

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO  
DO MECANISMO DE UMA TECLA DE PIANO

por

Luciano de Carvalho Paludo

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Julho de 2013

**SIMULAÇÃO DO MECANISMO DE UMA TECLA DE PIANO**

por

Luciano de Carvalho Paludo

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof.  
Coordenador

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de Avaliação:

Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Edson Hikaro Aseka

Prof. Juan Pablo Raggio Quintas

Porto Alegre, 08 de julho de 2013.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho marca o fim da minha graduação em engenharia Mecânica na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Foram no total 7 anos de aulas, provas, trabalhos, os quais combinados muitas vezes levaram a situações bastante estressantes me fazendo pensar “-Ah, porque engenharia?”. Felizmente no caminho encontrei muitos amigos que tornaram esse caminho mais leve. Esses círculos de amizades tiveram 3 fases distintas, as quais vou ter que citar para que os agradecimentos não se tornem só uma lista corrida de nomes sem sentido.

Então, começando lá em 2006/2: meu grande amigo de discussões e pensamentos “além-aula” Lúcio de Abreu Corrêa, o grande Tiago Filipi Longhi, parceiro de piadas e cantorias, o não dimensionalmente avantajado mas ainda assim também grande Daniel Siwik, grande bebedor de cervejas, isso para não citar outros como Pedro Ponte, Francisco Bandeira e Adriel Justen. Todos esses foram parceiros de trote e de susto inicial de “opa, e não é que na UFRGS não é fácil mesmo?”. Além desses a turma da Biologia que tive o prazer de encontrar: Tomaz Melo, Márcia Pinheiro, Mayara Pasquetti, Leandro Lima, Mariana Giozza, Leonardo Leipnitz e muitos outros que não posso citar por motivo de espaço. A todos esses muito obrigado pela convivência.

Bom, seguindo temos os amigos conhecidos na França, durante o período do duplo-diploma. Nesses tenho que reconhecer a principal felicidade encontrada, minha namorada Gaëlle Gosselin, sem a qual esse trabalho não teria sido possível, amigos da Ecole Centrale Paris, Jérémy Guermonprez, Eliott Monnet, Jonathan Motura, Roman Deciron, grandes músicos e filósofos e o grande Cássio Boone, que foi meu irmão durante todo esse período de “expatriado”, parceiro de viagens pela Europa (22 países?). Agradeço também aos meus colegas durante o estágio na Dassault Systèmes, David Bonner, Thierry Rouf e Frédéric Poignant que me ajudaram muito e fizeram da experiência “*chez DS*” algo memorável.

Voltando ao Brasil 2 anos e 8 meses depois, após ter perdido a formatura de boa parte da minha primeira leva de amigos da UFRGS encontrei uma nova turma. Esses que me acompanharam e suportaram durante esse último um ano e meio merecem um grande agradecimento, vamos lá então: “Henrique Böckmann Alves, Guilherme Fraga, Maurício Lazzari, Christian Wartchow, Herberth Fröhlich e Tomás Paganin, muito obrigado pela companhia e amizade de vocês.”

Na sequência agradeço a todos que fizeram parte dos alicerces da minha formação. Aí estão meu pai, Lucindo Angelo Paludo, e minha mãe, Madalena de Carvalho Paludo, que sempre apoiaram seu filho “um pouco estranho” que perguntava demais e a minha irmã Letícia de Carvalho Paludo que me suportou com louvor e me ajudou com traduções e revisões de gramática. Agradeço muitíssimo a minha professora de piano Iró Beltrami por ter me guiado ainda criança pelo mundo da música, peça chave para a escolha do tema deste trabalho hoje. Falando mais especificamente deste trabalho agradeço aos afinadores e técnicos Person e Bichels e ao pianista Ney Fiakow pelo suporte durante sua elaboração.

PALUDO, L.C. **Simulação do mecanismo de uma tecla de piano**. 2013. 15 páginas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## RESUMO

Nesse trabalho propôs-se a implementação do modelo multicorpos proposto por Hirschhorn, 2004, para o mecanismo de uma tecla de piano. A implementação foi feita utilizando-se o programa *MATLAB*, junto à interface *Simulink*, e foi validada comparando-a com resultados experimentais, tendo apresentado boa concordância. Na sequência, dentro do modelo, no *Simulink*, foi avaliada a influência da massa do martelo, do momento de inércia do martelo e da distância entre a corda e a posição inicial do martelo na interação entre o martelo e a corda (força e tempo de contato). Notou-se uma variação do tempo de contato de 7 a 29% e da força de contato de 1 a 48%.

**PALAVRAS-CHAVE:** Simulação multicorpos, *SimMechanics*, mecanismo de uma tecla de piano, estudo dinâmico, simulação de contato entre feltros

PALUDO, L.C. **Piano action simulation**. 2013. 15 pages. Monography (Final paper in Mechanical Engineering) – Mechanical Engineering Department, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

## ABSTRACT

This work intended to build a computational model for a piano action mechanism based on Hirschhorn's work, 2004. It was implemented in *MATLAB*, using *Simulink* and the model presented good agreement with literature experimental data. The model then served to analyze contact time and contact force of the hammer-string interaction. Hammer mass, inertia and hammer-string distance were explored as influencing factors. These parameters had an influence over the contact time from 7 to 29% and over the contact force from 1 to 48%.

**KEYWORDS:** Multibody simulation, *SimMechanics*, piano action mechanism, dynamic study, felts contact simulation

## INDICE

1.	Introdução .....	1
2.	Objetivos .....	1
3.	Revisão bibliográfica .....	1
4.	Fundamentos .....	2
4.1.	Partes do mecanismo .....	2
4.2.	Cinemática do mecanismo.....	3
4.2.1.	Repouso .....	4
4.2.2.	Aceleração .....	4
4.2.3.	Relaxamento .....	4
4.2.4.	Chegada.....	4
4.3.	Força aplicada à tecla.....	4
4.4.	Contatos .....	5
4.4.1.	Força normal entre feltros.....	5
4.4.2.	Modelo de Coulomb para as forças de atrito .....	5
4.5.	Equações de dinâmica e cinemática dos corpos .....	6
5.	Metodologia .....	6
5.1.	Modelo e escolha de implementação.....	6
5.2.	Implementação do modelo.....	7
5.2.1.	Representação das superfícies de contato .....	7
5.2.2.	Pontos de contato.....	8
5.2.3.	Contato.....	8
5.2.4.	Rótulas .....	10
5.2.5.	Força de acionamento .....	10
5.2.6.	Posição de equilíbrio .....	10
5.3.	Escolha dos parâmetros para a análise dos fatores de influência.....	10
6.	Resultados e discussão .....	11
6.1.	Validação do modelo .....	11
6.2.	Análise dos fatores de influência .....	13
6.2.1.	Distância entre o martelo e a corda .....	13
6.2.2.	Massa do Martelo .....	14
6.2.3.	Momento de Inércia do Martelo .....	14
7.	Conclusão .....	15
8.	Referências bibliográficas .....	15

## LISTA DE SÍMBOLOS

Variável	Descrição	Unidade
$A$	Constante	-
$a$	Coefficiente do grau 3 do polinômio	-
$a_c$	Aceleração do centro de massa do corpo	m/s <sup>2</sup>
$b$	Coefficiente do grau 2 do polinômio	-
$B_i$	Constante, $i=\{1,2\}$	-
$c$	Coefficiente do grau 1 do polinômio	-
$D$	Constante de correção	s/m
$D_{limite}$	Distância limite	m
$D_{p-p}$	Distância entre dois pontos	m
$D_{p-r}$	Distância entre um ponto e uma reta	m
$\vec{d}_{reta}$	Vetor diretor da reta	-
$F$	Força aplicada ao corpo	N
$f_n$	Força normal	N
$f_t$	Força tangencial	N
$I$	Momento de inércia de massa do corpo	kg.m <sup>2</sup>
$m$	Massa do corpo	kg
$R_i$	Distância do centro ao ponto de interesse $i=\{1,2\}$	M
$T$	Torque aplicado ao corpo	N.m
$P_{ponto,i}$	Posição do ponto $i=\{1,2\}$	m
$v_{rt21}$	Velocidade relativa tangencial do ponto 2 com relação ao ponto 1	m/s
$v_t$	Velocidade de transição	m/s ou °/s
$v_{tan,i}$	Velocidade tangencial do ponto $i=\{1,2\}$	m/s
$\omega_i$	Velocidade angular do ponto $i=\{1,2\}$	rad/s
$x$	Penetração	m
$\alpha$	Aceleração angular	rad/s <sup>2</sup>
$\mu$	Coefficiente de atrito	-
$\theta_i$	Ângulo da peça $i$ no referencial de origem da peça	°

Subscrito	Descrição
$h$	Martelo ( <i>Hammer</i> )
$j$	Escapamento ( <i>Jack</i> )
$k$	Tecla ( <i>Key</i> )
$r$	Alavanca de repetição ( <i>Repetition lever</i> )
$w$	Corpo ( <i>Whippen</i> )

## 1. INTRODUÇÃO

Desde suas origens, por volta de 1700, o piano teve diversas evoluções até chegar ao instrumento atual. Essas evoluções foram em sua maior parte empíricas, sem um entendimento claro de qual a influência de cada fator no projeto do instrumento. Em termos práticos um piano é julgado por dois fatores: o som produzido (volume, clareza e timbre) e a finesse do controle permitido durante o acionamento de uma tecla. Essa segunda diz respeito à percepção háptica do pianista, relativa ao toque, e afeta diretamente a performance do artista. O mecanismo de uma tecla de piano, também chamado de mecanismo de ação, é o responsável pela sensação háptica do piano e é o objeto de estudo desse trabalho. Em termos de análise de engenharia, o mecanismo pode ser simplificado como um problema multicorpos 2D, onde os corpos são tratados como indeformáveis. Uma particularidade fundamental desse problema é que os contatos entre os corpos acontecem em extremidades cobertas por feltros, os quais apresentam histerese quando submetidos a ciclos de carregamento.

Esse assunto interessa ao mercado de instrumentos musicais, dado que, em um mundo onde a praticidade dita as tendências, os pianos tradicionais têm perdido espaço para os compactos e leves “pianos digitais”. Contudo, a sensação háptica dos pianos digitais ainda não é realista, e assim, em um primeiro momento, se fazem necessários estudos sobre o comportamento do mecanismo, para só então partir-se em busca de mecanismos de substituição que emulem satisfatoriamente este fenômeno e que possam ser utilizados nos pianos digitais [Lozada et al, 2007].

Buscando construir uma ferramenta para o desenvolvimento e aprimoramento do mecanismo de ação, esse trabalho implementou o modelo teórico desenvolvido por Hirschhorn, 2004. Todos os corpos foram considerados rígidos, inclusive a corda. Estudou-se a possibilidade de considerar a vibração da corda, porém, devido à complexidade deste contato, tornou-se necessário a simplificação da corda como corpo rígido. O modelo foi validado comparando-o com resultados experimentais, e os resultados obtidos tiveram erro médio de 5%. Após, foram analisadas como mudanças na concepção do mecanismo afetariam a interação do mesmo com a corda, e obtiveram-se variações de 1 a 48% na força de atuação e de 7 a 29% no tempo de contato.

## 2. OBJETIVOS

Esse trabalho tem dois objetivos distintos: implementar um modelo multicorpos para simular a dinâmica do mecanismo de ação de uma tecla de piano e, posteriormente, utilizando a implementação feita, verificar a influência de alguns fatores mássicos e geométricos na interação do mecanismo com a corda. Essa segunda meta busca criar um conhecimento que pode vir a ser útil na concepção e ajuste do mecanismo.

## 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Topper e Wills, 1987, propuseram um modelo do mecanismo de ação do piano, constituído por dois corpos rígidos (tecla e martelo) conectados através de uma mola representando o resto do mecanismo (*Bouncing Ball*). Os parâmetros utilizados para a simulação foram obtidos experimentalmente e os resultados foram considerados satisfatórios dada a simplicidade do modelo.

Gillespie, 1994, concebeu um sistema capaz de simular a força de reação do mecanismo de uma tecla de piano em um piano digital (sintetizador). Com o auxílio de um sistema de controle realimentado, um motor ligado à tecla reproduziu as forças de reação obtidas pelo modelo de Topper e Wills, 1987, de acordo com a posição e velocidade da tecla. Foram efetuados testes com pianistas comparando-se o sistema real ao sistema simulado. Nos momentos de transição da força de resposta, os quais correspondem no sistema real a mudanças nas condições de contorno cinemáticas, os resultados foram discrepantes. Os resultados se tornaram satisfatórios após calibração.

Em 1996, Gillespie apresentou sua tese de doutorado sobre o mesmo tema. Foram estudados os métodos de modelagem já utilizados e uma nova proposta foi apresentada. Nesse trabalho, a histerese existente nos contatos foi considerada e os resultados obtidos foram satisfatórios mesmo sem calibração.

Hirschhorn, 2004, estudou o mecanismo do sistema de ação de um piano. Ele utilizou o programa *DynaFlex PRO* (Maplesoft) para obter um sistema de equações diferenciais que representa o mecanismo. Em paralelo foram feitos uma série de experimentos para obter as propriedades de contato e atrito do mecanismo. Em seguida, o sistema de equações foi alimentado com os parâmetros encontrados nos experimentos e resolvido no programa *MATLAB*. O modelo criado preservou o significado físico dos parâmetros de calibração no intuito de poder ser utilizado como ferramenta de projeto para um novo mecanismo.

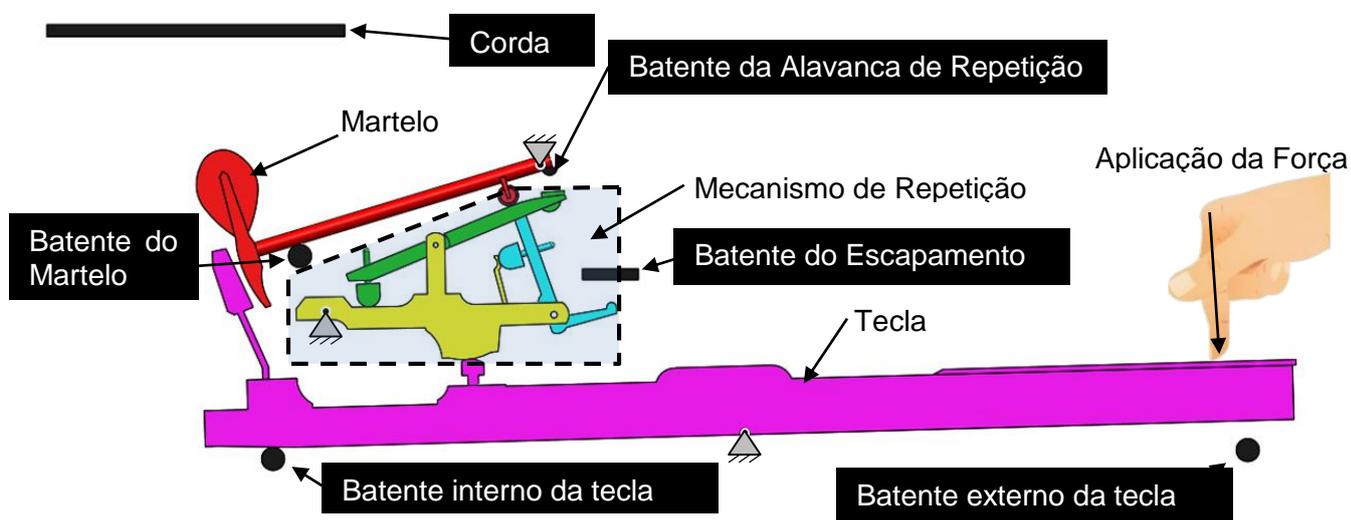
## 4. FUNDAMENTOS

### 4.1. Partes do mecanismo

Ao contrário de outros instrumentistas, tais como o violonista ou guitarrista, o pianista só possui um controle indireto sobre a excitação da corda. Entre a ação dele sobre a tecla e a vibração da corda, existe um sistema de peças mecânicas em interação que servem como *interface*, criando a sensação de “toque” do piano [Askenfelt e Jansson, 1990].

Existem dois modelos distintos de mecanismo para a tecla de piano, um para piano vertical e outro para piano horizontal. Dentro de cada modelo as mudanças entre um piano e outro são sutis, restringindo-se à pequenas variações de massa e geometria na concepção das partes individuais. Essas variações buscam alinhar a sensação de toque ao timbre e volume desejado para cada uma das notas, os quais são em grande parte função das características do impacto do martelo com a corda [Askenfelt e Jansson, 1990].

O mecanismo completo, junto aos apoios e batentes do referencial fixo (em preto) pode ser visto na Figura 4.1.

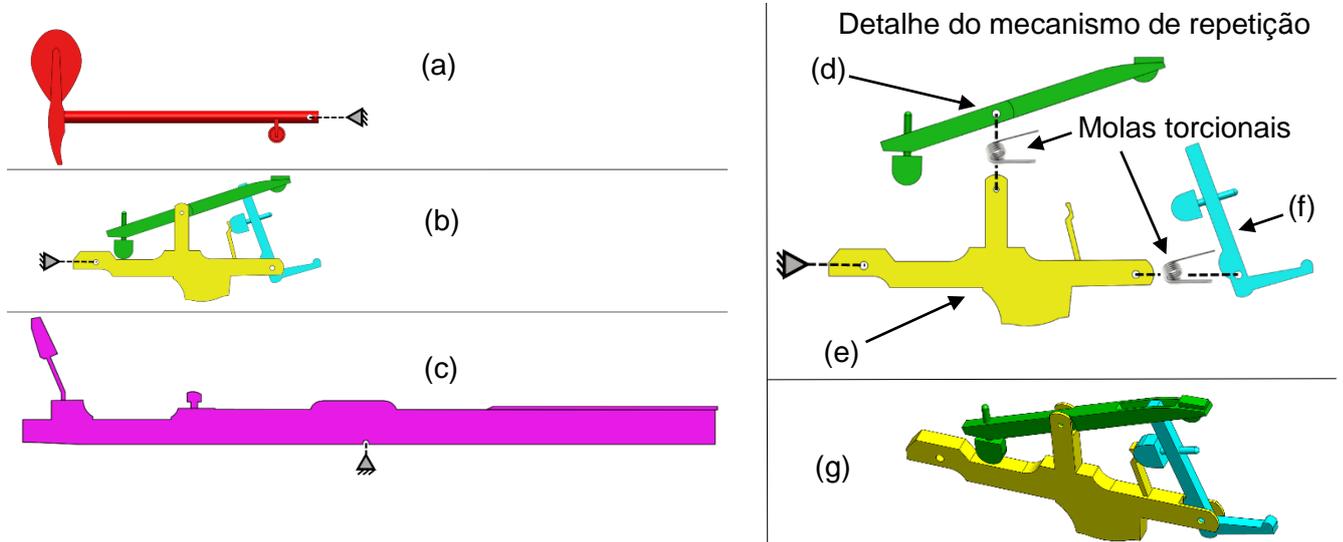


**Figura 4.1 - Mecanismo da tecla de piano completo.**

O mecanismo da tecla de piano é composto por 5 corpos móveis e diversos pontos fixos, que servem como batentes e pontos de rótula. Pode-se dividir o mecanismo em 3 partes principais: martelo, mecanismo de repetição e tecla, todas rotuladas em um referencial fixo, como visto na Figura 4.1 e na Figura 4.2 de (a) a (c).

Por sua vez, o mecanismo de repetição pode ser dividido em 3 partes: o corpo, o escapamento e a alavanca de repetição, sendo o corpo o único dos 3 componentes rotulado em relação ao referencial fixo como pode ser visto na Figura 4.2 de (d) a (f). O escapamento e a

alavanca de repetição estão rotulados em relação ao corpo. Molas torcionais atuam sobre as ligações do mecanismo de repetição aproximando as 3 partes, como pode ser visto na divisão “Detalhe do mecanismo de repetição” da Figura 4.2, e mantendo o corpo junto na sua posição inicial, Figura 4.2 (g). Deve-se perceber que o mecanismo de repetição tem peças que agem em diferentes planos, como visto na Figura 4.2 (g).

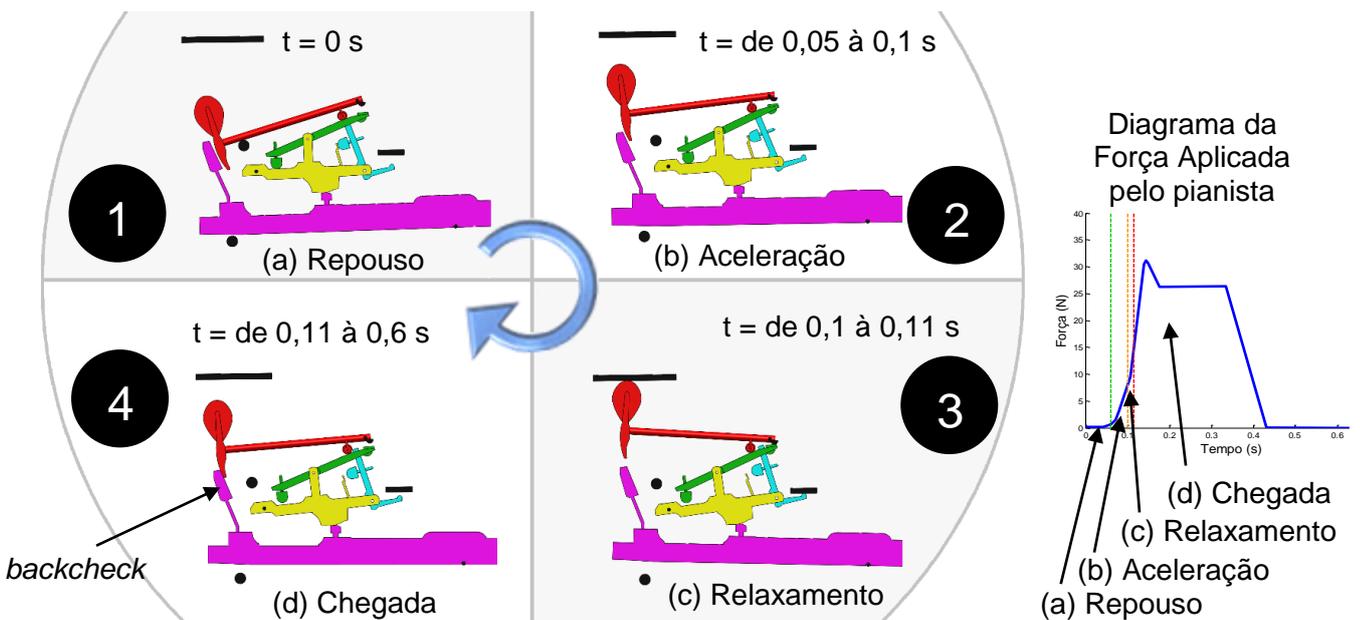


**Figura 4.2 - Esquema das ligações entre peças: (a) martelo, (b) mecanismo de repetição, (c) tecla, (d) alavanca de repetição, (e) corpo, (f) escapamento, (g) imagem 3D do mecanismo de repetição.**

Além destes, existe também um mecanismo paralelo, acionado pela extremidade interna da tecla, que faz com que a corda pare de vibrar após o fim do ciclo de acionamento, o contra-abafador. Este mecanismo paralelo não será considerado neste trabalho devido à pequena influência no comportamento dinâmico do sistema.

4.2. Cinemática do mecanismo

Segundo Askenfelt e Jansson, 1990, durante o funcionamento o mecanismo passa por 4 fases, como mostra a Figura 4.3 de (a) a (d).



**Figura 4.3 - Fases do funcionamento do mecanismo [Askenfelt e Jansson, 1990]**

#### 4.2.1. Repouso

O martelo repousa sobre um feltro que está fixado ao piano. O resto do mecanismo fica com o seu peso apoiado sobre a junta rotacional da tecla. Neste momento a tecla não encosta em nenhum dos batentes (Figura 4.3-a). Deve-se perceber que a tecla representa 80% da massa do sistema e que seu centro de massa está à direita da sua rótula.

#### 4.2.2. Aceleração

Quando o pianista pressiona a tecla, o mecanismo de repetição e o martelo são empurrados para cima como se fossem um único corpo. O contato do martelo com o mecanismo de repetição se dá pela parte superior do escapamento (Figura 4.3-b).

#### 4.2.3. Relaxamento

A ponta inferior direita do escapamento colide com o seu batente, fazendo com que o escapamento gire no sentido horário e perca o contato com o martelo. Quase simultaneamente a alavanca de repetição encontra o seu batente na ponta superior direita. O martelo continua sua ascensão até entrar em contato com corda. A tecla encontra o seu batente externo (fundo da tecla). Esta fase pode ser vista na Figura 4.3-c.

Dado que o martelo é lançado do mecanismo de repetição, a chegada da tecla ao batente externo e o contato com a corda podem ou não ocorrer simultaneamente, dependendo da força empregada. Askenfelt e Jansson, 1990, mostraram que para um piano bem regulado os dois acontecem em simultâneo quando se aplica um toque de nuance *mezzo forte*. Assim, o contato com a corda será adiantado com relação à chegada da tecla ao final do curso para toques mais fortes (*forte*, *fortíssimo*) e atrasado para nuances mais fracas (*mezzo piano*, *piano*, *pianíssimo*).

#### 4.2.4. Chegada

Após o contato com a corda, o martelo realiza seu movimento descendente e é desacelerado pela alavanca de repetição, graças à mola torsional presente na rótula da mesma. Em seguida, a parte traseira da cabeça do martelo é travada pela haste vertical localizada na parte esquerda da tecla (*backcheck*). Quando o pianista deixa de pressionar a tecla, esta sofre uma rotação no sentido anti-horário até entrar em contato com o batente interno. Na sequência, o martelo termina seu movimento descendente e o seu peso é transferido da tecla para o seu batente, fixo ao piano. Assim o sistema retorna a sua posição inicial (Figura 4.3-d).

### 4.3. Força aplicada à tecla

Hirschhorn, 2004, mediu experimentalmente alguns perfis de força feitos pelo pianista quando este pressiona uma tecla. No modelo implementado, foi usado o perfil referente à nuance de toque *forte*, o qual está representado na Figura 4.4.

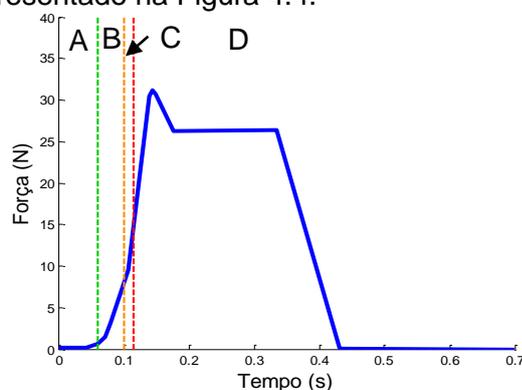


Figura 4.4 - Perfil de força do tipo *forte* aplicado à tecla

Para melhor entendimento, pode-se fazer um paralelo entre o perfil de força e a cinemática do mecanismo (Seção 4.2). Na zona de tempo A, a tecla continua em repouso devido à inércia do sistema. Dentro da zona B, tem-se a fase de aceleração e em seguida o relaxamento em C, quando o martelo é lançado contra a corda. Em D, ocorre a fase de chegada onde tem-se o pico de força no momento em que a tecla encontra o batente externo. A reação do batente externo equilibra as forças, gerando a zona de força estável. Dentro dessa zona, acontece a colisão entre o martelo e a haste vertical na extremidade esquerda da tecla, parando o mecanismo até o momento em que a força é liberada e volta-se à situação inicial [Hirsch Korn, 2004].

#### 4.4. Contatos

##### 4.4.1. Força normal entre feltros

Deve-se destacar que todos os contatos do mecanismo têm pelo menos uma das partes forradas por feltro, o qual possibilita um amortecimento da colisão e baixo ruído. Foi mostrado por Masoudi et al., 2011, que em tais estruturas, formadas por um conjunto de fibras, a diferença do perfil dos ciclos de compressão e decompressão provoca um comportamento histerético, dissipando energia. É interessante perceber que o perfil de carga tem o mesmo comportamento, independentemente da velocidade de compressão. A Figura 4.5 mostra a resposta do feltro em função da penetração.

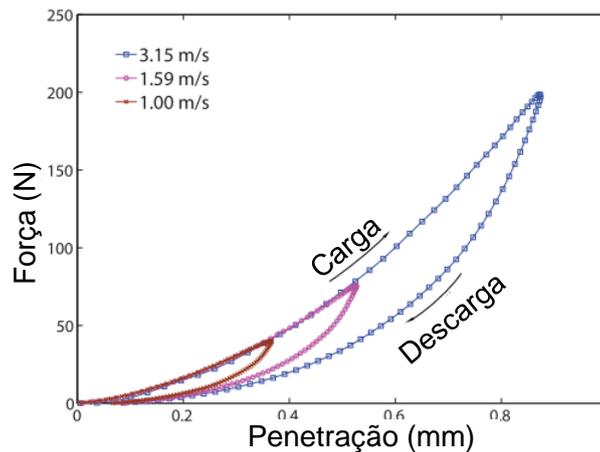


Figura 4.5 - Comportamento do feltro em ciclos de compressão e decompressão

[Adaptado de Masoudi et al., 2011]

##### 4.4.2. Modelo de Coulomb para as forças de atrito

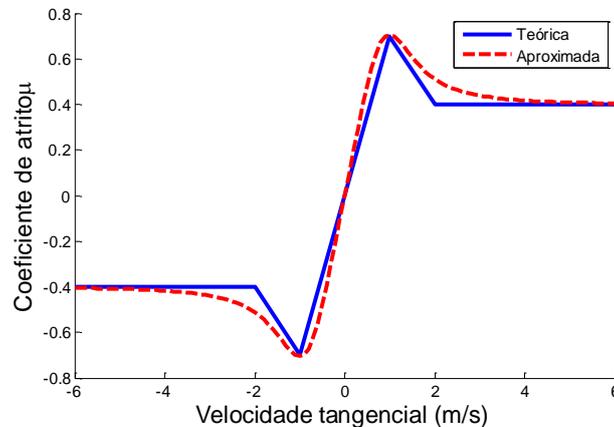
A lei de Coulomb diz que a força de atrito,  $f_t$ , no contato entre dois corpos é proporcional ao coeficiente de atrito,  $\mu$ , multiplicado pela força normal do contato,  $f_n$  (Equação 4.1):

$$f_t = \mu f_n \quad (4.1)$$

O coeficiente de atrito,  $\mu$ , pode ser considerado função da velocidade relativa entre os corpos e pode ser aproximado pela função contínua (Equação 4.2):

$$\mu = A \left[ \tanh\left(\frac{v_r}{v_t}\right) + \frac{B_1 \left(\frac{v_r}{v_t}\right)}{1 + B_2 \left(\frac{v_r}{v_t}\right)^4} \right] \quad (4.2)$$

Onde  $A$  é o coeficiente de atrito cinético e as constantes  $B_1$  e  $B_2$  são ajustadas para ter o valor de atrito estático (pico) em uma velocidade  $v_t$  ( $t$  de transição). A Figura 4.6 mostra uma comparação da curva aproximada pela equação 4.2 e a curva teórica idealizada.



**Figura 4.6 - Curvas teórica e aproximada da variação do coeficiente de atrito com a velocidade**

#### 4.5. Equações de dinâmica e cinemática dos corpos

Segundo a mecânica Newtoniana o movimento de corpos rígidos pode ser definido através da resolução das seguintes equações [Hibbeler, 2005] (Equação 4.3 e 4.4).

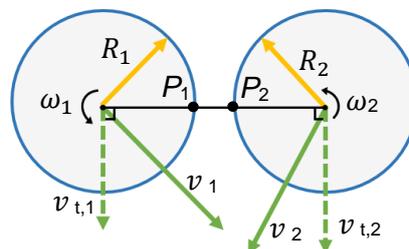
$$\sum F = m \cdot a_c \quad (4.3)$$

$$\sum T = I \cdot \alpha \quad (4.4)$$

Para o cálculo do coeficiente de atrito (Equação 4.2) é necessário obter a velocidade relativa tangencial no ponto de contato. Segundo Hibbeler, 2005, a velocidade relativa tangencial do ponto 2 ( $P_2$ ) com relação ao ponto 1 ( $P_1$ ) é (Equação 4.5):

$$v_{rt21} = (v_{t,2} + R_2 \cdot \omega_2) - (v_{t,1} - R_1 \cdot \omega_1) \quad (4.5)$$

Com as variáveis utilizadas como mostrado na Figura 4.7.



**Figura 4.7 - Variáveis utilizadas para o cálculo da velocidade relativa entre dois pontos**

## 5. METODOLOGIA

### 5.1. Modelo e escolha de implementação

Em síntese, o problema de simulação do mecanismo de ação de uma tecla de piano é um problema de contato entre vários corpos onde em cada contato surgem forças normais e tangentes. Para manter-se fiel ao mecanismo real, nas rótulas devem ser consideradas perdas por atrito e, em alguns pontos, a aplicação de forças torcionais devido à ação de molas de torção.

Após a análise dos modelos já propostos na literatura, optou-se por implementar o trabalho de Hirsch Korn, 2004. A razão desta escolha foi a grande quantidade de dados experimentais disponibilizados e a boa concordância obtida com os resultados experimentais. Observou-se que os *softwares* multicorpos comerciais não apresentavam modelos de contato adaptáveis ao problema. Assim, partiu-se para uma implementação do modelo em mais baixo nível de programação que possibilite um maior controle sobre os corpos, rótulas, elementos de força e principalmente sobre a modelização dos contatos.

Para esta tarefa foi utilizada a interface *Simulink* do *MATLAB* que é “um ambiente de diagramas de blocos para a simulação multidomínio e concepção baseada em modelos”. O *Simulink* tem uma biblioteca dedicada à dinâmica de corpos rígidos, *SimMechanics*, que permite incorporar sólidos rígidos ao diagrama de blocos. Um sólido rígido pode então ser definido pela sua massa, matriz de inércia e coordenadas geométricas (pontos declarados por vetores). Após, é possível definir vínculos e medir/aplicar forças e torques em cada um dos pontos geométricos definidos (força do pianista e forças dos contatos). Além disso, podem ser aplicadas forças e torques também nas juntas que ligam os corpos. Basicamente, pode-se dizer que, uma vez implementados as forças e momentos aplicados nos corpos, o *Simulink* resolve numericamente as equações 4.3 e 4.4 com um passo temporal definido pelo usuário.

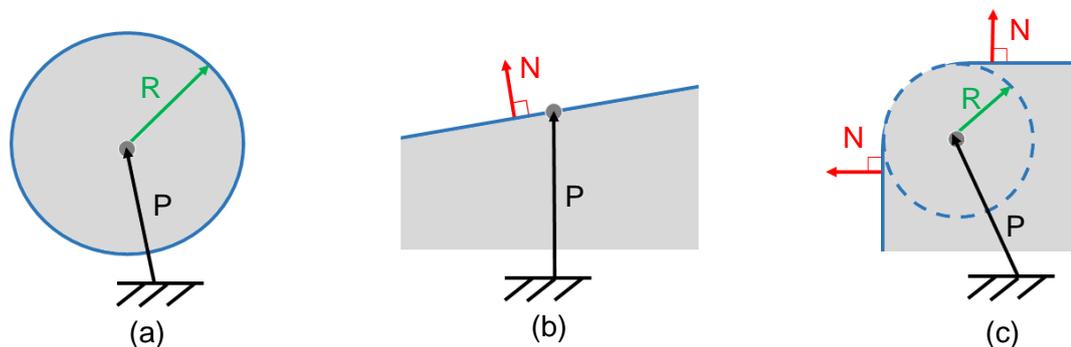
Para auxiliar na visualização dos resultados (durante e após a implementação) foi criada uma *interface* de visualização do mecanismo dentro da implementação. Para tanto, os corpos foram desenhados no programa *SolidWorks* e importados para o ambiente *Simulink* (extensão .STL).

## 5.2. Implementação do modelo

Como já dito anteriormente, o modelo escolhido para a implementação é o de Hirsch Korn, 2004. As geometrias e massas referem-se à tecla número 52 de um piano GP-178 da marca Boston. Por simplicidade será apresentada referência dos parâmetros mássicos, geométricos e dinâmicos empregados na sequência quando estes não forem os utilizados por Hirsch Korn, 2004.

### 5.2.1. Representação das superfícies de contato

O modelo adotado para a representação dos contatos apresenta 3 possibilidades para a construção de uma superfície de contato: círculo, reta e híbrido (arco de círculo terminado por 2 retas tangentes) como mostrado na Figura 5.1. de (a) a (c). Essas geometrias foram julgadas adequadas para modelar as superfícies de contato existentes no mecanismo.



**Figura 5.1 - (a) Contato tipo círculo; (b) Contato tipo reta; (c) Contato tipo híbrido**

Na lógica utilizada no *Simulink* para declaração de corpos rígidos, o único ente matemático que se pode utilizar para definir um limite geométrico é o vetor. Assim se inicia declarando uma posição (vetor  $P$ ) rigidamente ligada ao resto do corpo (engaste). Isso, junto a um raio (vetor  $R$ ) é suficiente para definir o contato do tipo círculo (Figura 5.1-a). Para definir um

contato do tipo reta utiliza-se um vetor auxiliar, ortogonal à reta desejada (vetor N), apontando para o exterior do corpo (Figura 5.1-b). Um contato do tipo híbrido é uma combinação de 3 contatos: 2 do tipo reta e um do tipo círculo. Assim, para defini-lo, utiliza-se um vetor apontando o centro do círculo, o raio do círculo e os 2 vetores ortogonais às retas limitantes. O Anexo 1 mostra as coordenadas para definir as superfícies utilizadas para cada peça do mecanismo (Tabela A1. 1 à Tabela A1. 6).

### 5.2.2. Pontos de contato

Após atribuir a cada geometria as superfícies de contato correspondentes, essas superfícies são conectadas duas a duas, identificando um contato. Um exemplo de representação das superfícies de contato pode ser visto na Figura 5.2.

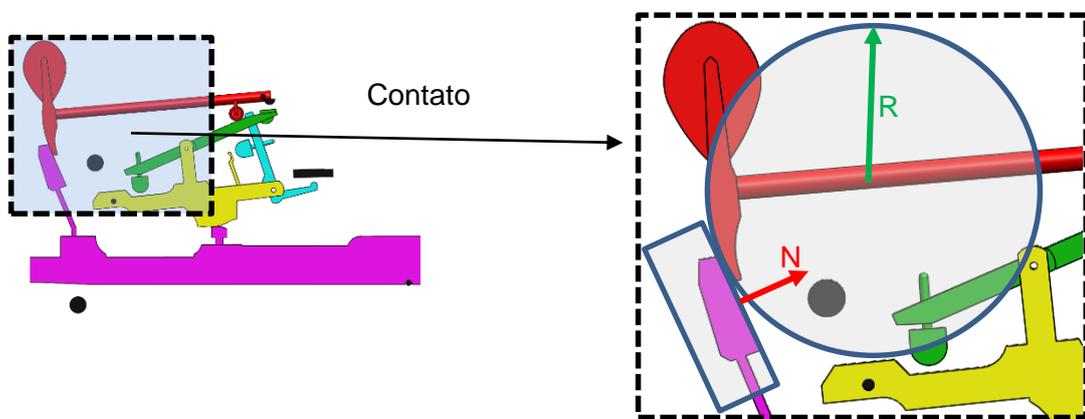


Figura 5.2 - Definição do contato entre uma superfície do tipo reta e uma superfície do tipo círculo

Uma apresentação detalhada do conjunto de contatos e tipos de representação utilizadas pode ser encontrada no Anexo 2.

### 5.2.3. Contato

#### 5.2.3.1. Detecção do Contato

A implementação da detecção de contato se baseia no cálculo de distâncias. Primeiramente calcula-se a distância entre 2 pontos. Se ela for menor que uma distância limite,  $D_{limite}$ , existe contato. Fisicamente isso quer dizer que os corpos estão se interpenetrando. Duas fórmulas são utilizadas para o cálculo das distâncias:

Distância entre 2 pontos (Equação 5.1):

$$D_{p-p} = \|\overrightarrow{P_{ponto2}} - \overrightarrow{P_{ponto1}}\| \quad (5.1)$$

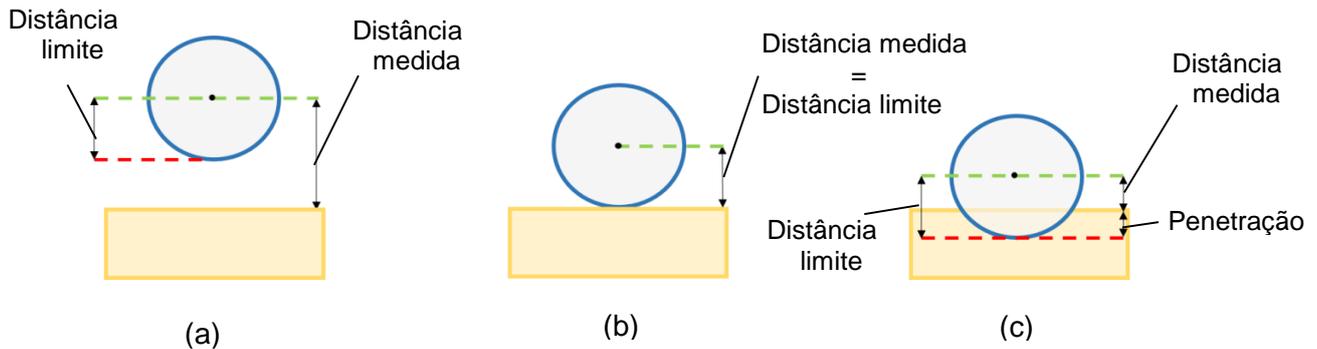
Distância entre um ponto e uma reta (Equação 5.2)

$$D_{p-r} = \frac{\|\overrightarrow{P_{ponto2}} \times \overrightarrow{d_{reta}}\|}{\|\overrightarrow{d_{reta}}\|} \quad (5.2)$$

A penetração entre corpos é então definida como (Equação 5.3):

$$x = D_{limite} - D_{calculada} \quad (5.3)$$

Assim sabe-se que existe o contato uma vez que  $x > 0$ . O processo está ilustrado na Figura 5.3 de (a) a (c).



**Figura 5.3 - Detecção do contato entre corpos: antes do contato (a), no limiar do contato (b), após penetração (c)**

#### 5.2.3.2. Força Normal

A interação entre superfícies com feltro foi estudada por Masoudi et al., 2011, e foi visto que a força de contato é histerética, mostrando que existe dissipação de energia no contato. Infelizmente não foi possível utilizar os parâmetros encontrados por Masoudi pois seu trabalho se baseou em um mecanismo de piano vertical, logo preferiu-se utilizar o modelo descrito por Hirschhorn, 2004 (Equação 5.4) :

$$f_n = (ax^3 + bx^2 + cx)(1 + D\dot{x}) \quad (5.4)$$

Na equação anterior, o polinômio  $(ax^3 + bx^2 + cx)$  representa a força, em Newton, gerada para uma penetração  $x$ , em metros. O termo  $D\dot{x}$  representa uma correção quanto à dissipação de energia gerada pelo comportamento histerético do feltro. Essa é a principal fraqueza desse modelo com relação ao mecanismo real, onde a forma da curva de carregamento é independente da velocidade do mesmo. A constante  $D$ , é ajustada para que a curva apresente boa acurácia para uma dada velocidade. Vale perceber que  $D$  não tem as unidades usuais de amortecimento [N.s/m] mas sim [s/m]. Os termos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são constantes para cada contato, sendo que os coeficientes do polinômio são obtidos à partir da interpolação de dados experimentais para cada um dos contatos.

#### 5.2.3.3. Força de Atrito Tangencial

Para calcular a força de atrito utilizou-se a Equação 4.1, tendo o coeficiente de atrito calculado pela Equação 4.6 de acordo com os dados experimentais  $A$ ,  $B_1$  e  $B_2$  (Anexo 1, Tabela A1. 8) e a velocidade relativa calculada de acordo com a Equação 4.5.

No mecanismo da tecla de piano, dado que todas as peças são fixadas por rótulas, toda força de atrito tangencial nos contatos gera uma rotação em torno da fixação. A velocidade de transição entre o  $\mu$  cinético e estático,  $v_t$ , foi estipulada como  $10^{-5}$  s. Da maneira como foi implementado, não se pode aplicar a força diretamente ao ponto tangente de um contato tipo círculo, apenas ao seu centro. Por este motivo uma mudança de referencial foi feita, decompondo a força tangencial do contato em um momento e uma força aplicados ao centro do círculo.

#### 5.2.4. Rótulas

Os pinos que unem os corpos do mecanismo são geralmente encobertos por feltros para fins de menor atrito e ruído. Esse atrito rotacional foi considerado na implementação. Além disso, nas conexões do corpo de alavanca com o escapamento e com o mecanismo de repetição, existem molas torcionais que fazem com que o mecanismo fique na sua posição inicial.

A biblioteca *SimMechanics*, dentro do *Simulink*, disponibiliza diversas formas de ligação entre corpos. Para representar as juntas rotacionais do mecanismo, que possuem apenas o grau de liberdade de giro no plano foi utilizada uma junta do tipo *Revolve*. O programa também permite que sejam colocados sensores e atuadores em cada junta, tornando possível a implementação do atrito rotacional e das molas torcionais.

##### 5.2.4.1. Força de Atrito Rotacional

A modelagem utilizada para o cálculo de atrito rotacional também segue a lei de Coulomb (Equação 4.1) e tem o coeficiente de atrito calculado pela Equação 4.2. Nesse caso, o termo  $v_r$  da equação representa a velocidade angular e o  $v_t$  a velocidade de transição angular.

##### 5.2.4.2. Molas Torsionais

Hirschhorn, 2004, estima que a mola torsional do escapamento tem o valor constante de 0,0042 N.m e que a mola torsional do mecanismo de repetição pode ser escrita da seguinte forma (Equação 5.5):

$$F = 1,27 \cdot 10^{-3} (\theta_r - 47,67^\circ) \quad (5.5)$$

#### 5.2.5. Força de acionamento

A força de acionamento feita pelo pianista é simulada por uma força pontual aplicada na extremidade externa da tecla (ponto Pk2 do Anexo 2). O perfil de força utilizado para o acionamento é o do tipo *Forte*, o que produz um som de grande volume sonoro. Isso se justifica pelo fato de que os coeficientes  $D$  do contato foram calibrados tendo em vista esse tipo de toque. O perfil de força utilizado pode ser visto na Figura 4.4.

#### 5.2.6. Posição de equilíbrio

Em seu trabalho Hirschhorn, 2004, não indica qual a posição inicial do mecanismo. Assim, para fixar as condições iniciais do sistema (ângulos das peças na posição inicial), o sistema foi rodado a partir de uma posição próxima do equilíbrio e deixado sob ação do seu peso próprio, esperando-se até o mesmo ficar imóvel. Esses dados foram em seguida utilizados como condições iniciais.

### 5.3. Escolha dos parâmetros para a análise dos fatores de influência

Após diversas visitas a afinadores e técnicos de piano e observação do mecanismo de alguns pianos no mercado, viu-se que os mecanismos diferem principalmente em 3 fatores:

- Distância entre o martelo e a corda
- Massa do martelo
- Momento de inércia do martelo

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 6.1. Validação do modelo

A validação do modelo foi feita comparando-o às medidas realizadas no mecanismo por Hirschhorn, para a nuance de toque *Forte*. Os dados utilizados na comparação são: os ângulos de rotação da tecla, do corpo e do martelo (Figura 6.1, Figura 6.2 e Figura 6.3). Pôde-se perceber uma boa concordância com os resultados experimentais.

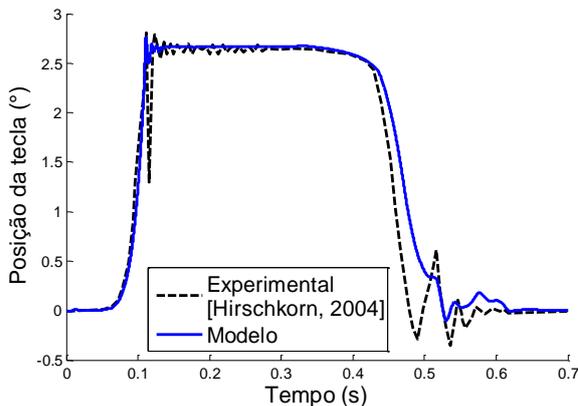


Figura 6.1 - Posição angular da tecla em função do tempo

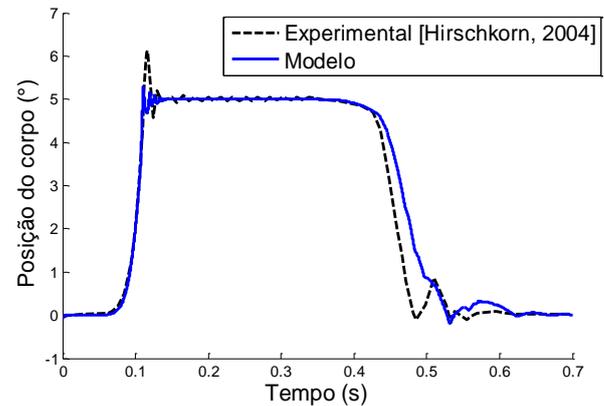


Figura 6.2 - Posição angular do corpo em função do tempo

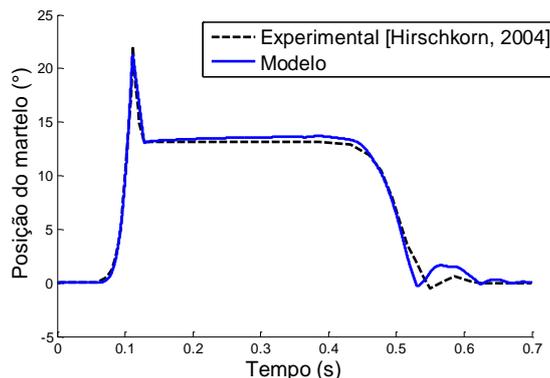


Figura 6.3 - Posição angular do martelo em função do tempo

Observam-se diferenças nas zonas de pico e na curva descendente para chegar à posição de equilíbrio. A primeira diferença deve-se ao fato de que o presente modelo não leva em consideração a vibração da corda. A segunda diferença deve-se à aproximação considerada no modelo para a força de contato. O termo  $D$  da equação 5.4 possui uma faixa de velocidades para as quais a aproximação tem maior exatidão. Assim, na fase de chegada do mecanismo, se perde precisão devido às baixas velocidades. Nessas condições foram observados um tempo de contato de 1,3 ms e um pico de força de 84N.

O primeiro nível do modelo feito em *Simulink* pode ser visto na Figura 6.4. Para mais detalhes os arquivos estão disponibilizados na internet no seguinte endereço <https://www.dopbox.com/sh/7zijnerchl161ak/CgSq8atteL>.

Entradas



Modelo Implementado em *MATLAB/Simulink*

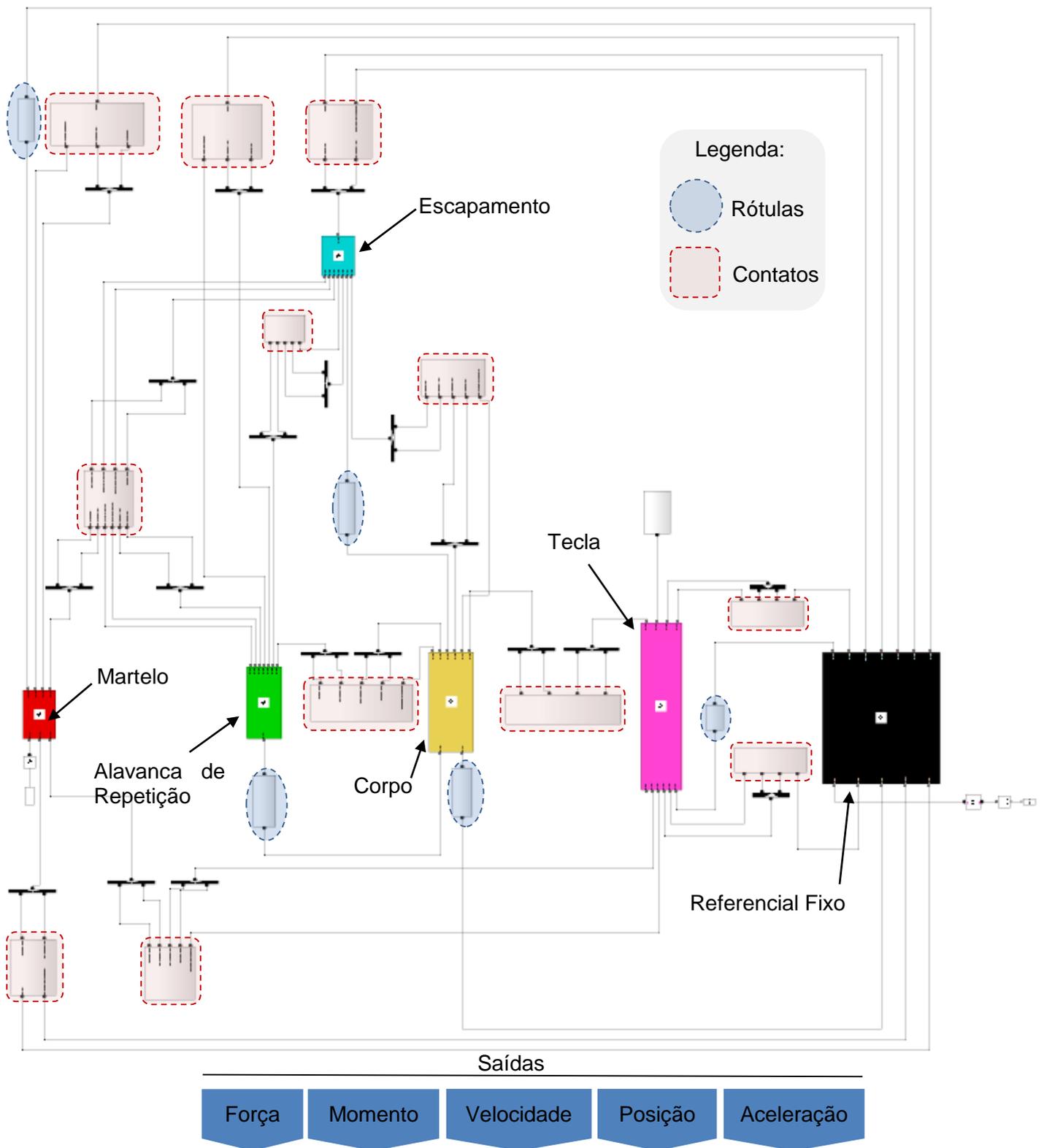


Figura 6.4 – Esquemático do modelo completo, visão do primeiro nível

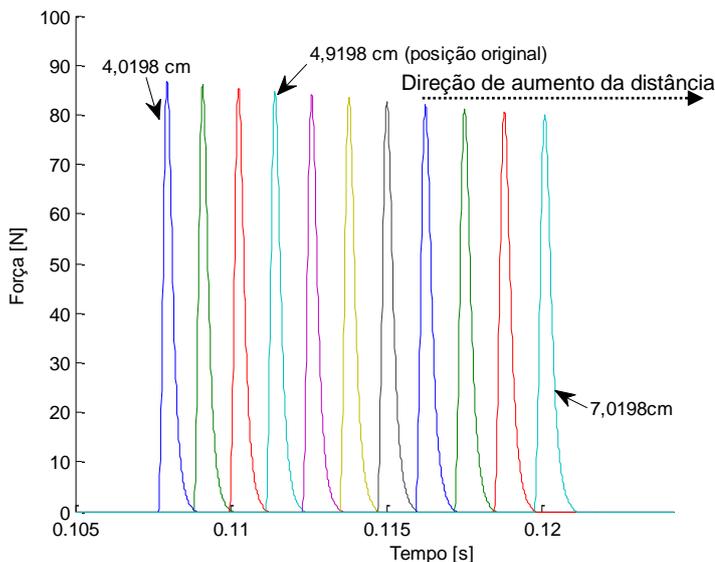
## 6.2. Análise dos fatores de influência

O mecanismo da tecla serve apenas como interface entre o toque do pianista e o toque do martelo na corda. Assim, o que deve ser realmente analisado é como fatores de concepção podem afetar esse contato, o qual, por sua vez, pode afetar o volume e o timbre do som. Segundo Askenfelt e Jansson, 1990, o tempo de contato deve estar abaixo de um décimo do período da frequência de ressonância da corda, senão teremos um timbre abafado. Cordas de notas graves precisam de uma força maior para vibrar, devido à sua maior massa, mas permitem um tempo de contato mais longo, dada sua menor frequência de vibração. Seguindo este raciocínio, foram analisados a duração e o perfil de forças do contato entre o martelo e a corda, quando se variam alguns parâmetros mássicos, geométricos e dinâmicos.

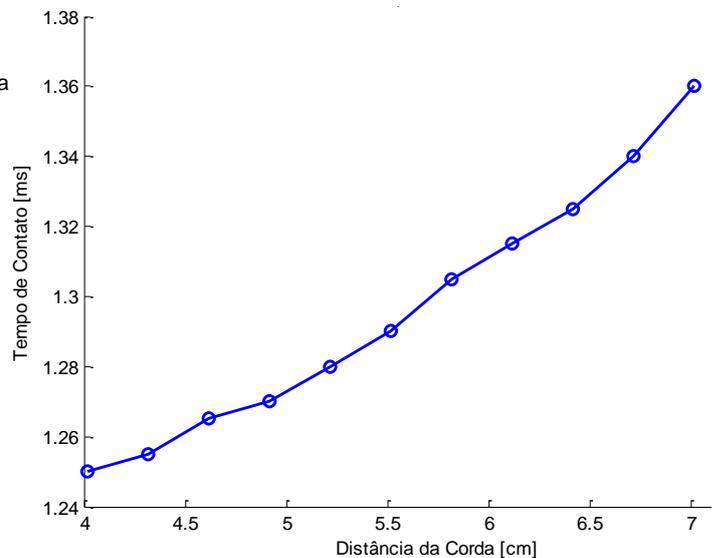
O perfil de força utilizado foi o mostrado na seção 4.3. O passo de discretização foi diminuído progressivamente até o ponto onde os resultados não dependiam mais do tamanho do mesmo. Dessa forma o valor do passo, fixo, foi de  $1 \cdot 10^{-6}$  s, devido principalmente à ordem de grandeza do tempo de contato. Cada parâmetro foi variado de maneira independente, mantendo todos os outros inalterados.

### 6.2.1. Distância entre o martelo e a corda

A distância entre o martelo e a corda é um dos principais parâmetros de regulação de um piano [Askenfelt e Jansson, 1990]. Para avaliar este fator foi variada a posição vertical da corda. Foram utilizadas distâncias de 4 a 7 cm, sendo que a distância original era de 4,9 cm. Os resultados são mostrados nas Figuras 6.7 e 6.8.



**Figura 6.5 - Variação do perfil de força com a distância entre a corda e o martelo**



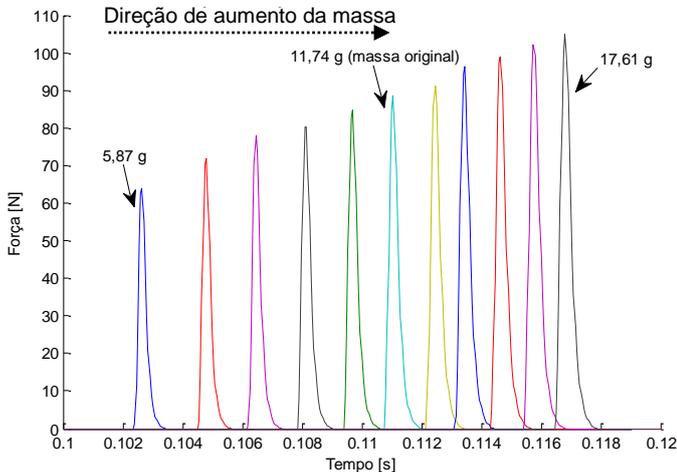
**Figura 6.6 - Variação do tempo de contato com a distância entre a corda e o martelo**

Um dos efeitos sentidos com aumento da distância foi uma diferença no momento de contato. Este variou em aproximadamente -50ms e +75ms em torno do ponto de referência. Pode-se concluir à partir do trabalho de Askenfelt e Jansson, 1990, que variações de até 30 ms são imperceptíveis ao ouvido do pianista. Assim as distâncias que geraram as curvas à direita na Figura 6.5 poderiam causar estranheza ao pianista.

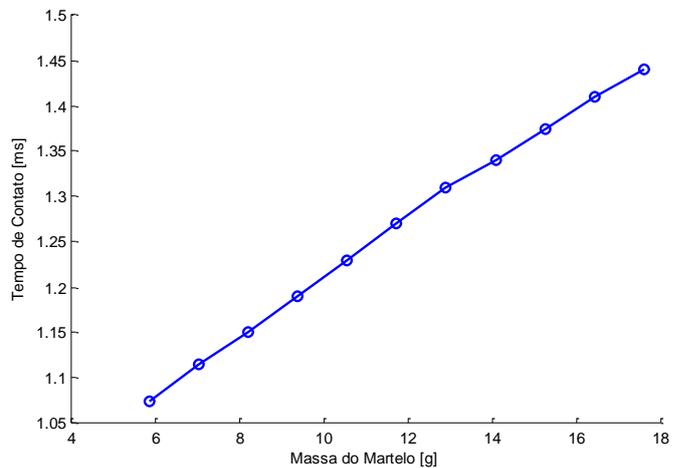
Entre a menor e a maior distância, percebe-se uma leve mudança, da ordem de 8N, no pico de força. Isso se deve ao fato de o martelo ter menos tempo para ser desacelerado pelo seu peso próprio. Essa desaceleração também explica o aumento do tempo de contato com o aumento da distância.

### 6.2.2. Massa do Martelo

Dado que o martelo é o elemento lançado contra a corda no acionamento da tecla, pensou-se que seria possível variar significativamente a força aplicada à corda variando-se a massa do martelo. A faixa de variação foi de  $\pm 50\%$  da massa original de 11,74g. Os resultados são mostrados nas Figuras 6.9 e 6.10.



**Figura 6.7 - Variação do perfil de força com a massa do martelo**

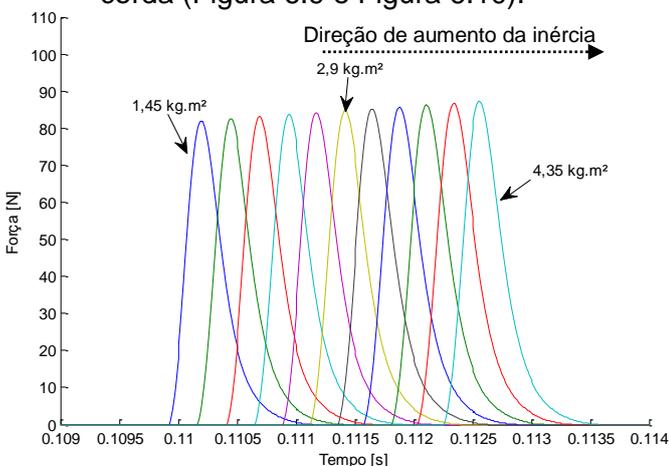


**Figura 6.8 - Variação do tempo de contato com a massa do martelo**

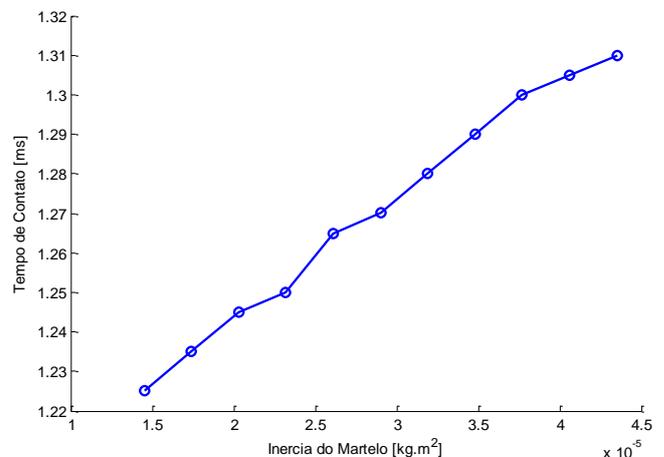
Analisando a Figura 6.7 pode-se perceber que o pico da força aplicada aumentou significativamente com a massa do martelo, indo de 65N para a menor massa, até 105N para a maior massa. Foi notada uma maior diferença no momento de contato, variando de -100ms à +80ms em torno do ponto de referência. Isso indica que a variação de massa pode ficar entre  $\pm 20\%$  para essa diferença não ser percebida. A Figura 6.8 mostra um aumento quase linear do tempo de contato. O aumento da força aplicada gera um aumento da penetração, e assim um maior tempo de contato entre martelo e tecla.

### 6.2.3. Momento de Inércia do Martelo

Uma alteração da massa pode levar a uma mudança no momento de inércia. Assim, desejou-se observar como uma mudança na inércia do martelo afetaria o seu contato com a corda (Figura 6.9 e Figura 6.10).



**Figura 6.9 - Variação do perfil de força com a inércia do martelo**



**Figura 6.10 - Variação do tempo de contato com a inércia do martelo**

Pode-se perceber que a força permanece praticamente constante para as diversas inércias testadas. Da mesma forma, o momento de contato se altera muito pouco, na ordem de

10ms em torno do ponto de equilíbrio. Por outro lado, tem-se uma progressão linear do tempo de contato, o que poderia tornar este parâmetro um ajuste para o mesmo sem alterar a força aplicada na corda.

## 7. CONCLUSÃO

O modelo construído em *MATLAB/Simulink* para a modelagem multicorpos se mostrou bastante coerente com relação aos dados experimentais. Vale perceber que essa implementação possibilita total liberdade para mudar quaisquer parâmetros que se queira, bem como mudar leis de comportamento do modelo.

A análise dos fatores de influência mostrou que mudando fatores geométricos e mássicos pode-se alterar significativamente o tempo de contato e a força de contato. Tais parâmetros podem ser balanceados para se obter um ajuste fino adaptado a cada nota.

O pontos fracos do modelo implementado são: o parâmetro  $D$  na modelagem do contato normal e a consideração da corda como um corpo rígido. Quanto ao parâmetro  $D$  a implementação feita deixa completa liberdade para se entrar com as verdadeiras curvas do contato, sem necessidade de nenhum parâmetro “simulador de histerese” mas essas curvas não foram encontradas na literatura. O segundo fator, considerando a interação do feltro com a corda foi estudado mas considerado fora do escopo deste trabalho devido a sua complexidade. Essa seria uma possível evolução do presente trabalho.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Askenfelt, A., e Jansson E. “**From touch to string vibration**”, Leitura da Royal Swedish Academy of Music, KTH, Stockholm, 1990.

Gillespie, B. “**Haptic Display of Systems with Changing Kinematic Constraints: The Virtual Piano Action**”, PhD Thesis, Universidade de Stanford, 1996.

Gillespie, B. “**The Virtual Piano Action: Design and Implementation**”, CCRMA, Universidade de Stanford, 1994.

Hibbeler R.C. “**Dinâmica – Mecânica para Engenharia**”, 10ª edição, Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2005.

Hirschhorn, M.C. “**Dynamic Model of a Piano Action Mechanism**”, Master Thesis, Waterloo, Ontario, Canada, 2004.

Lozada J., Boutillon X., Hafez M. “**Modélisations mécaniques de la touche de piano et de son imitation haptique**”, 18º congresso francês de mecânica, Grenoble, 2007.

Masoudi R., “**Micromechanics of Fiber Networks Including Nonlinear Hysteresis and its Application to Multibody Dynamic Modeling of Piano Mechanisms**”. Universidade de Waterloo Em Proceeding of ASME IDETC/CIE, Washington, DC, USA, 2012.

Topper, T.N., e Wills, B.L.. “**The computer simulation of piano mechanisms**” International Journal of Modelling & Simulation, vol.7, edição 4, pp.135-139, 1987.

## ANEXO 1 PARÂMETROS DA MODELIZAÇÃO

**Tabela A1. 1 - Propriedades geométricas do referencial fixo**

Ponto	Posição (m)			Raio (m)	Vetor unitário	
	x	y	z		x	Y
Pg1	0	0	0			
Pg2	-0,181	0,0528	0			
Pg3	-0,0883	0,1166	0			
Pg4	0,2172	-0,0074	0	0,005		
Pg5	-0,2037	-0,0112	0	0,005		
Pg6	-0,058	0,0648*	0		0	-1
Pg7	-0,0843	0,112*	0	0,0033		
Pg8	-0,1921	0,0766	0	0,005		
Pg9	-0,2196	0,1716	0		0	-1
Pg10	0	-1	0			
Pg11	0	-1	0			

\*Dimensões obtidas à partir do desenho

**Tabela A1. 2 - Propriedades geométricas da tecla**

Point	Posição (m)			Raio (m)	Vetor unitário	
	x	y	z		x	Y
Pk2	0,2278	0,0261	0			
Pk3	-0,1176	0,0263	0	0,0097		
Pk4	0,2175	0	0		0	-1
Pk5	-0,2208	0,001	0		-0,041	-0,999
Pk6	-0,2196*	0,0817	0		0,904	0,427
Pk7	0	-1	0			
Pk8	-0,041	-0,999	0			
Pk9	0,904	0,427	0			

\*Dimensões obtidas à partir do desenho

**Tabela A1. 3 - Propriedades geométricas do corpo**

Point	Posição (m)			Raio (m)	Vetor unitário	
	x	y	z		x	Y
Pw2	0,0989	-0,0035	0			
Pw3	0,0483	0,0275	0			
Pw4	0,0759	0,0189	0		0,969	0,247
Pw5	0,0595	0,003	0	0,0253		
Pw6	0,017	0,0015	0		0	1
Pw7	0,969	0,247	0			
Pw8	0	1	0			

**Tabela A1. 4 - Propriedades geométricas do escapamento**

Ponto	Posição (m)			Raio (m)	Vetor unitário	
	x	y	z		x	Y
Pj2	-0,001	0,0495	0	0,001		
Pj3	0,0247	-0,005	0	0,002		
Pj4	-0,0093	0,03	0	0,005		
Pj5	0,0031	0,0477	0		1	0
Pj6	1	0	0			
Pj7	0	1	0			
Pj8	-1	0	0			

**Tabela A1. 5 - Propriedades geométricas da alavanca de repetição**

Ponto	Posição (m)			Raio (m)	Vetor unitário	
	x	y	z		x	Y
Pr2	0,0363	-0,0521	0	0,055		
Pr3	-0,0351	-0,0089	0	0,005		
Pr4	0,0527	-0,0009	0	0,005		
Pr5	0,0561	0,0017	0		0,317	0,948
Pr6	0,317	0,948	0			
Pr7	0	1	0			
Pr8	0,2674988	0,9635582	0			

**Tabela A1. 6 - Propriedades geométricas do martelo**

Ponto	Posição (m)			Raio (m)	Vetor unitário	
	x	y	z		x	Y
Ph2	-0,017	-0,0091	0	0,004		
Ph3	-0,0813	-0,0025	0	0,055		
Ph4	-0,1321	0,0356	0	0,01		
Ph5	-0,11	-0,0031	0		0	-1
Ph6	0	-1	0			

**Tabela A1. 7 - Propriedades de massa**

Componente	Massa (kg)	Momento de inércia (kg·m <sup>2</sup> )	Centro de massa (m)		
			x	y	z
Tecla	0,12008	2,75E-03	0,0514	0,0158	0
Corpo	0,01196	1,69E-05	0,0502	-0,0018	0
Escapamento	0,00265	7,78E-07	0,0008	0,0195	0
Alavanca de repetição	0,00371	4,10E-06	0,0021	-0,0012	0
Martelo	0,01174	2,90E-05	-0,1022	0,0145	0

Tabela A1. 8 - Parâmetros de contatos

Contato #	Pontos		Coeficientes do polinômio			Correção	Parâmetros de fricção		
			<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		<i>A</i>	<i>B</i> <sub>1</sub>	<i>B</i> <sub>2</sub>
1	Pk3	Pw5	1,26E+10	3,26E+07	7,92E+03	1,877	0,167	0	1
2	Pk4	Pg4	4,41E+10	-1,02E+07	1,57E+04	1,219	0	0	0
3	Pk5	Pg5	2,42E+10	-1,11E+07	6,54E+03	2,502	0	0	0
4	Pk6	Ph3	5,86E+11	-3,70E+07	3,11E+04	2,446	0,434	1,78	1
5	Pw4	Pj4	5,28E+09	-7,54E+05	4,42E+03	5,781	0	0	0
6	Pw6	Pr3	2,53E+10	-9,89E+06	7,07E+03	7,732	0	0	0
7	Pj2	Ph2	3,92E+11	1,10E+07	3,23E+04	4,694	0,177	1,85	1
8	Pj3	Pg6	7,46E+10	-2,29E+07	1,32E+04	1,527	0	0	0
9	Pj5	Pr4	6,02E+10	-1,68E+07	6,96E+03	0,779	0	0	0
10	Pr2	Ph2	1,09E+12	-7,51E+07	2,23E+04	2,935	0,332	0,73	1
11	Pr5	Pg7	8,82E+11	-7,59E+07	1,67E+04	4,985	0	0	0
12	Ph4	Pg9	1,81E+10	8,19E+07	1,16E+04	0,8	0	0	0
13	Ph5	Pg8	8,58E+08	-1,11E+06	2,39E+03	8,964	0	0	0

Tabela A1. 9 - Propriedades das rótulas

Componente	<i>A</i>	<i>B</i> <sub>1</sub>	<i>B</i> <sub>2</sub>
Tecla	0,0122	0	0
Corpo	0,000397	0	0
Escapamento	0,000397	0	0
Alavanca de repetição	0,00247	0	0
Martelo	0,00101	0	0

ANEXO 2 PONTOS DE CONTATO

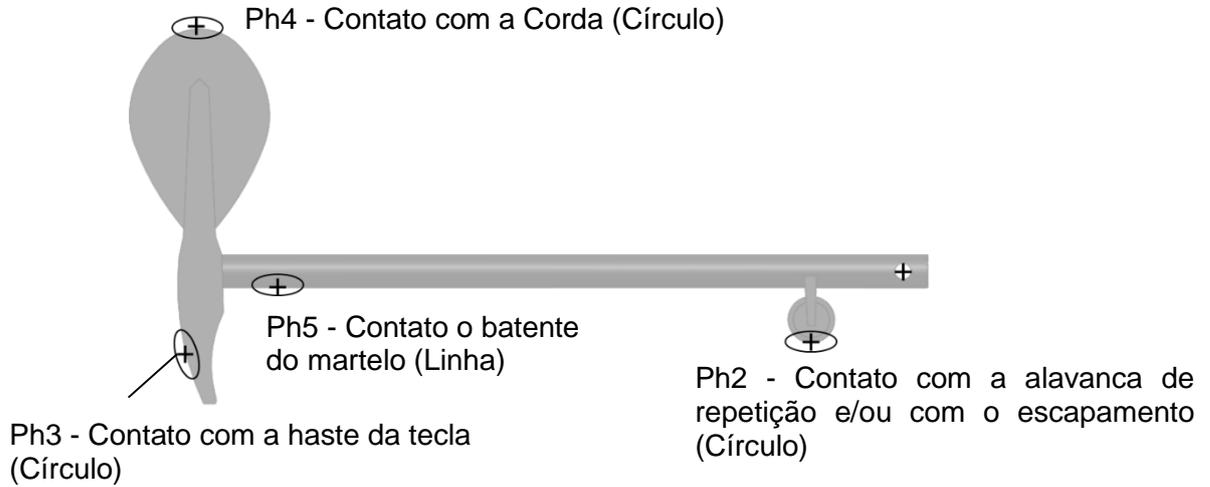


Figura A2. 1 - Pontos de contato do martelo

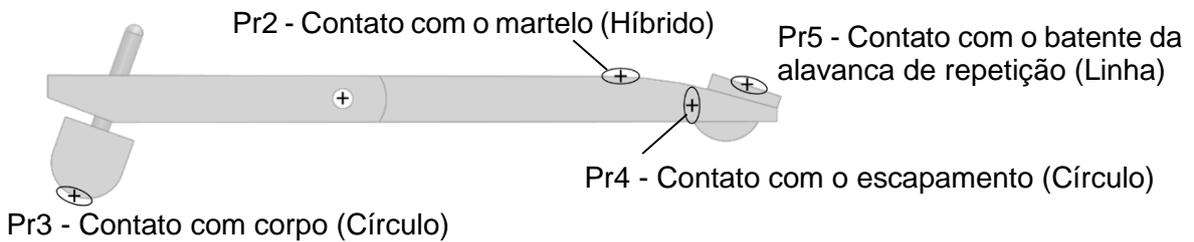


Figura A2. 2 - Pontos de contato da alavanca de repetição

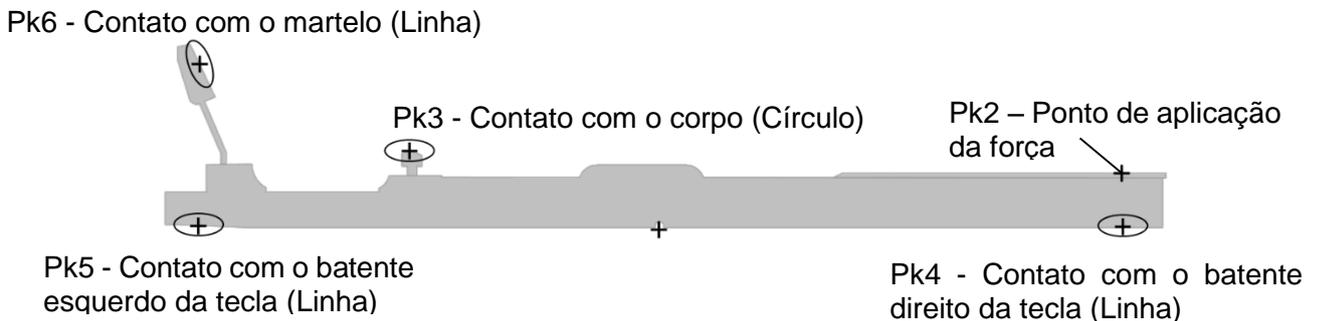
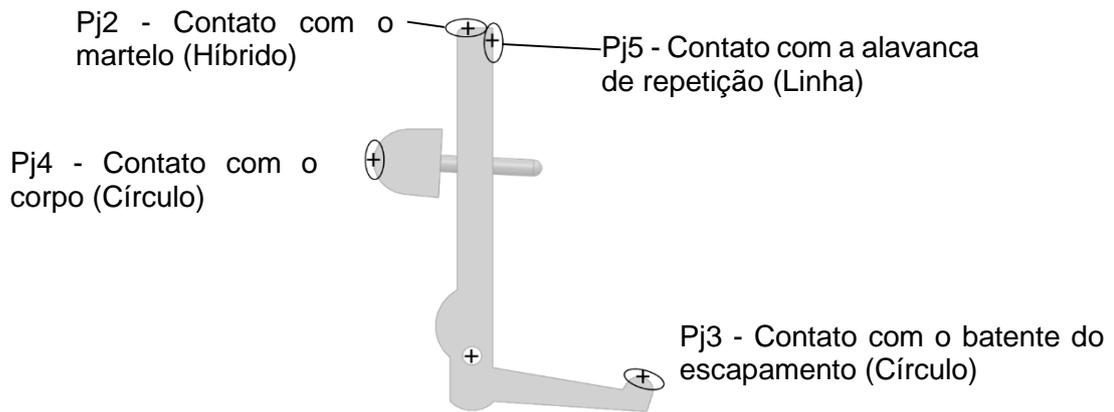
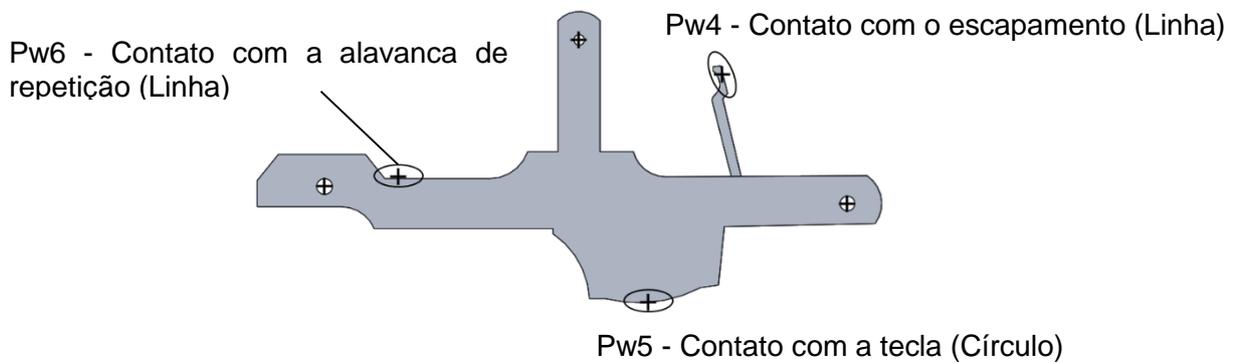


Figura A2. 3 - Pontos de contato da tecla



**Figura A2. 4 - Pontos de contato do escape**



**Figura A2. 5 - Pontos de contato do corpo**

Os pontos de contato do referencial fixo são do tipo círculo para os batentes da tecla (direito e esquerdo) e da alavanca de repetição, respectivamente Pg4, Pg5 e Pg7, e do tipo linha para a corda e o batente do escapamento, respectivamente Pg9 e Pg6.