

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

Rodrigo Coster

**COMPARANDO MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE RISCO DE UM PORTFÓLIO VIA  
EXPECTED SHORTFALL E VALUE AT RISK**

Porto Alegre  
2013

Rodrigo Coster

**COMPARANDO MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE RISCO DE UM PORTFÓLIO VIA  
EXPECTED SHORTFALL E VALUE AT RISK**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Administração, pelo Programa de Pós-Graduação em Administração, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

Porto Alegre  
2013

## **UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

Reitor: Prof. Dr. Carlos Alexandre Netto

Vice-reitor: Prof. Dr. Rui Vicente Oppermann

### **ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO**

Diretora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marisa Ignez dos Santos Rhoden

Vice-Diretor: Prof. Dr. André Luis Martinewski

### **COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO**

Coordenador: Prof. Dr. Antônio Domingos Padula

C842c Coster, Rodrigo

Comparando métodos de estimação de risco de um portfólio via Expected Shortfall e Value at Risk / Rodrigo Coster – Porto Alegre, RS, 2013.

f. il.

Orientador: Flávio Augusto Ziegelmann

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Administração. Programa de Pós-Graduação em Administração. Porto Alegre, 2013.

1. Cópula. 2. Risco. 3. Value at Risk. 4. Expected Shortfall. I. Ziegelmann, Flávio Augusto. II. Título.

CDU 336

Escola de Administração

Rua Washington Luiz, 855 – Campus Centro – Bairro Centro

CEP: 90010-460 – Porto Alegre – RS

Telefone: (55) (51) 3308-3536

Fax: (51) 3308-3991

E-mail: secretariappga@ea.ufrgs.br

Rodrigo Coster

**COMPARANDO MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE RISCO DE UM PORTFÓLIO VIA  
EXPECTED SHORTFALL E VALUE AT RISK**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Administração, pelo Programa de Pós-Graduação em Administração, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Aprovado em 10 de junho de 2013.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann (Orientador)  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

---

Prof. Dr. João Frois Caldeira  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liane Werner  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

---

Prof. Dr. Osvaldo Candido da Silva Filho  
Universidade Católica de Brasília (UCB)

**Dedico este trabalho à Greice Helen da Costa Laureano, por ter me dado todo apoio e suporte necessário no decorrer deste trabalho.**

## **Agradecimentos**

Agradeço ao professor Flávio Augusto Ziegelmann pela orientação neste trabalho. Agradeço também aos meus amigos que me acompanharam em mais esta etapa da vida; a minha família e em especial a minha namorada Greice Helen da Costa Laureano. Por último, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

A mensuração do risco de um investimento é uma das mais importantes etapas para a tomada de decisão de um investidor. Em virtude disto, este trabalho comparou três métodos de estimação (tradicional, através da análise univariada dos retornos do portfólio; cópulas estáticas e cópulas dinâmicas) de duas medidas de risco: *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES). Tais medidas foram estimadas para o portfólio composto pelos índices BOVESPA e S&P500 no período de janeiro de 1998 a maio de 2012. Para as modelagens univariadas, incluindo as marginais das cópulas, foram comparados os modelos GARCH e EGARCH. Para cada modelo univariado, utilizamos as cópulas Normal, t-Student, Gumbel rotacionada e Joe-Clayton simetrizada, com isso totalizando 36 modelos comparados. Nas comparações do VaR e ES foram utilizados, respectivamente, o teste de Christoffersen e o teste de Mcneil e Frey. Os principais resultados encontrados foram a superioridade de modelos que supõem erros com distribuição t-Student, assim como a identificação de mudança no comportamento dos parâmetros dinâmicos nos períodos de crise.

**PALAVRAS-CHAVE:** Cópula. Risco. Value at Risk. Expected Shortfall.

## **ABSTRACT**

Measuring the risk of an investment is one of the most important steps in an investor's decision-making. With this in light, this study compared three estimation methods (traditional; by univariate analysis of portfolio returns; dynamic copulas and static copulas), of two risk measurements: Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES). Such estimated measures are performed for a portfolio composed by the BOVESPA and S&P500 indexes, ranging from January 1998 to May 2012. For univariate modelling (including copulas marginals), the GARCH and EGARCH models were compared,. Regarding copulas, we use Normal, t-Student, rotated Gumbel and symmetric Joe-Clayton, leading to a total of 36 models being compared. For the comparison of VaR and ES were used, respectively, the Christoffersen test, and the Mcneil and Frey test. The main results found were the superiority of models assuming the t-Student distributed errors, as well as the identification of a change in the behaviour of dynamic parameters in periods of crisis.

**KEYWORDS:** Copula. Risk. Value at Risk. Expected Shortfall.



## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	9
2	<b>REFERÊNCIAL TEÓRICO</b> .....	11
2.1	<b>VALUE AT RISK E EXPECTED SHORTFALL</b> .....	11
2.1.1	ESTIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO.....	13
2.1.1.1	<u>Simulação histórica</u> .....	13
2.1.1.2	<u>Modelo de retorno de risco</u> .....	13
2.1.1.2.1	Plain Vanilla.....	14
2.1.1.2.2	GARCH.....	14
2.2	<b>MODELOS GARCH E EGARCH</b> .....	15
2.3	<b>FUNÇÕES CÓPULAS</b> .....	16
2.3.1	MODELOS DE CÓPULAS.....	18
2.3.1.1	<u>Cópula Normal</u> .....	18
2.3.1.2	<u>Cópula t-Student</u> .....	18
2.3.1.3	<u>Cópula Gumbel Rotacionada</u> .....	19
2.3.1.4	<u>Cópula Joe-Clayton Simetrizada</u> .....	19
2.3.1.5	<u>Modelos dinâmicos</u> .....	20
2.3.2	ESTIMAÇÃO.....	22
2.3.3	SIMULAÇÃO.....	23
2.4	<b>ANÁLISE DO VAR E ES</b> .....	24
2.4.1	TESTE DE CHRISTOFFERSEN.....	24
2.4.2	TESTE DE MCNEIL E FREY.....	25
3	<b>METODOLOGIA</b> .....	27
4	<b>RESULTADOS</b> .....	28
4.1	<b>ANÁLISE EMPÍRICA</b> .....	28
4.2	<b>ANÁLISES DO VAR E ES</b> .....	35
5	<b>CONCLUSÕES</b> .....	43
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	44

## 1 INTRODUÇÃO

A mensuração do risco de um investimento é uma das mais importantes etapas – se não a mais importante – para a tomada de decisão de um investidor. Esta mensuração pode ser feita através de diversas medidas de risco<sup>1</sup>, dentre as quais foram utilizadas neste trabalho o *Value at Risk* (VaR) e *Expected Shortfall* (ES). Embora meçam o risco de pontos de vistas diferentes, as principais medidas se baseiam na distribuição dos retornos do investimento, informação normalmente desconhecida, fazendo com que seja necessária a estimação desta distribuição, procedimento que nem sempre é trivial.

A dificuldade de se estimar a distribuição dos retornos do investimento está no fato dela depender de muitos fatores (por exemplo, em um portfólio cada ativo seria um fator, assim como de fatores exógenos), sendo necessário então o uso de distribuições multivariadas. Para realizar a estimação da distribuição dos retornos geralmente se utiliza a distribuição normal multivariada, todavia devido às séries financeiras apresentarem - entre outras características - caudas pesadas este procedimento se torna inadequado, uma vez que pode resultar em uma estimação inadequada do VaR e, por consequência, a estimação inadequada do ES.

Clemen e Reilly (1999) apontam que uma saída comumente utilizada para resolver este problema é estimar a distribuição conjunta destes fatores através da multiplicação das distribuições marginais e condicionais, porém o número de elementos nesta multiplicação cresce exponencialmente conforme aumenta o número de fatores. Uma alternativa para solucionar esse problema é assumir a independência entre alguns fatores, diminuindo assim a quantidade de distribuições condicionais a serem utilizadas. Entretanto, esta decomposição em marginais e condicionais não é uma tarefa trivial e poderia levar a componentes com difícil interpretação.

Em vista disso, um método alternativo que tem sido bastante utilizado para a estimação da distribuição conjunta é o uso de cópulas. A teoria na qual as cópulas se baseiam permite montar uma distribuição conjunta utilizando como marginais quaisquer distribuições univariadas e uma função denominada

---

<sup>1</sup> Um estudo detalhado de diversas medidas de risco pode ser encontrado em Acerbi e Tasche (2002)

função cópula, que incorporará a dependência entre as séries. No trabalho de Palaro e Hotta (2006) foram realizadas comparações entre os métodos tradicionais de estimação do VaR e o método utilizando cópulas, sendo este segundo método melhor em 2 dos 3 cenários estudados, enquanto no trabalho de Cherubini e Luciano (2001) foram utilizadas cópulas para calcular o VaR de um portfólio construído pelo índice S&P100 e FTSE100. Silva Filho, Ziegelmann e Dueker (2013a) realizaram um estudo extenso comparativo sobre cópulas dinâmicas utilizando VaR, enquanto Silva Filho, Ziegelmann e Dueker (2012) propuseram um modelo inovador com a introdução de cópulas com distintos regimes. Ainda, Silva Filho e Ziegelmann (2013b) realizaram um estudo sobre a relação do volume negociado, valor do retorno e sua volatilidade utilizando cópulas dinâmicas com mudança de regime.

Neste trabalho as cópulas foram utilizadas de maneira similar ao trabalho de Palaro e Hotta (2006), com o objetivo de, baseado nas análises do VaR e ES, comparar métodos mais simples de estimativas com as cópulas. Juntamente, foram comparados variações das distribuições univariadas e marginais, a fim de se encontrar um modelo mais indicado.

Entre os resultados encontrados é possível destacar a superioridade dos modelos que utilizam a t-Student nos seus resíduos, além da capacidade dos modelos dinâmicos de detectarem períodos de crise e responderem à eles, alterando o comportamento dos parâmetros. Quanto as comparações entre os métodos, não foram encontradas evidências significativas de que eles se diferenciam.

Este trabalho está organizado de maneira que, no capítulo 2 está a apresentação do referencial teórico no qual este trabalho se baseia, descrevendo as medidas de riscos, modelos univariados e multivariados e os testes utilizados. No capítulo 3 encontra-se o delineamento da simulação utilizada. No capítulo 4 são apresentados e comentados os resultados encontrados, que deram embasamento para as conclusões no capítulo final.

## 2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

Nesta seção estão as definições utilizadas ao longo do trabalho, iniciando com a definição das medidas de risco e as técnicas de estimação. Após, são apresentados os modelos da família GARCH utilizados tanto no método tradicional quanto nas marginais das cópulas. Os últimos modelos apresentados, são as cópulas, passando pelas versões estáticas, dinâmicas, percorrendo pelos métodos de estimação e algoritmo de simulação utilizado. Por fim, são discutidos os testes utilizados para comparação entre os modelos apresentados.

### 2.1 VALUE AT RISK E EXPECTED SHORTFALL

O VaR é uma medida de risco que teve seus primeiros usos na década de 80, quando começou a ser amplamente difundido - incluindo sendo adotado por bancos e agências reguladoras - e parte do seu sucesso se deve ao fato de sua fácil interpretação e obtenção. Dada a distribuição de retornos de um investimento em um determinado tempo, o  $VaR_{t+h}^\alpha$  é obtido através do cálculo do valor que separa os  $\alpha\%$  piores resultados dos retornos em um horizonte de  $h$  passos a frente (Linsmeier e Pearson, 2000). A equação para o cálculo do VaR é definida como:

$$\begin{aligned} VaR_{t+h}^\alpha &= Q_{1-\alpha}(-r_{t+h}|\zeta_t) \\ &= \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\{x: P(-r_{t+h} \leq x|\zeta_t) \geq 1 - \alpha\}, 0 \leq \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $r_t$  representa a série de retornos e  $\zeta_t$  o conjunto de informações disponíveis até o tempo  $t$ . Ou seja, o  $VaR_{t+h}^\alpha$  não é nada além do que o  $\alpha$ -ésimo percentil da distribuição dos retornos. Por exemplo, em um investimento em que os retornos diários ( $h = 1$ ) seguem distribuição normal com média 0 e variância 1 ( $\zeta_t$ ), o  $VaR_{t+1}^{0,05}$  é igual a 1,64 e sua interpretação é que se espera que em 5% dos dias esse investimento tenha retornos inferiores a -1,64 (se o investimento for de 1 ano, temos um número esperado de 12 dias com retornos iguais ou inferiores ao valor encontrado).

Outro método para quantificar o risco de um investimento é o ES (também chamado de *conditional Value-at-Risk*), proposto por Rockfellar e

Uryasev (2000). A principal diferença entre o VaR e o ES é que o ES leva em consideração a distribuição dos  $\alpha\%$  piores retornos, sendo definido como a esperança dessa distribuição (Taamouti, 2009), enquanto o VaR leva em consideração apenas o valor que separa esses  $\alpha\%$  piores resultados. Para obter o  $ES_{t+h}^\alpha$  devemos, primeiramente, calcular o  $VaR_{t+h}^\alpha$  dos retornos e em seguida calcular a quantidade

$$ES_{t+h}^\alpha = E(x|x \geq VaR_{t+h}^\alpha) = \alpha^{-1} \int_{VaR_{t+h}^\alpha}^{\infty} x f(-x) dx, \quad (2)$$

onde  $f(-x)$  é a função densidade de probabilidade dos retornos do investimento. Também é possível calcular o  $ES_{t+h}^\alpha$  através de

$$ES_{t+h}^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x g(-x) dx, \quad (3)$$

onde  $g(-x)$  é a função densidade de probabilidade dos  $\alpha\%$  piores retornos, que pode ser definida como

$$g(x) = \begin{cases} \alpha^{-1} f(x) & x \geq VaR_{t+h}^\alpha \\ 0 & c. c. \end{cases} \quad (4)$$

Utilizando como exemplo o mesmo investimento utilizado no VaR foi obtido um  $ES_{t+1}^{0,05}$  igual a 2,06. A interpretação deste valor é estima-se que os 5% piores dias deste investimento terão um retorno médio de aproximadamente -2,06. Importante ressaltar que por se tratarem de medidas diferentes, não é possível comparar dois investimentos, um utilizando o VaR e o outro o ES. Sabe-se que o  $ES_{t+h}^\alpha$  sempre será maior ou igual que o  $VaR_{t+h}^\alpha$  para um mesmo investimento (Rockfellar e Uryasev, 2002).

A principal vantagem do ES frente ao VaR é o fato de o ES possuir a característica da sub-aditividade que, em conjunto com outras três características que o VaR também possui, o classifica como uma medida de risco coerente.

Segundo Artzner et al (1999), uma medida de risco  $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$  deve, para aferir eficientemente riscos e ser classificada como coerente, satisfazer as condições:

- 1- Homogeneidade positiva:  $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \forall \lambda > 0$ ;
- 2- Subaditividade:  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ ;
- 3- Monotonicidade: Se  $x \leq y$ , então  $\rho(x) \leq \rho(y)$ ;
- 4- Invariante transitória:  $\rho(x + \alpha r_o) = \rho(x) - \alpha$ , onde  $r_o$  representa um investimento livre de risco.

A falta de sub-aditividade do VaR pode levar a concluir de que o risco de um portfólio é maior que a soma dos riscos dos ativos que o compõe. Esse resultado vai contra os princípios básicos de finanças que afirmam que a diversificação de investimentos é uma maneira de redução de riscos. Mais detalhes de como a diversificação diminui o risco do investidor podem ser encontrados em Ross, Westerfield, e Jaffe (2003).

### 2.1.1 ESTIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO

Tanto para o VaR quanto para o ES é necessário conhecer a distribuição dos retornos, a qual normalmente é desconhecida. Assim é preciso que a mesma seja estimada, processo que pode ser realizada através de diversos métodos e modelos, alguns listados a seguir.

#### 2.1.1.1 Simulação histórica

A simulação histórica é o método mais simples de estimação das medidas de risco. Ela consiste em obter dados históricos dos retornos do portfólio e, a partir deles, calcular a medida de risco de interesse. Uma variação deste método consiste em descartar os dados mais antigos na hora de realizar o cálculo, com o objetivo de excluir valores extremos distantes do período atual. Outras variações deste método podem ser encontradas em Christoffersen (2003) e Dowd (2005).

Este método tem a desvantagem de que a sua simplicidade afeta a qualidade da estimativa, que, segundo Kuester; Mitnik e Paoletta (2006), apesar de acertar em média o percentual de valores que violam o VaR, estas violações se concentram em determinados períodos da série.

#### 2.1.1.2 Modelo de retorno de risco

Outra maneira de estimar a distribuição dos retornos é descrevê-los como  $r_t = \mu_t + \sigma_t z_t$ , onde  $\mu_t$  representa a localização em nível e  $\sigma_t$  a escala do retorno. Já  $z_t$  é uma variável aleatória com média 0 e com restrições na

variância que dependem da variação do modelo, como os apresentados a seguir.

#### 2.1.1.2.1 Plain Vanilla

O modelo *Plain-Vanilla* é o mais simples dos modelos que usam a equação do modelo de retorno de risco. Nele,  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  são considerados constantes no tempo, além de  $z_t$  ser considerado um ruído branco (média igual a 0 e variância igual a 1). Em seu artigo, Duffie e Pan (1997) comparam o modelo *Plain-Vanilla* com outros baseados no modelo de retorno de risco, mostrando a inferioridade do mesmo, principalmente por subestimar a ocorrência de valores extremos. Por considerar a variância constante no tempo, ele apresenta o mesmo problema apresentado no método da simulação histórica.

#### 2.1.1.2.2 GARCH

O modelo de retorno de risco GARCH utiliza a família de modelos GARCH, introduzida por Engle (1982) e Bollerslev (1986). A principal diferença em relação ao modelo *Plain-Vanilla* é que o parâmetro de escala ( $\sigma_t$ ) não é mais considerado constante e sim uma função tanto dos seus valores passados quanto dos valores passados dos retornos ao quadrado, fazendo com que violações do VaR não mais aconteçam em grupos. Uma variante deste modelo é fazer com que o termo  $\mu_t$  siga um processo ARMA (ou seja, deixe de ser constante no tempo e seja considerado função dos retornos e dos choques aleatórios ( $z_t$ ) passados), fazendo com que o retornos sigam um modelo ARMA-GARCH.

Comparações dos modelos GARCH, ARMA-GARCH, *Plain Vanilla*, entre outros, podem ser encontradas em Kuester, Mitnik e Paoletta (2006) e Duffie e Pan (1997).

## 2.2 MODELOS GARCH E EGARCH

O modelo GARCH (Bollerslev, 1986) é uma extensão do modelo ARCH (Engle, 1982). A principal vantagem dos modelos GARCH frente aos modelos ARCH é que ele permite modelar a estrutura da variância com um menor número de parâmetros através da utilização de defasagens da variância condicional. Um modelo GARCH(p,q) possui a seguinte equação

$$x_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (x_t - \mu_t)^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (6)$$

onde  $\alpha_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, q$  e  $\beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p$  e  $\varepsilon_t$  são os resíduos do modelo (choques aleatórios independentes entre si, com média igual a 0 e variância igual a 1 e, usualmente, seguem distribuição normal ou t-Student) e  $\mu_t$  é o valor esperado da série no momento t, o qual pode assumir um formato ARMA fazendo então que o modelo se denomine ARMA-GARCH. Cabe ressaltar que, tanto  $\sigma_t^2$  e  $\mu_t$  são condicionais ao conjunto de informações passadas ( $t - 1, t - 2, \dots, 1$ ) e que a condição necessária para que o processo seja estacionário é  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ . A estimação dos parâmetros de modelos da família GARCH pode ser realizada através de métodos de máxima verossimilhança (MMV) (Bollerslev, 1986).

Como mostrado por Tim Bollerslev<sup>2</sup>, existe uma grande variedade de modificações do modelo ARCH, cada uma acrescentando novas características ao modelo, como a capacidade de modelar assimetria e a não linearidade da volatilidade ( $\sigma_t$ ), entre outras. Uma destas modificações é o EGARCH (*exponential GARCH*) proposto por Nelson (1991), que é capaz de modelar a assimetria da volatilidade em relação ao retorno, fazendo com que um retorno  $-x$  não tenha mais, necessariamente, o mesmo efeito na estimativa de volatilidade do que um retorno  $x$ . O modelo EGARCH(p,q) é definido pelas equações

$$x_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \quad (7)$$

<sup>2</sup> A relação completa pode ser encontrada em [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1263250](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1263250)



$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log \sigma_{t-j}^2, \quad (8)$$

de maneira que, para ser capaz de capturar a assimetria, a função  $g(\varepsilon_t)$  deve ser função tanto da magnitude quanto do sinal de  $\varepsilon_t$ , como a proposta por Nelson (1991),

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma (|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)). \quad (9)$$

Embora não haja restrições sobre os parâmetros  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , a condição necessária para que o processo  $x_t$  definido por (7) e (8) seja estacionário é que as raízes do polinômio  $p(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j B^j$  estejam fora do círculo unitário. Juntando as equações (8) e (9), podemos reescrever (8) como

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \log \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q A_i [e_{t-i} - E[|e_{t-i}|]] + \sum_{i=1}^q L_i e_{t-i}, \quad (10)$$

a qual será utilizada para apresentar as análises.

### 2.3 FUNÇÕES CÓPULAS

Cópuas podem ser definidas como funções de distribuições multivariadas com distribuições marginais uniformes no intervalo  $[0,1]$  (Schweizer e Sklar, 2005). Podemos então definir uma cópula  $n$ -dimensional  $C$  como

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad (11)$$

onde  $U_i, i = 1, \dots, n$  possui distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$  e  $u_i$  é a realização destas variáveis. Combinando esta definição com o fato de que qualquer variável aleatória contínua pode ser transformada em uma variável uniforme através da sua função de probabilidade, a função cópula permite modelar a dependência entre quaisquer  $n$  variáveis aleatórias. Um resultado importante para a teoria das cópulas é o Teorema de Sklar (Nelsen, 2006), que diz:

**Teorema 1:** Seja  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade  $F_1, \dots, F_n$ , respectivamente, e distribuição conjunta de probabilidade  $H$ . Então, haverá a  $C$  de maneira que

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (12)$$

para todo  $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ . Se  $F_1, \dots, F_n$  são contínuas, então  $C$  é única. Caso contrário,  $C$  é determinada somente em  $\text{Im}F_1 \times \dots \times \text{Im}F_n$ . Reciprocamente, se  $C$  é uma cópula  $n$ -dimensional e  $F_1, \dots, F_n$  são funções de distribuição de probabilidade, então a função  $H$  definida acima é uma função de distribuição  $n$ -dimensional com marginais  $F_1, \dots, F_n$ .

A função cópula pode apresentar diversos formatos, que são definidos pela estrutura de correlação dos dados que se deseja (Nelsen, 2006), sendo a cópula mais simples a que representa a independência total dos dados<sup>3</sup>  $C(u_i, u_j) = u_i \cdot u_j$ . Neste trabalho utilizaremos cópulas tanto simétricas (Normal e t-Student) quanto assimétricas (Gumbel rotacionada e Joy-Clayton Simetrizada). Das cópulas aqui utilizadas, apenas a Normal não nos permite calcular pelo menos uma das dependências caudais (*tail dependence*), que são definidas como:

**Definição 1:** Se  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P[U_1 \leq \varepsilon, U_2 \leq \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P[U_2 \leq \varepsilon, U_1 \leq \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon, \varepsilon)}{\varepsilon} = \tau^L$  existe e  $\tau^L \in (0, 1]$ , a cópula  $C$  possui dependência na cauda inferior. Caso contrário, a cópula  $C$  não possui dependência na cauda inferior. De maneira semelhante, se  $\lim_{\delta \rightarrow 1} P[U_1 > \delta, U_2 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} P[U_2 > \delta, U_1 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{(1 - 2\delta + C(\delta, \delta))}{1 - \delta} = \tau^U$  existe e  $\tau^U \in (0, 1]$ , a cópula  $C$  possui dependência caudal superior. Caso contrário, a cópula  $C$  não possui dependência na cauda superior.

Portanto, a dependência caudal pode ser interpretada como a probabilidade de uma série apresentar um valor extremo em direção a uma das caudas dado que a outra série já apresentou valor extremo na mesma direção. A importância dessa medida de dependência é que se acredita que a correlação de séries financeiras se altera na ocorrência de períodos de baixa e períodos de alta. As medidas de dependência oriundas das cópulas são exclusivamente definidas pela cópula, não sendo afetadas pelas marginais (Silva Filho, 2010).

---

<sup>3</sup> Como neste trabalho serão utilizadas apenas duas séries, todas as cópulas serão apresentadas somente no seu formato bivariado

### 2.3.1 MODELOS DE CÓPULAS

Nesta seção estão as formas funcionais e breves descrições das versões estáticas das cópulas citadas, seguido pelos modelos dinâmicos propostos por Patton (2006).

#### 2.3.1.1 Cópula Normal

Como o nome indica, essa função cópula tem como origem a distribuição normal. Da mesma maneira que a distribuição normal, a cópula normal é simétrica e não apresenta dependência caudal (a não existência da dependência caudal significa que as séries são independentes quando se trata de valores extremos (Patton, 2006)). A sua forma é dada por

$$C_N(u_1, u_2 | \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{r^2 - 2\rho rs + s^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dr ds. \quad (13)$$

A cópula Normal apresenta apenas o parâmetro  $\rho$  que representa a correlação e varia de -1 (correlação inversa perfeita) a 1 (correlação direta perfeita).

#### 2.3.1.2 Cópula t-Student

Similar à cópula normal, a cópula t-Student também tem origem na distribuição homônima. Assim como a distribuição, a cópula t-Student possui caudas mais pesadas que a cópula normal, entretanto essa cópula continua sendo simétrica. A sua forma é

$$C_t(u_1, u_2 | \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{t^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{r^2 - 2\rho rs + s^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dr ds. \quad (14)$$

A cópula t-Student possui dois parâmetros, sendo eles a correlação ( $\rho$ ), que também possui espaço paramétrico igual a  $(-1,1)$  e o grau de liberdade ( $\nu$ ), que possui espaço paramétrico igual a  $(2, \infty)$ . A dependência caudal - tanto

superior quanto inferior (que são iguais nesta cópula) - pode ser obtida através da fórmula

$$DC = 2 \left[ t_{v+1} \left( - \sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right) \right], \quad (15)$$

onde  $t_v(\cdot)$  é a função de probabilidade da distribuição t com  $v$  graus de liberdade.

### 2.3.1.3 Cópula Gumbel Rotacionada

A cópula Gumbel Rotacionada é uma variação na cópula Gumbel. Sua forma funcional é dada por

$$C_{GR}(u_1, u_2 | \theta) = u_1 + u_2 - 1 + C_G(1 - u_1, 1 - u_2 | \theta). \quad (16)$$

onde

$$C_G(u_1, u_2 | \theta) = \exp \left( - \left( (-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right) \quad (17)$$

O objetivo da rotação é que a Cópula Gumbel apresenta apenas dependência caudal superior, enquanto a Gumbel Rotacionada apresenta apenas a dependência caudal inferior. Como é de maior interesse medir a dependência em períodos de crise do que em períodos de crescimento, escolhemos somente utilizar a Gumbel Rotacionada neste trabalho.

O espaço paramétrico de  $\theta$  - tanto na Gumbel quanto na Gumbel Rotacionada - é  $[1, \infty)$  e a dependência caudal pode ser calculada através da fórmula

$$DC = 1 - \frac{1}{\theta}, \quad (18)$$

### 2.3.1.4 Cópula Joe-Clayton Simetrizada

A cópula Joe-Clayton Simetrizada (JCS) é a única cópula utilizada no estudo que apresenta tanto a dependência caudal superior quanto a inferior conjuntamente e independentes. Esse fato permite estimar simultaneamente o quanto valores positivos (negativos) extremos em uma série influenciam a ocorrência de valores extremos positivos (negativos) na outra série. A cópula

JCS é uma variação da cópula de Joe-Clayton, que apresenta assimetria mesmo quando os coeficientes de correlações caudais inferior e superior são iguais (Palaro e Hotta, 2006), característica não mais presente na cópula JCS – quando eles são diferentes a cópula JCS é assimétrica. A sua forma é dada por

$$C_{JCS}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) = \frac{C_{JC}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2, | \tau^L, \tau^U) + u_1 + u_2 - 1}{2}, \quad (19)$$

onde

$$C_{JC}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) = 1 - \left( 1 - \{ [1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1 \}^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

$$\kappa = \frac{1}{\log_2(2 - \tau^U)},$$

$$\gamma = -\frac{1}{\log_2 \tau^L}.$$

Tanto  $\tau^L$  quanto  $\tau^U$  possuem espaço paramétrico igual a  $(0, 1)$  e são a dependência caudal inferior e superior, respectivamente.

### 2.3.1.5 Modelos dinâmicos

Embora os parâmetros sejam considerados como fixos no decorrer do tempo nos modelos estáticos, esta é uma característica que não corresponde à realidade. Pensando em uma maneira de levar em consideração essa variação dos coeficientes de dependência, Patton (2006) propôs modelos dinâmicos de cópulas nos quais os parâmetros tem uma dinâmica de um modelo restrito não linear ARMA(1,10). No Quadro 1 se encontram as equações de cada parâmetro das cópulas citadas.

#### Quadro 1 - Equações tempo-variante dos parâmetros

Cópula	Equações
Normal	$\rho_t = \Lambda_1 \left( \varpi_\rho + \beta_\rho \rho_{t-1} + \alpha_\rho \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \Phi^{-1}(u_{2,t-j}) \right)$

t-Student	$\rho_t = \Lambda_1 \left( \bar{\omega}_\rho + \beta_\rho \rho_{t-1} + \alpha_\rho \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} T_v^{-1}(u_{1,t-j}) T_v^{-1}(u_{2,t-j}) \right)$ $v_t = \Lambda_2 \left( \bar{\omega}_v + \beta_v v_{t-1} + \alpha_v \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} T^{-1}(u_{1,t-j}) T^{-1}(u_{2,t-j}) \right)$
Gumbel rotacionada	$\theta_t = \Lambda_3 \left( \bar{\omega}_\theta + \beta_\theta \theta_{t-1} + \alpha_\theta \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10}  u_{1,t-j} - u_{2,t-j}  \right)$
Joe-Clayton simetrizada	$\tau_t^U = \Lambda_4 \left( \bar{\omega}_U + \beta_U \tau_{t-1}^U + \alpha_U \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10}  u_{1,t-j} - u_{2,t-j}  \right)$ $\tau_t^L = \Lambda_4 \left( \bar{\omega}_L + \beta_L \tau_{t-1}^L + \alpha_L \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10}  u_{1,t-j} - u_{2,t-j}  \right)$

Com essas equações, Patton (2006) sugeriu que os coeficientes tivessem três componentes, sendo eles uma parte constante (representada por  $\omega$ ), uma parte dependente do valor passado do parâmetro (representada por  $\beta$ ) e uma última parte dependente do acumulado dos últimos 10 valores das séries (representado por  $\alpha$ ) para identificar mudanças na dependência entre as séries. Já as funções  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$  e  $\Lambda_4$  servem para manter os parâmetros no seu espaço paramétrico e são:

$$\Lambda_1(x) = \frac{1,998}{1 + \exp(-x)} - 0,999 \quad (20)$$

$$\Lambda_2(x) = 2 + x^2 \quad (21)$$

$$\Lambda_3(x) = 1 + x^2 \quad (22)$$

$$\Lambda_4(x) = \frac{0,998}{1 + \exp(-x)} + 0,001 \quad (23)$$

### 2.3.2 ESTIMAÇÃO

A estimação das cópulas pode ser feita utilizando metodologia inferência para margens (*margins inference function*, IPM) (Joe e Xu, 1996). Segundo esta metodologia, primeiro é necessária a estimação das marginais que irão compor a cópula, para depois estimar a cópula com os resíduos provenientes de cada marginal. Em ambas as etapas o método de estimação utilizado será o da máxima verossimilhança e, embora possa resultar em um modelo cuja verossimilhança é inferior quando comparada com a estimação em uma só etapa, este método se tornou amplamente utilizado após a publicação de Joe (2005), na qual ele afirma que a perda de qualidade do modelo obtido pelo IPM é mínima e não justifica o custo computacional da modelagem em 1 etapa.

Segundo o teorema de Sklar, agora em sua versão condicional, a função distribuição multivariada dos dados pode ser escrita como  $H(x_1, x_2|w) = C(F_1(x_1|w), F_2(x_2|w))$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são as funções de distribuições univariadas de  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente,  $C(\cdot)$  é uma função cópula e  $w$  é o conjunto de informações passadas. Como utiliza o MMV, é necessário obter a função densidade multivariada, que pode ser obtida através da derivada da distribuição multivariada em relação a cada variável, obtendo assim a equação:

$$\begin{aligned}
 h(x_1, x_2|w) &\equiv \frac{\partial^2 H(x_1, x_2|w)}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 &= \frac{\partial F_1(x_1|w)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2(x_2|w)}{\partial x_2} \\
 &\quad \cdot \frac{\partial^2 C_1(F_1(x_1|w), F_2(x_2|w))}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 &= f_1(x_1|w) \cdot f_2(x_2|w) \cdot c(u_1, u_2)
 \end{aligned} \tag{24}$$

onde  $u_1 = F_1(x_1|w)$  e  $u_2 = F_2(x_2|w)$ . Com este resultado em mãos é possível reescrever a distribuição multivariada como  $h(x_1, x_2|w; \theta_h) = f_1(x_1|w; \theta_1) \cdot f_2(x_2|w; \theta_2) \cdot c(u_1, u_2|w; \theta_c)$ , onde  $\theta_h = [\theta_1, \theta_2, \theta_c]$  é o vetor de parâmetros da distribuição multivariada, composto pelos vetores de parâmetros das distribuições univariadas ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ) e da cópula ( $\theta_c$ ). Assim sendo, é possível decompor a densidade multivariada em apenas três termos: as duas

densidades univariadas condicionadas somente às informações passadas e um terceiro termo que incorporará a dependência entre as séries. A vantagem desta decomposição frente à proposta por Clemen e Reilly (1999) é o baixo número de termos sem a necessidade de fazer decomposições em condicionais e suposições quanto à independência.

Para as cópulas estáticas,  $\theta_c$  é composto pelos parâmetros apresentados juntamente com cada cópula, enquanto para as cópulas dinâmicas  $\theta_c$  é composto pelos parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\omega$  presente nas equações do Quadro 1. É possível então escrever a função log-verossimilhança como

$$\sum_{t=1}^T \log h_t(x_{1t}, x_{2t}|w; \theta_h) = \sum_{t=1}^T \log f_1(x_{1t}|w; \theta_1) + \sum_{t=1}^T \log f_2(x_{2t}|w; \theta_2) + \quad (25)$$

$$\sum_{t=1}^T \log c_t(u_1, u_2|w; \theta_c)$$

$$l(\theta_h) = l_{f_1}(\theta_1) + l_{f_2}(\theta_2) + l_c(\theta_c). \quad (26)$$

Utilizando a metodologia de IPM a estimação é dividida em duas etapas, onde a primeira é a estimação de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e posteriormente a estimação de  $\theta_c$ , condicionado à  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Note que os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  influenciam diretamente os valores de  $\theta_c$ , uma vez que influenciam  $u_1$  e  $u_2$ , e, portanto estes deveriam ser estimados conjuntamente, elevando consideravelmente o custo computacional, especialmente no caso de cópulas tempo-variante (Silva Filho, Ziegelmann e Dueker (2013)). Apesar de obter estimadores diferentes do MMV em uma etapa, os estimadores obtidos através do IPM possuem as mesmas características desejadas - isto é, são estimadores consistentes e assintoticamente normais - que os obtidos através do MMV em uma etapa (Joe e Xu, 1996).

### 2.3.3 SIMULAÇÃO

Para a simulação foi utilizado o algoritmo presente<sup>4</sup> em Nelsen (2006), onde, para simular um par de observações  $(u, v)$  da cópula  $C(U, V)$ , primeiro devemos obter a distribuição condicional de  $V$  dado que  $U = u$ , definida por

---

<sup>4</sup> Seção 2.9



$$c_u(v) = P[V \leq v | U = u] = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \quad (27)$$

Com a distribuição condicional definida, podemos utilizar o seguinte algoritmo:

1. Simular dois valores independentes de uniforme (0,1), chamados de  $u$  e  $t$ ;
2. Definir  $v = c_u^{(-1)}(t)$ , onde  $c_u^{(-1)}$  é a inversa de  $c_u$

Com isso, é simulado um par de observações. Em seguida, para cada valor simulado é aplicada a inversa da distribuição dos erros (Normal(0, 1) ou  $T_{GL}$ ), para em seguida substituir as inovações das equações (5), (6), (7) e (9). Após a substituição, o resultado obtido é a simulação de um par de retornos.

## 2.4 ANÁLISE DO VAR E ES

Como critério para comparação dos modelos foram utilizados dois testes: um para comparar os vários VaR estimados, proposto por Christoffersen (1998) e outro para fazer as comparações das estimativas do ES, proposto por McNeil e Frey (2000).

### 2.4.1 TESTE DE CHRISTOFFERSEN

O teste proposto por Christoffersen (1998) tem como objetivo testar se o VaR está sendo pontualmente bem estimado (ou seja, se a proporção de violações está próxima do nível esperado) e se estas violações são independentes. Até então, o único teste existente era o proposto por Kupiec (1995), o qual testava apenas a estimação pontual do VaR.

O teste de Christoffersen é dividido em duas partes, uma, denominada pelo autor como teste de cobertura incondicional (TCI), que é utilizado para verificar a estimação pontual e outra, denominada teste de independência (TI), para verificar a independência destas violações.

A estatística do TCI pode ser obtida por

$$LR_{TCI} = -2 \log \left[ \frac{(1-p)^{n_0} p^{n_1}}{(1-\hat{p})^{n_0} \hat{p}^{n_1}} \right], \quad (28)$$

onde  $\hat{\pi} = n_1/(n_1 + n_0)$  representa a proporção de violações observadas,  $n_0$ ,  $n_1$  e  $p$  representam, respectivamente, o número de não violações observadas, o número de violações observadas e a proporção de violações esperadas (o nível estimado). Entretanto, o autor ressalta que o TCI sozinho não é capaz de testar a independência das violações, hipótese testada pelo TI, cuja estatística teste pode ser obtida por

$$LR_{TI} = -2 \log \left[ \frac{(1 - \hat{\pi}_{01})^{n_{00}} \hat{\pi}_{01}^{n_{01}} (1 - \hat{\pi}_{11})^{n_{10}} \hat{\pi}_{11}^{n_{11}}}{(1 - \hat{\pi}_2)^{(n_{00} + n_{10})} \hat{\pi}_2^{(n_{01} + n_{11})}} \right], \quad (29)$$

onde  $\hat{\pi}_2 = (n_{01} + n_{11})/(n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11})$ ,  $\hat{\pi}_{01} = n_{01}/(n_{01} + n_{00})$ ,  $\hat{\pi}_{11} = n_{11}/(n_{11} + n_{10})$  e  $n_{ij}$  é o número de eventos  $i$  seguidos por um evento  $j$  (onde  $i, j = 1$  é o evento violação do VaR e  $i, j = 0$  é o evento não violação do VaR - por exemplo,  $n_{10}$  é a quantidade de violações seguidas por não violações do VaR). Ambos os testes são testes de razão de verossimilhança e a estatística de teste final é a soma destas duas estatísticas de teste. Desta maneira o teste da cobertura condicional (TCC) é definido como

$$LR_{TCC} = LR_{TCI} + LR_{TI} \sim \chi_2^2 \quad (30)$$

Com isso, o teste de Christoffersen tem como hipótese nula que a proporção de violações do VaR ocorridas é igual ao número de proporções esperadas (testando  $p = \hat{\pi}$  através do TCI) e de que estas violações ocorrem de maneira independente (testando  $\hat{\pi}_{01} = \hat{\pi}_{11}$  através do TI).

#### 2.4.2 TESTE DE MCNEIL E FREY

O teste proposto por McNeil e Frey (2000) tem por objetivo testar a estimação do ES. Em virtude disso, ele irá trabalhar somente com os valores observados que violarem o VaR. Após identificar os pontos de violações do VaR, devemos calcular o excesso de ES, definido como  $R_i = X_i - ES_i^\alpha$ , onde  $i$  representa a  $i$ -ésima violação do VaR e não necessariamente o  $i$ -ésimo valor observado. Com a série de excesso de ES é realizado o teste T de médias com a hipótese nula de que a média é igual ou superior a 0 - ou seja, se o ES está

subestimado. Mais uma vez, é de interesse que a hipótese nula não seja rejeitada - isso é, que o ES estimado é igual ou maior ao ES verdadeiro.

Um problema do teste de McNeil e Frey é a suposição do teste T de que os dados precisam ser normais (neste caso, essa suposição é equivalente a dizer que os retornos que violam o VaR possuem distribuição normal). Para contornar esse problema, é possível realizar a versão *bootstrap* do teste, que consiste em fazer o teste em amostragens de mesmo tamanho com reposição um número grande de vezes (neste trabalho foram utilizadas 1000 repetições) e calcular o valor médio do p-valor das repetições, que será o p-valor do teste. Neste trabalho foram utilizadas tanto a versão normal do teste quanto a versão com *bootstrap*.

### 3 METODOLOGIA

Para avaliarmos a eficiência da estimativa do ES e do VaR através dos modelos foi utilizado *backtesting*. Para tal, foram definidos pontos de cortes em diferentes períodos das séries, com um espaço de 100 observações entre cada ponto, sendo o primeiro feito após 1000 observações. Para cada ponto será ajustado um modelo completo (modelos univariados e cópulas) utilizando somente as 1000 últimas observações.

Para a escolha dos modelos univariados foram comparados 63 modelos ARMA-GARCH em cada um dos pontos de corte. Destes modelos, todos que tinham pelo menos 1 parâmetro não significativo foram descartado, sendo os demais comparados através do *bayesian information criterion* (BIC). Para a estimação das cópulas ainda foi estimada a distribuição empírica dos dados e em seguida foram estimadas as cópulas estáticas e dinâmicas para esta distribuição.

A simulação dos dados deu-se após a estimação dos modelos. Primeiro, simularam-se os resíduos dos modelos GARCH ou EGARCH para o método tradicional diretamente pela distribuição utilizada ou, para as cópulas, um par da distribuição conjunta dos resíduos foi simulado e em seguida transformado no valor do resíduo através da distribuição utilizada (normal ou t-Student). Uma vez tendo os resíduos simulados foi possível obter retornos simulados através da aplicação das equações (5) e (6) para o modelo GARCH ou (7) e (8) para o modelo EGARCH, simulando 5000 observações para cada ponto da série.

Utilizando as simulações das observações foram estimados o  $VaR_{t+1}^{\alpha}$  simulado através da equação (1) e o  $ES_{t+1}^{\alpha}$  simulado através da equação (2) para quatro valores de  $\alpha$ : 10%, 5%, 1% e 0,5% e em seguida foram aplicados os testes apresentados na seção 2.4, nos quais se baseiam os resultados a seguir.

## 4 RESULTADOS

Esta seção está dividida em duas partes. Numa primeira serão apresentadas análises empíricas da série de dados utilizada, a fim de conhecer melhor os dados e modelos utilizados; na segunda, serão apresentados as análises do VaR e ES.

### 4.1 ANÁLISE EMPÍRICA

Os dados utilizados neste trabalho foram os retornos dos índices IBOV e S&P500. Para isso, foram obtidos<sup>5</sup> os retornos diários de ambos os índices de 02/01/1998 à 31/05/2012. Removendo os dias em que pelo menos uma das bolsas não operou, cada série possui 3474 retornos.

Na Figura 1 é possível observar o comportamento dos índices na janela de tempo selecionada. No eixo Y principal (a esquerda) estão os valores do IBOV (linha contínua, com primeiro valor igual a 10480), enquanto no eixo secundário (a direita) estão os valores do S&P500 (linha tracejada, com primeiro valor igual a 975,04).



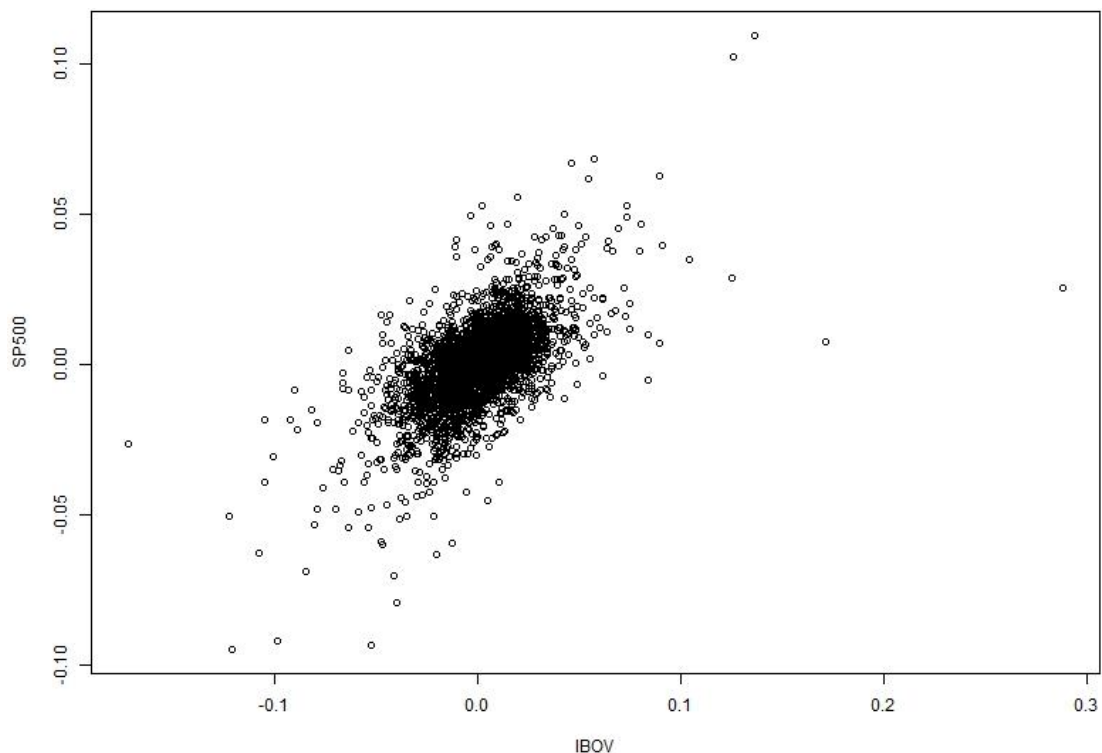
Figura 1 - Índices em níveis

<sup>5</sup> Os dados foram obtidos pelo site Yahoo! Finance.

É possível identificar um comportamento similar em ambos os índices, principalmente a partir do primeiro semestre de 2003, onde os índices começam a apresentar um crescimento quase constante até o segundo semestre de 2007, onde começam a cair e a partir do primeiro semestre de 2009 ambos voltam a apresentar um período de crescimento.

A queda que os índices apresentam no início de 2008, seguida por uma aparente melhora seguida por uma queda bruta foi uma tendência global resultante da crise do *subprime* ocorrida nos Estados Unidos, iniciada já em 2007 com a falência do 2º maior credor de hipotecas do tipo *subprime* (New Century Financial, em abril de 2007). Em 2008 a crise chegou aos bancos de investimentos, resultando na crise do 5º maior banco de investimentos (Bear Stearns, em março de 2008, adquirido pelo banco JP Morgan) e na falência do 4º maior banco de investimentos (Lehman Brothers, em setembro de 2008). A falência do Lehman Brothers é considerada o pior momento da crise (Borça Junior e Torres Filho, 2008).

Observando a Figura 2 se confirma o percebido na Figura 1, pois é possível verificar uma correlação positiva ( $r = 0,6118$ ;  $p\text{valor} < 0.001$ ) entre os retornos.



**Figura 2 - Gráfico de dispersão dos retornos**

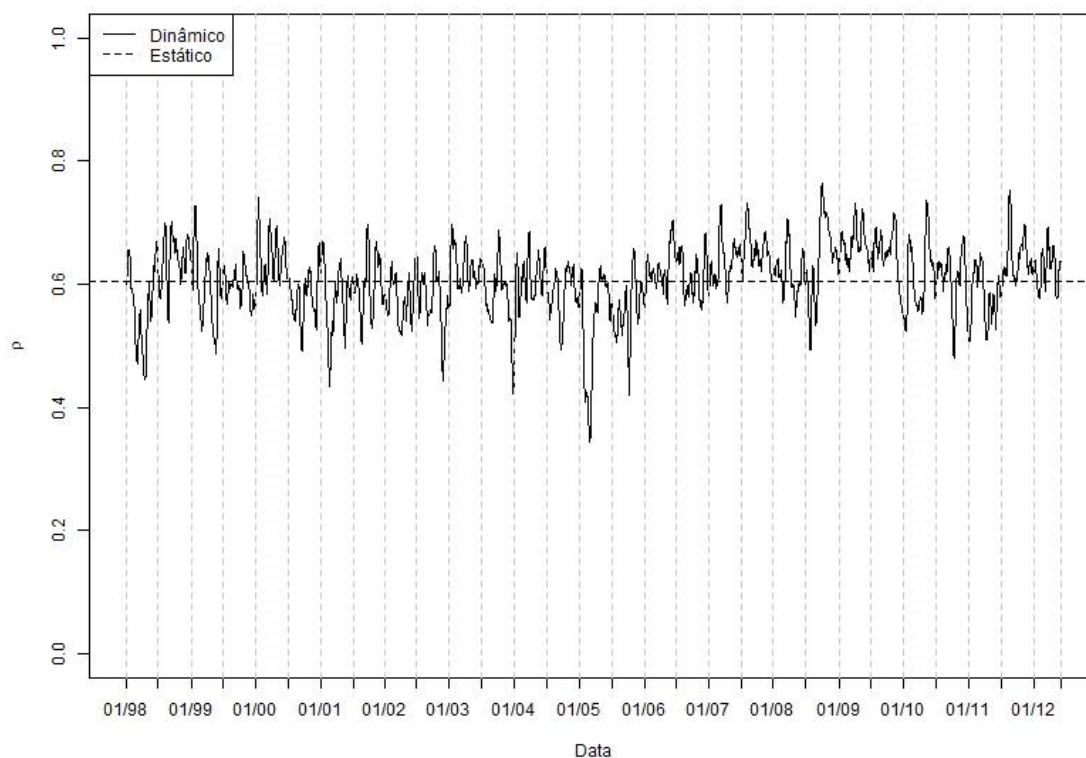
A fim de se conhecer o comportamento dos modelos - e, principalmente, dos parâmetros dinâmicos - nos dados, foram ajustados um modelo de cada cópula na série toda. Por esta etapa não ter objetivo de comparação, foram utilizadas como distribuições dos erros somente a distribuição t-Student e modelo de volatilidade EGARCH, utilizando os mesmos critérios de seleção apresentados na seção 3. Para a série de retornos do IBOV, o modelo escolhido foi EGARCH(1,1), com média condicional constante. Já para a série de retornos do S&P500, o modelo escolhido foi um ARMA(1,1)-EGARCH(2,2). Os parâmetros estimados, junto com os seus erros padrões encontram-se na Tabela 1.

**Tabela 1 - Parâmetros dos modelos univariados**

Parâmetros	IBOV		S&P500	
	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão
$\mu$	0,00064	0,00027	0,00013	0,00006
AR(1)	----	----	0,66542	0,11594

MA(1)	----	----	-0,7164	0,10938
$\omega$	-0,17487	0,03313	-0,07189	0,01725
$\beta_1$	0,09782	0,00413	1,4772	0,07676
$\beta_2$	----	----	-0,48497	0,07548
$A_1$	0,14348	0,01693	-0,15984	0,03866
$A_2$	----	-----	0,23399	0,04414
$L_1$	-0,08639	0,00972	-0,28	0,02503
$L_2$	----	----	0,22819	0,02331
Graus de liberdade	11,482	1,6443	8,7348	1,1646

Após o ajuste univariado, foram ajustadas as cópulas - tanto estáticas quanto dinâmicas. A primeira cópula ajustada foi a Normal. Na Figura 3 podemos verificar o comportamento da correlação neste modelo. No modelo estático, a correlação estimada foi 0,6054, enquanto que no modelo dinâmico a correlação variou de 0,3445 a 0,7640, apresentando uma média de 0,6069.

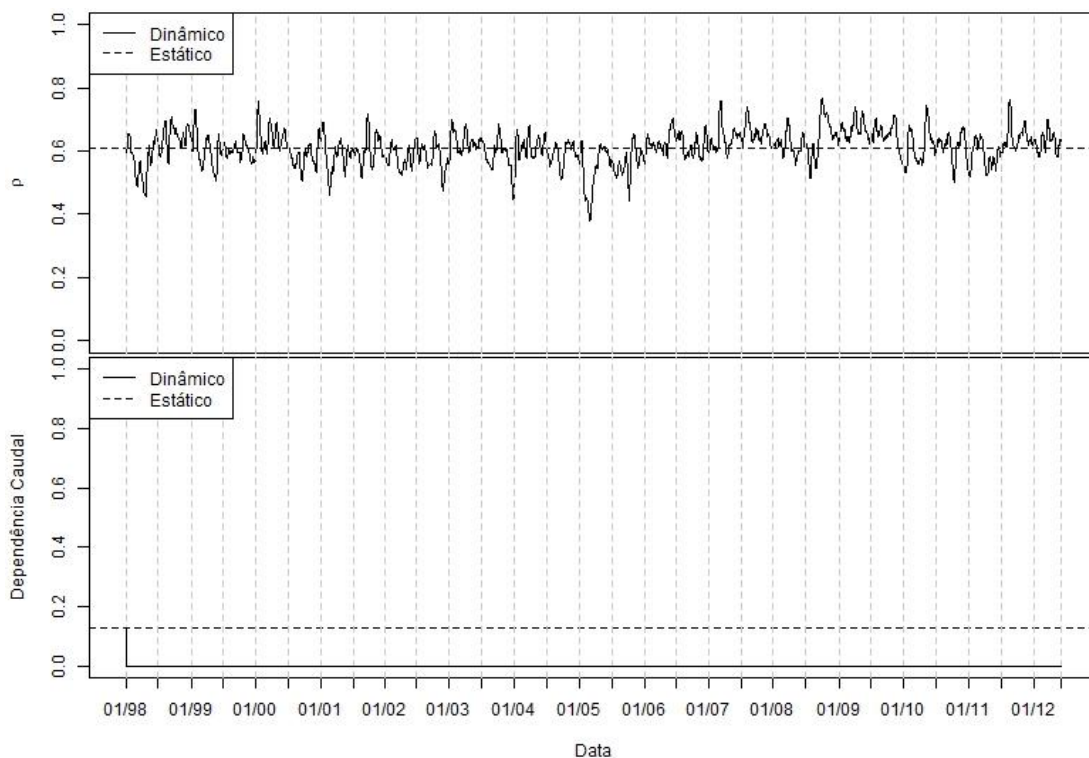


**Figura 3 - Correlação da cópula Normal**



Um resultado importante que pode ser observado neste gráfico é que no período entre o segundo semestre de 2008 e o primeiro semestre de 2010, a correlação se manteve num patamar elevado. Este período coincide com o período no qual ambas as bolsas sofreram grandes perdas devido à crise do *subprime* norte-americana. Este comportamento corrobora o resultado de Moldovan e Medrega (2011), de que os mercados tendem a ficar mais correlacionados em períodos de crise.

A segunda cópula estimada foi a t-Student. Nesta cópula poderemos ver, além da correlação, a dependência caudal, cujos valores estimados encontram-se na Figura 4.

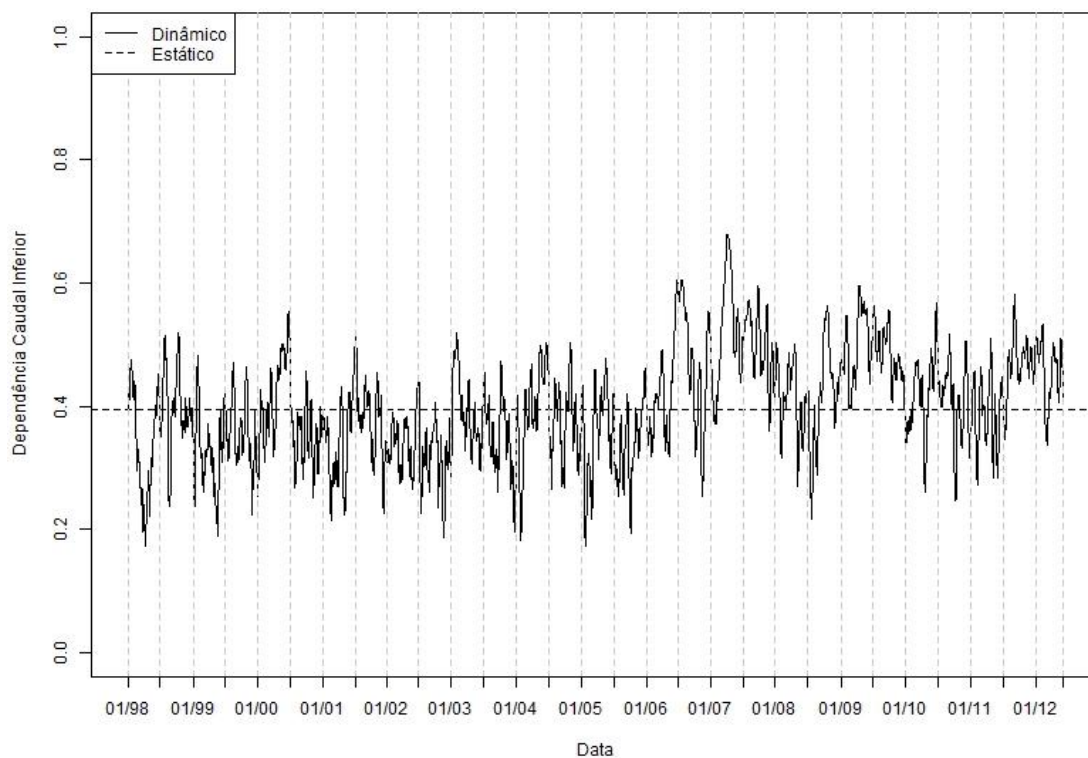


**Figura 4 - Correlação e dependência caudal da cópula t-Student**

Na cópula t-Student estática, a correlação estimada foi de 0,6094, enquanto na dinâmica a mesma variou de 0,3810 a 0,7678, tendo uma média de 0,6116, mais uma vez apresentando valores elevados no período compreendido entre segundo semestre de 2008 e primeiro semestre de 2010. Já a dependência caudal, no modelo estático apresentou valor 0,1292, e no modelo dinâmico apresentou sempre valores muito próximos a 0. Este comportamento é devido aos graus de liberdade estimados serem bastante

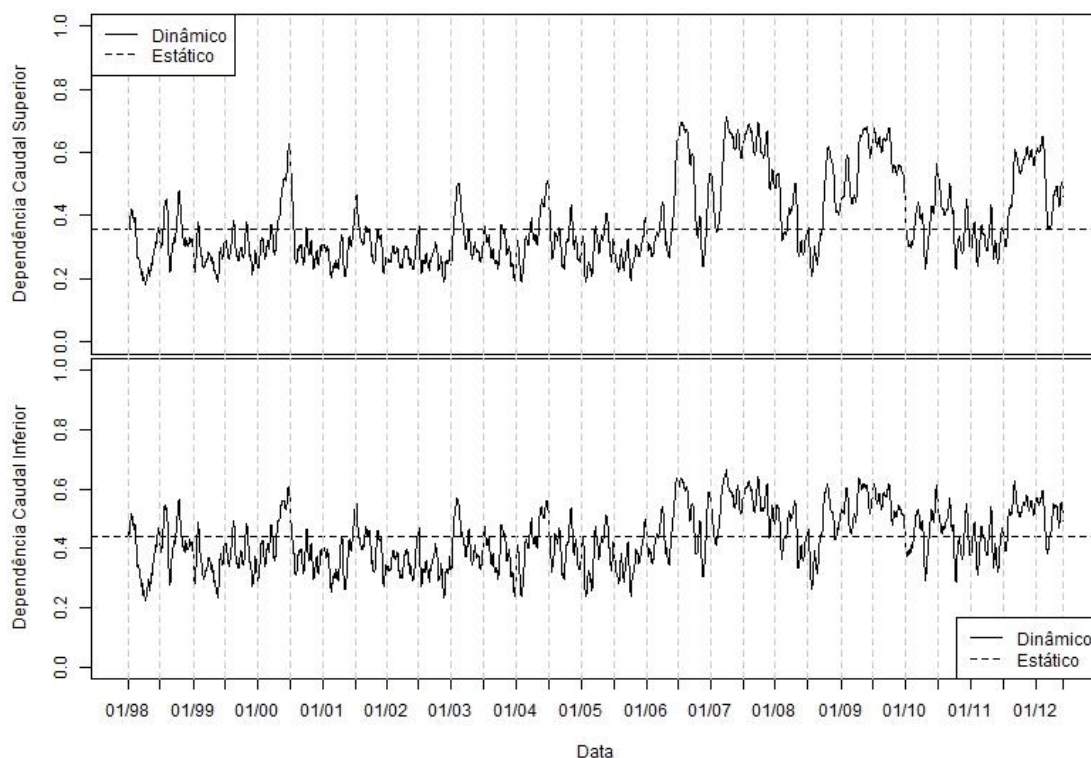
altos, o que pode indicar que a cópula normal seria mais apropriada para os dados.

A próxima cópula ajustada foi a Gumbel rotacionada, e os valores estimados para a dependência caudal inferior estão na Figura 5.



**Figura 5 - Dependência caudal da cópula Gumbel Rotacionada**

Na cópula Gumbel Rotacionada estática, a dependência caudal estimada foi 0,3950, enquanto na dinâmica a média estimada foi de 0,4000, variando de 0,1724 à 0,6778. Mais uma vez, é possível observar um aumento da dependência caudal no período de crise. Por fim, foi ajustada a cópula JCS, cujos parâmetros representam as dependências caudais e encontram-se na Figura 6.



**Figura 6 - Parâmetros das Cópula SJC**

Na cópula JCS, a dependência caudal superior do modelo estático foi estimada em 0,3591, enquanto a média do modelo dinâmico ficou em 0,3782, variando entre 0,1830 e 0,7132. Já a dependência caudal inferior, no modelo estático foi estimada em 0,4378, e no modelo dinâmico apresentou média de 0,4342, variando entre 0,2245 e 0,6635.

Na Figura 6 é possível observar dois níveis distintos para as duas dependências caudais dinâmicas. No primeiro, que compreende de 1998 até o segundo semestre de 2006 e onde as dependências caudais apresentam uma média mais baixa e apenas alguns valores mais altos. Já no segundo período, que compreende do segundo semestre de 2006 até o final da série e as dependências caudais apresentam uma média mais elevada e alguns valores baixos temos justamente um período de maior dependência dos índices, com ambos crescendo juntos, mas também caindo juntos. Neste segundo período, os momentos nos quais a dependência caudal superior apresenta declínio é o mesmo momento em que os mercados apresentam quedas significativas.

## 4.2 ANÁLISES DO VaR E ES

Na primeira parte desta seção serão mostrados os resultados encontrados para as análises do VaR, e em seguida os resultados para o ES. Na Tabela 2 encontramos o percentual de valores observados que violaram o VaR simulado, onde espera-se que, quanto melhor seja o ajuste, mais o valor encontrado se aproxime do nível desejado.

Tabela 2 - Violações do VaR

Cópula	Parâmetro	Modelo de variância	Distribuição do erro	Nível do VaR			
				0,01	0,025	0,05	0,1
Normal	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0150	0,0291	0,0534	0,0998
			t-Student	0,0085	0,0230	0,0449	0,0930
		GARCH	Normal	0,0141	0,0327	0,0598	0,1015
			t-Student	0,0073	0,0198	0,0469	0,0905
	Estática	EGARCH	Normal	0,0154	0,0295	0,0538	0,1019
			t-Student	0,0073	0,0234	0,0441	0,0934
		GARCH	Normal	0,0150	0,0335	0,0586	0,1011
			t-Student	0,0053	0,0206	0,0461	0,0934
t-Student	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0154	0,0303	0,0542	0,1011
			t-Student	0,0073	0,0234	0,0441	0,0946
		GARCH	Normal	0,0154	0,0335	0,0594	0,1002
			t-Student	0,0073	0,0206	0,0465	0,0922
	Estática	EGARCH	Normal	0,0158	0,0307	0,0538	0,1015
			t-Student	0,0081	0,0222	0,0445	0,0918
		GARCH	Normal	0,0137	0,0319	0,0602	0,0998
			t-Student	0,0065	0,0190	0,0473	0,0914
Gumbel Rotacionada	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0141	0,0295	0,0546	0,1015
			t-Student	0,0081	0,0234	0,0441	0,0918
		GARCH	Normal	0,0146	0,0319	0,0594	0,1007
			t-Student	0,0061	0,0194	0,0469	0,0905
	Estática	EGARCH	Normal	0,0150	0,0295	0,0542	0,1007
			t-Student	0,0077	0,0234	0,0453	0,0938
		GARCH	Normal	0,0146	0,0344	0,0598	0,0986
			t-Student	0,0061	0,0190	0,0469	0,0893

<b>Joe-Clayton Simetrizada</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0154	0,0279	0,0538	0,0990
			t-Student	0,0069	0,0234	0,0449	0,0938
		GARCH	Normal	0,0146	0,0335	0,0578	0,1002
			t-Student	0,0061	0,0202	0,0461	0,0909
	Estática	EGARCH	Normal	0,0141	0,0303	0,0542	0,1011
			t-Student	0,0077	0,0226	0,0445	0,0938
		GARCH	Normal	0,0146	0,0331	0,0610	0,0990
			t-Student	0,0069	0,0210	0,0481	0,0918
<b>Modelo de retorno de risco</b>	EGARCH	Normal	0,0121	0,0291	0,0525	0,1007	
		t-Student	0,0081	0,0214	0,0400	0,0926	
	GARCH	Normal	0,0146	0,0311	0,0602	0,1023	
		t-Student	0,0065	0,0202	0,0473	0,0918	

Um resultado importante desta tabela é que o percentual de violações do VaR para os modelos que utilizam a distribuição t-Student como distribuição dos erros é sempre inferior ao nível objetivado, indicando uma superestimação do risco (uma vez que o VaR simulado é superior ao verdadeiro VaR), principalmente para o  $VaR^{0,01}$ . Entretanto, como veremos na Tabela 3, essa superestimação é estatisticamente não significativa. Já para os modelos que utilizam a distribuição normal, a maioria (67 de 72) apresenta percentual de violações superior ao nível objetivado, indicando uma subestimação do risco. Na Tabela 3 encontramos o p-valor dos testes de Christoffersen.

Tabela 3 - Teste de Christoffersen

Cópula	Parâmetro	Modelo de variância	Distribuição do erro	Nível do VaR			
				0,01	0,025	0,05	0,1
<b>Normal</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0396	0,4410	0,6829	0,7037
			t-Student	0,6192	0,6970	0,4944	0,4758
		GARCH	Normal	0,0898	0,0450	0,0924	0,9634
			t-Student	0,3155	0,0856	0,7601	0,2808
	Estática	EGARCH	Normal	0,0252	0,2500	0,6233	0,7964
			t-Student	0,3155	0,7692	0,3578	0,5064
		GARCH	Normal	0,0396	0,0269	0,1558	0,9713
			t-Student	0,0312	0,1216	0,6299	0,4632

<b>t-Student</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0252	0,0248	0,5635	0,7496
			t-Student	0,3155	0,8363	0,3851	0,5865
		GARCH	Normal	0,0252	0,0343	0,1010	0,9681
			t-Student	0,3155	0,1216	0,6921	0,2745
	Estática	EGARCH	Normal	0,0156	0,1266	0,6233	0,8323
			t-Student	0,5210	0,6546	0,4388	0,3500
GARCH		Normal	0,1294	0,1005	0,0762	0,9886	
		t-Student	0,1522	0,0553	0,8018	0,2563	
<b>Gumbel Rotacionada</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0898	0,2500	0,5045	0,8323
			t-Student	0,5210	0,8363	0,3851	0,3500
		GARCH	Normal	0,0605	0,1005	0,1110	0,9728
			t-Student	0,0962	0,0696	0,7601	0,2307
	Estática	EGARCH	Normal	0,0396	0,2500	0,5635	0,7811
			t-Student	0,4165	0,8363	0,5508	0,4689
GARCH		Normal	0,0605	0,0184	0,0853	0,9756	
		t-Student	0,0962	0,0553	0,7522	0,1916	
<b>Joe-Clayton Simetrizada</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0252	0,0914	0,6233	0,8639
			t-Student	0,2258	0,8363	0,4944	0,5353
		GARCH	Normal	0,0605	0,0343	0,2110	0,9985
			t-Student	0,0962	0,1032	0,6299	0,2964
	Estática	EGARCH	Normal	0,0898	0,1612	0,5635	0,7496
			t-Student	0,4165	0,7244	0,3997	0,4689
GARCH		Normal	0,0605	0,0458	0,0488	0,9173	
		t-Student	0,2258	0,1405	0,9046	0,2396	
<b>Modelo de retorno de risco</b>	EGARCH	Normal	0,4068	0,4410	0,6260	0,3747	
		t-Student	0,5210	0,3828	0,0628	0,3407	
	GARCH	Normal	0,0605	0,1574	0,0716	0,9127	
		t-Student	0,1522	0,1032	0,8018	0,3390	

Mais uma vez é possível fazer comentários diferentes para cada distribuição do erro: Das 17 rejeições do teste (a um nível de significância de 5%), 16 ocorreram nas cópulas que as marginais utilizam a normal como distribuição dos erros, onde 8 no  $VaR^{0,01}$ , 7 no  $VaR^{0,025}$  e 1 no  $VaR^{0,05}$ . Já para as cópulas cujas marginais utilizam a t-Student como distribuição dos erros, houve apenas 1 rejeição (ocorrida no  $VaR^{0,01}$ ). Um resultado inesperado foi que

nenhum teste do modelo de retorno de foi rejeitado. Na Tabela 4 encontram-se os p-valores do teste de Frey e McNeil sem a utilização de *bootstrap*.

Tabela 4 - Teste de Frey e McNeil - Sem *bootstrap*

Cópula	Parâmetro	Modelo de variância	Distribuição do erro	Nível do ES			
				0,01	0,025	0,05	0,1
Normal	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0026	0,0012	0,0022	0,0031
			t-Student	0,1547	0,2700	0,3211	0,5550
		GARCH	Normal	0,0015	0,0143	0,0064	0,0011
			t-Student	0,2932	0,4837	0,8847	0,7320
	Estática	EGARCH	Normal	0,0029	0,0012	0,0011	0,0072
			t-Student	0,0425	0,2854	0,1990	0,5813
GARCH	Normal	0,0052	0,0163	0,0033	0,0007		
	t-Student	0,0675	0,6664	0,8619	0,8844		
t-Student	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0023	0,0013	0,0013	0,0058
			t-Student	0,0616	0,3232	0,2073	0,6640
		GARCH	Normal	0,0017	0,0074	0,0027	0,0006
			t-Student	0,4721	0,7127	0,8938	0,8293
	Estática	EGARCH	Normal	0,0055	0,0037	0,0022	0,0061
			t-Student	0,0884	0,2005	0,2731	0,4823
GARCH	Normal	0,0010	0,0124	0,0091	0,0004		
	t-Student	0,2254	0,4643	0,9104	0,8380		
Gumbel Rotacionada	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0013	0,0016	0,0033	0,0084
			t-Student	0,1840	0,3987	0,2718	0,5226
		GARCH	Normal	0,0054	0,0142	0,0078	0,0013
			t-Student	0,1228	0,5547	0,9428	0,7838
	Estática	EGARCH	Normal	0,0016	0,0014	0,0020	0,0051
			t-Student	0,0904	0,2773	0,3133	0,5977
GARCH	Normal	0,0026	0,0279	0,0055	0,0002		
	t-Student	0,1831	0,4881	0,9152	0,6417		
Joe-Clayton Simetrizada	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0047	0,0007	0,0020	0,0045
			t-Student	0,0321	0,3654	0,4039	0,6716
		GARCH	Normal	0,0025	0,0381	0,0029	0,0007
			t-Student	0,2496	0,6112	0,9097	0,8471
	Estática	EGARCH	Normal	0,0014	0,0031	0,0022	0,0053

<b>Modelo de retorno de risco</b>	GARCH	t-Student	0,0745	0,2527	0,2358	0,5607
		Normal	0,0023	0,0155	0,0070	0,0002
		t-Student	0,2901	0,6800	0,9349	0,8347
		Normal	0,0038	0,0117	0,0125	0,0247
	EGARCH	t-Student	0,5594	0,7113	0,4468	0,8920
		Normal	0,0441	0,0116	0,0423	0,0019
	GARCH	t-Student	0,4948	0,7872	0,9665	0,8550
		Normal				

Nesta tabela, temos como principal resultado a rejeição do teste de todos os modelos que utilizam a distribuição normal como distribuição dos erros, e o cenário extremamente oposto para os que utilizam a distribuição t-Student, onde ocorreram apenas 2 rejeições. Entretanto, quando utilizamos a opção *bootstrap* do teste este cenário apresenta algumas alterações, como podemos ver na Tabela 5, que apresenta os p-valores desta versão do teste.

Tabela 5 - Teste de Frey e McNeil - Com *bootstrap*

Cópula	Parâmetro	Modelo de variância	Distribuição do erro	Nível do ES			
				0,01	0,025	0,05	0,1
<b>Normal</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0090	0,0069	0,0143	0,0213
			t-Student	0,2413	0,3446	0,4013	0,5580
		GARCH	Normal	0,0084	0,0584	0,0307	0,0095
			t-Student	0,3808	0,5106	0,8003	0,6750
	Estática	EGARCH	Normal	0,0153	0,0076	0,0086	0,0339
			t-Student	0,1031	0,3728	0,2835	0,5778
		GARCH	Normal	0,0210	0,0532	0,0205	0,0084
			t-Student	0,1178	0,6351	0,7770	0,8033
<b>t-Student</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0109	0,0068	0,0072	0,0315
			t-Student	0,1349	0,3815	0,2944	0,6376
		GARCH	Normal	0,0089	0,0299	0,0149	0,0079
			t-Student	0,5055	0,6647	0,8250	0,7475
	Estática	EGARCH	Normal	0,0217	0,0170	0,0132	0,0314
			t-Student	0,1773	0,2896	0,3522	0,4915
		GARCH	Normal	0,0057	0,0537	0,0406	0,0050
			t-Student	0,2991	0,5070	0,8315	0,7591
<b>Gumbel</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	0,0066	0,0087	0,0168	0,0368



<b>Rotacionada</b>	<b>Estática</b>	GARCH	t-Student	0,2716	0,4480	0,3373	0,5278	
			Normal	0,0263	0,0561	0,0359	0,0141	
		EGARCH	t-Student	0,2006	0,5651	0,8673	0,7243	
			Normal	0,0076	0,0084	0,0131	0,0287	
		GARCH	t-Student	0,1628	0,3512	0,3760	0,5843	
			Normal	0,0120	0,0742	0,0266	0,0028	
	<b>Dinâmica</b>	EGARCH	t-Student	0,2711	0,5176	0,8348	0,6015	
			Normal	0,0169	0,0047	0,0100	0,0283	
		GARCH	t-Student	0,0802	0,4255	0,4564	0,6430	
			Normal	0,0122	0,0941	0,0167	0,0080	
		<b>Joe-Clayton</b>	GARCH	t-Student	0,3134	0,6050	0,8415	0,7750
				Normal	0,0076	0,0154	0,0131	0,0297
<b>Simetrizada</b>	<b>Estática</b>	EGARCH	t-Student	0,1479	0,3274	0,3184	0,5454	
			Normal	0,0121	0,0489	0,0367	0,0029	
		GARCH	t-Student	0,3686	0,6479	0,8630	0,7632	
			Normal	0,0218	0,0347	0,0496	0,0702	
<b>Modelo de retorno de risco</b>		EGARCH	t-Student	0,5596	0,6613	0,4902	0,8061	
			Normal	0,1132	0,0403	0,1085	0,0193	
		GARCH	t-Student	0,5040	0,7353	0,8990	0,7873	
			Normal					

Novamente há uma concentração de rejeições nos modelos que utilizam a distribuição normal, onde se encontram todas as rejeições do teste. Entretanto, agora ocorreram 9 não rejeições, sendo 8 em modelos que utilizaram o modelo GARCH e apenas 1 que utilizaram o modelo EGARCH. Ainda cabe ressaltar que, das 9 não rejeições, 3 se encontram no modelo de retorno de risco, mostrando que, embora seja um método mais simples de estimação, ele não se demonstra inferior quando comparado com modelos mais complexos. Na Tabela 6 podemos ver a média do excesso de ES (tal como definido na seção 2.4.2) para cada modelo, que pode nos auxiliar a compreender o resultado anterior.

Tabela 6 - Excesso de ES

Cópula	Parâmetro	Modelo de variância	Distribuição do erro	Nível do ES			
				0,01	0,025	0,05	0,1

<b>Normal</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0060	-0,0044	-0,0029	-0,0020
			t-Student	-0,0033	-0,0010	-0,0005	0,0001
	Estática	GARCH	Normal	-0,0050	-0,0025	-0,0020	-0,0020
			t-Student	-0,0014	-0,0001	0,0011	0,0004
	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0055	-0,0043	-0,0030	-0,0017
			t-Student	-0,0050	-0,0008	-0,0009	0,0002
Estática	GARCH	Normal	-0,0040	-0,0023	-0,0022	-0,0020	
		t-Student	-0,0041	0,0006	-0,0010	0,0008	
<b>t-Student</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0056	-0,0041	-0,0030	-0,0018
			t-Student	-0,0053	-0,0007	-0,0009	0,0003
	Estática	GARCH	Normal	-0,0044	-0,0026	-0,0022	-0,0021
			t-Student	-0,0002	0,0007	0,0011	0,0006
	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0052	-0,0037	-0,0029	-0,0018
			t-Student	-0,0040	-0,0013	-0,0006	0,0000
Estática	GARCH	Normal	-0,0051	-0,0025	-0,0019	-0,0022	
		t-Student	-0,0020	-0,0001	0,0012	0,0006	
<b>Gumbel Rotacionada</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0052	-0,0048	-0,0028	-0,0020
			t-Student	-0,0059	-0,0010	-0,0005	0,0002
	Estática	GARCH	Normal	-0,0038	-0,0024	-0,0020	-0,0022
			t-Student	-0,0006	0,0004	0,0013	0,0005
	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0057	-0,0044	-0,0028	-0,0020
			t-Student	-0,0057	-0,0013	-0,0005	0,0000
Estática	GARCH	Normal	-0,0052	-0,0025	-0,0020	-0,0023	
		t-Student	-0,0018	0,0001	0,0011	0,0003	
<b>Joe-Clayton Simetrizada</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0054	-0,0047	-0,0029	-0,0019
			t-Student	-0,0060	-0,0005	-0,0003	0,0003
	Estática	GARCH	Normal	-0,0044	-0,0020	-0,0022	-0,0021
			t-Student	-0,0017	0,0004	0,0012	0,0007
	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0065	-0,0038	-0,0028	-0,0018
			t-Student	-0,0046	-0,0010	-0,0008	0,0001
Estática	GARCH	Normal	-0,0045	-0,0024	-0,0019	-0,0023	
		t-Student	-0,0014	0,0006	0,0013	0,0006	
<b>Modelo de retorno de risco</b>	Dinâmica	EGARCH	Normal	-0,0049	-0,0026	-0,0019	-0,0013
			t-Student	0,0003	0,0007	-0,0001	0,0008
			GARCH	Normal	-0,0029	-0,0023	-0,0013

---

t-Student	0,0000	0,0011	0,0015	0,0006
-----------	--------	--------	--------	--------

---

Como pode ser observado na Tabela 6, uma possível justificativa para o mal desempenho dos modelos que tem como suposição que os erros seguem distribuição normal pode ser que eles estão subestimando o ES, fato que pode ser observado através do excesso de ES ser negativo para todos esses os modelos, concordando assim com os achados da Tabela 2.

Outra justificativa para os resultados está no fato de que muitas das marginais utilizadas nas cópulas rejeitam a suposição de que a função distribuição acumulada dos resíduos segue a distribuição Uniforme(0,1), verificada através do teste Kolmogorov-Smirnov, afetando diretamente a qualidade das estimativas e simulações e deveriam ser eliminados da lista de opções de modelos. Entretanto, a remoção de modelos que rejeitavam a suposição dos erros resultava na exclusão de todos os 63 modelos testados em alguns dos passos e, por isso, não foi possível aplicar este critério em todos os modelos. Uma alternativa para tentar resolver este problema seria utilizar outras distribuições nos erros, como a t-Student assimétrica. Entretanto, a biblioteca<sup>6</sup> utilizada não permitia o uso de outras distribuições além das já utilizadas.

---

<sup>6</sup> Foi utilizada a toolbox "Econometrics" do Matlab

## 5 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi comparar a eficiência de métodos mais simples de estimação de medidas de risco para portfólio com a estimação através de cópulas. Entretanto, não foram encontradas evidências suficientes de que os métodos diferenciam significativamente. Outro objetivo deste trabalho também foi comparar a performance de diferentes configurações de cópulas.

Uma conclusão que pode ser realizada, baseada nas Tabelas 3, 4 e 5 é a superioridade dos modelos que utilizam a distribuição t-Student frente aos modelos que utilizam a distribuição normal para modelar os erros. Este resultado já era esperado, uma vez que é sabido que retornos diários apresentam caudas mais pesadas, se aproximando assim mais da distribuição t-Student.

Quanto ao modelo de cópula e ao tipo de parâmetro (estático ou dinâmico), também não foram encontradas evidências significativas da superioridade de algum em comparação com os outros. Entretanto, cabe ressaltar que os modelos dinâmicos foram capazes de captar os períodos de crise, uma vez que em todos parâmetros estimados houve uma mudança de comportamento no período da crise do *subprime*.

Contudo, é importante ressaltar que os resultados e conclusões aqui encontrados foram feitos baseados em apenas um cenário. Outros estudos utilizando diferentes dados, cenários de simulação e configuração do portfólio são necessários antes que se possa afirmar que os resultados aqui são passíveis de generalizações.

## REFERÊNCIAS

ACERBI, C.; TASCHE, D. On the coherence of Expected Shortfall. **Journal of Banking & Finance**, Philadelphia, v. 26, n. 7, p. 1487-1503, jul. 2002.

ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, [S.l.], v. 9, n. 3, p. 203-228, jul. 1999.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, North-Holland, v. 31, n. 3, p. 307-327, fev. 1986.

BORÇA JUNIOR, G. R; TORRES FILHO, E. T. Analisando a crise do subprime. **Revista do BNDES**, Rio de Janeiro, v. 15, n. 30, p. 129-159, dez. 2008.

CHERUBINI, U; LUCIANO, E. Value at Risk trade-off and capital allocation with copulas. **Economic Notes**, [Verona], v. 30, n. 2, p. 235-256, jul. 2001.

CHRISTOFFERSEN, P. F. **Elements of Financial Risk Management**. San Diego: Academic Press, 2003.

CHRISTOFFERSEN, P. F. Evaluating Interval Forecasts. **International Economic Review**, Pensilvania, v. 39, n. 4, p. 841-862, nov. 1998.

CLEMEN, R. T.; REILLY, T. Correlations and copulas for decision and risk analysis. **Management Science**, Hanover, v. 45, n. 2, p. 208-224. fev. 1999.

DOWD, K. **Measuring market risk**. Chichester: John Wiley & Sons, 2005

DUFFIE, D; PAN, J. An overview of Value at Risk. **The Journal of Derivatives**, Nova Iorque, v.4, n. 3, p. 7-49. jan. 1997.

ENGLE, R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom Inflation. **Econometrica**, Nova Iorque, v. 50, n. 4, p. 987-1007. jul. 1982.

JOE, H. Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. **Journal of Multivariate Analysis**, Philadelphia, v. 94, n. 2, p. 401-419. jun. 2005.

JOE, H; XU, J. J. **The estimation method of inference functions for margins for multivariate models**. Vancouver: University of British Columbia, Department of Statistics, 1996.

KUESTER, K; MITNNIK, S; PAOLELLA, M. S. Value-at-Risk prediction: a comparison of alternative strategies. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford, v. 4, n. 1, p. 53-89, jan. 2006.

KUPIEC, P. H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. **The Journal of Derivatives**, Nova Iorque, v. 3, n. 2, p. 73-84, jan. 1995.

LINSMEIER, T. J; PEARSON, N. D. Value at Risk. **Financial Analysts Journal**, Nova Iorque, v. 56, n. 2, p. 47-67, mar./abr. 2000.

MCNEIL, A. J.; FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. **Journal of Empirical Finance**, Philadelphia, v. 7, n. 3-4, p. 271-300, nov. 2000.

MOLDOVAN, I; MEDREGA, C. Correlation of international stock markets before and during the subprime crisis. **The Romanian Economic Journal**, Bucureste, v. 14, n. 40, p. 173-193. jun. 2011.

NELSEN, R. B. **An introduction to copulas**. Nova Iorque: Springer, 2006.

NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. **Econometrica**, Nova Iorque, v. 59, n. 2, p. 347-70, mar. 1991.

PALARO, H. P; HOTTA, L. K. Using conditional copula to estimate Value at Risk. **Journal of Data Science**, Nova Iorque, v. 4. n. 1, jan. 2006.

PATTON, A. J. Modelling asymmetric exchange rate dependence. **International Economic Review**, Pensilvania, v. 47, n. 2, p. 527-556, maio 2006.

ROCKFELLAR, R. T; URYASEV, S. Optimization of conditional Value-at-Risk. **Journal of Risk**, London, v. 2, n.3, p. 21-41, abr. 2000.

ROCKFELLAR, R. T; URYASEV, S. Conditional Value-at-risk for general loss distributions. **Journal of Banking & Finance**, Philadelphia, v. 26, n. 7, p. 1443-1471, jul. 2002.

ROSS, S A; WESTERFIELD, R. W.; JAFFE, J. F. **Corporate finance**. Nova Iorque, NY: McGraw-Hill/Irwin, 2003.

SCHWEIZER, B; SKLAR, A. **Probabilistic metric spaces**. Mineola, N.Y: Dover Publications. 2005.

SILVA FILHO, O. C. da. **Cópias tempo-variantes em finanças**. 2010. 90 f. Tese (Doutorado em Economia)–Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre: UFRGS, 2010.

SILVA FILHO, O. C; ZIEGELMANN, F. A. ; DUEKER, M. **Modeling Dependence Dynamics through Copulas with Regime Switching**. Insurance. Mathematics & Economics, v. 50, p. 346-356, 2012.

SILVA FILHO, O. C. da; ZIEGELMANN, F. A. ; DUEKER, M. . **Assessing Dependence Between Financial Market Indexes Using Conditional Time-Varying Copulas: Applications to Value at Risk**. Quantitative Finance, 2013a, to appear.

SILVA FILHO, O. C. ; ZIEGELMANN, F. A. . **Assessing some stylized facts about financial market indexes: a Markov Copula Approach.** Journal of Economic Studies, 2013b, to appear

TAAMOUTI, A. Analytical Value-at-Risk and Expected Shortfall under regime-switching. **Finance Research Letters**, Philadelphia, v. 6, n. 3, p. 138-151, set. 2009.