de conversões, que são transformações de um mesmo objeto por registros de representações com conteúdos diferentes. Assim, há mudança de sistema, mas conservam-se as referências ao mesmo objeto. Nesse caso, passamos da escrita na forma de par ordenado à sua representação gráfica.

A seguir, apresentamos a representação polar. Iniciamos observando que, a cada par ordenado (a, b) $\in$ IR$^2$, podemos associar um comprimento *r* e um ângulo θ, em que θ é o ângulo formado pelo vetor (a, b), definido na observação 1, com o eixo *x*, e *r* é o comprimento (módulo) do vetor.

Dado um ângulo θ e um comprimento *r*, podemos definir o par ordenado (a, b) por:




$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\,sen\theta \end{cases}$$

O vetor correspondente ao par ordenado (*r*cos θ, *r*senθ) tem comprimento *r* e forma o ângulo θ com o eixo *x*. Com o objetivo de associar a cada par ordenado um comprimento *r* e um ângulo θ, propusemos a marcação, no plano cartesiano, do vetor correspondente e a determinação da forma polar de pares ordenados. Trabalhamos com os pares ordenados que possuíam uma das coordenadas igual a zero e, posteriormente, com pares ordenados de coordenadas iguais. Os exemplos apresentados foram: (3,0), $(-2,0)$, (0,1), $(0,-4)$, (1,1) e $(-2,-2)$.

Os alunos identificaram, de forma imediata, o comprimento *r* e o ângulo θ nos vetores afins aos pares ordenados que tinham uma de suas coordenadas igual a zero. Nos pares (1,1) e $(-2,-2)$, precisamos sugerir que eles desenhassem o triângulo retângulo correspondente. A partir de tal sugestão, eles concluíram qual era o comprimento *r* e o ângulo θ de cada um dos pares ordenados (vetores).

Para obter o ângulo, os estudantes valeram-se do fato de que, se as coordenadas do ponto são iguais, então a semirreta correspondente ao comprimento do ponto (vetor) é bissetriz do quadrante ao qual ele pertence. Para obter o comprimento *r* do vetor, acreditávamos que eles utilizariam as coordenadas polares, o que não aconteceu; utilizaram-se, sim, do Teorema de Pitágoras, o que foi uma alternativa válida. Acreditamos que utilizar pontos sem uma das coordenadas igual a zero foi prematuro naquele momento; por outro lado, tal fato introduziu uma discussão que seria apresentada posteriormente.

Os objetivos propostos para o primeiro encontro foram alcançados, uma vez que os alunos conseguiram identificar e transitar entre as formas cartesiana e polar dos pares ordenados (vetores). O trânsito entre a representação de um vetor ou par ordenado, da forma cartesiana para a representação polar e vice-versa, nos remete a Duval, quando relata que uma mudança de registro pode se revelar econômica ou fecunda do ponto de vista do tratamento das representações (DUVAL, 2009).

## *4.2 Segundo Encontro*

Esse encontro teve a duração de três períodos de 45 minutos cada, estando presentes 19 alunos em sala de aula. A pergunta inicial foi esta: "Dado (a, b) e utilizando a identidade $\tan\theta = \frac{b}{a}$, como podemos obter o valor de θ e calcular o comprimento *r*? Tal pergunta objetivava a identificação do triângulo retângulo que tinha como hipotenusa o comprimento *r* do vetor associado ao par ordenado (a,b) e como catetos *a* e *b*. A indagação foi facilmente respondida pelos alunos, pois, ao fazer a representação no plano, a visualização do triângulo retângulo tornou-se evidente para eles. A partir disso, concluíram que poderiam utilizar o Teorema de Pitágoras para obter o comprimento *r*. Tal fato já tinha sido observado na resolução dos últimos exemplos trabalhados na aula anterior. Esses exemplos apresentavam pares ordenados com coordenadas iguais.

Com o objetivo de analisar o sinal da tangente em todos os quadrantes e determinar as coordenadas do ponto analisado, utilizando a interpretação geométrica dos pontos no plano, propusemos as atividades apresentadas nas Figuras 9, 10 e 11, que foram desenvolvidas por um dos alunos da turma.

**ATIVIDADE 2:**

Dado (a,b) podemos obter o valor de θ usando a identidade $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Como podemos calcular o comprimento *r*?

$h^2 = b^2 + c^2$

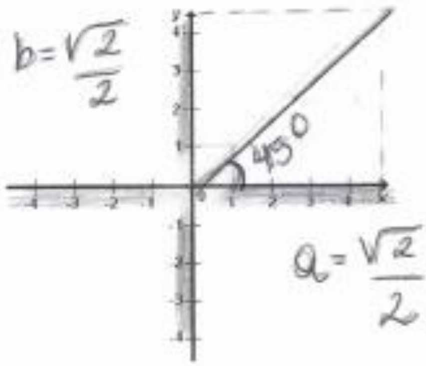
$\boxed{r^2 = b^2 + c^2}$

Como $\theta \in [0, 2\pi]$, então vamos analisar o que acontece com o sinal da tangente em cada quadrante.

1° caso: Se $\theta \in [0, \pi/2] = [0°, 90°]$

Exemplo : $r = 1$ e $\theta = 45°$

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$




$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{r}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{1}$

$2b = \sqrt{2}$

$\boxed{b = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

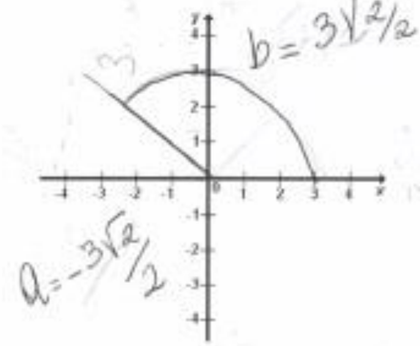
$\frac{\sqrt{2}}{2} = a$

Conclusão: A tan θ é ....Positiva...... Qual é o ponto correspondente? ....$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**Figura 9. Resolução da Atividade 2 por um aluno.**

2° caso: Se $\theta \in [\pi/2, \pi] = [90°, 180°]$

Exemplo: $r = 3$ e $\theta = 135°$




$sen\,\theta = b/r$ $\quad$ $\cos 45° = \frac{a}{r}$

$sen 45° = \frac{b}{r}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \times r$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \times r$ $\quad$ $r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$

$3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = b$ $\quad$ $3 \cdot \sqrt{2}/2 = a$

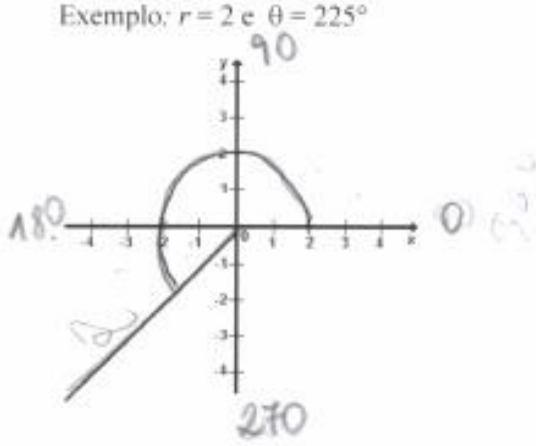
$\boxed{3\sqrt{2}/2 = b}$ $\quad$ $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2} = a}$

$(a, b)$

Conclusão: A tan θ é negativa Qual é o ponto correspondente? $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3° caso: Se $\theta \in [\pi, 3\pi/2] = [180°, 270°]$.

Exemplo: $r = 2$ e $\theta = 225°$




$sen 45° = b/r$ $\quad$ $\cos 45° = a/r$

$\sqrt{2}/2 = b/2$ $\quad$ $\sqrt{2}/2 = a/2$

$2 \cdot \sqrt{2}/2 = b$ $\quad$ $2\sqrt{2}/2 = a$

$-\cancel{2}\sqrt{2}/\cancel{2} = b$ $\quad$ $\cancel{2}\sqrt{2}/\cancel{2} = a$

$\boxed{-\sqrt{2} = b}$ $\quad$ $\boxed{-\sqrt{2} = a}$

Conclusão: A tan θ é positiva Qual é o ponto correspondente? $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**Figura 10. Resolução da atividade 2 por um aluno.**

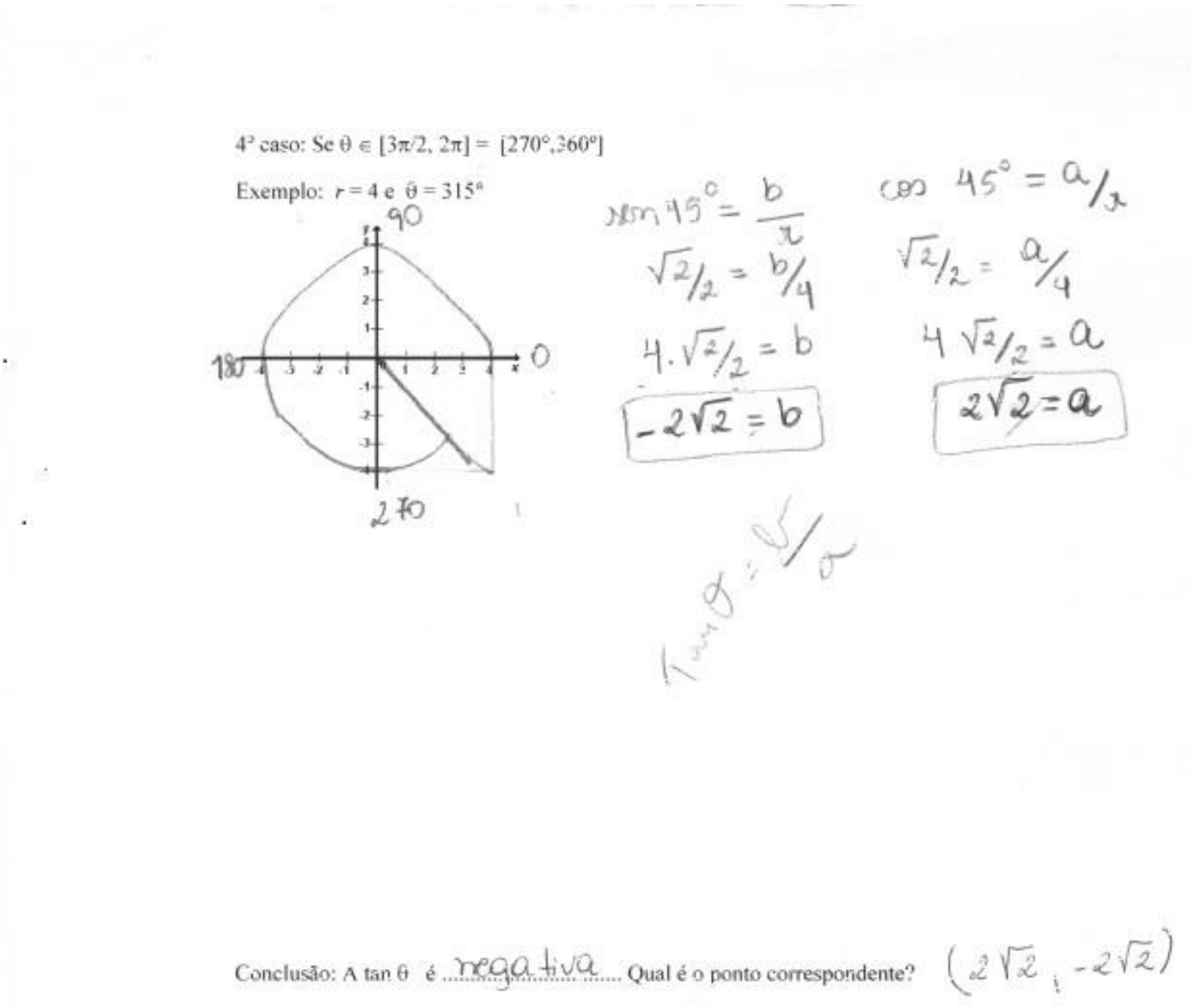



**Figura 11. Atividade 2 desenvolvida por um aluno.**

A produção do aluno, apresentada nas Figuras 9, 10 e 11, mostra que, ao determinar as coordenadas *a* e *b* do ponto, ele utilizou o ângulo de 45°. Tal fato tornaria as coordenadas sempre positivas, mas, através da visualização da representação geométrica, ele percebeu qual seria o sinal de cada uma das coordenadas. Esse fato confirma a importância das representações semióticas em que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema utilizado.

Quanto à análise do sinal da tangente, em todos os quatro quadrantes do plano, observamos que alguns alunos apresentavam dificuldades em relacionar a visualização do ponto e seu ângulo com o sinal da tangente. Para enfrentar tal dificuldade, colocamos no quadro o círculo trigonométrico e a reta tangente. Observando o círculo, discutimos quais seriam os sinais da tangente no primeiro e segundo quadrantes. Os alunos, em grupos, concluíram o que aconteceria com os sinais no terceiro e quarto quadrantes.

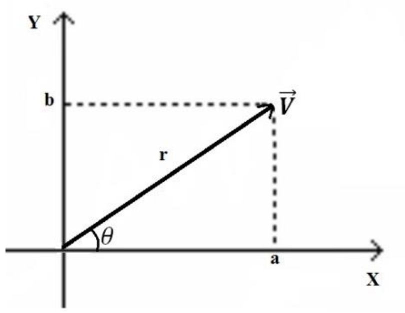
Acreditamos que, ao discutirem dentro do seu grupo de trabalho, os alunos conseguiram esclarecer suas dúvidas. Isso confirma a importância do trabalho colaborativo, pois os estudantes se sentem motivados a realizar as tarefas quando percebem que podem esclarecer suas dúvidas com os colegas e, dessa forma, construir o seu conhecimento sem a interferência direta do professor.

Como os grupos eram formados por 4 ou 5 componentes, havia sempre um aluno que explicava o sinal das coordenadas do ponto quando surgia algum questionamento sobre o sistema de eixos, facilitando, dessa forma, o entendimento dos componentes do grupo. Em um determinado momento, um aluno falou que a coordenada “a” estava no eixo do *x*. Logo, do lado direito, ela era positiva e, do lado esquerdo, negativa. Foi dessa forma que eles concluíam qual seria o sinal da tangente do θ, visto que $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

## *4.3 Terceiro Encontro*

No início desse encontro, havia 14 alunos presentes. Como as atividades são aplicadas em uma turma de ensino noturno, alguns chegaram atrasados devido a seus compromissos profissionais. Também havia na turma três alunos que residiam em municípios próximos a Pelotas e que dependiam de ônibus intermunicipais. No final da aula, havia 18 estudantes presentes.

Ao iniciar o terceiro encontro, relembramos que o par ordenado (a, b) pode ser apresentado como (a, b) = $(r\cos\theta,\ r\text{sen}\,\theta)$, em que θ é o ângulo formado por (a, b) com o eixo *x*, e *r* é a distância da origem ao ponto.




Propusemos a seguinte indagação: É necessário que se tenha ambos *r* e θ para obtermos um único par ordenado correspondente? Com tal questionamento, tínhamos o objetivo de verificar se alunos concluiriam que, para cada par (*r*, θ), temos um único par (a, b) correspondente e, para cada par (a, b), temos um único par (*r*, θ) correspondente. Também objetivávamos que os alunos identificassem as figuras geométricas formadas por pontos com um determinado comprimento *r* e um determinado θ do vetor (a,b). Para isso, propusemos a resolução das seguintes questões:

- Quantos pontos (vetores) em todo o plano, ou seja, nos quatro quadrantes, têm comprimento 2?
- Qual a característica desses pontos (vetores)? Será que eles representam uma figura conhecida? Qual é essa figura?
- Se soubermos apenas o ângulo θ? Por exemplo, quantos pontos do plano têm θ = 30°?
- Será que esses pontos representam uma figura conhecida? Qual é essa figura?

Ao perguntar sobre a necessidade de termos ambos *r* e θ para determinar um único par ordenado, percebemos que, a princípio, eles apresentaram uma dificuldade de entendimento em relação ao "único", uma vez que pensavam em um determinado *r*, por exemplo, *r* = 3, e diziam que o par ordenado era único. Em relação ao ângulo, faziam o mesmo raciocínio. No entanto, eles não estavam atribuindo valores, simultaneamente, ao comprimento e ao ângulo. Nesse momento, sugerimos que escolhessem um valor para *r* e um para θ e marcassem, em um mesmo no plano, os dois valores escolhidos.

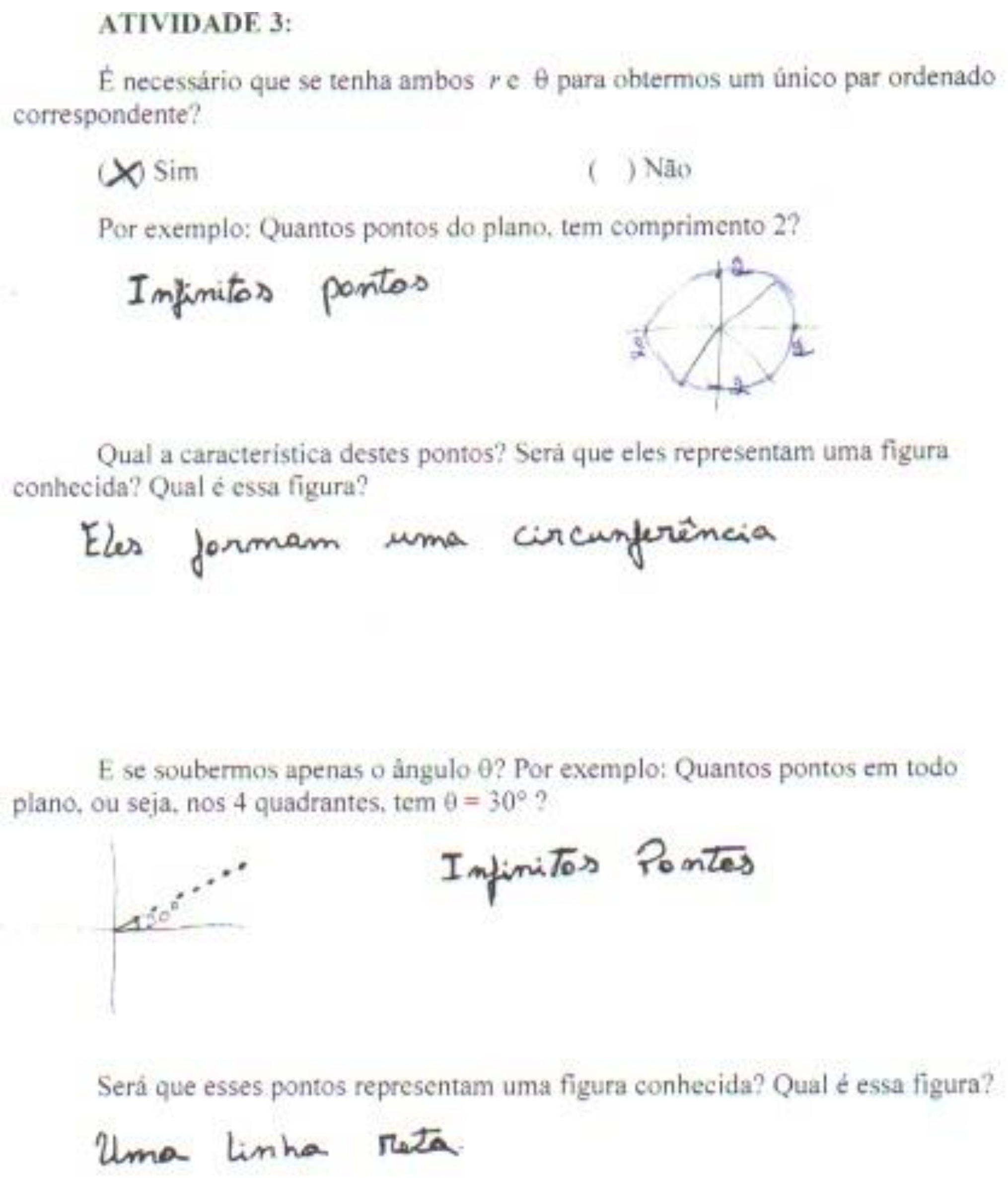
Ao representar tais valores em um mesmo plano, eles perceberam que, para obter um único par ordenado, era necessário ter ambos *r* e θ. Sabemos que, no ensino médio, o questionamento sobre a unicidade não é usual, mas acreditamos que esse é um conceito muito importante e necessário à formação matemática dos alunos. Acreditamos, também, que é muito interessante explorar essa ideia no ensino médio.

Ao fazermos as indagações seguintes, os alunos perceberam que, de forma rápida, com comprimento 2, não tínhamos um único par ordenado. Ao perguntar quantos pontos havia, todos os alunos disseram que havia vários. Diante dessa resposta, perguntamos quantos havia então? Nesse momento, chegamos a infinitos pontos.

Quanto à figura formada por esses infinitos pontos, três alunos disseram ser um círculo, e quatro falaram circunferência. Os outros 11 estudantes nada responderam. Nesse momento, perguntamos a diferença entre círculo e circunferência. Apenas um aluno respondeu corretamente. Então, dissemos que, se pensarmos os pares ordenados como pontos do plano, então esses infinitos pontos formam uma circunferência, visto que todos os pontos possuem o mesmo comprimento e têm a origem do sistema como referência. Da mesma forma, o conjunto formado pelo comprimento desses infinitos pontos formaria um círculo. Acreditamos que tal fato elucidou as dúvidas que ainda poderiam restar.

Quanto à figura formada pelos pares ordenados que tinham $\theta = 30°$, todos os alunos desenharam uma semirreta e, sobre a mesma, vários pontos. Apenas um perguntou quantos pontos existiam entre 1 e 2. Ele fez essa pergunta, pois tinha dúvida sobre a existência de infinitos pontos em um determinado intervalo. Ao indagá-lo sobre o motivo de tal pergunta, ele respondeu da seguinte forma: Se entre 1 e 2 existem infinitos pontos, então, com $\theta = 30°$, temos infinitos pares ordenados. Também perguntamos qual figura seria formada, e o aluno respondeu que seria “uma reta”.

Posteriormente, ao resolver por escrito a atividade, apenas um dos 18 alunos não a resolveu. Os outros estudantes não questionaram a infinidade de pontos entre os números 1 e 2. Observamos, pelas falas, que eles utilizam o termo “vários”, e não a palavra “infinito”, fato esse que nos levou a deduzir que, para eles, ‘vários’ e ‘infinitos’ são sinônimos em matemática. A Figura 12 apresenta a resolução da Atividade 3 por um aluno.



**ATIVIDADE 3:**

É necessário que se tenha ambos $r$ e $\theta$ para obtermos um único par ordenado correspondente?

(X) Sim ( ) Não

Por exemplo: Quantos pontos do plano, tem comprimento 2?

Infinitos pontos

Qual a característica destes pontos? Será que eles representam uma figura conhecida? Qual é essa figura?

Eles formam uma circunferência

E se soubermos apenas o ângulo $\theta$? Por exemplo: Quantos pontos em todo plano, ou seja, nos 4 quadrantes, tem $\theta = 30°$ ?

Infinitos Pontos

Será que esses pontos representam uma figura conhecida? Qual é essa figura?

Uma linha reta

**Figura 12. Resolução da Atividade 3 por um aluno.**

Observamos que a tarefa realizada pelo aluno explicita o que a turma, em geral, entendeu. Os estudantes perceberam que, embora perguntasse quantos pontos tinham ângulo de 30° em todos os quadrantes, todos os pontos estariam no 1° quadrante e formariam uma reta. O objetivo de incluir na pergunta “todos os quadrantes” era o de expandir o olhar dos alunos para todos os quadrantes, visto que, geralmente, eles se focam apenas no primeiro quadrante.

Com o objetivo de verificar se eles conseguiam mobilizar os conhecimentos adquiridos nas tarefas anteriores, propusemos a seguinte atividade: Represente, no plano, os pares ordenados a seguir, escrevendo-os na forma polar: (4,0), (−5,0), (0,2), (0, − 3), (2,2) e (−1,1). A Figura 13 apresenta a resolução da Atividade 4 por um aluno.

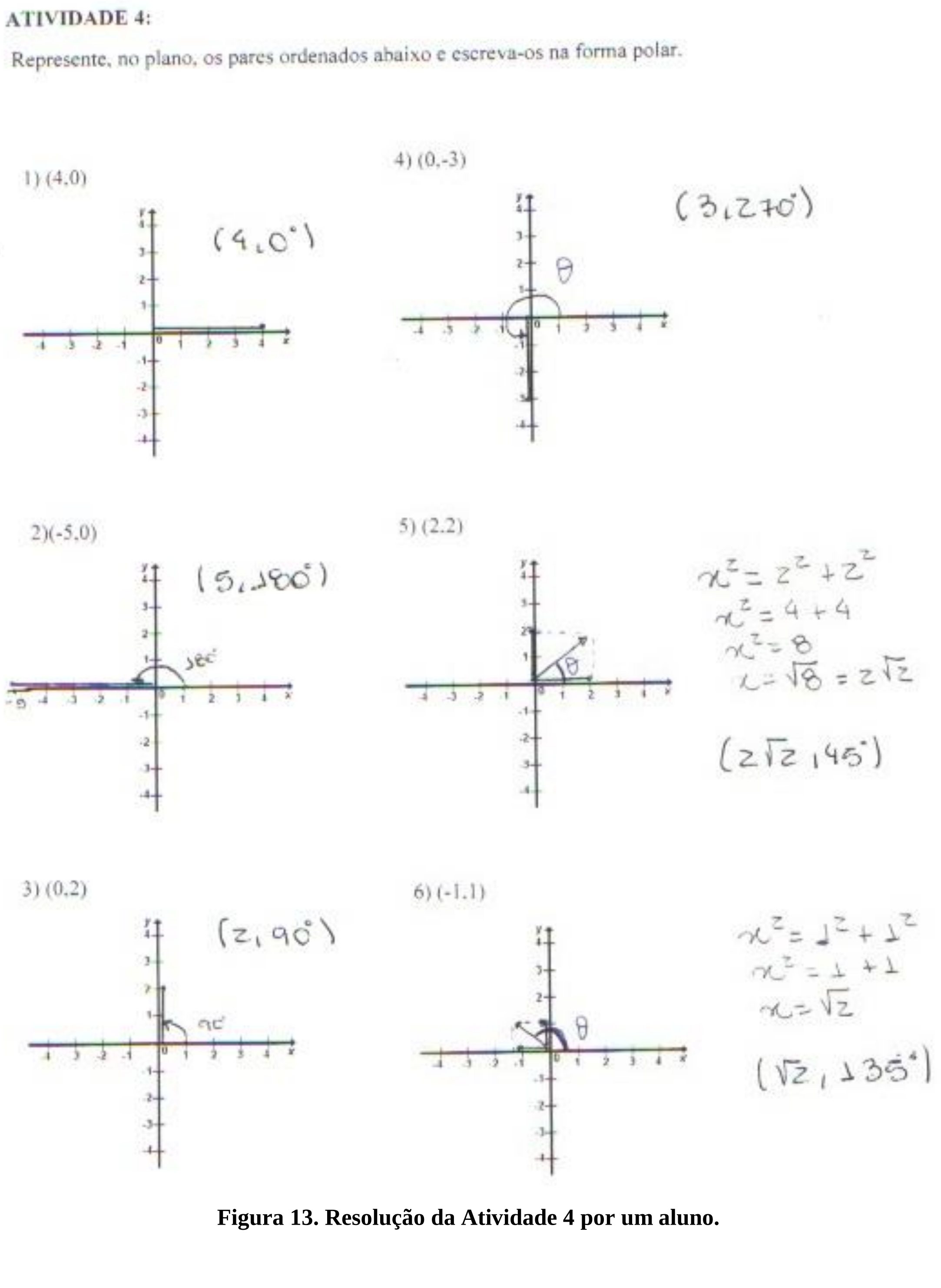



**Figura 13. Resolução da Atividade 4 por um aluno.**

Para que o aluno resolvesse essa atividade, ele necessitaria transitar entre as representações na forma de par ordenado, geométrica e polar. Assim, concordamos com Duval quando afirma que:

> Os tipos de conexões operacionais que nós esperamos que sejam feitas na aprendizagem não é entre matemática dedutiva e empírica, provas e construções, nem entre estruturas matemáticas e estruturas simbólicas, mas entre os diferentes registros de representações semióticas. Essas conexões entre registros compõem a arquitetura cognitiva pela qual os estudantes podem reconhecer o mesmo objeto por meio de diferentes representações [...].

Observamos que o trânsito dos alunos pelas diferentes formas de representações foi bem sucedido quando os pares ordenados possuíam umas das coordenadas *x* ou *y*, ou nula. Entretanto, nos pares onde isso não aconteceu, foi necessário retomar o cálculo do ângulo e do comprimento do ponto, partindo do triângulo retângulo e de suas propriedades métricas e trigonométricas. Dessa forma, o objetivo da atividade foi atingido por todos. Embora já tivéssemos discutido esse conteúdo em aulas anteriores, acreditamos ser importante essa retomada, uma vez que alguns estudantes não tinham frequentado as aulas em que houve essa discussão.

### *4.4 Quarto encontro*

No começo desse encontro, que teve duração de 2 horas com um intervalo de 15 minutos, retomamos os conceitos estudados nos encontros anteriores e elaboramos, juntamente com os 18 alunos presentes, um resumo que ficou exposto no quadro durante a aula. O nosso objetivo inicial era definir um produto em $IR^2$, assim como fizemos para a soma, que fosse compatível com o produto em IR, ou seja, $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$. Para isso, observamos que, se $a \in IR^+$, $(a, 0) = (a \cdot \cos 0,\ a \cdot \text{sen } 0)$, ou seja, $(a, 0)$ possui comprimento $a > 0$ e forma um ângulo de 0 (0°) ou de $2\pi$ (360°) com o eixo *x*.

Nesse momento, questionamos, oralmente, qual seria a outra forma de representação do par ordenado (5,0). Rapidamente, vários alunos responderam que seria $(5 \cdot \cos 0,\ 5 \cdot \text{sen } 0)$. De imediato, colocamos que: Se $a \in IR^-$, então, $(a, 0) = (|a| \cdot \cos \pi,\ |a| \cdot \text{sen } \pi)$, ou seja, $(a, 0)$ possui comprimento $|a| > 0$ e forma um ângulo de $\pi$ (180°) com o eixo *x*. Fizemos o mesmo tipo de questionamento anterior e, novamente, obtivemos a resposta correta. Logo, $(-3,0) = (|-3| \cdot \cos \pi,\ |-3| \cdot \text{sen } \pi) = (3\cos\pi\ , 3\text{sen}\pi)$.

Iniciamos uma discussão sobre o comportamento das regras de sinais nessa multiplicação desejada. Propusemos, como exposto a seguir, analisar os possíveis casos separadamente:

**1º caso:** Se $a > 0$ e $c > 0$, então, $a.c > 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos:

$$a \cdot c \equiv (ac,0) = (ac \cdot \cos 0,\ \ ac \cdot \text{sen } 0).$$

Assim, desejamos que a multiplicação satisfaça $(a, 0) \cdot (c, 0) = (a{\cdot}\cos 0,\ \ a{\cdot} \text{ sen } 0) \cdot (c{\cdot}\cos 0,\ \ c{\cdot} \text{ sen } 0) = (ac \cos 0,\ \ ac \text{ sen } 0)$. Apresentamos, então, o exemplo: $(3,0) \cdot (2,0) = (3\cos 0, 3\text{sen } 0){\cdot} (2\cos 0, 2\text{sen } 0) = (6\cos 0, 6\text{sen } 0) = (6,0)$ e fizemos duas perguntas, a saber:

1ª) Qual o módulo ou comprimento do produto resultante?

2ª) Qual o ângulo desse produto?

Os alunos responderam que o módulo era 6 e que o ângulo era 0. Em geral, eles não disseram 0°; disseram apenas 0. Sempre que isso acontecia, salientávamos a importância de utilizarmos a unidade. Diante disso, apresentamos outro caso:

**2ºcaso**: Se $a > 0$ e $c < 0$, então, $a{\cdot}c < 0$ e, em termos de pares, ordenados teremos: $a \cdot c \equiv (ac, 0) = (|ac| \cdot \cos \pi,\ \ |ac| \cdot \text{sen } \pi)$.

Dissemos que desejávamos que a multiplicação satisfizesse $(a, 0) \cdot (c, 0) = (a{\cdot}\cos 0, a{\cdot}\text{sen } 0){\cdot}(|c|\cos \pi,\ \ |c| \text{ sen } \pi) = (|ac|\cos \pi,\ \ |ac|.\text{sen } \pi)$. Observamos que, nesse caso, $|ac| = a{\cdot} |c|$, já que $a > 0$.

Demos, então, o exemplo: $(3,0) \cdot (-4,0) = (3\cos 0, 3\text{sen } 0) \cdot (4\cos\pi, 4\text{sen}\pi) = (12\cos\pi, 12\text{sen}\pi) = (-12,0)$, com a proposta de resolução das seguintes questões:

1ª) Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante?

2ª) Como podemos relacionar o módulo do produto resultante com os módulos de cada um dos fatores?

3ª) Qual é o ângulo desse produto?

4ª) Qual é a relação entre os ângulos de cada um dos fatores e o ângulo do produto resultante?

Quanto ao comprimento, os alunos perceberam facilmente que o módulo do produto de dois fatores era o produto dos módulos de cada um dos fatores. Porém, quanto ao ângulo de tal produto, os quatro alunos que se pronunciaram colocaram que seria, também, o produto dos ângulos de cada um dos fatores. Nesse momento, um aluno falou que não seria o produto, pois um dos fatores era zero e, nesse caso, a resposta seria zero. Outro aluno disse que era a soma dos ângulos de cada um dos fatores, justificando sua resposta mostrando que também valia para o primeiro caso. Tal justificativa convenceu a turma. A partir disso, apresentamos por escrito o 3° e o 4° casos e propusemos que os alunos, em grupo, fizessem a análise do material e respondessem, também por escrito, às indagações.

**3º caso**: Se $a < 0$ e $c < 0$, então, $a \cdot c > 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos:

$$a \cdot c \equiv (ac,0) = (ac \cdot \cos 0,\ ac \cdot \operatorname{sen} 0).$$

Desejávamos que a multiplicação satisfizesse:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (|a|\cos \pi,\ |a|\operatorname{sen} \pi).(|c|\cos \pi,\ |c|\operatorname{sen} \pi) = (|a||c|\cos 2\pi,\ |a||c|\operatorname{sen} 2\pi) =$$
$$= (|ac|\cos 0, |ac|\operatorname{sen} 0) = (ac\cdot\cos 0, ac\cdot\operatorname{sen} 0).$$

Deve ser observado que, nesse caso, $|ac| = |a| \cdot |c|$

**Exemplo**: $(-4,0) \cdot (-2,0) = (4\cos\pi, 4\operatorname{sen}\pi)\cdot(2\cos\pi, 2\operatorname{sen}\pi) = (8\cos 0, 8\operatorname{sen} 0)= (8,0)$

- Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante?
- Qual é o ângulo desse produto? Qual é a relação entre os ângulos de cada um dos fatores e o ângulo do produto resultante?

**4ºcaso:** Se $a < 0$ e $c > 0$, então, $a\cdot c < 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos:

$$a \cdot c \equiv (ac,0) = (ac \cdot \cos 0,\ ac \cdot \operatorname{sen} 0).$$

Desejávamos que a multiplicação satisfizesse:

$$(a,0) \cdot (c,0) = (|a|\cdot\cos \pi,\ |a|\cdot\operatorname{sen} \pi) \cdot (c\cdot\cos 0,\ c\cdot \operatorname{sen} 0) =$$
$$= (|a|c\cdot\cos \pi,\ |a|c\cdot\operatorname{sen} \pi)= (|ac|\cos \pi, |ac|\operatorname{sen} \pi).$$

Deve ser observado que, nesse caso, $|ac| = |a| \cdot c$.

**Exemplo**: $(-3,0) \cdot (2,0) = (3\cos\pi, 3\operatorname{sen}\pi)\cdot (2\cos 0, 2\operatorname{sen} 0) = (6\cos\pi, 6\operatorname{sen}\pi) = (-6,0)$

- Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante?

- Qual é o ângulo desse produto? Qual é a relação entre os ângulos de cada um dos fatores e o ângulo do produto resultante?

Percebemos, durante as discussões nos grupos, que apenas dois alunos apresentaram dúvidas, as quais se referiam aos ângulos dos produtos, já que, quanto aos comprimentos, existia consenso nas respostas. Alguns apresentaram mais exemplos, e assim os colegas conseguiram esclarecer suas dúvidas. Um desses exemplos foi $(-5,0) \cdot (3,0)$. Ao transformar os pares ordenados para a forma polar, observamos que o aluno que tentava esclarecer a dúvida dos colegas reforçava a importância da representação geométrica. Dessa forma, eles "enxergavam" os ângulos. Tal fato confirma a teoria de Duval, que nos relata: "As representações semióticas permitem uma "visão do objeto", através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons...)" (DUVAL, 2009, p. 44). O trânsito entre essas representações garantiu a apreensão de tal conceito, o que nos deixou satisfeitos com as nossas escolhas didáticas.

Realizada a análise, os alunos apresentaram, oralmente, suas respostas. Para o fechamento dessa atividade, apresentamos o seguinte resumo:

Em todos os casos, temos que:

- O comprimento de (a, 0) · (c, 0) é o produto do comprimentos de (a, 0) pelo comprimento de (c, 0);
- O ângulo de (a, 0) · (c, 0) é a soma do ângulo de (a, 0) com o ângulo de (c, 0).

Também definimos o produto de dois pares (pontos) quaisquer usando as propriedades anteriores.

Dados os pares ordenados $(a, b) = (r_1\cos\,\theta_1,\ r_1\text{sen}\,\theta_1)$ e $(c, d) = (r_2\cos\,\theta_2,\ r_2\text{sen}\,\theta_2)$, definimos: $(a, b) \cdot (c, d) = [r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2),\ r_1r_2\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$.

Com o objetivo de consolidar o aprendizado dos conceitos estudados, propusemos a atividade 5.1, a qual vem resolvida, na Figura 14, por um aluno:

ATIVIDADE 5)

1)Determina os seguintes produtos :

a)(2cos40°, 2 sen40°) · (3cos20°,3sen20°) = (6 cos 60°, 6 sen 60°)

b) (2cos90°, 2sen90°) · (4cos30°,4sen30°) = (8 cos 120°, 8 sen 120°)

c) (4cos40°, 4sen40°) · (3cos90°,3sen90°) = (12 cos 130°, 12 sen 130°)

d)(5cos90°, 5sen90°) · (3cos90°,3sen90°) = (15 cos 180°, 15 sen 180°)

**Figura 14. Resolução da Atividade 5.1 por um aluno.**

Desejávamos que os alunos não transformassem os pares na forma polar, em pares ordenados na forma cartesiana, pois queríamos multiplicar pares ordenados na forma polar. Com tal intenção, utilizamos dois exemplos em que o seno e o cosseno do ângulo eram um valor bastante trabalhado por eles e, também, outros dois valores que necessitariam do auxílio da calculadora para obtê-los. Acreditávamos que tal fato desestimularia os estudantes a realizar a transformação para pares ordenados. Apenas um aluno apresentou dificuldade para começar a tarefa. Ao percebermos essa situação, sugerimos que ele consultasse o material. Ao observar o resumo, esse aluno conseguiu realizar a tarefa.

A atividade 5.1 tinha como objetivo mostrar que, em diferentes situações, torna-se mais recomendável utilizar um tipo de representação em detrimento de outra. Como nenhum aluno transformou os vetores na forma polar para a forma cartesiana, o nosso objetivo foi alcançado.

A facilidade com que eles conseguiram atingir o objetivo proposto de tal atividade foi bastante gratificante. Acreditávamos que os educandos apresentassem bem mais dificuldades, mas a atividade em grupo facilitou a aprendizagem, já que eles discutiam entre si e, quando algum membro do grupo apresentava dúvidas, um colega fazia um esclarecimento. Esse fato também foi observado quanto à análise dos sinais das tangentes nos quatro quadrantes. Também foi surpreendente a facilidade com que concluíram que o módulo resultante do produto de dois números complexos é o produto dos módulos de cada um dos fatores e que o ângulo resultante é a soma dos ângulos de cada fator.

Com o objetivo de concluir que multiplicar um número real *a* por $(-1)$ é o mesmo que fazer uma rotação de $\pi$ radianos (180°) no sentido anti-horário no vetor ou par ordenado (*a*, 0), propusemos a atividade 5.2. Na Figura 15, apresentamos a resolução dessa atividade por um dos alunos da turma.

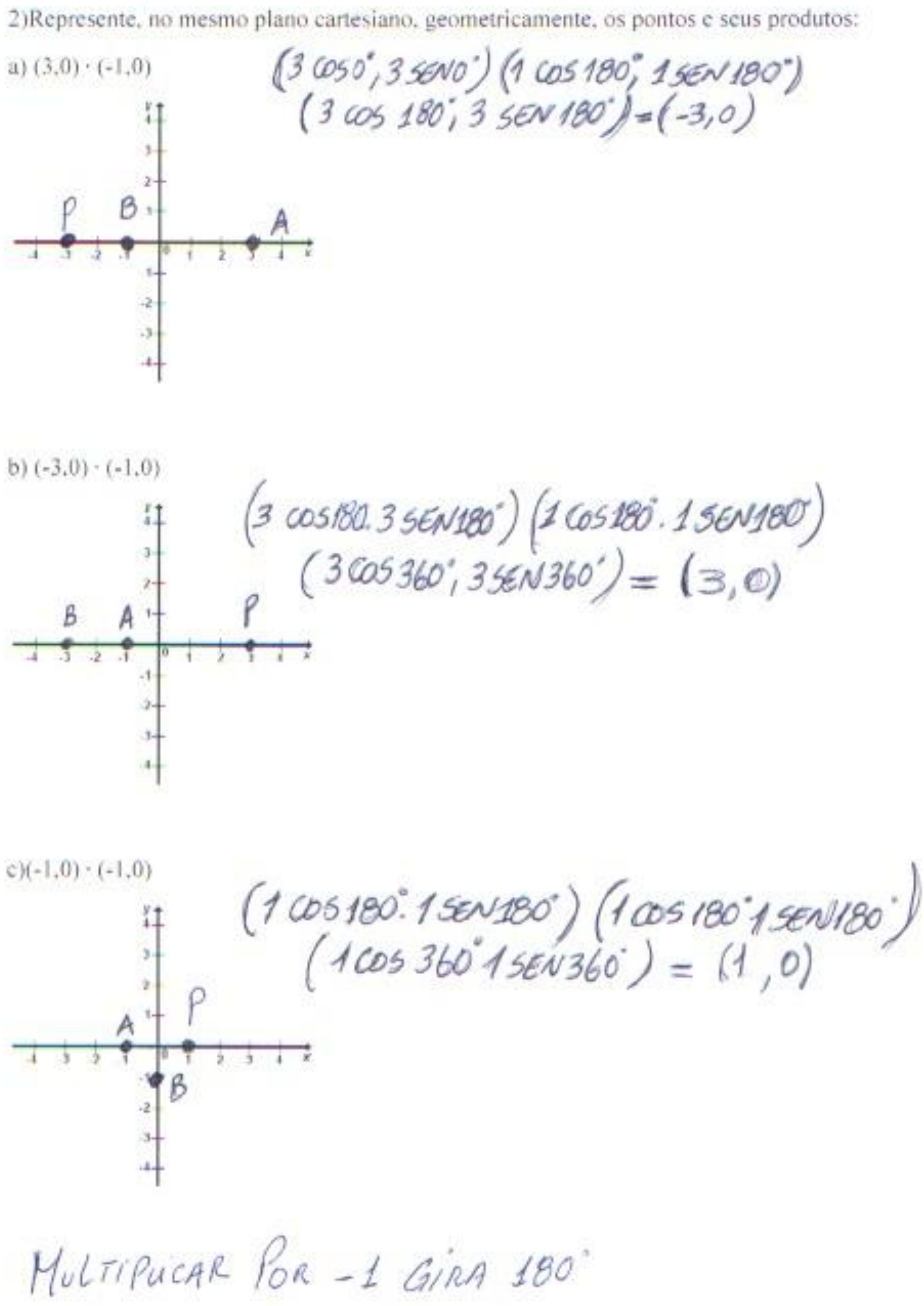



**Figura 15. Resolução da Atividade 5.2 por um aluno.**

Embora não colocamos no enunciado da atividade que, a cada exercício, os alunos deveriam marcar cada um dos pontos com cores diferentes, sentimos a necessidade de sugerir isso a eles. Quando fizemos tal sugestão, observamos que a marcação dos pontos e de seus respectivos produtos foi facilmente realizada por todos.

Depois disso, lembramos os alunos da identificação de a $\in$ IR com (a, 0) e concluímos que: $(a,0) \cdot (-1,0) = (a\cos 0, a\text{sen } 0) \cdot (1\cos \pi, 1\text{sen } \pi) = (a\cos \pi, a\text{sen } \pi) = (-a,0)$. Fizemos, então, a seguinte indagação: O que representa, geometricamente, a multiplicação de (a, 0) por $(-1,0)$? Os alunos responderam rapidamente que o par ordenado tinha feito uma rotação de $\pi$ radianos (180°), mas não disseram se o sentido era horário ou anti-horário. Acreditamos que isso ocorreu devido ao fato de que, geometricamente, o sentido da rotação não mudaria a resposta obtida. Salientamos que $(-1,0) \equiv -1$, e tal fato nos permite deduzir que multiplicar por $(-1)$ é como tomar o número e fazer uma rotação de $\pi$ radianos (180°).

No final do encontro, todas as atividades propostas foram entregues por escrito ao professor.

*4.5 Quinto encontro*

O quinto encontro teve a duração de dois períodos, ou seja, uma hora e trinta minutos, nos quais os 18 alunos trabalharam individualmente. Utilizando as propriedades estudadas no encontro anterior – o comprimento de (a, 0) · (b, 0) é o produto do comprimento de (a, 0) pelo comprimento de (b, 0), e o ângulo desse produto é a soma do ângulo de (a, 0) com o ângulo de (b, 0) –, retomamos o produto, na forma polar, de dois pares ordenados. Nosso objetivo era o de que os alunos multiplicassem os pares na forma cartesiana. Para isso, propusemos as seguintes questões:

1º) Se os pontos são dados na representação polar, então, o produto é calculado pela definição estudada anteriormente: $(a, b) \cdot (c,d) = [r_1r_2\cos(\theta_1+ \theta_2), r_1r_2\text{sen}(\theta_1+ \theta_2)]$, onde $(a, b) = r_1(\cos\theta_1,\text{sen}\theta_1)$ e $(c, d) = r_2(\cos\theta_2, \text{sen } \theta_2)$.

2º) Se os pontos dados na forma cartesiana possuírem o ângulo com valor não conhecido como poderemos calcular o produto de tais pontos sem o recorrer a uma calculadora ou tabela?

Um aluno respondeu que seria necessário obter os ângulos dos pares ordenados com o auxílio da calculadora. Nesse momento, salientamos que, mesmo com o uso desse instrumento, poderíamos cometer algum erro de aproximação, visto que os valores dos ângulos não eram exatos. Também diferenciamos, por meio de um exemplo numérico, o que seria um ângulo de valor não conhecido, sem o uso de uma calculadora ou tabela, de um ângulo diferente dos arcos notáveis 30°, 45°, 60° e seus correspondentes no 2°, 3° e 4° quadrantes.

Como os alunos já tinham trabalhado em estudos anteriores com a Trigonometria, definimos os pares ordenados (a, b) = ($r_1$cos $\theta_1$, $r_1$sen $\theta_1$) e (c, d) = ($r_2$cos $\theta_2$, $r_2$sen $\theta_2$) e apresentamos as relações do seno e do cosseno da soma de dois arcos:
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$ e $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta$.

Nesse momento, percebemos o quanto seria difícil trabalharmos com essas relações, visto que os alunos apresentavam uma imensa resistência a esse assunto. Propusemos que procurassem *e* e $f \in$ IR , em função de *a* e *b*, tal que: $(a,b) \cdot (c,d) = (e,f) = [r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2), r_1r_2\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$.

Com o objetivo de esclarecer a nossa proposta e inspirar a resolução do problema, a coordenada ***e*** foi construída, no quadro, com a colaboração dos alunos. Escrevemos:

$$e = r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2)$$

$$e = (r_1\cos\theta_1)(r_2\cos\theta_2) - (r_1\text{sen}\,\theta_1)(r_2\text{sen}\,\theta_2) = ac - bd.$$

Observando a construção da coordenada *e*, os alunos calcularam a coordenada *f*. A fim de oportunizar uma discussão sobre o tema, eles trabalharam em duplas, mesmo que esta não tenha sido a proposta inicial para esse encontro. Acreditamos que os estudantes tenham essa imensa rejeição à Trigonometria, uma vez que, para eles, as operações com arcos são apenas fórmulas isoladas de qualquer contexto. Em geral, o ensino da Trigonometria apresenta um uso excessivo de fórmulas, sendo, em nosso entendimento, desnecessário apresentar tantas dessas fórmulas. Poderíamos, utilizando as relações apresentadas, deduzir novas relações, de maneira que a Trigonometria ficasse mais acessível a todos.

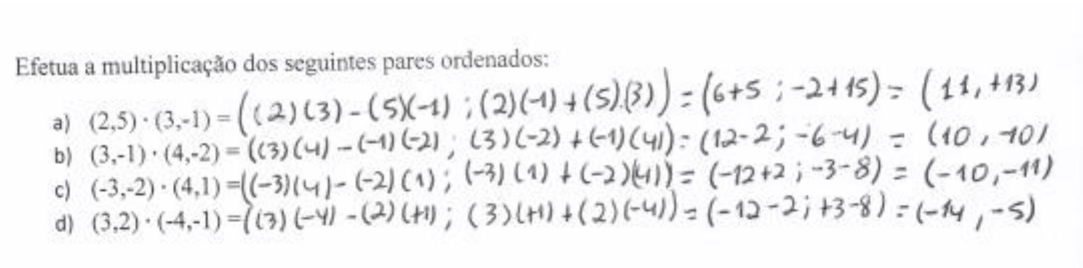
Definidas as coordenadas *e* e *f*, concluímos que o produto dos pares ordenados é dado por $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ e apresentamos esta atividade: Calcule $(3,2) \cdot (4, -1) = [3\cdot 4 - 2\cdot (-1), 2\cdot 4 + 3\cdot (-1)] = (14,5)$.

Propusemos a atividade anterior inspirados nas palavras de Duval:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro. Essa mudança de registro facilita a aquisição de um conceito. Ao lidar com as várias representações de um mesmo objeto matemático, o aluno

> passa a ter mais segurança na compreensão e na resolução de problemas (2003, p. 14).

Como fechamento desse encontro, propusemos a realização da atividade relativa à multiplicação de pares ordenados, como mostra a Figura 16, que apresenta a resolução do exercício por um aluno:


Efetua a multiplicação dos seguintes pares ordenados:

a) (2,5) · (3,-1) = ((2)(3) - (5)(-1) ; (2)(-1) + (5)(3)) = (6+5 ; -2+15) = (11, +13)

b) (3,-1) · (4,-2) = ((3)(4) - (-1)(-2) ; (3)(-2) + (-1)(4)) = (12-2 ; -6-4) = (10, -10)

c) (-3,-2) · (4,1) = ((-3)(4) - (-2)(1) ; (-3)(1) + (-2)(4)) = (-12+2 ; -3-8) = (-10, -11)

d) (3,2) · (-4,-1) = ((3)(-4) - (2)(+1) ; (3)(+1) + (2)(-4)) = (-12-2 ; +3-8) = (-14, -5)

**Figura 16. Resolução de atividade por um aluno.**

A resolução da atividade pelo aluno demonstra o que aconteceu com todos os demais estudantes da turma. A multiplicação de pares ordenados, utilizando a relação construída durante a aula, foi efetuada com êxito, sendo que apenas um aluno cometeu um erro de sinal. Nesse encontro, eles trabalharam individualmente e também em duplas, o que nos permitiu observar mais de perto o desenvolvimento individual e ver quem tinha apreendido os conceitos estudados, já que, anteriormente, todas as atividades haviam sido desenvolvidas em grupo.

### *4.6 Sexto encontro*

Ao iniciar o sexto encontro, solicitamos aos alunos que se dividissem em grupos. Enquanto isso, colocamos no quadro o resumo da aula anterior. Nesse encontro, tínhamos como objetivo inicial que os alunos identificassem os ângulos dos pares ordenados e de seus produtos. Para tanto, propusemos a seguinte atividade: Represente geometricamente, no mesmo plano cartesiano, os pontos e seus produtos:

a) (3,0) · (0,1)  b) (–3,0) · (0,1)  c) (0,1) · (0,1)  d) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (0,1)$

A cada exercício, sugerimos para eles marcarem cada um dos pontos com cores diferentes. No quarto encontro, já tínhamos trabalhado com o produto de (a, b) por (–1,0).

Acreditamos que tal procedimento facilitou a resolução dos produtos propostos nesse encontro. Todos os alunos marcaram corretamente os pares e seus respectivos produtos.

Para calcular o produto de pares ordenados, eles utilizaram a relação (a, b) · (c, d) = (ac – bd, ad + bc), que foi trabalhada no encontro anterior. Após a realização dessa atividade, propusemos as seguintes indagações:

- Qual é o ângulo da representação polar de (3,0)?
- Qual é o ângulo da representação polar do produto de (3,0) por (0,1)?
- Qual é o ângulo da representação polar de (–3,0)?
- Qual é o ângulo da representação polar do produto de (–3,0) por (0,1)?

As três primeiras indagações foram resolvidas corretamente por todos os alunos. Quanto à quarta indagação, apenas três deles não conseguiram determinar corretamente o ângulo da representação polar do produto de (–3, 0) por (0, 1). Tais alunos responderam que o valor do ângulo era 90°. Acreditamos que determinaram tal valor considerando, erroneamente, o sentido horário como o sentido positivo, ou o quanto foi girado.

Ao perguntarmos o que significava geometricamente a multiplicação de um par ordenado (a, 0) por (0, 1), observamos que muitos deles usaram o termo “girou 90°”. A Figura 17 apresenta a atividade desenvolvida por um aluno.

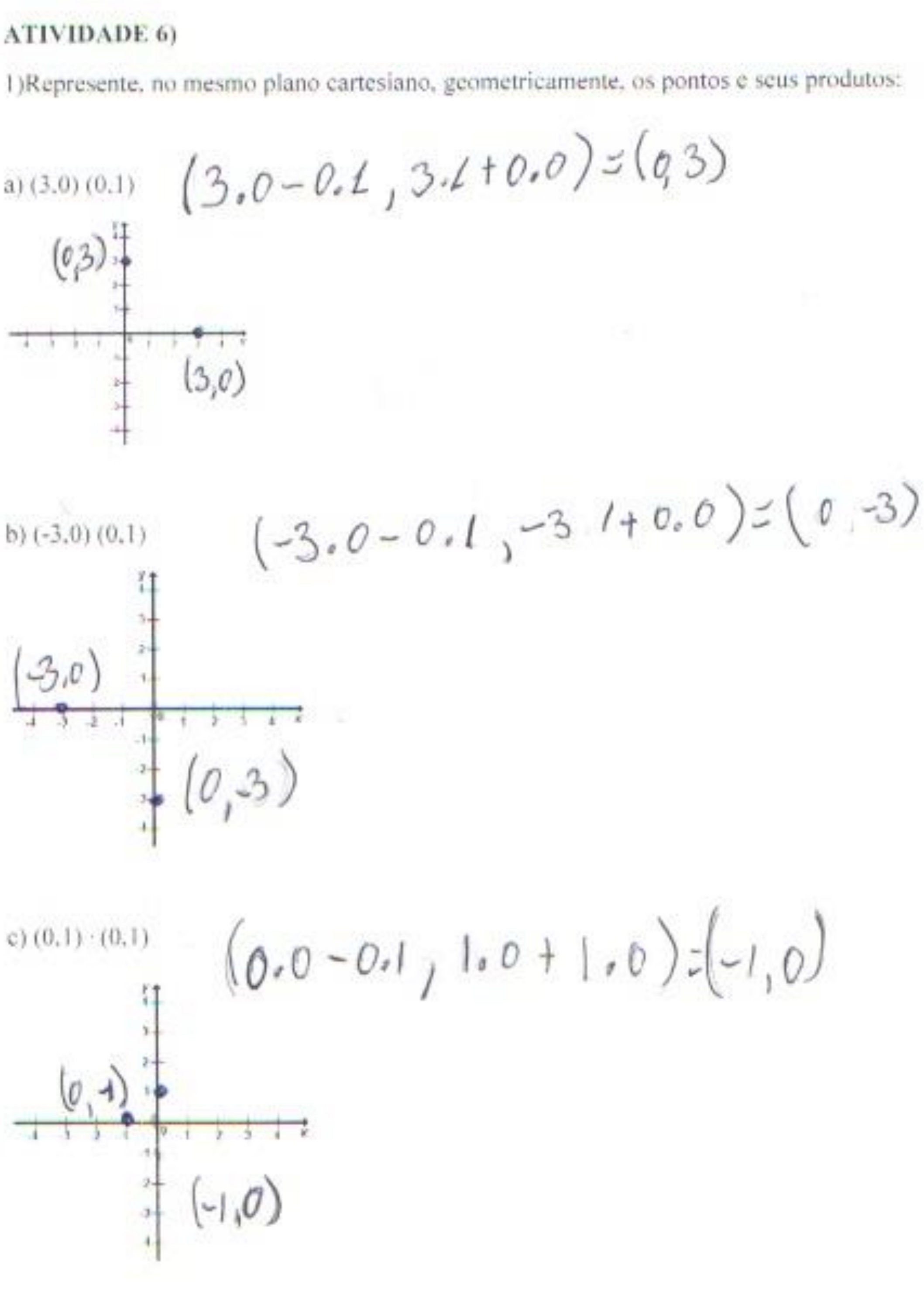



**Figura 17. Resolução da Atividade 6 por um aluno.**

Com o objetivo de formalizar a conclusão obtida pelos alunos, apresentamos a eles a seguinte conclusão:

**CONCLUSÃO**: Quando multiplicamos um número real a = (a, 0) por (0,1), o resultado é o par ordenado (0, a). Geometricamente, o par ordenado (a, 0) é girado 90° para (0, a) no sentido anti-horário.

Então, $(a, b) \cdot (0,1) = (a\cdot 0 – b\cdot 1,\ a \cdot 1 + b \cdot 0) = (– b, a)$. Exemplos:

1) $(2,5) \cdot (0,1) = (2\cdot 0 – 5\cdot 1,\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0) = (– 5, 2)$.

2) $(– 1,4) \cdot (0,1) = (–1\cdot 0 – 4\cdot 1,\ – 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0) = (– 4, – 1)$.

3) $(5,2) \cdot (0,1) = (5\cdot 0 – 2\cdot 1,\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = (2,5)$.

Salientamos que o par ordenado (0,1) possui propriedades muito importantes e que, por isso, recebe uma notação especial, que é *i*, ou seja, $(0,1) = i$. Também observamos que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (–1, 0)$. Nessa notação, $i^2 = i \cdot i = –1$. Ao introduzirmos a unidade imaginária *i* dessa maneira, acreditamos que essa unidade adquiriu um significado geométrico, deixando de ser, assim, algo "imaginário".

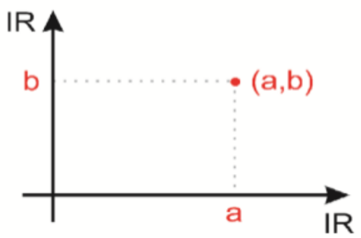
A conversão do par ordenado (0,1) para o registro de representação geométrico possibilitou a visualização da unidade imaginária *i* e de suas propriedades. Segundo Duval:

> A percepção visual precisa de exploração por meio de movimentos físicos, porque ela nunca dá uma apreensão completa do objeto. Ao contrário, a visualização pode dar pelo menos uma apreensão completa de qualquer organização de relações. Nós podemos dizer "pode dar" e "não pode dar" porque a visualização requer um longo treinamento [...] Entretanto, o que a visualização apreende pode ser o início de uma série de transformações, o que faz o seu poder inventivo (DUVAL, 1999, p. 7, tradução nossa).

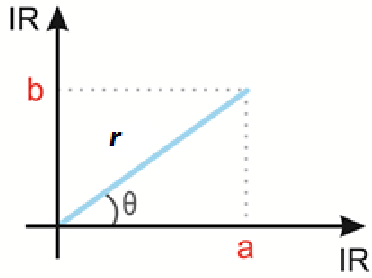
Os objetivos propostos nesse encontro foram atingidos, uma vez que os alunos assimilaram os conceitos relativos aos ângulos dos pares ordenados e efetuaram a multiplicação entre os pares ordenados, determinando o ângulo do produto resultante sem a nossa interferência. Também o par ordenado (0,1) foi identificado como a unidade imaginária *i*.

### *4.7 Sétimo encontro*

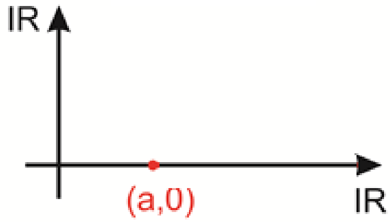
Ao iniciarmos o sétimo encontro, apresentamos o seguinte resumo: $IR^2 = \{(a, b);\ a, b \in IR\}$



(a, b) = $(r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta)$




Também identificamos o número real "a" com o par ordenado (a,0), ou seja:




Definimos uma soma e um produto compatível com os números reais IR. Essa soma e esse produto são, respectivamente, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) e (a, b) · (c, d) = (ac – bd, ad + bc).

Utilizando as propriedades dessa soma e multiplicação, temos (a, 0) · (1,0) = (a.1 – 0.0, a.0 + 0.1 ) = (a, 0). Como identificamos (a, 0) com *a*, podemos escrever (a, 0) · (1,0) = a · (1,0). Da mesma maneira, (b, 0) · (0,1) = (b.0 – 0.1, b.1 + 0.0) = (0,b) = b · (0,1). Como (a, b) = (a, 0) + (b, 0), escrevemos: (a, b) = a · (1,0) + b · (0,1).

Como já tínhamos denominado o par ordenado (0,1) por *i* e (1,0) ≡ 1, temos (a, b) = a(1,0) + b(0,1) = a.1 + b·*i* = a + b*i*.

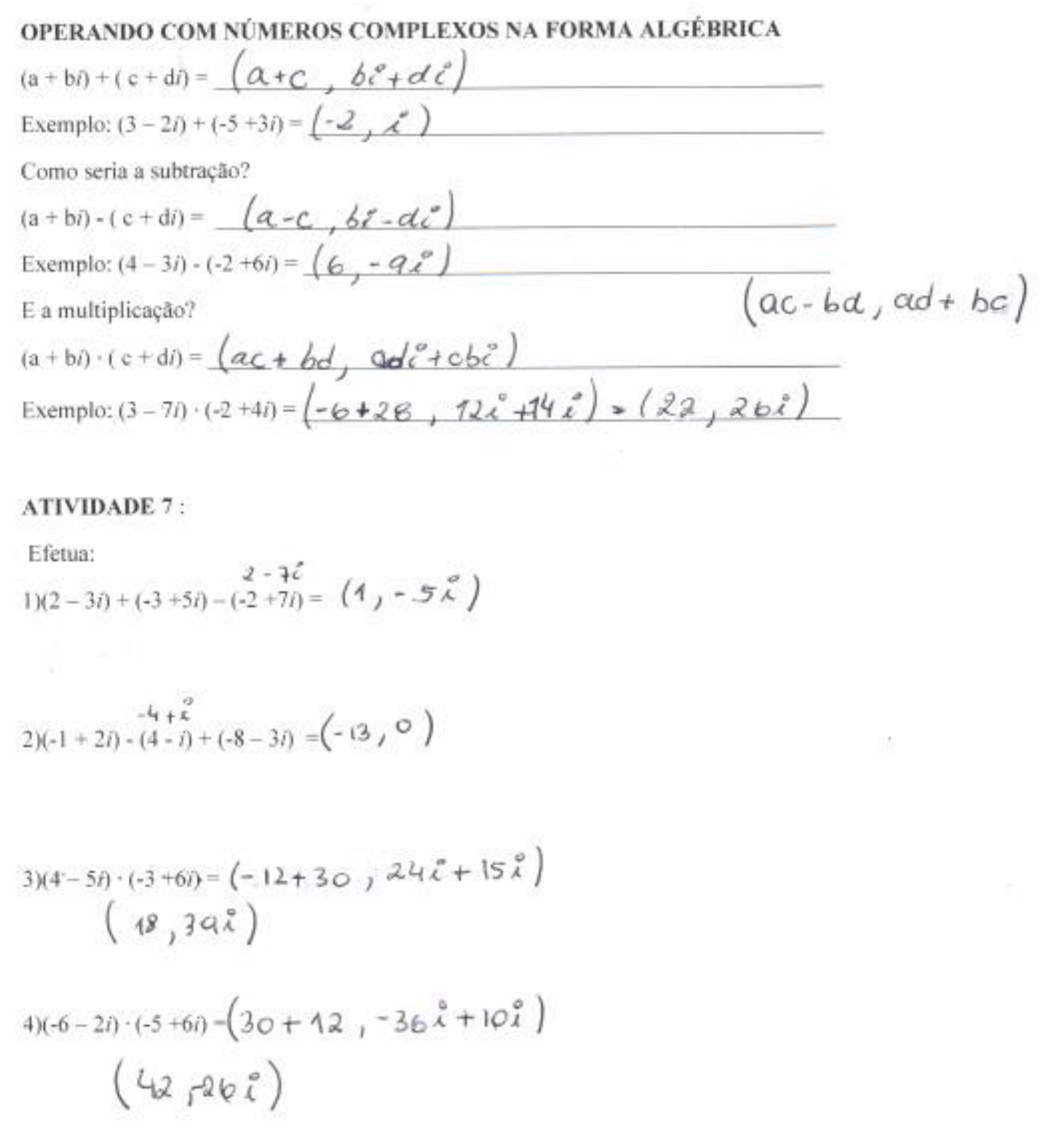
Denominamos *z* = a +b*i* de forma algébrica de um número complexo, em que "a" é a parte real e "b" é a parte imaginária.

Por meio das falas dos alunos, observamos que eles ficaram satisfeitos em saber qual o caminho percorrido até chegarmos à representação algébrica de um Número Complexo. A denominação Números Complexos até então não tinha sido apresentada, pois tais números eram tratados como par ordenado. Um aluno mencionou que eles haviam chegado, finalmente, aos Números Complexos. Salientamos que se havia chegado à tal denominação, mas que os pares ordenados trabalhados até então com a soma e multiplicação definidos na aula já eram, de certa forma, Números Complexos.

Uma aluna, que estava repetindo a disciplina, falou o seguinte: "Para que tanta explicação para chegarmos aí?" Os colegas responderam imediatamente: "Mas agora nós sabemos de onde eles saíram". Tal fato nos trouxe conforto, pois sabemos quanto mais fácil e rápido seria apresentar apenas os conteúdos com suas fórmulas prontas e iniciar as suas aplicações. Nessa fala dos alunos, também houve uma indicação de aprovação da nossa proposta. Reforçamos que a sequência didática aplicada à turma foi elaborada com o objetivo de apresentar o significado geométrico dos Números Complexos, o que nos pareceu que, até aquele momento, estávamos atingindo tal objetivo.

Propusemos, por escrito, a seguinte pergunta: Se o número $i = (0,1)$ satisfaz $i^2 = -1$, ou seja, $i$ é uma das raízes de $x^2 = -1$, qual será a outra raiz? Apenas dois alunos não apresentaram resposta para a questão, enquanto os outros responderam corretamente que a outra raiz é $-i$. Quando perguntamos quais seriam as raízes da equação $x^2 = 25$, os dois alunos deram, como resposta, o número 5. Tal fato nos levou a crer que esses estudantes pensaram apenas nas soluções positivas da equação, sendo essas soluções números reais ou complexos. Com o objetivo de esclarecer tal dúvida, calculamos que $(+5) \cdot (+5) = 25$ e $(-5) \cdot (-5) = 25$. Logo, as raízes de $x^2 = 25$ são $+5$ e $-5$. Assim, eles conseguiram concluir que a outra raiz da equação $x^2 = -1$ era o número complexo $-i$.

A atividade a seguir apresentada tinha como objetivo trabalhar as operações de adição, subtração e multiplicação dos Números Complexos na forma algébrica. Para trabalharmos a potenciação, utilizamos a multiplicação de fatores repetidos. As operações foram resolvidas com facilidade pelos alunos. Observamos alguns erros relativos às regras de sinais de cada operação. Também percebemos que muitos deles, quando apresentavam a resposta das operações na forma de par ordenado, mantinham a unidade imaginária $i$ na ordenada desse par. Então, salientamos que, nessa forma de representação, a unidade imaginária não estaria presente, visto que a ordenada representa a parte imaginária de um número complexo. Tal fato confirma a ideia de Carneiro (2004), segundo a qual a forma algébrica permite operarmos de imediato com os Números Complexos, mas não apresenta nenhum significado geométrico. A Figura 18 apresenta a tarefa resolvida por um aluno que cometeu esse erro.



**OPERANDO COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA ALGÉBRICA**

$(a + bi) + (c + di) =$ (a+c , bi+di)

Exemplo: $(3 - 2i) + (-5 + 3i) =$ (-2 , i)

Como seria a subtração?

$(a + bi) - (c + di) =$ (a-c , bi-di)

Exemplo: $(4 - 3i) - (-2 + 6i) =$ (6 , -9i)

E a multiplicação? (ac - bd , ad + bc)

$(a + bi) \cdot (c + di) =$ (ac+bd , adi+cbi)

Exemplo: $(3 - 7i) \cdot (-2 + 4i) =$ (-6+28 , 12i+14i) = (22 , 26i)

**ATIVIDADE 7** :

Efetua:

1)$(2 - 3i) + (-3 + 5i) - (-2 + 7i) =$ 2 - 7i (1 , -5i)

2)$(-1 + 2i) - (4 - i) + (-8 - 3i) =$ -4 + i (-13 , 0)

3)$(4 - 5i) \cdot (-3 + 6i) =$ (-12+30 , 24i + 15i)
(18 , 39i)

4)$(-6 - 2i) \cdot (-5 + 6i) =$ (30 + 12 , -36i + 10i)
(42 , 26i)

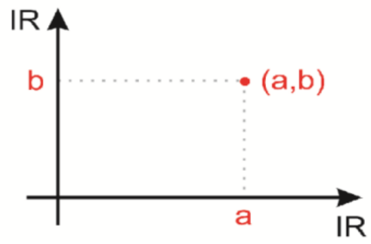
**Figura 18. Resolução da atividade por um aluno.**

Para finalizar o encontro, retomamos as diferentes representações dos Números Complexos apresentando o seguinte resumo:

Forma algébrica: z = a + b*i*.

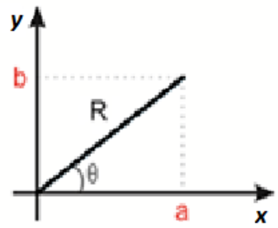
Forma de par ordenado: *z* = (a, b)

Forma cartesiana:




Forma polar: $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$z = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ ou $z = (r, \theta)$




Salientamos que havia, ainda, outra maneira de representação, denominada forma trigonométrica, obtida a partir das formas algébrica e polar:

$$z = a + bi$$

$$z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta)$$

Assim, o conjunto $\mathbb{C}$ = {a + b*i*; a, b $\in$ IR e *i* = (0,1)} é chamado de conjunto dos números complexos. O conjunto $\mathbb{C}$ herda de IR propriedades importantes, mas, muito mais do que isso, possui uma propriedade que IR não possui, a saber, todo polinômio não nulo possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$. Esse fato é muito importante, sendo chamado de Teorema Fundamental da Álgebra. Por exemplo, $x^2 + 1 = 0$ não possui raízes em IR, mas em $\mathbb{C}$ possui duas raízes, a saber, *i* e – *i*, já que $(i)^2 = -1$ e $(-i)^2 = -1$.

A tarefa final desse encontro tinha como objetivo calcular as potências de *i e* apresentar suas representações geométricas. Observamos que, para calcular $i^0$ e $i^1$, os alunos usaram os conceitos da potenciação nos números reais, ou seja, $i^0 = 1$ e $i^1 = i$. Já tínhamos observado, em encontros anteriores, que $i^2 = -1$. Sugerimos que marcassem, no plano, essas três primeiras potências de *i* e perguntamos se eles já sabiam o que significava, geometricamente, calcular as potências de *i*. Um aluno falou que o *i* estava fazendo uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Perguntamos se todos concordavam com a resposta dada e obtivemos resposta afirmativa. Salientamos que *i* era o par ordenado (0,1) e que já tínhamos multiplicado outros pares ordenados por (0,1) em encontros anteriores. Então, pedimos que continuassem calculando e representando geometricamente as potências de *i* até o $i^7$. A Figura 19 apresenta a atividade resolvida por um aluno.

**ATIVIDADE 8**

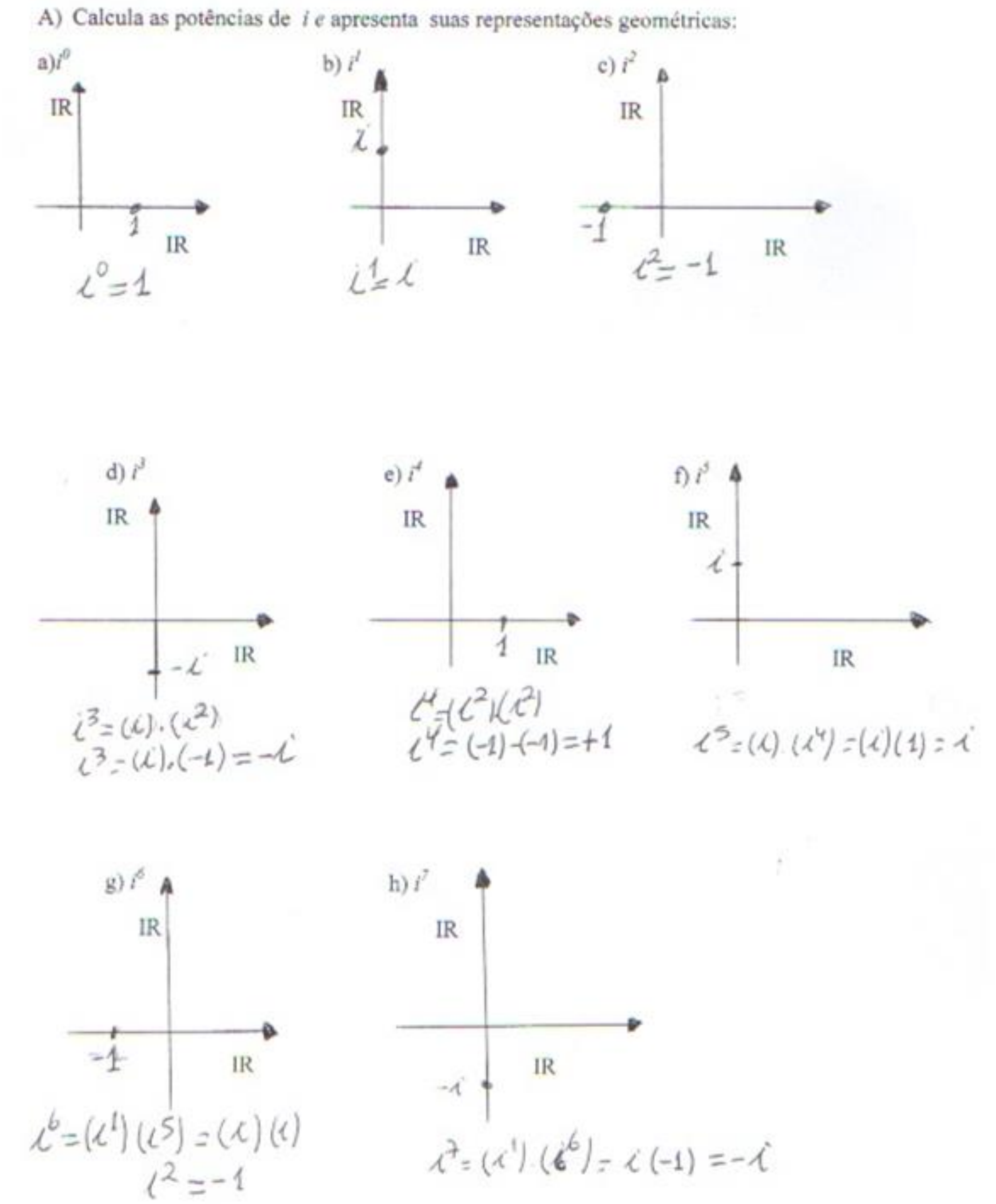



**Figura 19. Resolução da Atividade 8 por um aluno.**

Ao solicitarmos que os alunos generalizassem do cálculo das potências de *i* e observassem suas representações geométricas, eles responderam que as potências de *i* repetiam a sua posição, no plano, de quatro em quatro, ou seja, $i^0$ e $i^4$ tinham a mesma posição e o mesmo acontecia com $i^1$ e $i^5$, $i^2$ e $i^6$, e assim sucessivamente. Perguntamos a eles qual o motivo geométrico de tal fato ocorrer. Um aluno respondeu que quatro rotações de 90° equivalem a um giro de 360°, fazendo com que o ponto retorne a sua posição inicial. Assim, concluíram que, para calcularmos as potências de *i*, é necessário dividir o expoente da potência de base *i* por quatro e utilizarmos o resto da divisão como o novo expoente de *i*.

**ATIVIDADE 9**

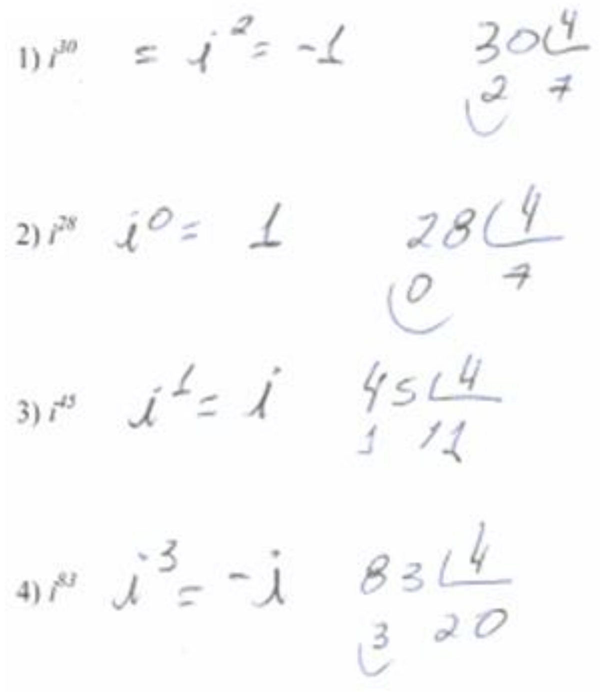



**Figura 20. Resolução da Atividade 9 por um aluno.**

Acreditamos que os objetivos propostos para esse encontro foram atingidos, visto que os alunos conseguiram efetuar todas as operações, na forma algébrica, e interpretar geometricamente o cálculo das potências da unidade imaginária.

*4.8 Oitavo encontro*

Ao iniciarmos o nosso oitavo encontro, tínhamos o objetivo de operar com a divisão entre Números Complexos, utilizando o conceito de inverso e, a partir desse conceito, definir o conjugado dos Números Complexos. Inicialmente, propusemos a seguinte indagação: Sendo $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$, como podemos calcular o inverso de z, ou seja, $\frac{1}{z}$ ?

Como nenhum aluno apresentou sugestões, dissemos que, se $z = a + bi$, com $a$ e $b \in$ IR , não simultaneamente nulos, teríamos que procurar z' = c + d$i$ com c e d ∈ IR, tal que z · z' = 1 . Já que 1 continua sendo o elemnto neutro da multiplicação.Também salientamos que z' era o inverso de z.

Com o objetivo de facilitar o entendimento de todos os alunos, apresentamos o seguinte exemplo: Determinar o inverso de z = 2 + 3$i$. Como z . z' = 1 e z' = c + d$i$, então :

$$(2 + 3i).(c + di) = 1$$

$$2c + 2di + 3ci + 3di^2 = 1$$

$$(2c - 3d) + (3c + 2d)i = 1,$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} 2c - 3d = 1 \ \cdot (2) \rightarrow 4c - 6d = 2 \text{ (A)} \\ 3c + 2d = 0 \ \cdot (3) \rightarrow 9c + 6d = 0 \text{ (B)} \end{cases}$$

Somando as equações (A) e (B), obtemos 13c = 2, logo, $c = \frac{2}{13}$ . Substituindo c $= \frac{2}{13}$ em (B), obtemos $d = -\frac{3}{13}$, logo, z' $= \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

A partir dessa observação, um aluno sugeriu que seria necessário efetuar o produto (a + b$i$)( c + d$i$) e dizer que o resulado seria 1. Perguntamos se os demais concordavam com a resposta sugerida e outro aluno perguntou para que serviria fazer tal operação, mencionando, corretamente, que obteríamos o $c$ e o $d$ em função de $a$ e $b$. Observamos que trabalhar apenas com valores algébricos não é muito usual no ensino médio. Acreditamos que o aluno que fez esse comentário apresenta um bom conhecimento matemático, mas isso não é a realidade da maior parte dos estudantes.

Observamos que, quando trabalhamos com valores algébricos, os alunos apresentaram mais dificuldade de entendimento. Com o objetivo, então, de facilitar o entendimento, apresentamos a resolução da seguinte forma:

$$(a + bi)( c + di) = 1 + 0i$$

$$ac + adi + bci + bdi^2 = 1 + 0i$$

$$(ac – bd) + ( bc + ad)\ i = 1 + 0i$$

Logo, podemos concluir que $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$. Como z $\neq$ 0, então $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos. Com isso, podemos supor a ≠ 0 e multiplicar a equação $ac - bd = 1$ por (a), obtendo $a^2c - abd = a$ (I). Se isolarmos $ad$ na equação $bc + ad = 0$, obtemos $ad = -$ bc (II). Substituindo (II) em (I), temos:

$$a^2c - b(-bc) = a$$

$$(a^2 + b^2)c = a$$

$$\text{isolando } c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Substituindo $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$ na equação $bc + ad = 0$

$$b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} + ad = 0$$

$$d = -\frac{ba}{a(a^2 + b^2)}$$

$$\text{logo } d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Concluímos, então, que o inverso de z = a + b$i$ é z' = c + d$i$, onde $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e $d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Note-se que $a^2 + b^2 \neq 0$, já que $z$ = a + b$i \neq 0$. Também concluímos que z' $= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (\mathrm{a} - \mathrm{bi})$ e salientamos que $\frac{1}{a^2 + b^2}$ é o quadrado do inverso do comprimento, já que o comprimento de $z$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$. Chamamos a – b$i$ de conjugado de z e o representamos por $\bar{z}$.

Também calculamos o inverso de z = 2 + 3$i$, utilizando $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e $d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$. Nesse momento, observamos que os alunos perceberam que não precisariam resolver o sistema, pois poderiam definir os valores de *a* e *b* e aplicar em *c* e *d*. Propusemos, então, a atividade 10, cuja resolução encontra-se expressa na Figura 21.

**ATIVIDADE 10 -** Calcule o inverso dos complexos abaixo:

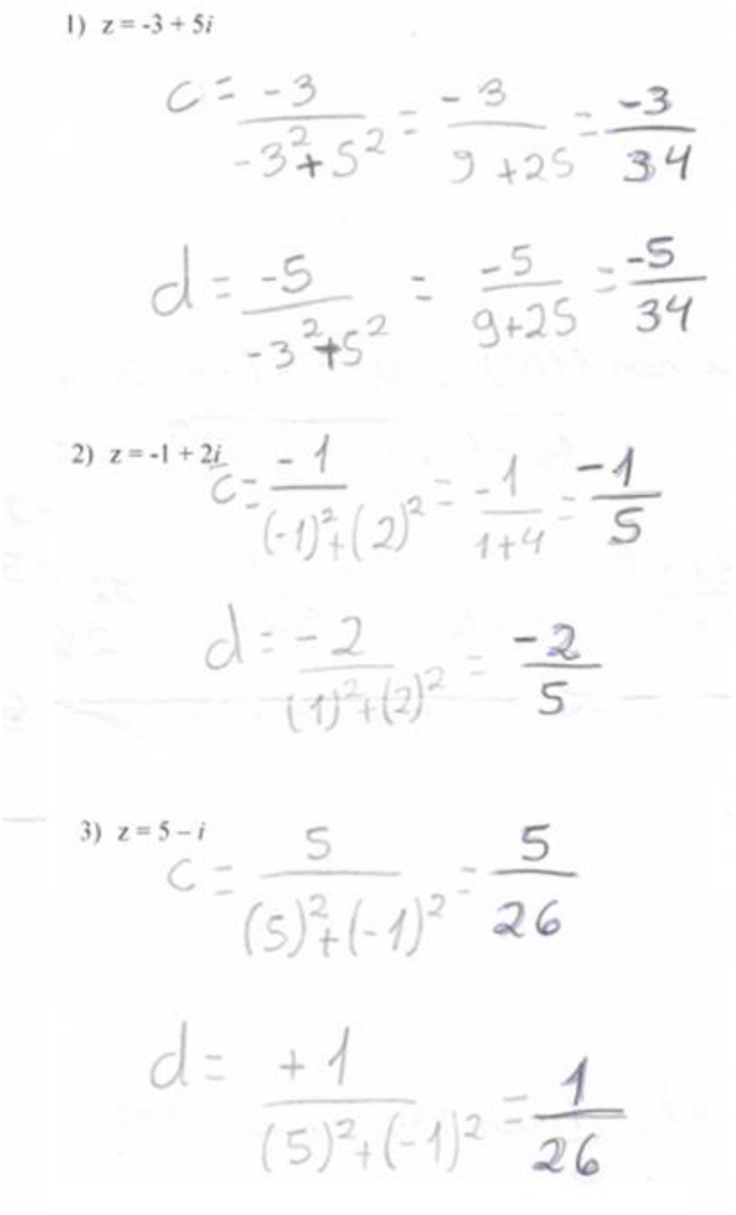



**Figura 21. Resolução da Atividade 10 por um aluno.**

A resolução apresentada pelo aluno reproduz um erro bastante frequente no desenvolvimento das atividades. Os alunos, comumente, escrevem $-3^2 = +9$. Salientamos a diferença existente entre $-3^2$ e $(-3)^2$, dizendo que $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$ e $(+3) \cdot (+3) = +9$. Observamos que apenas um aluno não resolveu a atividade conforme apresentado na Figura

19. Ele determinou o inverso de z resolvendo o sistema linear obtido a partir do conceito de inverso, ou seja, z . z' = 1.

Ao definir o conjugado de um Número Complexo, apresentamos as suas representações geométricas, respectivamente, na forma polar e na forma cartesiana:

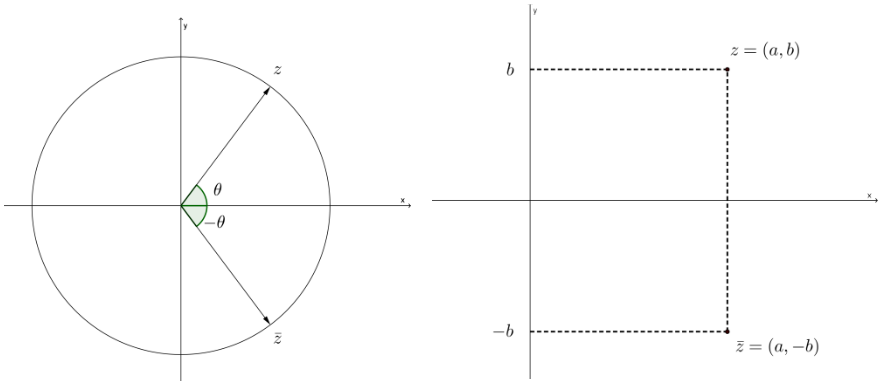



**Figura 22. Formas polar e cartesiana de z e $\bar{z}$.**

Definimos a divisão de dois números complexos *z* e *w* (*w* ≠ 0) como a multiplicação de *z* pelo inverso de *w*, ou seja, $\frac{z}{w} = z \cdot w'$, onde $w'$ é o inverso de *w*. Propusemos a seguinte atividade: Divida os números complexos a seguir:

a) z = 2 – 5*i* e w = 4 + 3*i*
b) z = 3*i* e w = 6 − 4*i*
c) z = 5 e w = 3*i*
d) z = 4 (cos 110° + *i* sen 110°) e w = 3 (cos 90° + *i* sen 90°)

Os alunos resolveram os três primeiros exercícios com bastante facilidade. Porém, a quarta atividade apresentava os Números Complexos na forma trigonométrica e ainda não tínhamos trabalhado a divisão nessa forma. Muitos alunos disseram não saber dividir na forma trigonométrica. Perguntamos, então, como seria a multiplicação de *z* por *w*, na forma trigonométrica, visto que a divisão foi definida utilizando a operação de multiplicação e o conceito do inverso de um Número Complexo. Os estudantes recorreram ao material relativo aos encontros anteriores e, após várias discussões nos grupos, concluíram, sem a nossa interferência, que, para efetuar a divisão de *z* por *w*, seria necessário dividir o comprimento de *z* pelo comprimento de *w* e subtrair o ângulo de *w* do ângulo de *z*.

Observando as falas dos alunos, acreditamos que eles concluiriam que, na divisão, subtraem-se os ângulos dos dois números utilizando o conceito de que a operação de divisão é a operação inversa da multiplicação. Logo, se os ângulos são somados na multiplicação, na divisão são subtraídos. Da mesma forma, concluíram que teriam de dividir o comprimento de *z* pelo comprimento de *w*.

Ficamos bastante satisfeitos com os resultados alcançados durante esse encontro e acreditamos que os alunos conseguiram construir os conceitos trabalhados em nossa sequência didática.

*4.9 Nono encontro*

Iniciamos esse encontro apresentando, na forma trigonométrica, a potenciação como a multiplicação de fatores repetidos de um Número Complexo. Relembramos que o produto de dois Números Complexos na forma trigonométrica, sendo $v = r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)$ e $w = r_2(\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$, é obtido multiplicando o comprimento de *v* pelo comprimento de *w* e somando o ângulo de *v* com o ângulo de *w*. Então, $v \cdot w = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)]$. Assim, tomando $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta)$, podemos obter:

$$z^2 = z \cdot z = \rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta)\cdot\rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta)$$

$$z^2 = \rho\cdot \rho\, [\cos (\theta+\theta) + i\text{sen } (\theta+\theta)] =$$

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\text{sen } 2\theta) \text{ e}$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\theta + i\text{sen } 2\theta)\cdot\rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta)$$

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\text{sen } 3\theta).$$

Seja $z^n$, com $n \in \mathbb{IN}$ e $n > 1$, então:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n vezes}} = \rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta)\cdot\rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta) \cdot \ldots \cdot \rho(\cos\theta + i\text{sen } \theta).$$

$$z^n = \rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho \cdot [\cos (\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta) + i\text{sen}(\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta)],$$

ou seja:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\text{sen } n\theta).$$

Essa fórmula é denominada Fórmula de De Moivre. Apresentamos aos estudantes a seguinte aplicação: Dado o número complexo $z = -1 - \sqrt{3}\, i$, determine $z^{50}$ nas formas algébrica e trigonométrica.

O número complexo z = $-1 - \sqrt{3}\,i$ está apresentado na forma algébrica, mas, para calcular a potência $z^{50}$, é conveniente transformá-lo para forma trigonométrica, pois o nosso expoente é 50, o que indica que teríamos 50 fatores $-1 - \sqrt{3}\,i$ para multiplicarmos. Esse fato torna inviável o cálculo dessa potência na forma algébrica, mas não impede que a resposta seja apresentada nas formas algébrica e trigonométrica, como veremos a seguir:

z = ρ (cos θ + *i* sen θ). Para tal, vamos calcular ρ $e$ θ:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{(-\sqrt{3})}{-1} = \sqrt{3}, \text{ então, } \theta = 240°$$

Logo, z = $-1 - \sqrt{3}\,i$ = 2(cos 240° + *i* sen 240°).

Aplicando a fórmula de De Moivre, obtemos:

$$z^{50} = 2^{50}[\cos(50 \cdot 240°) + i \text{ sen } (50 \cdot 240°)]$$

$$z^{50} = 2^{50}[\cos(12000°) + i \text{ sen } (12000°)]$$

$z^{50} = 2^{50}[\cos(120°) + i \text{ sen } 120°)]$, na forma trigonométrica, e

$z^{50} = 2^{50}[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i]$ na forma algébrica.

**Radiciação nos Números Complexos**

Apresentamos as raízes enésimas de um Número Complexo da seguinte forma: Dado w ∈ ℂ, dizemos que z ∈ ℂ é uma raiz *n*-ésima de w se $z^n = w$. Exemplo: Obtenha as raízes quadradas de z = 16*i* utilizando a forma algébrica.

Fazendo w = a + bi, obtemos a equação: $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = 0 + 16i$. Então, aplicando a igualdade entre complexos, temos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \rightarrow a^2 = b^2 \\ 2ab = 16 \rightarrow ab = 8 \end{cases}$$

Como a $\neq 0,$ temos:

$$b = \frac{8}{a}$$

$$a^2 = \frac{8^2}{b^2}$$

$a^2 = \frac{8^2}{a^2} \leftrightarrow a^4 = 8^2$, então:

$$a = 2\sqrt{2} \text{ e } b = 2\sqrt{2}, \text{ou } a = -2\sqrt{2} \text{ e } b = -2\sqrt{2}.$$

Logo, temos $w_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ e $w_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$ como resoluções do sistema, que são as raízes quadradas de z = 16$i$.

Para calcular as raízes *n*-ésimas de um Número Complexo na forma trigonométrica, apresentamos o seguinte: Dado $w \in \mathbb{C}$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz *n*-ésima de w se $z^n = w$. Se w = 0, aplicando os módulos de ambos os lados da equação, obtemos:

$$|r^n| = |r|^n = 0,$$

onde $r = 0$, isto é, z = 0. Ou seja, a única raiz *n*-ésima de 0 é o próprio 0.

Se w ≠ 0, escrevemos:

$$w = s(\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi),$$

onde s = $|w| > 0$ e φ é o ângulo de w, ou φ = arg w.

Queremos determinar as raízes *n*-ésimas de w também escritas em notação trigonométricas da forma, ou seja:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta),$$

com r = $|z|$ e θ = arg z. Por definição, $z^n = w$, da fórmula de De Moivre, obtemos:

$$z^n = r^n\,[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta)] = w = s(\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi).$$

$$z^n = s(\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi)$$

Assim,

$$r^n\,[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta)] = s(\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi)$$

$$z^n = w.$$

Como os módulos dos dois números são iguais, temos que $s = r^n$, de onde obtemos que $r = s^{\frac{1}{n}}$ é a raiz *n*-ésima (real) positiva de *s*. Simplificando $r^n$ com *s*, obtemos:

$$\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta) = \cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi$$

que, igualando parte real e parte imaginária, equivale ao seguinte sistema de equações trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \cos\varphi \\ \text{sen}(n\theta) = \text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Analisando o gráfico das funções cosseno e seno (ou equivalentemente às projeções nos eixos *x* e *y* de um ponto movimentando-se no círculo trigonométrico, respectivamente), constatamos que dois ângulos distintos com valores entre 0 e $2\pi$ que possuem o mesmo cosseno estão nos quadrantes primeiro e quarto, nos quadrantes segundo e terceiro ou são $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Analogamente, se possuem o mesmo seno, estão nos quadrantes terceiro e quarto ou nos quadrantes primeiro e segundo, ou são 0 ou $2\pi$. Concluímos que dois ângulos (distintos) em $[0,2\pi)$ não podem, ao mesmo tempo, possuir o mesmo cosseno e o mesmo seno. Portanto, a única forma para que ângulos distintos, agora com valores arbitrários, possuam o mesmo seno e cosseno é seus valores se diferenciarem por múltiplos inteiros de $2\pi$, ou seja, se diferenciarem pelo número de voltas. Observando a análise anterior, concluímos que a solução do sistema de equações trigonométricas é: $n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in Z$, ou seja, para cada valor de $k$, temos um ângulo. Assim, o argumento (ângulo) procurado $\theta$ possui vários valores possíveis que dependem de $k$:

$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\ , k \in Z.$$

Fazendo $k$ variar entre 0 e $n-1$, o ângulo $\theta$ toma os $n$ valores distintos:

$$\theta_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(0)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n}$$
$$\theta_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(1)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$$
$$\theta_2 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(2)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$$
$$\theta_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Quando $k \geq n$, os valores de $\theta = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ começam a se repetir, apenas com a diferença de $2\pi$:

$$\theta_n = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \varphi_0 + 2\pi$$
$$\theta_{n+1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \varphi_1 + 2\pi$$
$$\theta_{n+2} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n+2)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n} + 2\pi = \varphi_2 + 2\pi,$$

Então, seno e cosseno possuem os mesmos valores. Logo, existem raízes *n*-ésimas distintas:

$$z_k = r(\cos\theta_k + i\, sen\, \theta_k), k = 0,1,2,\dots, n-1, \text{onde}$$
$$r = s^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{s}\,,\ \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Assim, concluímos que a raiz quadrada de um número complexo admitirá dois valores: a cúbica, três valores; a quarta, quatro valores; e assim sucessivamente. Apresentamos o seguinte exemplo: Determine as raízes cúbicas de $z = 8(\cos\pi + i\, sen\, \pi)$ e interprete-as geometricamente.

Para obter as raízes cúbicas de *z*, devemos achar os números complexos $w_k$, tais que $(w_k)^3 = z$. Expressando *w* na forma trigonométrica $w_k = r(\cos\theta_k + i\, sen\, \theta_k)$, pela fórmula de De Moivre, obtemos $(w_k)^3 = r^3(\cos 3\theta + i\, sen\, 3\theta)$. Então, $r^3(\cos 3\theta + i\, sen\, 3\theta) = 8(\cos\pi + i\, sen\, \pi)$. Daí, temos:

$$r^3 = 8 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} \rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos\,(3\theta) = \cos\pi = -1 \\ \operatorname{sen}\,(3\theta) = \operatorname{sen}\pi = 0 \end{cases} \rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ para } k = 0,1,2.$$

Todas as três raízes possuem módulo igual a 2 e argumentos $\frac{\pi}{3}$, $\pi$ *e* $\frac{5\pi}{3}$. Note-se que esses ângulos formam uma progressão aritmética na qual o primeiro termo é $\frac{\pi}{3}$, e a razão é $\frac{2\pi}{3}$ Assim, as raízes cúbicas de z são:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\, sen\, \frac{\pi}{3}\right),$$
$$w_1 = 2(\cos\pi + i\, sen\, \pi) \text{ e}$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\, sen\, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}\pi = 0$, as raízes representadas na forma algébrica são:

$$w_0 = 1 + \sqrt{3}\,i\ , w_1 = -2 \text{ e } w_2 = 1 - \sqrt{3}\,i\,.$$

Se calcularmos $w_3, w_4$ *e* $w_5$, obtemos, como respostas, respectivamente, as raízes $w_0, w_1$ *e* $w_2$, confirmando, dessa maneira, o que já vimos:

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi}{3}\right) = w_0$$

$$w_4 = 2(\cos 9\pi + i \text{ sen } 9\pi) = 2(\cos\pi + i \text{ sen } \pi) = w_1$$

$$w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{11\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{3}\right) = w_2$$

Assim, vemos que as raízes se repetem apenas com a diferença de múltiplos inteiros de $2\pi$, ou seja, com a diferença no número de voltas.

Representando tais raízes no plano complexo, observamos, na Figura 25, que elas são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio igual a 2. Os vértices desse triângulo dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{2\pi}{3}$ $rad$, ou seja, 120°. Observamos que, quando $w_0$ gira 120° no sentido anti-horário, obtemos $w_1$ e, quando $w_1$ gira 120° no sentido anti-horário, obtemos $w_2$ .

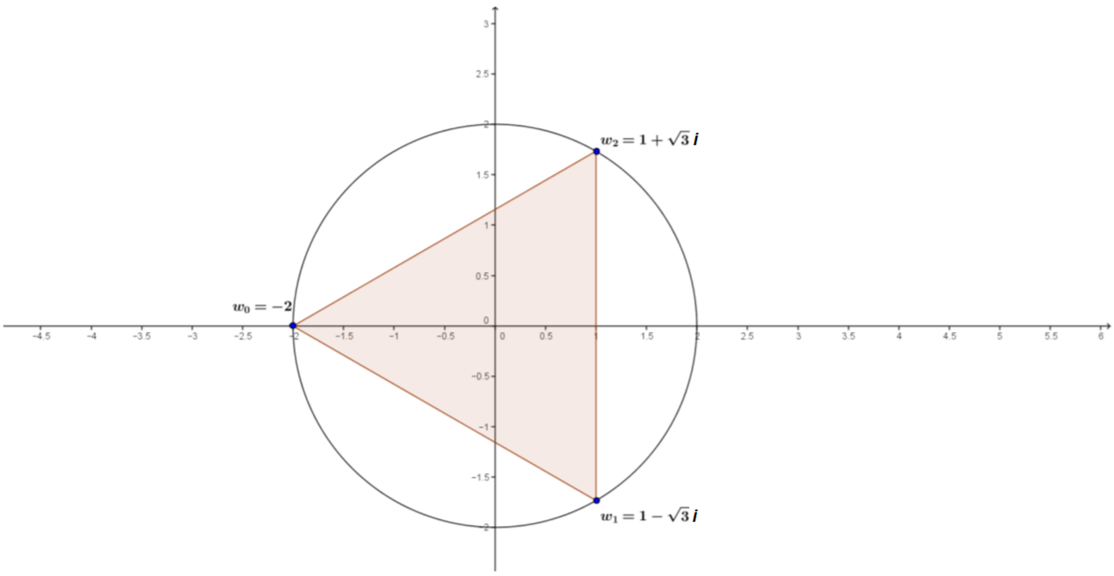



**Figura 23- Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 8(\cos\pi + i\, sen\, \pi)$**

Perguntamos aos estudantes qual seria a área e o perímetro desse triângulo. Imediatamente, um aluno identificou que a altura, em relação à base que une $w_1$ e $w_2$, era 2 + 1 = 3 e que a base era $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Então, a área era $3\sqrt{3}$ e o perímetro $6\sqrt{3}$. Perguntamos se todos concordavam e ficamos bastante satisfeitos com a resposta afirmativa dada pelos alunos. Salientamos que não utilizamos uma determinada unidade de medida.

Observamos, ainda, um tipo especial de raiz complexa, as chamadas raízes complexas da unidade, que nada mais são do que as soluções para a equação $(z_k)^n = 1$, denotadas pela fórmula:

$$z_k = r(\cos\theta_k + i \text{ sen } \theta_k) \text{ com } r = 1 \ e \ \theta = 0.$$

O motivo pelo qual são consideradas especiais se deve ao fato de que, se variar *n*, marcar os pontos das raízes n-ésimas e ligá-los, um polígono regular de *n* lados será obtido, inscrito no círculo trigonométrico, podendo obter raízes n-ésimas de quaisquer outros números a partir delas. Exemplo: Determinar as raízes cúbicas de $z = 1$.

$1 = 1(\cos 0 + i\text{sen } 0)$

Procuramos $w \in C$, tal que $w^3 = 1$. Tomamos $w = r(\cos\theta_k + i \text{ sen } \theta_k)$. Pelo que foi visto anteriormente, $w^3 = r^3(\cos 3\theta + \text{i sen } 3\theta)$. Assim, teremos $r^3 = 1$ e

$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos 0 \\ \text{sen }(3\theta) = \text{sen } 0 \end{cases}$, ou seja, $r = 1$ e $\theta = 0\pi + \frac{2k\pi}{3}$, para $k = 0,1,2$.

Daí, temos:

$$\varepsilon_0 = 1(\cos 0 + \text{i sen } 0) = 1$$

$$\varepsilon_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

As raízes, apresentadas na Figura 24, representam vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo trigonométrico:

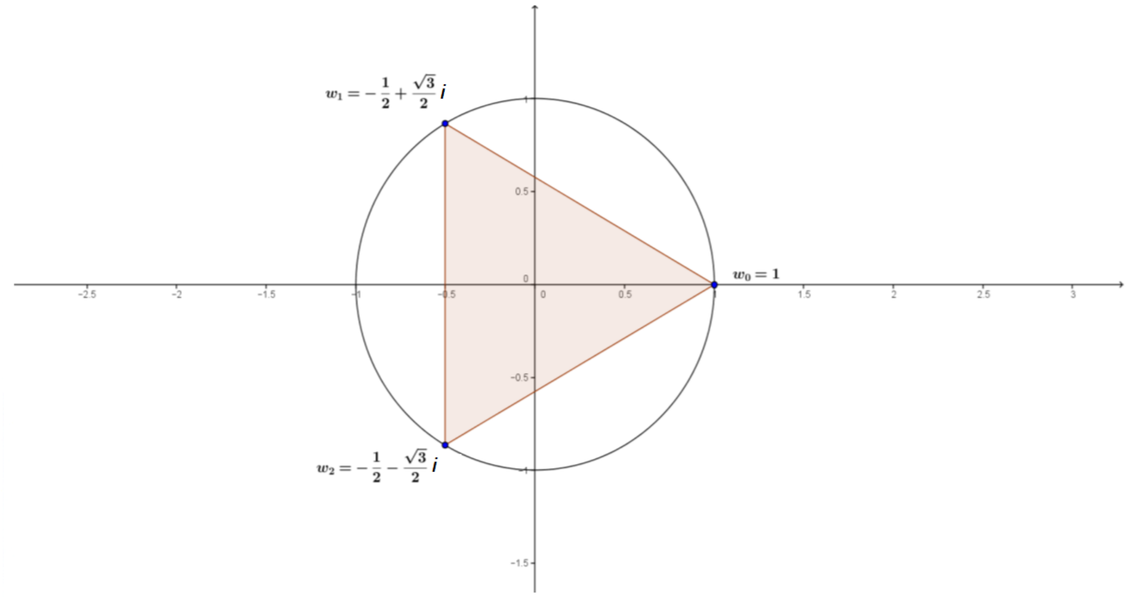



**Figura 24 - Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 1$**

As raízes do exemplo anterior $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ e $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, quando multiplicadas por $-2$, geram as raízes de z = $-\,8 = 8(\cos\pi + i\;sen\;\pi)$: $w_0 = -2\,, w_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ e $w_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$ .

Essa multiplicação por $-2$ pode ser vista como a multiplicação por $(-1)$ seguida da multiplicação por (2). Já sabemos que multiplicar por $(-1)$ gera uma rotação de 180° e que multiplicar por 2 aumenta duas vezes o comprimento dos Números Complexos. Então, esses números, que são os vértices do triângulo, vão girar 180° e ter seus comprimentos duplicados.

Para obtermos as raízes $n$-ésimas da unidade $\varepsilon_k$ , basta pensarmos em $z_k = r(\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k), k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$ onde $r = s^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{s}\,,\ \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Sabendo que $r = 1\ e\ \varphi = 0\pi$, obtemos:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\,, k \in Z$$

O importante e interessante é que, como no exemplo anterior, qualquer raiz pode ser escrita em função das raízes da unidade, multiplicando pelo comprimento e somando o ângulo.

Propusemos que os alunos resolvessem a seguinte questão: Determinar as raízes quartas da unidade e apresentar sua representação geométrica. A Figura 25 apresenta a resolução da tarefa por um aluno:

$z = 1 \longrightarrow w^4 = 1$

$w = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$w^4 = r^4(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta)$

$r^4(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta) = 1(\cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ)$

$r^4 = 1 \Rightarrow \boxed{r = 1}$

$\cos 4\theta = \cos 0^\circ$

$\mathrm{sen}\,4\theta = \mathrm{sen}\,0^\circ$

$4\theta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\theta = \dfrac{0^\circ}{4} + \dfrac{k \cdot 360^\circ}{4}$

$\boxed{\theta = 0^\circ + k \cdot 90^\circ}$

$w_0 = 1(\cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ)$

$w_0 = 1$

$w_1 = 1(\cos 90^\circ + i\,\mathrm{sen}\,90^\circ)$

$w_1 = i$

$w_2 = 1(\cos 180^\circ + i\,\mathrm{sen}\,180^\circ)$

$w_2 = -1$

$w_3 = 1(\cos 270^\circ + i\,\mathrm{sen}\,270^\circ)$

$w_3 = -i$

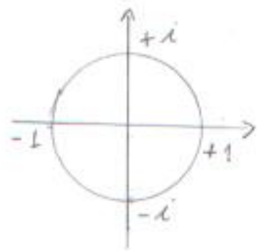



**Figura 25 – Resolução da atividade por um aluno.**

Observando essa resolução, concluímos que os alunos transformaram o número $z = 1$ para a forma trigonométrica e determinaram os complexos $w_k$, tal que $(w_k)^4 = 1$. Ao fazer o $k$ variar entre 0 e 3, eles determinaram as quatro raízes diferentes da unidade, o que nos deixou satisfeitos, visto que um dos nossos objetivos, ao elaborar a proposta didática, era o de determinar todas as raízes de um Número Complexo. Não faria mais sentido, então, pensarmos que a raiz quarta de 1 é somente 1. Dissemos, naquele momento, que 1 é uma das quatro distintas raízes quartas da unidade. Esse objetivo foi plenamente alcançado.

Ao fazer a representação geométrica das quatro raízes, os estudantes concluíram que a figura geométrica era um quadrado. Apenas um aluno perguntou se não seria um losango. Salientamos que as raízes eram: 1, $i$, $-1$ e $-i$ e observamos que, multiplicando três vezes qualquer uma delas por $i$, obteríamos as outras três raízes. Relembramos que multiplicar por $i$ é fazer uma rotação de 90°. Dessa forma, a figura formada possuía quatro ângulos iguais a 90° e, como todos os lados tinham a mesma medida, obteríamos um quadrado.

Como atividade final de nossa proposta, propusemos a resolução de uma lista contendo exercícios de aplicação dos Números Complexos. As atividades abordaram aplicações na Eletrônica, na Eletricidade e na Geometria Plana. Os exercícios foram os seguintes:

1) Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de impedância (Z) e é expressa por um número complexo. Num circuito RLC em série, a impedância equivalente ($Z_{eq}$) é dada por: $Z_{eq} = Z_L + Z_R + Z_C$. A força eletromotriz E é dada por $E = Z_{eq} \cdot I$, onde I é a corrente elétrica. Sendo o circuito RCL em série, apresentado na Figura 26, determine:

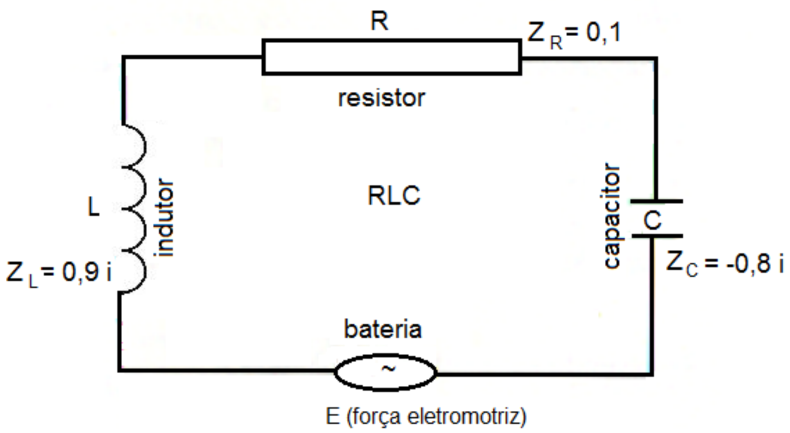



**Figura 26 – Circuito RCL**

a) A impedância equivalente $Z_{eq}$ .
b) A força eletromotriz E, em volts, quando $I = 20 + 100i$.
c) A corrente I, quando $E = i - 1$.

Todos os alunos resolveram corretamente esse exercício, o que confirma o fato de que operar algebricamente é uma atividade facilmente assimilada. O exercício envolvia as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de Números Complexos. Os estudantes acharam a contextualização bastante interessante, já que os circuitos elétricos fazem parte das suas atividades estudantis e profissionais, também, comentaram que o professor da disciplina de Eletricidade estaria trabalhando esse tipo de circuito em seguida.

2) Considerando o complexo z = 1 + $\sqrt{3}\, i$ :

a) Determine o comprimento de $z$ e de $\bar{z}$. Que relação existe entre esses valores?
b) Represente, em um mesmo plano, $z$ e $\bar{z}$. Qual a relação existente entre $z$ e $\bar{z}$ ? Os resultados observados valem para qualquer número complexo não nulo e seu conjugado?

Todos os alunos responderam corretamente que o comprimento de $z$ era 2, assim como o de $\bar{z}$ também era 2. Quanto ao argumento de $z$ e $\bar{z}$, todos responderam, respectivamente, 60° e 300°. Quanto à relação existente entre os valores do comprimento de $z$ e do comprimento de $\bar{z}$, eles responderam que eram iguais. Quanto ao argumento de $z$ e o argumento de $\bar{z}$, responderam que os dois ângulos tinham cossenos iguais e senos de sinais diferentes, mas de mesmo valor. Esperávamos que dissessem que os ângulos eram $\theta$ e o outro $-\theta$, pois acreditávamos que eles observariam que o ângulo de 300° corresponde ao ângulo de 60° marcado no sentido horário. Consideramos, porém, bastante interessante o fato de eles relacionarem com as funções trigonométricas. Também ficamos satisfeitos que os alunos concluíram corretamente que os resultados observados valem para qualquer número complexo não nulo e seu conjugado.

3) Dois vértices consecutivos de um quadrado são dados pelos complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\ e\ w = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Com base nessa informação:

a) Determine os Números Complexos correspondentes aos outros dois vértices.
b) Obtenha o perímetro e a área desse quadrado.

Esse exercício foi resolvido por todos os alunos apenas com o desenho no plano. Eles marcaram $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e observaram quais seriam os outros vértices geometricamente. Acreditamos que isso aconteceu devido às partes real e imaginária de *z* serem iguais. Para calcular, dois alunos identificaram, erroneamente, o lado do quadrado como $\sqrt{2}$ e, por isso, calcularam a área e o perímetro de forma errada. Os outros 16 alunos calcularam corretamente a área e o perímetro do quadrado.

4) Se $z = 3 + i$ sofrer uma rotação de 90° no sentido horário, tornar-se-á o complexo *w*. Com base nessa informação, determine *w*.

Ao elaborar essa questão, achávamos que seria facilmente resolvida pelos alunos. No entanto, seis deles somaram $i$ ao $z$, obtendo w = 3 + 2$i$, quando esperávamos que multiplicassem por $i$ e assim obtivessem $-1 + 3i$. Acreditamos que eles erraram o exercício porque não fizeram a representação geométrica de *z* e de *w*, já que essa representação tornaria visível que o ângulo de rotação de *z* não era de 90°.

5) Admita que o centro do plano complexo coincida com o centro de um relógio de ponteiros. Se o ponteiro dos minutos tem duas unidades de comprimento, determine sobre que número complexo ele estará às 11h 55min.

Todos os alunos responderam corretamente que o comprimento do número complexo procurado era 2 e que o ângulo era 120°. Utilizando o seno e o cosseno do ângulo, calcularam as coordenadas *a* e *b*, obtendo $z = -1 + \sqrt{3}i$. Apenas três alunos não observaram que o valor de *a* era negativo.

6) Em termos elétricos, uma impedância complexa 4 + 3$i$ significa 4Ω de resistência elétrica e 3Ω de reatância indutiva. A medida da impedância é o resultado do comprimento do Número Complexo. O ângulo de fase θ é o arco tangente da relação entre reatância indutiva e resistência elétrica. Determine a impedância complexa na forma trigonométrica ou polar.

Ao propor esse exercício, não sabíamos como os estudantes calculariam o arco cuja tangente vale 0,75, mas eles recorreram à calculadora e perguntaram se poderiam utilizar o valor aproximado. Quanto ao cálculo do comprimento, todos resolveram rapidamente, obtendo a resposta 5. Todos os alunos concluíram que a resposta era 5 ( cos 36,57° + *i* sen 36,57°).

Para atingirmos os objetivos propostos nesse encontro, foi necessário fazer mais de um exercício sobre o cálculo das raízes, suas representações no plano e os polígonos regulares cujos vértices são essas raízes. Ao serem indagados, os alunos demonstravam, oralmente, um bom entendimento quanto aos ângulos de rotação e também quanto às figuras geométricas planas formadas. O cálculo das áreas foi um pouco mais difícil, uma vez que alguns alunos possuíam dificuldade em decompor, por exemplo, um hexágono regular em seis triângulos equiláteros.

Consideramos que os objetivos propostos para tais atividades foram alcançados, uma vez que os alunos apresentaram poucos erros na resolução da lista dos exercícios de aplicações, que foi a nossa atividade de encerramento.

# 5 Considerações Finais

Um dos grandes desafios da Educação Matemática atual é propiciar aos alunos um ensino atualizado, que os ajude a entender a realidade na qual vivem e que os motive ao estudo dos conteúdos escolares. Propor novas abordagens de ensino, por exemplo, pode servir de motivação para a aprendizagem desses conteúdos. Com essa intenção, planejamos e executamos uma proposta para o ensino dos Números Complexos sob a forma de uma sequência didática, descrita nos capítulos anteriores.

No atual ensino de Matemática, confrontamo-nos com vários entraves, por exemplo, a aprendizagem de um grande número de conteúdos. Para Duval, autor cujas ideias subsidiaram este trabalho, é preciso estudar prioritariamente a conversão de representações quando queremos analisar as dificuldades de aprendizagem da matemática. Para que o conteúdo seja compreendido, é necessário que haja a articulação de uma pluralidade de registros de representação. Com base nas ideias desse autor, elaboramos uma proposta em que investimos na inversão da ordem de apresentação de diferentes formas representacionais dos Números Complexos. Partimos das representações geométrica, cartesiana e polar e chegamos à representação algébrica. Transitamos entre as diversas representações semióticas dos Números Complexos, articulando, dessa maneira, álgebra com geometria e trabalhando em conformidade com uma das recomendações dos PCN.

Antes mesmo de iniciar a aplicação da nossa proposta didática, tínhamos previamente todos os encontros organizados. Durante os encontros analisávamos as resoluções das atividades e as falas dos alunos, identificando suas dificuldades e seus erros, de maneira a reformular os próximos encontros e até mesmo aqueles em andamento.

Nas aulas, iniciávamos a proposta pela abordagem geométrica, que era nossa prioridade. Até o quinto encontro, a unidade imaginária $i$ ainda não havia sido introduzida em nossas aulas, fato que gerou um desconforto nos alunos repetentes. Um deles mencionou que seria mais fácil aprenderem a temática da maneira tradicional, ou seja, iniciando pela forma algébrica e definindo a unidade imaginária como $i = \sqrt{-1}$. Essa resistência à nossa proposta já era esperada. Concordamos com Carneiro (2004) quando menciona que a abordagem algébrica permite que os estudantes operem com os Números Complexos de forma rápida.

Acreditamos, no entanto, que tal abordagem isolada não permite a compreensão do que está sendo realizado.

Tínhamos como objetivo apresentar o significado geométrico das operações e da unidade imaginária *i*. Observando a resolução das atividades propostas, cremos ter alcançado esse objetivo. Dentre essas atividades, citamos uma que explorou a multiplicação de um número qualquer pela unidade imaginária *i*. Ficamos muito satisfeitos e até mesmo surpresos com a facilidade apresentada pelos alunos ao concluírem que um número qualquer, ao ser multiplicado por *i*, fazia uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

A abordagem geométrica prioritariamente utilizada propiciou um significado geométrico dinâmico (além do algébrico) para a unidade imaginária *i*, proporcionando aos alunos a visualização de figuras geométricas, a observação de suas rotações e a construção de relações e de propriedades de tais figuras. Trabalhamos com as formas geométrica, polar, trigonométrica e algébrica dos Números Complexos e, ao analisar as resoluções das atividades dos estudantes e as gravações realizadas durante os encontros, percebemos que eles compreenderam os conceitos relativos aos Números Complexos. Percebemos, igualmente, que transitaram com desenvoltura entre as diferentes formas de representação, podendo escolher a maneira de representação mais conveniente a cada situação nas diferentes áreas estudadas.

Ao final da aplicação da sequência didática, todos os alunos da turma concordaram que a abordagem desenvolvida possibilitou a aprendizagem da temática de maneira significativa. Eles utilizaram seus conhecimentos prévios de geometria, nos quais se ancoraram para adquirir novos conceitos geométricos relativos ao tema trabalhado. Um dos alunos mencionou que havia passado a enxergar, a partir desta proposta, o que estava fazendo, já que as operações matemáticas passaram a ter, para ele, uma representação geométrica.

Destacamos a motivação da turma para criar hipóteses e testá-las, reformulando-as quando necessário. A participação ativa dos estudantes propiciou uma modificação de suas opiniões em relação às aulas de Matemática, provocando uma desacomodação da postura apresentada tradicionalmente por eles, uma vez que estavam acostumados a ser receptores de conteúdos e, durante a aplicação da proposta, passaram a assumir o papel de construtores do seu próprio conhecimento. Acreditamos que o nosso desempenho foi importante e fundamental para orientá-los nas formulações e na testagem de hipóteses relativas aos conceitos estudados.

Como já mencionado, este trabalho foi desenvolvido em uma turma do noturno, na qual havia 18 alunos matriculados. Futuramente, porém, pretendemos aplicá-la a uma classe do diurno que, em média, possui 40 estudantes. Sabemos que mudanças na abordagem de um conteúdo necessitam de experimentação, exigindo que se analise cuidadosamente o número de encontros necessários para o desenvolvimento da proposta. Também é necessário avaliar se as dúvidas dos alunos seriam semelhantes e, até mesmo, se teríamos algum tipo de resistência à aplicação da proposta.

A proposta aqui apresentada, em princípio, não inclui o uso de *softwares* de geometria dinâmica, visto que o foco foi iniciar as atividades pela abordagem geométrica e transitar pelas diferentes representações semióticas dos Números Complexos. Acreditamos, entretanto, que a criatividade dos professores que optarem pela utilização de algum *software* será suficiente para adaptar esse uso à nossa proposta.

Concordamos com Gromov (*apud* D'AMBRÓSIO, 2001, p. 14), quando menciona que:

> Nós matemáticos muitas vezes temos pouca ideia sobre o que está se passando em ciências e engenharia, enquanto os cientistas experimentais e engenheiros muitas vezes não se apercebem das oportunidades oferecidas pelo progresso da matemática pura. Este perigoso desequilíbrio deve ser evitado, trazendo mais ciências para a educação dos matemáticos e expondo os futuros cientistas e engenheiros à matemática central. Isso requer novos currículos e um grande esforço por parte dos matemáticos [...] Necessitamos para isso de uma geração de matemáticos profissionais, capazes de trafegar entre matemática pura e ciência aplicada (GROMOV, 1995).

Nós, matemáticos, precisamos utilizar múltiplos pontos de vista sobre um mesmo tema e, partir de diversificados aspectos, articular, sempre que possível, aritmética, álgebra e geometria, relacionando-as às práticas cotidianas.

Gostaríamos de finalizar este trabalho mencionando que, embora a temática abordada possua outros potenciais a serem explorados, a experiência de ensino pela qual passamos foi gratificante, uma vez que constatamos ser possível e viável elaborar materiais próprios e diferenciados que possibilitem a testagem de novas ideias e também de outras que nos acompanham profissionalmente há bastante tempo. Temos fortes indícios de que nossa proposta foi bem sucedida. Por exemplo, observamos que iniciar pela abordagem geométrica dos Números Complexos e priorizá-la foi uma escolha acertada, já que tal enfoque facilitou e motivou a aprendizagem dos alunos, uma vez que na turma havia alunos com bastante dificuldade de aprendizagem. Mesmo assim, todos os estudantes empenharam-se e conseguiram resolver as atividades propostas.

Ficamos muito satisfeitos com os conhecimentos e experiências adquiridos durante o período de desenvolvimento do mestrado e esperamos que a proposta didática aqui apresentada possa contribuir, de alguma forma, não apenas na formação de novos colegas, mas, sobretudo, no trabalho em sala de aula de professores de Matemática.

# 6 Referências


ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. **Números complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio**. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BRASIL. PCNEM - **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. Brasília: SEMT/ MEC. 1999.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244p.

CARNEIRO, José Paulo. **A geometria e o ensino dos números complexos**. In: Encontro em Educação Matemática, 8, 2004. Recife, Anais. SBEM. 2004.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos In**: Revista do Professor de Matemática**, n. 55. SBM, 3º quadrimestre de 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Desafios da Educação Matemática no novo milênio. **Educação Matemática em Revista**, nº 11, ano 8 (Dez.), p. 14 – 17, 2001.

DAMM, Regina. Registros de Representação. In: **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p.135-153.

DANTE, Luis Roberto, **Matemática.** São Paulo: Ática, 2005.

DINIZ, Maria Ignez e SMOLE, Kátia. **Matemática: Ensino Médio.** São Paulo, 2005.

DUVAL, Raymond. **Aprendizagens intelectuais**. Caderno do curso ministrado na PUC-SP, Fevereiro/1999.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine**. Registres semiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang. S.A. Suisse: Editions scientifiques européennes, 1995. p.1-14.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano. Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais**. Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e compreensão de conceitos geométricos in MACHADO, S. D. A. org, **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**, Campinas, (SP): Papirus Editora, pp 125-147, 2003

GARBI, Gilberto. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

IEZZI, Gelson. **Matemática- Volume Único**. São Paulo. Editora Atual, 2004.

MELLO, José Luiz. **Matemática, Construção e Significado**. São Paulo. Editora Moderna, 2005.

MONZON, Larissa. **Números Complexos e Funções de Variável Complexa no Ensino Médio – Uma Proposta Didática com Uso de Objeto de Aprendizagem**. 2012. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números Complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática 3.** São Paulo: Moderna, 1996.

RIBEIRO, Jackson. **Ciência, Linguagem e Tecnologias**. São Paulo. Editora Scipione, 2011.

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos: uma abordagem histórica para aquisição de conceitos**. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SANTAELLA, Lúcia. **O Que é Semiótica**. 9.a ed. São Paulo: Brasiliense, 1990.

SANTOS, Robson. **Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes**. 2011. 125 f. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

SÃO PAULO. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2008.

YOUSSEF, Antonio; FERNANDEZ, Vicente; SOARES, Elizabeth. **Matemática para o 2º Grau.** São Paulo: Scipione, 1998.

## APÊNDICE A – DOCUMENTOS

### Termo de autorização

Eu, Cláudia Rosana da Costa Caldeira, professora de Matemática do Instituto Federal Sul-rio-grandense do Campus Pelotas, solicito autorização para realizar a pesquisa “Números Complexos: uma proposta geométrica” na turma 2012-1 TRO - IN. Esta prática é parte da dissertação que está sob orientação da professora Luisa Rodríguez Doering – PPGEM/Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Para o desenvolvimento desta investigação as aulas serão ministradas no horário das aulas de Matemática.

Este trabalho será filmado e tem o objetivo acadêmico de analisar o processo ensino/aprendizagem dos Números Complexos, no ensino médio, priorizando a abordagem geométrica de tais conceitos e é parte integrante das avaliações da 2ª etapa do semestre tendo peso 5.

______________________________________

Professora Cláudia Rosana da Costa Caldeira

______________________________________

Maria da Graça Peraça

Coordenadora da Matemática

**Termo de Consentimento**

Eu, ___________________________________________________ , responsável pelo (a) aluno (a) ______________________________________________________, do curso de Eletrônica, Subsequente, noturno, declaro, por meio deste termo que o (a) aluno (a) participe de toda a pesquisa "Números Complexos: uma proposta geométrica" desenvolvida pela professora Cláudia Rosana da Costa Caldeira, que é a professora de Matemática da turma e efetiva do Instituto Federal Sul-rio-grandense, sob a orientação da professora Luisa Rodríguez Doering – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Para o desenvolvimento desta investigação as aulas serão ministradas no turno da noite, no horário das aulas de Matemática.

Este trabalho, previamente autorizado pelo IFSul, será filmado e fotografado, tem o objetivo acadêmico de analisar o processo ensino/aprendizagem dos Números Complexos. O estudo deste tema é parte integrante das avaliações da 2ª etapa do semestre tendo peso 5.

Professora Cláudia Rosana da Costa Caldeira __________________________________

Responsável pelo aluno ______________________________________________________

Pelotas, _____de ____________________de 2012.

## APÊNDICE B – PROPOSTA REVISADA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A seguir, apresentaremos, com algumas alterações em relação à proposta de origem, a nossa sequência didática com todas as atividades. Essa parte expositiva é dirigida aos professores de matemática, a fim de que estes, caso julguem conveniente, possam utilizá-la em sala de aula sem a necessidade de ler toda a dissertação. Acreditamos que isso facilitará o uso deste produto.

Primeiramente, com o objetivo de motivar os alunos quanto ao estudo dos Números Complexos, apresentamos a seguinte questão:

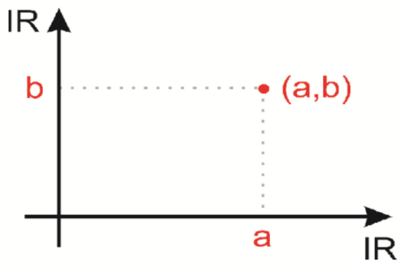
$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{-1\ \cdot\ -1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -\ 1.$$

Questionando o motivo pelo qual partimos de 1 e chegamos a $-1$, podemos introduzir e discutir, a partir das respostas dos alunos, os conceitos relativos à radiciação nos Números Complexos, salientando que existem dois números que, elevados ao quadrado, obtém-se $-1$, quais sejam, $i$ e $-i$.

No desenvolvimento do trabalho, optamos por apresentar inicialmente exemplos relativos aos conceitos estudados e, na sequência, generalizamos tais conceitos. A nossa experiência didática nos faz crer que essa metodologia facilita o aprendizado dos alunos. Durante a aplicação da proposta, observamos os questionamentos dos estudantes e percebemos que seriam necessárias algumas modificações na proposta inicial. Essas modificações foram fundamentadas em tais questionamentos e na análise do material com o desenvolvimento das atividades resolvidas pelos alunos. A seguir, apresentamos a nossa proposta reformulada.

### NÚMEROS COMPLEXOS

Introduzir o plano cartesiano considerando o conjunto $IR^2 = IR \times IR$, $= \{(a,b);\ a, b \in IR\}$, e identificando-o com este plano:




Definir a soma e a subtração de dois pontos (a, b) e (c, d) $\in$ $IR^2$, componente a componente, ou seja, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) e (a, b) − (c, d) = (a − c, b − d). Em seguida, propor a atividade que retoma a soma e a subtração de pares ordenados.

**ATIVIDADE 1:**

1) Efetue as operações com os seguintes pares ordenados:
   a) (0,2) + (4,0) =
   b) (5,0) − (−1,0) =
   c) (5,4) + (2, −3) =
   d) (−1,2) − (4, −3) =

**Fazer as seguintes observações:**

1) Se identificarmos (a, b) com o vetor *v* de origem (0,0) e extremidade (a, b) e, de maneira análoga, (c, d) com o vetor *u* de origem (0,0) e extremidade (c, d), podemos observar que a soma e a subtração definidas anteriormente são as mesmas soma e subtração de vetores, conforme já trabalhado na disciplina de Física.

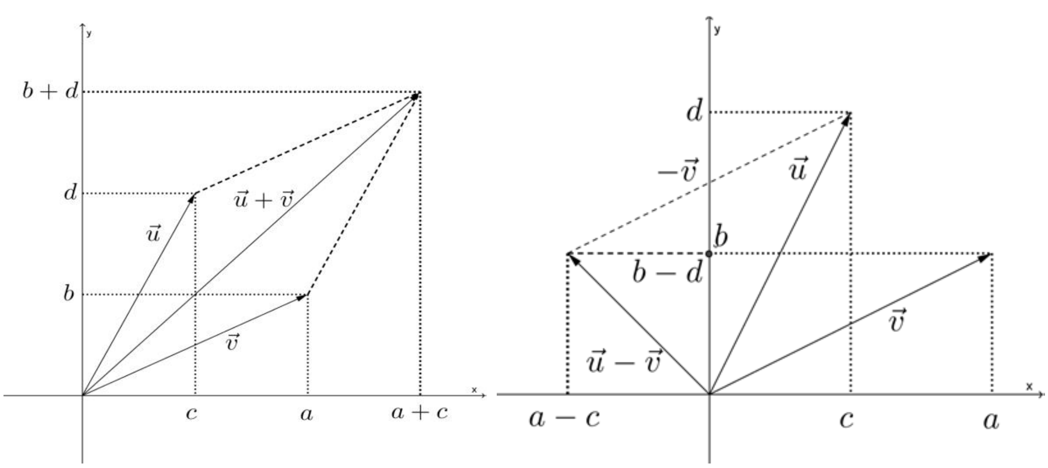
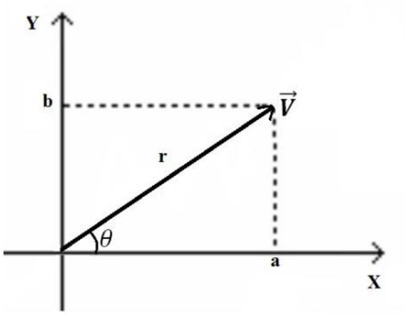



**Figura 27 – Soma e subtração de vetores**

2) Identificando a ∈ IR, com (a, 0) ∈ IR$^2$, ou seja, a ≡ (a, 0), temos (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) ≡ a + b e (a, 0) − (b, 0) = (a − b, 0) ≡ a − b. Desse modo, a soma e a subtração definidas nos pares ordenados são “as mesmas” soma e subtração de números reais.

Apresentar a representação polar observando que, a cada par ordenado (a, b) ∈ IR$^2$, podemos associar um comprimento *r* e um ângulo θ.




Onde θ é o ângulo formado pelo vetor *v*, de origem em (0,0) e extremidade no par ordenado (a, b), com o eixo *x*, e onde *r* é o comprimento (módulo) do vetor *v*.

Dado um ângulo θ e um comprimento *r*, definir, usando as relações trigonométricas, o par ordenado (a, b) por:

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Observar que o par ordenado (a, b) = ($r$cos θ, $r$senθ) possui comprimento *r* e forma o ângulo θ com o eixo *x*. Apresentar os seguintes exemplos:

1) (3,0) 2) (2,0)

3) (0,1) 4) (0, −4)

5) (1,1) 6) (−2,2)

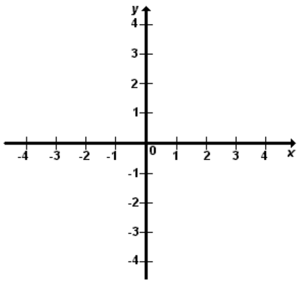
**Propor a atividade 2:**

Dado o par ordenado (a, b), podemos obter o valor de θ usando a identidade $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Como podemos calcular o comprimento *r*? ______________________________

Analisar o que acontece com o sinal da tangente em cada quadrante, já que θ ∈ [0, 2π].

**1° caso**: Se θ ∈ [0, π/2] = [0°,90º]

Exemplo: $r = 1$ e $\theta = 45°$



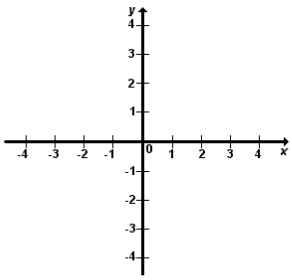

Em seguida, perguntar:

Qual é o sinal da tan θ? ______________

Qual é o ponto correspondente? _____________________

**2° caso**: Se θ ∈ [π/2, π] = [90°, 180º]

Exemplo: $r = 3$ e $\theta = 135°$



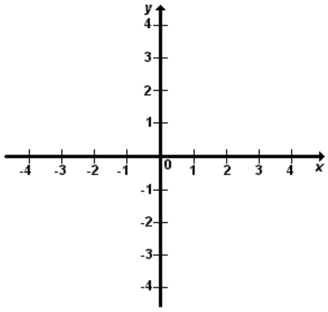

Logo após, perguntar:

Qual é o sinal da tan θ? _________________

Qual é o ponto correspondente? ____________________

**3° caso**: Se θ ∈ [π, 3π/2] = [180°, 270°]

Exemplo*:* $r = 2$ e $\theta = 225°$



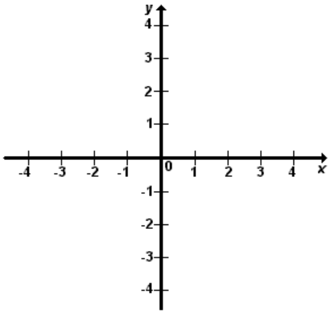

Logo após, perguntar:

Qual é o sinal da tan θ? ___________________

Qual é o ponto correspondente? _____________________

**4º caso**: Se $\theta \in [3\pi/2, 2\pi] = [270°, 360°]$

Exemplo: $r = 4$ e $\theta = 315°$




Em seguida, perguntar:

Qual é o sinal da tan θ? __________________

Qual é o ponto correspondente? ________________________

**Propor a atividade 3 que apresenta os seguintes questionamentos:**

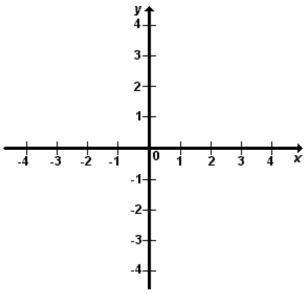
1) É necessário que se tenham ambos *r* e θ para obtermos um único par ordenado correspondente? (   ) Sim   (   ) Não
2) Por exemplo: Quantos pontos em todo plano, ou seja, nos quatro quadrantes, possuem comprimento 2? ____________________________________________________________
3) Qual a característica destes pontos? Será que eles representam uma figura conhecida?
4) Qual é essa figura? __________________________________________________________
5) Quantos pontos do plano têm θ = 30°? E se soubermos apenas o ângulo θ, por exemplo? ___________________________________________________________________
6) Será que esses pontos representam uma figura conhecida? Qual é essa figura? ___________________________________________________________________________

Após discutir as respostas dadas pelos alunos, salientar que existe uma relação tal que (r, θ) ↔ (a, b), em que *r* e θ são chamadas coordenadas polares de (a, b). Também evidenciar que, **para cada (*r*, θ), temos um único (a, b) correspondente, da mesma forma que, para cada (a, b), temos um único (*r*, θ) correspondente**.

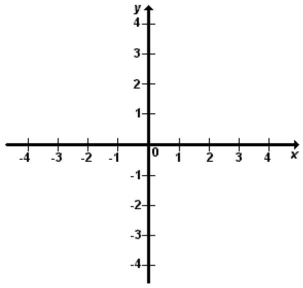
**Propor a atividade 4:**

Represente, no plano, os pares ordenados a seguir e escreva-os na forma polar.

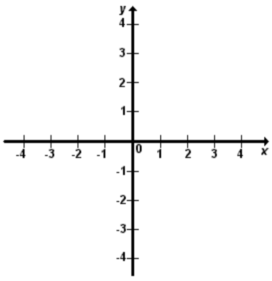
1) (4, 0)



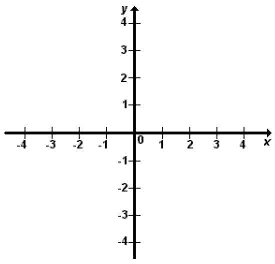

2) (5, 0)



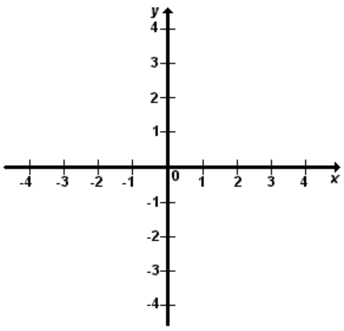

3) (0, 2)



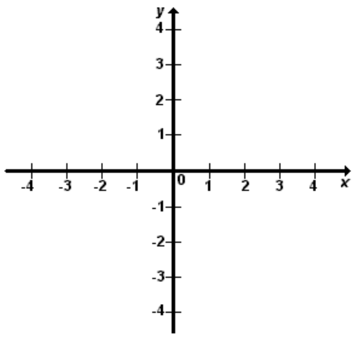

4) (0, −3)




5) (2,2)




6) (−1,1)




Assim como fizemos para a soma e, com o auxílio dos alunos, definir um produto em $IR^2$ que seja compatível com o produto em IR, ou seja, (a, 0) · (c, 0) = (ac, 0). Primeiramente, observar que $a \in IR^+$, (a, 0) = (a·cos 0, a· sen 0), ou seja, (a, 0) tem comprimento a > 0 e forma um ângulo de 0 (0°) ou 2π (360°) com o eixo *x*.

Perguntar: Como podemos escrever (5,0)? ________________________________

Na sequência, apresentar o seguinte questionamento aos alunos:

Se $a \in IR^-$, então, $(a, 0) = (|a|\cdot\cos \pi, \ |a|\cdot \operatorname{sen} \pi)$, ou seja, (a,0) possui comprimento $|a| > 0$ e forma um ângulo de $\pi$ (180°) com o eixo *x*. Logo:

$(-3,0) = (|-3|\cdot\cos \pi, |-3|\cdot\operatorname{sen} \pi) =$ ________________________________________________

Propor as seguintes análises:

**1º caso –** Discutir o exemplo:

$$(3,0) \cdot (2,0) = (3\cos 0, 3\operatorname{sen} 0)\cdot (2\cos 0, 2\operatorname{sen} 0) = (6\cos 0, 6\operatorname{sen} 0) = (6,0)$$

Perguntar: 1) Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante? ___________

2) Qual é o ângulo desse produto? ________________________________________

Após discutir as respostas dos alunos, apresentar a generalização da ideia da seguinte forma: Se $a > 0$ e $c > 0$, então, $a \cdot c > 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos: $a \cdot c \equiv (ac,0) = (ac \cdot \cos 0, \ ac \cdot \operatorname{sen} 0)$. Assim, desejamos que a multiplicação satisfaça:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (a\cdot\cos 0, \ a\cdot \operatorname{sen} 0) \cdot (c\cdot\cos 0, \ c \cdot \operatorname{sen} 0) = (ac \cos 0, \ ac \operatorname{sen} 0).$$

**2º caso –** Discutir o exemplo:

$$(3, 0) \cdot (-4,0) = (3\cos 0, 3\operatorname{sen} 0)\cdot(4\cos\pi, 4 \operatorname{sen}\pi) = (12\cos\pi, 12\operatorname{sen}\pi) = (-12,0)$$

Propor os seguintes questionamentos:

1) Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante? Como podemos relacionar o módulo do produto resultante com os módulos de cada um dos fatores?

2) Qual é o ângulo desse produto? Qual é a relação entre os ângulos de cada um dos fatores e o ângulo do produto resultante?

Após a resolução dessas atividades, discutir as respostas dos alunos e apresentar a generalização da ideia da seguinte forma:

Se $a > 0$ e $c < 0$, então, $a\cdot c < 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos:

$$a \cdot c \equiv (ac,0) = (|ac| \cdot \cos \pi, \ |ac| \cdot \operatorname{sen} \pi).$$

Desejamos que a multiplicação satisfaça:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (a\cdot\cos 0, \ a\cdot\operatorname{sen} 0)\cdot(|c|\cos \pi, \ |c| \operatorname{sen} \pi) = (|ac|\cos \pi, \ |ac|.\operatorname{sen} \pi).$$

Observar que, nesse caso, $|ac| = a\cdot |c|$, já que $a > 0$.

**3º caso** – Discutir o exemplo:

$$(-4, 0) \cdot (-2, 0) = (4\cos\pi, 4\text{sen}\pi)\cdot(2\cos\pi, 2\text{sen}\pi) = (8\cos 0, 8\text{sen } 0) = (8,0)$$

Propor aos estudantes estas questões:

1) Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante?

2) Qual é o ângulo desse produto? Qual é a relação entre os ângulos de cada um dos fatores e o ângulo do produto resultante?

Após discutir as respostas dos alunos, apresentar a generalização da ideia da seguinte forma: Se $a < 0$ e $c < 0$, então, $a\cdot c > 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos:

$$a \cdot c \equiv (ac,0) = (ac \cdot \cos 0,\ ac \cdot \text{sen } 0).$$

Desejamos que a multiplicação satisfaça:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (|a|\cos \pi,\ |a|\text{sen } \pi).(|c|\cos \pi,\ |c|\text{sen } \pi) = (|a||c|\cos 2\pi,\ |a||c|\text{sen } 2\pi) =$$

$$(|ac|\cos 0, |ac|\text{sen } 0) = (ac\cdot\cos 0, ac\cdot\text{sen } 0).$$ Observar que, nesse caso, $|ac| = |a| \cdot |c|$.

**4º caso** – Discutir o exemplo:

$$(-3, 0) \cdot (2, 0) = (3\cos\pi, 3\text{sen}\pi)\cdot (2\cos 0, 2\text{sen } 0) = (6\cos\pi, 6\text{sen}\pi) = (-6,0)$$

Propor os seguintes questionamentos:

1) Qual é o módulo ou comprimento do produto resultante?

2) Qual é o ângulo desse produto? Qual é a relação entre os ângulos de cada um dos fatores e o ângulo do produto resultante?

Em seguida, discutir as respostas dos alunos e apresentar a generalização da ideia da seguinte forma:

Se $a < 0$ e $c > 0$, então, $a\cdot c < 0$ e, em termos de pares ordenados, teremos:

$$a \cdot c \equiv (ac,0) = (ac \cdot \cos 0,\ ac \cdot \text{sen } 0).$$

Desejamos que a multiplicação satisfaça:

$(a, 0) \cdot (c, 0) = (|a|\cdot\cos \pi,\ |a|\cdot\text{sen } \pi).(c\cdot\cos 0,\ c\cdot \text{sen } 0) = (|a|c\cdot\cos \pi,\ |a|c\cdot\text{sen } \pi) = (|ac|\cos \pi, |ac|\text{sen } \pi)$. Observar que, nesse caso, $|ac| = |a|\ c$.

Após, analisar os quatro casos possíveis e construir, juntamente com os alunos, um resumo das ideias discutidas:

- O comprimento de $(a, 0) \cdot (c,0)$ é o produto dos comprimentos de $(a, 0)$ por $(c, 0)$.
- O ângulo de $(a, 0) \cdot (c, 0)$ é a soma do ângulo de $(a, 0)$ com o ângulo de $(c, 0)$.

A seguir, definir o produto de 2 pares (pontos) quaisquer, usando as propriedades acima, da seguinte forma:

Dados os pares ordenados (a, b) = ($r_1$cos $\theta_1$, $r_1$sen $\theta_1$) e (c,d) = ($r_2$cos $\theta_2$, $r_2$sen $\theta_2$)

Definimos: (a, b) · (c, d) = [$r_1r_2$cos($\theta_1$+ $\theta_2$), $r_1r_2$sen($\theta_1$+ $\theta_2$)].

**Propor a atividade 5**

1) Determine os seguintes produtos:

a) (2cos40°, 2 sen40°) · (3cos20°, 3sen20°) =

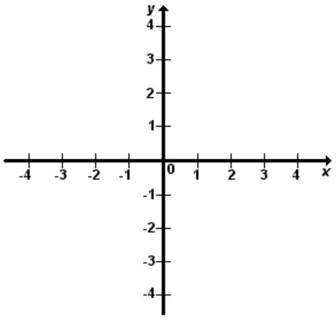
b) (2cos90°, 2sen90°) · (4cos30°, 4sen30°) =

c) (4cos40°, 4sen40°) · (3cos90°, 3sen90°) =

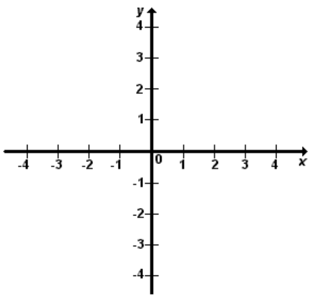
d) (5cos90°, 5sen90°) · (3cos90°, 3sen90°) =

2) Represente geometricamente, no mesmo plano cartesiano, os pontos A, B e A· B:

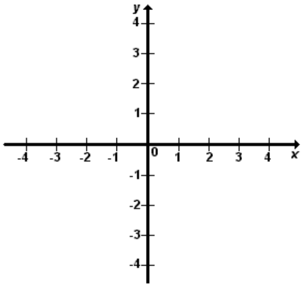
a) A (3,0) e B (−1,0)



b) A (−3,0) e B (−1,0)



c) A (−1,0) e B (−1,0)



Propor o questionamento: O que representa, geometricamente, a multiplicação de (a, 0) por $(-1,0)$? Em seguida, discutir as respostas dos alunos e, após, apresentar a ideia formalizada.

Se identificar a $\in$ IR com (a, 0), então, $(a, 0) \cdot (-1,0) = (a\cos 0, a\,\mathrm{sen}0)\cdot(1\cos \pi, 1\mathrm{sen}\ \pi) = (a\cos \pi, a\,\mathrm{sen}\ \pi) = (-a,0)$. Logo, $(-1,0) \equiv -1$ nos permite deduzir que, multiplicar por $(-1)$, é como tomar o número e fazer uma rotação de $\pi$ radianos (180°) no sentido anti-horário.

Para motivar os alunos, apresentar o seguinte questionamento: Se os pontos são dados na representação polar, então, o produto é calculado pela definição anterior. Se os pontos são dados na forma cartesiana, devemos transformá-los para a forma polar, a fim de efetuar o produto.

Questioná-los: Será que isso é feito de forma rápida para qualquer ponto? Por exemplo, para transformar (2,3) para forma polar, precisamos calcular $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

O valor de $\theta$ não é conhecido sem o auxílio de uma calculadora ou tabela, já que $\theta \cong 56°$. Então, propor aos alunos que procurem um modo de multiplicar os pontos na forma cartesiana. Apresentar, como sugestão, o uso das regras da trigonometria da seguinte forma:

Dados os pares ordenados $(a, b) = (r_1\cos\theta_1, r_1\mathrm{sen}\ \theta_1)$ e $(c, d) = (r_2\cos\theta_2, r_2\mathrm{sen}\ \theta_2)$, procurar *e*, *f* $\in$ IR, tal que $(a, b). (c, d) = (e, f) = [r_1r_2\cos(\theta_1+ \theta_2), r_1r_2\mathrm{sen}(\theta_1+ \theta_2)]$.

Salientar que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \mathrm{sen}\ \alpha \cdot \mathrm{sen}\ \beta$. Logo:

$$e = r_1r_2\cos(\theta_1+ \theta_2)= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\ \theta_1\mathrm{sen}\ \theta_2)$$

$$e = (r_1\cos\theta_1)(r_2\cos\theta_2) - (r_1\mathrm{sen}\ \theta_1)(r_2\mathrm{sen}\ \theta_2) = ac - bd.$$

Usando a fórmula do seno da soma: $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta + \mathrm{sen}\ \beta \cdot \cos\alpha$, propor que os alunos obtenham $f = r_1r_2\mathrm{sen}(\theta_1+ \theta_2)$.

Para finalizar, formalizar o produto dos pares ordenados (a, b) e (c, d) desta forma: $(a,b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Apresentar a tarefa: Calcule $(3,2) \cdot (4, -1) = [3\cdot4 -2\cdot (-1), 2\cdot 4 +3\cdot (-1)] = (14,5)$ e, após a resolução dessa atividade, propor o exercício a seguir.

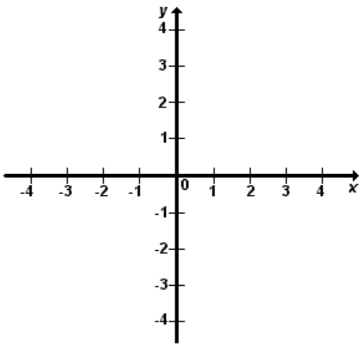
Efetue a multiplicação dos seguintes pares ordenados:

a) $(2,5) \cdot (3,1) =$
b) $(4,2) \cdot (3, -1) =$
c) $(3,2) \cdot (-4,1) =$
d) $(4,1) \cdot (-3, -2) =$

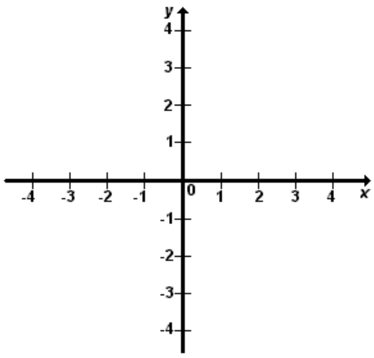
**Propor a atividade 6**

1) Represente geometricamente, no mesmo plano cartesiano, os pontos A, B e A · B:

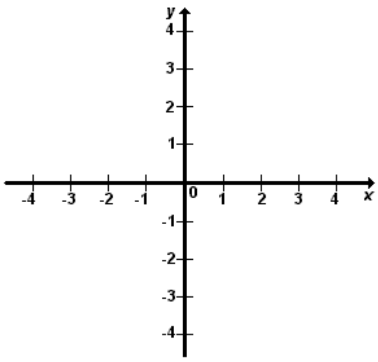
a) A (3,0) e B (0,1)



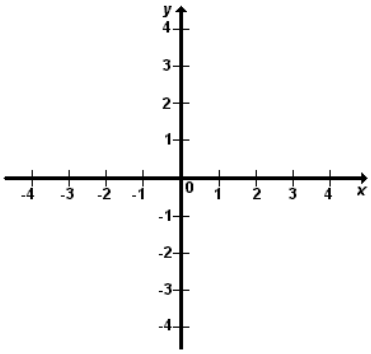
b) A (−3,0) e B (0,1)



c) A (0,1) e B (0,1)



d) A $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e B (0,1)



2) Qual é o ângulo da representação polar de (3,0)?

3) Qual é o ângulo da representação polar do produto de (3,0) por (0,1)?

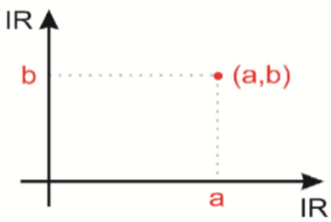
4) Qual é o ângulo da representação polar de (−3,0)?

5) Qual é o ângulo da representação polar do produto de (−3,0) por (0,1)?

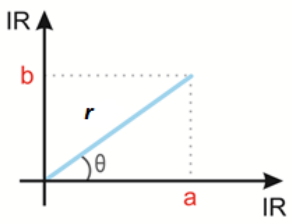
Sugerimos que o professor questione e, juntamente com os alunos, chegue a esta conclusão: Quando multiplicamos um número real, ou seja, um par ordenado da forma (a, 0) por (0,1), obtemos (0, a). Isso significa que o par ordenado (a, 0) fez uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Salientar que o par ordenado (0,1) possui propriedades muito importantes e, por isso, receberá uma notação especial. Tal par será chamado de *i*, ou seja, (0,1) = *i*. Salientar que o exercício 1C da atividade 6 demonstra que, nessa notação, $i^2 = i \cdot i = -1$.

Solicitar que os alunos produzam um resumo com as representações dos Números Complexos estudados até o momento. Com base nesses resumos, elaborar uma síntese para a turma semelhante à que apresentamos a seguir:

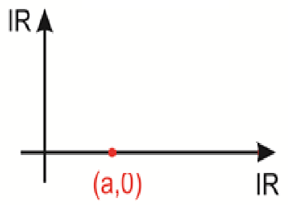
$IR^2 = \{(a, b); a,b \in IR\}$



$$(a, b) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\,\theta)$$




Identificamos o número real “a” com o par ordenado (a, 0), ou seja:




Definição de uma soma e de um produto compatível com os números reais IR. Essa soma e esse produto são, respectivamente:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ e } (a, b) \cdot (c, d) = (ac – bd, ad + bc).$$

Utilizando as propriedades dessa soma e multiplicação, temos:

$$(a, 0) \cdot (1,0) = (a\cdot 1 - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot 1) = (a, 0).$$

Como identificamos (a, 0), com *a* podemos escrever $(a, 0) \cdot (1,0) = a \cdot (1,0)$ e, da mesma maneira, $(b, 0) \cdot (0,1) = (b\cdot 0 – 0\cdot 1, b\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0,b) = b \cdot (0,1)$. Assim, escrevemos $(a, b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$.

Como já tínhamos denominado o par ordenado (0,1) por *i*, temos:

$$(a, b) = a\,(1,0) + b\,(0,1) = a.1 + b\cdot i = a + bi.$$

Denominar $z = a + bi$ como a forma algébrica de um número complexo, em que “a” é a parte real e “b” é a parte imaginária.

Salientar que o número $i = (0,1)$ tem a seguinte propriedade: $i^2 = -1$, ou seja, *i* é uma das raízes de $x^2 = -1$. Perguntar, em seguida, qual é a outra raiz.

## OPERANDO COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA ALGÉBRICA

Apresentar um exemplo de cada uma das operações e, posteriormente, generalizá-las.

1º. Exemplo: $(3 – 2i) + (–5 +3i) =$

Generalizando, obtemos: $(a + bi) + (c + di) =$ ____________________________________

Questionar como seria na subtração.

2º. Exemplo: $(4 - 3i) - (-2 + 6i) =$

Generalizando, obtemos: $(a + bi) - (c + di) =$ ___________________________________

3º. Exemplo: $(3 - 7i) \cdot (-2 + 4i) =$

Questionar como seria a multiplicação $(a + bi) \cdot (c + di)$ ______________________________

**Propor a atividade 7**:

Efetue:

1) $(2 - 3i) + (-3 + 5i) - (-2 + 7i) =$

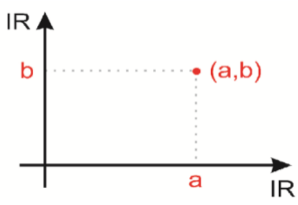
2) $(-1 + 2i) - (4 - i) + (-8 - 3i) =$

3) $(4 - 5i) \cdot (-3 + 6i) =$

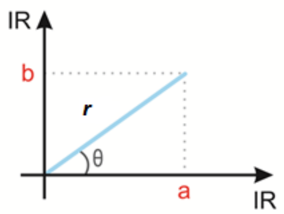
4) $(-6 - 2i) \cdot (-5 + 6i) =$

Em conjunto, elaborar um resumo das formas de representações dos Números Complexos. O nosso é o apresentado a seguir:

Na forma cartesiana:




Na forma polar: $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$, ou seja, $z = (r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta)$ ou $z = (r, \theta)$.




Na forma algébrica, $z = a + bi$.

Salientar que ainda há outra maneira de representação, a qual é denominada de forma trigonométrica, podendo ser obtida a partir das formas algébrica e polar:

$$z = a + bi$$

$$z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r\,(\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Assim, o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi;\ a, b \in IR \text{ e } i = (0,1)\}$ é chamado de conjunto dos Números Complexos. Observar que o conjunto $\mathbb{C}$ herda de IR propriedades importantes, mas, muito mais do que isso, possui uma propriedade que IR não possui, a saber, "Todo polinômio não nulo possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$." Salientar que esse fato é muito importante e que recebe o nome de Teorema Fundamental da Álgebra. Por exemplo, $x^2 + 1 = 0$ não possui raízes em IR, mas, em $\mathbb{C}$, possui duas raízes, a saber, $i$ e $-i$, já que $(i)^2 = -1$, e $(-i)^2 = -1$.

**Propor a atividade 8:**

Calcule as potências de $i$ e apresente suas representações geométricas:

*a)* $i^0 = 1$

b) $i^1 = i$

c) $i^2 = -1$

d) $i^3 = i^2 . i = (-1)(i) = -i$

*e)* $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

f) $i^5 = i^4 \cdot i = (1) \cdot (i) = i$

*g)* $i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$

h) $i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot (i) = -i$

Após a resolução dessa atividade, propor a seguinte questão: Cada vez que multiplicamos o par ordenado por *i,* estamos girando _____ no sentido anti-horário. Assim, a cada quatro rotações de _____, estamos girando _____. O que isso significa geometricamente? ________________________________________________________.

**Propor a atividade 9:**

Calcule as potências de $i$:

1) $i^{30}$
2) $i^{28}$
3) $i^{45}$
4) $i^{83}$

**O INVERSO DE UM COMPLEXO z ( $z^{-1}$)**

Questionar se z $\in \mathbb{C}$ e z $\neq$ 0. Em seguida, perguntar como podemos calcular o inverso de z, ou seja, $\frac{1}{z}$ . Após as respostas dos alunos, formalizar o conceito de inverso desta forma: Sendo z = a + b$i$, com a e b $\in$ IR, não simultaneamente nulos, procuramos z' = c + d$i$ com c e d $\in$ IR, tal que z · z' = 1, usando a notação z' = $z^{-1}$.

Perguntar qual seria o inverso de $i$, ou seja, quem é $i^{-1}$. Levá-los a, intuitivamente, concluir que o inverso de $i$ é $-i$, pois já sabemos que $i \cdot (-i) = -i^2 = 1$.

Pela definição de inverso, procurar z = (c + d$i$), tal que (c + d$i$) ( $i$) = 1.

$$ci + di^2 = 1 + 0i$$

$$-d + ci = 1 + 0i$$

Logo, d = −1 e c = 0.

Concluir que $i^{-1}$ é igual a $-i$, ou seja, o inverso de $i$ é $z^{-1} = 0 - 1i = -i$. De fato, $(i)\ (-i) = -\ i^2 = -\ (-1) = 1$. Em seguida, propor este exercício e resolvê-lo junto com os alunos: Dado z = 2 + 3$i$, determinar $z^{-1}$.

Encontrar c e d $\in$ IR, tal que c + d$i$ seja o inverso de z, ou seja, $z^{-1}$ = c + d$i$ . Como z · $z^{-1}$ = 1, temos:

$$(2 + 3i).(c + di) = 1$$

$$2c + 2di + 3ci + 3di^2 = 1$$

$$(2c - 3d) + (3c + 2d)i = 1$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} 2c - 3d = 1\ .(2) \\ 3c + 2d = 0\ .(3) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4c - 6d = 2\ \ (A) \\ 9c + 6d = 0\ (B) \end{cases}$$

Somando-se as equações (A) e (B), temos 13c = 2, logo, $c = \frac{2}{13}$ . Substituindo $c = \frac{2}{13}$ na equação $3c + 2d = 0$, obtemos $d = -\ \frac{3}{13}$.

Portanto, $z' = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i = \frac{1}{13} \cdot (2 - 3i)$. Observar que 13 é o quadrado do módulo de $z$ e que $2 - 3i$ é denominado o conjugado de $z$, ou seja, $z$ trocando a parte imaginária de sinal.

**Apresentar a generalização:**

Seja z = a + b$i$, com a e b $\in$ IR, procure c e d $\in$ IR, tal que c + d$i$ seja o inverso de z, ou seja, $z^{-1} = c + di$ . Como $z \cdot z^{-1} = 1$, temos:

$$(a + bi)( c + di) = 1+ 0i$$

$$ac + adi + bci + bdi^2 = 1 + 0i$$

$$(ac - bd) + ( bc + ad)\, i = 1 + 0i$$

Logo, podemos concluir que $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$. Como z $\neq$ 0, então, a e b não são simultaneamente nulos. Supondo a $\neq$ 0, podemos multiplicar a equação $ac - bd = 1$ por (a), obtendo: $a^2c - abd = a$ (I).

Se isolarmos ad na equação $bc + ad = 0$, obtemos ad = menos bc (II). Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$a^2c - b(-bc) = a$$

$$(a^2 + b^2)c = a$$

$$\text{isolando } c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Substituindo $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ na equação $bc + ad = 0$ , obtemos:

$$b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} + ad = 0$$

$$d = -\frac{ba}{a(a^2 + b^2)}$$

$$\text{logo } d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Em seguida, concluir que o inverso de z = a + b$i$ é:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a - bi)$$

Após, salientar que, sendo o comprimento de z = $\sqrt{a^2 + b^2}$, então, $\frac{1}{a^2+b^2}$ é o quadrado do inverso do comprimento de $z$. Chamamos a – b$i$ de conjugado de $z$ e o representamos por $\bar{z}$.

Ao definir o conjugado de um Número Complexo, apresentamos as suas representações geométricas, respectivamente, na forma polar e na forma cartesiana, conforme a Figura 28:

Forma Polar Forma Cartesiana

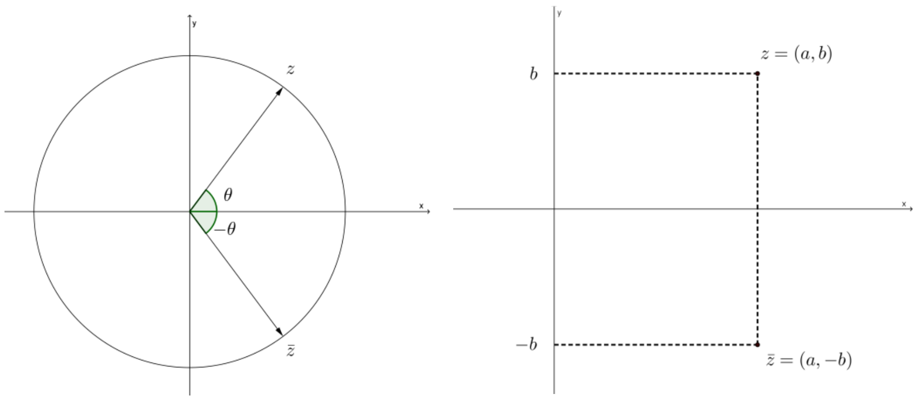



**Figura 28 – Formas polar e cartesiana de z e $\bar{z}$.**

Como sabemos que z’ $= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a - bi)$, também podemos calcular o inverso de z = 2 + 3$i$ desta forma:

$$z' = \frac{2}{2^2+3^2} - \frac{3}{2^2+3^2}i = \frac{1}{2^2+3^2} \cdot (2 - 3i)$$

$$z' = \frac{1}{13} \cdot (2 - 3i)$$

$$z' = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\, i$$

**Propor a atividade 10**:

Calcule o inverso dos complexos a seguir:

1) z = −3 + 5$i$

2) z = − 1 + 2$i$

3) z = 5 – $i$

**Divisão de Números Complexos**

Definir a divisão de dois números complexos $z$ e $w$ ($w \neq 0$ ) como a multiplicação de $z$ pelo inverso de $w$, ou seja, $\frac{z}{w} = z \cdot w'$, em que $w'$ é o inverso de $w$. Propor, logo após, a seguinte atividade:

Divida os números complexos a seguir:

a) $z = 2 - 5i$ e $w = 4 + 3i$

b) $z = 3i$ e $w = 6 - 4i$

c) $z = 5$ e $w = 3i$

Propor este questionamento aos alunos: Na operação de divisão entre $v = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $w = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, na forma trigonométrica, o que acontece com os comprimentos $r_1$ e $r_2$ e com os ângulos $\theta_1$ e $\theta_2$? Dadas as respostas, discuti-las e, em seguida, apresentar o exemplo $z = 4(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)$ e $w = 3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$, propondo que os alunos formalizem a divisão de Números Complexos na forma trigonométrica.

**Potenciação nos Números Complexos**

Apresentar, na forma trigonométrica, a potenciação como a multiplicação de fatores repetidos de um Número Complexo. Relembrar que o produto de dois números complexos na forma trigonométrica, sendo $v = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $w = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, é obtido multiplicando o comprimento de *v* pelo comprimento de *w* e somando o ângulo de *v* com o ângulo de *w*. Então, $v \cdot w = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.

Assim, tomando $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, obtemos:

$$z^2 = z \cdot z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$z^2 = \rho \cdot \rho\, [\cos(\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(\theta+\theta)] =$$

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)$$

e

$$z^3 = z^2 . z = \rho^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta).$$

Seja $z^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, então:

$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdot .... \cdot z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$\rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot .... \cdot \rho \cdot [\cos(\theta + \theta + \theta + ....+ \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta + \theta + ....+ \theta)], \text{ ou seja:}$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Salientar que essa fórmula é denominada fórmula de De Moivre. Apresentar a seguinte aplicação: Dado o número complexo z = $-1-\sqrt{3}\,i$, determine $z^{50}$ nas formas algébrica e trigonométrica.

O número complexo z = $-1-\sqrt{3}\,i$ está apresentado na forma algébrica, mas, para calcular a potência $z^{50}$, é conveniente transformá-lo para forma trigonométrica, pois o expoente é 50, o que indica que teríamos 50 fatores $-1-\sqrt{3}\,i$ para multiplicarmos. Esse fato torna inviável o cálculo dessa potência na forma algébrica, mas não impede que a resposta seja apresentada nas formas algébrica e trigonométrica, como veremos a seguir:

z = ρ (cos θ + *i*sen θ). Para tal, calcular ρ $e$ θ:

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{(-\sqrt{3})}{-1} = \sqrt{3}\text{, então, } \theta = 240°.$$

Logo, z = $-1-\sqrt{3}\,i$ = 2(cos240° + $i$ sen 240°). Aplicando a fórmula de De Moivre, obtemos:

$$z^{50} = 2^{50}[\cos(50 \cdot 240°) + i \operatorname{sen}(50 \cdot 240°)]$$

$$z^{50} = 2^{50}[\cos(12000°) + i \operatorname{sen}(12000°)]$$

$$z^{50} = 2^{50}[\cos(120°) + i \operatorname{sen} 120°]\text{, na forma trigonométrica, e}$$

$$z^{50} = 2^{50}\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right]\text{ na forma algébrica.}$$

**Radiciação nos Números Complexos**

Sugerimos apresentar as raízes enésimas de um Número Complexo da seguinte forma: Dado w ∈ ℂ, dizemos que z ∈ ℂ é uma raiz *n*-ésima de w, se $z^n = w$. Dizemos, também, que obter as raízes *n*-ésimas algebricamente pode ser muito trabalhoso, quando n ≥ 3, pois temos de resolver um sistema com três ou mais equações. Nessas situações, é mais conveniente trabalhar na forma trigonométrica. Propor o exemplo a seguir, em que n = 2.

Exemplo: Obtenha as raízes quadradas de z = 16$i$ utilizando a forma algébrica. Fazendo w = a + b$i$, obtemos a equação: (a + b$i$)$^2$ = a$^2$ +2ab$i$ –b$^2$ = 0 + 16$i$. Então, aplicando a igualdade entre complexos, temos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \rightarrow a^2 = b^2 \\ 2ab = 16 \rightarrow ab = 8 \end{cases}$$

Como a $\neq 0$ $temos$:

$$b = \frac{8}{a}$$

$$a^2 = \frac{8^2}{b^2}$$

$$a^2 = \frac{8^2}{a^2} \leftrightarrow a^4 = 8^2, \text{ então,}$$

$$a = 2\sqrt{2} \text{ e } b = 2\sqrt{2}, \text{ou } a = -2\sqrt{2} \text{ e } b = -2\sqrt{2}.$$

Logo, temos $w_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ e $w_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$ como soluções do sistema, que são as raízes quadradas de z = 16$i$.

Na forma trigonométrica, quando elevamos um Número Complexo a uma determinada potência, o ângulo fica multiplicado por esta potência, e o comprimento fica elevado a essa mesma potência. Perguntar: O que acontece, então, com o ângulo e com o comprimento de um Número Complexo quando se extrai uma determinada raiz? Discutir as respostas dos alunos e propor este outro questionamento: Quais são os números complexos que satisfazem $z^2 = -4$?

A resposta, em geral, é z = 2$i$ e z = $-$ 2$i$. Analisar como é possível obter esse resultado utilizando a forma trigonométrica dos Números Complexos.

Primeiro, escrever $-$ 4 na forma trigonométrica: $-$ 4 = $-$ 4 + 0i =4$(-1 + 0i)$ = 4(cos $\pi$ + $i$ sen $\pi$). Como z = $r$ (cos θ + $i$ sen θ), pela regra do produto, $z^2 = r^2$(cos 2θ + $i$ sen 2θ). Igualando $z^2 = r^2$(cos 2θ + $i$sen 2θ) = 4(cos $\pi$ + $i$ sen $\pi$), inicialmente, $r^2 = 4$ e 2θ = $\pi + 2k\pi$.

Assim, r = 2 e θ = $\frac{\pi}{2}$. Porém, se tomarmos $r$ = 2 e θ = $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$, obtemos:

$$\cos 2\theta = \cos 3\pi = \cos \pi = -1$$

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } 3\pi = \text{sen } \pi = 0$$

Nesse ponto, vemos que sempre podemos somar $2\pi$ ao argumento do seno e do cosseno. Assim, a solução geral é $r$ = 2 e $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Quando:

k = 0, temos: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{\pi}{2}) = 2(0 + i) = 2i$.

k = 1, temos: $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i$.

k = 2, temos: $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{2}) = 2(0 + i) = 2i$.

k = 3, temos: $z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i$.

k = 4, temos: $z_4 = 2(\cos\frac{9\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{9\pi}{2}) = 2(0 + i) = 2i$.

Constatamos que, para k ≥ 2, $z_k$ é igual a $z_0$ ou a $z_1$ e, portanto, essas são as duas únicas raízes de $z = -4$. Note-se que o ângulo inicial era 180° e foi dividido por 2. O módulo era 4 e agora é 2. Perguntar aos estudantes se essa ideia pode ser generalizada.

Apresentar este exemplo com raízes cúbicas: Determinar todos os números complexos $z \in \mathbb{C}$, tais que $z^3 = 8$.

Primeiramente, escrever 8 na forma trigonométrica: $8 = 8 + 0i = 8(1 + 0i) = 8(\cos 0\pi + i\, sen\, 0\pi)$. Como $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, pela regra do produto, $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta)$. Igualando $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 8(\cos 0\pi + i\, sen\, 0\pi)$, inicialmente, $r^3 = 8$ e $3\theta = 0\pi + 2k\pi$. Assim, r = 2 e $\theta = \frac{2k\pi}{3}$.

Quando temos:

k = 0, temos: $z_0 = 2(\cos 0 + i \text{ sen } 0) = 2(1 + 0i) = 2$

k = 1, temos: $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = -1 + i \cdot \sqrt{3}$

k = 2, temos: $z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = -1 - i \cdot \sqrt{3}$

k = 3, temos: $z_3 = 2(\cos 2\pi + i \text{ sem } 2\pi) = 2(1 + 0i) = 2$

k = 4, temos: $z_4 = 2(\cos\frac{8\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{8\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = -1 + i \cdot \sqrt{3}$

k = 5, temos: $z_5 = 2(\cos\frac{10\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{10\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = -1 - i \cdot \sqrt{3}$

Constatamos que, para k ≥ 3, $z_k$ é igual a $z_0$, $z_1$ ou $z_2$ . Portanto, essas são as três únicas raízes de z = 8. Assim, vemos que as raízes se repetem apenas com a diferença de múltiplos inteiros de $2\pi$, ou seja, com a diferença no número de voltas. Podemos concluir que o ângulo inicial foi dividido por 3 e que, para obter o comprimento final, extraiu-se a raiz cúbica do comprimento inicial. Generalizamos essa ideia a seguir.

Para calcular as raízes *n*-ésimas de um Número Complexo, na forma trigonométrica, apresentamos o seguinte: Dado $w \in \mathbb{C}$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz *n*-ésima de w se $z^n =$

w. Se w = 0, aplicando os módulos de ambos os lados da equação, obtemos: $|r^n| = |r|^n = 0$, em que $r = 0$, isto é, z = 0, ou seja, a única raiz *n*-ésima de 0 é o próprio 0.

Se w ≠ 0, escrevemos: w = *s*(cos φ + *i* sen φ), em que s = $|w|$ > 0 e φ é o ângulo de w, ou φ = arg w. Queremos determinar as raízes *n*-ésimas de w também escritas em notação trigonométricas da forma, ou seja, z = *r*(cos θ + *i* sen θ), com r = $|z|$ e θ = arg z. Por definição, $z^n = w$, pela fórmula de De Moivre, obtemos:

$$z^n = r^n\,[\cos(n\theta) + i \text{ sen } (n\theta)] = w = s(\cos\varphi + i \text{ sen}\varphi).$$

$$z^n = s(\cos\varphi + i \text{ sen}\varphi)$$

Assim,

$$r^n\,[\cos(n\theta) + i \text{ sen } (n\theta)] = s(\cos\varphi + i \text{ sen}\varphi)$$

$$z^n = w$$

Como o módulo dos dois números são iguais, temos que $s = r^n$, de onde obtemos que $r = s^{\frac{1}{n}}$ é a raiz *n*-ésima (real) positiva de *s*. Simplificando $r^n$ com *s*, obtemos:

$$\cos(n\theta) + i \text{ sen } (n\theta) = \cos\varphi + i \text{ sen}\varphi$$

que, igualando parte real e parte imaginária, equivale ao sistema de equações trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos\,(n\theta) = \cos\varphi \\ \text{sen}\,(n\theta) = \text{sen}\,\varphi \end{cases} \text{, sendo } n\theta = \varphi + 2k\,\pi.$$

Sugerimos que o professor avalie se o quadro a seguir deve ser apresentado aos alunos.

.

> Analisando o gráfico das funções cosseno e seno (ou equivalentemente às projeções nos eixos x e y de um ponto variando no círculo trigonométrico, respectivamente), constatamos que dois ângulos distintos com valores entre 0 e 2π que possuem o mesmo cosseno estão nos quadrantes primeiro e quarto, nos quadrantes segundo e terceiro, ou são $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Analogamente, se possuem o mesmo seno, estão nos quadrantes terceiro e quarto ou nos quadrantes primeiro e segundo, ou são 0 ou π. Concluímos que dois ângulos (distintos) em $[0, 2\pi)$ não podem, ao mesmo tempo, possuir o mesmo cosseno e o mesmo seno. Portanto, a única forma para que ângulos distintos, agora com valores arbitrários, possuam o mesmo seno e cosseno é a de que seus valores se diferenciam por múltiplos inteiros de 2π, ou seja, se diferenciam pelo número de voltas.

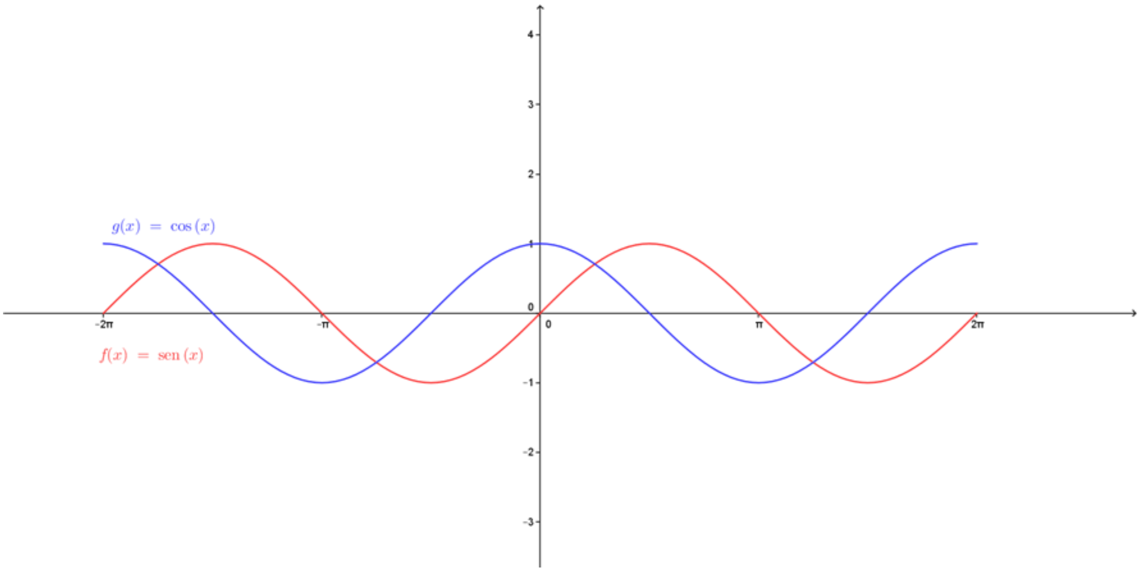



**Figura 29 – Gráfico do seno e do cosseno**

Então, observando o gráfico anterior, concluímos que a solução do sistema de equações trigonométricas é: $n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in Z$, ou seja, para cada valor de $k$, temos um ângulo. Assim, o argumento (ângulo) procurado $\theta$ possui, então, vários valores possíveis que dependem de $k$:

$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in Z.$$

Fazendo $k$ variar entre 0 e $n-1$, o ângulo $\theta$ toma os $n$ valores distintos:

$$\theta_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(0)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n}$$

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(1)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$\theta_2 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(2)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\theta_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

Quando $k \geq n$, os valores de $\theta = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, começam a se repetir, apenas com a diferença de $2\pi$.

$$\theta_n = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \theta_0 + 2\pi$$

$$\theta_{n+1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \theta_1 + 2\pi$$

$$\theta_{n+2} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n+2)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n} + 2\pi = \theta_2 + 2\pi,$$

Nesse caso, seno e cosseno são os mesmos. Logo, existem $n$ raízes distintas:

$$z_k = r(\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k), k = 0,1,2,\ldots,n-1, \text{onde}$$

$$r = s^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{s}\,,\ \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Concluir que a raiz quadrada de um número complexo admitirá dois valores; a cúbica, três valores; a quarta, quatro valores; e assim sucessivamente. Discutir os seguintes exemplos:

1º. Exemplo: Obtenha as raízes quadradas de z = $16i$ utilizando a forma trigonométrica. Para obter as raízes quadradas de $z$, devemos achar os números complexos $w_k$, tal que $(w_k)^2 = z$. Se z = $16i$, na forma trigonométrica, $z = 16(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$.

Expressando $w$, na forma trigonométrica, temos $w_k = r(\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k)$. Pela regra do produto, $(w_k)^2 = r^2(\cos 2\theta + \text{i sen } 2\theta)$. Então, $r^2(\cos 2\theta + \text{i sen } 2\theta) = 16(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$. Assim,

$$r^2 = 16 \rightarrow r = \sqrt{16} \rightarrow r = 4$$

$$\begin{cases} \cos\ (2\theta) = \cos\frac{\pi}{2} \\ \text{sen}\ (2\theta) = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{4} + \ k\pi,\ \text{para k} = 0 \text{ e } 1.$$

Quando temos:

k = 0, temos: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i.$

k = 1, temos: $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}.$

2º. Exemplo: Quais são os números complexos que satisfazem $z^3 = -8$? Represente, geometricamente, esses números.

Para obter as raízes cúbicas de $z$, devemos achar os números complexos $w_k$, tal que $(w_k)^3 = z$. Se z = $-8$, então, na forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i\,sen\,\pi)$.

Expressando $w$, na forma trigonométrica, temos $w_k = r(\cos\theta_k + \text{i sen }\theta_k)$. Pela regra do produto, $(w_k)^3 = r^3(\cos 3\theta + \text{i sen } 3\theta)$. Então, $(w_k)^3 = r^3(\cos 3\theta + \text{i sen } 3\theta)$.

Logo:

$$r^3(\cos 3\theta + \text{i sen } 3\theta) = 8(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$$

Daí, temos:

$$r^3 = 8 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} \rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos\ (3\theta) = \cos\pi \\ \text{sen}\ (3\theta) = \text{sen}\ \pi \end{cases} \rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ para k} = 0,1 \text{ e } 2.$$

Quando temos:

k = 0, temos: $w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = 1 + \sqrt{3}\, i$

k = 1, temos: $w_1 = 2(\cos \pi + i \text{ sen } \pi) = 2(-1) = -2$

k = 2, temos: $w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$

Representando tais raízes no plano complexo, observamos, na Figura 30, que elas são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio igual a 2.

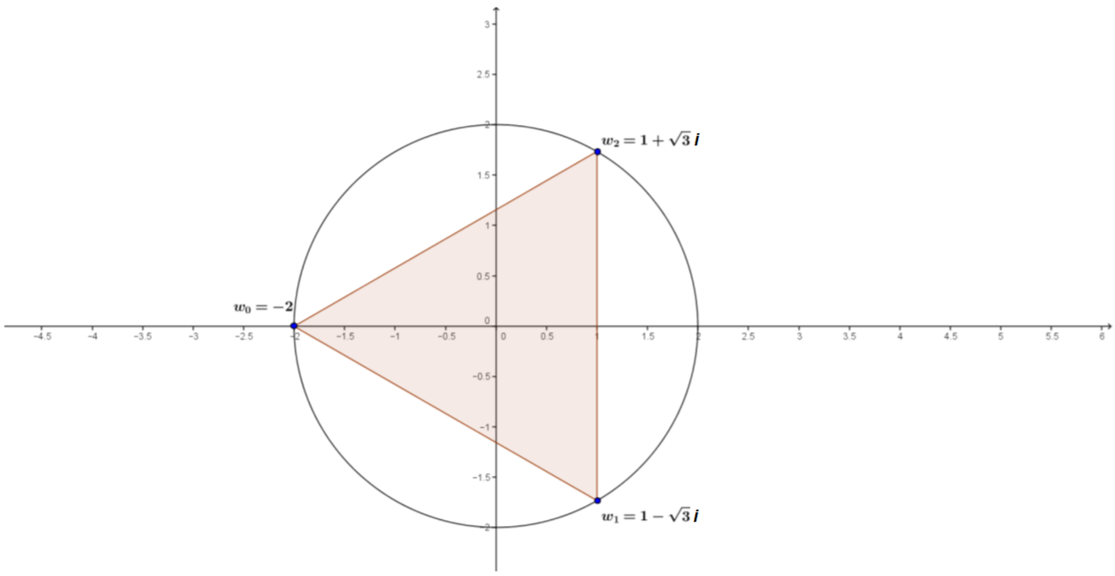



**Figura 30- Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = -8$.**

Os vértices desse triângulo dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{2\pi}{3}\, rad$, ou seja, 120°. Observamos que, quando $w_0$ gira 120° no sentido anti-horário, obtemos $w_1$ e, quando $w_1$ gira 120° no sentido anti-horário, obtemos $w_2$ .

Propor a seguinte questão motivadora: Qual a área e o perímetro desse triângulo? Discutir as respostas dos alunos. Comentar, em seguida, que temos um tipo especial de raiz complexa, a saber, as raízes complexas da unidade, que nada mais são do que as soluções para a equação $(z_k)^n = 1$, denotadas pela fórmula:

$$z_k = r(\cos\theta_k + i \text{ sen } \theta_k), \text{ com } r = 1 \ e \ \theta = 0.$$

O motivo de serem especial se deve ao fato de podermos obter raízes *n*-ésimas de quaisquer outros números a partir delas. Salientar que, se variarmos *n*, marcarmos os pontos das raízes n-ésimas; se os ligarmos, obteremos um polígono regular de *n* lados, inscrito no círculo trigonométrico. Exemplo: Determinar as raízes cúbicas de z = 1.

$1 = 1\,(\cos 0 + i \text{ sen } 0)$

Procuramos $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^3 = 1$. Tomamos $w = r(\cos\theta_k + \text{i sen } \theta_k)$. Pelo que foi visto anteriormente, $w^3 = r^3(\cos 3\theta + \text{i sen } 3\theta)$. Assim, teremos $r^3 = 1$ e $\begin{cases} \cos\ (3\theta) = \cos 0 \\ \text{sen}\ (3\theta) = \text{sen } 0\text{'} \end{cases}$ ou seja, $r = 1$ e $\theta = 0 + \frac{2k\pi}{3}$, para $k = 0{,}1{,}2$.

Daí, temos:

$$\varepsilon_0 = 1(\cos 0 + i\, sen\ 0) = 1$$

$$\varepsilon_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\, sen\ \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\, sen\ \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

As raízes, apresentadas na Figura 31, representam vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo trigonométrico.

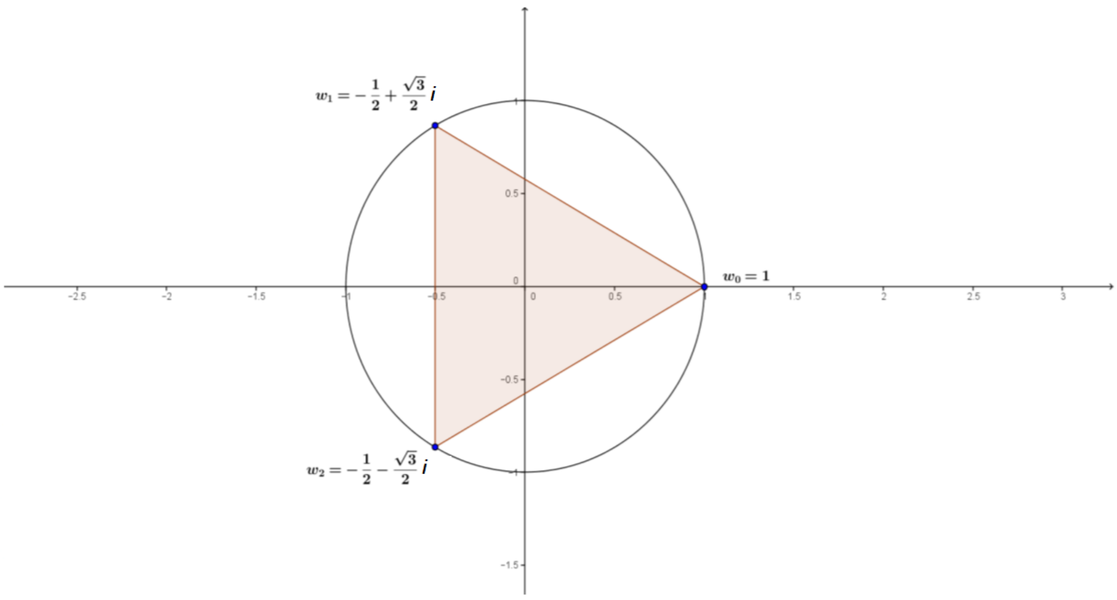



**Figura 31- Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 1$**

As raízes do exemplo anterior, $\varepsilon_0 = 1$ , $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\ e\ \ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ , quando multiplicadas por $-2$, geram as raízes de $z = -8 = 8(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$: $w_0 = -2$ , $w_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ e $w_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$ . Essa multiplicação por 2 pode ser vista como a multiplicação por $(-1)$ seguida da multiplicação por (2). Já sabemos que multiplicar por $(-1)$ gera uma rotação de 180° e multiplicar por 2 aumenta duas vezes o comprimento dos Números Complexos. Então, esses números, que são os vértices do triângulo, vão girar 180° e ter seus comprimentos duplicados.

Generalizar a ideia da seguinte forma: Para obtermos as raízes n-ésimas da unidade $\varepsilon_k$ , basta pensarmos em:

$$\mathrm{z_k = r(\cos\theta_k\ + i\ sen\ \theta_k\,), k = 0,1,2, \dots, n - 1,}\ \text{ onde}$$

$$r = s^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{s}\ ,\ \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Sabendo que $r = 1\ \ e\ \ \varphi = 0\pi$, daí obtemos:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}\ , k\ \in Z$$

Salientar que, como no exemplo anterior, qualquer raiz pode ser escrita em função das raízes da unidade, multiplicando pelo comprimento e somando o ângulo.

Propor que os alunos resolvam a seguinte questão: Determinar as raízes quarta da unidade e apresentar sua representação geométrica.

Como atividade final, propor a resolução de exercícios de aplicação dos Números Complexos. As atividades, a seguir apresentadas, abordaram aplicações na Eletrônica, na Eletricidade e na Geometria Plana.

1) Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de impedância (Z) e é expressa por um número complexo. Num circuito RLC, em série, a impedância equivalente ($Z_{eq}$) é dada por: $Z_{eq} = Z_L + Z_R + Z_C$. A força eletromotriz E é dada por $E = Z_{eq} \cdot I$, em que I é a corrente elétrica. Sendo o circuito RCL, em série, apresentado na Figura 32, determine:

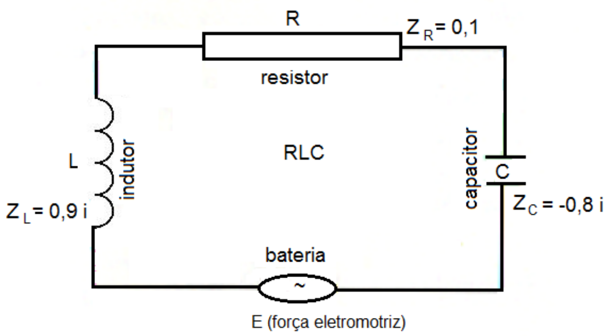



**Figura 32 – Circuito RLC**

a) A impedância equivalente $Z_{eq}$ .

b) A força eletromotriz E, em volts, quando I = 20 + 100$i$.

c) A corrente I, quando E = $i$ – 1.

2) Considerando o complexo z = 1 + $\sqrt{3}\ i$:

a) Determine o comprimento de $z$ e de $\bar{z}$. Que relação existe entre esses valores?

b) Represente, num mesmo plano, $z$ e $\bar{z}$. Qual a relação existente entre $z$ e $\bar{z}$ ? Os resultados observados valem para qualquer número complexo não nulo e seu conjugado?

3) Dois vértices consecutivos de um quadrado são dados pelos complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\ e\ w = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .

a) Determine os Números Complexos correspondentes aos outros dois vértices.

b) Obtenha o perímetro e a área desse quadrado.

4) Se z = 3 + $i$ sofrer uma rotação de 90° no sentido horário, tornar-se-á o complexo w. Determine w.

5) Admita que o centro do plano complexo coincida com o centro de um relógio de ponteiros. Se o ponteiro dos minutos possui duas unidades de comprimento, determine o Número Complexo sobre o qual este ponteiro estará às 11h 55min.

6) Em termos elétricos, uma impedância complexa 4 + 3$i$ significa 4Ω de resistência elétrica e 3Ω de reatância indutiva. A medida da impedância é o resultado do comprimento do Número Complexo. O ângulo de fase θ é o arco tangente da relação entre reatância indutiva e a resistência elétrica. Determine a impedância complexa na forma trigonométrica ou polar.