

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE UMA FORMULAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS COM  
RESTRIÇÃO DE TENSÃO

por

Leandro Antônio Thesing

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, julho de 2013



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

ESTUDO DE UMA FORMULAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS COM  
RESTRIÇÃO DE TENSÃO

Por

Leandro Antônio Thesing

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
Prof. Dra. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr Ignacio Iturrioz

Prof. Dr<sup>a</sup> Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Dr Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, julho de 2013

THESING, L. A. **Estudo de uma Formulação de Otimização Topológica de Estruturas com Restrição de Tensão**. 2013. 21p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## **RESUMO**

Este trabalho de conclusão de curso tem por objetivo o estudo de um programa de otimização topológica de estruturas sujeito à restrição da tensão equivalente de von Mises. A otimização topológica consiste basicamente em minimizar ou maximizar uma função objetivo e, ao mesmo tempo, satisfazer algumas restrições impostas. A função objetivo considerada no programa é o volume da estrutura, o qual deseja-se minimizar, sujeito à restrição de tensão. Para isso, alterou-se alguns parâmetros de entrada do programa e analisou-se os resultados daí decorrentes. Os parâmetros modificados são o número de iterações, o valor da norma-p e o raio de filtro. Observou-se que os resultados de programas otimização topológica de estruturas dependem fortemente dos parâmetros de otimização utilizados no algoritmo, devendo, portanto, serem escolhidos com cuidado. Por fim faz-se uma interpretação geométrica do resultado obtido da otimização topológica e simula-se a distribuição de tensões na estrutura frente à carga aplicada. A tensão de von Mises está bem distribuída ao longo da estrutura, indicando que o otimização topológica foi bem sucedida.

**PALAVRAS-CHAVE:** otimização topológica; otimização topológica de estruturas.

THESING, L. A. **Study of a Topology Optimization of Structures Formulation with Stress Constraint**. 2013. 21p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## **ABSTRACT**

This course conclusion work aims to study a program of topology optimization of structures subject to the restriction of the von Mises equivalent stress. The topology optimization basically consists of minimizing or maximizing an objective function and, at the same time, satisfy some restrictions. The objective function considered in the program is the volume of the structure, which is desired to minimize, subject to the restriction tension. For this, some input parameters of the program are changed and the results arising therefrom are analyzed. The modified parameters are the number of iterations, the value of p-norm and the filter radius. It was observed that the results of topology optimization of structures programs rely heavily on optimization parameters used in the algorithm, and therefore should be chosen with care. Finally, we made a geometric interpretation of the result of topology optimization and simulates the distribution of stresses in the structure under the applied load. The von Mises stress is evenly distributed along the structure, indicating that the topology optimization was successful.

**KEYWORDS:** topology optimization; topology optimization of structures.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	2
2.1.	VARIÁVEL DE PROJETO .....	2
2.2.	FUNÇÃO OBJETIVO.....	3
2.3.	RESTRIÇÃO DE TENSÃO .....	3
2.4.	PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQÜENCIAL.....	4
2.5.	LIMITES MÓVEIS.....	5
2.6.	INSTABILIDADE DE TABULEIRO. ....	5
2.7.	DEPENDÊNCIA DE MALHA .....	6
2.8.	FILTROS .....	6
2.9.	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE .....	7
3.	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA .....	7
3.1.	PROBLEMAS PROPOSTOS .....	7
4.	RESULTADOS .....	8
4.1.	NÚMERO DE ITERAÇÕES E CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA .....	8
4.2.	MUDANÇA DE RAIOS.....	9
4.3.	MUDANÇA DA NORMA-p.....	10
4.4.	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS RESULTADOS.....	12
4.5.	TRAÇÃO .....	13
5.	CONCLUSÕES.....	14
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	15
	Apêndice I – Formulação Matemática do Problema de Otimização .....	16

## 1. INTRODUÇÃO

Em nossa vida, social ou particular, estamos constantemente fazendo escolhas. Quando vamos ao supermercado e encontramos produtos similares a disposição temos a opção escolher entre o aquele de menor custo, ou aquele que nos possibilite levar a maior quantidade ou qualidade, por exemplo.

Quando o objetivo é o deslocamento de um ponto a outro no espaço pode-se obter pelo caminho mais curto, pelo caminho que apresenta o menor número de obstáculos, pelo caminho em que o declive máximo não ultrapasse determinado ângulo, etc.

Através dos exemplos mencionados acima, e de muitos outros, percebe-se que são muitas as situações em que o homem está bem busca de um máximo ou mínimo que melhor corresponda à sua necessidade. Está em busca de um ótimo. E é nesse contexto que se encaixa a otimização topológica de estruturas.

A otimização topológica de estruturas teve seu surgimento em 1872 com Maxwell e, mais tarde, a partir de 1904, por Michell, que aplicou o método para o projeto de estruturas com o objetivo de reduzir o volume de material [Silva, 2002]. Com o advento dos computadores e do Método dos Elementos Finitos, a partir dos anos 60 problemas práticos de otimização estrutural passaram a ser estudados, principalmente aplicados à indústria aeronáutica. Novos algoritmos de otimização passaram a ser implementados a partir da década de 70 e, já na década de 80, surgem os primeiros softwares comerciais dedicados à otimização estrutural. No final da década de 80 surge o Método de Otimização Topológica, o qual, segundo [Silva, 2002], é um método genérico e poderoso disponível, representando o conceito de síntese estrutural na sua essência.

Como será detalhado mais adiante, um problema de otimização estrutural tem como meta a minimização ou maximização de um funcional objetivo e, ao mesmo tempo, algumas restrições devem ser satisfeitas.

A otimização topológica consiste num método computacional que permite encontrar a topologia ótima de estruturas segundo um certo critério de custo (por exemplo, máxima rigidez e menor peso). Basicamente, o método de otimização topológica distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a maximizar ou minimizar uma função custo especificada (por exemplo, máxima rigidez e mínimo volume de material). O material em cada ponto do domínio pode variar de vazio (não há presença de material sólido) até maciço (total presença de material) podendo assumir densidades intermediárias (material poroso) de acordo com um modelo de material definido [Silva, 2002].

A distribuição ótima de material é encontrada de forma iterativa através de um algoritmo de otimização, o qual pode considerar, por exemplo, a informação de gradientes (ou derivadas) da função custo e das restrições em relação à quantidade de material em cada elemento. A distribuição de material pode ser representada, como é o caso deste trabalho, pela associação de um valor de densidade a cada elemento (subdomínio), obtido da discretização do domínio inicial. Portanto, a formulação utilizada aqui combina métodos de otimização com o Método dos Elementos Finitos.

No caso deste trabalho, a função objetivo é o volume da estrutura, o qual se deseja minimizar.

As restrições são os limites impostos à solução de otimização, que pode ser o deslocamento máximo, a máxima massa, etc. No caso deste trabalho um critério de falha é a limitação da tensão máxima.

As reduções de peso e aumento de desempenho das peças mecânicas obtidas com o uso de técnicas de otimização são significativas ao ponto de atualmente o seu uso ser decisivo para definir a competitividade das indústrias da área metal-mecânica (autopeças, aeronáutica, naval, etc) dos EUA, Japão e Europa, sendo a sua importância inegável na redução de custos [Silva, 2002].

O objetivo deste trabalho é estudar um programa de otimização topológica de estruturas com restrição de tensão. Para isso são modificados três parâmetros e verificada a sua influência no processo de otimização. Modifica-se o número de iterações, o raio de filtro e a norma-p.

Por fim faz-se uma síntese da estrutura resultante da otimização topológica e utiliza-se um programa para verificar a distribuição da tensão de von Mises.

Utilizou-se o software *Matlab* para a implementação do algoritmo de otimização. Já a verificação da distribuição de tensão de von Mises é feita utilizando-se o módulo *Cosmos* do *SolidWorks*

## 2. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

### 2.1. VARIÁVEL DE PROJETO

As variáveis de projeto consistem nos parâmetros escolhidos para descrever o projeto de um sistema ou estrutura [Arora, 1989], sendo geralmente expressos na forma de um vetor.

Conforme [Silva, 2012], a escolha das variáveis de projeto é essencial para o sucesso do processo de otimização estrutural, na medida em que elas devem representar, da melhor forma possível, o modelo a ser estudado. A fim de diminuir a complexidade da formulação matemática, sempre que possível, deve-se optar pelo menor número possível de variáveis na descrição do problema e que estas sejam independentes entre si.

As variáveis de projeto podem ser de natureza discreta (assumem apenas valores isolados dentro de um conjunto, como por exemplo algumas seções transversais disponíveis comercialmente [Sommer, 2010; Souza, 2009]) ou contínua (as variáveis podem assumir qualquer valor dentro de um conjunto).

Para que o projeto seja admissível, dentro das hipóteses em análise, os valores especificados devem satisfazer todas as restrições impostas ao problema em análise; do contrário o projeto será considerado não admissível. É importante que as variáveis sejam escolhidas de forma que sejam independentes umas em relação às outras, para evitar complicações adicionais ao problema (mau condicionamento) [Arora, 1989].

Os parâmetros escolhidos como variáveis de projeto podem ser as dimensões dos componentes, a configuração estrutural, o volume ou massa do componente, as

propriedades físicas do material, etc. As variáveis de projeto são parâmetros que podem ser alterados na busca pelo ótimo (Canuto, 2012)

Na otimização topológica, a variável de projeto é a existência ou não de material em cada ponto do domínio. Neste trabalho a variável de projeto é uma pseudo-densidade  $\rho_i$  que pode assumir valores entre 0 e 1. O material é considerado linear isotrópico e o problema discretizado em elementos finitos tem a forma

$$E_i = \rho_i E^0 \quad (2.1)$$

$$0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (2.2)$$

onde  $\rho_i$  é a densidade do elemento  $i$ ,  $E_i$  é o módulo de elasticidade do elemento  $i$  e  $E^0$  é o módulo de elasticidade do material base.

Como se trata de um problema originalmente contínuo cujo domínio foi discretizado para obter uma solução, esta solução passa a depender da malha utilizada. Em regra, quanto mais refinada é a malha, melhor é a solução obtida. Mas o custo computacional cresce com o refinamento de malha.

## 2.2. FUNÇÃO OBJETIVO

A função objetivo, também conhecida como função custo, quantifica a variável que se quer otimizar. Ela é função das variáveis de projeto. Pode estar relacionada com questões financeiras, menor consumo de material, deslocamento máximo, carga crítica de flambagem, frequência natural ou até mesmo uma combinação destas.

Conforme [Silva, 2012] o sucesso de problema de otimização depende diretamente da formulação da função objetivo, sendo importante encontrar uma expressão matemática (deslocamento, frequência de ressonância, rigidez) que quantifique corretamente a eficiência do projeto.

Um determinado projeto pode apresentar mais de uma função objetivo. Mas, devido à dificuldade em se trabalhar com múltiplas funções objetivo, escolhe-se a mais importante para ser a função custo e as demais são tratadas como restrições.

Neste trabalho de conclusão de curso o funcional a ser minimizado representa o volume da estrutura, o qual assume a seguinte forma:

$$V = \sum_{i=1}^{Nelem} \rho_i^{\frac{1}{n}} v_i \quad (2.3)$$

onde  $V$  representa o volume total,  $v_i$  é o volume de elemento  $i$ ,  $\rho_i$  a densidade do elemento  $i$  e  $n$  é um expoente de penalização sobre as densidades intermediárias. A penalização tem o intuito de aproximar a solução para uma configuração 0-1 no valor das densidades. Deve-se salientar que a função, que é convexa, passa a ser não-convexa, possibilitando o problema a apresentar mínimos locais.

## 2.3. RESTRIÇÃO DE TENSÃO

As restrições impostas a problemas de otimização podem ser de diferentes naturezas. Pode-se, inclusive, aplicar mais de um tipo de restrição em um mesmo

problema. É importante destacar que o custo computacional aumenta consideravelmente com o número de restrições impostas.

A restrição imposta tem a forma:

$$g(x) = \sqrt[n_p]{\sum_e (\sigma_{vm})^{n_p}} \leq \sigma_{y_{PN}}, \quad (2.4)$$

em que  $n_p$  é o parâmetro da norma-p de tensão,  $e$  é o elemento considerado,  $\sigma_{y_{PN}}$  é a norma da tensão limite (restrição) e  $\sigma_{vm}$  é a tensão de von Mises.

Neste trabalho considera-se a minimização do volume da estrutura, sujeito aos limites de tensão, ou seja, a tensão em cada ponto da estrutura deve ser inferior a um limite admissível. O problema é apresentado da seguinte forma:

$$\text{mínimo } V \quad (2.5)$$

$$\text{sujeito a } \sigma_i \leq \sigma_{admissivel} ; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

As restrições são geralmente classificadas em três tipos: laterais (limites inferiores e superiores para os valores admissíveis), de igualdade (equações de equilíbrio, por exemplo) e de desigualdade (por exemplo, a tensão em cada ponto deve ser inferior a um dado valor admissível).

## 2.4. PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQÜENCIAL

O termo Programação Linear descreve um método em que a função objetivo e as restrições são funções lineares da variável de projeto [Guilherme, 2006]. A programação linear é extremamente eficiente para solucionar problemas com um grande número de variáveis de projeto e restrições.

Como normalmente os problemas de otimização envolvem funções não lineares, a Programação Linear não pode ser aplicada diretamente. Pode-se linearizar estas funções com a aplicação da série de Taylor (toda função contínua pode ser aproximada por polinômios na vizinhança de um dado ponto em termos de suas derivadas utilizando-se expansão por série de Taylor). A expansão da função é truncada após o termo linear.

Tem-se então uma expressão na forma:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla(x - x^*) \quad (2.7)$$

A equação acima possibilita o uso da programação linear e, desta forma, permite a solução de quase todos os problemas de programação não-linear. A resposta para o caso de problemas não-lineares é obtida pela sequência repetitiva da programação linear. Este tipo de procedimento é conhecido como Programação Linear Sequencial.

Neste caso o problema de otimização fica da seguinte forma [Kuckoski, 2009]:

$$\text{minimo } f(x) = f(x^*) + \sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x^*} \quad (2.8)$$

$$\text{sujeito a } g(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x^*} \leq 0 \quad (2.9)$$

$$h(x) = h(x^*) + \sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \quad (2.10)$$

$$a_i^l \leq (x_i - x_i^*) \leq a_i^u \quad (2.11)$$

em que  $N$  é o número de variáveis, neste caso igual ao número de elementos da malha. As duas últimas restrições de desigualdade são conhecidas como limites móveis e são adicionadas artificialmente à formulação original. As equações acima são válidas somente na região próxima à vizinhança do ponto  $x_i^*$  devido ao truncamento da série de Taylor no primeiro termo. Os limites móveis são responsáveis por garantir a validade do truncamento das equações em série de Taylor.

## 2.5. LIMITES MÓVEIS

Os limites móveis são função de uma percentagem aplicada sobre o valor atual das densidades, gerando limites superiores e inferiores para a variação das variáveis de projeto. A expressão mais usada é da seguinte forma (Sant' Anna, 2002):

$$x_i^u = x_i + A|x_i| \quad (\text{limite superior}) \quad (2.12)$$

$$x_i^l = x_i - A|x_i| \quad (\text{limite inferior}) \quad (2.13)$$

em que  $A$  normalmente é um valor constante, embora esta não seja uma boa estratégia pois pode levar a instabilidades no método. Neste trabalho é usado um critério de atualização da variável  $A$  baseado no histórico das iterações, aumentando ou diminuindo o valor de  $A$ .

Os programas de otimização topológica apresentam algumas dificuldades, como a instabilidade de tabuleiro, dependência de malha, filtros de densidade e sensibilidade, as quais o algoritmo implementado deve, de alguma forma, contornar, conforme destaca-se a seguir.

## 2.6. INSTABILIDADE DE TABULEIRO.

A instabilidade de tabuleiro consiste, no resultado final, na alternância entre regiões com material (pretas) e regiões sem material (brancas), formando um padrão semelhante a um tabuleiro de xadrez, como pode ser observado na figura 4.3.

Soluções que apresentem o fenômeno da instabilidade de tabuleiro não são desejadas pois não se configuram numa ótima distribuição de material, mas sim num fenômeno que aparece devido à formulação (funções de interpolação) do elemento finito utilizado no processo de otimização. Elementos finitos de alta ordem (como os quadriláteros de 8 e 9 nós) podem prevenir esse fenômeno, mas são de implementação mais difícil que elementos de quatro nós (usado neste trabalho). Uma das soluções para resolver o problema da instabilidade de tabuleiro consiste em utilizar o método da filtragem das densidades.

O objeto otimizado deve apresentar ou não material no domínio previamente definido. Densidades intermediárias não são desejadas. Assim, densidades intermediárias devem sofrer algum tipo de penalização, forçando a densidade a ser “um” ou “zero” [Guilherme, 2006].

## 2.7. DEPENDÊNCIA DE MALHA

Em otimização topológica nem sempre o refinamento de malha de elementos finitos conduz a melhores resultados. Malhas mais refinadas muitas vezes geram geometrias mais complexas, com mais detalhes, o que dificultaria o processo de manufatura, conforme ilustra a figura seguinte [Silva, 2012]:

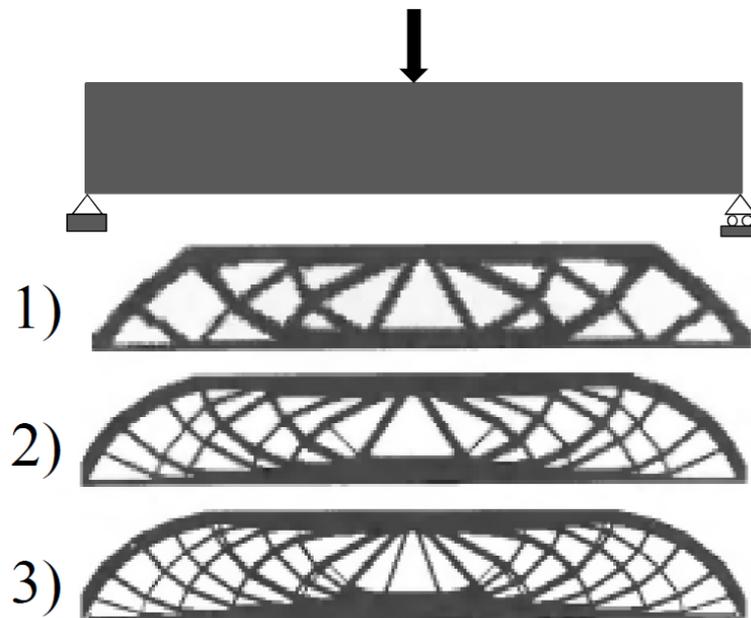


Figura 2.1 Influência do refinamento de malha no resultado final. Número de elementos em cada malha: 1) 2700, 2) 4800 e 3) 17200 elementos. Retirada de [Silva, 2012].

Portanto, o grau de refinamento de malha deve ser escolhido com cautela.

## 2.8. FILTROS

Conforme mencionado anteriormente, os problemas de otimização topológica estão sujeitos a dependência de malha e instabilidade de tabuleiro. Algumas técnicas de filtragem podem ser aplicadas para contornar estes problemas.

Para evitar a dependência de malha nos problemas de otimização topológica, várias técnicas podem ser empregadas, como filtro de sensibilidade, filtro de densidade, métodos de restrição (como o controle de perímetro) etc. Neste trabalho é utilizado o método do filtro de densidade.

No método do filtro de densidade, a densidade de cada elemento é redefinida considerando-se também a densidade na vizinhança do elemento, aplicando-se um peso médio para a densidade dos vizinhos, caracterizando-se um filtro de vizinhança fixa.

Conforme [Cardoso, 2009] a escolha da filtragem pode reduzir consideravelmente a dependência da malha, desde que o filtro leve em consideração a tamanho dos elementos.

## 2.9. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A linearização das funções objetivo e restrição depende da derivada destas funções em relação às variáveis de projeto. Estas derivadas correspondem à sensibilidade das funções a uma variação [Canuto, 2012]. O cálculo da derivada da equação de restrição e da função objetivo em relação à variável de projeto é uma importante ferramenta para os algoritmos de otimização.

Diversos métodos podem ser usados para calcular a sensibilidade, tais como métodos variacionais, diferenças finitas, semi-analíticos e analíticos.

Uma análise mais profunda da otimização topológica de estruturas é feita por [Arora, 2004] e [Haftka e Gürdal, 1992], consideradas bibliografias básicas da área.

## 3. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Este trabalho de conclusão de curso nesta área visa principalmente o entendimento desta área de pesquisa, uma vez que é uma área relativamente nova na engenharia e não abordada no curso de graduação, mas que deverá tomar uma importância cada vez maior na engenharia, pois está relacionada com a diminuição de custos, redução de consumo de material, aumento de competitividade frente aos produtos importados, diminuição no peso de veículos (diminuindo, portanto, o gasto energético e a emissão de poluentes) etc.

O impacto do uso de técnicas de otimização não se limita apenas à otimização do projeto mecânico da peça em si, mas se estende para toda a cadeia produtiva da empresa, pois uma peça com menor peso ou volume, economiza material, possibilita aumentar a produção, facilita o transporte (maior número de peças) etc e, portanto, permite reduzir o custo total final da peça.

Os cálculos realizados, que serão explicitados a seguir, têm por objetivo maior o entendimento do método de otimização topológica de estruturas de forma geral e algumas de suas especificidades relacionadas à implementação computacional.

Os parâmetros modificados são o número de iterações, raio de filtro e a norma-p. O tempo de processamento é diretamente proporcional ao número de iterações e deseja-se mostrar que a partir de um certo número de iterações, dependente de cada caso específico, os resultados não apresentam melhoras significativas, não justificando ir além. O raio de filtro, por sua vez, é um fator multiplicativo que tem por objetivo considerar ou não a densidade dos elementos vizinhos no cálculo da densidade do elemento central. A norma-p é utilizada para reduzir o custo computacional, pois as restrições de tensão não são impostas para cada elemento, mas sim para uma densidade global, representada pela norma-p.

### 3.1. PROBLEMAS PROPOSTOS

São propostos dois problemas, um simulando uma flexão em uma viga e outro simulando uma tração simples de uma barra. Para os dois problemas é usada a mesma malha de 1000 elementos e 1066 nós. As dimensões são: 800mm x 500mm. A carga aplicada é de 15 N +15 N para baixo para a viga e de 15 N + 15 N para a tração, conforme mostra a figura 3.1.

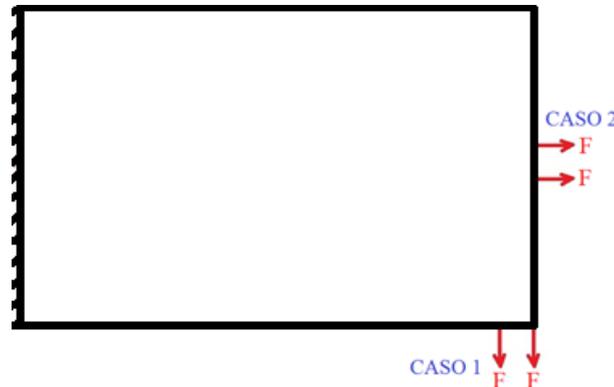


Figura 3.1 Representação dos casos abordados. Caso 1: viga sob flexão; carga nos pontos (780, 0) e (800, 0) de 15 N cada. Caso 2: tração, carga nos pontos (800, 240) e (800, 260). O espaço é dividido em 1000 elementos e 1066 nós. Tamanho: 800mm x 500mm.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. NÚMERO DE ITERAÇÕES E CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

A determinação do número de iterações necessárias e critério de convergência para que a otimização seja considerada satisfatória é de fundamental importância, pois está diretamente ligada ao tempo de processamento. No caso de estruturas complexas o tempo de processamento pode ser de dias e até semanas. Assim, é importante que o projetista tenha uma noção do refinamento adequado e necessário para a malha de elementos finitos, bem como do número de iterações e critério de convergência que poderão conduzir a bons resultados.

Afim de verificar a qualidade do resultado final frente ao número de iterações, abaixo são apresentados três casos (figura 4.1). No caso (a) 11 iterações; caso (b) 50 iterações e caso (c) 100 iterações. Nota-se, como esperado, que na medida em que se aumenta o número de iterações, a estrutura resultante torna-se mais nítida. Percebe-se uma grande mudança do caso (a) para o caso (b). No caso (a) o tempo de processamento foi de aproximadamente 35 minutos. No caso (b) o tempo de processamento foi de aproximadamente 150 min. Utilizou-se um processador Intel Core i3, de 2,4GHz, com 3.0GB de memória RAM.

Por outro lado, percebe-se que entre as figuras (b) e (c) não há diferença muito significativa, apesar do tempo de processamento ser muito maior (em torno de 300 min). Para estes casos o computador chegou a desligar-se automaticamente algumas vezes, provavelmente por aquecimento excessivo.

Em relação à função objetivo, que é o volume mínimo para a estrutura (o que representa menor consumo de material quando o produto vier a ser fabricado), nota-se, da mesma forma, que o maior ganho no resultado ocorre de (a) para (b). De (b) para (c) a redução na função objetivo não é muito significativa.

Estes resultados para esta estrutura simples mostram a importância de se utilizar critérios adequados de convergência e/ou número de iterações. Critérios inadequados podem comprometer a utilidade dos resultados, ou torná-los impraticáveis devido ao tempo de processamento.

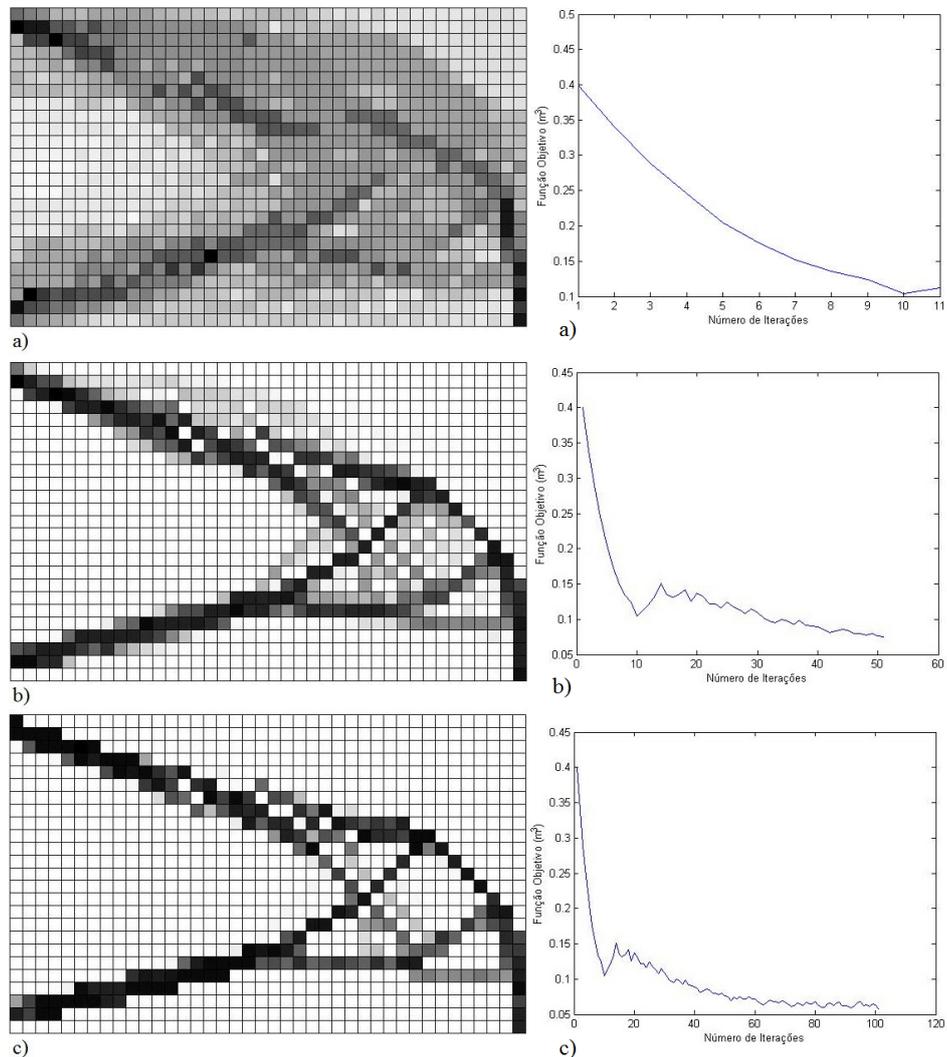


Figura 4.1 Otimização topológica da estrutura para diferentes números de iterações. A primeira coluna mostra a estrutura resultante (área mais escura indica maior densidade) e a segunda coluna os respectivos gráficos da função objetivo (volume da estrutura). Os casos a), b) e c) são de 11, 50 e 100 iterações, respectivamente.

## 4.2. MUDANÇA DE RAIOS

O segundo parâmetro a ser modificado para verificar a sua influência no processo de otimização topológica foi o “raio”, o qual é usado para procurar os elementos vizinhos e, posteriormente, filtrar as densidades. Se o centroide de um determinado elemento estiver dentro deste raio de varredura, esse elemento terá a sua densidade considerada no cálculo da densidade do elemento central. A figura 4.2 apresenta os resultados obtidos.

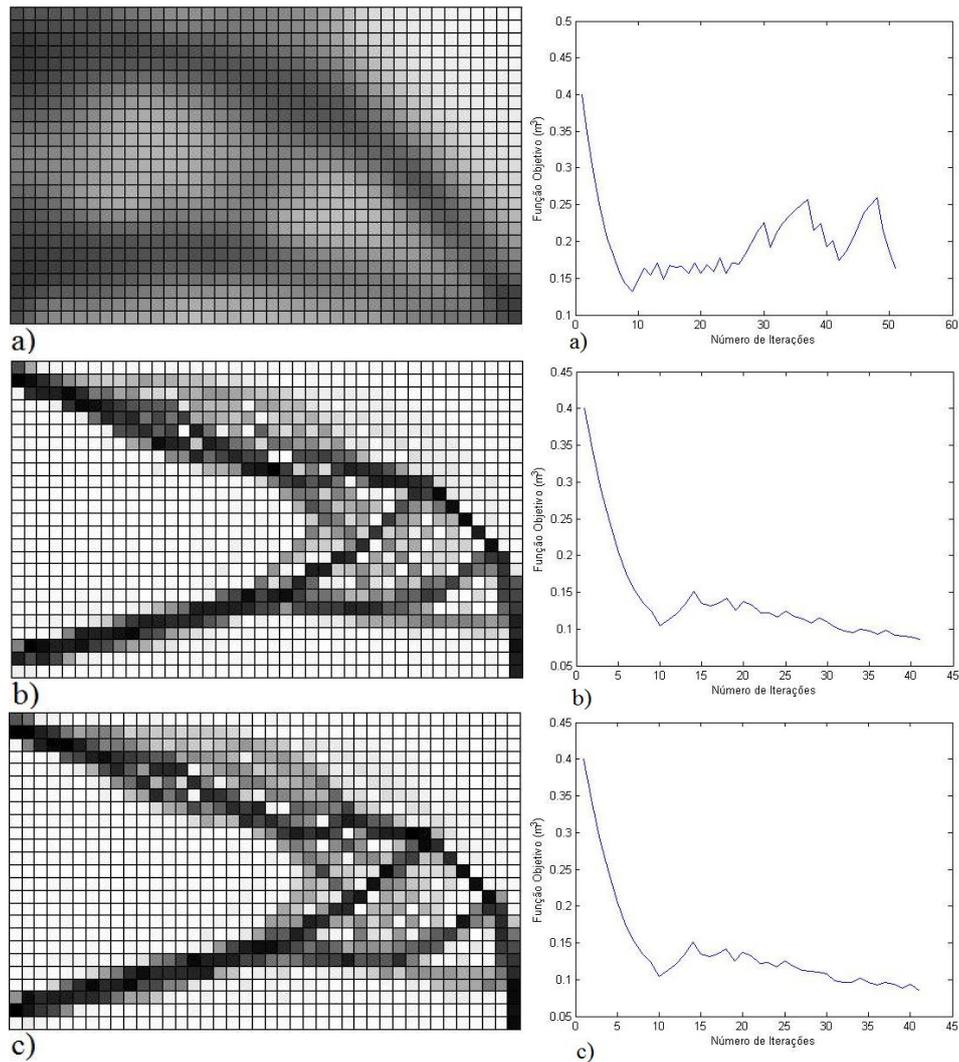


Figura 4.2 Influência do "raio" na otimização e a correspondente função objetivo. a) raio = 2 e 50 iterações; b) raio = 1 e 40 iterações e c) raio = 0,5 e 40 iterações.

No caso (a) da figura 4.2 considera-se raio = 2. Isso significa que os elementos vizinhos estão sendo considerados no cálculo da densidade uns dos outros. Isso explica a figura obtida, onde a densidade varia suavemente ao longo do domínio. Consistiria em uma peça feita de material com densidade variável, ou porosidade variável, ou um compósito cuja composição varia ao longo da peça. Esse resultado geralmente não é desejado em otimização topológica.

Os caso (b) e (c) foram obtidos considerando-se, respectivamente, raio = 1 e raio = 0,5. A estrutura resultante é praticamente a mesma. Esse resultado deve-se ao fato de que a densidade dos vizinhos não está sendo levada em consideração ao calcular-se a densidade do elemento.

### 4.3. MUDANÇA DA NORMA-p

Por fim alterou-se o valor da norma-p  $n_p$  no algoritmo de otimização.

Idealmente o campo de tensões deveria ser limitado em cada ponto do domínio, o que acarretaria um grande número de restrições locais, aumentando o custo

computacional. Como alternativa, substitui-se a restrição de tensão local por uma restrição de tensão integrada que se aproxima da tensão máxima, utilizando-se a norma-p, como mostra a equação 4.1.

$$\sigma_{PN} = \left( \sum_{e=1}^{n_{ntnos}} \sigma_{eq}^{n_p} \right)^{1/n_p} \leq \sigma_{yPN} \quad (4.1)$$

A figura 4.3 apresenta os resultados obtidos para três casos considerados ( $n_p = 4$ ,  $n_p = 8$  e  $n_p = 12$ ). Percebe-se que há uma sensível diferença entre eles, não somente no que concerne à convergência da função objetivo, mas também em relação à disposição do material na estrutura. O autor do algoritmo usado para realizar os cálculos (Silva, 2012) chegou empiricamente a  $n_p = 8$  como sendo o valor da norma-p que apresenta os melhores resultados. Quando o parâmetro da norma de tensão tende ao infinito espera-se que a norma de tensão se aproxime da tensão máxima e não ocorra suavização. Por outro lado, quando ( $n_p \rightarrow 1$ ), há uma suavização excessiva, sendo que  $\sigma_{PN}$  se aproxima da tensão média. Assim, conforme [Silva, 2012], o desempenho do algoritmo de otimização, de forma a satisfazer as restrições de tensão impostas, depende de uma boa escolha para  $n_p$ . Através dos resultados obtidos pode-se inferir que encontrar uma norma-p adequada pode não ser uma tarefa simples.

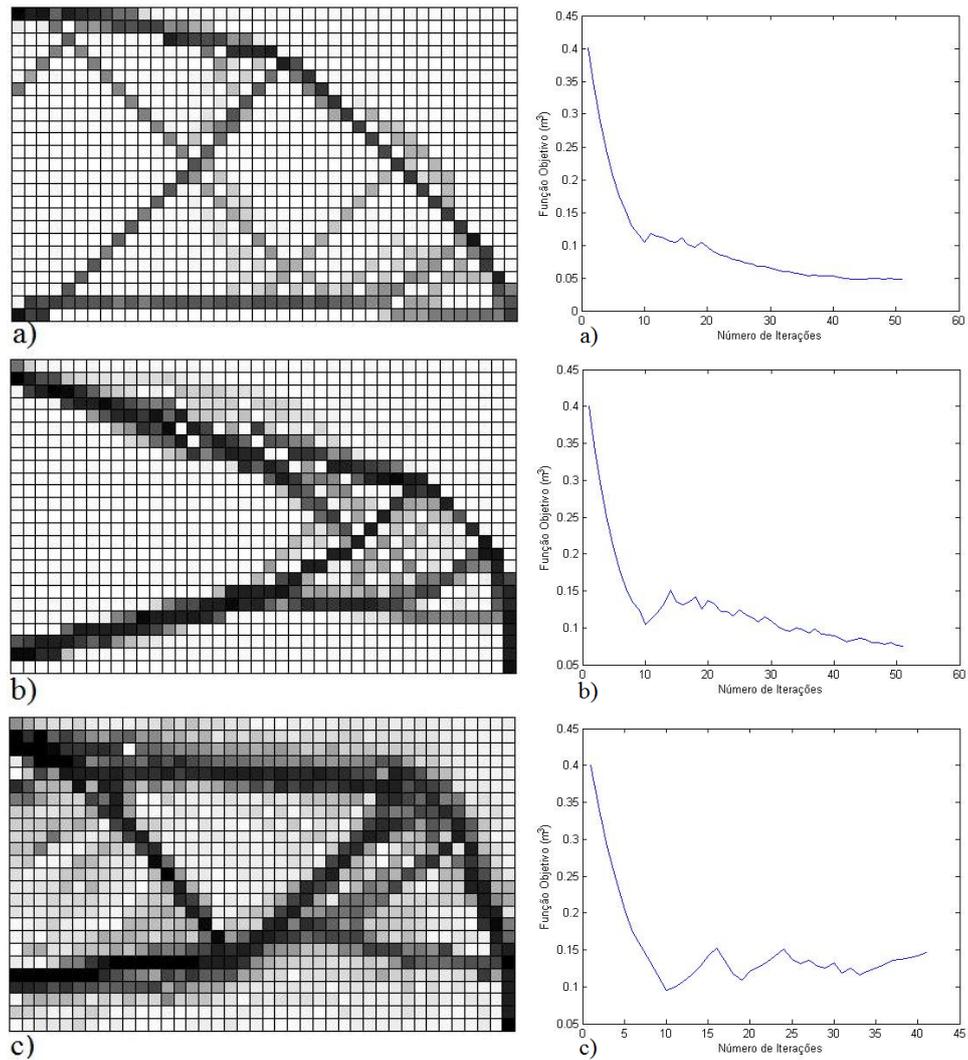


Figura 4.3 Norma-p. a)  $n_p = 4$ , b)  $n_p = 8$  e c)  $n_p = 12$ .

#### 4.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS RESULTADOS

Por último fez uma interpretação geométrica da figura resultante da otimização. Usou-se o módulo *Cosmos* do *SolidWorks* para fazer uma análise estrutural. Conforme pode ser visto na figura a seguir, a estrutura apresenta uma distribuição de tensões relativamente uniforme. Isso significa que o programa de otimização está funcionando adequadamente.

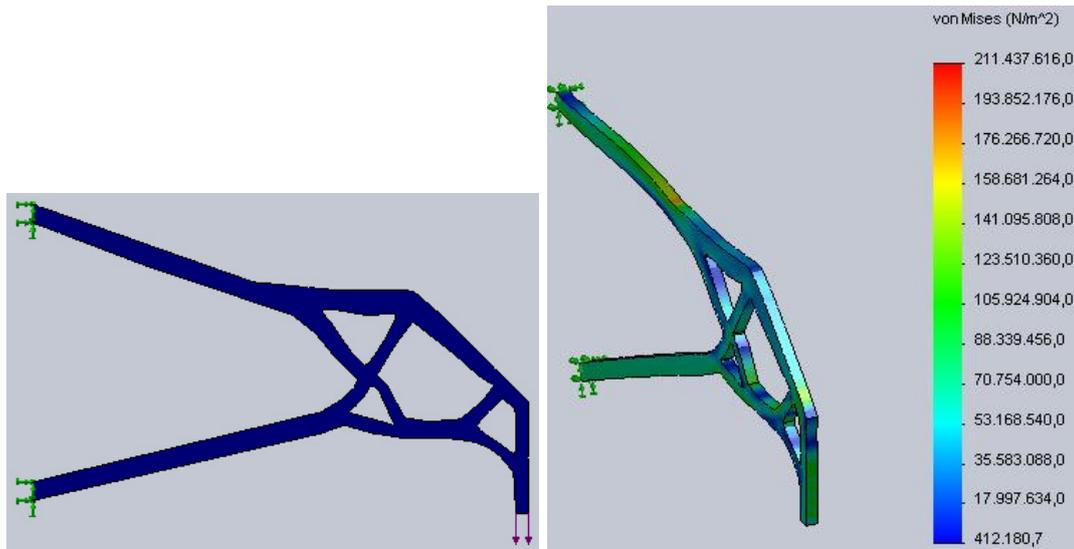
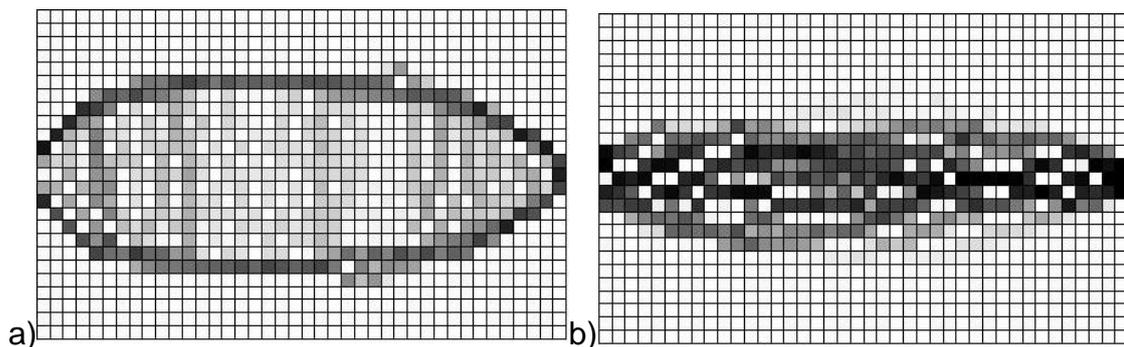


Figura 4.4 Síntese da estrutura resultante da otimização topológica e distribuição da tensão de von Mises.

Pela distribuição da tensão de von Mises, nota-se que esta estrutura ainda pode ser melhorada através da diminuição da seção transversal em algumas regiões e do reforço em outras, de forma a obter uma distribuição de tensão mais homogênea. Isso mostra, também, que a otimização topológica deve estar aliada a outras ferramentas de engenharia, como programas de elementos finitos e experimentação.

#### 4.5 TRAÇÃO

Por último apresenta-se o caso de uma “barra” sob tração. Os parâmetros utilizados são  $n_p = 8$ , raio de filtro = 1. Em a) a carga é de 15N e 50 iterações. Em b), c), e d) aumentou-se a carga de tração para 60N e o número de iterações é de 50, 85 e 140, respectivamente.



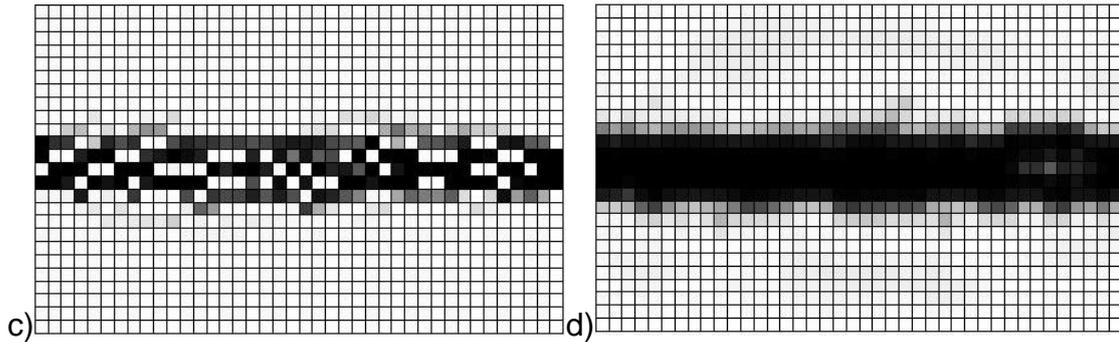


Figura 4.5 Tração. Forças (em N): a) 15N e 50 iterações; b), c) e d) 60N e 50, 85 e 140 iterações, respectivamente.

A figura resultante para o caso de tração é interessante. Para pequenas cargas a estrutura resultante apresenta-se como duas barras paralelas espaçadas de uma certa distância e unidas nas pontas. Observa-se que a quantidade de material diminuiu significativamente em relação à configuração original.

Constata-se também que o formato se modifica quando a carga aplicada tem o seu valor aumentado. No caso da figura 4.3 a carga é quadruplicada de valor de (a) para (b). Conforme a carga aumenta a estrutura resultante tende a uma barra maciça. Na medida em que a otimização prossegue, a estrutura vai convergindo para uma configuração 0-1. É esse tipo de configuração que geralmente é desejado, pois densidades intermediárias significariam uma fabricação com materiais de diferentes propriedades ou materiais com porosidade variável, o que tornaria o produto mais caro e com maiores dificuldades de confecção.

## 5. CONCLUSÕES

Pelos casos abordados nota-se que os resultados de programas otimização topológica de estruturas dependem fortemente dos parâmetros de otimização utilizados no algoritmo, tais como raio de filtro, norma-p e do número de iterações até a convergência. É importante destacar que neste trabalho os parâmetros foram modificados isoladamente uns dos outros. Certamente a alteração de um dos parâmetros influencia o outro, mas esta abordagem não chegou a ser feita.

O critério de convergência deve ser escolhido com um certo cuidado. Critérios muito restritivos têm como contrapartida um alto custo computacional, ao passo que critérios de convergência menos exigentes convergem para a solução em poucas iterações (pouco tempo de processamento, portanto) mas podem apresentar resultados insatisfatórios.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arora, J.S., “**Introduction to Optimum Design**”. McGraw-Hill, 2004.
- Bortoli, D. “**Aperfeiçoamento de um Programa de Otimização Topológica de Estruturas Contínuas Sujeitas a Restrição de Tensão**”. Trabalho de Conclusão de Curso, Engenharia Mecânica, UFRGS, 2011.
- Canuto, M., “**Otimização Topológica de Estruturas Sujeitas a Restrição de Frequência Natural Utilizando Programas Comerciais de CAE**”, Trabalho de Conclusão de Curso, Engenharia Mecânica, UFRGS, 2012.
- Cardoso, E.L. “**Otimização Topológica de Transdutores Piezelétricos Considerando Não-Linearidade Geométrica**”. Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, 2005.
- Guilherme, C.E.M. “**Otimização Topológica e Cálculo de Gradiente de Forma para Estruturas Submetidas à Restrição de Fadiga**”. Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, 2006.
- Haftka, R.; Gürdal, Z. “**Elements of Structural Optimization**”. Kluwer Academics Publishers, 1991.
- Kuckoski, A. “**Otimização Topológica de Estruturas com Restrição de Critério de Falha**”. Trabalho de Conclusão de Curso, Engenharia Mecânica, UFRGS, 2009.
- Le, C., Norato, J., Bruns, T., Há, C. e Tortorelli, D., “**Stress-based Topology Optimization for Continua**”. Struct Multidisc Optim. 41:605-620, 2010.
- Sant’Anna, H.M. “**Otimização Topológica de Estruturas Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**”. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2002
- Silva, E. “**Uma Formulação de Otimização Topológica com Restrição de Tensão Suavizada**”. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2012.
- Silva, E. C. N. “**Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas**”. Escola Politécnica da USP. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>. Acesso em: 01/06/13
- Sommer, R.C. “**Otimização de Estruturas por Algoritmos Genéticos Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Flambagem**”. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2010.
- Souza, R. P. “**Otimização de Treliças com Restrição de Falha Combinando Técnicas de Programação de Algoritmos Contínuos e Discretos**”. Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2009.

## Apêndice I – Formulação Matemática do Problema de Otimização

Um problema de otimização topológica tem a seguinte formulação matemática:

$$\text{minimo } V = \sum_i \rho_i^{n_p} v_i \quad (\text{A.1})$$

onde A função objetivo é o volume  $V$ , que é uma função direta da variável de projeto  $\rho$ , sujeito a restrição da tensão de von Mises modificada pela norma-p ( $n_p$ ):

$$g(x) = \sqrt[n_p]{\sum_e (\sigma_{vm})^{n_p}} \leq \sigma_{y_{PN}}, \quad (\text{A.2})$$

em que  $n_p$  é o parâmetro da norma-p de tensão,  $e$  é o elemento,  $\sigma_{y_{PN}}$  é a norma da tensão limite (restrição) e  $\sigma_{vm}$  é a tensão de von Mises, que é dada por:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^T \mathbf{f} \quad (\text{A.5})$$

### Cálculo das Sensibilidades:

Aplicando-se a regra da cadeia para derivar a equação (A.2) tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{1}{n_p} \left( \sum_e (\sigma_{vm})^{n_p} \right)^{\frac{1}{n_p}-1} \left\{ \sum_e n_p (\sigma_{vm})^{n_p-1} \frac{\partial \sigma_{vm}}{\partial \rho} \right\}, \quad (\text{A.6})$$

a qual representa a sensibilidade da restrição.

A sensibilidade da função objetivo é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \sum_i \rho_i^{n_p} \frac{\partial v_i}{\partial \rho} + \sum_i \left( n_p \rho_i^{n_p-1} \right) v_i \quad (\text{A.7})$$