UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Diego da Silva Pinto Martinelli

GEOMETRIA ANALÍTICA COM O SOFTWARE WINPLOT: ARTICULANDO AS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS

Porto Alegre
2013

Diego da Silva Pinto Martinelli

GEOMETRIA ANALÍTICA COM O SOFTWARE WINPLOT: ARTICULANDO AS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Leandra Anversa Fioreze

Porto Alegre

2013

Diego da Silva Pinto Martinelli

GEOMETRIA ANALÍTICA COM O SOFTWARE WINPLOT: ARTICULANDO AS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Leandra Anversa Fioreze

Aprovado em 12 de Julho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Profª Dra. Leandra Anversa Fioreze
Universidade Federal de Santa Maria / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.ª Dra. Maria Alice Gravina
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade.

Aos professores da Graduação em Matemática pelo carinho ao longo do curso, pela formação e que de forma indireta estiveram presentes neste trabalho.

Aos colegas que estiveram comigo ao longo do curso.

Aos amigos pela compreensão da minha ausência em muitos momentos.

Aos meus queridos alunos por me causarem inquietações acerca da Educação Matemática.

A turma 312 da Escola Presidente Roosevelt pela dedicação durante a realização da atividade.

Aos meus familiares, em especial ao meu pai pelo carinho e incentivo que foram fundamentais e à minha mãe pela paciência com o meu mau humor.

À dona Lídia (em memória) pelo seu abraço que era um conforto; sentirei saudades de ouvir "dieguinho traz um açucri pra vó".

À Isabella que nasceu durante a Graduação, trazendo alegria e felicidade, tornando-se um ponto de apoio fundamental durante as dificuldades.

À Elisabete pelo seu amor e dedicação; mesmo não estando muito presente ao seu lado sempre me apoiou durante a realização do trabalho com suas idéias, e pela sua companhia.

À minha orientadora Dra. Leandra Anversa Fioreze, responsável direta na construção deste trabalho, pela sua dedicação e paciência em momentos difíceis, pelo auxílio constante no decorrer desta etapa, exemplo de profissional competente e sensível, obrigado por tudo.

“A força não provém da capacidade física
e sim de uma vontade indomável.”

Mahatma Ghandi

RESUMO

Neste trabalho realizou-se a investigação e a criação de uma proposta didática para o ensino de geometria analítica em ambientes informatizados. Objetivou-se articular as representações algébricas e geométricas utilizando o software winplot, bem como uma conexão entre a Geometria Analítica e a Geometria Espacial (sólidos de revolução) para a elaboração das atividades. A pesquisa foi realizada com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, em uma escola da rede pública de Porto Alegre. Utilizou-se a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, que procura articular pesquisa e ação didática, além de proporcionar uma organização na estrutura de trabalho. A sequência de atividades foi elaborada de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. No que se refere às conclusões da experimentação, verificou-se que o ensino de matemática com o uso de tecnologias é válido para auxiliar os alunos na aprendizagem da geometria analítica, de modo a articular as representações geométricas e algébricas.

Palavras-Chave: Engenharia Didática. Registros de Representação Semiótica. Geometria Analítica. Winplot.

ABSTRACT

In this work the research and creation of a didactic proposal for the teaching of analytic geometry in computerized environments. Aimed to articulate the algebraic and geometric representations using the software winplot as well as a connection between the Analytic Geometry and Spatial Geometry (solid of revolution) for the preparation of activities. The research was conducted with students of the third year of high school, in a public school in Porto Alegre. We used a research methodology Didactic Engineering, which seeks to articulate research and didactic action, and provide an organization structure work. The sequence of activities was prepared in accordance with the theory of records Representation Semiotics Raymond Duval. With regard to the conclusions of the trial, it was found that the teaching of mathematics with the use of technologies is valid to assist students in learning of analytic geometry, in order to articulate the geometric and algebraic representations.

Keywords: Didatic engineering. Semiotic representation registers. Analytic geometry. winplot.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é uma das mais antigas ciências, constantemente utilizada na evolução dos desenvolvimentos científicos e tecnológicos, sendo uma das mais significativas conquistas na produção de conhecimentos. Desta maneira a Matemática, como área de conhecimento, ocupa um papel indispensável na formação do cidadão, e quando utilizada, pode auxiliar no desenvolvimento de aspectos cognitivos importantes como planejar ações e projetar soluções, atribuir conceitos, interpretar e raciocinar (BRASIL, 2012).

Durante atividades experimentadas seja como aluno do Ensino Fundamental e Médio, ou ainda como professor, pode-se perceber que os discentes(em sua maioria) apresentam dificuldades ou simplesmente não gostam dessa ciência. Acredita-se que uma das possíveis causas para a ação destes empecilhos está no modo em que a Matemática muitas vezes é apresentada aos alunos: sem vínculos com a realidade do estudante ou de uma forma desinteressante.

A Matemática está presente no cotidiano dos indivíduos, em situações como: quantificação, operações de cálculos com grandezas, entre outras situações, considerando que a comunicação, e todas as atividades relacionadas à Matemática, ocorrem por meio de representações.

> A matemática guarda uma forte dependência das formas de representações e da manipulação dos seus objetos. A história mostra vários exemplos em que determinadas noções só puderam alcançar um certo nível de desenvolvimento a partir do momento em que uma notação adequada foi criada (MORETTI, 2002, p.344.).

Em experiências realizadas com alunos do Ensino Fundamental, constataram-se algumas dificuldades em converter registros na Língua Natural para a Linguagem Matemática, neste caso a Álgebra. No que tange aos trabalhos realizados como estudante da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, nos Laboratórios de Ensino Aprendizagem em Matemática com alunos do 1° Ano do Ensino Médio, observou-se que a maioria dos alunos apresentam dificuldades em relacionar a representação algébrica das funções com os seus respectivos gráficos. Isto também foi observado em pesquisa de trabalhos realizados recentemente por Gauto (2012) e Balejo (2009).

Para a realização desta pesquisa escolhemos o conteúdo de Geometria Analítica, pois, muitos alunos apresentarem dificuldades neste conteúdo, em relacionadas às representações algébricas e geométricas. Estas dificuldades existem devido aos alunos desconhecerem a relação entre as representações das curvas no plano e suas respectivas equações (DALLEMOLE, 2010).

> A unidade de Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações (BRASIL, 2006, p.124).

A pesquisa está fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. A aprendizagem de matemática ocorre somente quando o aluno for capaz de mobilizar e coordenar vários registros de representação, sendo no mínimo dois ao mesmo tempo (DUVAL, 2009).

O ensino/aprendizagem em matemática apresenta restrições em utilizar apenas um único registro semiótico, pois, representar um objeto matemático através de uma única representação, leva-nos por tomar esta representação como se fosse o próprio objeto (FLORES, 2006).

Para efetivar a construção deste trabalho e a realização da pesquisa, utilizaremos os princípios da metodologia da Engenharia Didática, que é uma metodologia baseada na experimentação em sala de aula, articulando ação didática com produção de conhecimento e, também, proporcionando uma organização na estrutura do trabalho.

Na busca de uma contribuição qualitativa para o ensino de Geometria Analítica, apresentar-se-á uma análise de como este conteúdo é trabalhado no Ensino Médio e em livros didáticos. Através desta análise, elaborou-se uma proposta de ensino que procura privilegiar as conversões e tratamentos entre as representações algébricas e geométricas em ambientes informatizados, pois estes ambientes se apresentam como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos de aprendizagem (GRAVINA; SANTAROSA, 2008).

Aplicou-se a sequencia de ensino com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, em uma escola da rede pública de Porto Alegre, no intuito de que o aluno melhore seu entendimento quanto ao conteúdo de Geometria Analítica, na compreensão e expressão de uma linguagem algébrica articulada com a linguagem geométrica. O objetivo principal é verificar se o uso de tecnologias em sala de aula pode auxiliar os discentes a compreenderem a diversidade dos registros de representação e a articulação entre eles.

Utilizaram-se, em conjunto, os conteúdos de Geometria Analítica e Geometria Espacial (sólidos de revolução) para a elaboração de uma das atividades. Como os sólidos de revolução são obtidos pela rotação de uma figura plana por um eixo, procurou-se trabalhar estas figuras planas por meio da construção de retas na Geometria Analítica com o auxílio do *winplot*.

O trabalho foi organizado em 5 capítulos, e no capítulo 2, apresentou-se um recorte da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que foi utilizada para a implementação desta proposta. Já no capítulo 3, explicitou-se a metodologia de pesquisa (Engenharia Didática), bem como as principais inquietações que levaram à escolha do tema, com a questão norteadora da pesquisa.

No capítulo 4, relataram-se os dados obtidos com a pesquisa: os estudos realizados na análise prévia, as variáveis globais referentes às nossas escolhas para a construção da sequência de ensino, as hipóteses e as experimentações em sala de aula. Confrontar-se-ão as análises a *priori* e a *posteriori* para verificar quais as hipóteses legais para concluir a validação da Engenharia.

No último capítulo, ocorrerá a apresentação das considerações finais acerca das atividades e algumas conclusões sobre o trabalho de pesquisa executado.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo descrevemos a base teórica utilizada no planejamento e construção da sequencia de ensino, objetivando a aprendizagem em Geometria Analítica.

2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Quando recorremos à História da Matemática, podemos observar que as representações ocuparam um papel indispensável no desenvolvimento da Matemática. Durante a Antiguidade Grega e na Idade Média a base do pensamento matemático era a intuição geométrica, usando de linguagem para demonstrar, explicar ou representar o conhecimento matemático. Na Idade Clássica, uma nova forma de "expressar e representar" o conhecimento matemático. Surgiu através de símbolos uma representação algébrica e diferentes sistemas semióticos foram surgindo, não sendo mais possível fazer matemática sem a utilização dessas representações (FLORES, 2006).

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta pelo filósofo e psicólogo de formação Raymond Duval, foi criada com o objetivo de estudar e analisar o funcionamento do pensamento para aquisição do conhecimento pelo aluno, através de representações, e a forma com que se processa a aprendizagem. Ou seja, as atividades cognitivas fundamentais ao sujeito como conceitualização, resolução de problemas, raciocínio e mesmo compreensão de textos, requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação que vão além da língua natural ou imagens, possibilitando desenvolver as capacidades de raciocínio para que o aluno participe e dirija seu processo de aprendizagem (DUVAL, 2003).

Para Duval (2003), as representações tornam possível o estudo com relação à construção do conhecimento, pois elas não cumprem apenas a função de comunicação, mas são fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento.

Os objetos matemáticos não são acessíveis, logo o indivíduo precisa recorrer a uma representação para poder acessá-las, pois a matemática, segundo Damm (2008, p.169-170), "[...] trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, o uso de uma representação".

As representações semióticas são indispensáveis para a comunicação e desenvolvimento das atividades, "não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação" (DUVAL, 2009, p.29), isto é, não há apreensão conceitual de um objeto sem evocar uma exibição para este objeto.

Destacamos, entre os mais importantes e diversos registros de representação semióticas existentes, aqueles que se utilizam com maior frequência: a língua natural, as escrituras algébricas, as figuras geométricas e as representações gráficas.

O aluno deve transitar entre estes registros, pois "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão." (DUVAL, 2009, p. 51). A importância de se articular registros (pelo menos dois) é fundamental para que o aprendiz não confunda o objeto com a sua representação.

O esquema representa, de forma simples, a coordenação entre dois registros de representação, como se pode observar na figura 1:

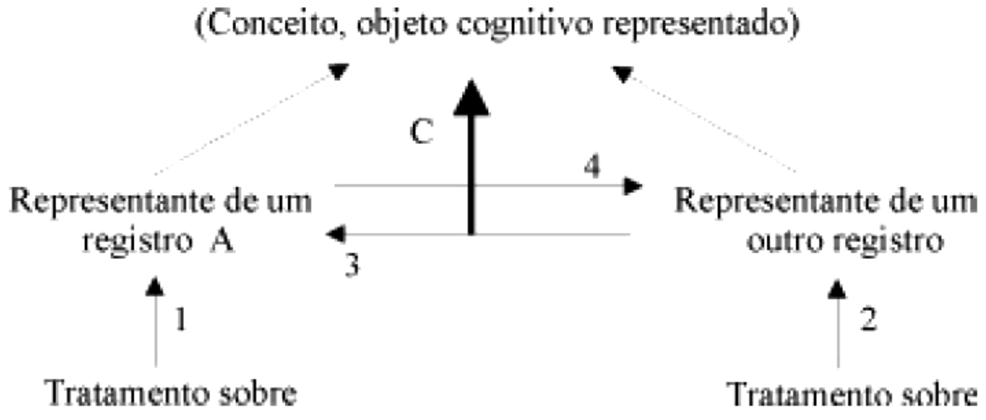


Figura 1: Esquema de coordenação entre dois registros de representação.

As representações semióticas de um objeto matemático relativas a um sistema particular de signos como a língua natural, gráficos, tabelas, escritas algébricas podem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico podendo ter diferentes significados para quem as utiliza (DAMM, 2008).

Além das representações semióticas, consideram-se mais dois tipos de representações: as mentais e as computacionais, que podem ser classificadas como internas ou externas (função de comunicação) (DUVAL, 2009).

De acordo com Duval, as representações mentais são aquelas que somente permitem uma visão do objeto matemático na ausência de todo significante, e são classificadas como internas porque pertencem a um sujeito e não são comunicadas a outro pela sua produção. Estas representações cumprem a função de objetivação, como todas as representações conscientes (DUVAL, 2009).

As representações computacionais também são classificadas como internas, todavia não conscientes do sujeito, uma vez que ele "acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações") (DAMM, 2008 p.172).

Destacamos três atividades cognitivas fundamentais de representações relacionadas com a *semiósis*: a formação de um registro para evocar um objeto matemático, a conversão e o tratamento.

A formação de um registro para evocar um objeto matemático implica na construção de uma representação que seja identificável, utilizando um sistema de signos para criar uma linguagem que pertença a um conjunto de signos e determinações que "queremos" representar (DUVAL, 2009).

A conversão de uma representação nada mais é do que transformar a representação dada de um objeto em outro registro de representação desse mesmo objeto, sendo classificada como uma operação externa em relação ao ponto inicial (DUVAL, 2009). Propôs-se que os alunos convertessem registros geométricos em registros algébricos na atividade 1, e teriam algumas posições relativas entre retas como informação. Pode-se observar na figura 2, exercício 1 da atividade 1, que os alunos deveriam converter retas paralelas em equações algébricas que as representassem, na qual deveriam perceber que para ter retas paralelas as equações deveriam ter os coeficientes angulares iguais.

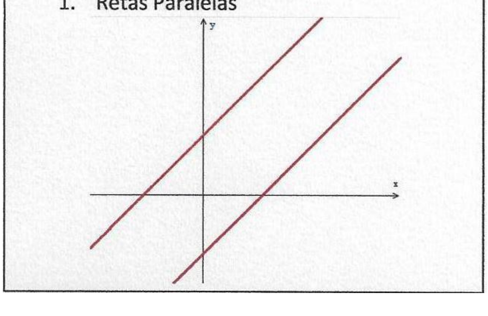


Figura 2 – Exercício 1 da Atividade 1.

O tratamento de uma representação consiste da transformação de uma representação obtida inicialmente, como sendo um dado inicial considerado terminal em relação a uma questão, ou seja, refere-se às operações dentro de um mesmo registro de representação. Sendo que os tratamentos dependem da forma e não do conteúdo envolvido, existindo para cada registro um tratamento diferente. Na atividade 2, sugeriu-se aos alunos que além de realizar conversões realizassem tratamentos. Os alunos deveriam montar sistemas para determinar o ponto de intersecção entre cada reta, conforme a figura 3 a seguir, construída pela dupla B.

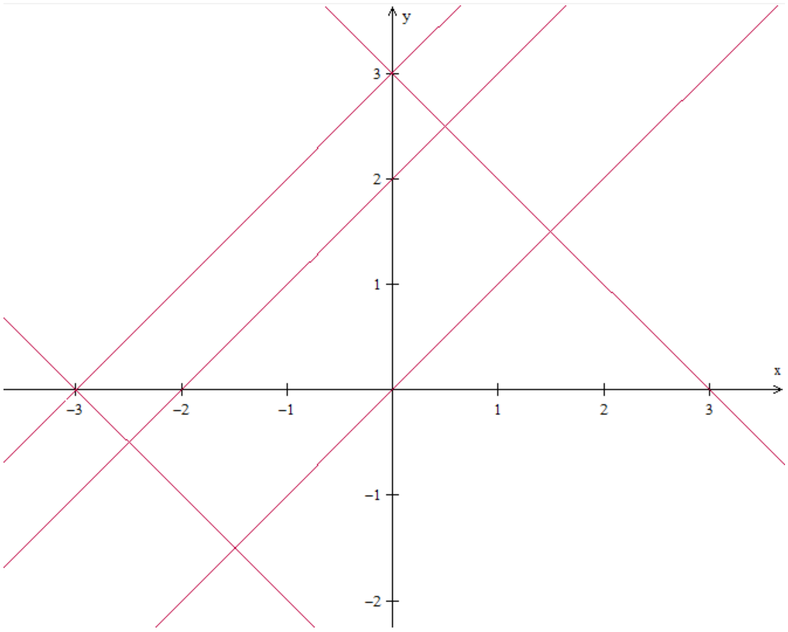


Figura 3 – Atividade 2 realizada pela dupla B.

O aluno em sala de aula deverá articular essas representações, pois Duval (2009) explica que não existe conhecimento que possa ser mobilizado por alguém sem uma representação. Além disso, o aluno deverá saber ler e interpretar dados para “retirar” informações objetivando desenvolver sua capacidade de raciocínio e análise de dados. Com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, criou-se a sequencia de ensino, em duas atividades, possibilitando aos alunos articular alguns dos diversos registros de representação. Relacionamos nas atividades conteúdos matemáticos como a geometria plana, a espacial e a geometria analítica, pois a articulação destes registros implica na condição de acesso à compreensão matemática.

3. ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo descrevemos a metodologia utilizada como inspiração na construção das etapas da nossa pesquisa bem como a escolha do tema e as justificativas que nos levaram a essa escolha.

3.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática surgiu na França nos anos 80, na área da didática das matemáticas, apresentando sua inspiração no trabalho realizado por um engenheiro, que necessita de um sólido conhecimento científico para buscar possíveis soluções para um problema que ainda não possui um modelo pronto de resolução, ou seja, sem apresentar uma solução prévia, sendo necessário criar, “inovar” resoluções para o problema (ARTIGUE, 1996).

A Engenharia Didática foi criada para responder a duas questões: a) as relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) e o lugar reservado para as realizações didáticas entre as diversas metodologias de pesquisa. Ela é vista como uma metodologia de investigação, que estuda as relações de pesquisa e ação no sistema de ensino, sendo uma metodologia baseada na experimentação em sala (CARNEIRO, 2005).

Para a realização e aplicação desta metodologia de pesquisa é necessário escolher um tema e definir um campo de ação, bem como justificar esta escolha, a qual será denominada como tema e campo de ação. Segundo Carneiro (2005), o tema deve contemplar um conjunto de saberes escolares, definindo-se o problema e os meios para a ação, sobre o sistema de ensino, construindo novas metodologias didáticas e articulando a pesquisa com a prática em sala de aula.

Devemos ressaltar que a Engenharia Didática não é uma metodologia de ensino que procura encontrar uma verdade única sobre a possibilidade de como ensinar um determinado conteúdo. Ela objetiva mostrar caminhos alternativos para o ensino, pois de acordo com Carneiro (2005) esta metodologia possui uma ideologia de inovação, abrindo caminhos para a criação de novas experiências no âmbito escolar.

Sua vantagem com relações a outras metodologias é que a Engenharia Didática contempla tanto a dimensão teórica quanto a dimensão experimental da pesquisa didática, relacionando o plano teórico da racionalidade como território experimental da prática educativa. Sem uma articulação entre pesquisa e ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seus significados reduzidos (PAIS, 2002).

3.1.1 FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A metodologia de pesquisa e execução da Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), é dividida em quatro grandes etapas:

1) Análises prévias;
2) Concepção e Análise a *priori* das situações didático-pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula;
3) Experimentação/Aplicação da proposta de ensino;
4) Análise a *posteriori* e validação da engenharia.

A seguir serão descritas as etapas citadas. Podemos observar na figura 2 o mapa da Engenharia Didática:

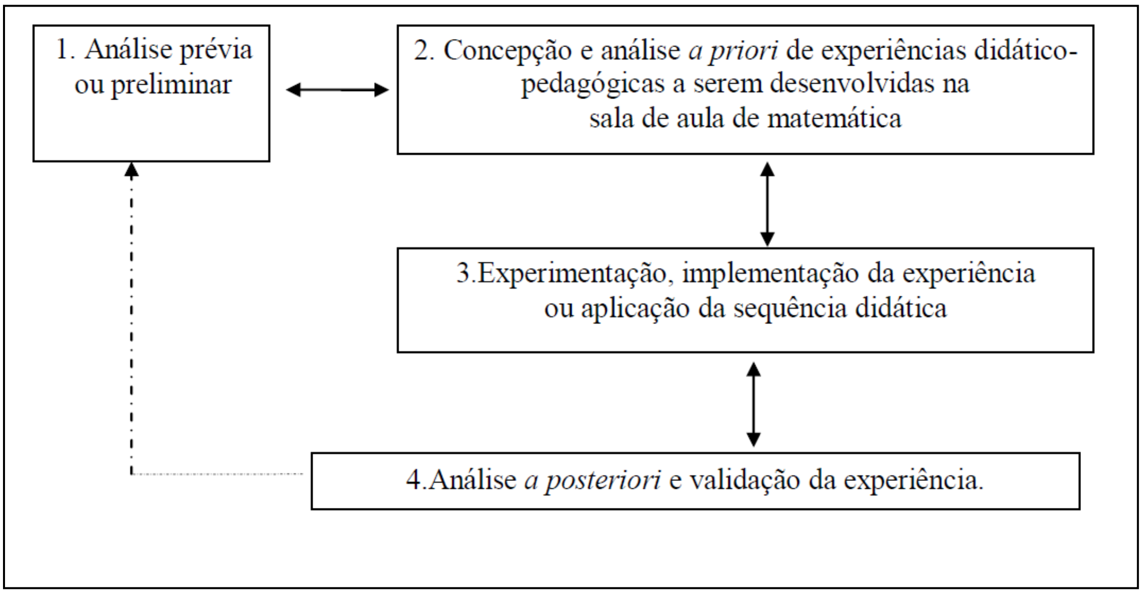


Figura 4: Mapa da Engenharia Didática (FIOREZE, 2010, p. 92)

3.1.1.1 ANÁLISES PRÉVIAS

Na etapa de análises prévias é realizada uma análise com o objetivo de verificar como o conteúdo é abordado atualmente pelos professores em sala de aula. O objetivo consiste em propor uma nova intervenção em sala de aula para que o professor possa aperfeiçoar e ou reorganizá-lo, tornando o estudo mais satisfatório. Nesta etapa é realizado um estudo que é subdividido em três dimensões:

1. Epistemológica: Está associada ao estudo da construção, ao longo dos anos, do conteúdo a ser pesquisado, ou seja, está associada às características do saber;
2. Didática: Analisa-se a forma de abordar o conteúdo em livros didáticos e os métodos pelos quais esse conhecimento vem sendo abordado;
3. Cognitiva: Nesta etapa são apresentados os principais problemas na aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades cognitivas.

Após estas análises listamos nossos constrangimentos com relação ao que impede ou dificulta a aplicação da nossa sequencia de ensino.

3.1.1.2 CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Conforme Artigue (1996), nesta fase do estudo o investigador deve tomar a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis. Ela pode ser separada em dois âmbitos: um deles, global, no qual explicamos nossos objetivos bem como a proposta didática, justificando as escolhas realizadas, e, em outro âmbito, agora local, que diz respeito ao planejamento de uma sessão da sequência de ensino.

Nesta fase também elaboramos nossas hipóteses sobre o que é esperado por parte dos alunos utilizando-nos da experimentação em sala de aula para analisar nossas perspectivas iniciais. E com os resultados obtidos com a prática, confrontamos os resultados para a validação da engenharia, ou não.

3.1.1.3 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta etapa os alunos realizam as atividades propostas, nós observamos, descrevemos e comentamos as produções e indagações realizadas pelos alunos bem como sua participação nas sessões de ensino.

3.1.1.4 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Nesta etapa, agora de posse dos dados obtidos com a experimentação, analisamos o processo como um todo. Analisamos os dados obtidos e os confrontamos com as hipóteses iniciais para validar ou não a engenharia. Na Engenharia Didática, "a validação é essencialmente interna, embasada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*" (ARTIGUE, 1996 p.197). Ou seja, ela constituiu um estudo de caso, onde o professor-pesquisador seleciona um conteúdo de matemática e partindo de uma análise prévia, elabora uma sequencia de ensino. Após a experiência realizada, confronta os resultados obtidos com as hipóteses iniciais. Seu objetivo consiste em procurar novos métodos reprodutíveis.

3.2 TEMA E CAMPO DE AÇÃO

O campo de pesquisa é uma turma de 18 alunos do terceiro ano do Ensino Médio, da rede pública de Porto Alegre.

O tema de pesquisa deve ser "como um conjunto de saberes que se ofereça, como um recorte coerente da matemática escolar, importante e autossuficiente em si mesmo, adequado para uma ação de micro engenharia" (CARNEIRO, 2005, p.88).

> [...] entende-se "professor pesquisador" como aquele que explicita as inquietudes que emergem da sua prática, e toma-as como problema de pesquisa, procurando propostas de solução, bem fundamentadas, com objetivo de propor e implementar mudanças concretas na sala de aula e/ou na instituição (CARNEIRO, 2008. p. 202).

Ao partir de experiências vivenciadas no ambiente escolar, seja como aluno ou professor, surgiram inquietações que nos levaram à escolha do tema de pesquisa. Observaram-se nestas experiências (em maioria), que os alunos no Ensino Médio apresentam dificuldades em tratar algebricamente problemas geométricos e vice-versa, particularmente na articulação entre representações algébricas e representações geométricas dessas curvas no plano cartesiano.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio destacam ainda que o trabalho realizado com a Geometria Analítica possibilita a articulação entre a geometria e a álgebra, podendo ela ser significativa tanto para o aluno como para o professor.

> Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor (BRASIL, 2006, p.77).

Percebemos muitas vezes que para representar geometricamente uma equação no plano cartesiano o aluno utiliza o método da “tabela” ou realiza cálculos para encontrar alguns pontos que são considerados importantes, assim como os pontos de intersecção com os eixos coordenados. Tais métodos utilizados para encontrar a representação geométrica no plano não contribuem para que o aluno compreenda o comportamento da curva. Além de serem métodos mecânicos de resolução, não contribuem para o aluno compreender as relações existentes entre as representações algébricas e geométricas (GAUTO, 2012).

Pode-se observar, durante estágio aplicado aos alunos da 8ª série, que os alunos resolvem sistemas de equações de primeiro e segundo graus, porém sem atribuir um significado geométrico para a solução encontrada, tornando-se tais sistemas apenas mais uma atividade onde eles têm que “fazer contas”. Não se trata de julgar de quem é a culpa pela falta de conexão entre as representações por parte do aluno, mas acredita-se que para existir uma melhor compressão e dar um “sentido” às respostas encontradas, o professor poderia trabalhar com diferentes registros do mesmo objeto matemático. “Uma vez definido o sistema de coordenadas cartesiano, é importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação”. (BRASIL, 2006, p.77).

Durante experiências vivenciadas com alunos do primeiro ano do Ensino Médio nos estágios curriculares, pudemos observar uma acentuada dificuldade dos alunos em especificar o comportamento da função, como crescente ou decrescente e distinguir entre as partes positiva e negativa da função apenas com a sua representação algébrica.

Acreditamos que essa dificuldade dos alunos associarem as representações algébricas e geométricas está relacionada com a ênfase dada à álgebra, pois, por exemplo, no conteúdo de funções, para os alunos encontrarem as raízes, é necessário igualar a função a zero e realizar cálculos algébricos. E, quando fosse necessário encontrar a representação geométrica da função, o aluno deveria apenas marcar alguns pontos e traçar o gráfico, sem relacionar com a análise das raízes da função.

Com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, quando chegamos ao conteúdo de Geometria Analítica, a pergunta mais frequente é “eu preciso decorar todas essas fórmulas”. Em uma apresentação formal de fórmulas, os alunos não se comprometem em ações para desafiar suas capacidades cognitivas, logo passam a não ser autores das construções que posteriormente vão dar sentido ao conhecimento matemático (GRAVINA; SANTAROSA, 2008, p. 73).

É importante os alunos conseguirem articular as representações algébricas e geométricas das equações, e conseguir destacar o significado da representação gráfica, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar quais movimentos será realizado pelos gráficos (BRASIL, 2006). Lembrando que para haver a compreensão integral e conceitual devemos articular pelo menos dois registros para não confundir o objeto com sua representação (DUVAL, 2009).

Devido à constante presença de recursos tecnológicos voltados para a aprendizagem de conceitos matemáticos nos ambientes escolares, especificamente, propôs-se o trabalho com alguns conceitos de geometria analítica em um meio computacional, a fim de propiciar ao aluno um ambiente dinâmico que o estimule à aprendizagem em sala de aula, pois “os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem” (GRAVINA; SANTAROSA 2008, p.78).

Todos os motivos e experiências descritas contribuíram para a escolha do assunto em tela, e levaram ao desenvolvimento de uma proposta de ensino voltada à aprendizagem de Geometria Analítica, com o objetivo de articular registros de representação algébricos e geométricos.

Diante das justificativas explanadas, aponta-se a seguinte questão:

O uso de recursos tecnológicos, em particular o software winplot, pode auxiliar na articulação de registros de representação visando à aprendizagem em geometria analítica?

4. DISCUSSÃO DOS ACHADOS

4.1 ANÁLISES PRÉVIAS

Depois de escolhidos o tema e campo de ação e definida nossa questão norteadora partimos para a etapa de análises prévias. Dividimos esta fase da Engenharia Didática em 3 etapas que são elas:

a) Análise Epistemológica, na qual realizamos um breve estudo sobre a evolução da geometria analítica ao longo dos anos;
b) Análise Didática, na qual analisamos o ensino atual de Geometria Analítica atualmente, e na qual 3 livros didáticos recomendados pelo Plano Nacional Livros Didáticos 2012;
c) Análise Cognitiva, em que destacamos os principais obstáculos na aprendizagem dos alunos em Geometria Analítica e sua dificuldade em reconhecer objetos matemáticos em seus registros algébricos e geométricos.

Ao final do capítulo apresentaremos nossos constrangimentos encontrados nas análises realizadas para a aplicação da nossa proposta.

4.1.1 CONSIDERAÇÕES DE NATUREZA EPISTEMOLÓGICA

Apresentamos aqui um breve estudo sobre a evolução da Geometria Analítica, procurando ressaltar a importância da criação de símbolos para o desenvolvimento da matemática. A sua evolução articulando registros entre a geometria plana e a álgebra criando a geometria analítica. Levaremos em conta o fato de que a geometria analítica reside na transferência e articulação da investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente (EVES, 2004).

Em se tratando de história da Geometria Analítica, quanto à sua evolução ao longo dos anos, é difícil escolher um ponto de partida, uma civilização ou mesmo um local (ROQUE, 2012). Dois locais se destacam por volta de 1700 a.E.C.: a Mesopotâmia e o Egito, pelo fato de possuírem registros escritos, problemas registrados em argila de barro e papiros, respectivamente.

A Álgebra tem sua origem no Egito quase ao mesmo tempo em que na Mesopotâmia, com o objetivo de resolver problemas matemáticos envolvendo números desconhecidos ou problemas. Um tablete de barro, encontrado na Mesopotâmia com datação de 1700 a.C. considerado como um “livro de exercícios” (GARBI, 1997), contendo exercícios de geometria e aritmética, marca o início da álgebra antiga. A Álgebra percorre um longo caminho até 1700 d.C. com uma evolução lenta e gradual com a criação do simbolismo para representar operações para a resolução de equações.

A álgebra babilônica era tida como a mais sofisticada apresentando uma maior variedade de problemas solucionados, sendo esta análise baseada nos Papiros Moscou e Rhind, documentos egípcios que datam de cerca de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente. Dos 110 problemas apresentados nos papiros de Moscou e Rhind, 26 deles são geométricos, envolvendo cálculos de áreas e volumes (EVES, 2004, p.75).

A geometria babilônica se relaciona de uma maneira muito forte com a ideia de mensuração prática, como resolver problemas de áreas de retângulo, triângulo ou volume de sólidos como um prisma reto de base trapezoidal (EVES, 2004). Os egípcios e mesopotâmicos realizavam cálculos envolvendo medidas de comprimento e área.

Anotações de Heródoto registram cálculos envolvendo a prática de agrimensura no Egito, utilizada para calcular o quanto de impostos deveriam ser pagos ao rei, sendo que com as enchentes o rio Nilo cobria parte da terra fazendo com que fosse necessário um novo cálculo para saber o novo valor a ser pago em impostos (ROQUE, 2012). O caráter algébrico dos problemas geométricos apresentados pelos babilônicos está ilustrado numa tábua de Strasburgo (EVES, 2004).

A notação algébrica apresenta 3 estágios de evolução ao longo dos anos:

i) Álgebra retórica (verbal): as expressões são escritas com ausência de símbolos matemáticos utilizando somente palavras pela completa descrição do problema a ser solucionado;
ii) Álgebra sincopada: marcada pelo uso de abreviações no lugar das palavras;
iii) Álgebra simbólica: dotada de um simbolismo próprio passando a ser objeto de estudo a própria estrutura e não apenas os procedimentos.

O Egito e a Mesopotâmia são os berços que deram origem aos conhecimentos em matemática. Em um processo de assimilação, a Europa tem sua matemática fundamentada e estruturada nestes dois países, sendo os gregos os precursores desta transição (GARBI, 1997).

Diofanto (3d.C), matemático grego, considerado por muitos o pai da álgebra, foi o primeiro a utilizar símbolos para as representações de incógnitas. Viveu em Alexandria, ficando conhecido pelo seu estudo realizado em soluções de problemas algébricos considerados indeterminados, que conhecemos pelo nome de equações diofantinas. Outros gregos se destacam na área da geometria, como Tales (600 a.C.) que estabeleceu que as verdades precisam ser demonstradas, criando a matemática dedutiva (GARBI,1997), e Euclides (300 a.C) que sintetizou o conhecimento geométrico da época em *Os Elementos*.

Na matemática grega encontramos as primeiras ligações entre a geometria e a álgebra. Os gregos criaram a ideia de representação de um número por meio de um comprimento visando resolver problemas de caráter algébrico sem o uso de qualquer notação algébrica, valendo-se de uma álgebra geométrica para a sua resolução. Esta interpretação geométrica para a resolução de problemas de caráter algébrico foi aproveitada nos escritos de Euclides, no livro *Os elementos* (EVES, 2004, p.107).

A álgebra teve seu grande avanço científico no século XVI, graças a François Viéte, o primeiro a utilizar símbolos para a representação de incógnitas em equações (EVES, 2004).

Um precursor da Geometria Analítica, ainda no século XIV, foi Nicole Oresme antecipando alguns aspectos da geometria analítica ao representar através de gráficos certas leis. Confrontando a variável dependente com a independente, manifesta explicitamente a equação de reta (EVES, 2004).

Até o século XVII a geometria e a álgebra tinham origens semelhantes, sendo trabalhadas de forma independente. Com os estudos realizados pelo matemático Pierre de Fermat e o físico, matemático e filósofo René Descartes foi "inventada" a geometria analítica, com o objetivo de resolver problemas geométricos pela intervenção de métodos algébricos (ROQUE, 2012). Para a geometria no século XVII, temos Pascal (físico, matemático, filósofo e teólogo), que com suas descobertas torna-se um precursor da geometria projetiva, incluindo seus estudos sobre as cônicas.

Após o desenvolvimento da álgebra por Fermat, em 1629, com a sua obra Isogoge ad lócus planos et solidos (Introdução aos lugares planos e sólidos), temos o início de uma localização de objetos utilizando um sistema de coordenadas tridimensional (EVES, 2004).

4.1.2 CONSIDERAÇÕES DE NATUREZA DIDÁTICA

Como o livro didático é considerado um apoio na formação dos alunos, nesta etapa da Engenharia Didática foi feita uma pesquisa em 3 livros recomendados pelo Guia de Livros Didáticos (Plano Nacional de Livros Didáticos 2012), na qual analisamos a forma de ensino do conteúdo de Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio.

Os livros didáticos foram escolhidos, primeiramente, por serem aprovados pelo MEC (Ministério da Educação) e posteriormente pelos contatos realizados com os livros. O primeiro deles, enquanto cursava o Ensino Médio, o segundo e terceiro livros tivemos contato em experiências como estagiário no decorrer da graduação em estágios extracurriculares.

São eles:

a) DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações**.** Volume 3.1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.
b) IEZZI, Gelson Et Al. **Matemática:** Ciência e Aplicações 2010. Volume 3. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
c) RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** Ciência, Linguagem e Tecnologia**.** Volume 3. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2011.

Quando analisamos o primeiro livro observamos uma divisão no conteúdo de geometria analítica em 3 capítulos que são: ponto e reta, a circunferência e as secções cônicas. O conteúdo de geometria analítica começa com uma breve abordagem sobre Descartes e Fermat, ou seja, uma breve história sobre a geometria analítica, justificando sua aplicabilidade em problemas algébricos e geométricos. Na sequência, uma atividade para recordar a aplicação da representação dos pontos no plano cartesiano, seguido da introdução do conteúdo em tópicos. A evolução do conteúdo aparece em tópicos explorando-se inicialmente todas as possibilidades com as atividades envolvendo pontos no plano cartesiano para posteriormente serem abordadas a reta e seus coeficientes. Iniciando pela inclinação e pelo coeficiente linear da reta, bem como suas possíveis equações (reduzida, geral e segmentária), e explicando-se as vantagens de cada equação como, por exemplo, quando representamos a reta por meio da equação reduzida temos explícitos a inclinação α da reta e um ponto da reta (x_0, y_0).

Após explicitar as definições de ponto e reta, o autor não estabelece relações com suas representações algébricas e gráficas. Para cada equação representada quase sempre há uma demonstração no livro didático para o que o aluno possa compreender o a fórmula em si (o que está por trás dela-seus conceitos implícitos ou não) e o processo de generalização. Somente em um tópico não aparece à demonstração da fórmula, que dá expressão que determina a distância entre um ponto e uma reta. Antes de começar a resolução de atividades propostas, o autor apresenta uma questão relacionada ao conteúdo, dando uma sequência de resolução do tipo passo a passo para que posteriormente os alunos possam seguir o mesmo raciocínio na resolução dos exercícios propostos.

Curiosidades são apresentadas no tópico *tim-tim por tim-tim,* sendo dado um problema com um método de resolução para o aluno, que inicia pela leitura e interpretação. Seguindo com o planejamento da resolução, a execução do planejado e, posteriormente, a ampliação a outros questionamentos relacionados ao problema dado.

No fim de cada capítulo de Geometria Analítica encontra-se o tópico *Aplicações à Geometria Plana,* com problemas geométricos e que se utilizada álgebra para resolvê-los. Aparece ainda um tópico que é *a Matemática e práticas sociais,* que mostra uma aplicação prática da geometria analítica no cotidiano. Nas atividades adicionais são selecionados exercícios de diversas Universidades separadas por regiões do Brasil. Observando os exercícios no decorrer dos tópicos eles quase não apresentam aplicações práticas ligadas à geometria analítica, focam mais a resolução algébrica do que a geométrica, não articulando as possíveis representações.

No segundo livro selecionado podemos observar que o conteúdo de geometria analítica foi dividido em quatro capítulos que são: o ponto, a reta, a circunferência e as cônicas. Os autores iniciam o conteúdo destacando o plano cartesiano, seguido de um exemplo de representação de pontos neste plano, e somente na parte de observações é que cada ponto no plano cartesiano é definido por um par ordenado.

Cada tópico contempla o enfoque algébrico das fórmulas, seguido de exemplos resolvidos, aparecendo tanto sua representação algébrica como a geométrica. No entanto o livro apresenta uma lista de exercícios que trabalha muito pouca a parte geométrica, destinando-se mais a parte algébrica dos problemas. Quando estudamos a reta, na parte de conteúdo, aparece tanto a sua representação algébrica como a sua representação gráfica, porém, nos exercícios, há a preferência por exercícios algébricos. Os autores ainda apresentam a representação gráfica de inequações. Na lista de exercícios complementares temos uma abordagem interpretativa das questões e um desafio que reúne outros conteúdos matemáticos.

No terceiro livro, assim como no primeiro o conteúdo de Geometria Analítica foi dividido em três tópicos. Na explicação do conteúdo, para cada tópico temos uma breve explicação seguida de exemplos que relacionam cada parte do conteúdo com situações que os alunos podem vivenciar como, por exemplo, o sistema cartesiano no jogo batalha naval. Após os exemplos, segue uma sequencia de exercícios resolvidos.

O diferencial desse livro é que ele apresenta exercícios para serem resolvidos em grupos, possibilitando o debate e a troca de informações entre os alunos. A maior parte dos exercícios é contextualizada, trazendo situações em que a geometria analítica é utilizada. Nos exemplos utilizados o autor procura estimular os diferentes registros, ora trabalhando com a geometria ora com a álgebra. O mais interessante é a parte de assessoria pedagógica, em que o autor estimula o professor ao debate com os alunos em sala de aula, mostrando a importância de se estabelecer relações entre as representações algébricas e geométricas.

Através desta breve análise, posso concluir que os livros abordam os conteúdos de maneiras similares no que se refere à sequencia didática e à construção do conteúdo de geometria analítica, incluindo as suas divisões em capítulos da mesma maneira com exceção do segundo livro que separa as idéias de ponto e reta. Importante destacar os exercícios utilizados no terceiro livro, onde o autor utiliza exercícios relacionados com as atividades das pessoas, um fato importante, pois, como citado no PNLD:

> Na Matemática, articulam-se, de forma complexa e indissociável, dois aspectos. O primeiro é o das aplicações às várias atividades humanas, que têm sido origem de muitos dos belos modelos abstratos dessa ciência. Outro é o da especulação pura, voltada para problemas gerados no próprio edifício da Matemática e que, em muitos casos, revelaram-se fonte de surpreendentes aplicações (BRASIL, 2012, p.14).

Cabe destacar o fato de que nenhum dos autores sugere o uso do computador como uma possibilidade de recursos para se trabalhar em sala de aula. Tais ambientes de aprendizagem podem estimular o aluno e apresentam uma grande vantagem para as construções de gráficos, pois podem facilitar a visualização da representação gráfica da equação algébrica utilizada no exercício.

A escolha bem como a utilização do livro didático são tarefas importantes. Cabe ao professor selecionar o livro didático mais adequado, porém ele não deve se basear para preparar sua aula unicamente no livro selecionado, pois todos os livros selecionados apresentam singularidades. Cito como exemplo o terceiro livro, em que o autor sugere o completamento de quadrados para encontrar o centro e o raio da circunferência. Ou no primeiro livro em que o autor inicia com um texto e, após, segue com questões, contextualizando os conhecimentos com o objetivo de motivar o aluno. Além de quadro e giz, o professor poderia utilizar outros recursos didáticos, como o computador, criando atividades para este fim, explorando conceitos matemáticos de forma a não fragmentar o conteúdo e, sim, os relacionando.

4.1.3 CONSIDERAÇÕES DE NATUREZA COGNITIVA

Nesta fase da Engenharia Didática, procuramos identificar quais são as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de Geometria Analítica e na articulação entre os registros de representação utilizados (algébricos e geométricos). Para realizar esta análise com o objetivo de situar-nos sobre os conhecimentos prévios dos alunos, foi elaborada uma atividade inicial, seguindo como inspiração as etapas da Engenharia Didática, denominada *atividade prévia* (Ver Apêndice B).

Esta atividade foi aplicada antes da sequência de ensino e tem como objetivo identificar as principais dificuldades dos alunos em reconhecer objetos matemáticos através de suas representações, articulando estes registros e realizando os tratamentos adequados. Foram propostas quatro questões para contemplar o conteúdo de geometria analítica.

A primeira questão tem como objetivo verificar se os alunos conseguem relacionar a representação geométrica de retas e circunferências com sua representação algébrica. A segunda questão foi planejada com a ideia de observar se os alunos conseguem converter um objeto matemático representado algebricamente em uma representação geométrica no eixo cartesiano. A terceira questão foi elaborada para verificar se os alunos conseguem transformar a representação geométrica de uma reta em uma representação algébrica, seguindo o processo inverso da questão dois. A quarta e última questão da atividade prévia tem como objetivo constatar se os alunos conseguem realizar um tratamento dentro de um mesmo registro, resolvendo o problema que foi proposto.

Estas atividades serviram de parâmetros para averiguar o conhecimento prévio dos alunos, como os alunos se colocam diante do conteúdo e suas dificuldades e erros, servindo como um dos pontos de apoio para a próxima etapa da Engenharia Didática.

Destaco que alguns conteúdos das questões na atividade citada os alunos já trabalharam em sala de aula no decorrer do ensino fundamental e médio, como os conteúdos das questões dois e quatro em funções (1° ano do Ensino Médio) e sistemas de equações (9° Ano) respectivamente.

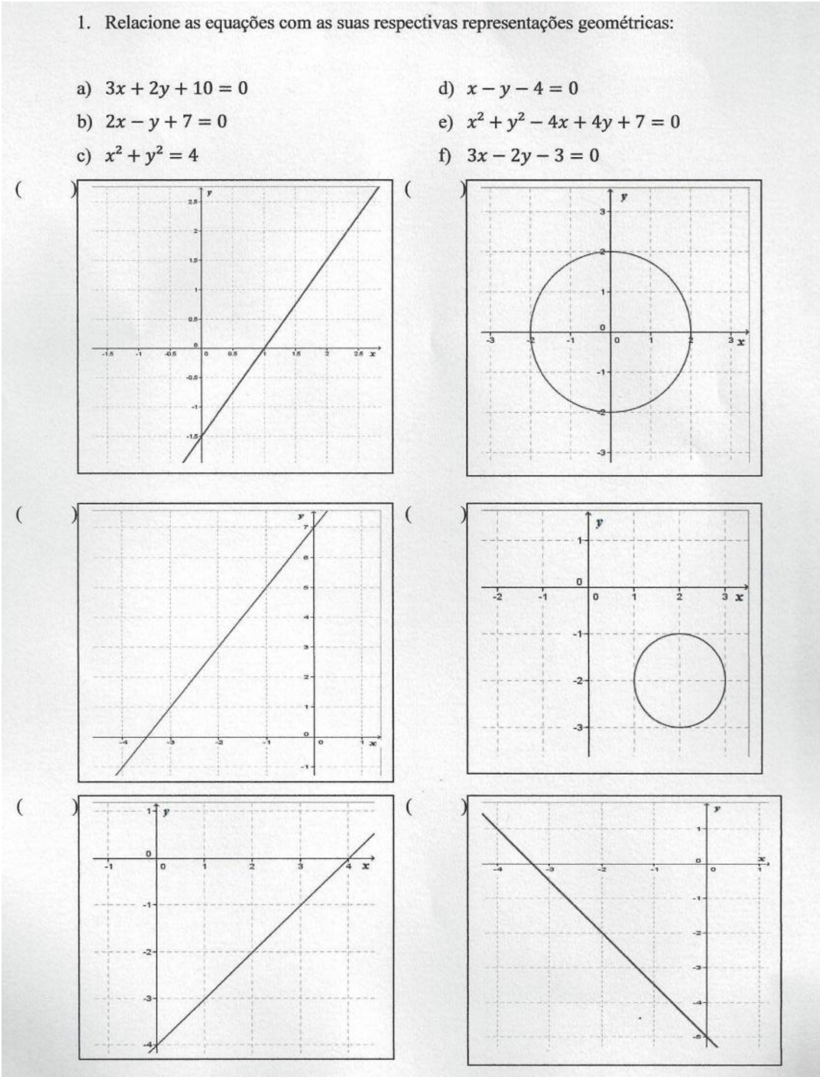
4.1.4 ANÁLISE DA ATIVIDADE PRÉVIA

Nesta etapa da Engenharia Didática, faremos uma análise sobre a atividade prévia que continha quatro questões que abordavam desde a articulação entre registros algébricos e geométricos até o tratamento em um mesmo registro. Os alunos realizaram as atividades em duplas e dispuseram de um tempo de 50 minutos para resolvê-las com os seus conhecimentos prévios.

A atividade prévia foi realizada no laboratório de informática em uma escola da rede estadual de Porto Alegre. A atividade teve a participação de um grupo de 18 alunos do 3° ano do Ensino Médio.

Os alunos em sua maioria se mostraram confortáveis com relação à aplicação da atividade, o único questionamento por parte dos alunos foi *E se eu não conseguir responder todas as questões?*. Damos importância a está preocupação dos alunos, pois em nenhum momento eles ficaram receosos em realizar a atividade. Ressaltamos que alguns alunos não conseguiram resolver todas as questões propostas, seja por falta de tempo ou por não saber como resolver.

Apresenta-se a seguir o exercício 1 da atividade prévia (figura 5):


1. Relacione as equações com as suas respectivas representações geométricas:

a) $3x + 2y + 10 = 0$
b) $2x - y + 7 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 4$
d) $x - y - 4 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$
f) $3x - 2y - 3 = 0$

( ) ( )
( ) ( )
( ) ( )

Figura 5: Atividade 1 da Análise Prévia

Analisando os métodos que os alunos utilizaram para responder a questão 1, percebemos 3 maneiras distintas: escolher um ponto no gráfico e substituir na equação para verificar se o ponto escolhido é solução da equação, isolar a variável y para determinar a equação reduzida da reta e utilizar os coeficientes angular e linear, e substituir a variável x por zero e posteriormente a variável y por zero para encontrar os pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados.

Algumas duplas apresentaram dificuldades em relacionar a representação algébrica com a representação geométrica mesmo utilizando estes métodos de resolução. Vejamos na figura 6 a resolução da questão 1 pela dupla C que procurou encontrar os pontos de intersecção com os eixos, sendo que as anotações foram realizadas na parte de trás das atividades.

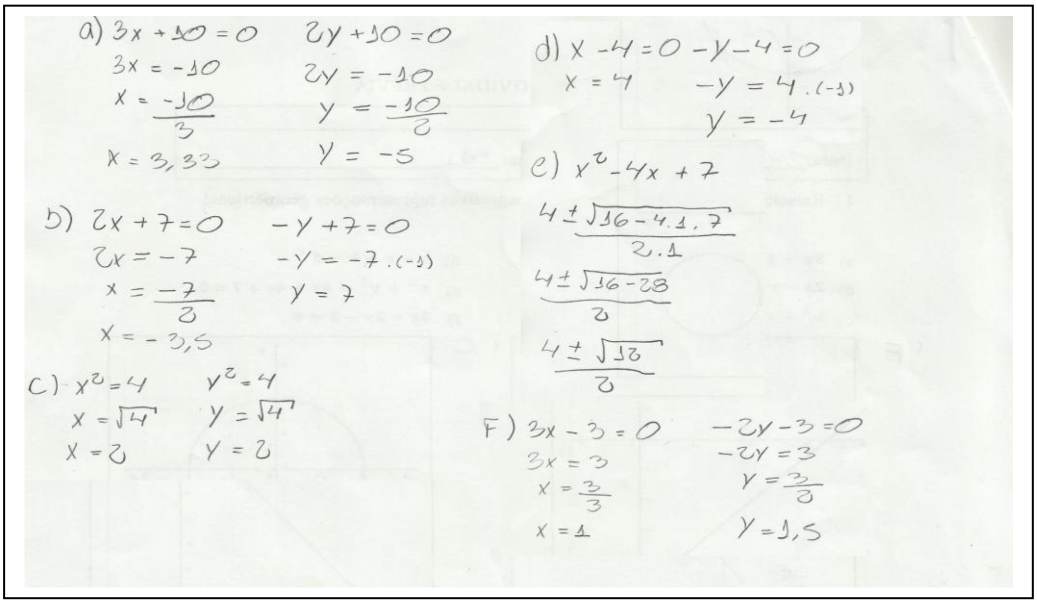


Figura 6 – Resolução da questão 1 da Atividade Prévia pela dupla C

Podemos perceber a relevância que esta dupla dá para os cálculos para determinar os pontos de intersecção com os eixos a fim de determinar a representação geométrica correta. Notamos que as duplas, na sua maioria, para resolver esta atividade têm a necessidade de apresentar contas para “encontrar uma resposta”.

As duplas que optaram por resolver pelo método de igualar à zero uma das variáveis apresentaram problemas para determinar a representação geométrica do item e, pois como observamos na figura 3 a curva não apresenta intersecção com o eixo y, ou seja, os alunos conseguiram apenas respondê-la por eliminação.

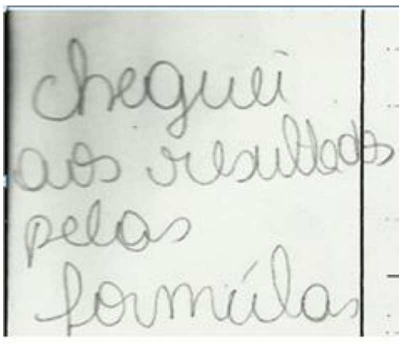


Figura 7 – Respostas da questão 1 da Atividade Prévia pelas duplas A

Analisando a figura 7, podemos observar que as duplas apresentam dificuldades em relacionar a equação com sua representação gráfica, sendo que para a dupla A as equações são apenas fórmulas e não uma representação de um objeto matemático.

As duplas na sua maioria não procuraram observar o gráfico, mas as equações para “solucionar o problema”, como citado anteriormente, dando ênfase às contas.

A segunda questão serviu para analisarmos as dificuldades dos alunos na conversão de registros, para este caso da representação algébrica para a geométrica, como podemos observar na figura 8.

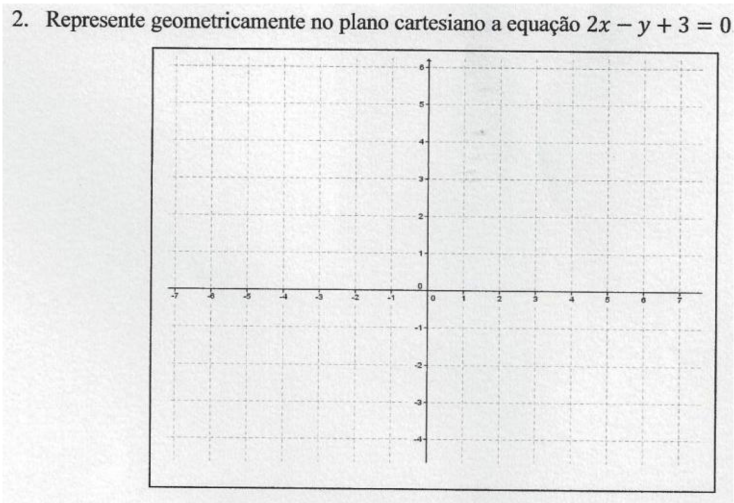


Figura 8 – Questão 2 da Atividade Prévia

Ao analisar a questão 2 vimos que a maioria (6 duplas) responderam corretamente este exercício. Devido ao desempenho obtido na questão 1 , não ficamos surpresos com os resultados. Observando o método de resolução por parte das duplas notamos dois métodos: no primeiro método as duplas igualavam as variáveis, uma de cada vez, a zero para encontrar os pontos de intersecção com os eixos coordenados. No segundo método era identificavam o coeficiente numérico que acompanha a variável x e marcavam no eixo x, repetindo o processo com a variável y, ou seja, marcavam o coeficiente numérico que acompanha a variável y no eixo y, como podemos observar na resolução feita por uma das duplas na figura 9.

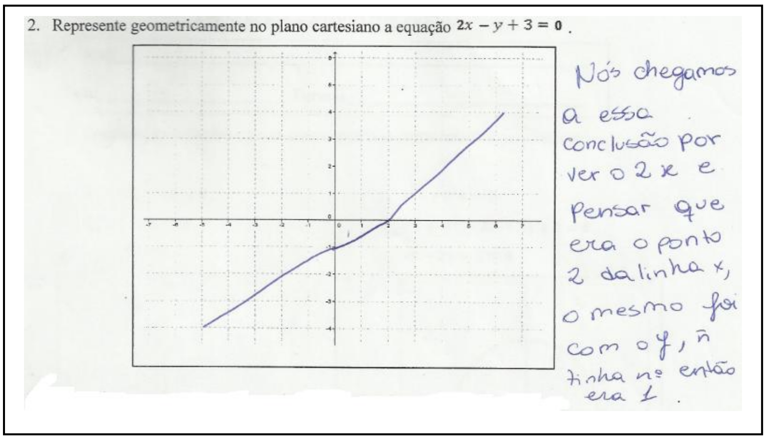


Figura 9 – Resolução da questão 2 pela dupla A

Percebemos que a dupla não consegue articular corretamente a representação algébrica com a geométrica, nem procura "encontrar" pontos que satisfazem a equação. Nesta questão pudemos observar uma dificuldade maior das duplas na conversão destes registros. Na terceira questão tivemos como objetivo analisar as dificuldades das duplas na conversão do registro geométrico em algébrico, ou seja, o processo de conversão inverso ao da questão 2, como se pode observar na figura 10.

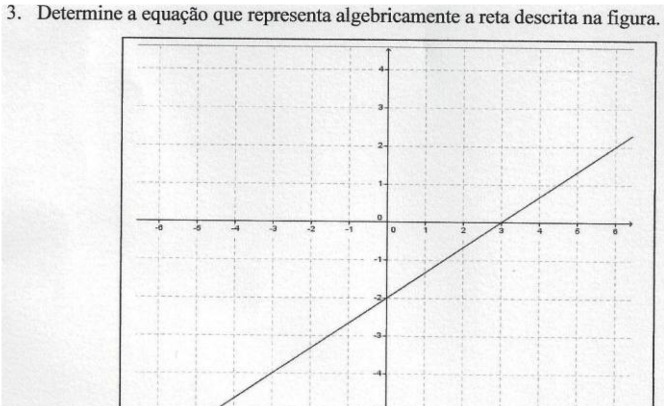


Figura 10 - Questão 3 da Atividade Prévia

Nesta questão, tivemos uma surpresa. Constatamos uma acentuada dificuldade dos alunos, pois apenas 4 das 9 duplas conseguiram converter corretamente os registros. Notamos que os alunos procuraram resolver a questão de duas maneiras distintas: o primeiro método consiste em encontrar o ponto de intersecção com o eixo y para determinar o termo independente, e substituindo outro ponto na equação reduzida da reta para determinar o coeficiente angular. O segundo método é equivalente ao utilizado na questão 2, sendo que na representação geométrica os alunos identificavam a abscissa do ponto de intersecção com o eixo x como o coeficiente de x e a ordenada do ponto de intersecção com o eixo y como o coeficiente de y, como podemos observar na figura 11.

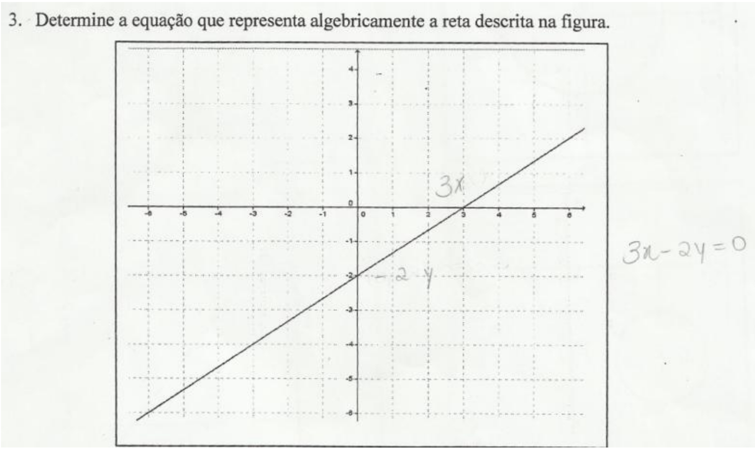


Figura 11 – Resolução da questão 3 pela dupla D

Pudemos observar uma dificuldade acentuada na conversão de registros geométricos para algébricos. Acreditamos que esta dificuldade está no fato dos alunos precisarem “retirar” informações do gráfico para realizar a conversão.

Na questão 4, tivemos como objetivo que os alunos realizassem um tratamento dentro de um mesmo registro para determinar sua “solução”, como podemos observar na figura 10.

4. Encontre o ponto de intersecção entre as duas retas de equações algébricas:

$r: 2x + 3y - 4 = 0$

$s: x - 2y + 6 = 0$

Figura 12 – Questão 4 da Atividade Prévia

Analisando a questão 4, verificamos que apenas 3 duplas encontraram o ponto de intersecção entre as retas, isolando uma das variáveis e a substituindo na outra equação. Outra dupla igualou as duas equações, tendo justificado seu procedimento: “é que as duas equações estão iguais à zero, então zero é igual à zero”. A resposta encontrada foi outra reta, pois eles ainda tinham duas variáveis, como podemos observar na figura 13.

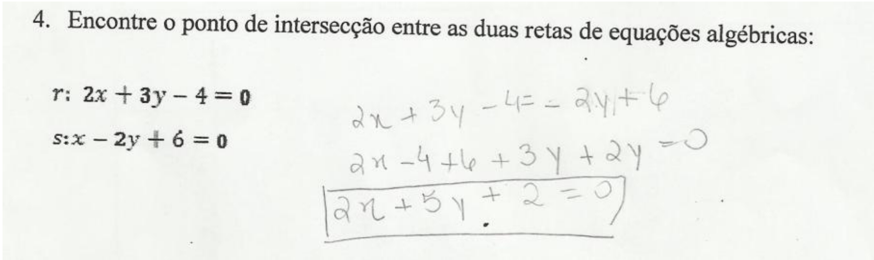


Figura 13 – Resolução da questão 4 pela dupla B

Acreditamos que esta dificuldade em realizar o tratamento neste sistema de equações deve-se ao fato de ser um conteúdo trabalhado na 8ª série do Ensino Fundamental e os alunos não terem mais *contato* com o referido método de resolução.

Os alunos, na sua maioria, comentaram que as questões 3 e 4 estavam difíceis de resolver, pois, diferentemente da questão 1 eles não possuíam opções para *escolher* e na questão 2 devido ao fato de meramente substituir pontos para determinar a reta.

Essa dificuldade pode ter ocorrido devido à falta de conexão entre as representações algébricas e geométricas, pois os alunos na questão 3 deveriam escolher pontos para substituir na forma geral da reta e resolverem por sistema ou terem o conhecimento de que o coeficiente angular determina a inclinação da reta. Na questão 4 as duplas comentaram que não se recordaram de como fazer para *encontrar* o ponto de intersecção entre as retas.

Os alunos não compreenderam de maneira satisfatória os conteúdos, pois de acordo com Duval (2006) para que haja compreensão integral de um conteúdo o aluno deve conhecer pelo menos duas representações de objetos matemáticos.

Os resultados obtidos com esta atividade prévia estão de acordo com resultados obtidos em pesquisas recentes sobre o assunto, como em Gauto (2012), Balejo (2009) e Dallemole (2010), que mostram que os alunos na sua maioria apresentam dificuldades em associar a representação gráfica com a algébrica de objetos matemáticos.

4.1.5 CONSTRANGIMENTOS

Como observado na análise prévia, em experiências vivenciadas como docente e em pesquisas realizadas em trabalhos recentes, Gauto (2013), Balejo (2009) e Dallemole (2010), pudemos perceber que os alunos na sua maioria apresentam dificuldades em articular e converter registros de representação, ou seja, relacionar a equação algébrica com a representação gráfica e vice versa em Geometria Analítica.

Um constrangimento que pode dificultar na aplicação da sequencia de ensino é a dificuldade dos alunos na conversão dos registros e o fato de que, dada a representação algébrica de uma reta, o aluno está acostumado a encontrar dois pontos no plano cartesiano, normalmente as intersecções com os eixos coordenados, e traçar a reta. Dallemole (2010) em seu trabalho destaca que os alunos apresentaram uma limitada compreensão sobre os conteúdos de reta, demonstrando dificuldades na interpretação e abstração.

Outro constrangimento que pode dificultar a implementação de nossa proposta foi a dificuldade observada na questão 4 da análise prévia, em que os alunos deveriam encontrar os pontos de intersecção entre retas e obtivemos um índice muito baixo de acertos. Ocorre muitas vezes em Geometria Analítica é a apresentação das equações e métodos para resolvê-las sem a articulação de registros. Por esse motivo estamos apresentando uma proposta para o ensino deste conteúdo com o uso do software Winplot.

Em uma conversa com professores de outras matérias sobre a utilização de tecnologias em sala de aula, somente o professor de física utilizava o computador. Acreditamos que este pode vir a ser um obstáculo na aplicação de nossa proposta, pois muitos professores não estão acostumados ou não se sentem confortáveis em trabalhar com ambientes informatizados e os alunos na sua maioria podem estar acostumados a usar o computador mais como entretenimento.

As atividades propostas visam conectar as representações algébricas e geométricas, para que o aluno compreenda que cada objeto matemático pode apresentar diversas representações. Acreditamos que com a utilização do *software* podemos auxiliar os alunos na visualização da representação gráfica de curvas no plano através de sua representação algébrica melhorando qualitativamente o seu entendimento na conversão de registros.

4.2 CONCEPÇÕES E ANÁLISE *A PRIORI*

Após estudos realizados sobre a Geometria Analítica, no que diz respeito a sua evolução ao longo dos anos, sobre como esse conteúdo é tratado nos livros didáticos e as dificuldades dos alunos, elaboramos uma sequencia de ensino com algumas atividades.

A proposta tem como um dos objetivos, abordar o estudo de Geometria Analítica de uma maneira diferente do *tradicional* (aula expositiva com quadro negro e giz, utilizando exercícios e aplicações das fórmulas, como constatamos em algumas observações); durante a sua aplicação, objetivamos fazer com que os alunos se engajassem na resolução das atividades propostas, procurando tornar a aprendizagem de geometria analítica mais significativa. Para isso utilizamos o conteúdo de Geometria Espacial (sólidos de revolução) como suporte para uma das atividades.

Nossas primeiras escolhas para a construção da atividade que realizamos diz respeito às variáveis globais, ou seja, aquelas que se referem à organização global da Engenharia Didática. Estas escolhas são descritas a seguir:

a) **Buscar articular registros algébricos e geométricos**

Nossa escolha como referencial teórico foi a utilização dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval para a construção da sequencia de atividades desta pesquisa. Como dito no capítulo dois deste trabalho, as representações semióticas são indispensáveis para a comunicação, pois não existe conhecimento que possa ser mobilizado sem a utilização de um registro de representação. Nossas atividades contemplam a articulação de registros algébricos e geométricos, pois de acordo com Duval (2009), devemos articular pelos menos dois registros para não confundir o objeto com a sua representação.

b) **Tratamento da informação**

Resolver a questão dentro de um mesmo registro semiótico, ou seja, mantendo-se dentro da mesma rede semântica. Entre outras palavras “resolver a questão”, produzindo uma nova representação no mesmo registro, ou seja,é uma transformação interna.

c) **Trabalhar em duplas**

Uma característica presente na proposta de ensino são as atividades que deverão ser realizadas em duplas. Acreditamos que os alunos trabalhando em grupos, além de mudar a característica de uma aula tradicional, na qual os alunos copiam a matéria e fazem exercícios, podem trocar informações, escolher, avaliar e decidir, promovendo o debate e as discussões sobre o conteúdo, ampliando suas capacidades de ouvir e respeitar posições diferentes.

d) **Utilizar como recurso computacional o software Winplot**

Ao planejarmos nossas aulas em um ambiente informatizado, buscamos trabalhar alguns conceitos de geometria via equações. Para isso elaboramos uma proposta de ensino com o uso do software Winplot[1].

O winplot é um poderoso software de matemática em que se podem trabalhar conceitos de geometria analítica – plana e espacial, funções e equações, permitindo que se trabalhe com gráficos de equações em duas ou três dimensões. Uma de suas vantagens é ser um programa "leve", ou seja, que funciona em diversos computadores sem perder sua eficiência e velocidade, e outra de suas vantagens é ser um *software* livre.

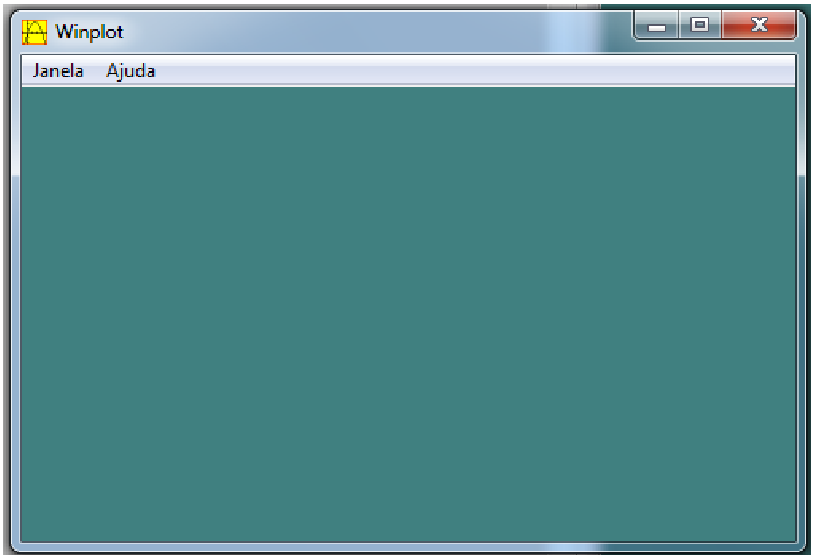


Figura 14 – Interface do Winplot

Aulas em ambientes dinâmicos podem apresentar um potencial para explorar e articular registros de representação de diferentes objetos matemáticos, tornando-se significativos no processo da construção de conceitos. Ambientes informatizados apresentam grande potencial aos processos de aprendizagem, oferecendo algumas vantagens, entre elas a de explorar uma grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente do uso de quadro negro e giz, pois esse caráter estático por vezes pode dificultar a construção do significado (GRAVINA, SANTAROSA, 2008).

Buscamos com isso construir uma sequencia de ações para ser aplicadas em três/quatro encontros que possibilitasse aos alunos compreender alguns conceitos básicos da Geometria Analítica, sabendo exemplificar e justificar os procedimentos

[1]O seu download pode ser feito na página http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

realizados nas construções, estabelecendo, nestas construções, conversões e tratamentos nas relações algébricas e geométricas.

4.2.1 HIPÓTESES

Durante a construção da sequência de ensino, previsões foram feitas a respeito do comportamento dos alunos frente às situações didáticas propostas. Estas hipóteses iniciais foram comparadas posteriormente com os resultados finais. Segundo Carneiro (2005, p.103), "tomar decisões e formular hipóteses são ações simultâneas".

A proposição foi planejada para que os alunos conseguissem representar objetos matemáticos de forma geométrica e algébrica e vice versa, ressaltando a importância em articular tais registros com o uso do *software winplot,* para auxiliar na representação e visualização da representação geométrica.

As atividades foram organizadas para que os alunos, de forma gradativa, conseguissem estabelecer relações entre os objetos geométricos e suas representações algébricas, a partir de conhecimentos prévios.

Outro objetivo fundamental da proposta é inseri-los em um ambiente informatizado, de modo que eles possam utilizar o computador visando suas aprendizagens. "É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento" (GRAVINA, SANTAROSA, 2008, p.73).

Todas as atividades propostas foram realizadas em duplas, para que os discentes pudessem trocar informações e estimular o debate de ideias, ampliando os conceitos que possuíam anteriormente. A cada etapa, sugeriu-se um questionário com perguntas que deveriam ser respondidas durante ou após as atividades, no intuito de que os alunos explicitassem os passos de construção e como pensaram para solucionar os problemas. Este questionário foi analisado baseando-se nas hipóteses iniciais.

Acredita-se que com a aplicação da sequência didática e sua resolução pelos alunos, estes irão adquirir conhecimentos sobre as representações algébricas e geométricas de retas e circunferências, além de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial ao trabalhar com sólidos de revolução.

4.3 EXPERIMENTAÇÕES

Realizaram-se encontros duas vezes por semana com uma turma de 18 alunos do terceiro ano do Ensino Médio, a qual tinha três períodos de matemática. O trabalho foi dividido em duas etapas e seis encontros. Na primeira etapa realizamos uma atividade, e na segunda, outras três ações, as quais serão descritas a seguir.

No primeiro encontro com os alunos, exercitou-se a construção da equação geral e da equação reduzida da circunferência (Ver Apêndice A), pois a professora regente havia informado que a turma ainda não tinha o conhecimento acerca da circunferência. No segundo encontro, aplicou-se a atividade prévia, e a turma realizou a atividade em sua totalidade.

Foi pedido aos alunos que sentassem em duplas para a realização das práticas, com a intenção de analisar o comportamento dos alunos ao trocarem ideias, de modo que esta observação serviu para a obtenção de algumas noções sobre o conhecimento prévio dos alunos. No que diz respeito à análise das atividades em sala de aula, concorda-se com Carneiro (2005, p. 97), que diz: “o professor em ação não espera para analisar o trabalho após concluí-lo”. Ou seja, analisou-se o desempenho dos aprendizes (suas facilidades e dificuldades) no decorrer das etapas de ensino.

No terceiro encontro foi “apresentado” para a turma o *software winplot*, que utilizaríamos para a realização das atividades. Em conversa com a turma verificamos que nenhum aluno tinha conhecimento sobre o *software* escolhido para a realização da prática. Neste dia trabalhamos três períodos devido à ausência de outro professor. No primeiro período iniciamos com uma atividade modelo (Ver Apêndice C) para mostrar aos alunos como seriam nossas atividades. Nos dois períodos seguintes deixamos os alunos explorarem o *software* livremente, apenas auxiliando-os sobre alguns comandos.

No quarto encontro, aplicou-se a atividade um da Etapa 1(Ver Apêndice D), e já no quinto, aplicou-se as atividades dois e três da Etapa 2 (Ver Apêndice E), nas quais os alunos deveriam realizar as construções propostas nas atividades. No último encontro, empregou-se a atividade três, utilizando dois períodos para a resolução.

Realizaram-se vários registros sobre as ações dos alunos durante a aplicação da proposta didática, objetivando estudar a interação com o *software*, assim como as trocas de informações para resolverem as atividades. Os estudantes também responderam a um questionário ao final de cada atividade.

4.3.1 RELATO DA ETAPA 1

Nossa atividade foi realizada no laboratório de informática da respectiva escola. Para iniciar as atividades com a turma foi pedido que se organizassem em duplas. Dentre os grupos formados, observou-se um quarteto. A etapa 1 contém uma atividade de construção de retas e segmentos utilizando o winplot, como podemos observar na figura 15.

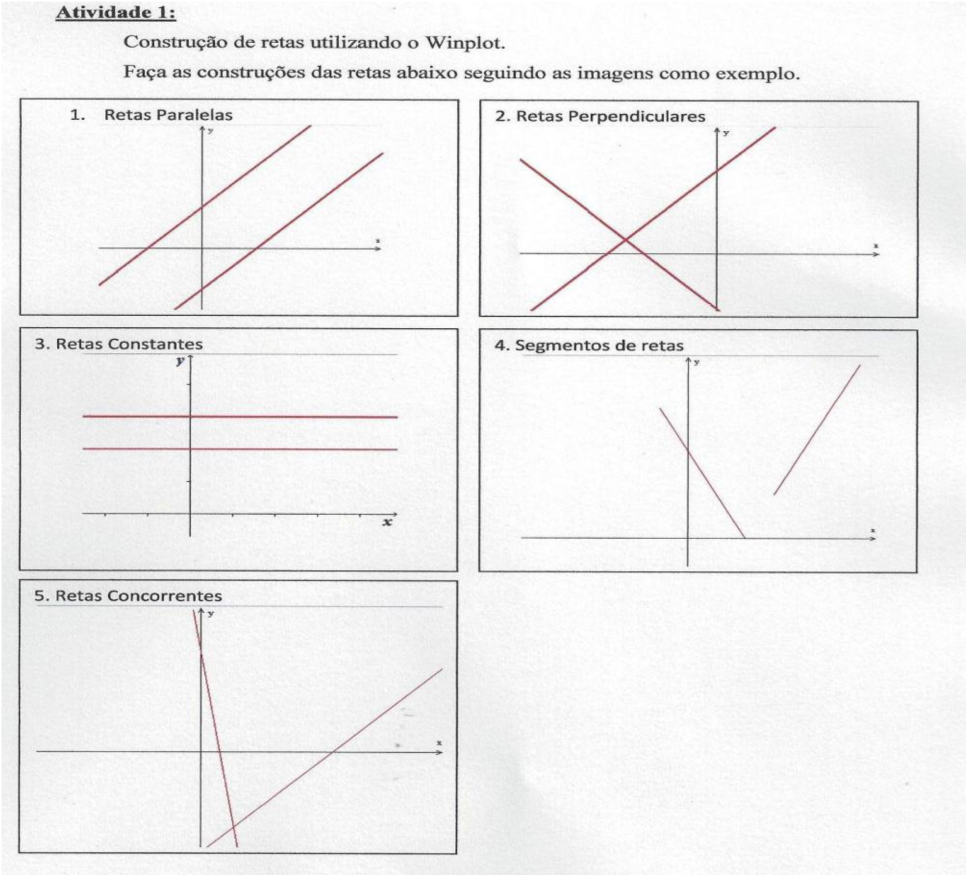


Figura 15 – Atividade 1da Proposta Didática

Ao final da atividade 1 foi solicitado aos alunos que respondessem um questionário sobre a atividade realizada, como podemos observar na figura 14.

Questionário1:

1. Qual (is) reta(s) a dupla encontrou mais dificuldades para realizar a construção? Comente brevemente as dificuldades.

2. Comente como a dupla fez para mudar a inclinação das retas.

3. Comente como a dupla fez para mudar a posição das retas.

4. Comente como a dupla escolheu os domínios na construção de segmentos de retas.

Figura 16 – Questionário da Atividade 1 da Proposta Didática

Cada dupla recebeu na aula anterior um tutorial do winplot (Ver Apêndice C) com uma breve explicação sobre como utilizar o programa, bem como as ferramentas que utilizaríamos para a realização das atividades. Até o momento não surgiu maiores dificuldades sobre o uso do *software*.

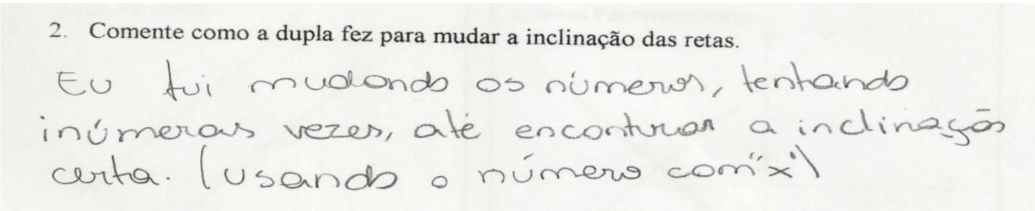
Nesta atividade propomos aos alunos que fossem construídas retas e segmentos utilizando como base para a construção das posições relativas entre as retas e ou segmentos que estavam indicados em cada item da atividade 1. O primeiro questionamento dos alunos na realização da atividade era sobre a construção das retas, se elas deveriam ficar iguais às imagens na folha. Explicamos aos alunos que a imagem era somente para tomar como um exemplo e assim construir retas e segmentos mantendo as posições relativas indicada em cada item.

No início das atividades observamos que os alunos não estavam preocupados com as equações que utilizariam para realizar as construções das retas, ou seja, a maioria das duplas iniciou o procedimento construindo uma reta qualquer, tentando chegar ao resultado por tentativa e erro. Digitavam a primeira equação da primeira reta, em seguida digitavam uma nova equação e viam que não servia. Então a substituíam por outra rapidamente. Apenas uma das duplas relacionou inicialmente a equação corretamente na primeira tentativa para a construção das retas paralelas.

Quando indagadas sobre como haviam escolhido, as equações, um dos componentes da dupla respondeu: “se as retas são paralelas elas têm que ter o mesmo ângulo, então o (coeficiente angular) é igual nas duas”. Percebemos que esta dupla relacionou corretamente as retas paralelas com o coeficiente angular, ou seja, esta dupla conseguiu,partindo da representação gráfica, realizar uma conversão externa a um registro, transformando-o em um registro algébrico.

Em outro momento observamos que as duplas estavam desenvolvendo o debate para a resolução das atividades. A cada equação registrada na tela os alunos discutiam e observavam a alteração da equação e sua implicação na representação gráfica. Esta possibilidade de mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação ou de trocar, a todo o momento, de registro de representação contribui para a aprendizagem dos alunos (DUVAL, 2009).

Na figura 17 tem-se a resposta dada por uma das duplas com relação à mudança de inclinação das retas.

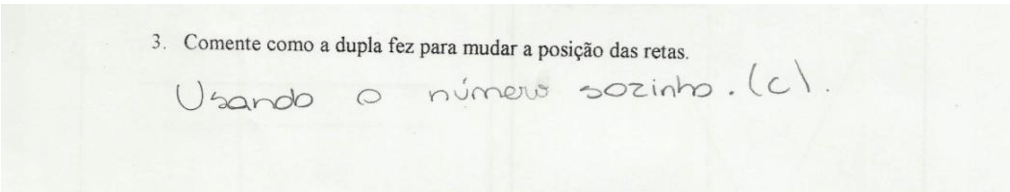

2. Comente como a dupla fez para mudar a inclinação das retas.

Eu fui mudando os números, tentando inúmeras vezes, até encontrar a inclinação certa. (usando o número com "x")

Figura 17 – Resposta da questão 2 da Atividade 1 pela dupla E

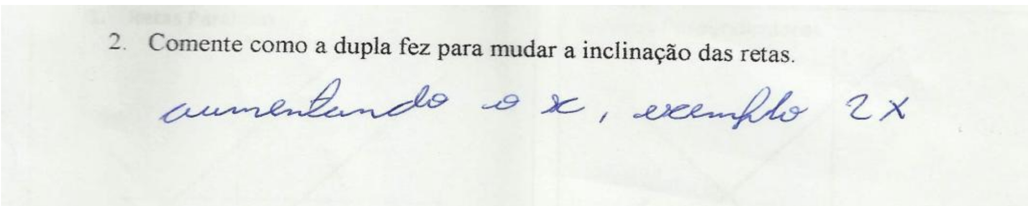
Podemos observar na figura 17, que a dupla E, sabe que as equações do tipo $y = ax + b$, o coeficiente angular tem influência na inclinação no gráfico. Na conversa com alunos durante a atividade, na sua maioria, eles sabiam verbalizar ou gesticular com as mãos as posições que as retas deveriam estar, mas não sabiam como transcrever o que ocorria no gráfico quando alterados os coeficientes.

Seguem mais algumas respostas da atividade 1 (figuras 18 e 19):


3. Comente como a dupla fez para mudar a posição das retas.

Usando o número sozinho. (c).

Figura 18 – Resposta da questão 3 da atividade 1 pela dupla E


2. Comente como a dupla fez para mudar a inclinação das retas.

aumentando o x, exemplo 2x

Figura 19 - Resposta da questão 2 da atividade 1 pela dupla A

Quando partimos para as análises das respostas dos alunos ao questionário, pudemos notar que nenhum deles utilizou o termo coeficiente para se referir aos coeficientes das retas, embora as duplas, em sua maioria, depois de um tempo “experimentando” o *software*, já sabiam dizer o movimento que faria o gráfico quando alterássemos um dos coeficientes.

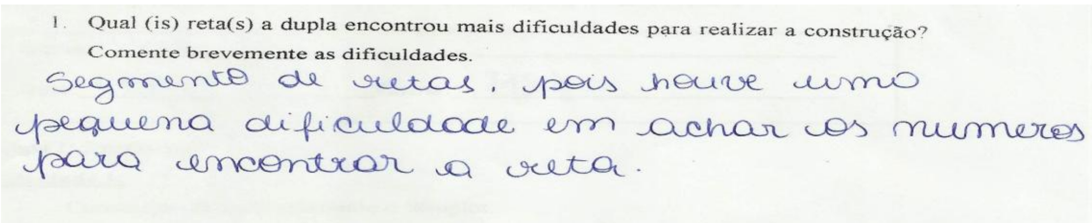
Ficamos surpresos com a dificuldade encontrada pelos alunos em realizar a construção do item 4 (segmentos de retas). Quando questionados sobre qual (is) reta (s) a dupla encontrou mais dificuldade para construir, todas as duplas se referiram ao item 4: traçar segmentos de retas. Acreditamos que esta dificuldade esteja em parte, associada ao *software*, e em parte pelos alunos não estarem acostumados a representar retas especificando seus domínios.

Quando observadas as construções dos alunos, verificamos que eles tiveram a preocupação, na sua maioria, de construir as retas e segmentos semelhantes às imagens utilizadas. Pensamos que essa dificuldade surgiu com relação à utilização do software e mostramos novamente aos alunos como “restringir intervalos” utilizando um exemplo. Após, comentamos que o intervalo se referia ao domínio que gostaríamos que a reta tivesse. O exemplo utilizado com os alunos foi a reta de equação $y = -2x + 3$, com domínio $[-3{,}0]$. Eis a pergunta de uma aluna da dupla D após a explicação:

Aluna: Como eu faço para a reta passar pra lá?

Quando questionada sobre o que seria lá, a aluna nos mostrou o eixo y, querendo que a reta interseccionasse o eixo y e fosse para o primeiro quadrante. Notamos que esta aluna em particular não compreendia o significado de domínio de uma reta.

Seguem algumas respostas sobre a primeira pergunta do questionário (figuras 20, 21 e 22):


1. Qual (is) reta(s) a dupla encontrou mais dificuldades para realizar a construção? Comente brevemente as dificuldades.

Segmento de retas, pois houve uma pequena dificuldade em achar os numeros para encontrar a reta.

Figura 20 - Resposta da questão 1 da atividade 1 pela dupla A

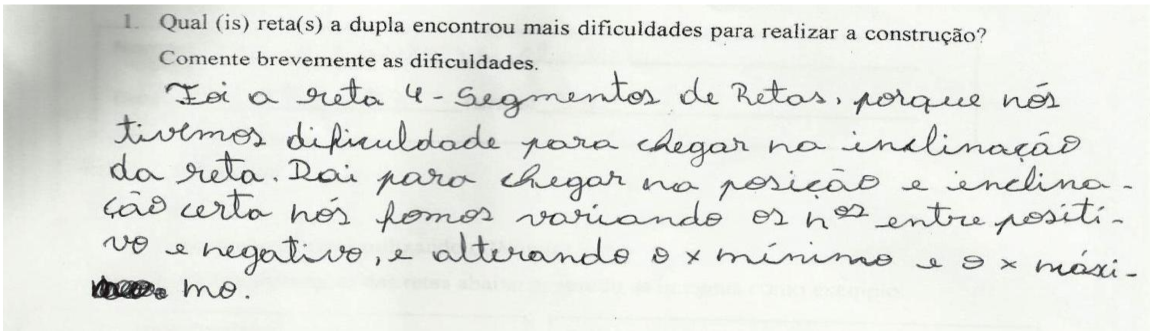

1. Qual (is) reta(s) a dupla encontrou mais dificuldades para realizar a construção?
Comente brevemente as dificuldades.
Foi a reta 4 - Segmentos de Retas, porque nós tivemos dificuldade para chegar na inclinação da reta. Daí para chegar na posição e inclinação certa nós fomos variando os nºs entre positivo e negativo, e alterando o x mínimo e o x máximo.

Figura 21 - Resposta da questão 1 da atividade 1 pela dupla E

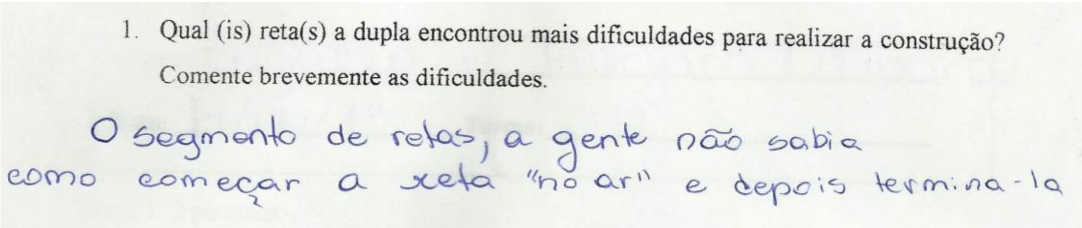

1. Qual (is) reta(s) a dupla encontrou mais dificuldades para realizar a construção?
Comente brevemente as dificuldades.
O segmento de retas, a gente não sabia como começar a reta "no ar" e depois terminá-la

Figura 22 - Resposta da questão 1 da atividade 1 pela dupla D

Os alunos apresentaram esta dificuldade para a construção da reta "que está no ar" devido a não terem um ponto para tomar como referência, sabiam apenas que se tratava de uma reta crescente.

Em observações realizadas nas construções produzidas pelos alunos podemos observar que três duplas não conseguiram realizar a construção correta das retas perpendiculares, conforme a figura 23.

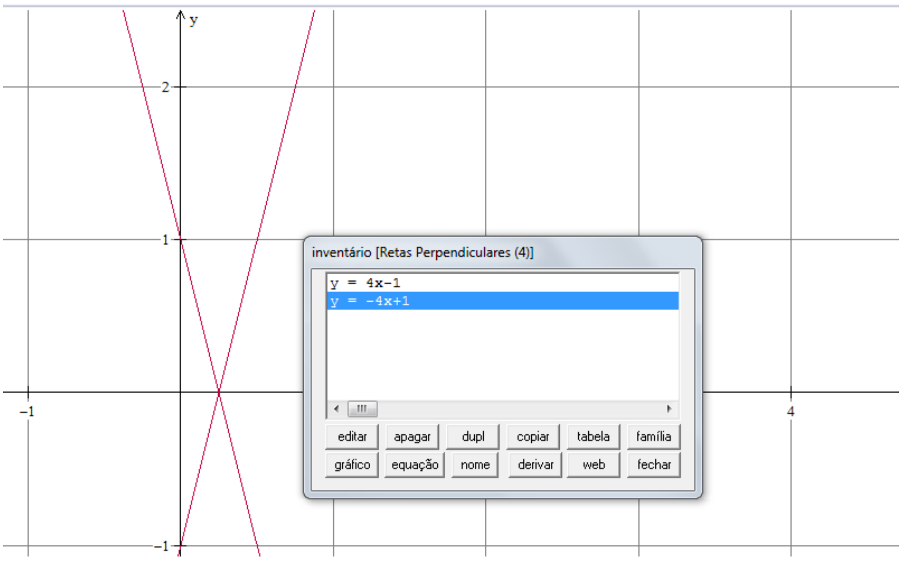


Figura 23 – Construção de retas perpendiculares pela dupla F

Constatamos no item 5, que as duplas responderam utilizando o recurso do winplot *grade*, ou seja, sem realizar o tratamento da questão, usando apenas o recurso visual para responder a questão, sendo que apenas uma dupla resolveu por sistemas pelo método da substituição.

5.2 RELATO DA ETAPA 2

Na etapa 2, realizamos 3 atividades relacionadas com os conteúdos de Geometria Analítica e Geometria Espacial (sólidos de revolução).

ATIVIDADE 2:

Nesta atividade propusemos aos alunos escolherem uma entre as seis figuras sugeridas para realizar a sua construção, utilizando o recurso "superfície de revolução" do *software* winplot.

Construindo sólidos de revolução com o uso do Winplot.

Atividade 2

Construindo retas e determinando seus domínios, bem como o eixo de rotação adequado, escolha uma das imagens de cilindros para fazer sua construção.

Cilindro

FIGURA 1: Tubo de Concreto

FIGURA 2: Parafuso

FIGURA 3: Torre de Hércules

FIGURA 4: Luminária

FIGURA 5: Arquitetura/ México

FIGURA 6:

Figura 24 – Etapa 2 - Atividade 2

Para a realização desta atividade contamos com uma participação menor da turma (11 alunos), pois aplicamos a atividade na sexta-feira e devido ao fato da turma não ter tido aula na quinta, alguns alunos faltaram. Os alunos utilizaram como base para iniciar o trabalho a atividade criada para explicação sobre o *software* (Ver Apêndice C).

Nosso objetivo era o de propor uma atividade diferenciada em Geometria Analítica, diferente do tradicional, pois:

> Geralmente, com o decorrer das aulas, dependendo de como a GA é lecionada, o aluno acaba vendo um apanhado de fórmulas a serem decoradas: ponto médio, baricentro e distância entre dois pontos; as várias equações da reta... (NERY, 2008, p.19.).

Inicialmente os alunos deveriam escolher uma figura para realizar sua construção. Realizado este primeiro passo, deveriam identificar as retas que precisariam ser construídas e escolher um eixo de rotação adequado, e com isso converter registros geométricos em algébricos. Além dessa conversão a atividade contribuiria para o desenvolvimento da visão espacial do aluno.

As duplas se mostraram interessadas em resolver as atividades e ficamos satisfeitos, pois os alunos enxergaram as atividades como um desafio e se engajaram na realização do trabalho. Embora apresentassem dificuldades em determinar as equações das retas como podemos constatar somente entre duas duplas, todas as duplas estavam motivadas. Notamos muitos debates entre as duplas sobre as construções das retas necessárias para a construção. Observamos ainda que algumas duplas estavam na prática de tentativa e erro com relação ao eixo de rotação.

Segue o questionário realizado ao fim da atividade (figura 25).

1. Qual a figura que adupla escolheu para representar? Por quê?

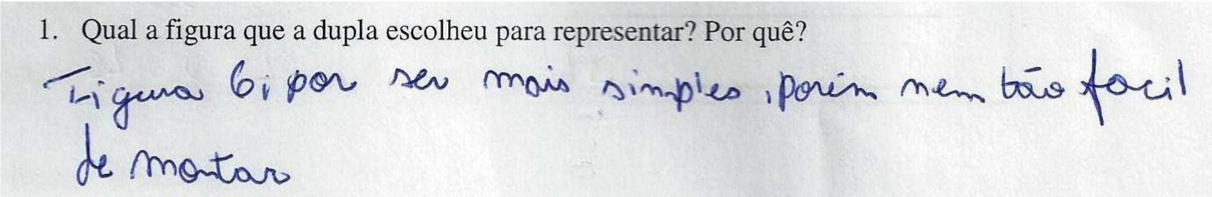
2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

3. Espaço para cálculos (se a dupla não realizou cálculos, coloque neste espaço o que você fez para encontrar as delimitações entre as curvas).

4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Figura 25 – Questionário da Atividade 2

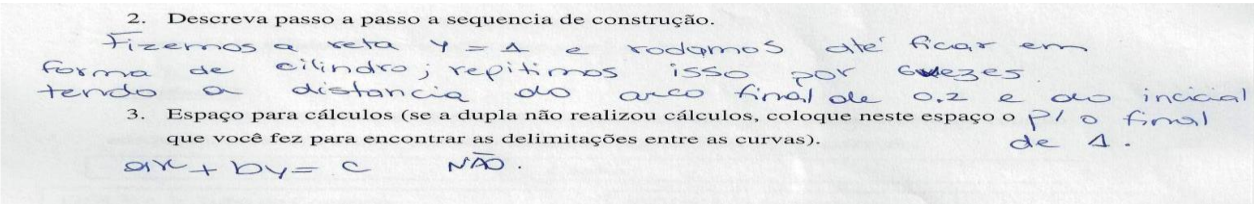
Algumas respostas dadas pelos alunos sobre a atividade dois são as seguintes (figuras 26, 27, 28, 29 e 30):



1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

Figura 6, por ser mais simples, porém nem tão facil de montar

Figura 26 – Resposta da questão 1 da atividade 2 pela dupla C



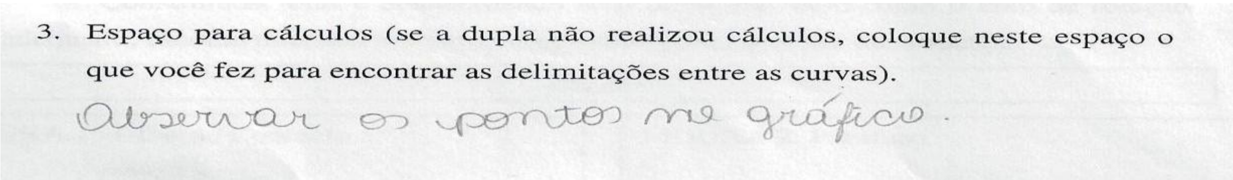
2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

Fizemos a reta y = 1 e rodamos até ficar em forma de cilindro; repitimos isso por 6 vezes tendo a distancia do arco final de 0.2 e do inicial p/ o final de 1.

3. Espaço para cálculos (se a dupla não realizou cálculos, coloque neste espaço o que você fez para encontrar as delimitações entre as curvas).

ax + by = c   NÃO.

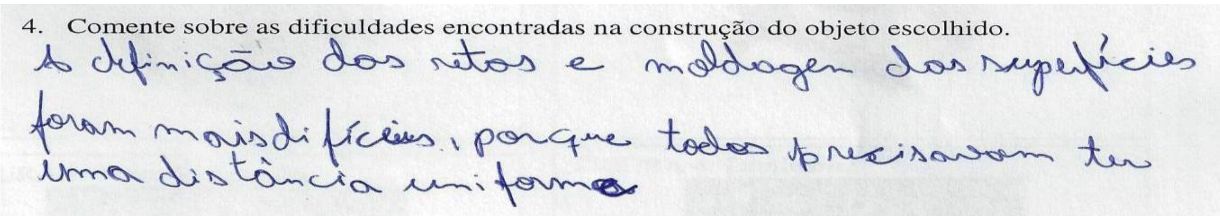
Figura 27 – Respostas das questões 2 e 3 da atividade 2 pela dupla B



3. Espaço para cálculos (se a dupla não realizou cálculos, coloque neste espaço o que você fez para encontrar as delimitações entre as curvas).

Observar os pontos no gráfico.

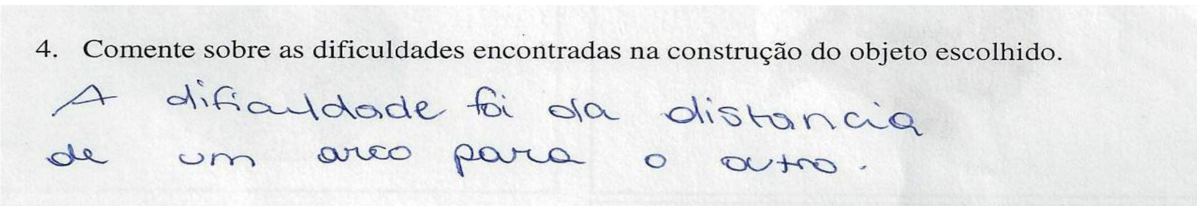
Figura 28 – Resposta da questão 3 da atividade 2 pela dupla E



4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

A definição das retas e moldagem das superfícies foram mais difíceis, porque todas precisavam ter uma distância uniforme

Figura 29 - Resposta da questão 4 da atividade 2 pela dupla C



4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

A dificuldade foi da distancia de um arco para o outro.

Figura 30 - Resposta da questão 4 da atividade 2 pela dupla F

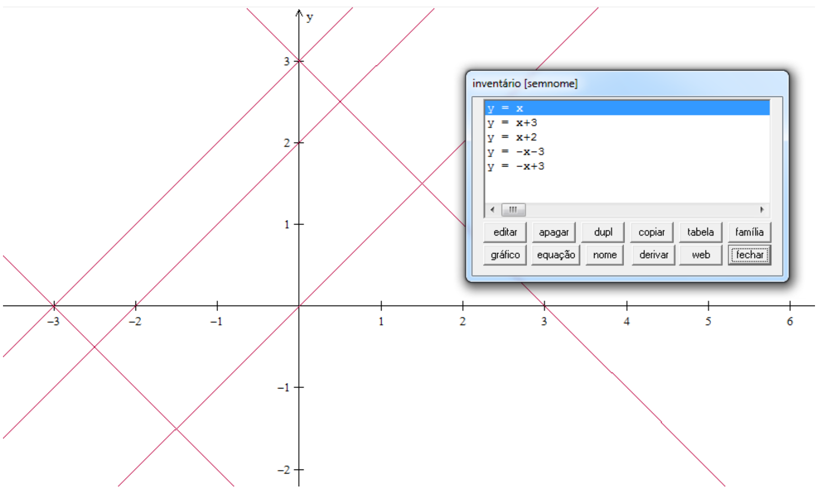
Analisando os arquivos das construções realizadas pelos alunos e as respostas dadas pelos alunos, constatamos que nenhuma dupla realizou cálculos para encontrar as delimitações entre as retas para realizar as construções, como podemos observar na figura 30, onde a aluna escreve que a dificuldade foi encontrar o domínio necessário, e no espaço destinado ao tratamento da questão não foram realizados cálculos.

Neste momento não intervimos, apenas observamos as soluções dadas pelos alunos, na sua totalidade inseriram a grade nos eixos e determinavam o domínio por tentativa e erro. Acreditávamos que na questão 3 os alunos deveriam efetuar um cálculo para determinar o ponto de intersecção entre as retas.

Nesta etapa surgiram as primeiras dificuldades, pois se tratava de uma atividade que os alunos não estavam habituados a trabalhar em sala de aula. A primeira dificuldade surgiu, não com relação às retas que deveriam ser construídas, mas em como transformá-las nas equações algébricas necessárias, pois eles estavam querendo retas do tipo $x = c$, e estávamos usando retas explícitas do tipo $y = ax + b$.

Superada esta dificuldade, outra surgiu com relação ao eixo de rotação. Cada dupla desenvolveu suas técnicas para resolver, uma das soluções pelos alunos foi a de fazer um esboço no papel das retas que deveriam ser construídas, articulando a representação geométrica com a algébrica. Após, decidiam o eixo de rotação e ficavam imaginando se o sólido obtido seria o desejado. Seguido, deste debate a dupla realizava a rotação. Vamos observar agora algumas figuras (31, 32, 33, 34, 35 e 36) produzidas pelos alunos durante a atividade.

Figura 31 – Retas construídas pela dupla F para construção do Tubo de concreto



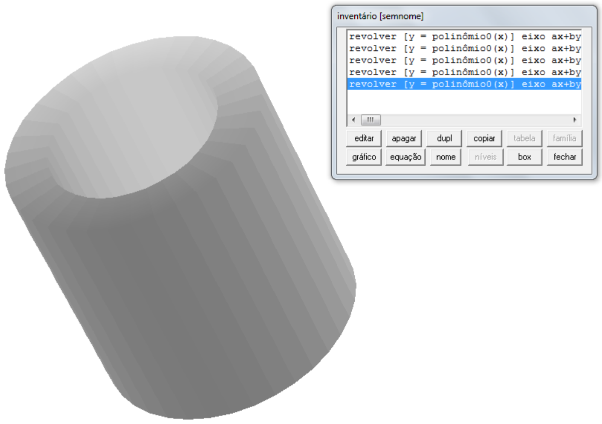


Figura 32 – Construção tubo de concreto pela dupla F

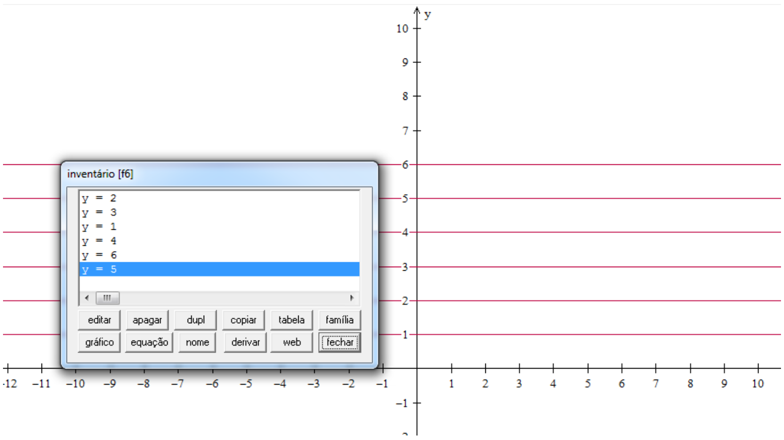


Figura 33 – Retas construídas pela dupla C para construção do bloco de cilindros

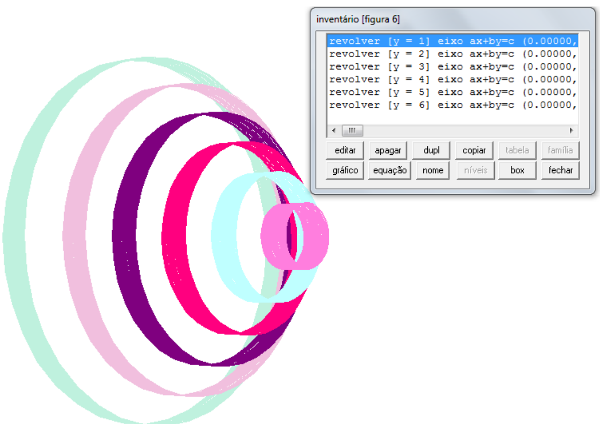


Figura 34 – Construção bloco de cilindros pela dupla C

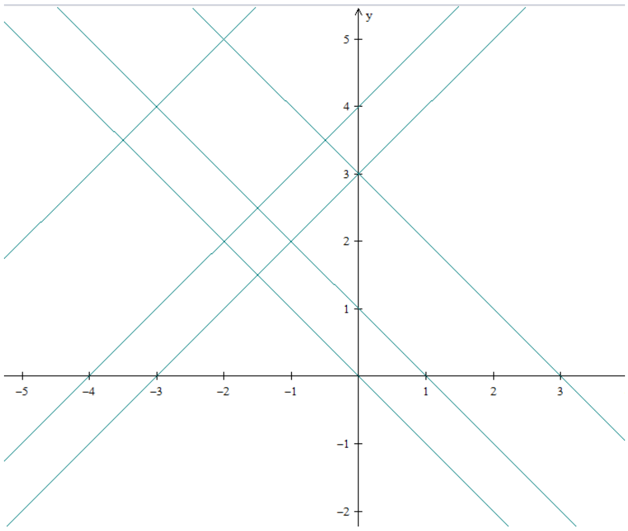


Figura 35 – Retas construídas pela dupla A para construção do parafuso

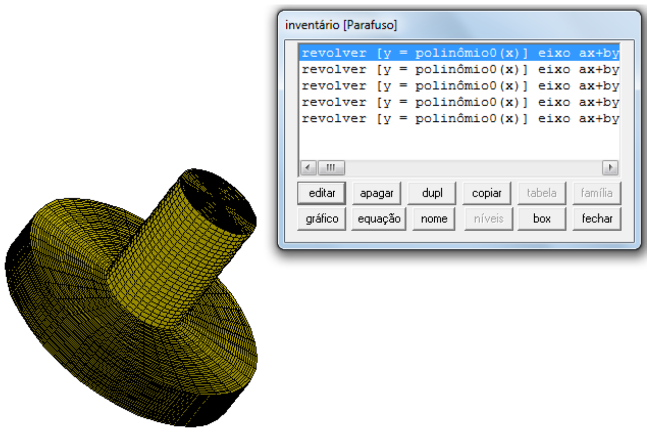
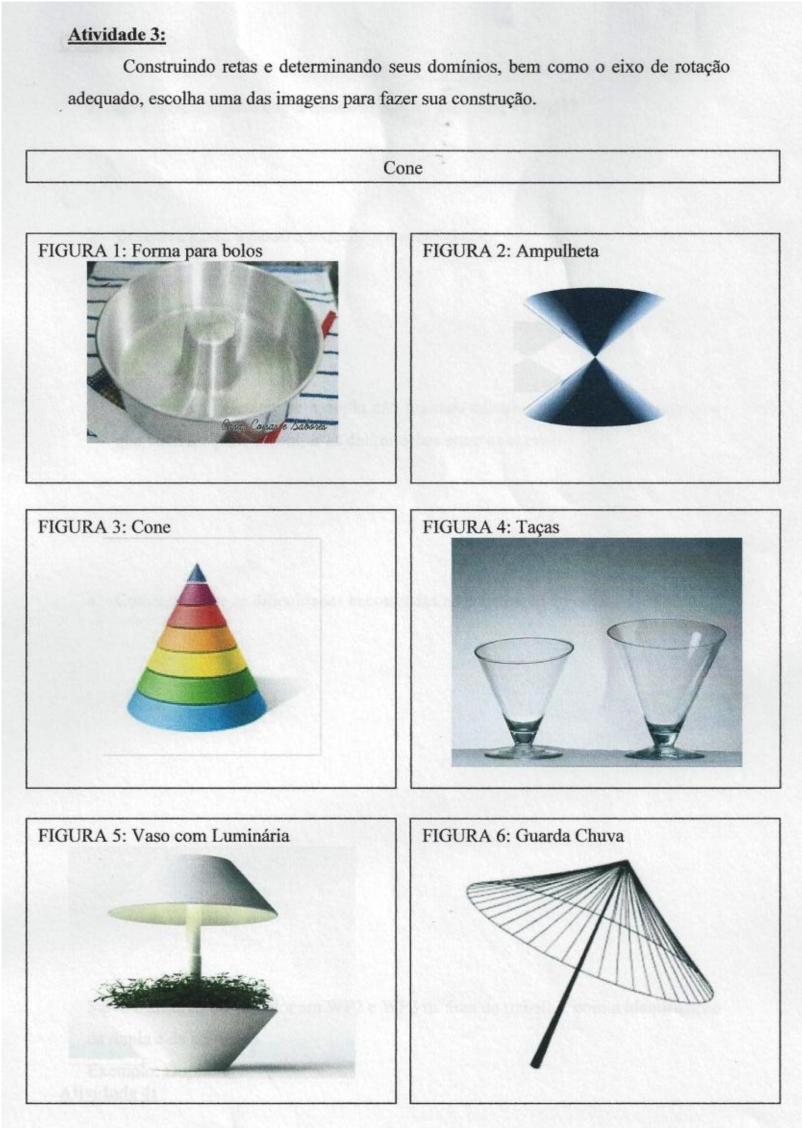


Figura 36 – Construção do Parafuso pela dupla A

As figuras escolhidas pelos alunos foram o tubo de concreto, o parafuso e o bloco de cilindros, ou por acharem mais interessante ou por acharem mais fácil, que foram as respostas que podemos constatar no questionário respondido pelas duplas.

ATIVIDADE 3:

A atividade 3 é similar à atividade 2, só que agora utilizamos como base das figuras o cone, como podemos observar na figura 37.



Atividade 3:

Construindo retas e determinando seus domínios, bem como o eixo de rotação adequado, escolha uma das imagens para fazer sua construção.

Cone

FIGURA 1: Forma para bolos	FIGURA 2: Ampulheta
FIGURA 3: Cone	FIGURA 4: Taças
FIGURA 5: Vaso com Luminária	FIGURA 6: Guarda Chuva

Figura 37 – Etapa 2 - Atividade 3

Nesta atividade sentimos que os alunos estavam mais *tranquilos* com relação à utilização do software e mais confiantes para a realização das atividades. Neste dia uma das alunas comentou que estava gostando da atividade, porque ela saiu da sala de aula e estava vendo a matemática de uma forma diferente. Não levando em conta somente a resposta da aluna, observamos na turma a motivação com a qual estavam realizando a atividade e a interessante troca de informações entre os componentes da dupla enquanto a realizavam.

Observamos que durante a atividade as duplas, na sua maioria, apresentaram dificuldades quanto ao eixo de rotação adequado. Na maioria dos casos os alunos estavam construindo as retas corretamente, mas não estavam "enxergando" o eixo rotacional. Apresentamos algumas respostas dadas pelas duplas sobre as construções realizadas bem como as suas dificuldades e a sequencia para a construção (figuras 38, 39, 40 e 41).

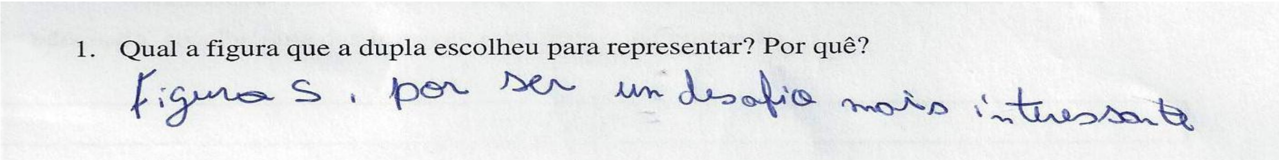
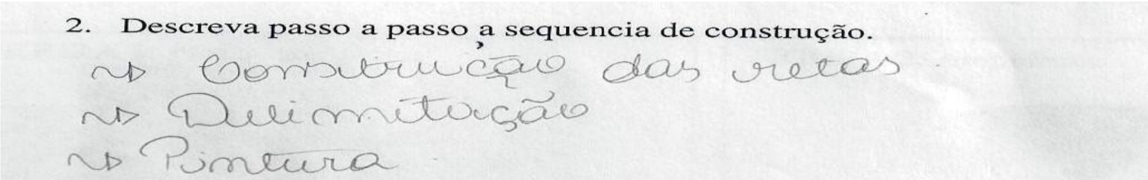

1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

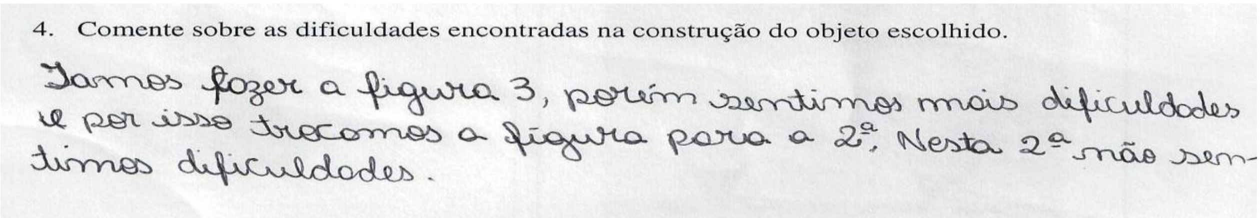
Figura 5. por ser um desafio mais interessante

Figura 38 – resposta da questão 1 da atividade 3 pela dupla C


2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

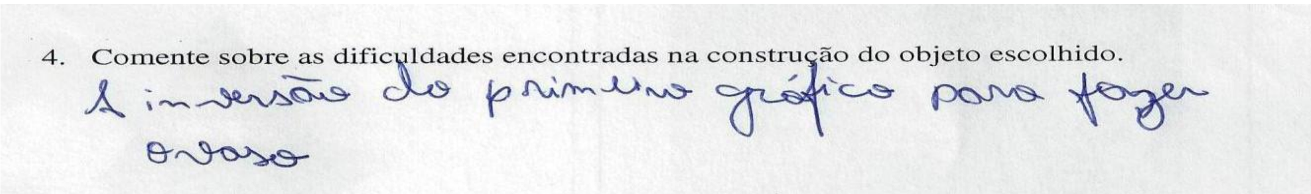
-> Construção das retas
-> Delimitação
-> Pintura

Figura 39 – resposta da questão 2 da atividade 3 pela dupla E


4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Íamos fazer a figura 3, porém sentimos mais dificuldades e por isso trocamos a figura para a 2ª. Nesta 2ª não sentimos dificuldades.

Figura 40 – resposta da questão 4 da atividade 3 pela dupla B


4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

A inversão do primeiro gráfico para fazer o vaso

Figura 41 – resposta da questão 4 da atividade 3 pela dupla C

Observando a figura 38 vimos que esta dupla sentiu-se desafiada a realizar a construção do vaso de plantas. Acreditamos que este fato é decisivo para o engajamento dos alunos nas atividades. O aluno não conseguiu terminar a construção, apenas realizar a parte inferior do vaso como podemos observar na figura 42.

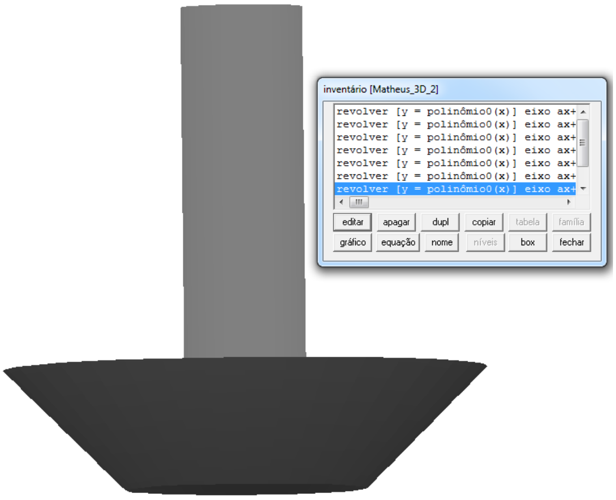


Figura 42 – Vaso construído pela dupla C

Consideramos que os alunos utilizariam o espaço destinado para contas para montar sistemas com as retas para determinar o ponto de intersecção dessas retas e delimitar o domínio adequado. Porém o observado durante a realização das atividades era que os alunos ou utilizavam a ferramenta “mostrar arco” ou ainda utilizavam a grade do winplot para encontrar o domínio.

Acreditamos serem válidos estes recursos utilizados pelos alunos, pois mesmo não realizando contas os alunos as utilizaram ao máximo. Além disso, eles apresentavam um relativo conhecimento sobre domínio.

Apenas uma imagem não foi escolhida pelos alunos, que foi a figura 4 da atividade (taças). Apresentamos a seguir algumas das construções realizadas por eles (figuras 43, 44, 45, 46, 47 e 48):

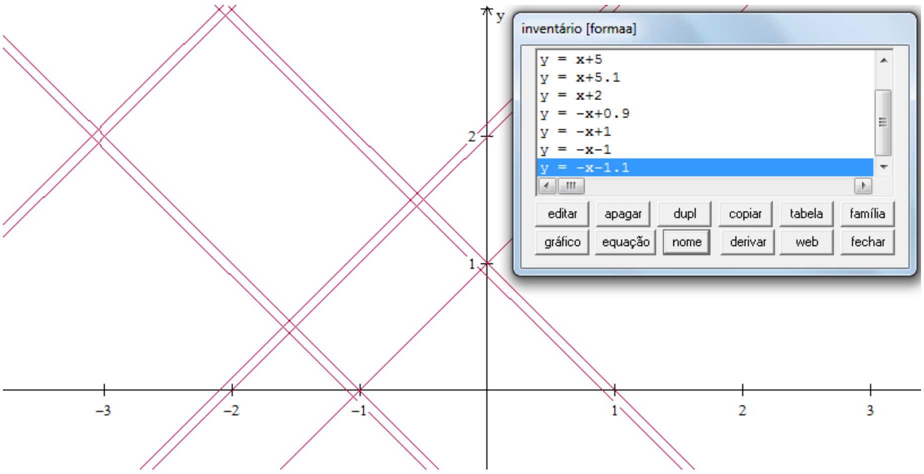


Figura 43 – Construção das retas para construir a forma pela dupla A

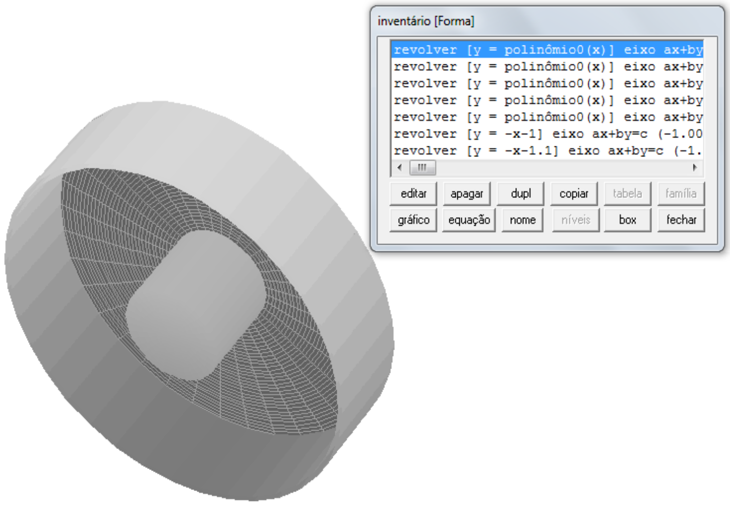


Figura 44 – Construção da forma pela dupla A

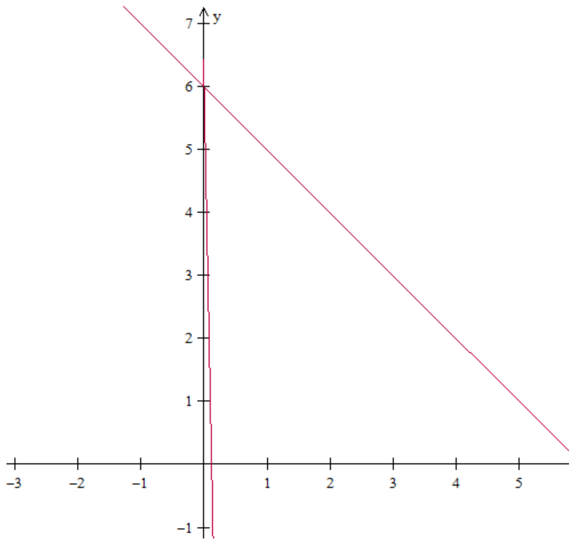


Figura 45 - Retas construídas pela dupla E para construção do guarda chuva

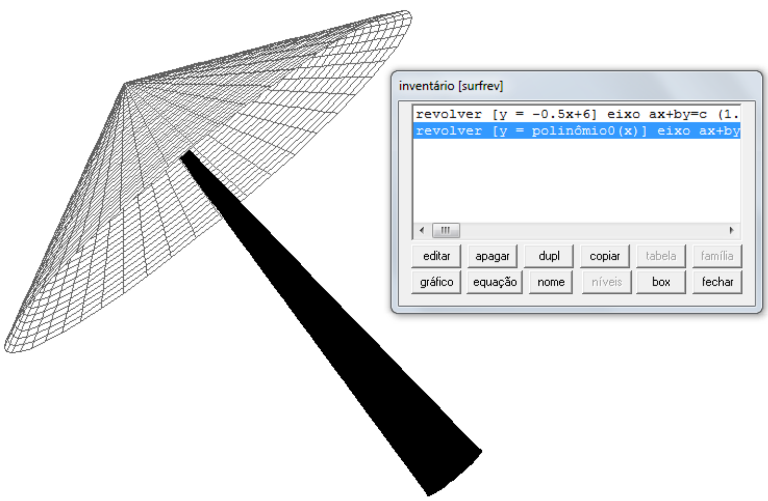


Figura 46 - Construção do guarda chuva pela dupla E

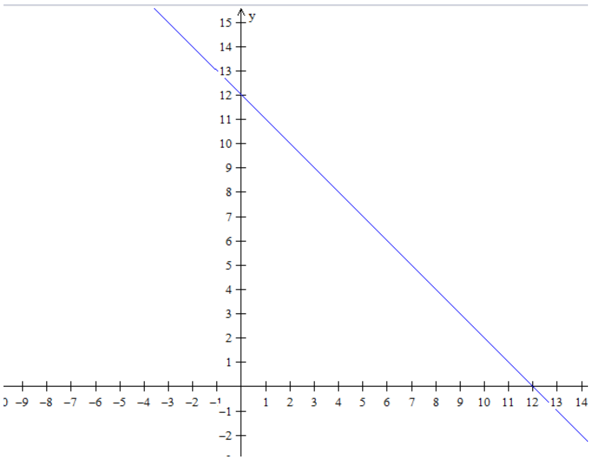


Figura 47 – Retas construídas pela dupla F para construção do bloco de cones

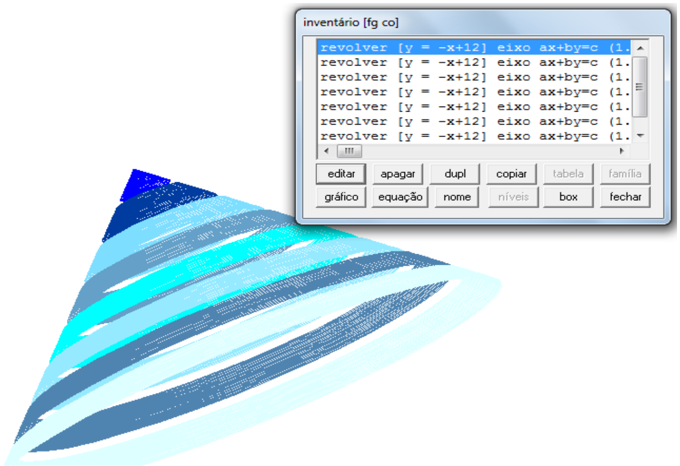


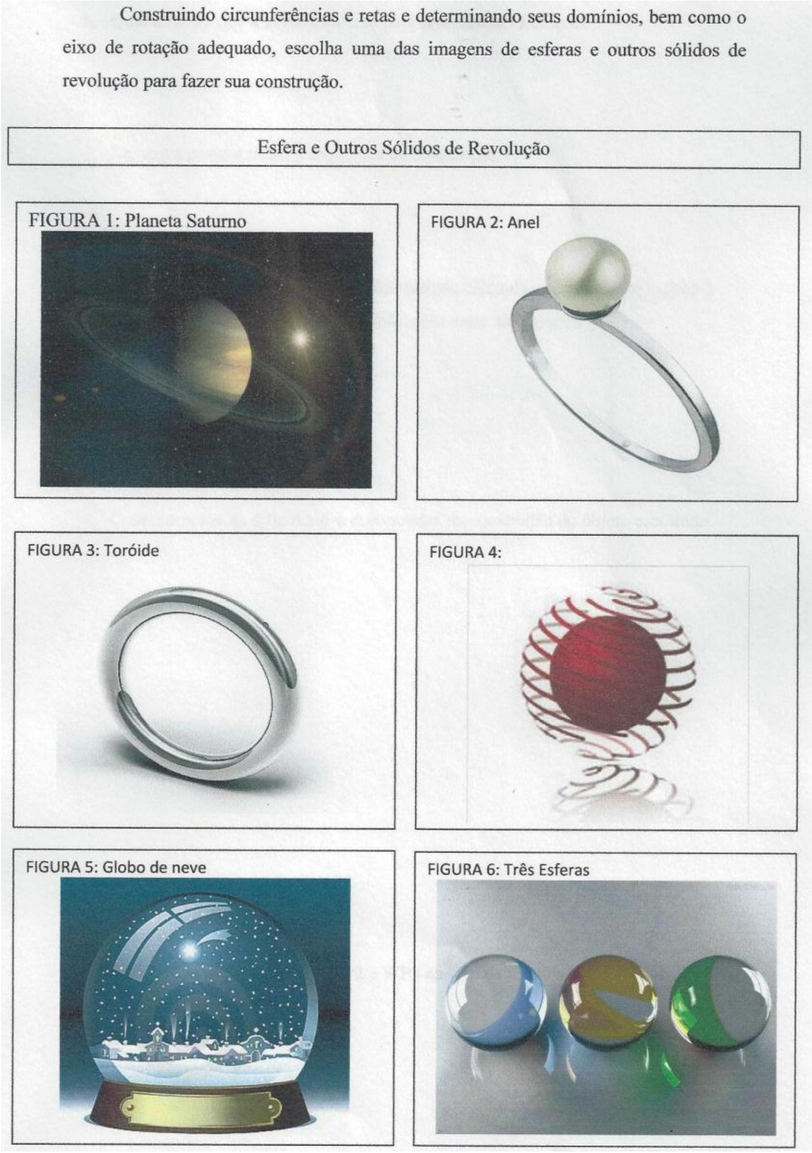
Figura 48 – Construção do bloco de cones pela dupla F

Podemos observar (figura 43, 45 e 47) as construções das retas pelas duplas (A, E e F) para realizar as construções dos sólidos como a forma, o guarda chuva e os troncos de cones como podemos observar nas figuras (44, 46 e 48) respectivamente.

Observamos que os alunos não apresentaram muitas dificuldades em relacionar a representação geométrica com a algébrica na construção das retas; surgiram problemas apenas para determinar o domínio adequado obtido para a rotação, sendo utilizado o método de tentativa e erro.

ATIVIDADE 4:

A atividade 4 é similar às atividades anteriores, só que agora utilizamos como base das figuras a circunferência.



Construindo circunferências e retas e determinando seus domínios, bem como o eixo de rotação adequado, escolha uma das imagens de esferas e outros sólidos de revolução para fazer sua construção.

Esfera e Outros Sólidos de Revolução

FIGURA 1: Planeta Saturno

FIGURA 2: Anel

FIGURA 3: Toróide

FIGURA 4:

FIGURA 5: Globo de neve

FIGURA 6: Três Esferas

Figura 49 – Etapa 2 - Atividade 4

Após os alunos escolherem a figura que desejavam construir, apareceram as dificuldades logo no inicio das atividades. Estávamos utilizando equações explícitas, e na equação da circunferência as duplas na sua maioria apresentaram dificuldades em isolar a variável y. Neste momento optamos por intervir na atividade para que esta dificuldade não desencorajasse os alunos, para isso criamos um exemplo para eles utilizarem como modelo.

Realizada esta explicação as duplas iniciaram as atividades projetando em seus cadernos as figuras que deveriam ser construídas, e na sua maioria as duplas estavam isolando a variável y após escolherem o centro e o raio da circunferência. As escolhas das figuras por parte das duplas foram de acordo com a dificuldade estimada por eles, como podemos observar em algumas respostas dadas pelos alunos.

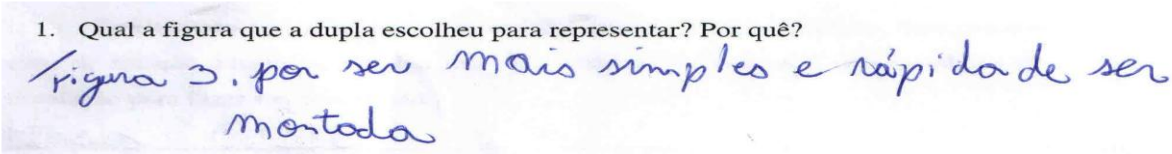

1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

Figura 3. por ser mais simples e rápida de ser montada

Figura 50 – Resposta da questão 1 da atividade 3 pela dupla C

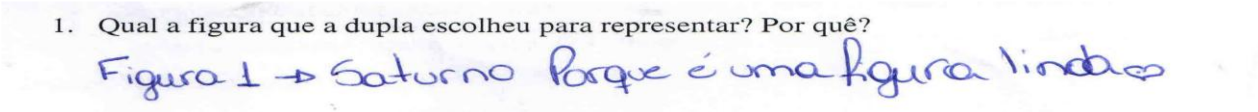

1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

Figura 1 → Saturno Porque é uma figura linda

Figura 51 – Resposta da questão 1 da atividade 3 pela dupla A

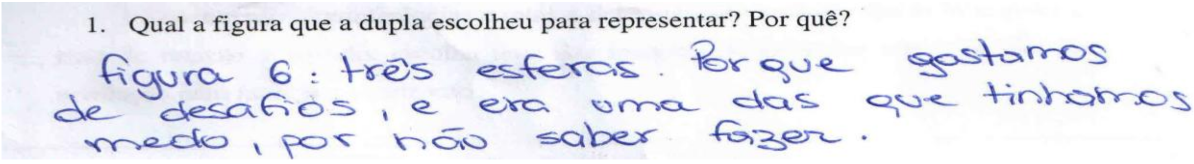
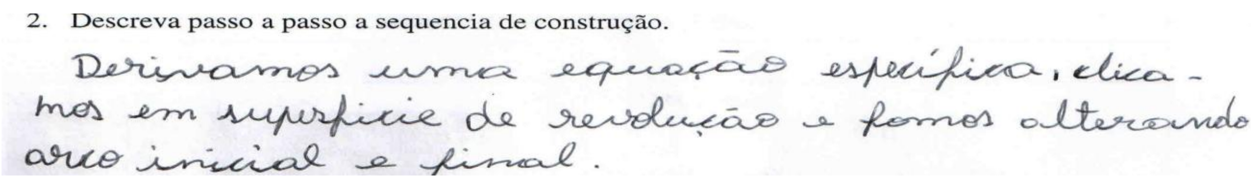

1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

figura 6: três esferas. Porque gostamos de desafios, e era uma das que tinhamos medo, por não saber fazer.

Figura 52 – Resposta da questão 1 da atividade 3 pela dupla E

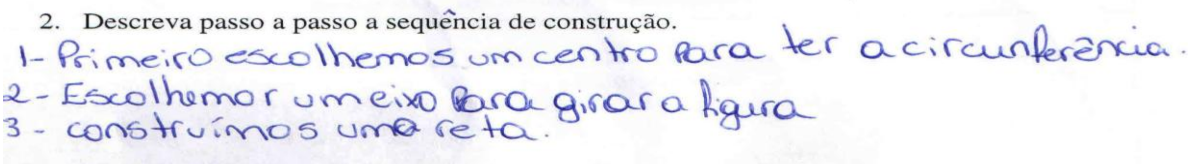
Analisando as respostas dos alunos, percebemos que algumas duplas sentiram-se desafiadas com relação a algumas figuras, outras optaram por figuras que julgaram ser mais simples para realizar a construção.

Em análises realizadas sobre as respostas dos alunos acerca da questão 2 observamos algumas dificuldades destes em transcrever o passo a passo da sequencia (figuras 53 e 54).


2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

Derivamos uma equação específica, clicamos em superficie de revolução e fomos alterando arco inicial e final.

Figura 53 – Resposta da questão 2 da atividade 3 pela dupla B


2. Descreva passo a passo a sequência de construção.

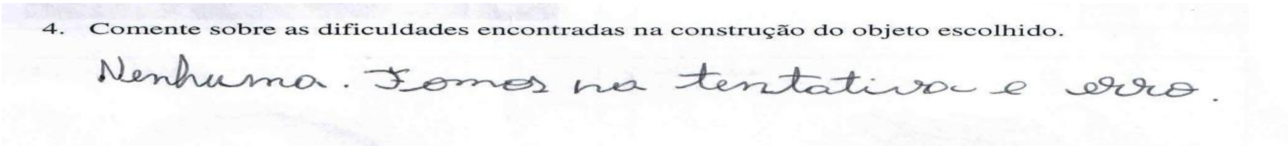
1- Primeiro escolhemos um centro para ter a circunferência.
2- Escolhemor um eixo para girar a figura
3- construímos uma reta.

Figura 54 – Resposta da questão 2 da atividade 3 pela dupla A

Observando a figura 53 identificamos que a dupla apresentou algumas dificuldades em identificar o domínio adequado da circunferência. As duplas na sua maioria apresentaram esta dificuldade inicial, tentando resolver pelo método de tentativa e erro.

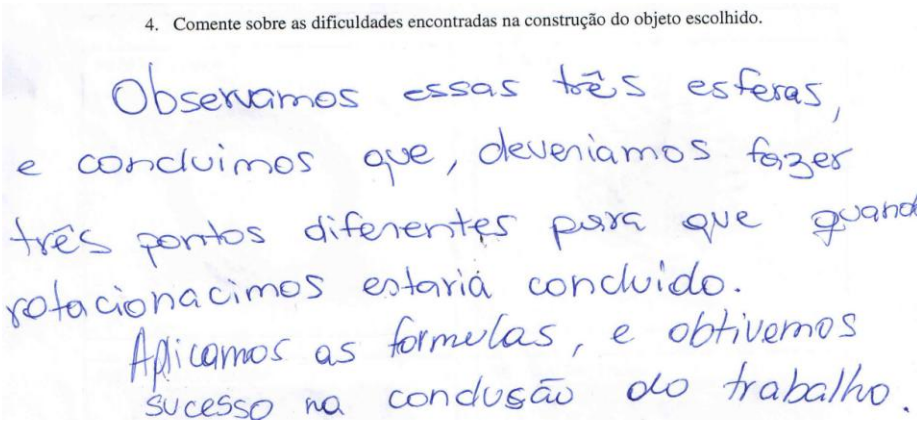
Novamente nos espaços destinados à realização de cálculo nenhuma dupla apresentou cálculos para encontrar os domínios adequados.

Ao analisar as respostas dos alunos, vimos que alguns alunos apresentaram dificuldades sobre a equação da circunferência. Uma dupla construiu a circunferência, mas não conseguiu determinar o eixo de rotação como podemos observar na figura 48. Seguem algumas respostas dos alunos (figuras 55, 56 e 57).


4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

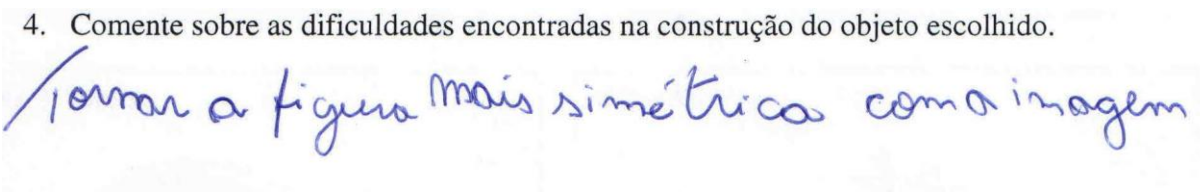
Nenhuma. Fomos na tentativa e erro.

Figura 55 – Resposta da questão 4 da atividade 3 pela dupla B


4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Observamos essas três esferas, e concluimos que, deveriamos fazer três pontos diferentes para que quand rotacionacimos estariá concluido.
Aplicamos as formulas, e obtivemos sucesso na condusão do trabalho.

Figura 56 – Resposta da questão 4 da atividade 3 pela dupla E


4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Tornar a figura mais simétrica com a imagem

Figura 57 – Resposta da questão 4 da atividade 3 pela dupla C

Analisando a resposta de uma das duplas (figura 55), verifica-se que a dupla sente dificuldade em construir a imagem escolhida, pois não estava encontrando o domínio correto. Seguem algumas construções realizadas pelas duplas (figuras 58, 59, 60, 61, 62 e 63):

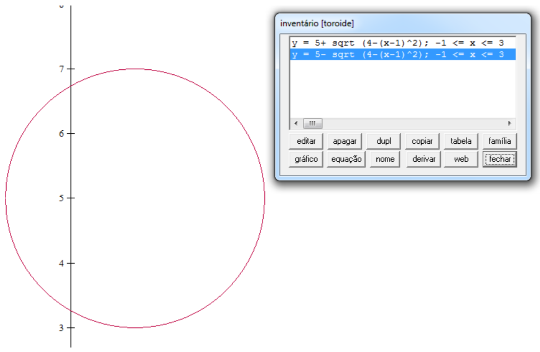


Figura 58 – Circunferência construída pela dupla C para construção do toróide

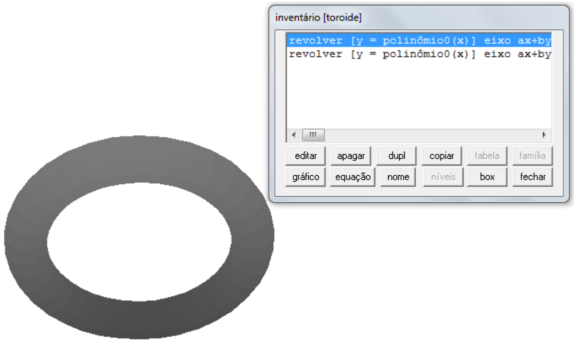


Figura 59 – Construção do Toróide pela dupla C

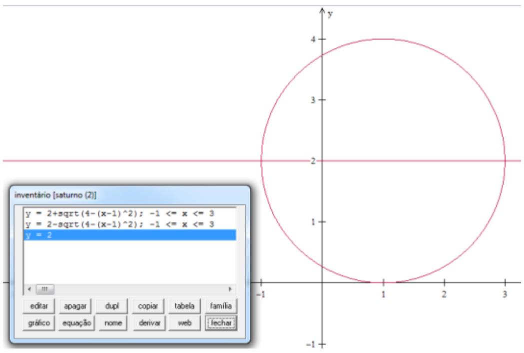


Figura 60 - Circunferência construída pela dupla A para construção do Saturno

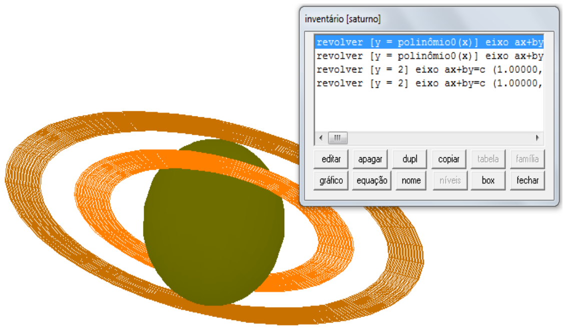


Figura 61 - Construção do Planeta Saturno

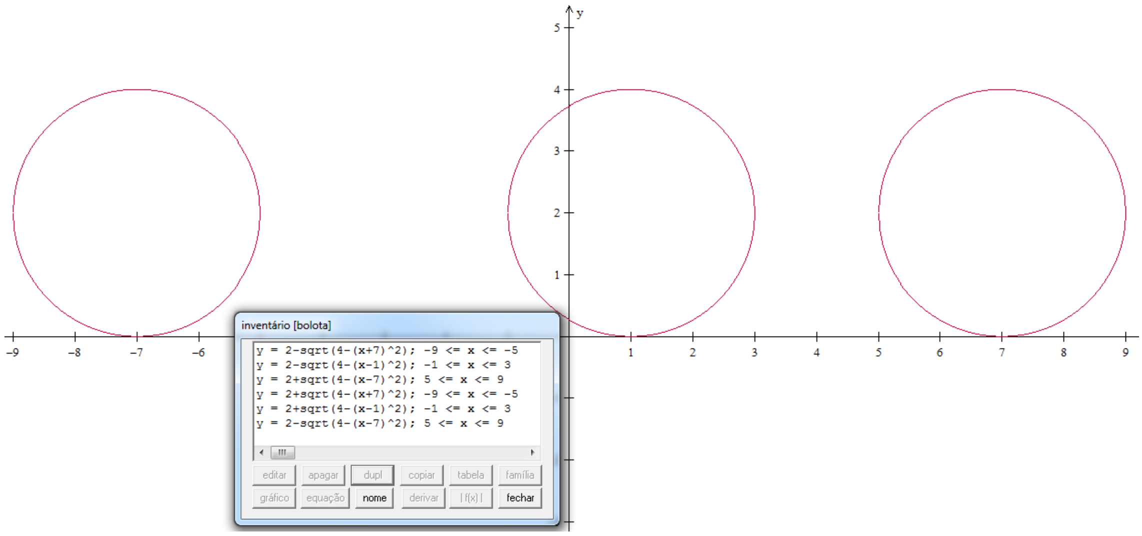


Figura 62 - Circunferências construídas pela dupla E para construção das esferas

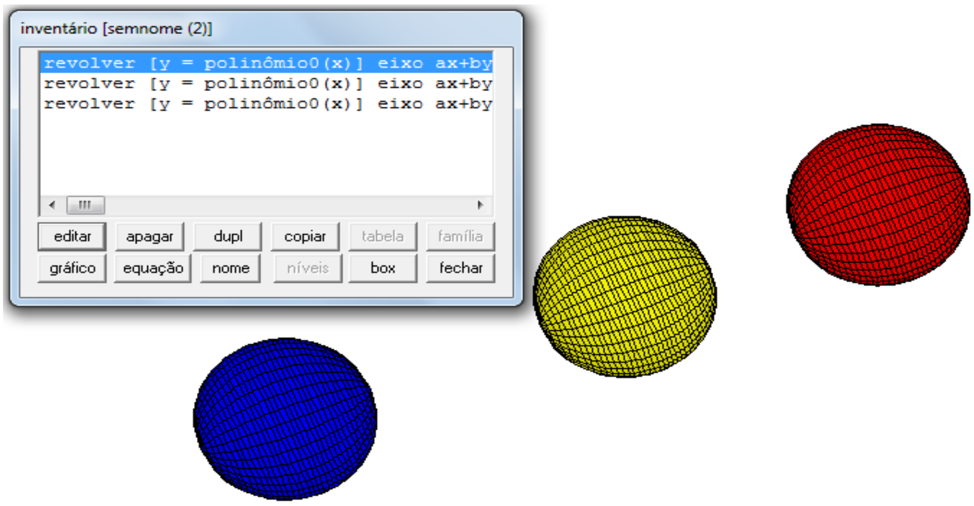


Figura 63 - Construção das três esferas pela dupla E

4.4 ANÁLISE *A PRIORI* E ANÁLISE *A POSTERIORI*

Nesta fase da Engenharia Didática, confrontaram-se as análises *a priori* e *a posteriori*, ao realizar uma análise sobre os dados obtidos na experimentação da sequência didática realizada, para posteriormente validar ou não a pesquisa sobre a aprendizagem em Geometria Analítica em ambientes informatizados.

4.4.1 ETAPA 1 DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.4.1.1 ANÁLISE *A PRIORI* DA ETAPA 1

Nesta etapa, os alunos deveriam perceber o que acontece com as retas quando ocorre a alteração dos coeficientes angular e linear para equações do tipo $y = ax + b$, analisar as posições relativas entre retas no plano, bem como explicitar os domínios partindo de equações de retas no plano cartesiano.

A hipótese inicial acerca desta atividade era que em um primeiro momento os alunos apresentariam dificuldades para compreender o papel dos coeficientes nas equações das retas, mas gradativamente iriam relacionar os coeficientes e realizar conversões de registros. Acreditou-se que o exercício dois da atividade 1 seria o mais complicado, pois envolvia a influência do coeficiente angular na construção de retas perpendiculares, e que os alunos iriam construir as retas na tentativa e erro.

Outro fator que poderia contribuir para o desempenho dos alunos era o fato de ser uma aula realizada em um ambiente informatizado, e que eles não tinham um conhecimento sobre o *software.* Contudo, prevendo esta possível dificuldade, realizou-se uma aula prévia para a explicação do software com uma atividade modelo, conforme o Apêndice B.

Após esta etapa, considerou-se que os alunos compreenderiam melhor a influência dos coeficientes angular e linear, as posições relativas entre retas no plano cartesiano, além de conseguirem realizar algumas conversões de registros geométricos em algébricos.

4.4.1.2 ANÁLISE *A POSTERIORI* DA ETAPA 1:

No início dos trabalhos, duas duplas tiveram dificuldade em iniciar as atividades propostas, pelo pouco contato que tiveram com o *software*. Após uma explicação sobre como “utilizar” o *winplot* para aquela atividade, as duplas realizaram os exercícios sem problemas.

No início das atividades, a maioria das duplas estava construindo retas pelo método da tentativa e erro. Acredita-se que isto ocorre porque os alunos desconhecem o significado de cada posição relativa em correspondência com a sua representação algébrica.

Constatou-se que para algumas duplas o significado de retas perpendiculares não ficou sólido, como observado na atividade 1. Ou seja, os alunos não relacionaram corretamente as representações algébricas e geométricas em virtude de dificuldades na construção dos segmentos de retas, mas consideramos também que se deve ao pouco contato e utilização do *software*.

No decorrer das atividades pode-se notar que as duplas já estavam familiarizadas com o software e alguns "movimentos" que o gráfico faria quando alterados seus coeficientes. A maioria percebeu a influência dos coeficientes na equação reduzida da reta e também construiu corretamente todos os itens na atividade 1, com exceção de três duplas que não conseguiram desenvolver as retas perpendiculares.

Apesar de duas duplas não conseguirem realizar as construções de todas as retas, elas obtiveram um resultado satisfatório e colaboraram para que os objetivos fossem atingidos.

4.4.2 ETAPA 2 DA SEQUENCIA DIDÁTICA

4.4.2.1 ANÁLISE *A PRIORI* DA ETAPA 2

Realizaram-se 3 atividades na etapa 2, e o conteúdo de Geometria Analítica foi desenvolvido através da obtenção de sólidos de revolução, este já visto pelos alunos. Utilizou-se o recurso do software *winplot*, *sólidos de revolução*, que permite a rotação de curvas no plano (como o eixo de revolução reta), para obtenção de sólidos de revolução.

Nesta etapa, o objetivo principal era de que os alunos percebessem a importância em reconhecer as posições relativas entre retas e em articular registros algébricos e geométricos. Ao partir da imagem do sólido, para a identificação das retas necessárias à construção, convertendo estes registros geométricos em algébricos, e ao utilizar retas ou circunferências, identificando os domínios adequados em cada curva construída e executando a rotação.

Por ser uma atividade que os discentes não estão habituados a realizar, acreditou-se que, inicialmente, eles apresentariam dificuldades para "determinar" as retas a serem construídas para a obtenção da figura escolhida, bem como explicitar os domínios corretamente. Além disso, dúvidas com relação ao eixo de revolução poderiam ocorrer, pois se tratava de uma atividade com a qual os alunos não estão acostumados, e os livros didáticos analisados não exploram este tipo de atividade.

Outros obstáculos que poderiam surgir durante o desenvolvimento da atividade diz respeito à equação da circunferência, pois utilizamos com o *software* somente equações na sua forma explícita. Assim, considerou-se que os alunos teriam uma dificuldade maior em "isolar" a variável y. Analisou-se, também, a complexidade quanto à resolução de sistemas para determinar o ponto de intersecção entre curvas no plano, devido ao resultado obtido na atividade prévia.

Acreditou-se que após a realização das atividades, os alunos conseguiriam converter e transitar entre uma representação e outra, e reconhecer a correspondência semiótica entre os registros, relações entre as curvas e realizar tratamentos dentro de um mesmo registro semiótico.

Cabe salientar que para cada etapa existem atividades de fácil construção e outras que requerem construções mais "sofisticadas". Assim, os estudantes estariam inclinados a escolherem as atividades que julgassem mais fáceis.

4.4.2.2 ANÁLISE *A POSTERIORI* DA ETAPA 2:

Nesta etapa, pode-se observar um debate maior entre as duplas para a realização das atividades, o qual foi de fundamental importância para a troca de ideias, resolução dos problemas e a troca de conhecimentos entre os alunos.

No decorrer das atividades e nas construções por parte dos alunos, observou-se que algumas duplas estavam apresentando dificuldades para identificar as retas necessárias para a obtenção da figura escolhida, enquanto outras estavam construindo corretamente e convertendo os registros corretamente.

O impedimento mais latente durante a prática refere-se à determinação dos pontos de intersecção entre as retas, considerando que o método apresentou-se pela utilização do botão "mostrar arco", que claramente auxiliou os alunos na realização da tarefa. Contudo, os alunos efetuaram as conversões, mas não conseguiram realizar os tratamentos, ratificando a suposição de que as duplas demonstrariam dificuldades em determinar o ponto de intersecção entre retas, seja por sistema ou por outro método.

Acertou-se com relação à dificuldade dos alunos em afastar a variável na equação geral da circunferência, pois apenas uma dupla conseguiu isolá-la corretamente, sem a intervenção do pesquisador.

4.5 VALIDAÇÃO DA PESQUISA:

Nesta última fase da Engenharia Didática, analisou-se o que deu certo e o que pode ser melhorado na proposta de ensino criada, fundamentada no confronto entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal processo teve início a partir da avaliação de escolhas para a realização da proposta, e se contribuíram de alguma maneira para o aprendizado dos alunos.

De uma maneira geral, acredita-se que a prática realizada atingiu alguns objetivos propostos, isto porque a turma sempre se mostrou interessada e participativa na resolução das atividades, como a resposta de um aluno com relação à escolha justificada de uma figura, por se tratar de um desafio mais interessante. Além disso, em diálogos estabelecidos com os discentes sobre a utilização do laboratório de informática, descobriu-se que era a primeira vez naquele ano que estavam realizando atividades fora da sala de aula. Outro fator que proporcionou o engajamento da turma foi o fato de os alunos acreditarem que a proposta era “interessante e desafiadora”.

Identificou-se a dificuldade de os alunos expressarem pensamentos por meio da língua escrita, principalmente para descrever a continuidade de construção utilizada ou mesmo no espaço destinado às contas quando tiveram que preencher um questionário ao final aula. Eles conseguiram, na maioria das proposições, realizar as conversões de registros algébricos e geométricos, mas na hora da escrita não traduziram este pensamento para a língua natural. Portanto, sugere-se que esta carência *expressa por meio de palavras* está contida na pouca ênfase desenvolvida pelos docentes durante a sua formação.

Com a opção de trabalhar-se em ambientes informatizados, procurou-se ter cuidado com relação à proposta de ensino, pois a informática pode enganar pelo visual atrativo, reforçando as mesmas características e privilegiando a transmissão do conhecimento (GRAVINA; SANTAROSA, 2008). No que tange à utilização do software *winplot*, obteve-se êxito, já que as duplas não apresentaram maiores dificuldades durante a atividade. Acredita-se que o ambiente informatizado favoreceu o engajamento e a integração dos alunos, o que se deve também ao sentido atrativo das práticas. Salienta-se, ainda, apenas uma observação sobre o uso do software, na atividade 1, devido à hesitação dos alunos em construírem segmentos de retas, ora porque os mesmos tiveram pouco contato com o programa, ora por não estarem acostumados a representar retas com restrição de intervalos.

As escolhas referentes ao planejamento das atividades, utilizando a Teoria dos Registros de Representação, demonstraram um excelente retorno durante a realização da sequência didática, especialmente na conversão de registros. Todavia, não obtivemos os resultados esperados na realização de tratamentos, uma vez que os alunos, em sua maioria, não efetuaram cálculos "para encontrar a resposta", realizando esta etapa em cada atividade pelo método de tentativa e erro. Deixa-se como sugestão para uma próxima atividade, trabalhar com os alunos os conhecimentos prévios necessários para as realizações das atividades *resgatando* esse conhecimento *esquecido* por parte do estudante.

Outra escolha válida está relacionada à opção de os alunos realizarem as atividades em duplas, o que motivou o grupo em virtude de possuírem afinidades ao trocarem informações e privilegiando debates sobre a melhor maneira de resolver os problemas, utilizando argumentos que são úteis na realização de conversões e tratamentos de registros semióticos.

Iniciou-se a atividade 1com a representação geométrica de retas e segmentos no plano cartesiano, usando algumas posições relativas entre retas (paralelas perpendiculares e concorrentes) para que os alunos construíssem retas com o uso do *winplot*, e que estas retas construídas mantivessem as posições relativas existentes em cada item proposto. Objetivou-se, com esta atividade, que os alunos conseguissem realizar conversões de registros geométricos para algébricos, bem como identificassem a influência dos coeficientes angular e linear na equação explícita da reta e, ainda, realizassem um tratamento para determinar o ponto de intersecção das retas concorrentes.

Os alunos aceitaram a situação e iniciaram a resolução da atividade. Na maioria dos casos, pode ser observado que as duplas procuraram resolver pelo método de tentativa e erro, o que é válido, pois neste momento estão experimentando suas "teorias".

O objetivo proposto nesta atividade 1 foi parcialmente atingido, pois nem todas as duplas conseguiram realizar as conversões e tratamentos corretamente nas ações prévias. Mesmo que as duplas tenham feito construções em conformidade com as normas, vale sugerir uma reformulação tanto na atividade (onde os alunos trabalhem as conversões no sentido algébrico - geométrico) quanto no questionário (realizar perguntas específicas sobre cada item) para a próxima oportunidade. Quando indagadas sobre o que seriam retas perpendiculares, duas duplas gesticularam e apontaram como deveriam ser estas retas, mas sem explicar com palavras e/ou conceitos.

Diante do exposto, recomenda-se a inserção de algumas perguntas sobre objetos geométricos (O que são retas paralelas e retas perpendiculares?) na referida ferramenta de pesquisa. Conjectura-se que sem o conhecimento desses conceitos não há como os alunos realizarem as conversões e tratamentos de registros, assim como as perguntas também deveriam ser direcionadas a cada item da atividade, e não de uma maneira geral.

Com relação ao objetivo proposto, a atividade 1 foi satisfatória, pois os estudantes puderam identificar a influência dos coeficientes na equação algébrica da reta, bem como identificar retas crescentes e decrescentes,conforme constatado nas construções durante a análise da atividade.

Na atividade 2, os alunos deveriam construir figuras que poderiam ser obtidas através da rotação de segmentos de retas. Tinha-se como objetivo a percepção dos alunos quanto a importância de conhecer as posições relativas entre retas, tanto na sua forma geométrica como na forma algébrica, articulando estas duas representações e realizando os tratamentos quando necessário. A maioria das duplas converteu corretamente os registros, apresentando dificuldades no tratamento de registros algébricos.

Consideram-se os objetivos parcialmente atingidos nesta atividade, porque além de estimular a visão espacial de sólidos, os alunos conseguiram articular registros com algumas dificuldades, além de realizarem tratamentos de forma indireta pelos recursos do *software*.

De uma maneira geral, pode-se validar a sequência didática, pois ela contribuiu para os alunos identificarem objetos na forma algébrica e geométrica e realizarem tratamentos, além de melhorar o entendimento com relação aos coeficientes das retas na forma explícita.

As hipóteses foram parcialmente confirmadas, na medida em que tais limitações durante a aplicação de nossa sequencia didática não invalidam a Engenharia, pelo contrário, contribuem de uma maneira favorável, uma vez que os professores devem procurar constantemente novos métodos e recursos de pesquisa e ensino em matemática.

Nossas escolhas como a opção de trabalho em duplas, a aprendizagem em ambientes informatizados e, ainda, as próprias atividades foram instrumentos que atuaram favoravelmente para o engajamento dos alunos durante a aplicação, o que é fundamental nos processos de uma aprendizagem ativa.

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas. (BRASIL, 2000, p.52)

Desta forma, afirma-se que a proposta de ensino de geometria analítica com o software *winplot* na conversão de registros algébricos e geométricos foi válido, contribuindo para uma melhora qualitativa na aprendizagem dos alunos através de ambientes informatizados.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa procurou-se desenvolver uma sequência de atividades no conteúdo de Geometria Analítica, priorizando a aprendizagem e que o estudante conhecesse e articulasse os diferentes registros algébricos e geométricos (equações de retas e circunferências e sua representação cartesiana),desenvolvendo a capacidade de raciocínio. Com esta preocupação, escolheu-se como referencial de pesquisa a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, o qual afirma que ensinar matemática é possibilitar ao aluno desenvolver suas capacidades de raciocínio, visualização e análise, sendo estas atividades caracterizadas pela forte dependência das representações semióticas.

Utilizou-se como inspiração na construção da sequência de ensino a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, a qual possibilitou a reflexão sobre como organizar um conteúdo e sugerir mudanças no ensino tradicional, procurando atingir uma melhora qualitativa na aprendizagem dos alunos. Ou seja, implementar mudanças que busquem diminuir as dificuldades que os discentes, em sua maioria, apresentam neste conteúdo.

Pelo confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, notou-se o valor da proposta, mesmo apresentando algumas limitações durante a sua execução. Uma delas diz respeito a pouca ênfase durante o planejamento das atividades na conversão de registros no sentido algébrico – geométrico. Porém, como observado durante a pesquisa, deveriam construir atividades no sentido algébrico – geométrico de forma direta, para os alunos realizarem as conversões.

Tem-se o conhecimento de que nem todos os alunos atingiram os objetivos em cada etapa, mas conseguiu-se que os alunos reconhecessem os "movimentos" da representação geométrica cada vez que alteravam os coeficientes angular e linear, como pode ser constatado na etapa 2.

Ao considerar as análises efetivadas, pode-se concluir que o uso do software *winplot* influenciou diretamente o interesse dos alunos, fazendo com que os mesmos articulassem registros algébricos e geométricos durante a realização das atividades. O *winplot* auxiliou os discentes no tratamento das questões através de seus recursos *grade* e *mostrar arco.* Quanto à questão norteadora da pesquisa,ratifica-se que o software *winplot* pode auxiliar os alunos na conversão de registros, atuando favoravelmente na aprendizagem de Geometria Analítica.

Ressalta-se a importância de os docentes buscarem novos métodos e recursos disponíveis para melhorar a qualidade de ensino, pois, como analisado ao longo da graduação ou mesmo como estudantes, a matemática é uma ciência que muitos alunos não gostam ou não compreendem. Ao procurar novos métodos e recursos, podem-se tornar as aulas mais atrativas para os alunos e possibilitar a reflexão sobre a prática da sala de aula a todos os professores.

Ao fim desta pesquisa, pode-se verificar claramente a importância de trazer novas atividades para a sala de aula, pois os alunos estavam engajados na sua realização. Além disso, o auxilio da Engenharia Didática permitiu uma reflexão sobre a própria prática docente e a satisfação com os resultados obtidos na pesquisa, uma vez que a maioria dos estudantes conseguiu articular registros algébricos e geométricos no conteúdo de Geometria Analítica ao final do Ensino Médio. Muitas dessas dificuldades puderam ser superadas com o uso de recursos tecnológicos.

Espera-se com este trabalho motivar outros docentes a planejarem suas aulas de modo a torná-las mais convidativas e atrativas para os alunos, e que os mesmos utilizem o espaço escolar como um laboratório de pesquisa na busca por novos métodos e abordagens sobre a Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes pedagógicos, 1996, p. 193-217.

BALEJO, Clarissa Coragem. **Uso de software no ensino de funções polinomiais no Ensino Médio.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2009, 60 p.

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares de Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006. Brasília: MEC/SEB.

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB). **Guia de Livros Didáticos PNLD 2012 – Matemática.** Brasília, 2012. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/index.php/pnld-guia-do-livro-didatico/2986-guia-pnld-ensino-medio-2012> Acesso em: 22 out. 2012.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática:** um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**.** Zetetike, Campinas-UNICAMP, v.13, n.23, 2005, p.85-118.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica:** uma experiência com o ambiente virtual SIENA. Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: Machado, S.D.A. **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008, p.167-188

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33.

_________. Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (FascículoI). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIOREZE, L. **Atividades Digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** Uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais. 2010. 244f. Tese (Doutorado) - Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2010.

FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica:** história, epistemologia e aprendizagem. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, n° 26, 2006, p.77-102.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas:** A história da Álgebra. São Paulo: Makron Books, 1997.

GAUTO, Natássia Knecht. **GRAFEQ no processo de Ensino Aprendizagem de Funções Afins**. Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2012, 81p.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, IV, 1998, Brasília. **Anais. Brasília**: Editora da UFRGS, 2008, p.7. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275 > Acesso em 17 maio. 2013.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O Papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática.** Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002

NERY, Chico. A Geometria Analítica no ensino médio**. Revista do Professor de Matemática**. n° 67, p.19-24, 2008.

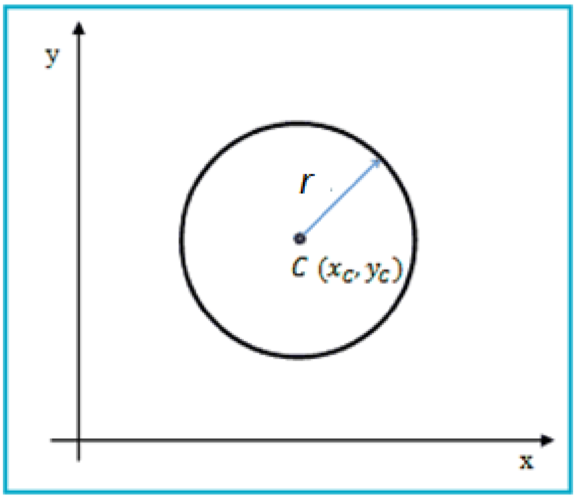
PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lenda**.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

APÊNDICE A - EQUAÇÃO GERAL E REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

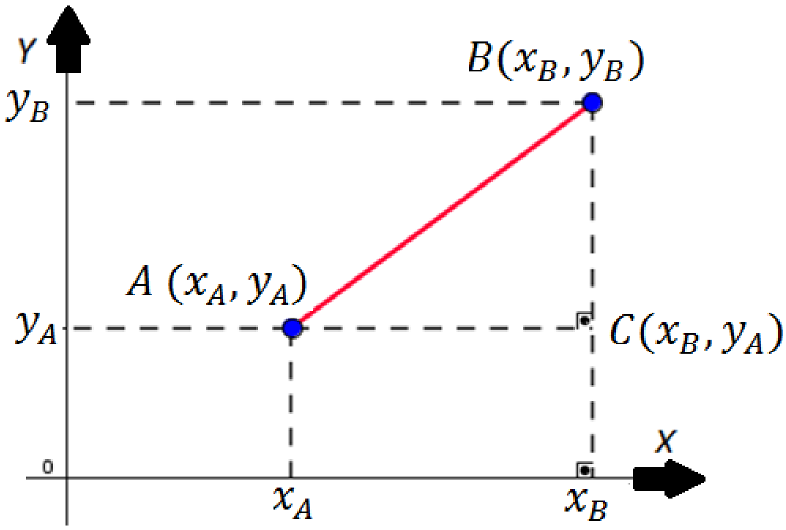
EQUAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO:

Circunferência: é o lugar geométrico dos pontos no plano que apresentam a mesma distância de um ponto fixo C de coordenadas (x_C, y_C). O ponto fixo C é o centro da circunferência.



Distância entre dois pontos:

Dados dois pontos A e B situados no plano cartesiano, a distância entre eles será indicada por d_{AB} (comprimento do segmento de extremidades A e B). Podemos determinar a expressão que indica a distância entre A e B, quaisquer que sejam os pontos A e B de coordenadas$A\ (x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



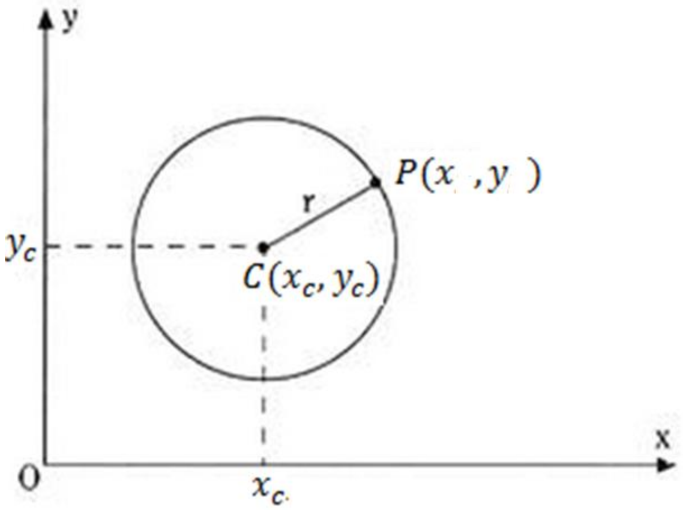
Pode-se verificar que o triângulo ABC é retângulo em C, logo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras.

Temos que a distância entre os pontos A e B no triângulo ABC é nossa hipotenusa, representada por d_{AB}. A distância entre os pontos A e C pode ser expressa por $(x_B - x_A)$ pois, estão na mesma ordenada e a distância entre os pontos B e C por

$(y_B - y_A)$ pois os pontos estão na mesma abscissa. Logo podemos reescrever a distância entre os pontos A e B utilizando o Teorema de Pitágoras como:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Agora vamos considerar a situação de um ponto P de coordenadas (x, y)pertencente à circunferência de centro C com coordenadas(x_C, y_C).



Como a distância entre os pontos C e P é igual ao raio da circunferência, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_{CP})^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2$$

Considerando que a distância entre o centro da circunferência e um ponto qualquer dela é fixa, e definindo esta distância (raio da circunferência) como r, temos:

$$r^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2$$

Desenvolvendo os produtos notáveis obtemos:

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_C y + x_c^2 + y_c^2$$

Igualando a equação a zero, temos a equação geral da circunferência:

$$0 = x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_C y + x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

APÊNDICE B – ATIVIDADE PRÉVIA

Nomes:____	
Data:____________________	**Turma:**_________________________

1. Relacione as equações com as suas respectivas representações geométricas:

a) $3x + 2y + 10 = 0$

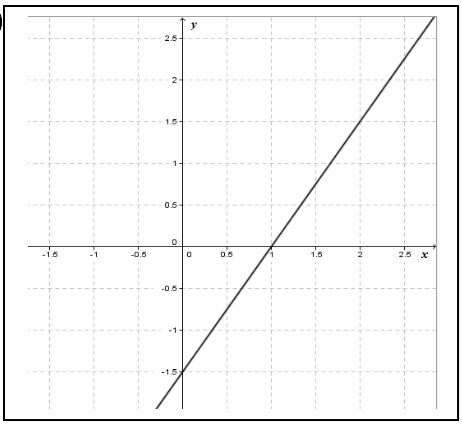
b) $2x - y + 7 = 0$

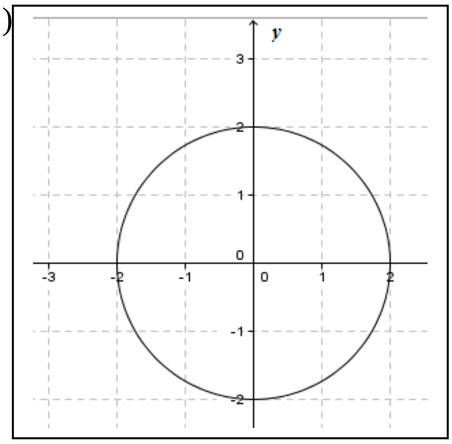
c) $x^2 + y^2 = 4$

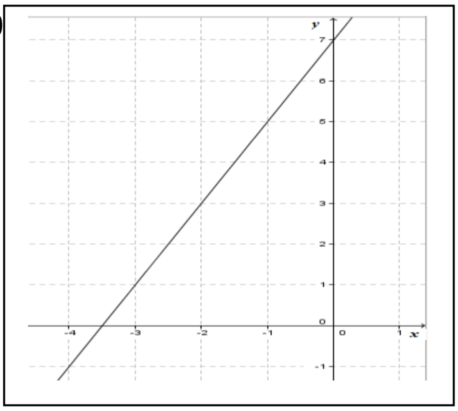
d) $x - y - 4 = 0$

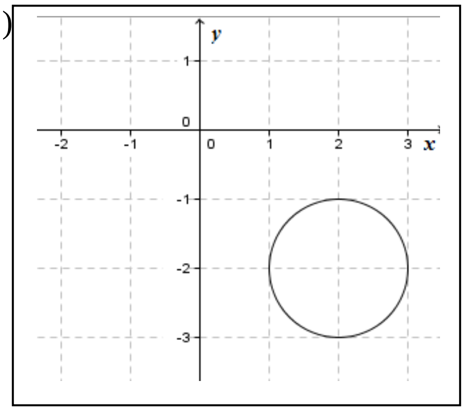
e) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$

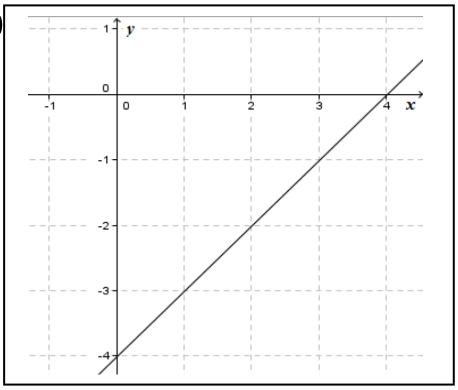
f) $3x - 2y - 3 = 0$

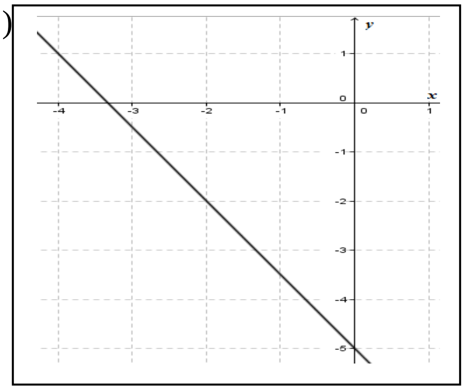
(   ) 

(   ) 

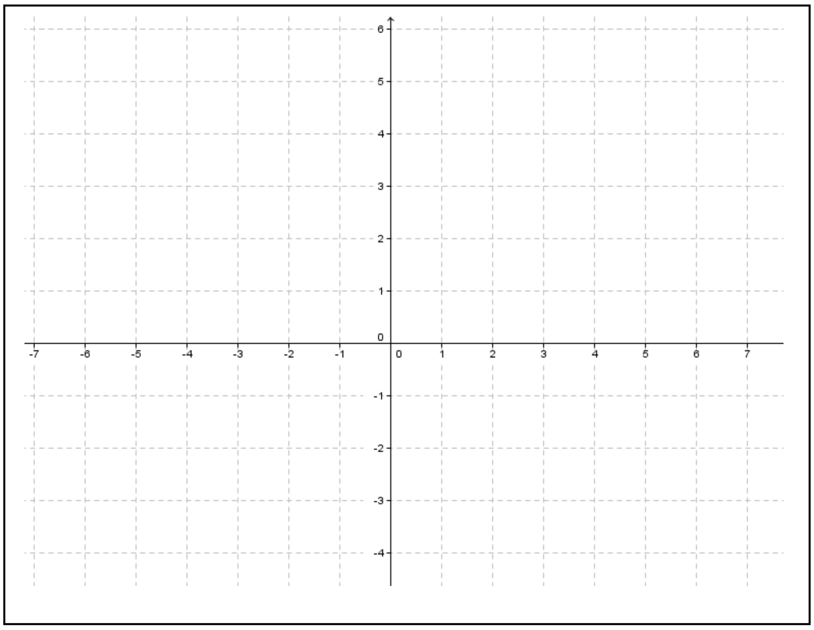
(   ) 

(   ) 

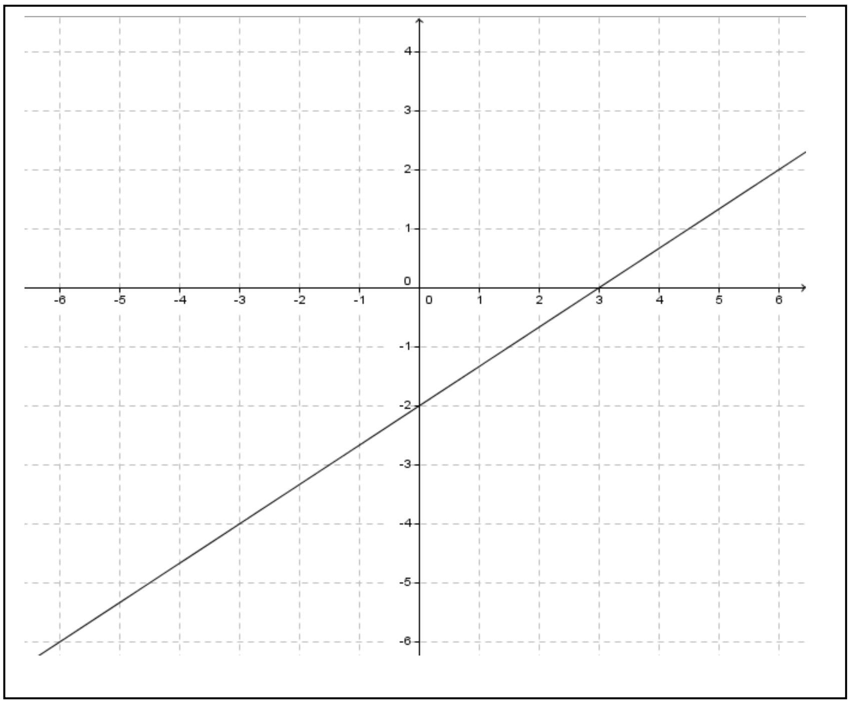
(   ) 

(   ) 

2. Represente geometricamente no plano cartesiano os pontos $P(x,y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $2x - y + 3 = 0$.



3. Determine a equação que tem como gráfico a reta descrita na figura.



4. Encontre o ponto de intersecção entre as duas retas dadas pelas equações algébricas:

$r\!: \mathbf{2}x + \mathbf{3}y - 4 = \mathbf{0}$

$s\!: x - \mathbf{2}y + 6 = \mathbf{0}$

APÊNDICE C – TUTORIAL DO WINPLOT

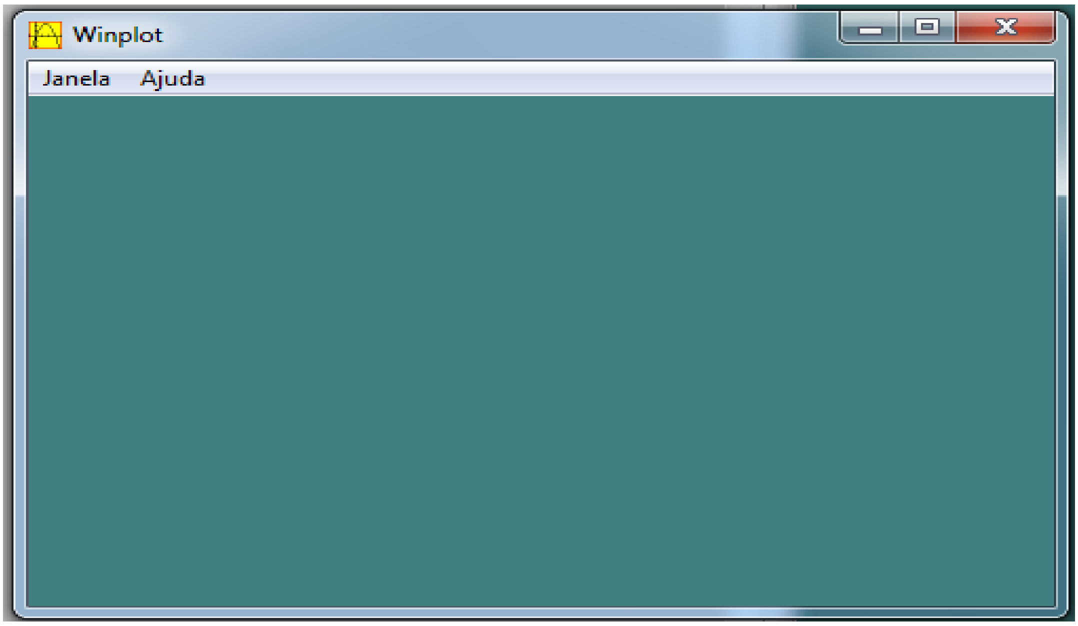
Winplot

O Winplot, criado pelo professor Richard Parris, da Phillips Exeter Academy, em New Hampshare, Estados Unidos, é um poderoso software de matemática que permite que se estude conceitos de geometria analítica – plana e espacial, funções e equações, possibilitando que se trabalhe com gráficos de equações em duas ou três dimensões.

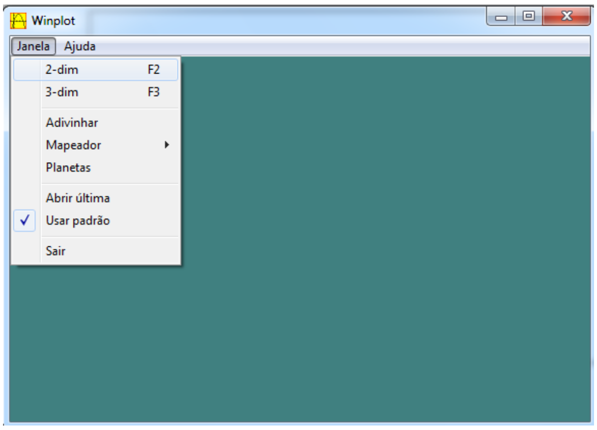
Uma de suas vantagens é ser um programa "leve", ou seja, funciona em diversos computadores sem perder sua eficiência e velocidade. Outra vantagem é ser um software livre, o que significa que é gratuito.

A seguir iremos descrever os passos, bem como explicar os comandos necessários para a realização da prática que envolve os conteúdos de geometria analítica e sólidos de revolução (geometria espacial). Como exemplo serão descritos os passos e comandos necessários para a obtenção de um cilindro de revolução.

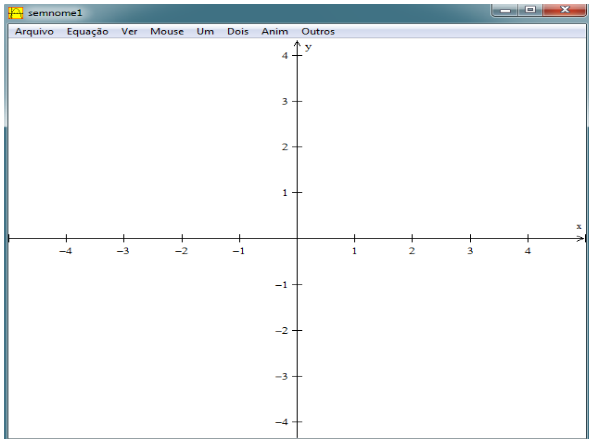
Quando dermos dois cliques no ícone para abrir o programa irá aparecer sua interface.



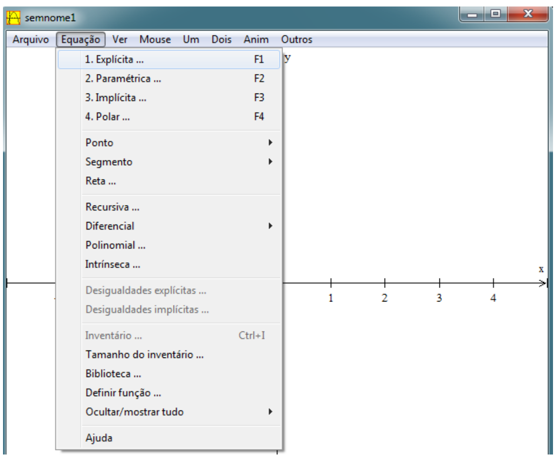
Note que na janela superior da interface do programa temos dois menus, um deles é *janela* e o outro é *ajuda*. Iniciaremos o nosso trabalho com um clique sobre o menu *Janela*. Neste menu temos 7 opções de trabalho.



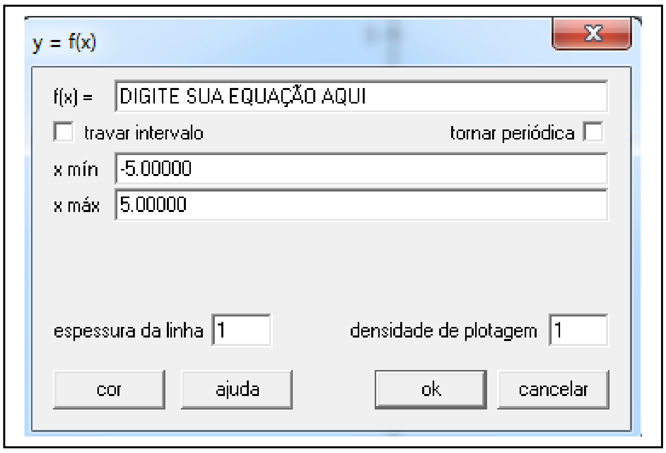
Como nosso objetivo é trabalhar com retas e suas equações no plano, iremos optar por duas dimensões *(2 – dim)*, sendo que posteriormente iremos utilizar o plano em três dimensões para a visualização do objeto construído. Após clicarmos em *(2 - dim)* será aberta a janela principal no ambiente de duas dimensões.



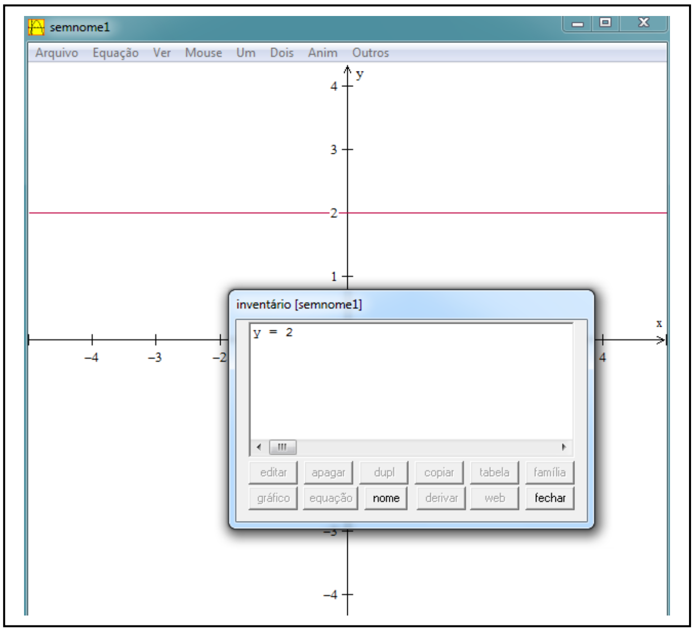
Este é o plano cartesiano que será utilizado para a representação gráfica das retas e circunferências. Na barra de ferramentas na parte superior de nossa janela, temos oito novas opções de escolha. Iremos clicar no menu *Equação*, pois este menu apresenta as ferramentas de manipulação das funções e equações, entre outras.



Iremos clicar para inserir equações em *Equação* e depois em *explícita*, sendo que trabalharemos com funções do tipo $f(x) = ax + b$. Logo após clicarmos uma nova janela irá abrir, para digitarmos a equação da reta.

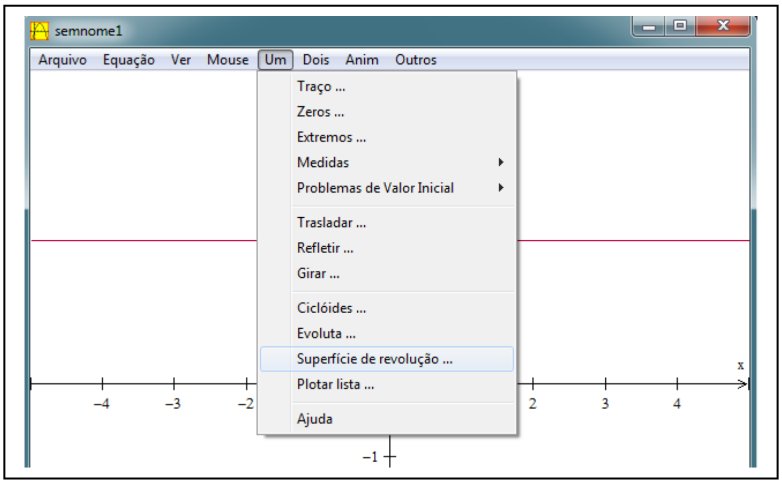


Como foi comentado no início do tutorial, estamos interessados em construir um cilindro de revolução. Inicialmente iremos construir a reta $f(x) = 2$. Logo após escrevermos a equação clicamos no botão *ok* e irá aparecer nosso gráfico e uma nova janela com o nome de *inventário*.

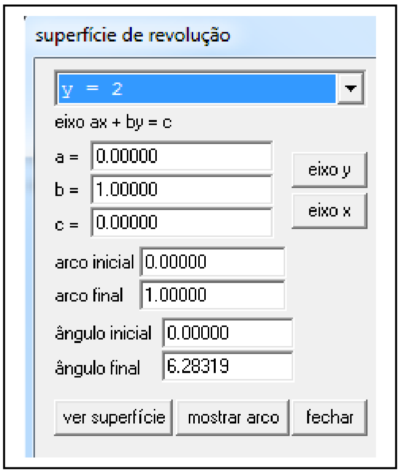


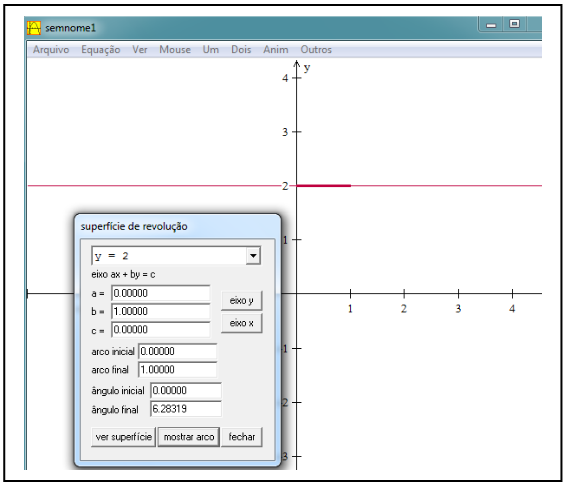
Agora temos a reta na cor vermelha e na mesma imagem aparece a janela inventário com alguns botões, entre eles os de maior interesse para nós serão os botões *editar* que nos permite "arrumar" a reta construída se ela não for a desejada e o botão *dupl*, que serve para inserirmos novas retas ou circunferências no plano. Quando clicarmos em *dupl* abrirá novamente a janela para inserirmos novas retas ou circunferências, se necessário.

Para obtermos agora o cilindro de revolução, precisamos "girar" a reta construída pelo seu eixo de rotação que também é representado por outra equação de reta. Agora utilizaremos o menu *Um*, que também apresenta diversas opções, mas estamos interessados na opção *superfícies de revolução*.



Iremos clicar no botão *Superfície de revolução* e uma nova janela com opções para a rotação irá aparecer. Após aparecer a equação da reta temos algumas opções, entre elas: equação da reta que realizará a rotação, inserindo-se os coeficientes da reta, os arcos iniciais e finais da reta que representam o domínio da nossa função. No exemplo abaixo nosso domínio é o intervalo [0,1], a parte mais vermelha da reta. Clicando em *mostrar arco* ela aparecerá indicada com uma cor mais escura que a reta.



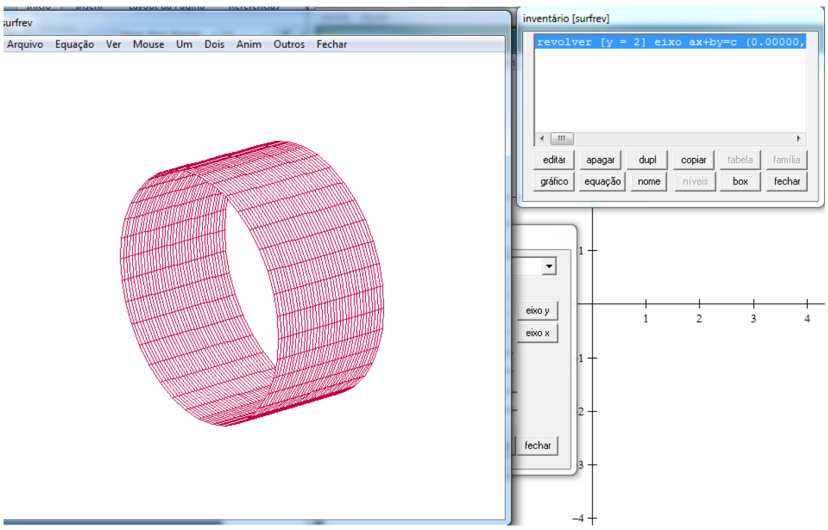


Podemos observar que ainda devemos indicar os parâmetros da reta que utilizaremos como eixo de rotação nos coeficientes de a, b e c e o ângulo inicial e final que indicam o início e o fim da rotação. O ângulo é dado em radianos.

Como queremos obter um cilindro de revolução, temos que usar uma reta paralela a reta construída e fazer uma rotação de 2π radianos. Para uma reta ser paralela

à reta $f(x) = 2$ ela tem que ter os parâmetros$a = 0$, $b = 1$. Para o parâmetro c, neste caso, podemos escolher qualquer número real com exceção do 2, para não termos uma rotação em torno dela mesma, o que não geraria sólido algum. Para este exemplo tomamos $c = 1$. Um fator importante que devemos observar é que a distância entre as retas $y = 1$ e $y = 2$será o raio do cilindro e a amplitude do domínio será a sua altura neste exemplo.

Realizada a inserção dos dados necessários para a rotação iremos clicar no botão *ver superfície* e irá aparecer o sólido obtido com a rotação.



APÊNDICE D – ETAPA 1 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:____

Data:________________________**Turma:**_______________________________

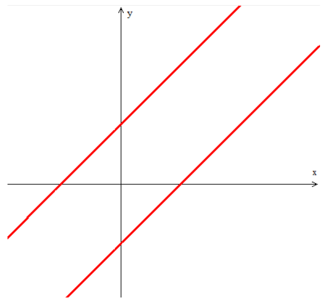
Etapa 1: 2 períodos

Atividade 1:

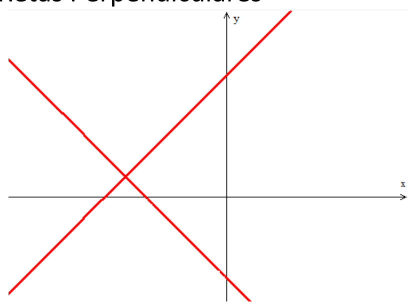
Construção de retas utilizando o Winplot.

Faça as construções das retas abaixo seguindo as imagens como exemplo.

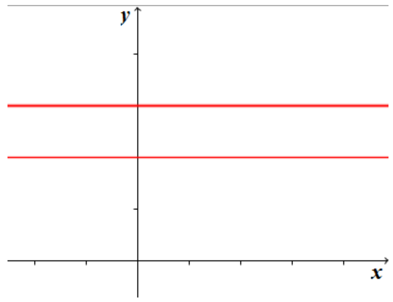
1. Retas Paralelas



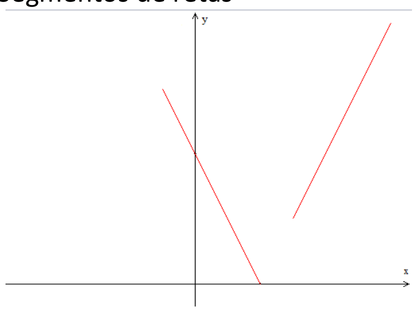
2. Retas Perpendiculares



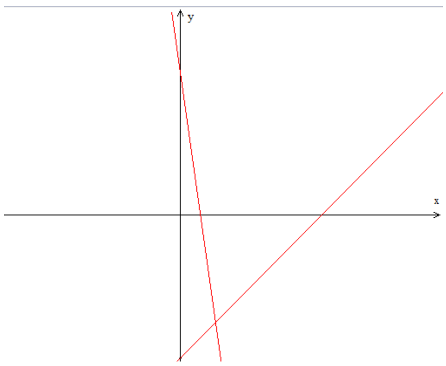
3. Retas Constantes



4. Segmentos de retas



5. Retas Concorrentes



Questionário1:

1. Qual (is) reta(s) a dupla encontrou mais dificuldades para realizar a construção? Comente brevemente as dificuldades.

2. Comente como a dupla fez para mudar a inclinação das retas.

3. Comente como a dupla fez para mudar a intersecção das retas com o eixo das ordenadas.

4. Comente como a dupla escolheu os domínios na construção de segmentos de retas.

Salve o arquivo do Winplot na área de trabalho, com a identificação da dupla e da atividade.

Exemplo: Dupla A_1

APÊNDICE E – ETAPA 2 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:____

Data:_______________________**Turma:**______________________________

Etapa 2: 3 períodos

Construindo sólidos de revolução com o uso do Winplot.

Atividade 2

Construindo retas e determinando seus domínios, bem como o eixo de rotação adequado, escolha uma das imagens de cilindros para fazer sua construção.

Cilindro

FIGURA 1: Tubo de Concreto

FIGURA 2: Parafuso

FIGURA 3: Torre de Hércules

FIGURA 4: Luminária

FIGURA 5: Arquitetura/ México

FIGURA 6:

Questionário2:

1. Qual a figura que adupla escolheu para representar? Por quê?

2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

3. Espaço para cálculos (se a dupla não realizou cálculos, coloque neste espaço o que você fez para encontrar as delimitações entre as curvas).

4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Salve o arquivo do Winplot em WP2 e WP3 na área de trabalho, com a identificação da dupla e da atividade.
Exemplo: Dupla A_1

Nomes:____

Data:______________________**Turma:**____________________________

Atividade 3:

Construindo retas e determinando seus domínios, bem como o eixo de rotação adequado, escolha uma das imagens para fazer sua construção.

Cone

FIGURA 1: Forma para bolos

FIGURA 2: Ampulheta

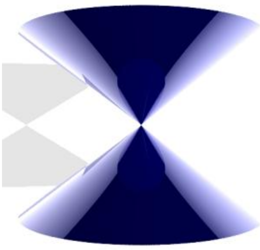


FIGURA 3: Cone

FIGURA 4: Taças

FIGURA 5: Vaso com Luminária

FIGURA 6: Guarda Chuva

Questionário3:

1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

3. Espaço para cálculos (se a dupla não realizou cálculos, coloque neste espaço o que você fez para encontrar as delimitações entre as curvas).

4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Salve o arquivo do Winplot em WP2 e WP3 na área de trabalho, com a identificação da dupla e da atividade.
Exemplo: Dupla A_1

Nomes:____
Data:______________________**Turma:**______________________________

Atividade 4:

Construindo circunferências e retas e determinando seus domínios, bem como o eixo de rotação adequado, escolha uma das imagens de esferas e outros sólidos de revolução para fazer sua construção.

Esfera e Outros Sólidos de Revolução

FIGURA 1: Planeta Saturno

FIGURA 2: Anel

FIGURA 3: Toróide

FIGURA 4:

FIGURA 5: Globo de neve

FIGURA 6: Três Esferas

1. Qual a figura que a dupla escolheu para representar? Por quê?

2. Descreva passo a passo a sequencia de construção.

3. Espaço para cálculos (se a dupla não realizou cálculos, coloque neste espaço o que você fez para encontrar as delimitações entre as curvas).

4. Comente sobre as dificuldades encontradas na construção do objeto escolhido.

Salve o arquivo do Winplot em WP2 e WP3 na área de trabalho, com a identificação da dupla e da atividade.

Exemplo: Dupla A_1

APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu,______________________________________,R.G.________________, responsável pelo(a) ______________________________________, da turma 312, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Geometria Analítica com o Software Winplot: Articulando as Representações Algébricas e Geométricas** desenvolvida pelo pesquisador Diego da Silva Pinto Martinelli. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é orientada por Leandra Anversa Fioreze, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail leandra.fioreze@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

a) Favorecer a autonomia intelectual dos alunos, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos.

b) Desenvolver o conteúdo de Geometria Analítica em ambientes informatizados com o auxílio do software matemático winplot

c) Estimular o interesse dos alunos através do uso do computador como um instrumento de ensino.

d) Identificar objetos matemáticos nos seus registros algébricos e geométricos bem como realizar conversões de registros.

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de questionário escrito e trabalhos realizados no laboratório de informática, bem como da participação em aula, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo telefone (51) 91991342 ou pelo e-mail d14.martinelli@gmail.com.

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de Junho de 2013.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura da pesquisadora: ____

Assinatura do Orientador da pesquisa:______________________________________

ANEXO A – FOTOS DA EXPERIMENTAÇÃO

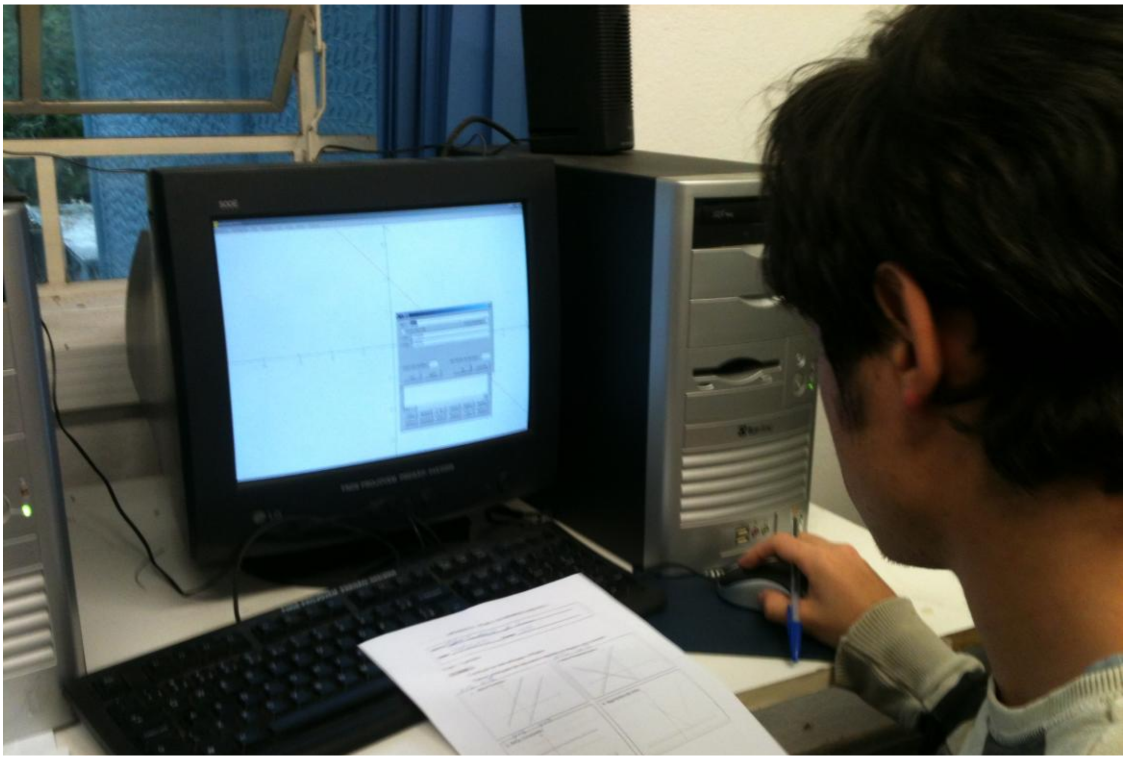


Figura 64 – Foto da Experimentação

Figura 65 – Foto da Experimentação

Figura 66 – Foto da Experimentação

Figura 67 – Foto da Experimentação