UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

SAMIR AOZANI MORAES

ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

Porto Alegre

2013

SAMIR AOZANI MORAES

ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Porto Alegre
2013

SAMIR AOZANI MORAES

ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

____

Prof.ª Mª. Fabiana Fattore Serres
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - UFRGS

Porto Alegre
2013

RESUMO

Este trabalho versa sobre o ensino e a aprendizagem de funções polinomiais de 1º e 2º graus. Para compreender a situação atual da educação matemática no Brasil, foi realizado um resgate histórico sobre o ensino no país, com atenção especial, ao ensino de matemática. Foram discutidas algumas causas para as dificuldades de aprendizagem do conceito de função, bem como estudadas as tendências atuais para o ensino deste conteúdo. Foi proposta uma sequência didática, para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus, subsidiada na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual deve ser aplicada com o auxílio de tecnologias da informação, em especial, com o uso do Software GeoGebra.

Palavras-chave: Ensino de funções polinomiais. Múltiplas representações. Geometria Dinâmica. GeoGebra.

ABSTRACT

This work is about the teaching and learning of polynomial functions of 1st and 2nd grade. To understand the current situation of mathematics education in Brazil, was conducted on a historical education in the country, with special attention to teaching math. Were discussed some causes for learning difficulties of the concept of function as well as study current trends in teaching this content. It was proposed an instructional sequence for teaching of polynomial functions of the 1st and 2nd grades, subsidized on the Theory of Registration Representation Semiotics Raymond Duval, which should be applied with the aid of information technology, in special with the use of software GeoGebra.

Key-words: Teaching of polynomial functions. Multiple representations. Dynamic Geometry. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Interface do Software GeoGebra versão 3.2.40.0 30

FIGURA 2 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f_1(x) = (x-d)^2$, com $d < 0$ e $d > 0$.. 35

FIGURA 3 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f_1(x) = x^2 + k$, com $k < 0$ e $k > 0$..... 36

FIGURA 4 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f_1(x) = -x^2$ 36

FIGURA 5 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f_1(x) = ax^2$, com $|a| > 1$ e $0 < |a| < 1$... 37

FIGURA 6 – Gráfico da função $y = 5x,\ 0 \le x \le 30$ 40

FIGURA 7 – Gráfico da função $y = 5x + 50,\ 0 \le x \le 30$ 41

FIGURA 8 – Gráficos da função $y = ax + b,\ 0 \le x \le 30$ 42

FIGURA 9 – Gráfico da função $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$. 44

FIGURA 10 – Gráfico da função $y_1 = x^2$ 45

FIGURA 11 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = (x+3)^2$ 46

FIGURA 12 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$, $y_2 = (x+3)^2$ e $y = (x+3)^2 + 1$ 46

FIGURA 13 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = (x+1)^2$ 48

FIGURA 14 – Gráficos das funções $y_2 = (x+1)^2$ e $y_3 = 3(x+1)^2$ 48

FIGURA 15 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$, $y_2 = (x+1)^2$, $y_3 = 3(x+1)^2$ e
$y = 3(x+1)^2 - 5$ 49

FIGURA 16 – Interface do Software GeoGebra, os s*eletores* a, d, k 50

FIGURA 17 – Gráfico da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, com $a = 1, d = 0\ e\ k = 0$ 51

FIGURA 18 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, d variando, $a = 1\ e\ k = 0$ 51

FIGURA 19 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, k variando, $a = 1\ e\ d = 0$ 52

FIGURA 20 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, a variando, $d = 0\ e\ k = 0$ 52

FIGURA 21 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, com a, d, k variando............ 53

FIGURA 22 – Gráfico da função $s = t^2 - 6t + 5$ 54

FIGURA 23 – Gráfico da função $t = \frac{1}{2}h^2 - 12h + 42$ 54

FIGURA 24 – Gráfico da função $y = (x+1)^2 + 9,\ 0 \le x \le 30$ 56

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**RESGATE HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA**	11
3	**ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES**	17
3.1	**Situação atual do ensino de funções**	19
3.2	**A importância das múltiplas representações**	21
3.2.1	**As representações gráfica e algébrica**	24
3.3	**Informática no ensino de funções**	26
3.3.1	**Geometria Dinâmica**	28
4	**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES**	31
4.1	**O estudo de funções e o movimento de gráficos**	32
4.1.1	**Funções**	32
4.1.1.1	**Domínio**	32
4.1.1.2	**Contradomínio**	32
4.1.1.3	**Imagem**	32
4.1.2	**Polinômios**	32
4.1.2.1	**Polinômios de grau 1**	33
4.1.2.2	**Polinômios de grau 2**	33
4.1.3	**Funções polinomiais**	33
4.1.3.1	**Funções polinomiais de grau 1**	34
4.1.3.2	**Funções polinomiais de grau 2**	34
4.1.4	**Gráficos de funções**	34
4.1.4.1	**Definição: teste da reta vertical**	34
4.1.4.2	**Gráficos de funções polinomiais de grau 1**	34
4.1.4.3	**Gráfico de funções polinomiais de grau 2**	34
4.1.4.4	**Movimentos ou transformações nos gráficos das funções polinomiais de grau 2**	35
4.1.4.4.1	**Translação horizontal**	35
4.1.4.4.2	**Translação vertical**	35
4.1.4.4.3	**Reflexão em torno do eixo** x	36

4.1.4.4.4	**Alongamento e compressão verticais**	36
4.1.5	**Completamento de quadrados**	37
4.2	**A sequência didática**	38
4.2.1	**Função afim aplicada em Movimento Retilíneo Uniformemente Variado**	39
4.2.2	**Convertendo Temperaturas Fahrenheit e Celsius**	43
4.2.3	**Função quadrática**	44
4.2.4	**Algumas aplicações de funções polinomiais**	53
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	57
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

A compreensão do conceito de função é de crucial importância no ensino de matemática e nas suas aplicações. No entanto, nas atividades de campo proporcionadas pelo curso Licenciatura em Matemática, ficou evidenciada a dificuldade de aprendizagem, desse tema, por parte dos alunos do Ensino Médio, o que está de acordo com diversas pesquisas realizadas sobre o ensino de funções. Sendo assim, nesse texto, vamos fazer um resgate histórico sobre o ensino no Brasil, além de estudar e analisar as perspectivas atuais sobre a educação matemática, em particular, sobre o ensino de funções polinomiais, bem como propor uma abordagem de trabalho para o assunto.

Para isso, vamos utilizar o capítulo 2 para fazer um apanhado histórico sobre a evolução (cronológica) do sistema de ensino brasileiro desde a chegada dos Jesuítas no Brasil, em meados do século XVI, até os dias atuais. Vamos abordar também a importância da Matemática na sociedade hodierna e tecer considerações sobre as práticas pedagógicas usadas ao longo desse período, bem como compará-las com o ponto de vista de vários autores e com os princípios definidos pelos PCNs[1] e Orientações Curriculares[2]. Os PCNs (2000) consideram que o ensino de matemática deve contribuir para que o sujeito seja capaz de resolver problemas do mundo real e ter uma vida produtiva e responsável. Assim sendo, consideram que o indivíduo precisa ter competência para a solução de problemas envolvendo raciocínio matemático, medidas, geometria, probabilidade e aplicações da matemática em situações do cotidiano, entre outros.

De acordo com Cornu (apud TALL, 1992), o conceito de função é um tema central dentro da matemática moderna. Sendo assim, no capítulo 3, trataremos sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo. Para isso, analisaremos a situação atual do ensino de funções, bem como, amparados na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval (1993, 2012), destacaremos a importância de poder mobilizar vários registros de representação para uma mesma função matemática, dando ênfase às representações gráfica e algébrica. Estudaremos e defenderemos também o emprego de tecnologias da informação nos ambientes

[1] Parâmetros Curriculares Nacionais editados pelo Ministério da Educação em 2000.
[2] Orientações Curriculares para o Ensino Médio editadas pelo Ministério da Educação em 2006.

destinados ao ensino de matemática, com destaque especial ao uso de softwares de Geometria Dinâmica.

No capítulo 4 apresentaremos inicialmente algumas definições e conceitos atrelados às funções polinomiais de graus 1 e 2. Após, elaboraremos uma proposta para o ensino desse conteúdo, tendo como ferramenta principal os ambientes de geometria dinâmica, pois entendemos que estes permitem ao aluno experimentar uma variedade de situações, além de verificar propriedades, formular e testar conjecturas. Sendo assim, a sequência didática terá os seguintes objetivos:

a) estimular a participação dos alunos na elaboração do conceito de função;
b) desenvolver e aprofundar uma visão dinâmica do conceito de função, integrando os registros de representação algébrico e gráfico.

Nas considerações finais, vamos refletir sobre os problemas de aprendizagem, na disciplina de matemática, enfrentados pelos alunos do Ensino Médio, e, em particular, sobre as dificuldades para compreender o conceito de função. Com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino desse conteúdo, apresentaremos e discutiremos algumas sugestões de práticas docentes amparadas em autores como Raymond Duval e Olé Skovsmose.

2 RESGATE HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

A sociedade brasileira está passando por grandes transformações tecnológicas, principalmente nas áreas de telecomunicações e informática, as quais nos remetem a um novo patamar de exigência quanto à construção do conhecimento. E, nesse contexto, é forçoso considerar os requisitos formativos cada vez mais complexos para o exercício de uma cidadania plena, as exigências crescentes por qualificações de um mercado de trabalho excludente e seletivo e as demandas culturais peculiares a cada subgrupo etário, de gênero, socioeconômico ou ocupacional (DI PIERRO; JOIA; RIBEIRO; 2001). À vista disso, a matemática aparece como uma ciência indispensável para a formação profissional, para a vida dos cidadãos e até mesmo para o desenvolvimento do país.

No entanto, atualmente estamos convivendo com grandes críticas à escola, pois visivelmente a população brasileira está atingindo maior grau de escolaridade, mas ao mesmo tempo obtendo desempenho insatisfatório em algumas disciplinas escolares, como a matemática, que produz medo e gera frustrações na maioria dos alunos. Como consequência, frequentemente encontramos pessoas afirmando que a matemática é uma disciplina difícil e complicada que não abre espaço para a criatividade. Segundo Costa (1998), este ponto de vista provavelmente está relacionado a uma frustrante incapacidade para as atividades matemáticas mais elementares do dia-a-dia ou associadas a atividades profissionais. Nesse sentido, Druck (apud GONZATTO, 2012), afirma que não raramente o medo contraído anteriormente ao primeiro contato com os números predispõe o aluno a ficar nervoso quando chamado para resolver problemas, comprometendo a compreensão do assunto e tornando a resolução de exercícios uma rotina torturante. Por essas razões, nos últimos anos ocorreu um aumento significativo de interesse pelo assunto, razão pela qual o baixo rendimento escolar se tornou objeto de estudo para muitos educadores e pesquisadores e, o tema, que antes tinha espaço restrito às universidades, passou a ser debatido na mídia e nos ambientes governamentais.

De acordo com Gonzatto (2012), a matemática se tornou um dos principais obstáculos à evolução dos indicadores educacionais no Brasil e um dos motivos para as elevadas taxas de repetência e evasão escolar. Gonzatto (2012) afirma ainda que existem várias razões para o insucesso nesta disciplina, dentre as quais se destacam: aulas pouco dinâmicas e com conteúdos complexos e sem relação com o cotidiano dos estudantes; alunos desmotivados e professores com formação deficiente, que adotam estratégias pedagógicas baseadas meramente na repetição de exercícios, enquanto que o ideal seria priorizar a compreensão ao invés de formas mecanizadas. Em conformidade com essa concepção, Félix (2001) menciona que o ensino de matemática caracteriza-se predominantemente pela ênfase nas ideias da Matemática Clássica, tendo como destaque a sistematização lógica, através da qual o professor procura desenvolver a disciplina mental e o pensamento lógico-dedutivo dos seus alunos.

Sendo assim, conforme Cotton (apud SKOVSMOSE, 2000), há predominância de aulas expositivas, centradas no professor e baseadas na apresentação de teorias e/ou algoritmos seguidos de exercícios de fixação, cabendo ao aluno somente memorizar e reproduzir os raciocínios ditados pelo educador. Cotton (apud SKOVSMOSE, 2000) afirma ainda que essa metodologia é estática, pois as únicas variações que ocorrem estão relacionadas basicamente ao tempo dedicado a cada um dos temas. Quanto aos exercícios, argumenta que são mal selecionados, pois geralmente são fechados à investigação dos alunos e não permitem análises e discussões sobre o tema. Evidentemente, essa metodologia de ensino, apoiada meramente na exposição de conteúdos descontextualizados e na repetição de resultados já conhecidos, sem a devida discussão sobre o processo de construção, não é eficaz, pois é pouco flexível e requer uma razoável capacidade de estruturação do pensamento lógico-matemático. Além disso, exige o domínio de conceitos abstratos, sequenciais e complexos, que geralmente não possuem relação com o cotidiano dos estudantes.

Por outro lado, Garnier, Bednarz e Ulanovskaya (1996) afirmam que a dificuldade de compreensão dos conteúdos matemáticos se deve principalmente ao aspecto cultural, pois, tradicionalmente, esta disciplina é muito teórica e distante da realidade das pessoas, principalmente das crianças, e, em tese, não considera a cultura do aluno nem a sua real capacidade de aprendizagem. Para Silva (2002), essa distância entre a teoria e a prática ocorre principalmente porque a ênfase da educação sempre esteve voltada para a eficiência e produtividade. Nesse sentido, Gallo (2008) considera que o professor tem papel central na educação matemática, pois cabe a este trabalhar os conteúdos e desafiar os estudantes a desenvolvê-los, preservando as características próprias dos conceitos, mas trabalhando-os de modo que se estabeleça uma efetiva ressonância cultural com os jovens de hoje.

Em consonância com esse entendimento, Di Pierro, Joia e Ribeiro (2001) entendem que o professor deve fornecer ferramentas que auxiliem os alunos na resolução de problemas do seu cotidiano, empregando assim o processo de ensino-aprendizagem no seu sentido mais amplo e como parte essencial da vida das pessoas. Para isso, o professor deve escolher conteúdos que possam despertar o interesse desses alunos, que valorizem as experiências de cada um e que permitam uma participação efetiva. Assim sendo, Di Pierro, Joia e Ribeiro (2001) acreditam que é necessário flexibilizar os currículos, integrando as dimensões da educação pessoal e profissional, reconhecendo processos de aprendizagem informais e formais, de modo que os indivíduos possam obter novas aprendizagens e a certificação correspondente mediante diferentes trajetórias formativas.

No entanto, para entender o contexto educacional hodierno, é importante relembrar alguns aspectos da história e da evolução da política educacional brasileira iniciada, na primeira metade do século XVI, pelas missões jesuíticas. De acordo com Félix (2001), desde o início o setor educacional brasileiro esteve voltado aos interesses de exploração e enriquecimento de uma elite em detrimento da maioria da população. Em consonância com essa perspectiva, o processo de ensino conduzido pelos jesuítas destinava-se prioritariamente à catequização e à propagação dos ideais católicos. No entanto, em 1759, quando o Marquês de Pombal expulsou os jesuítas, a organização educacional existente no Brasil foi completamente destruída, pois apesar da Coroa Portuguesa ter a pretensão de tornar o ensino elementar universal, a falta de infraestrutura e a carência de professores fizeram com que fosse criada uma grande lacuna no serviço educacional (FÉLIX, 2001).

Posteriormente, para tentar suprir o espaço deixado pelos jesuítas, foram instituídas as chamadas aulas régias, mas essas beneficiaram somente uma parcela reduzida da população que buscava se preparar para estudar na Europa. Dessa forma, sem sistematização nem pessoal docente em quantidade e qualidade suficientes, a instrução no país ficou drasticamente limitada (FÉLIX, 2001). Somente em 1808, com a vinda de D. João VI para o Brasil, houve investimentos no ensino técnico e no superior. No entanto, a educação do povo mais uma vez ficou esquecida. Após a independência do Brasil, foram redigidos vários planos no campo da instrução popular, mas, na prática, pouco se concretizou. Com isso, a educação brasileira caminhou muito lentamente e com pouca evolução enquanto política educacional até 1925, quando foi instituída a obrigatoriedade de seriação e aprovação nas disciplinas de cada ano para promoção à série seguinte (FÉLIX, 2001).

Mais tarde, a Revolução de 1930 provocou profundas transformações sociais, aumentando e diversificando a classe média, formada prioritariamente por pessoas ligadas ao setor produtivo, que visando a conquista de melhores posições na estrutura social, buscaram o mesmo modelo de escola da elite (FÉLIX, 2001). Em vista disso e para poder atender a crescente demanda de estudantes, em 1931 foi introduzido um currículo seriado, com divisão em dois ciclos, primário e secundário, ambos com sete anos cada, e foi estipulada a frequência obrigatória. No entanto, essas mudanças no sistema de ensino não foram suficientes para ajustar a organização escolar à nova e heterogênea clientela, tendo como consequência o surgimento de altos índices de repetência e evasão (FÉLIX, 2001). Além disso, a prática mostrou que a Escola não desempenhou satisfatoriamente a sua função no que se refere à inclusão social, pois o ensino elementar continuou sendo deficiente e precário, enquanto que o ensino secundário beneficiou apenas uma parcela irrisória da população.

Para que a Escola cumpra satisfatoriamente o seu papel, é necessário adequar o processo de ensino-aprendizagem às exigências atuais, estabelecendo programas de ensino bem estruturados, com currículos condizentes à realidade e compatíveis com o desenvolvimento dos alunos. Nesse sentido, o final da década de 1980 marcou uma nova etapa no ensino brasileiro, que culminou com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em 1996, a qual teve por objetivo organizar e direcionar o Plano Nacional de Educação. A partir daí, estabeleceram-se as condições necessárias para a institucionalização dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que instituíram reformas significativas no ensino brasileiro e definiram o atual perfil do currículo. Seguindo os princípios da

LDB, o projeto pedagógico proposto pelos PCNs tem por objetivos dar significado ao conhecimento escolar mediante a contextualização do conteúdo ensinado e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender. Para isso, o plano de ensino deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que capacitem o ser humano para a prática social e para a atividade produtiva, visando a integração desse às relações políticas e de trabalho (BRASIL, 2000).

Nesse sentido, Costa (2006) afirma que a Escola precisa proporcionar condições para o desenvolvimento das potencialidades e habilidades das pessoas, exercendo assim um papel primordial na integração do cidadão com o mundo contemporâneo. Ou seja, a Escola deve contribuir para a formação intelectual e desenvolver a capacidade do indivíduo para compreender a organização da sociedade, além de prepará-lo para o mercado de trabalho. Ainda nessa perspectiva, Costa (1998) destaca que a educação é ponto fundamental para o crescimento intelectual e profissional das pessoas, pois é através dela que se constrói a liberdade e se criam indivíduos capazes de se incompatibilizar com as injustiças sociais.

No entanto, as modificações propostas pelos PCNs, na área da Educação Matemática, parecem não ter alcançado os seus objetivos, pois o ensino desta disciplina no Brasil vem apresentando índices cada vez piores. Segundo matéria publicada no Jornal Zero Hora, "[...] 89% dos estudantes brasileiros chegam ao final do Ensino Médio sem aprender o esperado em matemática[3] [...]" (GONZATTO, 2012, p. 29). Embora a expressão "aprender o esperado" seja bem subjetiva, é oportuno frisar que os PCNs apontam que, ao final do Ensino Médio, os estudantes devem saber identificar, analisar e aplicar conhecimentos, sobre valores de variáveis representadas em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos, realizando previsão de tendências e interpretações. Além disso, é recomendável que consigam também compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e que saibam aplicá-los a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas (BRASIL, 2000). Portanto, é fundamental que o aluno entenda o conceito por trás de uma operação matemática para depois resolver problemas,

[3] Dados da Prova Brasil referente ao ano de 2009.

afirma Becker (apud GONZATTO, 2012). Logo, não adianta fazer o estudante repetir contas (sem sentido) para que ele entenda as operações matemáticas. Pensando nisso, no próximo capítulo, vamos tratar sobre o ensino e a aprendizagem de funções, oportunidade na qual vamos analisar as perspectivas atuais sobre o tema e destacar a importância de usar vários registros de representação para descrever os objetos matemáticos.

3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

A sociedade atual está exigindo cada vez mais competências dos cidadãos. Como prova disso, basta observar os diversos modelos novos de aparelhos eletrônicos com os quais nos deparamos diariamente, os telefones celulares mais complexos e com quantidade maior de ferramentas, além é claro, da oferta, em tempo real, de uma ampla gama de dados (SILVA, 2003). No entanto, para que possamos usufruir a comodidade proporcionada pela tecnologia atual, precisamos estar aptos a operar os equipamentos modernos. À vista disso, evidencia-se a importância da Escola, pois compete, em parte, ao sistema educativo proporcionar a formação adequada para que os indivíduos possam conviver em sociedade, exercendo os seus direitos, cumprindo com os seus deveres e podendo desfrutar as benesses oferecidas pelas ciências.

Entretanto, para que a Escola cumpra satisfatoriamente o seu papel, é preciso dar prioridade à qualidade do processo de ensino-aprendizagem, escolhendo os conteúdos de forma criteriosa e trabalhando-os de forma articulada, incentivando o processo investigativo dos alunos e auxiliando-os na apropriação do conhecimento. Para isso, deve-se proporcionar aos estudantes uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano, tais como interpretar tabelas e gráficos veiculados nas diferentes mídias (BRASIL, 2006). Nesse sentido, as “Orientações Curriculares para Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias”, elaboradas e difundidas pelo Ministério da Educação, enfatizam que os professores devem trabalhar os conteúdos destacando o valor formativo e descartando as exigências de memorização e a aplicação direta de fórmulas.

No que se refere ao ensino de funções, Cornu (apud TALL, 1992) destaca que esse conceito é central na matemática moderna. Entretanto, de acordo com Tall (1992), as definições modernas de funções causam problemas, principalmente, em virtude do número de componentes distintos (domínio, imagem e regra) que contém. Destaca ainda que, no Ensino Médio, é dada pouca ênfase para o domínio e para a imagem, resultando numa ênfase na regra da relação (geralmente dada por uma fórmula). Entretanto, a concepção mais fundamental de uma função é a que ela é uma relação entre magnitudes variáveis. Sendo assim, Tall (1992) assinala que se isso não for compreendido, as representações como equações e gráficos perdem o seu sentido e se tornam isoladas uma da outra.

Certamente, no início é muito difícil entender um conceito com uma frase, especialmente quando na definição há palavras que não foram definidas. Assim sendo, em vez de inicialmente tratar com definições formais que contêm elementos que não são familiares para o aluno, é preferível tentar encontrar uma abordagem construída a partir de conceitos que tenham o papel dual de serem familiares para o aluno e também fornecerem a base para o desenvolvimento matemático subsequente (TALL, 1992). Dessa forma, para que o professor possa trabalhar esse conceito de forma eficiente em sala de aula, as Orientações Curriculares para Ensino Médio enfatizam que é importante também destacar o significado da representação gráfica das funções e, quando são alterados os parâmetros (coeficientes) de uma função, é interessante estimular os alunos a identificar os movimentos realizados pelo gráfico que a representa. É relevante também incentivar os estudantes a apresentarem outras relações funcionais e esboçar os gráficos que representam essas relações.

Nesse sentido, para trabalhar o conceito de funções, é conveniente solicitar que os alunos expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 3x + 5$, como a função que associa a um dado valor real o seu triplo, acrescido de cinco unidades, pois isso pode facilitar a identificação da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, na Física, (BRASIL, 2006). Sendo assim, é recomendável apresentar ao aluno diferentes modelos tomados em distintas áreas do conhecimento, como por exemplo, queda livre, movimento uniforme, rendimentos financeiros, etc. Ainda, sempre que possível, é importante traçar os gráficos das funções a partir de um entendimento global da relação existente entre as variáveis. Isso se faz necessário porque a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite, ao aluno, avançar na compreensão do comportamento das funções, mas sim apenas adquirir a capacidade de efetuar cálculos, sem compreendê-los, (BRASIL, 2006).

3.1 Situação atual do ensino de funções

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática, porém, segundo Barreto (2008), apenas recentemente ele passou a ser estudado de forma individualizada. De acordo com Brasil (2006), a importância da concepção de funções, não só para a matemática, mas também para outras áreas do conhecimento, se dá porque o estudo deste tema permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como linguagem das ciências. Esta linguagem, por sua vez, é necessária para expressar a relação existente entre grandezas e para construir modelos descritivos de fenômenos da natureza, propiciando assim a existência de várias conexões dentro e fora da matemática. Contudo, devido à abrangência do conceito de função, que envolve concepções diversas e múltiplas representações, faz-se necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos, bem como, de que forma ele se desenvolve no ambiente escolar.

Barreto (2008) destaca que as funções podem ser entendidas como um conceito que trata de problemas de variação e quantificação de fenômenos. À vista disso, uma variável pode representar os valores possíveis para o domínio, surgindo então o enlace para o estudo da noção de variáveis dependente e independente. Sendo assim, ao identificarmos as variáveis de um fenômeno que ocorre com certa regularidade, é possível descrevê-lo através de um modelo matemático. No entanto, muitos alunos têm dificuldades na compreensão do conceito de variável e ainda mais, em expressar relações generalizadas, pois comumente não sentem a necessidade de generalização. Com vistas a enfrentar essas dificuldades, Ponte (1990) sugere que o estudo de funções deve iniciar a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, que são mais intuitivas e possuem um apelo mais visual. Ponte (1990) afirma ainda que, para o aluno ser capaz de calcular valores numéricos, desenvolver um sentido quantitativo e adquirir sensibilidade para o que são aproximações aceitáveis e inaceitáveis, ele deve ter a oportunidade de trabalhar, sempre que possível, com números provenientes de contextos da vida real. Dessa forma, o método algébrico e os aspectos de formalização devem ser reservados para um segundo momento.

No entanto, conforme Barreto (2008), a maioria dos professores, que lecionam a disciplina de matemática no Ensino Médio brasileiro, segue uma ordenação tradicional, influenciada diretamente pela ordem disposta nos livros didáticos. Esta sequência, por sua vez, é na maioria das vezes desconectada do contexto do aluno enquanto indivíduo dotado de saberes e imaginação, além de que, geralmente esses livros tratam os temas de forma independente e sem conexão com as aplicações da matemática às outras ciências. Outro problema, segundo De Souza e Campos (2007), é que a maioria dos livros didáticos brasileiros apresenta apenas a representação algébrica das funções. Como consequência, os professores, "reféns" desses livros, estimulam os alunos a elaborar tabelas contendo apenas os valores de quatro ou cinco pontos, descobertos a partir da expressão algébrica, para a construção de gráficos de funções. Certamente, esta forma de trabalhar o assunto atrapalha o desenvolvimento do aluno, já que não incentiva este a pensar sobre o comportamento do gráfico no seu domínio.

Ademais, Chaves e Carvalho (2004) afirmam que há quase uma obsessão, por parte de alguns professores de matemática, em apresentar fórmulas ou algoritmos prontos e descontextualizados. Como exemplo, citam o fato de que o conceito de função muitas vezes é apresentado como um caso particular de relação. Entre as causas que mantém esses métodos tradicionais de ensino ativos ao longo dos anos (GONZATTO, 2012) cita a má formação de professores. Nesse sentido, Chaves e Carvalho (2004) relatam que, no projeto de pesquisa "Os processos de ensino-aprendizagem na Escola Básica", realizado no estado de São Paulo, os professores integrantes do projeto, ao fazerem uso da linguagem matemática, não deixavam devidamente explicadas as ideias inerentes ao conceito de função. Logo, se o professor não consegue entender para si mesmo uma definição, como por exemplo, o conceito de uma função, certamente este mesmo profissional não saberá explicá-lo aos seus alunos quando estiver lecionando.

Nos últimos anos, porém, esta disposição dos conteúdos da grade curricular, em compartimentos estanques tem sido questionada e reformulada por muitos educadores. Nesse sentido, os PCNs fazem sugestões quanto ao tratamento dos temas matemáticos e propõem um conjunto de assuntos que possibilitem o desenvolvimento de competências com relevância científica e cultural. Para isso, enfatizam que deve existir uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos no Ensino Médio. Buscando alcançar esse objetivo, os PCNs sugerem uma divisão dos temas matemáticos em três grupos. No primeiro deles, está contido o conceito de função, que deve ser trabalhado vinculado à álgebra. Entretanto, a ênfase deve estar no conceito, nas suas propriedades, na interpretação gráfica e nas aplicações, ao invés, do enfoque tradicional que privilegia as manipulações algébricas e uma linguagem excessivamente formal (BRASIL, 2000).

3.2 A importância das múltiplas representações

O conceito de função envolve diversas concepções e diferentes formas de representação, como por exemplo, a algébrica, a gráfica, a numérica, a tabelar, a língua natural, etc.. Sendo assim, a aprendizagem desse conteúdo deve contemplar o estabelecimento e a compreensão das relações existentes entre esses vários tipos de representação. Nesse sentido, Duval (1993, 2012) aponta que, na aprendizagem matemática, é essencial poder mobilizar muitos registros de representação semiótica, bem como conseguir transformar um sistema em outro. Essa transformação de um sistema em outro é um processo no qual o sujeito acessa um mesmo objeto matemático por meio de diferentes registros de representação semiótica. A transformação se divide em dois casos: Tratamento, que é uma transformação interna a um registro, pois permanece no mesmo sistema de representação; Conversão, que é uma transformação externa ao registro de início, pois se processa na transição entre dois sistemas de representação, fazendo referência ao mesmo objeto. Dessa forma, as conexões existentes entre os diversos tipos de representação, quando desenvolvidas de forma articulada, levam a uma compreensão mais abrangente e aprofundada do conceito e da situação que pode estar sendo representada. Como consequência, os alunos poderão compreender as relações existentes entre as diversas representações e avaliar as vantagens e desvantagens de cada uma, de acordo com os objetivos pretendidos.

No entanto, de acordo com Notare (2009), muitas vezes o conceito de função é trabalhado em sala de aula com a utilização de apenas uma forma de representação. Como consequência, uma parcela significativa dos alunos tem dificuldade para entendê-lo, associando-o geralmente a uma fórmula ou a um gráfico. Além disso, muitos estudantes têm problema para transitar pelas diferentes formas de representação de uma função, bem como para converter um registro em outro. Nesse sentido, Duval (1993, 2012) afirma que o não conhecimento dos diversos registros de representação semiótica do conceito de função e a incapacidade de transitar entre os diferentes sistemas explicam as dificuldades apresentadas pelos alunos. Sendo assim, é importante trabalhar com exemplos e exercícios que envolvam conversões e abarquem diferentes registros de representação semiótica, como a língua natural, o algébrico, o numérico, o gráfico, etc., para proporcionar um entendimento global dos conceitos que estão sendo trabalhados.

De acordo com Duval (1993, 2012), representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento, como por exemplo, a língua natural, os sistemas de escrita (numérico, algébrico e simbólico), as figuras geométricas e os gráficos cartesianos. Para Duval (1993, 2012), as representações semióticas têm um papel fundamental na atividade matemática, pois os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis na percepção. Sendo assim, é essencial mobilizar muitos registros de representação semiótica de forma simultânea nas atividades matemáticas, pois a compreensão desses é condição necessária para que os objetos matemáticos possam ser reconhecidos em cada uma de suas representações e sem ser confundidos com elas.

Para atingir o nível necessário de compreensão das representações semióticas, que por sua vez, vai auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos que estão sendo estudados, De Souza e Campos (2007), afirmam que é essencial que os alunos tenham uma atividade matemática promotora do desenvolvimento da sua capacidade para fazer raciocínios contemplando várias representações. Sustentam ainda que o indivíduo só consegue atingir um bom nível de compreensão sobre o conceito de função se conhecer pelo menos três sistemas de representação, dos quais os principais são o algébrico, o gráfico e o da língua natural. Justificam que o sujeito deve conhecer o sistema algébrico porque ele é o mais usual. O sistema gráfico é importante porque pode favorecer a aprendizagem e ainda porque a conversão entre os registros gráfico e algébrico é não congruente, ou seja, cada componente de um registro não se transforma necessariamente numa componente do outro. O sistema de representação da língua natural é relevante porque é um procedimento habitual na manipulação e na conversão do que está à nossa disposição, seja a expressão algébrica, seja o registro gráfico. Entretanto, para sermos capazes de escolher os sistemas mais adequados para o momento, precisamos conhecer vários sistemas de representação. Duval (apud DE SOUZA; CAMPOS; 2007) defende a utilização de dois sistemas não congruentes, de forma que os componentes de um registro não se transformem necessariamente nos componentes do outro.

Notare (2009) afirma que apesar da importância das múltiplas representações no processo de aprendizagem da matemática, a sua existência não é suficiente para garantir o êxito na resolução de um problema. Para tal, é preciso que o sujeito seja capaz de conectar as diferentes representações e conseguir manipular a informação de maneira eficaz na solução do problema. Nesse sentido, Domingos (2003) e Duval (2006b) afirmam que, no processo de ensino-aprendizagem, o estabelecimento e a compreensão das relações existentes entre as várias representações de uma função são importantes para promover o desenvolvimento de diversos tipos de conexões, além de ajudar na compreensão desse conceito. Para Duval (2006a), não é simples de se fazer essa ligação, razão pela qual o seu estudo deve visar à coordenação entre as suas diversas formas de representação, quais sejam, a gráfica, a tabelar, a algébrica, a verbal, entre outras.

Saraiva e Teixeira (2009), acreditam que a maior parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos para entender o conceito de função está relacionada aos símbolos empregados pelos professores para compor essa definição. Por sua vez, o problema em compreender os símbolos está associado ao contexto em que eles são trabalhados em sala de aula. Nesse sentido, Saraiva e Teixeira (2009) sustentam que atividades como resolução de problemas e exercícios investigativos podem ajudar a desenvolver a capacidade dos alunos de interpretar e manipular os símbolos matemáticos, bem como aprimorar a sua habilidade para lidar com as estruturas algébricas. À vista disso, Notare (2009) afirma que quanto mais o sujeito pensar e conjecturar hipóteses para tentar resolver um problema matemático, mais experiência ele vai ganhar para aplicar na resolução de outros problemas até então desconhecidos, pois a sua capacidade vai sendo ampliada com os novos conhecimentos construídos.

Sendo assim, é importante que os professores saibam que a apresentação de uma solução pronta e sucinta não possibilita que o aluno vivencie a sua construção. Dessa forma, acredito que os professores de matemática devem apresentar os conceitos, utilizados na resolução dos problemas, e mostrar aos seus alunos que existem vários caminhos que podem ser percorridos para a obtenção de uma solução. É relevante também destacar que estes caminhos englobam conhecimentos que vão sendo construídos e reconstruídos por cada indivíduo ao longo das suas vidas.

3.2.1 As representações gráfica e algébrica

Os sistemas de representação algébrico e gráfico são primordiais no ensino de matemática, pois podem fazer com que o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, em particular o de funções, seja significativo e eficaz (DE SOUZA; CAMPOS; 2007). A importância da representação gráfica se dá porque, na maioria das vezes, ela proporciona uma imagem clara do comportamento geral das funções de variáveis reais, pois o domínio, a imagem e a regra de correspondência são percebidos simultaneamente. Como consequência, o apelo visual favorece a observação de determinados comportamentos que são difíceis de se perceber em outras representações, além de favorecer a representação intuitiva para os alunos que gostam de uma análise visual (BARRETO, 2008).

No entanto, de acordo com Gafanhoto e Canavarro (2008), a representação gráfica é muito influenciada por fatores externos, como por exemplo, as escalas, e geralmente apresenta só uma pequena parte do domínio da função. Além disso, devemos ter cuidado ao trabalhar com interpretação de um gráfico, pois uma representação estática pode esconder o dinamismo de uma função. Por sua vez, a representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de modelos matemáticos. Contudo, esta forma de representação pode causar dificuldades na interpretação de resultados, pois usa exclusivamente símbolos matemáticos.

Dessa forma, para atender aos estilos de cada estudante, é importante trabalhar com múltiplas formas de representação. Nesse contexto, a representação numérica torna-se significativa, pois pode ser usada como registro intermediário nas conversões dos registros gráficos para algébricos e vice-versa. No entanto, a natureza da tarefa, a preferência pessoal e o estilo de pensamento do indivíduo são fatores que poderão determinar o tipo de representação mais eficaz a ser utilizado. Por isso, é importante estudar também conversões entre outras formas de representação e não limitar o ensino de conversões de funções apenas à passagem da representação algébrica para a representação gráfica.

As Orientações Curriculares Nacionais (2006) enfatizam que o aluno deve desenvolver habilidades para construir e interpretar tabelas, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para converter um sistema de representação em outro. Além disso, é importante que o sujeito consiga estabelecer, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas com o objetivo de resolver problemas. No entanto, muitos alunos têm dificuldades para interpretar gráficos e tabelas. Para amenizar esse problema, muitos autores sugerem que o conceito de função seja desenvolvido através de atividades concretas, pois essa abordagem permite a exploração de temas do cotidiano dos estudantes e possibilita o desenvolvimento de habilidades de investigação. Nesse sentido, Siqueira (2008) afirma que a inclusão de situações-problemas nas tarefas faz com que haja um melhor entendimento, em comparação a tarefas formuladas apenas matematicamente.

Siqueira (2008) sugere também que, para abordar o tema, primeiramente sejam desenvolvidas atividades que visem fortalecer a noção intuitiva do conceito de função para depois se chegar à definição e as suas propriedades. Para isso, é importante que o ensino de funções se inicie por meio da representação gráfica e a partir dela se introduza a linguagem algébrica, explorando, sempre que possível, situações cotidianas. Essa abordagem se justifica porque a familiarização do aluno com os diversos tipos de gráficos ocorre ao mesmo tempo em que ele adquire as noções de variável e dependência, básicas para a construção do conceito de função. Desse modo, somente após a preparação dos alunos para a compreensão do conceito de função é que ocorrerá a apresentação formal das funções.

3.3 Informática no ensino de funções

Atualmente estamos cercados pelas mais variadas tecnologias da informação, as quais nos oportunizam novas vias para o processo de ensino-aprendizagem de matemática (HOEPERS; FERREIRA; 2007). Estas tecnologias, se bem aproveitadas, podem propiciar um avanço em questões relacionadas à tomada de decisões, raciocínio lógico e estratégias para resolução de problemas, fazendo com que alunos que antes detestavam a matemática passem a sentir mais prazer ao estudá-la. Sendo assim, é necessário refletir sobre a forma atual de trabalhar os conteúdos matemáticos, em particular, as funções, já que muitas vezes ela se restringe à apresentação verbal e/ou escrita e, por isso, não motiva os alunos.

Uma das possibilidades para o ensino de funções é a utilização de softwares de geometria dinâmica, pois estes permitem a manipulação de diferentes formas de representação deste conteúdo. Nesse sentido, Hoepers e Ferreira (2007), argumentam que os programas educativos apresentam um potencial que pode dinamizar os ambientes de aprendizagem, sobretudo, de funções, podendo proporcionar bons resultados no ensino desse conteúdo. No que diz respeito ao uso das tecnologias, Santos e Bianchin (2012) argumentam que o uso de um ambiente de aprendizagem computacional no ensino de matemática pode favorecer a visualização, observação, abstração e a generalização dos processos matemáticos. Ademais, a representação de um mesmo conceito utilizado de forma alternada por meio de um software pode suscitar relações normalmente implícitas a se tornarem explícitas, o que pode contribuir para que o estudante estabeleça relações entre as suas concepções para a formação de conceitos.

Dentre os programas atuais de geometria dinâmica, podemos destacar o software GeoGebra[4], que devido ao seu caráter dinâmico, pode potencializar a exploração das múltiplas representações de uma função, em especial quando expressas nos sistemas gráfico e algébrico. Da mesma forma, esse programa permite ao aluno trabalhar e compreender o conceito de função de uma maneira que não é possível com ferramentas tradicionais, como o lápis e papel. Proporciona ainda aos estudantes muitas oportunidades, destacando-se a exploração de

[4] www.GeoGebra.org

problemas e conceitos matemáticos complexos e a análise de exemplos e problemas nas suas mais diversas formas de representação, além da execução de procedimentos rotineiros de forma mais rápida e precisa (HOEPERS; FERREIRA; 2007). Sendo assim, o GeoGebra pode ser um auxiliar no processo de construção do conceito de função e a sua utilização adequada pode ajudar a compor um cenário favorável e motivador no ensino-aprendizagem desse conteúdo. Brandt e Montorfano (2007) mencionam que o uso do GeoGebra enriquece os ambientes de aprendizagem e auxilia professores e alunos no processo de construção do conhecimento.

Muitas vezes o estudo de funções é considerado difícil e maçante, e, muito disso se deve ao fato de que a construção manual dos gráficos é árdua. Hoepers e Ferreira (2007) salientam que uma das principais finalidades do estudo de funções é a compreensão do conceito e não apenas a confecção de gráficos. Nesse sentido, a utilização do GeoGebra minimiza os problemas na elaboração de gráficos, possibilitando a construção e a análise destes de maneira simples, prática e agradável. Além disso, esse programa pode auxiliar na compreensão do conceito da função, pois favorece a visualização e o trabalho com as representações gráfica e algébrica de forma simultânea, possibilitando o desenvolvimento de generalizações e abstrações. Com isso, pode-se disponibilizar mais tempo para a análise e interpretação de dados, tornando as aulas mais interessantes e atrativas.

Hoepers e Ferreira (2007) mencionam que a utilização do GeoGebra propicia aos alunos a identificação das variáveis visuais da representação gráfica e das variáveis simbólicas da representação algébrica de algumas funções, permitindo assim a interpretação de procedimentos globais e a coordenação de registros de representação semiótica do conceito de função. Nesse contexto, a conversão da representação de uma função no registro algébrico para o registro gráfico não deve ser vista apenas como um conjunto de regras associado a um ponto ou a um par de coordenadas no sistema cartesiano. É necessária uma compreensão global e qualitativa, a fim de explorar variáveis como crescimento, decrescimento e relação com os coeficientes da função (DUVAL, 1993, 2012).

No entanto, a simples presença de programas matemáticos não garante por si só maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional, baseado na recepção e memorização de informações. Se o computador for utilizado como ferramenta pedagógica, ele não será simplesmente o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual este desenvolve, descreve, busca novas estratégias e soluciona situações-problema (BRANDT; MONTORFANO; 2007). Para Santos e Bianchin (2012), as ferramentas computacionais podem ser vistas como um meio auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, que precisam estar devidamente articuladas como uma estratégia pedagógica que oportunize a construção crítica do conhecimento.

3.3.1 Geometria Dinâmica

A Geometria Dinâmica é um método dinâmico e interativo adotado no ensino de matemática, especialmente de geometria, que utiliza ambientes computacionais destinados a esse fim (ALVES; SOARES; 2003; NÉRI, 2012). O seu desenvolvimento se deu a partir do final da década de 1980, apoiado na ideia de que o uso apropriado de computadores pode tornar o ensino de matemática mais eficiente e significativo, além de integrar esta disciplina às demais ciências. Atualmente, os recursos de animação, disponíveis em alguns softwares de geometria dinâmica, se tornaram uma importante ferramenta que nos permite construir e observar as figuras geométricas em situações diversas, além de modificar algumas das suas características. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), os softwares de geometria dinâmica permitem a construção e a manipulação de objetos geométricos sem que as suas propriedades fundamentais sejam alteradas. Proporcionam ainda a visualização desses objetos de diversas formas, facilitando com isso a compreensão do comportamento dos elementos contidos nessas construções.

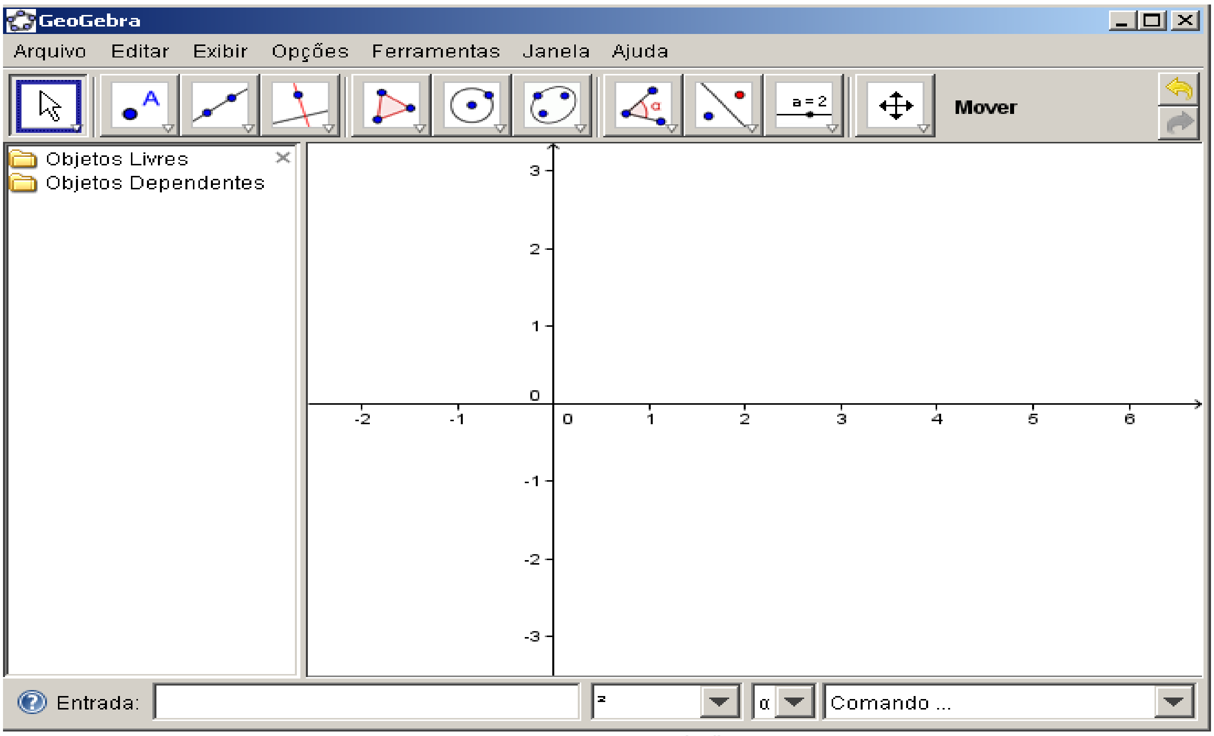
Para Muruci, Guimarães e Giraldo (2008), os ambientes de geometria dinâmica facilitam a compreensão das transformações, sobretudo translações, compressões e alongamentos, nos gráficos das funções, pois, os efeitos da variação de parâmetros numéricos podem ser observados em tempo real, tanto nas mudanças de aspecto gráfico quanto nas mudanças dos valores numéricos da função. Com isso, os softwares de geometria dinâmica propiciam a criação de um terreno ideal para a observação, formulação de conjecturas e generalização de propriedades das funções, pois além de fornecer oportunidades para que os alunos explorem propriedades e relações, possibilitam também que estes formulem e comprovem novas hipóteses. No entanto, Muruci, Guimarães e Giraldo (2008) ressaltam a importância de haver a compreensão das propriedades da representação algébrica da função, bem como de se fazer uma análise crítica de cada gráfico gerado pelo computador, pois não podemos atribuir a este o papel de estabelecer verdades matemáticas absolutas em detrimento do conhecimento do indivíduo. Nesse sentido, Moreira (2012) destaca a importância de se trabalhar com atividades que possibilitem a compreensão do conceito de função, bem como estimulem o trânsito entre as suas diversas formas de representação, pois a ênfase do ensino de matemática deve estar na construção do conhecimento e não na mera repetição de resultados já conhecidos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que para tirar vantagem do potencial dos programas de geometria dinâmica é preciso desenvolver, em sala de aula, atividades que tenham um caráter investigativo, ou seja, é necessário propor problemas nos quais os alunos sejam convidados a dar ênfase em processos matemáticos como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas. Nesse aspecto, é importante que as construções, em especial de gráficos, sejam realizadas de forma correta e precisa, já que, de acordo com Alves e Soares (2003), o apelo visual possui um papel relevante na formação da imagem mental do indivíduo.

Dentre os programas matemáticos disponíveis atualmente, o GeoGebra é um dos mais recomendados, pois além de ser gratuito e possuir os recursos de um software de geometria dinâmica, ele traz uma janela algébrica que permite a construção de gráficos de funções a partir da sua representação algébrica. Essa janela facilita também a variação dos parâmetros algébricos da função, propiciando com isso a exploração de transformações, como por exemplo, translações, alongamentos e compressões, motivando a conexão entre representações gráfica e algébrica de forma dinâmica. De acordo com Sierpinska (1992), um gráfico é uma representação estática que esconde todo o dinamismo das funções, pois um único ponto (x, y) é o símbolo que encerra em si o argumento, o valor e a lei de correspondência da função. No entanto, o GeoGebra possibilita que essa representação estática ganhe movimento, pois a variável independente pode ser manipulada livremente e podemos observar em tempo real a consequente variação da variável dependente.

Além disso, o GeoGebra é um programa de fácil utilização devido a sua interface[5] amigável e ao fato de que as suas ferramentas apresentam o desenho da função que exercem. Outra vantagem é que o GeoGebra permite uma precisão maior na elaboração de desenhos com régua e compasso, pois o histórico passo a passo das construções feitas pode ser consultado a qualquer momento. Dessa forma, pode-se pensar em uma metodologia de ensino mais centrada no aluno e este, por sua vez, pode ficar mais livre para tomar iniciativas e explorar uma ampla gama de situações-problema, fator que contribui para a construção de um ambiente de aprendizagem produtivo e prazeroso. À vista disso, no próximo capítulo, apresentaremos uma proposta para o ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus composta por atividades que visam estimular o caráter investigativo dos alunos, pois acreditamos que esse tipo de atividade propicia que o aluno experimente e visualize as suas ideias, bem como favorece o processo de formulação de conjecturas, argumentação e dedução.

FIGURA 1 – Interface do Software GeoGebra versão 3.2.40.0.



Fonte: www.google.com.br/imagens.

[5] Figura 1: interface do Software GeoGebra versão 3.2.40.0.

4 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Este capítulo tem o objetivo de apresentar uma proposta para o ensino de funções, em particular, funções polinomiais de 1º e 2º graus, que possibilite a compreensão deste conceito e não a simples interpretação de forma mecanizada. De acordo com Brasil (2006), o conhecimento deve ser entendido como uma ferramenta importante para a resolução de problemas e não como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em “provas escritas”. Sendo assim, a presente sequência didática abordará o conceito de função, dando ênfase aos registros das representações algébrica e gráfica, bem como as noções de domínio, imagem e as transformações gráficas das funções afim e quadrática. Como base teórica, usaremos a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval (1993, 2012), a qual defende que para haver a aquisição do conhecimento matemático é necessário desenvolver atividades que mobilizem e articulem diferentes registros de representação. Nesse sentido, as atividades propostas deverão privilegiar o relacionamento e a conversão de diferentes formas de representações simbólicas do conceito de função, com principal destaque à conversão da representação algébrica para a gráfica e vice-versa.

Para estimular a aprendizagem dos alunos, vamos propor atividades que possibilitem o trabalho desse conteúdo de forma atrativa e dinâmica, como por exemplo, com a utilização de ambientes computacionais e com a resolução de problemas contextualizados, pois entendemos que esse tipo de metodologia proporciona mais engajamento por parte dos estudantes e, com isso, auxilia na compreensão do conceito de função. Além disso, vamos sugerir atividades que estimulem a criatividade dos alunos, possibilitando que estes, ao tentar resolver os problemas propostos ou elaborados por eles próprios, realizem tentativas, estabeleçam e testem hipóteses e validem os seus resultados (BRASIL, 2006). Outro ponto a ser destacado é a interação que deve haver entre professores e alunos, pois segundo Domingos (2003), ela conduz essencialmente ao esclarecimento dos procedimentos utilizados na resolução do problema.

4.1 O estudo de funções e o movimento de gráficos

Nesta seção, apresentaremos algumas definições[6] que são essenciais no estudo de funções.

4.1.1 Funções

A função f é uma regra que associa uma única saída a cada entrada, ou em outros termos, se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y, então dizemos que y (variável dependente) é uma função de x (variável independente).

4.1.1.1 Domínio

O domínio de uma função f é o conjunto de todos os possíveis valores que a variável independente pode assumir, sendo denotado por $Dom(f)$.

4.1.1.2 Contradomínio

O contradomínio de função f é o conjunto que contém os elementos que podem ser relacionados a elementos do domínio.

4.1.1.3 Imagem

A imagem de uma função f é o conjunto de todos os valores alcançados pela variável dependente, sendo denotado por $\mathrm{Im}(f)$.

4.1.2 Polinômios

Um polinômio a coeficientes reais é uma expressão do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com x sendo uma variável e $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in R$ os seus coeficientes[7] (DOERING; DOERING; 2008).

---

[6] Definições elaboradas pelo autor com base nos livros:
ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. v. 1, 8 ed. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2007;
DOERING, Claus Ivo; DOERING, Luisa Rodríguez (Orgs.). Pré-Cálculo. 1. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2008.

4.1.2.1 Polinômios de grau 1

Um polinômio de grau 1, a coeficientes reais, é uma expressão do tipo $ax+b$, com x sendo uma variável e $a,b \in R$ os seus coeficientes. Para encontrar a raiz do polinômio $p(x)=ax+b$, basta tomar $p(x)=0$, obtendo $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$. Logo, a raiz de $p(x)$ é $-\frac{b}{a}$. Geometricamente, podemos encontrar a raiz de $p(x)$ olhando para o gráfico da função polinomial $y=f(x)$, uma vez que a raiz está localizada na intersecção do gráfico de $f(x)$ com o eixo horizontal (eixo x).

4.1.2.2 Polinômios de grau 2

Um polinômio de grau 2, a coeficientes reais, é uma expressão do tipo ax^2+bx+c, com x sendo uma variável e $a,b,c \in R$ os coeficientes deste polinômio. Para encontrar as raízes do polinômio $p(x)=ax^2+bx+c$, podemos usar alguns métodos, entre eles:

a) Soma e produto: a soma das raízes de um polinômio de grau 2 é $-\frac{b}{a}$ e o produto dessas raízes é $\frac{c}{a}$, ou seja, $S=-\frac{b}{a}$ e $P=\frac{c}{a}$;

b) Fórmula de Báskara: a fórmula de Báskara é expressa por $x=-b\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

c) Método geométrico: geometricamente podemos encontrar as raízes reais (se houver) de $p(x)$ olhando para o gráfico da função polinomial $y=f(x)$, uma vez que as raízes reais estão localizadas na(s) intersecção(ões) do gráfico de $f(x)$ com o eixo horizontal (eixo x).

4.1.3 Funções polinomiais

Dizemos que $f:R\to R$ é uma função polinomial quando existem números $a_0,a_1,a_2,...,a_n \in R$ tais que $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$, $\forall x \in R$ (DOERING; DOERING; 2008).

---

[7] Em geral, os coeficientes de um polinômio pertencem ao conjunto dos números complexos. Porém, nesse texto, vamos trabalhar somente com coeficientes reais.

4.1.3.1 Funções polinomiais de grau 1

Uma função polinomial de grau 1, ou função afim, ou função linear, a uma variável, é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in R$ e $a \neq 0$.

4.1.3.2 Funções polinomiais de grau 2

Uma função polinomial de grau 2 ou função quadrática, a uma variável, é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$.

4.1.4 Gráficos de funções

O gráfico de uma função f é a representação, no plano coordenado xy, de todos os pares (x, y) para os quais $y = f(x)$, com x pertencendo ao domínio de f.

4.1.4.1 Definição: teste da reta vertical

Uma curva no plano xy é o gráfico de alguma função f se e somente se nenhuma reta vertical intersecta a curva mais de uma vez (ANTON; BIVENS; DAVIS; 2007).

4.1.4.2 Gráficos de funções polinomiais de grau 1

A função afim possui dois elementos essenciais. O primeiro deles é o coeficiente angular, representado pela letra a, que indica a inclinação da reta. O segundo é o coeficiente linear, representado pela letra b, que indica por qual ponto numérico a reta intercepta o eixo das ordenadas (eixo y).

4.1.4.3 Gráfico de funções polinomiais de grau 2

Para construir o gráfico deste tipo de função, algumas vezes é conveniente escrevê-la na forma $f(x) = a(x-d)^2 + k$ (através de completamento de quadrados[8], se necessário), pois poderemos construí-lo a partir de algumas transformações, como translações, reflexões, alongamentos ou compressões do gráfico de $f(x) = x^2$ (DOERING; DOERING; 2008).

---

[8] O completamento de quadrados será explicado na página 37 deste texto.

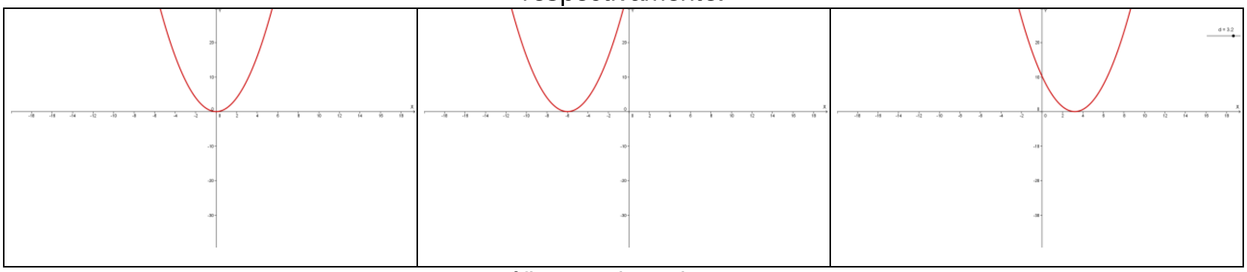
4.1.4.4 Movimentos ou transformações nos gráficos das funções polinomiais de grau 2

São as transformações gráficas ocasionadas pela mudança de um ou mais coeficientes da função.

4.1.4.4.1 Translação horizontal

É o deslocamento horizontal do gráfico de uma função f. Sendo assim, o gráfico da função $f_1(x) = (x-d)^2$ é uma translação horizontal de d unidades do gráfico da função $f(x) = x^2$. A translação é horizontal para a direita se $d > 0$ e para a esquerda se $d < 0$. Essas translações ocorrem porque ao substituir x por $x-d$ em $f(x)$ estaremos provocando um deslocamento horizontal de d unidades em todos os pontos da função f.

FIGURA 2 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f_1(x) = (x-d)^2$, com $d < 0$ e $d > 0$, respectivamente.

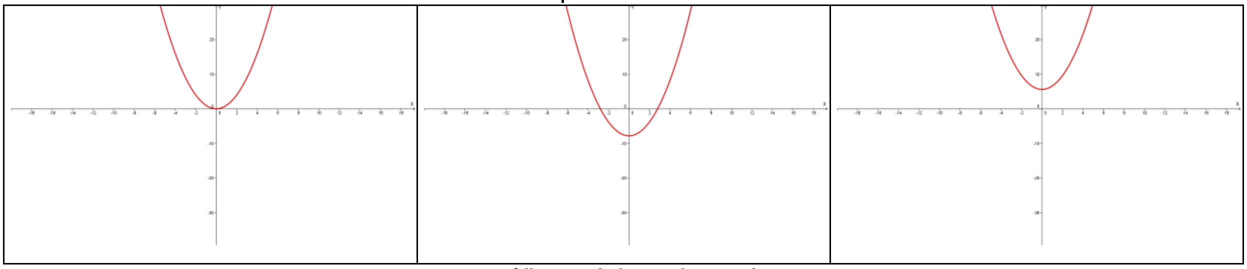


Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

4.1.4.4.2 Translação vertical

É o deslocamento vertical do gráfico de uma função f. Sendo assim, o gráfico da função $f_1(x) = x^2 + k$ é uma translação vertical de k unidades do gráfico da função $f(x) = x^2$. A translação é vertical para cima se $k > 0$ e para baixo se $k < 0$. Esses movimentos ocorrem porque a função $f(x)$ aplicada em cada ponto do seu domínio tem k unidades a mais do que a função $f_1(x)$ aplicada nos mesmos pontos.

FIGURA 3 – Gráficos das funções $f(x)=x^2$ e $f_1(x)=x^2+k$, com $k<0$ e $k>0$, respectivamente.

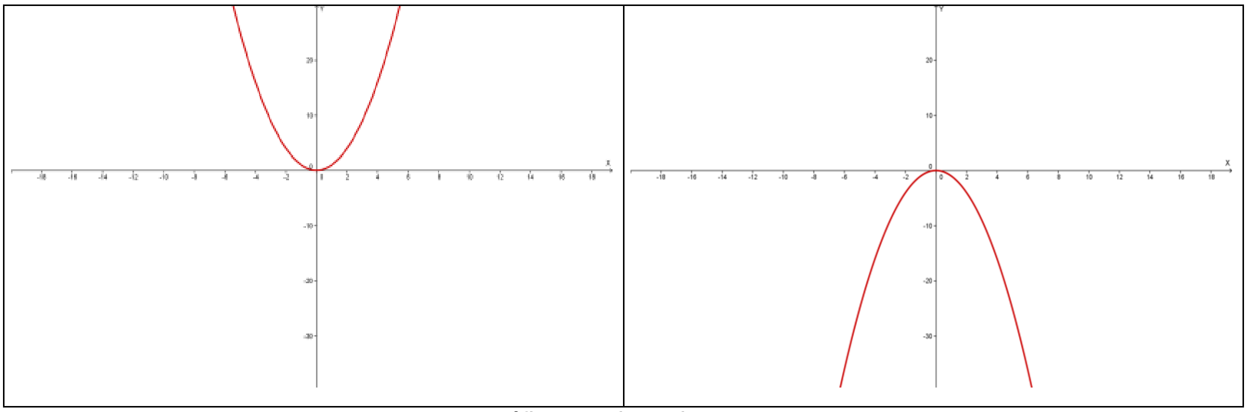


Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

4.1.4.4.3 Reflexão em torno do eixo x

Ocorrerá uma reflexão no gráfico da função $f_2(x)=a(x-d)^2+k$ em torno do eixo x se substituirmos a por $-a$, pois a função aplicada em cada ponto do seu domínio tem o mesmo valor, só que com o sinal oposto.

FIGURA 4 – Gráficos das funções $f(x)=x^2$ e $f_1(x)=-x^2$.

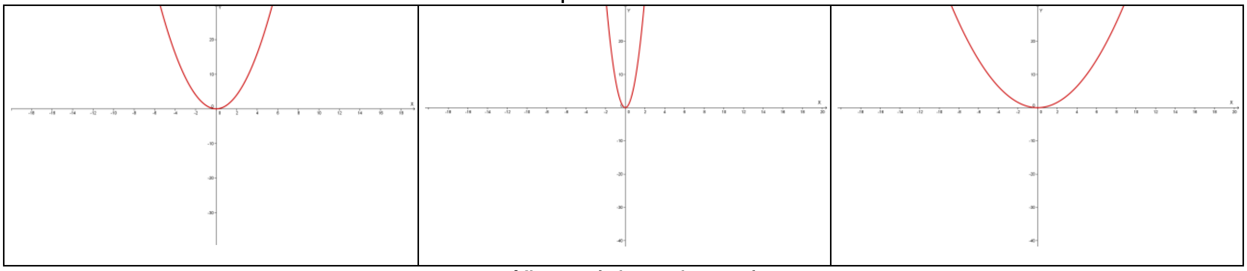


Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

4.1.4.4.4 Alongamento e compressão verticais

O gráfico da função $f_1(x)=ax^2$ é um alongamento vertical do gráfico da função $f(x)=x^2$ se $|a|>1$ e uma compressão vertical do gráfico de $f(x)=x^2$ se $0<|a|<1$.

FIGURA 5 – Gráficos das funções $f(x)=x^2$ e $f_1(x)=ax^2$, com $|a|>1$ e $0<|a|<1$, respectivamente.



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

4.1.5 Completamento de quadrados

É um método que consiste numa sucessão de operações, a partir de uma equação dada, que tem por objetivo escrever uma equação equivalente contendo expressões envolvendo um ou mais quadrados perfeitos (DOERING e DOERING, 2008). No caso particular de função quadrática, vamos escrever $f(x)=ax^2+bx+c$ na forma $f(x)=a(x-d)^2+k$.

$ax^2+bx+c=0$	Equação dada na sua forma padrão.
$a(x^2+\frac{b}{a}x)=-c$	Colocamos a constante a em evidência e isolamos a constante c à direita da equação.
$a(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a})=-c$	x^2 representa o quadrado do primeiro termo que, nesse caso, será x, e $2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}$ representa duas vezes o produto do primeiro termo (x) pelo segundo que, nesse caso será $\frac{b}{2a}$.
$a(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2})=-c+\frac{b^2}{4a^2}\cdot a$	Somamos, assim, o quadrado do segundo termo $\frac{b^2}{4a^2}$ nos dois lados da equação, a fim de não alterá-la. Observe que, agora, os termos do lado esquerdo da igualdade formam um trinômio quadrado perfeito.
$a(x+\frac{b}{2a})^2=-c+\frac{b^2}{4a}$	Substituímos os termos do lado esquerdo da igualdade pelo quadrado perfeito equivalente e simplificamos o lado direito.

$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$	Somamos $-\frac{b^2}{4a}+c$ nos dois lados da igualdade.
$a(x-d)^2+k=0$	Tomamos $d=-\frac{b}{2a}$ e $k=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Logo, temos que $ax^2+bx+c=a(x-d)^2+k$.

4.2 A sequência didática

Esta sequência didática tem por foco estudar as funções polinomiais de 1º e 2º graus, dando ênfase ao trabalho com as representações algébrica e gráfica, a partir da utilização de recursos tecnológicos, como o software GeoGebra. Ela pode ser aplicada para qualquer grupo de pessoas que possua os pré-requisitos para o estudo do tema, entre eles, conhecimento e domínio das operações com os números reais e habilidades para operar tecnologias da informação. No entanto, recomendamos que esse conteúdo seja estudado na primeira série do Ensino Médio ou equivalente, pois esse momento é propício para trabalhar com aplicações de outras ciências, como por exemplo, Movimento Retilíneo Uniforme e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. Sugerimos ainda que as funções polinomiais de 1º e 2º graus sejam trabalhadas num período mínimo de dez horas/aulas, distribuídas da seguinte forma:

a) 02 (duas) horas para a apresentação e familiarização dos alunos com software GeoGebra;
b) 06 (quatro) horas para a resolução dos problemas propostos nesse plano, pelo professor ou pelos alunos;
c) 02 (duas) horas para a consolidação das ideias e formalização dos conceitos apresentados acima.

É importante destacar que devemos priorizar a qualidade do processo de ensino/aprendizagem em detrimento da quantidade de conteúdos trabalhados. Sendo assim, para evitar que a sequência didática, sugerida por nós, fique muito rígida quanto ao cumprimento de etapas, optamos por distribuir os conteúdos em subseções ao invés de pré-estabelecer um roteiro com as matérias a serem abordados em cada aula. Pela mesma razão, entendemos que a carga horária sugerida acima pode ser alterada, a critério do professor, dependendo do engajamento e da produtividade de cada grupo de alunos.

As atividades foram desenvolvidas com o intuito de abrir caminho para a compreensão do conceito da função, em particular, funções afim e quadrática, bem como, trabalhar as noções de domínio, imagem e, principalmente, as transformações nos gráficos destas funções. Para isso, vamos:

a) explorar o conceito de função, integrando os aspectos algébrico, gráfico e numérico;
b) trabalhar a representação gráfica de funções, bem como a conversão do registro algébrico para o gráfico;
c) propor que o estudo de funções ocorra de forma integrada com outros conteúdos da própria Matemática e com aplicações às outras áreas do conhecimento, como por exemplo, aplicações da Física;
d) sugerir a implementação do estudo de funções através da resolução de problemas contextualizados;
e) estimular a visualização global dos gráficos, não como um conjunto de pontos com coordenadas numéricas, mas como uma trajetória sobre a qual podemos ver a relação entre as variáveis dependente e independente;
f) desenvolver e aprofundar uma visão dinâmica do conceito de função.

4.2.1 Função afim aplicada em Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

Da física, sabemos que a função da velocidade (instantânea) em relação ao tempo é definida por $v = v_0 + at$, com v sendo a velocidade (variável dependente), v_0 a velocidade inicial (coeficiente linear), a a aceleração (coeficiente angular) e t o tempo (variável independente). Considere o exemplo a seguir:

Exemplo 1: Um avião inicia o processo de decolagem no instante $t = 0$. A sua velocidade aumenta a uma taxa de $5 \, {}^{m}\!/_{s^2}$ durante trinta segundos. Como será o gráfico que representa a velocidade em função do tempo em $0 \leq t \leq 30$. Vamos construí-lo com o software GeoGebra[9].

[9] GeoGebra versão 3.2.40.0.

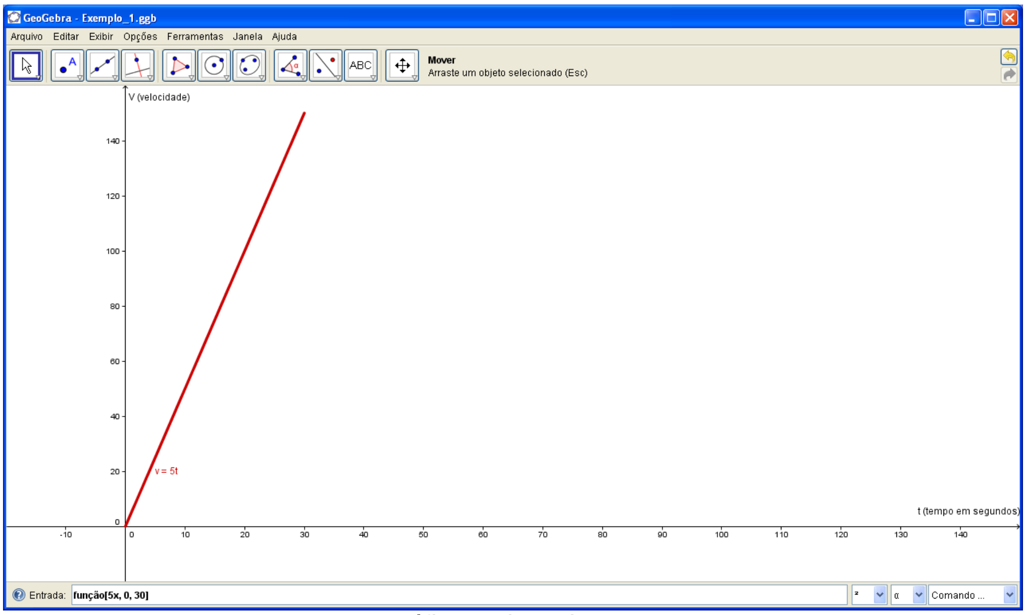
A velocidade do avião é dada pela expressão $v = 0 + 5\,t \Rightarrow v = 5t$. Como o GeoGebra reconhece apenas as entradas x e y, então temos que fazer a seguinte mudança de variável: $v = y$ e $t = x$. Assim, teremos $y = 5x$. Os passos a seguir indicam os ajustes para a janela de visualização e o procedimento para traçar do gráfico:

1º Passo: abra o software GeoGebra;

2º Passo: clique em Opções (Barra de Menus) $\Rightarrow$Janela de visualização $\Rightarrow$Eixo X (defina min: -20; max: 150) $\Rightarrow$Eixo Y (defina min: -20; max: 160);

3º Passo: para construir o gráfico da função $y = 5x$ digite a seguinte expressão na Entrada de Comandos: $\mathit{função}[5x, 0, 30]$. Devemos usar exatamente essa notação para que o GeoGebra entenda que queremos o desenho da função com lei de formação $y = 5x$ e domínio $[0, 30]$.

FIGURA 6 – Gráfico da função $y = 5x,\ 0 \le x \le 30$.



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

Sugestões de questões que podem ser trabalhadas:

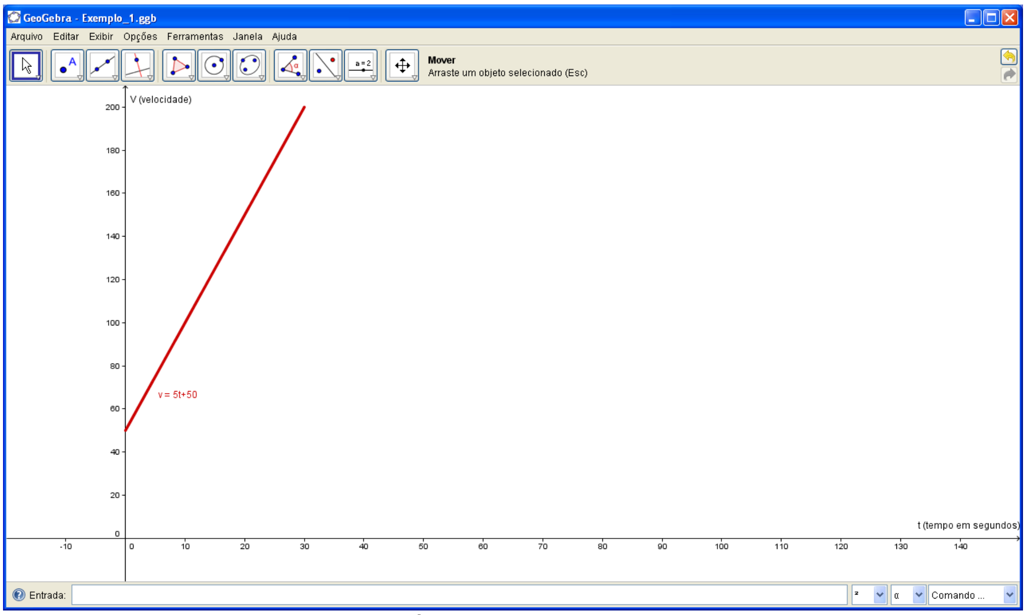
Apresentamos a seguir algumas questões que julgamos importantes para serem abordadas com os alunos no momento e após a construção desses gráficos:

a) o domínio de $v = 5t$ é igual ao de $y = 5x$? Por quê? Construa o gráfico de $y = 5x$ para $x \in (-\infty, \infty)$;

b) no contexto da Física, faria sentido falar em aceleração negativa? Construa o gráfico para $a = -5$. Na janela de visualização, defina Eixo X (min: -20; max: 160) $\Rightarrow$ Eixo Y (min: -160; max: 160);

c) construa o gráfico para o caso da velocidade inicial do avião ser $50 \, {}^{m}\!/_{s}$. Assim, teremos $v = 50 + 5\,t \Rightarrow v = 50 + 5t$. Para construir tal gráfico, escreva $Função[5x + 50, 0, 30]$ na Entrada de Comandos. Ajuste a janela de visualização para Eixo X (min: -20; max: 150) $\Rightarrow$ Eixo Y (min: -20; max: 210).

FIGURA 7 – Gráfico da função $y = 5x + 50,\ 0 \le x \le 30$.



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

Aqui cabe uma discussão sobre os movimentos de gráficos, tanto para a alteração da aceleração, quanto para a alteração da velocidade inicial. Sendo assim, vamos construir o gráfico da função $v = a \cdot t + b$, na qual a representa a aceleração do avião e b a velocidade inicial. Para podermos variar os coeficientes dessa função e animar o gráfico, vamos usar a ferramenta *Seletor*[10] do GeoGebra. Os passos a seguir indicam o procedimento para traçar do gráfico:

1º Passo: apague todos os gráficos construídos anteriormente, pois dessa forma não precisaremos configurar a janela de visualização novamente. Para isso, basta marcá-los e clicar na tecla *delete* do teclado;

2º Passo: clique em *Seletor* (Barra de Ferramentas) e após em qualquer espaço livre da Zona Gráfica;

[10] Em algumas versões mais recentes o nome dessa ferramenta é Controle Deslizante.

3º Passo: na janela que apareceu na Zona Gráfica defina:

- Nome: a;

- Intervalo: (min: -10; max: 10);

- Animação $\Rightarrow$ Velocidade: 1;

- Clique em aplicar;

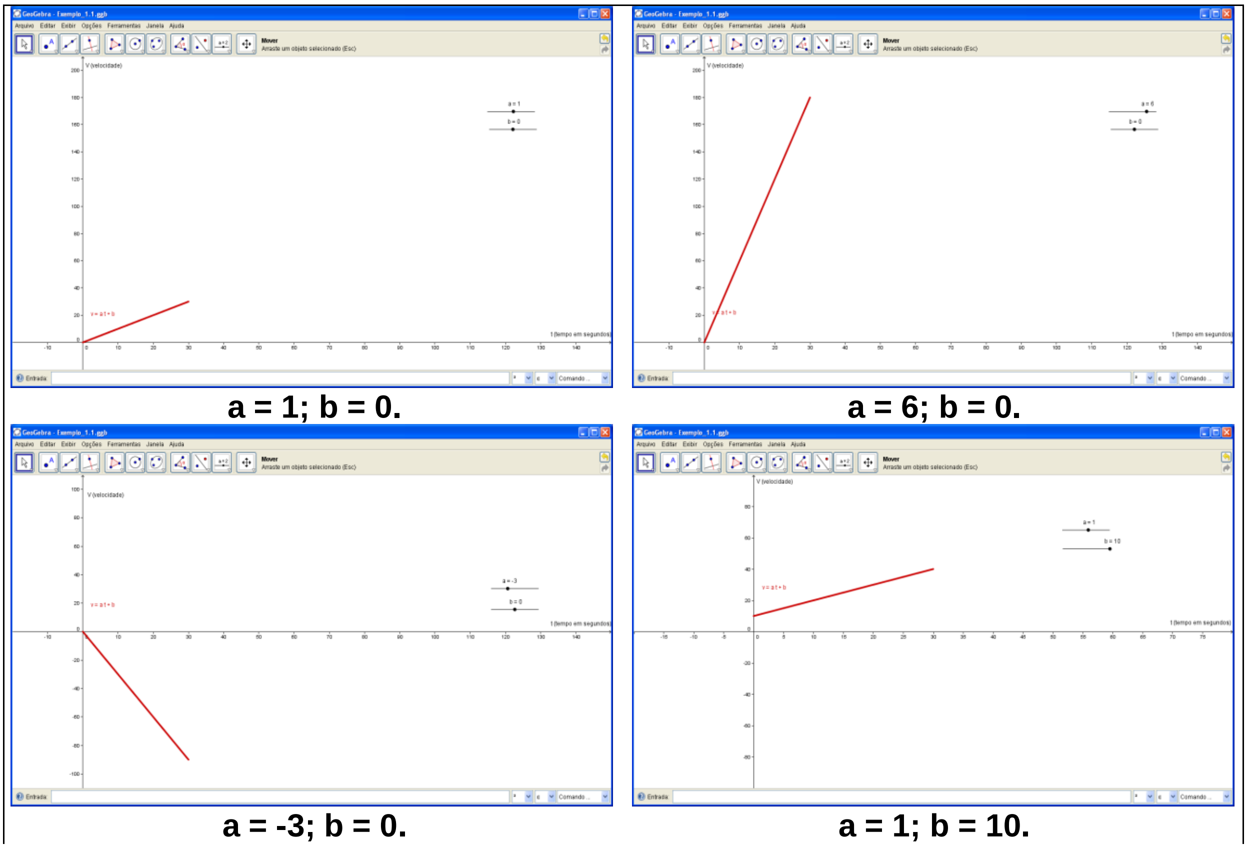
4º Passo: crie o *Seletor* b com os mesmos parâmetros de a;

5º Passo: faça uma mudança de variáveis para obter $y = a \cdot x + b$;

6º Passo: para construir o gráfico da função $y = a \cdot x + b$ digite a seguinte expressão na Entrada de Comandos: $\mathit{função}[a * x + b, 0, 30]$;

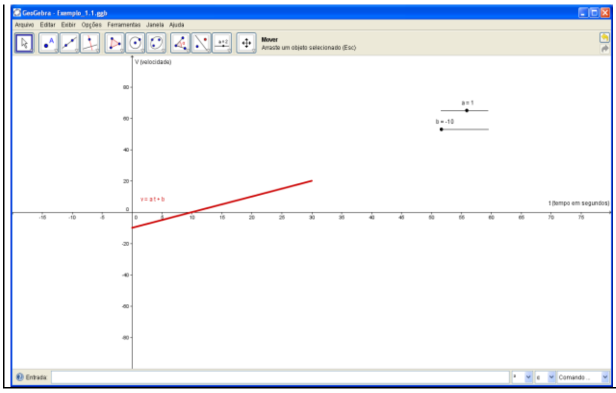
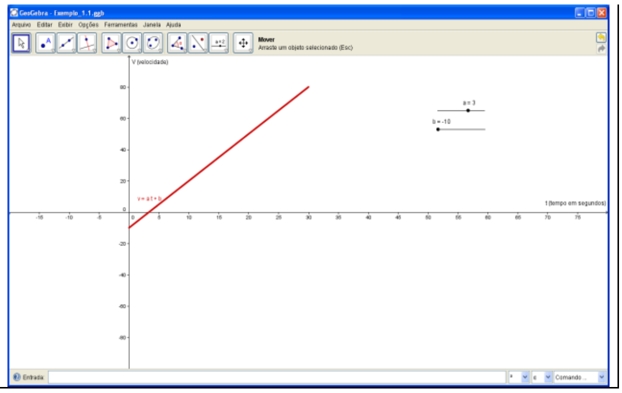
7º Passo: deixe um tempo livre para que os alunos movimentem os pontos a e b do *Seletor* e façam conjecturas sobre os movimentos do gráfico.

FIGURA 8 – Gráficos da função $y = a\,x + b,\ 0 \le x \le 30$.



a = 1; b = 0. **a = 6; b = 0.**

a = -3; b = 0. **a = 1; b = 10.**

a = 1; b = -10. **a = 3; b = -10.**

Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

4.2.2 Convertendo Temperaturas Fahrenheit e Celsius

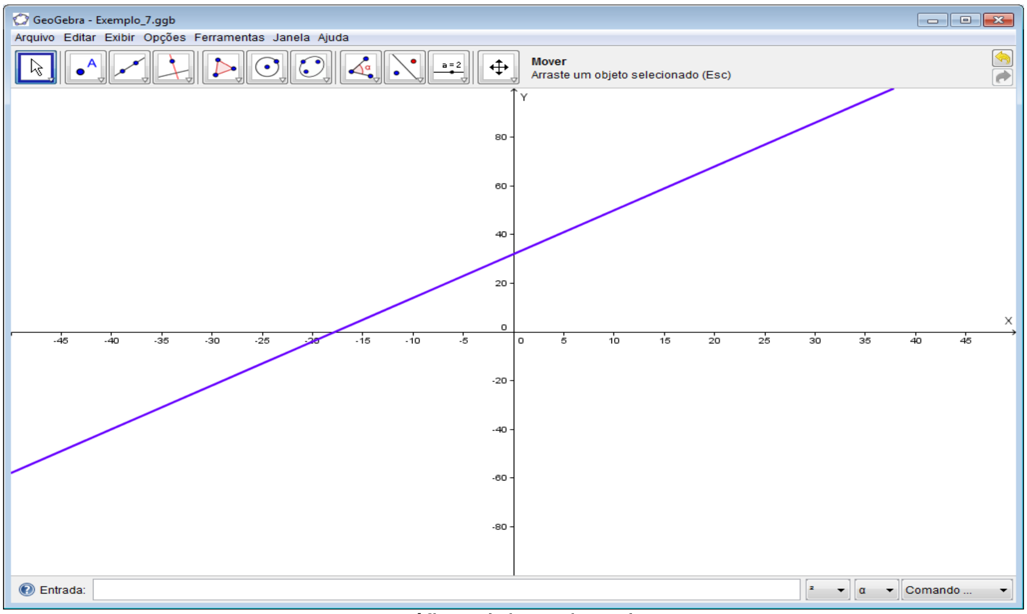
A escala de temperatura Centígrada define a temperatura do ponto de gelo como zero grau (0^0C) e a temperatura do ponto de vapor como cem graus (100^0C). No Brasil usamos majoritariamente a escala Celsius, que é um aperfeiçoamento da escala Centígrada. Outra escala usada largamente (principalmente nos Estados Unidos da América) é a Fahrenheit, criada pelo físico alemão Daniel Fahrenheit, que define a temperatura do ponto de gelo como trinta e dois graus (32^0F) e a do ponto de vapor como duzentos e doze graus (212^0F). A relação entre as escalas Fahrenheit e Celsius é dada pela função $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$.

Exemplo 2: Determine a temperatura Celsius equivalente a 0^0F.

a) sugestão para uma solução algébrica: nesse caso queremos encontrar T_C na expressão $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ ou, em outras palavras, encontrar a raiz do polinômio $y = \frac{9}{5}x + 32$. Para isso basta tomarmos $y = 0$, obtendo $0 = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow x = -32 \cdot \frac{5}{9} \Rightarrow x = \frac{-160}{9} \cong -17{,}77^0$. Logo, 0^0F equivale a $\frac{-160}{9}{}^0C \cong -17{,}77^0C$;

b) sugestão para uma solução geométrica: O primeiro passo é desenhar o gráfico de $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

FIGURA 9 – Gráfico da função $f(x) = \dfrac{9}{5}x + 32.$



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

O gráfico de f não é suficiente para obtermos uma resposta visual exata, mas nos permite concluir que $0^0 F$ equivale a aproximadamente $-18^0 C$.

Acreditamos que durante o estudo de funções polinomiais de grau 1 seja conveniente estudar também a equação reduzida da reta $y = ax + b$ e o termo geral da progressão aritmética $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, bem como a relação existente entre eles.

4.2.3 Função quadrática

Após o estudo das funções polinomiais de grau 1, realizado através do exemplo 1 e demais atividades que podem ser elaboradas pelo professor ou sugeridas pelos estudantes, daremos início ao estudo das funções quadráticas. Para isso, apresentaremos dois exemplos numéricos e um genérico que servirá para mostrar que as técnicas usadas aqui valem para qualquer função polinomial.

No entanto, ao contrário do exercício realizado acima, sugerimos que agora seja disponibilizado algum tempo (pode variar a critério do professor) para que os alunos construam os gráficos, façam e testem conjeturas sobre os movimentos observados ao longo da construção. Para finalizar a tarefa, sugerimos que o professor trace os gráficos e esclareça eventuais dúvidas.

Exemplo 3: Construa o gráfico de $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

Os passos para a construção podem ser os seguintes:

1º Passo: para construir o gráfico de $f(x) = x^2 + 6x + 10$ a partir das transformações apresentadas na seção 4.1.4.4, vamos utilizar o completamento de quadrados para escrever $f(x)$ na forma $a(x-d)^2 + k$.

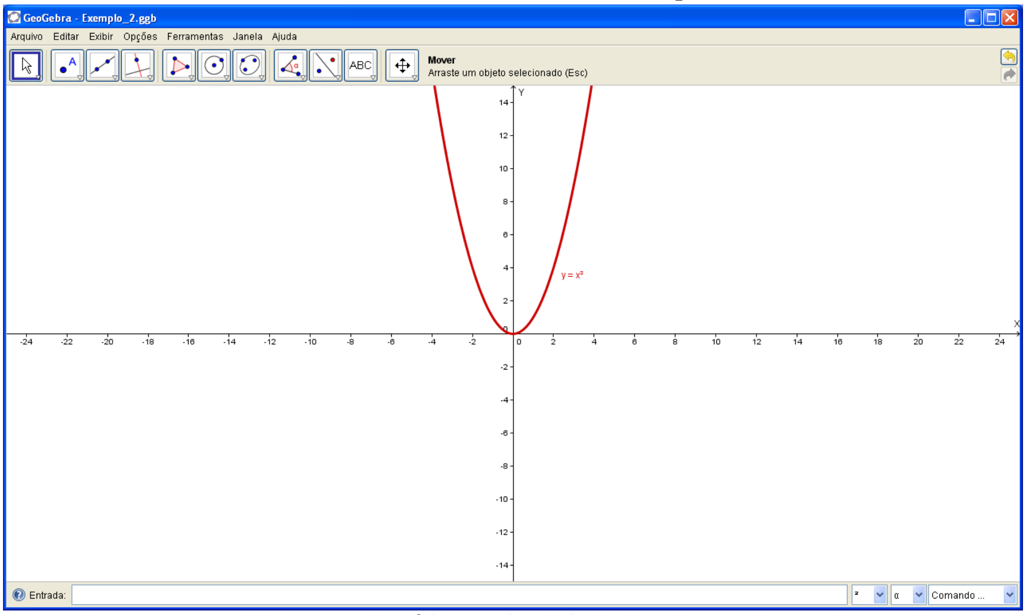
$$x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = -10 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot 3x = -10 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot 3x + 9 = -10 + 9 \Rightarrow (x+3)^2 = -1$$

Como $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$, então podemos escrever $f(x) = (x+3)^2 + 1$;

2º Passo: abra o software GeoGebra;

3º Passo: construa o gráfico de $f_1(x) = x^2$. Para isso, digite $y = x$^2 na Entrada de Comandos;

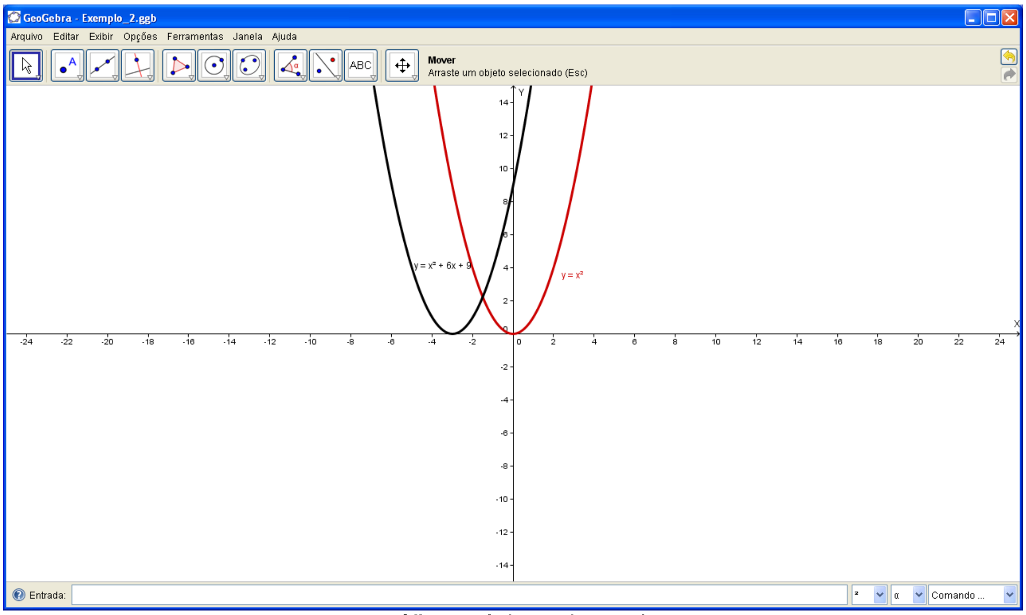
FIGURA 10 – Gráfico da função $y_1 = x^2$.



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

4º Passo: construa o gráfico de $f_2(x) = (x+3)^2$ fazendo uma translação horizontal à esquerda de três unidades no gráfico de $f_1(x) = x^2$. Para isso, digite $y = (x+3)$^2 na Entrada de Comandos;

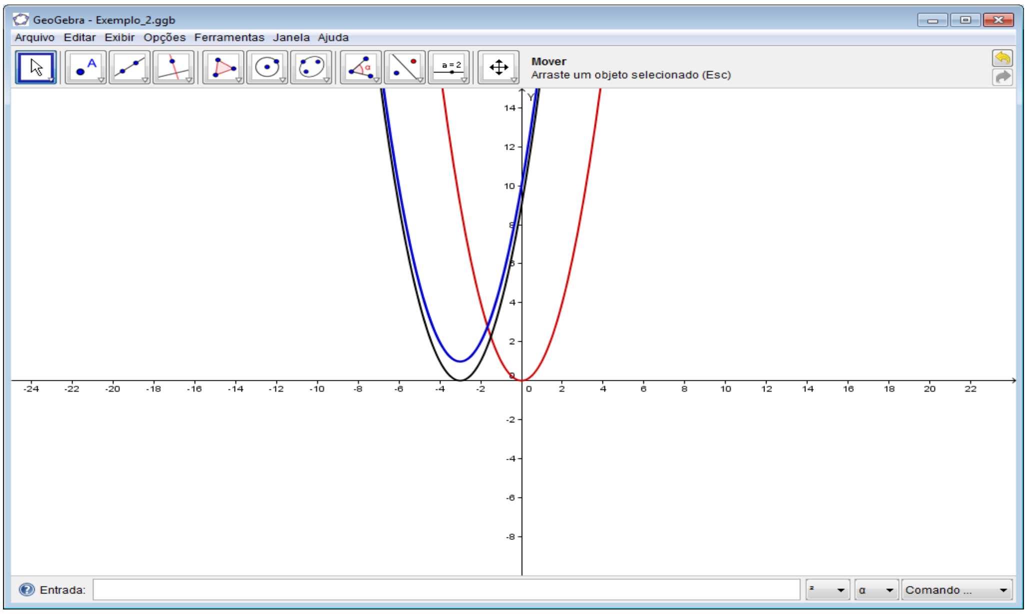
FIGURA 11 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$ (vermelho) e $y_2 = (x+3)^2$ (preto).



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

5º Passo: construa o gráfico de $f(x) = (x+3)^2 + 1$ fazendo uma translação vertical para cima de uma unidade no gráfico de $f_2(x) = (x+3)^2$. Para isso, digite $y = (x+3)\text{^}2 + 1$ na Entrada de Comandos.

FIGURA 12 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$ (vermelho), $y_2 = (x+3)^2$ (preto) e $y = (x+3)^2 + 1$ (azul).



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

Sugestões de questões que podem ser trabalhadas:

Apresentamos a seguir algumas questões que julgamos importantes para serem abordadas com os alunos no momento e após a construção desses gráficos:

a) é conveniente solicitar que os alunos encontrem as raízes de $f(x)=x^2+6x+10$ através da fórmula de Báskara, de uma análise geométrica ou simplesmente tentando descobrir um valor para x tal que $(x+3)^2=-1$. No entanto, o mais importante é que os alunos percebam que $f(x)$ não possui raízes reais. Note que esse fato está coerente com o gráfico construído anteriormente, pois ele não intercepta o eixo x;
b) a partir da função $f(x)=(x+3)^2+1$ é interessante trabalhar o movimento de translações horizontais, fazendo a análise de outros casos, com constantes positivas e negativas (dentro do parêntese), para que os alunos conjeturem hipóteses sobre o que acontecerá com o gráfico após cada mudança;
c) é oportuno trabalhar o movimento de translações verticais, analisando outros casos, com constantes positivas e negativas (somadas ao parêntese), para que os alunos conjeturem hipóteses sobre o que ocorrerá com o gráfico após cada mudança.

Exemplo 4: Construa o gráfico de $f(x)=3x^2+6x-2$.

Os passos para a construção podem ser os seguintes:

1º Passo: para construir o gráfico de $f(x)=3x^2+6x-2$ a partir das transformações apresentadas na seção 4.1.4.4, vamos utilizar o completamento de quadrados para escrever $f(x)$ na forma $a(x-d)^2+k$.

$$3x^2+6x-2=0 \Rightarrow 3x^2+6x=2 \Rightarrow 3(x^2+2x)=2 \Rightarrow 3(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2)=2+3 \Rightarrow 3(x+1)^2=5$$

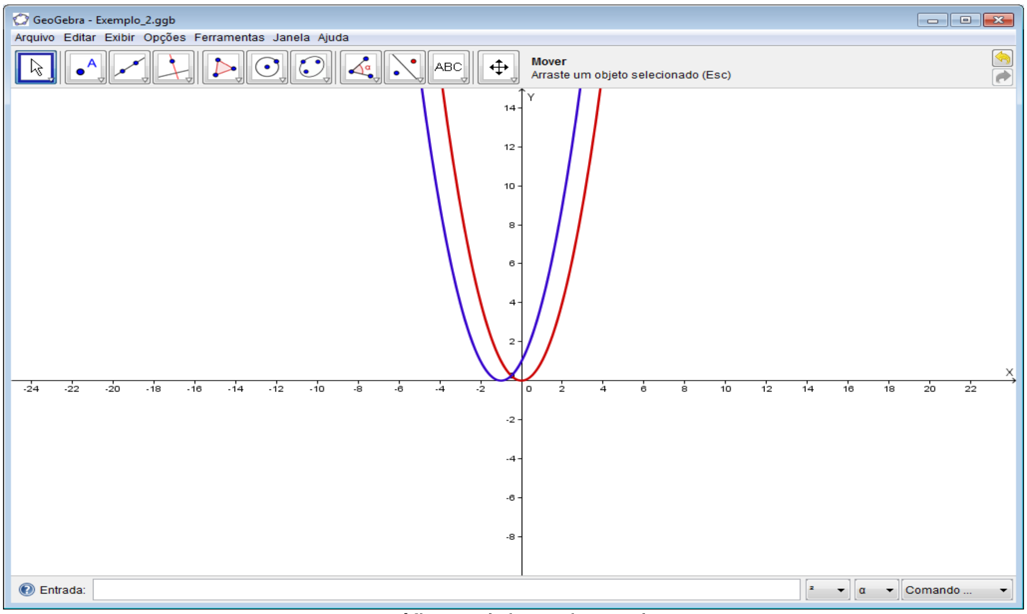
Como $3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$, então podemos escrever $f(x)=3(x+1)^2-5$;

2º Passo: abra o software GeoGebra;

3º Passo: construa o gráfico de $f_1(x)=x^2$. Para isso, digite $y=x\text{^}2$ na Entrada de Comandos;

4º Passo: construa o gráfico de $f_2(x) = (x+1)^2$ fazendo uma translação horizontal à esquerda de uma unidade no gráfico de $f_1(x) = x^2$. Para isso, digite $y = (x+1)\text{^}2$ na Entrada de Comandos;

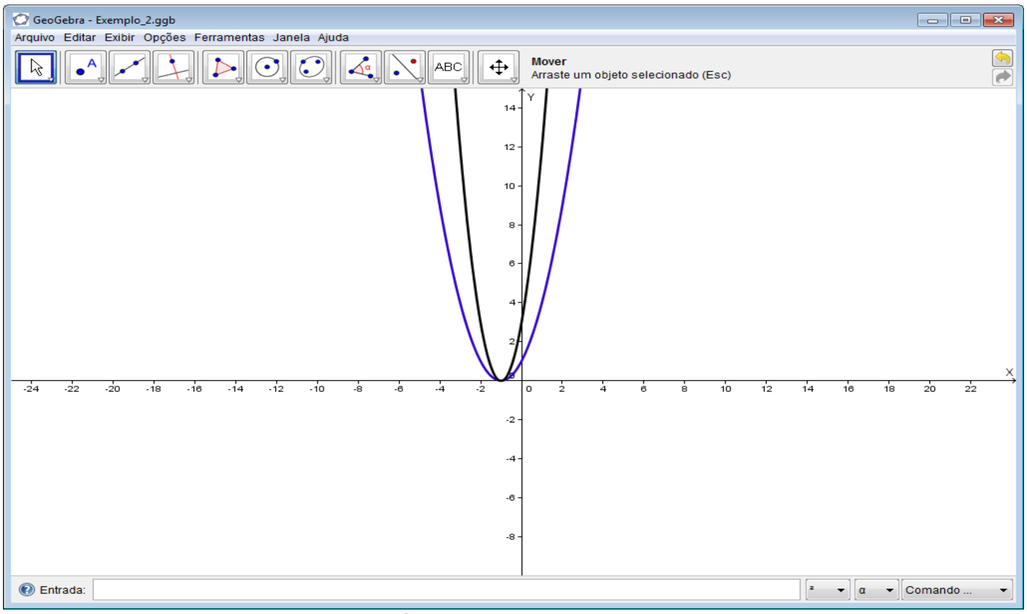
FIGURA 13 – Gráficos das funções $y_1 = x^2$ (vermelho) e $y_2 = (x+1)^2$ (azul).



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

5º Passo: construa o gráfico de $f_3(x) = 3(x+1)^2$ fazendo um alongamento vertical de fator 3 do gráfico de $f_2(x) = (x+1)^2$. Para isso, digite $y = 3*(x+1)\text{^}2$ na Entrada de Comandos;

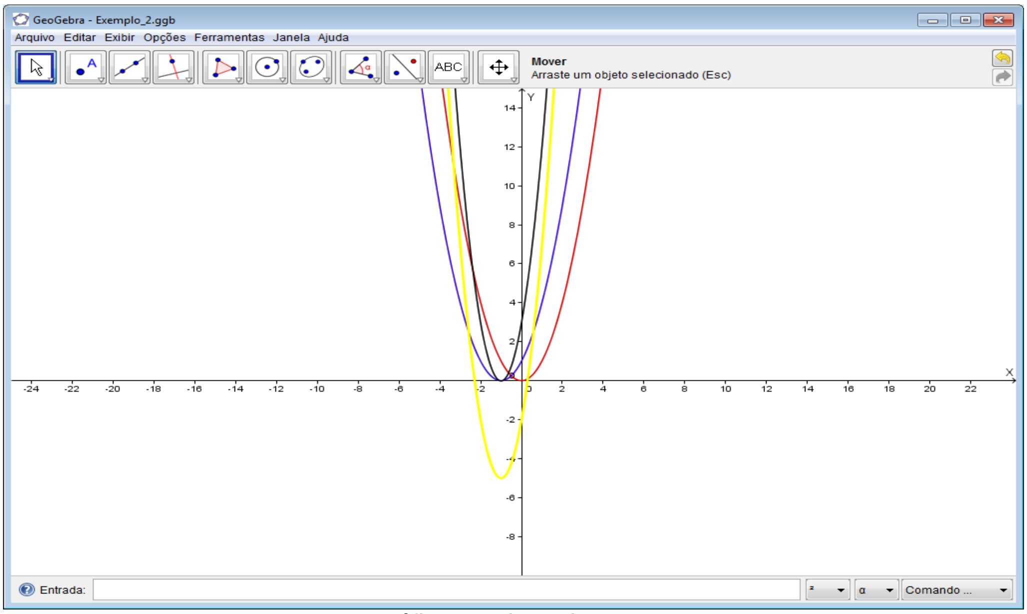
FIGURA 14 – Gráficos das funções $y_2 = (x+1)^2$ (azul) e $y_3 = 3(x+1)^2$ (preto)



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

6º Passo: construa o gráfico de $f(x)=3(x+1)^2-5$ fazendo uma translação vertical para baixo de cinco unidades no gráfico de $f_3(x)=3(x+1)^2$. Para isso, digite $y=3*(x+1)$^$2-5$ na Entrada de Comandos.

FIGURA 15 – Gráficos das funções $y_1=x^2$ (vermelho), $y_2=(x+1)^2$ (azul), $y_3=3(x+1)^2$ (preto) e $y=3(x+1)^2-5$ (amarelo).



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

Sugestões de questões que podem ser trabalhadas:

Apresentamos a seguir algumas questões que podem ser trabalhadas com os alunos antes e no momento da construção desses gráficos:

a) a partir da função $f(x)=3(x+1)^2-5$ é possível trabalhar alongamentos e compressões, substituindo a constante "3" por outros valores positivos, para que os alunos conjeturem hipóteses sobre o que acontecerá com o gráfico após cada mudança;

b) é oportuno também trabalhar com reflexões em torno do eixo x, substituindo a constante "3" em $f(x)=3(x+1)^2-5$ por valores negativos para que os alunos conjeturem hipóteses sobre o que ocorrerá com o gráfico após cada mudança.

Exemplo 5: Construa o gráfico de $f(x)=a(x-d)^2+k$.

Primeiramente construiremos o gráfico da função $f(x)=a(x-d)^2+k$, onde a, d, k são constantes reais. Após, vamos variar o valor das constantes a, d, k, uma de cada vez, para representar visualmente as transformações vistas nos exemplos 2 e 3. Para isso, vamos criar, no GeoGebra, uma animação que permita a variação destas constantes. Os passos para a construção podem ser os seguintes:

1º Passo: abra o software GeoGebra;

2º Passo: clique em Opções (Barra de Menus) $\Rightarrow$Janela de visualização $\Rightarrow$Eixo X (defina min: -20; max: 20) $\Rightarrow$Eixo Y (defina min: -30; max: 30);

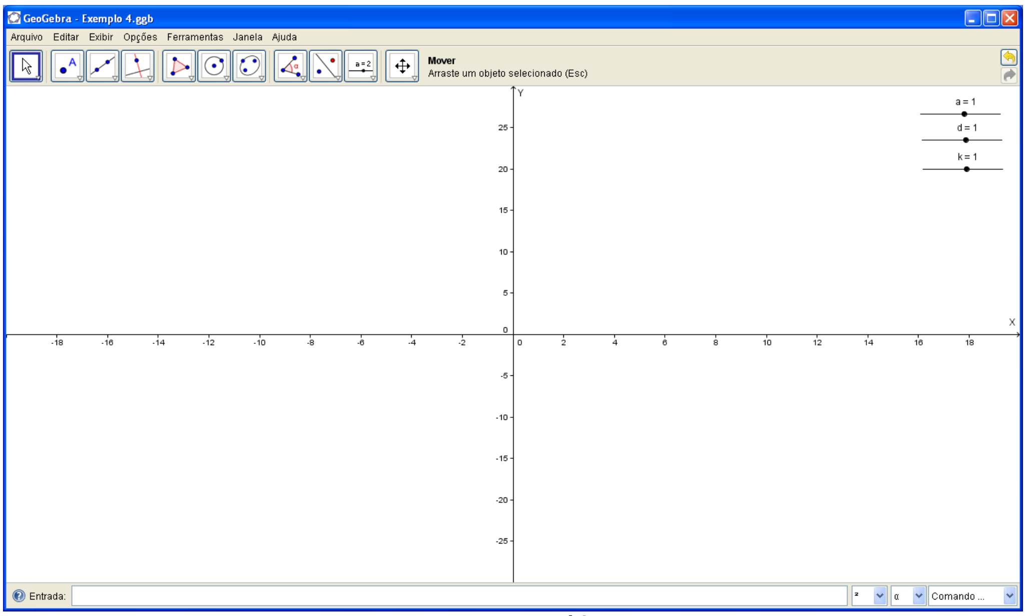
3º Passo: clique em *Seletor* (Barra de Ferramentas) e após em qualquer espaço livre da Zona Gráfica;

4º Passo: na janela que apareceu na Zona Gráfica defina:

- Nome: a;
- Intervalo: (min: -10; max: 10);
- Animação $\Rightarrow$Velocidade: 1;
- Clique em aplicar;

5º Passo: crie os *Seletores* d e k, ambos com os mesmos valores do *Seletor* a;

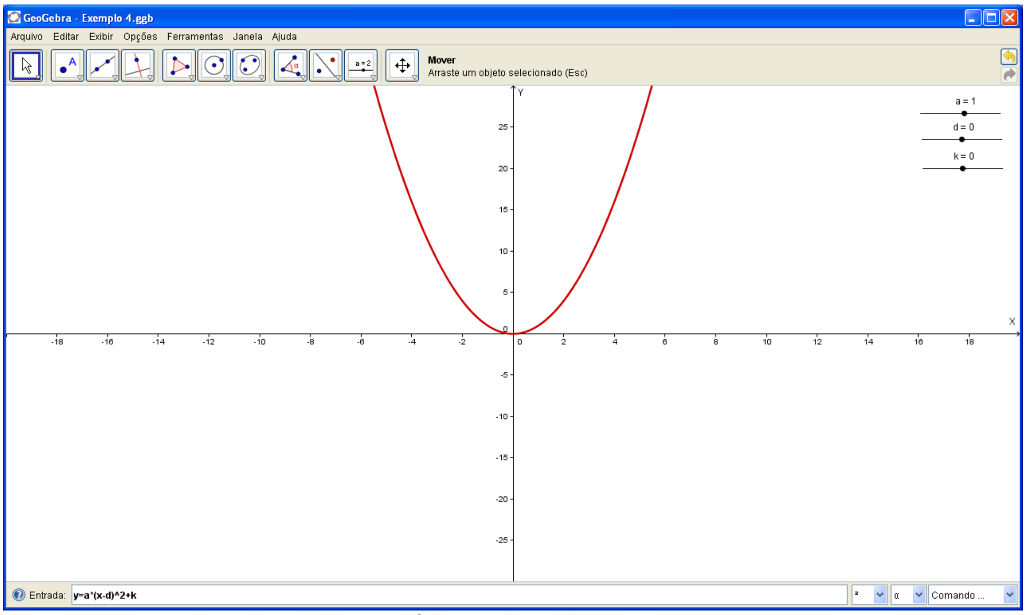
FIGURA 16 – Interface do Software GeoGebra. Na janela de visualização, à esquerda estão os *Seletores* a, d, k .



Fonte: seletores construídos pelo autor.

6º Passo: construa o gráfico de $f(x)=a(x-d)^2+k$. Para isso, escreva $y=a*(x-d)\text{^}2+k$ na Entrada de Comandos.

FIGURA 17 – Gráfico da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, com $a = 1, d = 0 \; e \; k = 0$.



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

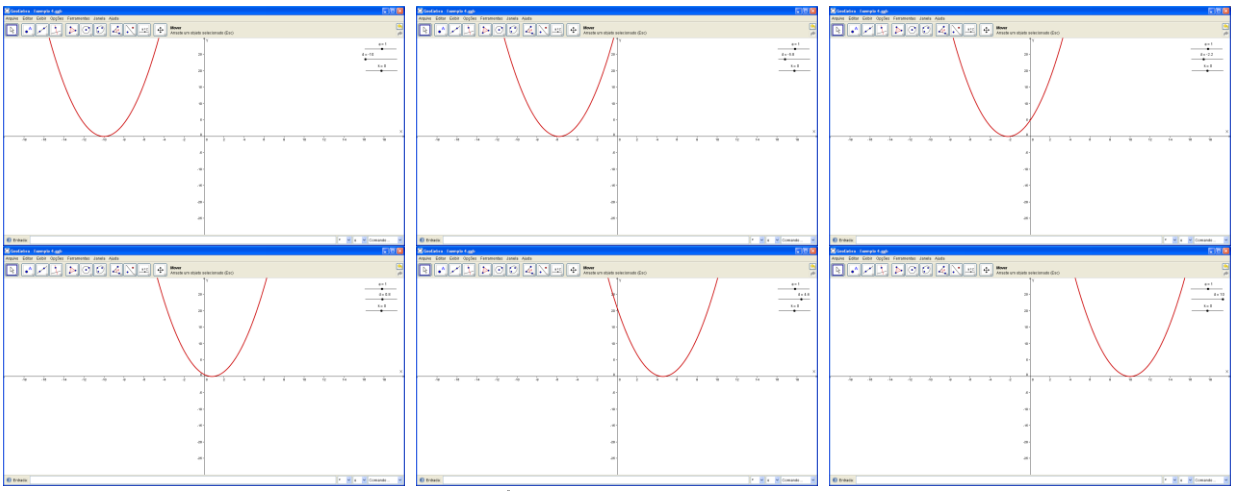
Sugestões de questões que podem ser trabalhadas:

Apresentamos a seguir algumas questões que podem ser trabalhadas com os alunos por ocasião da construção do gráfico de $f(x) = a(x-d)^2 + k$:

a) movimente os pontos a, d, k, um de cada vez, observe os efeitos no gráfico e verifique as ideias exploradas nos exemplos 2 e 3;

b) visualize as translações horizontais à direita e à esquerda animando o *Seletor* d. Para isso, clique em d $\Rightarrow$ Animação Ativada. Antes da próxima tarefa, desative o *Seletor* d;

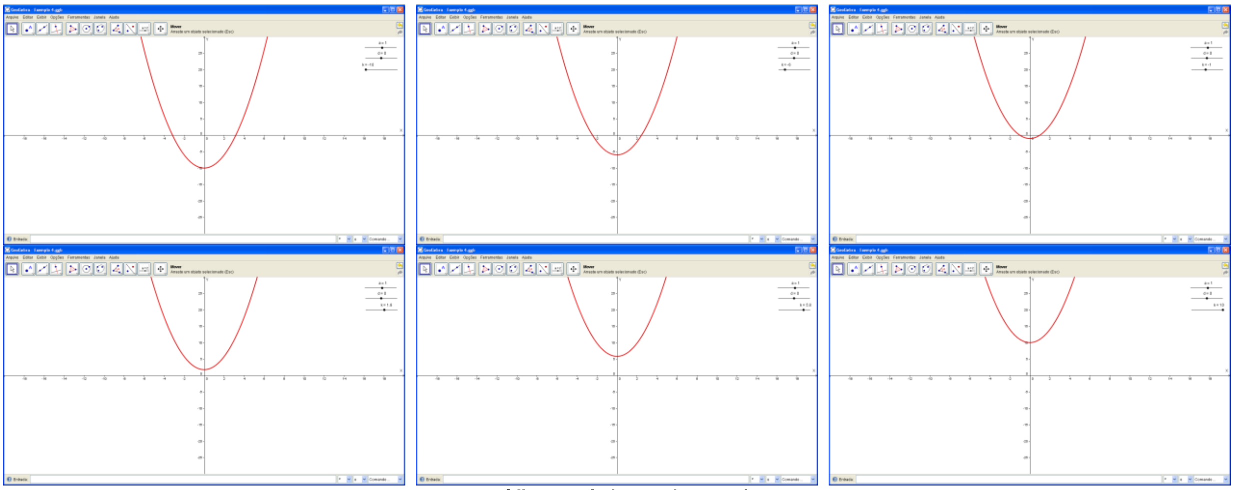
FIGURA 18 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, com d variando, $a = 1 \; e \; k = 0$.



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

c) visualize as translações verticais para cima e para baixo animando o *Seletor* k. Para isso, clique em $k \Rightarrow$ Animação Ativada. Antes da próxima tarefa, desative o *Seletor* k;

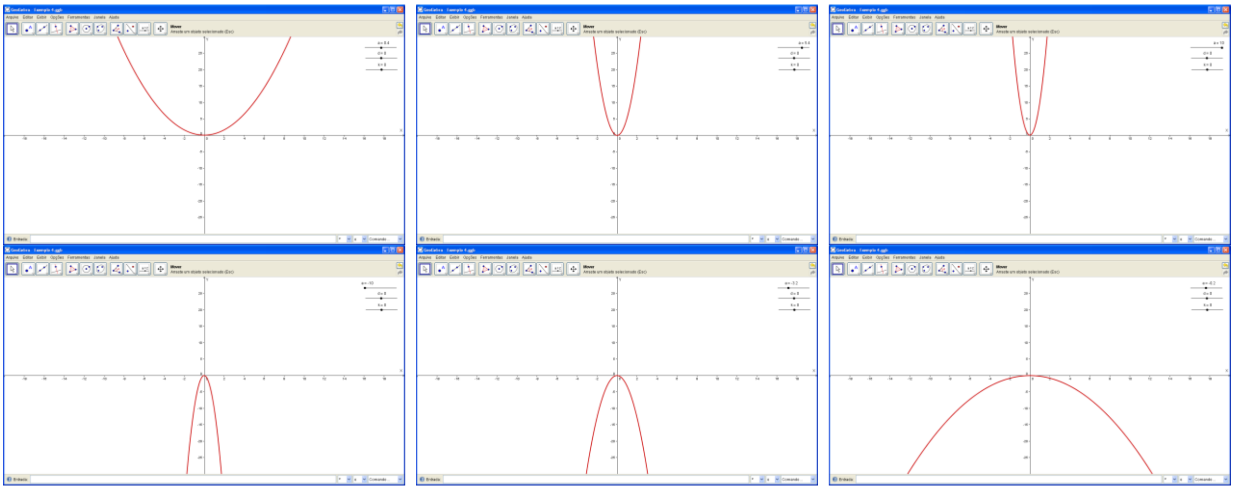
FIGURA 19 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, com k variando, $a = 1$ e $d = 0$.



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

d) visualize as compressões, alongamentos e reflexões animando o *Seletor* a. Para isso, clique em $a \Rightarrow$ Animação Ativada. Antes da próxima tarefa, desative o *Seletor* a;

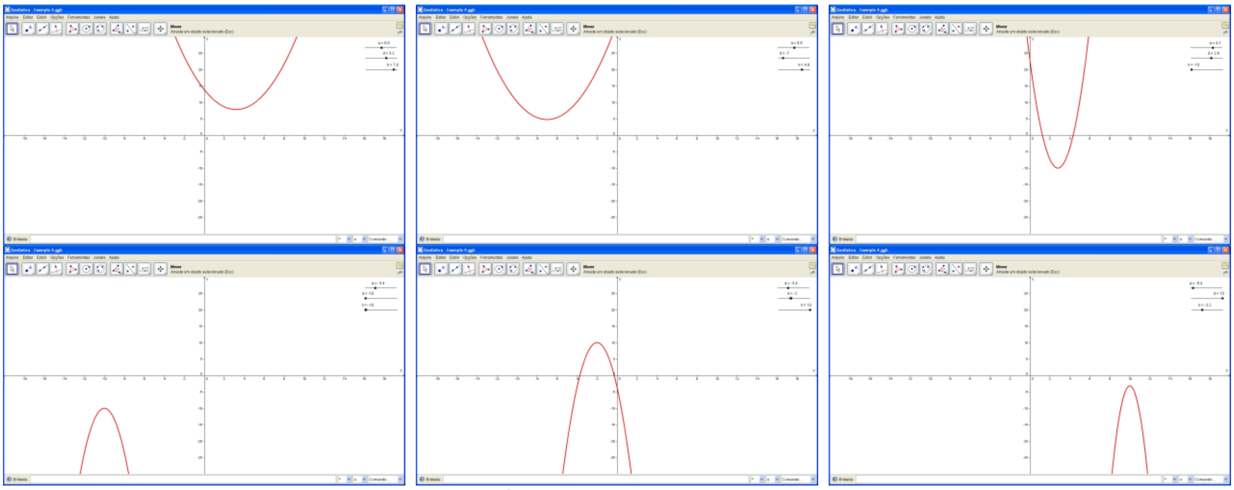
FIGURA 20 – Gráficos da função $f(x) = a(x-d)^2 + k$, com a variando, $d = 0$ e $k = 0$.



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

e) visualize as compressões, alongamentos e reflexões animando os *Seletores* a, d, k.

FIGURA 21 – Gráficos da função $f(x) = a(x - d)^2 + k$, com a, d, k variando ao mesmo tempo.



Fonte: gráficos elaborados pelo autor.

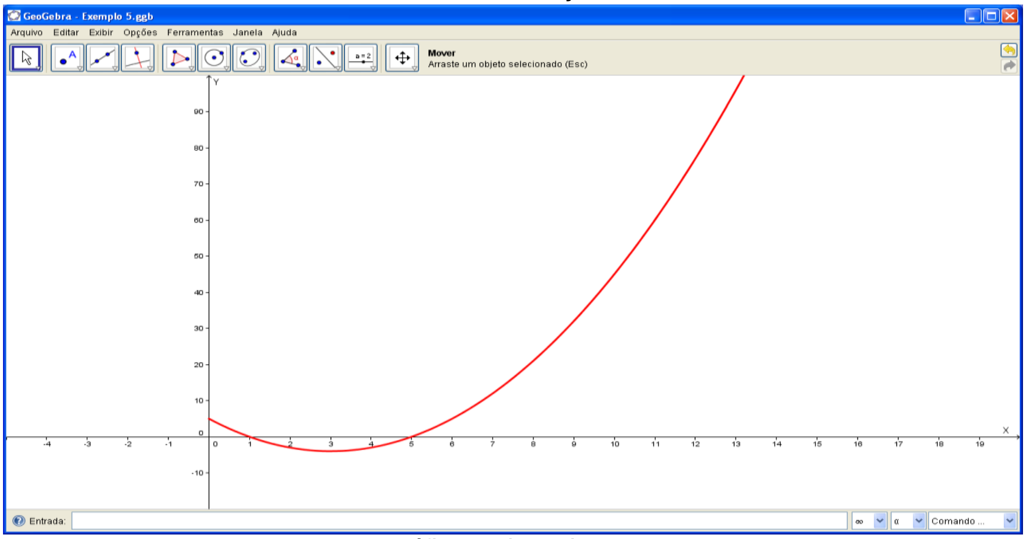
Para concluir a presente seção, é importante formalizar os conceitos trabalhados anteriormente, definindo os conceitos de função polinomial, domínio, imagem, translações horizontal e vertical, reflexão em torno do eixo x, alongamentos e compressões verticais, entre outros. Para isso, pode-se partir do conhecimento construído pelos alunos durante as aulas anteriores para tentar chegar às definições apresentadas na seção 4.1.4.4.

4.2.4 Algumas aplicações de funções polinomiais

A seguir, vamos apresentar e resolver três problemas, elaborados pelo autor, envolvendo aplicações de equações polinomiais. No entanto, sugerimos que eles sejam propostos e que o professor atue apenas como um mediador, auxiliando os alunos na tentativa de obter soluções.

Exemplo 6: O saldo de uma conta corrente é dado por $s = t^2 - 6t + 5$, com s sendo o saldo em reais e t o tempo em meses. Construa o gráfico de $s(t)$ e visualize o saldo dessa conta ao longo do tempo.

FIGURA 22 – Gráfico da função $s = t^2 - 6t + 5$.

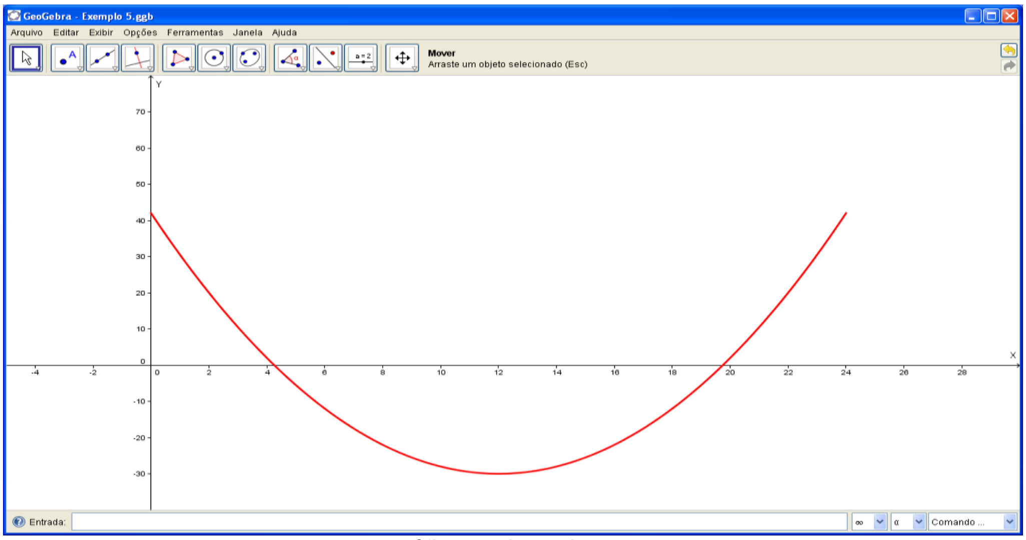


Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

Acreditamos que é oportuno escrever a função $s = t^2 - 6t + 5$ na forma $s = a(t-d)^2 + k$ (completando quadrados) e variar as constantes a, d, k para visualizar os efeitos no gráfico. Nesse exercício podem surgir também diversas discussões sobre o valor disponível na conta em períodos de interesse, bem como se existem valores máximos e mínimos.

Exemplo 7: A temperatura de uma cidade varia de acordo com a função $t = \frac{1}{2}h^2 - 12h + 42$, com t sendo a temperatura, em graus Celsius, e h, a hora do dia. Construa o gráfico de $t(h)$ e visualize a temperatura desta cidade durante todo o dia.

FIGURA 23 – Gráfico da função $t = \frac{1}{2}h^2 - 12h + 42$.



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

Nesse exercício, podem surgir discussões sobre a temperatura em determinados horários do dia, como por exemplo, a máxima e a mínima, a taxa de crescimento, etc. Sugerimos que no momento oportuno a função $t=\frac{1}{2}h^2-12h+42$ seja escrita como $f(x)=\frac{1}{2}(x-12)^2-30$ (via completamento de quadrados) e que as suas constantes sejam alteradas para que os alunos possam analisar as transformações gráficas.

Exemplo 8: Um veículo inicia o seu deslocamento a partir da posição $s_0=10\ m$ a uma velocidade $v_0=2\ {}^{m}\!/_{s}$. Sabendo que a sua velocidade aumenta a uma taxa de $2\ {}^{m}\!/_{s^2}$ durante os primeiros trinta segundos, esboce o gráfico da posição desse veículo em relação ao tempo, nesse período.

Sugestão de resolução: da Física, sabemos que a posição do veículo é dada pela expressão $S=s_0+v_0\cdot t+\frac{at^2}{2}$. Como o GeoGebra reconhece apenas as entradas x e y, então precisamos fazer a seguinte mudança de variável: $S=y$ e $t=x$. Assim, teremos $y=y_0+v_0\cdot x+\frac{ax^2}{2}$. Como $s_0=y_0=10\ m$, $v_0=2\ {}^{m}\!/_{s}$ e $a=2\ {}^{m}\!/_{s^2}$, então $y=10+2x+x^2$. Os passos a seguir indicam os ajustes para a janela de visualização e o procedimento para traçar do gráfico:

1º Passo: para construir o gráfico de $y=10+2x+x^2$ a partir das transformações apresentadas na seção 4.1.4.4, vamos utilizar o completamento de quadrados para escrever y na forma $a(x-d)^2+k$.

$x^2+2x+10=0 \Rightarrow x^2+2x=-10 \Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=-10+1 \Rightarrow (x+1)^2=-9 \Rightarrow (x+1)^2+9=0$.

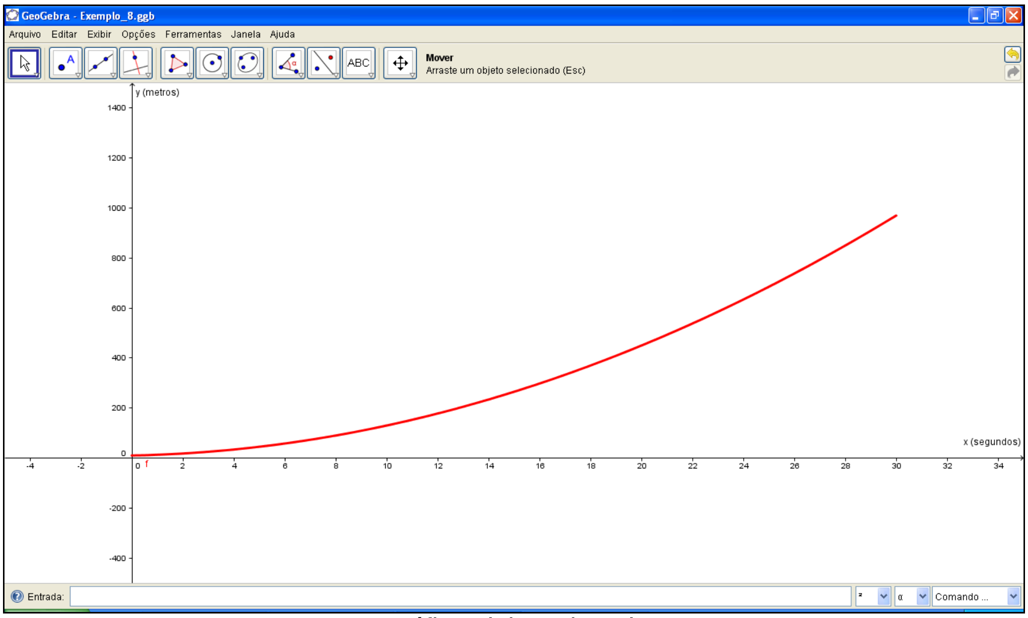
Como $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$, então podemos escrever $y=(x+1)^2+9$;

2º Passo: abra o software GeoGebra;

3º Passo: clique em Opções (Barra de Menus) $\Rightarrow$Janela de visualização $\Rightarrow$Eixo X (defina min: -5; max: 35) $\Rightarrow$Eixo Y (defina min: -500; max: 1500) $\Rightarrow$ Eixo X: Eixo Y = 1:100 (este passo indica a escala entre os dois eixos);

4º Passo: para construir o gráfico da função $y=(x+1)^2+9$ digite a seguinte expressão na Entrada de Comandos: $função[(x+1)\text{^}2+9,0,30]$. Devemos usar exatamente essa notação para que o GeoGebra entenda que queremos o desenho da função com lei de formação $y=(x+1)^2+9$ e domínio $[0, 30]$.

FIGURA 24 – Gráfico da função $y=(x+1)^2+9,\ 0\leq x\leq 30$.



Fonte: gráfico elaborado pelo autor.

Com essa sequência didática pretendemos tornar possível a compreensão, por parte dos alunos, do conceito de função (principalmente, a lei de formação, domínio e imagem), bem como, da existência de uma relação de dependência entre as variáveis dependente e independente, a qual é traduzida pela expressão algébrica. Além disso, é importante que os alunos sejam capazes de reconhecer as diversas notações da expressão algébrica, como por exemplo, $y=f(x)$, $v(t)$ (velocidade em função do tempo), $s(t)$ (saldo em relação a um determinado período de tempo), $t(h)$ (temperatura em relação ao horário do dia), etc. Esperamos também que as nossas atividades auxiliem os alunos a entender que uma expressão algébrica e um gráfico podem estar relacionados entre si e representar uma mesma função e, que através dessas representações, possam compreender algumas transformações gráficas, como translações, reflexões, alongamento e compressões.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar das múltiplas tentativas de melhorias do sistema de ensino brasileiro, promovidas desde a independência do Brasil, ainda precisamos evoluir muito nas questões educacionais, pois estamos convivendo com o baixo rendimento escolar, principalmente nos Ensinos Fundamental e Médio oferecidos pelas escolas públicas. Em razão disso, o tema está no foco das atenções nos ambientes universitários, principalmente, nos cursos de licenciatura. Sendo assim, no decorrer da licenciatura em Matemática, procurei frequentar alguns ambientes escolares, sempre com atenção especial aos destinados ao ensino de matemática, para identificar junto aos estudantes as possíveis causas para o baixo desempenho nessa disciplina. Concomitantemente, estudei vários autores propostos pelos professores da área pedagógica do curso, realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, alguns dos quais foram referenciados nos capítulos 2, 3 e 4 deste texto.

A convivência em ambientes escolares, aliada aos estudos teóricos, mostrou que geralmente as aulas de matemática são desinteressantes e pouco atrativas, sendo essa uma das razões pelas quais muitos alunos enfrentam dificuldades na aprendizagem dessa disciplina. Foi possível constatar também que, na maioria das vezes, as dificuldades dos alunos estão associadas à forma de como a matemática é ministrada nas escolas, pois há uma predominância de aulas eminentemente teóricas e descontextualizadas, baseadas em livros didáticos inapropriados. No caso particular do ensino de funções, verificou-se que geralmente o seu estudo é iniciado com uma definição algébrica, a qual é inacessível para a maioria dos alunos do Ensino Médio, pois dificilmente permite chegar a uma compreensão intuitiva do conceito de função. Evidentemente, o uso desse tipo de metodologia de ensino proporciona apenas uma “aprendizagem” mecânica que, em alguns casos, possibilita que os alunos consigam construir tabelas de valores e gráficos a partir da expressão algébrica da função, mas sem que haja uma compreensão do seu conceito.

Sendo assim, buscando proporcionar aulas mais atrativas e interessantes, e que possibilitassem um melhor entendimento do conceito de função, tínhamos a intenção de investigar a viabilidade da utilização de tecnologias da informação no ensino de funções. Para isso, examinamos como as tecnologias vêm sendo utilizadas no contexto educacional e, mais especificamente, como apoiam o processo de aprendizagem de matemática. A partir dessa investigação, elaboramos uma sequência didática atrelada ao uso de ambientes computacionais e introduzimos o conceito de função polinomial a partir de métodos dinâmicos e da resolução de situações-problemas, oriundos de outras áreas da própria Matemática ou de aplicações da Física.

Essas atividades, por sua vez, foram idealizadas com a pretensão de incentivar a participação dos alunos na busca de soluções e na elaboração do conceito de função. Além disso, objetivaram favorecer a utilização e a conversão de diferentes formas de representação do conceito de função, principalmente a algébrica e a gráfica, pois, de acordo com Duval (1993, 2012), quanto maior for a articulação entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de compreensão desse objeto. No entanto, a nossa pesquisa ficou prejudicada, pois não aplicamos empiricamente a sequência didática junto a um grupo de alunos. Dessa forma, não conseguimos avaliar, na prática, o seu funcionamento e a sua viabilidade, nem analisar os seus resultados no processo de ensino e aprendizagem de funções. Ainda assim, baseados em estudos teóricos, pensamos que tal proposta pode ser viável.

Acreditamos que o exercício mental, executado na tentativa de compreender as mudanças provocadas pela manipulação de parâmetros e variáveis, nos gráficos e nos valores das funções, pode auxiliar na formalização e na generalização do seu conceito, além de ajudar a conectar os diferentes tipos de representações. Por isso, demos ênfase à exploração de algumas transformações gráficas, como por exemplo, translações, reflexões, alongamentos e compressões, já que além de ajudar o aluno a evoluir em um entendimento global do conceito de função, elas são úteis para a construção e interpretação de gráficos de funções polinomiais. Para facilitar a construção, a manipulação e a visualização dos gráficos, empregamos o software GeoGebra, pois ele proporciona um trabalho dinâmico, que possibilita a exploração de diferentes valores para os parâmetros da representação algébrica, facilitando a integração das representações gráfica e algébrica.

Lins (1999) afirma que para haver êxito no processo de ensino-aprendizagem de matemática, é necessário implantar uma metodologia de ensino que produza significado e dê sentido às coisas. Ou seja, é preciso tornar a matemática útil no cotidiano das pessoas, legitimando o conhecimento do aluno e aprimorando-o, de forma que haja sintonia entre o conteúdo ensinado na escola e o que é vivenciado nas ruas. Em outras palavras, para haver evolução na construção do conhecimento matemático, é importante partir da realidade vivida pelo estudante, utilizando os conhecimentos adquiridos por ele anteriormente, para somente depois apresentar e explicar os algoritmos, que podem servir como alternativas para a resolução de problemas. Nesse sentido, Paulo Freire (1987) destaca que o educador deve fazer sua ação educativa a partir das razões do aluno, já que este só aprende quando se envolve profundamente com a situação. Da mesma forma, Meksenas (1994) acredita que é necessário estabelecer um movimento contínuo entre a problematização e a teorização dos fatos para motivar o aluno e favorecer a sua aprendizagem.

Além disso, as atividades trabalhadas em sala de aula devem dar ênfase aos processos de criação e de descoberta do conhecimento, ampliando com isso os conceitos já adquiridos pelos alunos e propiciando o desenvolvimento das habilidades matemáticas e das competências para interpretar e agir em determinadas situações. Nesse sentido, Skovsmose (2000) afirma que as pesquisas em Educação Matemática estão se direcionando no sentido de criar ambientes de aprendizagem que ofereçam recursos para investigação, ou seja, ambientes que convidem os alunos a formular questões e a procurar explicações para as suas descobertas. No entanto, o mesmo autor destaca que para o aluno poder apropriar-se do conhecimento matemático, ele precisa ter acesso a técnicas de como estudar e se concentrar, além de desenvolver habilidades para a leitura e para a interpretação de dados.

Nesse contexto, o professor deve agir como um mediador e articulador de ideias na construção do conhecimento dos alunos. Para isso, é fundamental que ele tenha habilidade para motivá-los e torne-os responsáveis pelo processo de investigação, incentivando-os a pensar e a se tornar autônomos. Skovsmose (2000) salienta ainda que, em alguns momentos, podem ser usadas aulas expositivas, pois é com elas que acontece a teorização do conhecimento. Todavia, as aulas expositivas devem ser intercaladas com dinâmicas de grupo, debates e discussões, pois assim os alunos podem expor as suas ideias, dialogar e aprender a argumentar. Essas ocasiões servem também para que o professor possa conhecer os seus alunos e, a partir do que estes sabem, criar possibilidades nas quais, na presença de algo novo, os estudantes possam estabelecer relações entre este novo e o que já conhecem, reconstruindo o seu conhecimento, já que é o próprio aluno quem organiza, sistematiza e relaciona os saberes que tem aos científicos. Isto posto, esperamos que este trabalho possa contribuir para o ensino e a aprendizagem de funções polinomiais, bem como, instigue o desenvolvimento de novas metodologias de ensino que contemplem a utilização de ambientes computacionais.

REFERÊNCIAS

ALVES, George de Souza; SOARES, Adriana Benevides. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: IX Workshop de Informática na Escola – XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2003, Campinas. **Anais...** Campinas: SBC, 2003. p. 275-286.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. v. 1, 8 ed. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BARRETO, Marina Menna. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**. Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf>. Acesso em: 15 março 2013.

BRANDT, Silvia Tereza Juliani; MONTORFANO, Carla. **O software GeoGebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores.** Maringá, 2007. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf>. Acesso em: 20 junho 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, parte III, 2000, 109 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, v. 2, 2006, 135 p.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; CARVALHO, Hamilton Cunha de. Formalização do conceito de função no ensino médio: Uma seqüência de ensino-aprendizagem. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2004.

COSTA, Marisa Vorraber. **O currículo nos limiares do contemporâneo**. 4. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 1998.

COSTA, Marisa Vorraber. Quem são? Que querem? Que fazer com eles? Eis que chegam às nossas escolas as crianças e jovens do Século XXI. In: MOREIRA, Antonio Flávio Barbosa; ALVES, Maria Palmira Carlos; GARCIA, Regina Leite (Orgs.). **Currículo, cotidiano e tecnologias**. Araraquara: Junqueira & Marin, 2006. p. 93-109.

DE SOUZA, Vera Helena Giusti; CAMPOS, Tânia M. M.. Uma experiência com funções. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.

DI PIERRO, Maria Clara; JOIA, Orlando; RIBEIRO, Vera Masagão. Visões da Educação de Jovens e Adultos no Brasil. **Cadernos do CEDES,** Campinas, n. 55, p. 58-77. nov. 2001.

DOMINGOS, António Manuel Dias. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados:** a Matemática no início do superior. 2003. 378 p. + Apêndices. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DOERING, Claus Ivo; DOERING, Luisa Rodríguez (Orgs.). **Pré-Cálculo.** 1. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2008.

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics.** Dordrecht, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, fev. 2006a.

DUVAL, Raymond. Quelle sémiotique pour l'analyse de l’activité et des productions mathématiques? **Relime:** Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México-DF, n. especial, p. 45-82, 2006b.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** Strasbourg, n. 5, p. 37-64, 1993.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FÉLIX, Vanderlei Silva. **Educação Matemática:** teoria e prática da avaliação. Passo Fundo: Clio Livros, 2001.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** Rio de Janeiro: Paz e terra, 1987.

GAFANHOTO, Ana Patrícia; CANAVARRO, Ana Paula. **Representações múltiplas de funções em ambiente com GeoGebra:** um estudo sobre o seu uso por alunos de 9º ano. Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/8.Gafanhoto%20e%20Canavarro.pdf>. Acesso em: 16 junho 2013.

GALLO, Silvio. O problema e a experiência do pensamento: implicações para o ensino de filosofia. In: Siomara Borba e Walter Kohan (Orgs.). **Filosofia, aprendizagem e experiência.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 115-130.

GARNIER, Catherine; BEDNARZ, Nadine; ULANOVSKAYA, Irina. **Após Vygotsky e Piaget:** perspectiva social e construtivista escolas russas e ocidental. Tradução: Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GONZATTO, Marcelo. Por que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender o esperado em matemática? **Zero Hora**, Porto Alegre, 28 de Outubro de 2012. Geral, p. 29-31.

HOEPERS, Margarete Ferreira Silva; FERREIRA, Carlos Roberto. **O uso de tecnologias para o ensino de funções.** Pitanga, 2007. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/704-2.pdf>. Acesso em: 20 junho 2013.

LINS, Rômulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In: Maria Aparecida V. Bicudo (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 75-94.

MEKSENAS, Paulo. **Sociologia**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1994.

MOREIRA, Mário Wedney de Lima. **A Geometria Dinâmica como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas em um ambiente virtual de aprendizagem.** 2012. 125 p.. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

MURUCI, Maria Lúcia; GUIMARÃES, Luiz Carlos; GIRALDO, Victor Augusto. Funções reais: possibilidades em um ambiente de Geometria Dinâmica. In: IV HTEM – Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, 2008, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

NÉRI, Izaias Cordeiro. **O que é Geometria Dinâmica?** São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.geometriadinamica.com.br>. Acesso em: 24 junho 2013.

NOTARE, Márcia Rodrigues. **Comunicação e aprendizagem matemática on-line:** um estudo com o editor científico ROODA exata. 2009. 180 p. + Apêndices. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

PONTE, João Pedro da. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática,** Lisboa, n. 15, p. 3-9. 1990.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PORTAL BRASIL. Brasília. História Geral: Revolução Industrial. Disponível em: <http://www.portalbrasil.net/historiageral_revolucaoindustrial.htm>. Acesso em: 25 abril 2013.

SANTOS, Adriana Tiago; BIANCHIN, Bárbara Lutaif. Análise das Estratégias Utilizadas pelos Estudantes no Estudo de Funções Logarítmicas e Exponenciais. 2012. Vidya, Santa Maria, v. 32, n.1, p. 35-49, jan./jun. 2012.

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. M.. Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. **Quaderni di Ricerca in Didattica,** Palermo, v. 4, n. 19, p. 74-83, 2009.

SIERPINSKA, Anna. On understanding the notion of function. **Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America,** New York, v. 25, p. 25-58, 1992.

SILVA, Jaime Carvalho e. A Matemática, a Tecnologia e a Escola. **Revista Educação Matemática**, São Paulo, n. 71, jan/fev. 2003. 2 p. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ71/Editorial.pdf>. Acesso em: 28 abril 2013.

SILVA, Tomáz Tadeu da. **Documentos de identidade:** uma introdução às teorias do currículo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

SIQUEIRA, Daiana Aparecida de; BEUST, Adilção Cabrini. O ensino de funções através da interpretação gráfica. **Disciplinarum Scientia,** Santa Maria, v. 9, n. 1, p. 45-66, 2008.

SKOVSMOSE, Olé. Cenários para investigação. **Bolema,** Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

TALL, David. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and Proof. In: Douglas A. Grouws (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 495-511.