UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JOSY ROCHA

# MODELAGEM MATEMÁTICA COM FOTOGRAFIAS

PORTO ALEGRE

2013

**JOSY ROCHA**

# MODELAGEM MATEMÁTICA COM FOTOGRAFIAS

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, com requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

**Orientadora: Prof.ª.Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana**

**PORTO ALEGRE**

**2013**

**JOSY ROCHA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA COM FOTOGRAFIAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

**Orientadora: Prof.ª.Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana**

**Banca Examinadora:**

Profª. Drª. Eleni Bisognin(UNIFRA)

Profº. Drº. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti (UFRGS)

**Porto Alegre, março de 2013.**

## Agradecimentos

*Agradeço aos meus pais, pela educação que me deram, e pelos incentivos para que eu nunca desistisse de estudar e pela compreensão e apoio em todos os momentos em que estive ausente envolvida com atividades do mestrado.*

*Agradeço ao meu esposo Denilso, que com toda paciência, carinho, dedicação e incentivo sempre esteve ao meu lado me ajudando em todos os momentos, colaborando com leituras, sugestões e críticas.*

*Agradeço a minha orientadora Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana pela valiosa orientação e compreensão em todas as etapas deste trabalho.*

*Agradeço aos meus colegas de mestrado Melissa, Fernando e Israel pela convivência e troca de ideias tornando esta caminhada mais divertida nos momentos de estudo.*

*Agradeço a escola por ter acreditado em meu trabalho e permitido a aplicação dessa atividade junto aos alunos, em especial a supervisora Daiane Medeiros pelo suporte e apoio dado durante estas atividades.*

*Agradeço aos alunos do 3º ano do ensino médio de 2011 por terem colaborado para o sucesso dessa atividade, trilhando caminhos em busca de conhecimentos.*

*Agradeço a todos que de alguma forma ajudaram durante o processo de construção dessa dissertação.*

*"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade mas também a suprema beleza."* *Bertrand Russell*

*"Fotografamos o que vemos. E o que vemos depende de quem somos."* *José Medeiros*

## RESUMO

Nesse trabalho, é investigada a percepção dos estudantes sobre a matemática presente em fotografias, bem como a possibilidade de utilização de fotos como instrumentos de aprendizagem. Analisamos (eu e os estudantes) fotos de monumentos históricos locais e de obras da Arquitetura de outros países. A Geometria foi abordada com um enfoque diferente do tradicional, cuja principal estratégia é a resolução de exercícios, adotando a repetição como técnica de transmissão do conhecimento. Ao contrário disso, no presente trabalho, a Modelagem Matemática foi adotada como estratégia de ensino, oportunizando e incentivando os estudantes a participarem do processo de construção do próprio saber. Com o objetivo de desmitificar a Matemática como ciência que produz resultados exatos, foi introduzida a ideia de erro, inerente às atividades experimentais.

Palavras – chave: Fotografias; Percepção dos alunos; Erros; Modelagem Matemática.

# ABSTRACT

In this work is investigated the students' perception about mathematics present in photographs, as well as the possibility of using photos as learning tools. We (I and the students) analyze photos from local historical monuments and buildings of the architecture from other countries. The geometry was approached with different focus from the traditional teaching, whose main strategy is solving exercises, adopting the repetition technique for knowledge transmission. Instead, in the present work, mathematical modelling was adopted as teaching strategy, creating opportunities and encouraging students to participate in the process of constructing their own knowledge. Aiming to demystify mathematics as the science that always produces accurate results, was introduced the idea of error, which is inherent to all experimental activities.

Key words: photographs; students' perception; error; mathematical modelling.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

A matemática é utilizada para descrever fenômenos naturais e a própria natureza desde a antiguidade. No entanto, por muito tempo este fato foi desconsiderado por alguns professores de Matemática. Aulas expositivas e que enfocam excessivamente a abstração nem sempre despertam o interesse dos alunos. Felizmente, nas últimas décadas houve uma retomada da matemática aplicada, que ressurge no ensino da Matemática principalmente através da Modelagem Matemática. A Modelagem Matemática aplicada ao ensino, em geral, almeja descrever uma situação real do cotidiano do aluno por meio de um modelo matemático[1]. Neste contexto, ela pode ser uma ferramenta importante na busca da ressignificação do processo ensino-aprendizagem.

No entanto, para implementar a Modelagem Matemática é importante que o professor faça um levantamento ou diagnóstico sobre os alunos: a realidade socioeconômica, o tempo disponível para realização de trabalho extra classe e o conhecimento matemático que possuem. A implementação deverá ser guiada por esse diagnóstico, isto é, o planejamento do desenvolvimento do conteúdo programático, orientação dos alunos na realização de seus modelos matemáticos e avaliação do processo (BIEMBENGUT & HEIN, 2003).

Barbosa (1999) afirma que a Modelagem Matemática redefine o papel do professor, no sentido que ele perde o caráter de detentor e transmissor do saber para ser entendido como aquele que está na condução das atividades, numa posição de partícipe. Nessa linha de ação, o papel do professor sofre uma transformação substancial, a sua nova função é problematizar para que a partir de uma situação instável o aluno sinta a necessidade de refletir sobre o tema abordado construindo a sua própria argumentação. Assim, a partir da necessidade de desenvolver uma argumentação ou um modelo matemático para descrever uma dada situação, os conteúdos desenvolvidos nas aulas de Matemática ganham significado (ROCHA & SANT'ANA, 2012). Neste contexto, Leivas (2002) afirma que "na medida em que se redefine o papel do aluno frente ao saber, é preciso redimensionar também o papel do professor que ensina Matemática. Uma faceta do papel do professor é a de organizar a aprendizagem, alimentar os processos de resolução que surgem, com vista a atingir os objetivos propostos. Deve ser um facilitador do processo, não mais aquele que expõe o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Deve ser um mediador, ao promover a análise das propostas

---

[1] Mas a construção do modelo não é uma exigência da Modelagem Matemática no âmbito do ensino.

dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar[2]".

Gravina e Santarosa (1998, p. 73) defendem que a aprendizagem da Matemática depende de ações que caracterizam o "fazer matemática", isto é, experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. Segundo elas, aprendizagem pressupõe o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de "fatos", geralmente na forma de definições e propriedades.

De acordo com Vygotsky (1998) a aquisição do conhecimento acontece por duas zonas de desenvolvimento, a real e a proximal. Na primeira considera-se o nível de conhecimento já adquirido, ou seja, é a capacidade de resolver um problema ou adquirir um conhecimento sem ajuda alguma, o nível de desenvolvimento mental do indivíduo. A segunda trata do nível de desenvolvimento potencial, isto é, o aprendiz não apresenta a maturidade necessária para aquele aprendizado, mas sob a orientação de alguém mais experiente (professor ou colega) ele poderá alcançá-lo e futuramente poderá fazer uso desse saber sozinho. Portanto, a orientação do professor é importante para que o educando desenvolva as suas potencialidades. Além disso, não podemos nos iludir pensando que todos os estudantes do ensino básico têm a clareza necessária para decidir tudo sobre a vida futura. É o professor que tem o conhecimento para definir o que é importante na sua disciplina. Quando vou ao médico, ele pode até me ouvir, mas é ele que define o tratamento, pois ele é quem tem a formação necessária para tomar essa decisão. Não estou tentando fazer comparações entre médicos e professores, ou saúde e educação, estou apenas tentando esclarecer quem é responsável pelas estratégias de ação. Também não estou aqui afirmando que os alunos não devam ser ouvidos nas escolas, ou que não possam opinar sobre o que gostariam de aprender. Muito pelo contrário, existem muitas formas de se chegar a um objetivo, e certamente nós professores saberemos adequar os conteúdos que julgamos importantes às vontades e necessidades dos estudantes. Além disso, ouvi-los é uma forma de motivá-los. Mas que se faça com a clareza de quem conhece o que faz e deseja o melhor para os seus alunos. Neste sentido, o ideal é usar os conteúdos como ferramentas para desenvolver habilidades que lhes permitam aprender por conta própria futuramente.

[2] A Modelagem Matemática propõe a construção do conhecimento de forma não hierárquica, com o professor desempenhando o papel de orientador. No entanto, cabe ao professor estabelecer as regras de convivência em sala de aula e garantir o bom andamento das atividades com a participação de todos.

No mundo tecnológico em que vivemos, onde tecnologias surgem e se tornam obsoletas em menos de uma década, os profissionais precisam desenvolver a capacidade de se atualizar por conta própria. Segundo Moran,

> A sociedade está caminhando para ser uma sociedade que aprende de novas maneiras, por novos caminhos, com novos participantes (atores), de forma contínua. As cidades se tornam cidades educadoras, integrando todas as competências e serviços presenciais e digitais. A educação escolar precisa, cada vez mais, ajudar a todos a aprender de forma mais integral, humana, afetiva e ética, integrando o individual e social, os diversos ritmos, métodos, tecnologias, para construir cidadãos plenos em todas as dimensões. (MORAN, 2008, p. 3).

Nesta perspectiva, vivemos um novo momento na Educação, um cenário de aprendizagem colaborativa se apresenta, em que o professor precisa aprender a ensinar alunos que devem aprender a aprender. O que se busca é que o estudante adquira a autonomia intelectual. Para Freire (2003, p. 59) a autonomia é uma forma de liberdade que o professor deve respeitar e valorizar. Em suas palavras, “o respeito à autonomia e a dignidade de cada um é um imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros”.

No que se refere à aprendizagem colaborativa, Vygotsky (1998) sugere que as atividades realizadas em grupo, de forma conjunta, oferecem vantagens que não estão disponíveis em ambientes de aprendizagem individualizada. Segundo ele, tanto a constituição do sujeito quanto o seu aprendizado e seus processos de pensamentos, ocorrem mediados pela relação com outras pessoas. Jeong e Chi (1997) afirmam que como resultado do trabalho em conjunto as pessoas passam a compartilhar memórias, conhecimentos e modelos mentais, atingindo significados e representações comuns, possivelmente, mais complexos e ricos do que aqueles elaborados individualmente. A co-construção do conhecimento é parte essencial do processo de aprendizagem, pois estabelece um diálogo no qual soluções são propostas, ampliadas, modificadas ou contrapostas (WELLS, 2001). Entretanto, é importante que o professor além de estimular os estudantes a trabalharem em grupo, forneça-lhes um modelo interativo que leve ao compartilhamento de ideias (MOYSÉS, 1997). Alertamos para o fato de que é importante que o professor adapte as tarefas ao nível do aluno e da classe, evitando que o desafio da atividade proposta seja superior a capacidade do aluno naquele momento ou que sejam demasiadamente fáceis e provoquem o desinteresse do aluno (TURNER, 1998). Segundo Camargo e Rocha (2011) a mobilização dos estudantes é um fator determinante para o sucesso do trabalho, de modo que a aprendizagem depende significativamente da receptividade deles para com as atividades propostas. Diversos investigadores têm defendido o trabalho colaborativo/cooperativo em pequenos grupos como uma saída para envolver os estudantes no processo ensino-aprendizagem (BEHRENS, 2000; CABRERA, 2002; COHEN, 1994; DAVIDSON, 1990; FELDER, 2001; ; GILLIES, 2004; JOHNSON & JOHNSON, 1990; KOLLAR, 2006; SISOVIC, 2000; SLAVIN, 1987; SLAVIN, 1996).

Como podemos perceber, o trabalho em grupo é altamente recomendado. Mas não se trata de dividir as tarefas em pequenas partes distribuídas aos alunos para que estudem e transmitam o que aprenderam aos colegas. Isso não tem nada de inovador, é apenas um professor tradicional encarregando os alunos de fazerem o seu trabalho. A proposta aqui desenvolvida tenta criar cenários de aprendizagem que possibilitem a interação entre os educandos fomentando a discussão, troca de conhecimentos e a solidariedade. Assim, o processo de aprendizagem além de fomentar a construção do conhecimento, promove a construção de relações sociais colaborando para a formação da cidadania e refutando o individualismo exagerado. Neste cenário, as individualidades são um diferencial de cada componente do grupo e se somam para produzir um resultado final melhor do que aquele que se obteria com cada um trabalhando sozinho. No grupo de trabalho todos são igualmente importantes, e a falha de um membro acarreta prejuízos ao grupo todo. Neste contexto, o trabalho em grupo permite desenvolver o senso de responsabilidade.

Senge propõe que:

> Podemos formar ‘organizações de aprendizagem’ nas quais as pessoas expandem continuamente sua capacidade de criar os resultados que realmente desejam, onde surgem novos e elevados padrões de raciocínio, onde a inspiração coletiva é libertada e onde as pessoas aprendem continuamente a aprender em grupo. (SENGE, 1990, p. 11)

## 1.1. A GEOMETRIA

Conhecimentos de Geometria são fundamentais para a compreensão de fenômenos cotidianos desde os primórdios da civilização. Entretanto, ela tem sido pouco explorada no ensino de Matemática nas últimas décadas (FAINGUELERNT, 1999; GAZIRE, 2000; LORENZATO, 1995; PASSOS, 2000; PAVANELLO, 1989; PEREIRA, 2001). São muitas as justificativas para o abandono do ensino de geometria: omissão de tópicos de geometria nos livros didáticos, a formação dos professores, a Matemática Moderna e muitas outras.

Os livros didáticos valorizam excessivamente os cálculos algébricos e pouco a experimentação, construção e manipulação das figuras geométricas e suas propriedades. A geometria é desenvolvida de forma teórica, favorecendo a memorização de fórmulas e propriedades. Como a Geometria, em geral, é distribuída nos últimos capítulos do livro, em grande parte das escolas falta tempo para abordá-la. Além disso, não apresentam atividades que envolvam os estudantes na construção do conhecimento[3]. Mesmo assim, podemos perceber algumas mudanças na última década, no sentido de resgatar o ensino da Geometria (MURARI, 2004; ORTIGÃO, 2005; PAIS, 2006).

Como afirma Ponte (2001), sem um bom conhecimento de Matemática não é possível ensiná-la bem. Por isso, o ensino da Geometria depende da formação dos professores. Lorenzato (1995) alerta para o fato de que muitos professores não estão preparados para ensinar Geometria e, segundo ele, isso leva a um círculo vicioso, em que a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la, levando a sucessivas gerações de professores sem o conhecimento geométrico necessário. A falta de conhecimento e de condições para aprimoramentos, aliada a carga horária excessiva, levam muitos professores a se apoiarem exclusivamente no livro didático, que é deficiente. Fica claro que alguma coisa precisa ser feita e que deve necessariamente incluir o professor. O fato de que boas ideias e propostas no sentido de melhorar o ensino-aprendizagem existem há muito tempo e não têm sido bem aproveitadas, em minha opinião, sugere que o professor deve ser envolvido no processo como um todo, desde a sua origem até o desenvolvimento em sala de aula. Caso contrário, ele não se apropria da ideia. É consenso que não se deve tentar ensinar os alunos, mas propiciar condições para que eles construam o conhecimento por conta própria. Por que com os professores seria diferente?

Com o movimento da Matemática Moderna o ensino da Geometria perdeu espaço para a álgebra, tanto no Brasil quanto a nível mundial. Após a segunda guerra mundial o desenvolvimento tecnológico exigia que o sistema de ensino formasse profissionais para atender a demanda e buscar o desenvolvimento científico. Por isso, houve ênfase à Álgebra e a Geometria ficou em segundo plano. De acordo com Pavanello (1989, p.103), a Matemática Moderna teve como objetivo trabalhar a matemática na perspectiva das estruturas algébricas, usando a linguagem simbólica da teoria dos conjuntos.

Mesmo assim, o ensino da Geometria não ficou estagnado. Por exemplo, o casal Dina e Pierre van Hiele desenvolveram pesquisas que muito contribuíram para o nosso entendimento sobre o ensino-aprendizagem da Geometria. De acordo com van Hiele (1959), o desenvolvimento do pensamento geométrico ocorre por níveis hierárquicos de compreensão. Esses níveis são: reconhecimento ou visualização, análise, abstração ou síntese, dedução e

[3] Alguns professores preferem esse tipo de livro por dar menos trabalho no planejamento da sua aula e oferecer menos riscos a sua atuação.

rigor. A passagem de nível depende das experiências do educando e de atividades adequadas preparadas pelo professor com o objetivo de desenvolver o raciocínio geométrico. A compreensão de um conceito ocorre de forma gradual, levando à generalização. Cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagens próprias. Consequentemente, não pode haver compreensão quando o curso é dado num nível mais elevado do que o atingido pelo aluno (NASSER & SANT'ANNA, 1997). É inegável que a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele é um importante suporte teórico para o ensino de geometria, mas baseada na minha experiência e na teoria do desenvolvimento proximal de Vygotsky eu me permito dizer que em alguns casos, alunos com dificuldades para acompanhar o ritmo dos colegas de turma e com necessidade de um tratamento diferenciado atingem um certo nível de compreensão. Em abordagens posteriores, em alguns casos, essas deficiências não são detectadas ou são facilmente resolvidas. Parece que com o *amadurecimento cognitivo* desses estudantes conseguem dar significado para o que tinha sido apenas absorvido anteriormente.

Mas os van Hiele também sugeriram fases para a aprendizagem como um processo gradual:

- Informação – na fase inicial o professor e os alunos devem discutir sobre o assunto a ser estudado. Essa discussão permite que o professor perceba o nível de conhecimento do aluno sobre o assunto a ser tratado.
- Orientação direta – nesta fase o professor fornece o material a ser explorado pelos estudantes. O material deve ser objetivo, solicitando respostas simples.
- Explicitação – o professor observa os estudantes trabalhando.
- Orientação livre – o professor seleciona material com tarefas mais complexas, constituídos de várias etapas, exigindo respostas mais elaboradas e amplas, criando o ambiente necessário para que o aluno ganhe experiência e autonomia.
- Integração – a síntese é feita com a colaboração do professor, que exemplifica com experiências mais globais.

Sobre a importância do ensino da Geometria, Fainguelernt (1995) argumenta que ela ativa as estruturas mentais na passagem de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. Por isso, Lorenzato (1995) defende que o ensino de Geometria deve iniciar na pré-escola por meio da Geometria intuitiva, com as crianças realizando experiências com o próprio corpo, com objetos e com imagens. Ele argumenta que para favorecer o desenvolvimento das noções de espaço é preciso oferecer às crianças situações em que elas visualizem, comparem e desenhem formas geométricas. Pode parecer mero passatempo, mas é de fundamental importância. Para reviver estas experiências costumo desenvolver uma atividade em que os alunos calculam a área aproximada da pele que cobre seus corpos.

O conhecimento e o domínio do espaço representam um componente importante da inteligência humana. Por isso, desenvolver habilidades espaciais deve ser um dos principais objetivos da geometria (GUTIÉRREZ 1996; KAUFMANN, SCHMALSTIEG E WAGNER, 2000).

Para D'Ambrosio (2002-a), "artes e modelagem, são o melhor enfoque para a iniciação à Geometria. As artes dão grandes oportunidades de desenvolver a criatividade das crianças. Os modelos procuram entender e analisar situações da realidade concreta". Para ele a geometria do povo, dos balões e das pipas é colorida, mas a geometria teórica, desde os gregos eliminou a cor da geometria. A reaproximação da Arte e Geometria deve ser mediada pela cor que é considerada como um qualificativo na passagem de uma matemática do concreto para uma matemática teórica (D'AMBROSIO, 2002-b, p. 78). Em outras palavras, a transição do conhecimento empírico para o conhecimento abstrato deve ser um processo natural.

Neste sentido, a Geometria é um campo do conhecimento em que os processos de aprendizagem indutivos e dedutivos podem alimentar-se mutuamente, permitindo aos estudantes alternarem-se entre aplicações práticas e representações abstratas. A geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender a matematizar a realidade (FREUDENTHAL, 1973, p. 407).

## 1.2. A MODELAGEM MATEMÁTICA

Nos últimos anos o uso de modelos e da Modelagem Matemática tem crescido, tanto no ensino básico quanto no nível universitário. Isso pode ser percebido pelo número de artigos sobre modelagem publicados em periódicos e anais de congressos de Educação Matemática. Bassanezi (2004) argumenta que é necessário buscar alternativas de ensino aprendizagem que facilitem a compreensão e utilização da Matemática, e a Modelagem Matemática é capaz de unir teoria e prática motivando o educando no entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela.

Modelos são essências tanto para a produção de conhecimento científico quanto para o seu ensino (GIERE, 1988; GILBERT, 1991; GILBERT, 2004; TOMASI, 1988;). Eles fazem conexões entre as teorias e o mundo real. Neste sentido, um modelo é definido como um conjunto de representações, regras e estruturas de raciocínio que permitem fazer previsões e descrever o comportamento, em relação a uma ideia, objeto, evento processo ou sistema (CHRISTOFOLETTI, 1999; GILBERT E BOULTER, 2000; SCHWARZ E WHITE, 2005). Para Bassanezi,

> “Um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou outro modelo matemático” (BASSANEZI, 2004, p. 174).

Um modelo pode representar tanto sistemas extremamente grandes como galáxias ou o próprio universo quanto sistemas extremamente pequenos tais como átomos, vírus ou bactérias. Pode ser uma montagem de laboratório, uma imagem, uma maquete de um sistema concreto ou um modelo mental, em que a imagem de um sistema conhecido ou imaginado é formada. Os modelos mentais são particularmente importantes em áreas como Física, Astrofísica, Química e Biologia, em que frequentemente é impossível observar diretamente os sistemas estudados. Assim, um modelo pode ser tanto uma representação simplificada de um sistema real quanto uma abstração baseada numa teoria.

Apesar da clareza que se tem das potencialidades da modelagem na produção científica e como ferramenta de ensino-aprendizagem, há indícios de que tanto professores quanto alunos apresentam dificuldades para compreender o papel dos modelos e da modelagem na produção e aquisição de conhecimento (BEAN, 2007; DE JONG, 2001; GROSSLIGHT et al., 1991; ISLAS E PESA, 2004; VAN DRIEL E VERLOOP, 1999). As dificuldades dos estudantes podem, em parte, ser decorrentes das dificuldades dos professores. O professor inseguro, não se expõe.  Por isso, discussões e atividades com o intuito de viabilizar aos licenciandos em Matemática experiências no uso da Modelagem Matemática têm sido desenvolvidas (ALMEIDA & DIAS, 2003; BARBOSA, 2001A; BARBOSA, 2001B; BARBOSA 2004; BASSANEZI, 1999, BISOGNIN & BISOGNIN, 2012; FREITAS & SANT’ANA, 2007; KAISER, 2005; PIVA, DORNELES E SPILIMBERGO, 2005; SANT’ANA & SANT’ANA, 2007; SANT’ANA, 2004). Alguns pesquisadores da Modelagem Matemática na Educação Matemática sustentam que ela deve ser incorporada nos cursos de Licenciatura não apenas como uma disciplina mas que faça parte das diversas disciplinas do curso ( ALMEIDA & DIAS 2003; BARBOSA, 2001-a). Nesse contexto, entendo a Modelagem Matemática, não como uma disciplina[4], mas como uma metodologia utilizada por profissionais de diversas áreas do conhecimento para resolver problemas, criar ou descrever modelos. É possível que o fato de separarmos pesquisadores em linhas de pesquisa esteja ofuscando a real utilização da Modelagem.

Por outro lado, nem no debate teórico há uma concepção clara do que é a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática e do que ela deve se ocupar. Boering (2009) ao analisar os trabalhos publicados nos anais do CNMEM, edições IV e V, encontrou 50 definições diferentes para Modelagem. Por um lado, isso deixa claro a falta de um consenso entre os pesquisadores que se ocupam da modelagem. Por outro lado, isso pode indicar que o grupo é altamente qualificado e que muitos têm suas próprias concepções do que é a Modelagem, abrindo novas linhas de pesquisa. Isso também pode ser uma consequência da liberdade dada aos educandos para que escolham seus próprios objetos de estudo, já que nem todos eles têm compromisso com correntes teóricas. Vamos analisar algumas dessas concepções:

- Anastácio (1990, p. 89) expõe que a Modelagem é uma estratégia para ensinar Matemática partindo da necessidade sentida pelo aluno no seu viver cotidiano.
- Burak (1992, p. 62) afirma que a Modelagem Matemática é “[...] um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construír um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões”. Ele complementa sugerindo que a Modelagem Matemática deve partir sempre do interesse das pessoas envolvidas.
- Bassanezi (1994, p. 31) lembra que “o estudo de problemas e situações reais com o uso da matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução, objetivando uma possível revisão ou modificação do objeto em estudo, é parte de um processo que tem sido denominado Modelagem Matemática”.
- Borba, Meneghetti e Hermini (1997, p. 63) veêm a modelagem como um esforço para descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor.

[4] O que obviamente não impossibilita a criação de uma disciplina dedicada a desenvolver atividades de Modelagem Matemática tanto nas licenciaturas quanto em áreas aplicadas.

- Bassanezi (2002, p.24) considera que a Modelagem Matemática "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".
- Na perspectiva de Barbosa (2001-a, p. 31), a Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Mas esse conceito apenas define o que é entendido como uma atividade de Modelagem, determinando suas fronteiras em relação a outros ambientes (BARBOSA & SANTOS, 2007). Pode-se perceber em Barbosa (2001) a influência de Skovsmose (2000) que propõe a criação dos cenários de investigação.
- Na visão de Araújo (2002, p. 39) a modelagem é uma abordagem por meio da matemática de problemas da realidade, escolhidos pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica[5] embasem o desenvolvimento do trabalho.
- Silveira e Ribas (2004) consideram que a Modelagem Matemática é acima de tudo uma perspectiva, algo a ser explorado, o imaginável e o inimaginável. E argumentam que ela deve ser livre e espontânea, surgindo da necessidade do homem em compreender os fenômenos do seu entorno.
- Sant'Ana e Sant'Ana (2007) mencionam que a Modelagem pressupõe a utilização de dados reais e não de uma realidade criada pelo professor.

A Tabela 1 compara o ensino tradicional com a Modelagem Matemática. É possível perceber uma mudança significativa nos papéis do professor e dos alunos na Modelagem Matemática. No ensino tradicional o professor é a figura central e os alunos desempenham um papel passivo. Por outro lado, a modelagem é um processo colaborativo onde o professor é um facilitador da aprendizagem cuja função é criar cenários que permitam que os alunos aprendam pela pesquisa. Para o ensino tradicional o que importa é o resultado, já a Modelagem valoriza o processo.

[5] A Educação Matemática Crítica discute o papel sociopolítico da Educação Matemática. Ela foca no processo de construção do conhecimento que deve resultar do diálogo democrático entre professor e alunos (SKOVSMOSE, 2001).

Tabela 1 - Principais aspectos do ensino tradicional e da Modelagem Matemática.

| | **Ensino Tradicional** | **Modelagem Matemática** |
|---|---|---|
| Ambiente | Sala de aula | Cenários de aprendizagem |
| Características | Centrada no professor que transmite o conhecimento. | Centrada no aluno que participa ativamente da construção do conhecimento. |
| Papel do aluno | Memorização | Investigação |
| Papel do professor | Transmissor de conhecimentos | Facilitador da aprendizagem – colaborador ou orientador |
| Trabalho | Individual | Em grupo - colaborativo |

Particularmente, entendo a Modelagem na perspectiva da Educação Matemática como a abordagem que libertou-se dos limites impostos pelas disciplinas (fragmentação do conhecimento) e que incentiva os estudantes a usarem os conhecimentos matemáticos na descrição de fenômenos, sejam eles simples ou complexos, reais ou puramente teóricos. Assim, ela promove a aprendizagem num contexto interdisciplinar, com o aluno participando ativamente da construção do conhecimento, por meio de atividades que ressaltam o caráter aplicado da Matemática. Para o educador, mais do que os resultados da Modelagem em si, interessam as estratégias desenvolvidas pelos grupos de trabalho. A evolução das estratégias geralmente está relacionada com a evolução dos elementos do grupo de trabalho. Porém, a avaliação é necessária em qualquer método de ensino e, para evitar distorções, penso que os educandos devam ser avaliados também individualmente. Assim, o educador poderá agir no sentido de propor ambientes de aprendizagem que contemplem as necessidades individuais.

Como mencionado anteriormente, não existe um consenso nas discussões sobre a Modelagem Matemática aplicada à Educação Matemática, de modo que, tanto no âmbito nacional quanto no internacional existem várias correntes com características próprias (BARBOSA, 2001-c; KAISER, 1986; KAISER, 2005; SKOVSMOSE, 1990). Podemos identificar três correntes bem definidas:

- Corrente pragmática – focada nas aplicações práticas da matemática, aproximando-se da matemática aplicada. A Modelagem é utilizada para resolver problemas aplicados ou do cotidiano dos alunos. Segundo essa corrente, os conteúdos sem aplicações práticas em outras áreas do conhecimento deveriam ser removidos do currículo. Desse modo, a corrente pragmática está voltada para aspectos externos à matemática.

- Corrente científico-humanista – considera a matemática como ciência (capaz de produzir novos conhecimentos) e busca estabelecer relações com as outras ciências. Essa corrente explora a habilidade dos educandos de estabelecer relações entre os conteúdos abordados pela matemática e o mundo real. A corrente científica preocupa-se com aspectos internos da matemática.
- Corrente sócio-crítica – considera a matemática numa perspectiva social, dando a ela o *status* de ferramenta para questionar a realidade. Essa corrente abre espaço tanto para a matemática pura quanto para a aplicada. Como argumenta Barbosa (2001-c), "não é apropriada a separação entre aquilo que é útil ou não, como se faz nas correntes pragmática ou científica. O que não tem aplicações na atualidade, pode ter posteriormente. Igualmente, aplicações podem gerar novas ideias, novos procedimentos. Tanto matemática aplicada como pura[6] fazem parte do que convencionamos chamar de matemática, de modo que os alunos podem transitar livremente entre ambas". A corrente sócio-crítico está voltada para o que Skovsmose (1990) convencionou chamar de conhecimento reflexivo e que considera a natureza dos modelos e os critérios de construção, aplicação e avaliação.

É necessário esclarecer que a definição de Modelagem Matemática aqui adotada se refere a um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade, conforme Barbosa (2001-a), ou seja, não há a necessidade de construção de um modelo no sentido formal, com equações e condições prévias, mas o que realmente importa é o ambiente criado no decorrer das atividades.

[6] É preciso considerar que alguns conhecimentos foram desenvolvidos como abstrações teóricas e encontraram aplicações práticas posteriormente.

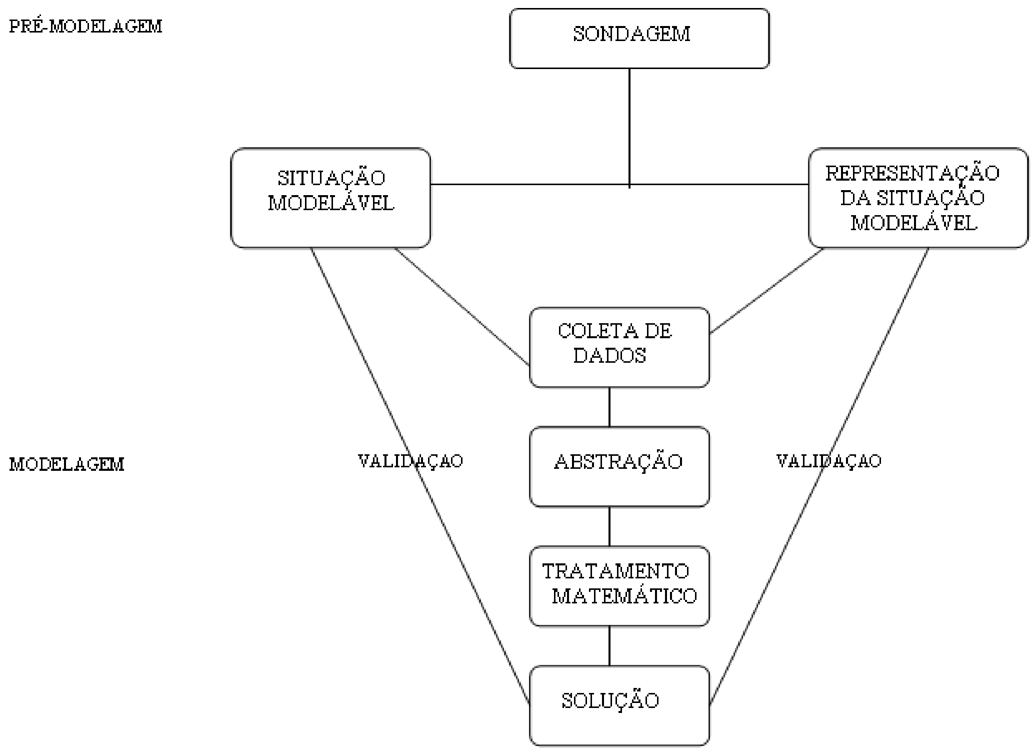



Figura 1.1 Diagrama mostrando as etapas de uma atividade de Modelagem Matemática.

A Figura 1.1 mostra as fases de uma atividade de modelagem. Antes de iniciar a modelagem propriamente dita, é interessante realizar uma sondagem com o objetivo de verificar o tipo de atividade que os estudantes querem ou precisam. Essa fase é a pré-modelagem. A fase de pré-modelagem permite a participação dos estudantes na escolha do tema a ser abordado. A fase de modelagem começa com a escolha da situação modelável, que pode ser real ou idealizada. Um exemplo de situação idealizada é descrita por Araújo (2000), onde um grupo de alunas criaram uma cidade fictícia, geraram um banco de dados sobre a temperatura registrada na cidade no decorrer de um ano e analisaram matematicamente tais dados. Após a definição da situação modelável, ocorre a sua representação. Essa representação pode ser uma fotografia, um desenho, uma montagem experimental, uma imagem mental, etc. A situação modelável e sua representação geram os dados necessários para a atividade de modelagem. Após a coleta de dados acontece a abstração[7], onde são selecionadas variáveis, levantadas hipóteses e estratégias são definidas. Então, ocorre o tratamento matemático ou, em alguns casos, a construção e utilização de um modelo. O tratamento matemático leva a solução, que pode ser validada ao ser confrontada com a situação inicial.

[7] Em alguns casos a abstração pode iniciar com a representação da situação modelável.

## 1.3. INCERTEZAS E ANÁLISE DE ERROS

Defendo que em qualquer atividade experimental, por mais simples que seja, devem ser considerados os possíveis erros (ou incertezas) e suas prováveis fontes. Mesmo que esses erros não afetem significativamente os resultados, essa é uma oportunidade de dar à Matemática um cunho de ciência aplicada[8]. Nesse sentido, a Modelagem Matemática aproxima a Matemática de outras ciências aplicadas como a Física, Química e Biologia, refutando a ideia de que ela é uma ciência destinada muito mais ao desenvolvimento do raciocínio lógico do que às atividades experimentais. Neste contexto, em Camargo, Rocha e Matté (2011), realizamos uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo o estudo das funções na Matemática e dos movimentos na Física. Iniciamos o trabalho com uma atividade experimental realizada com os estudantes divididos em pequenos grupos e chegamos ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) . Neste trabalho concluímos que "uma das importantes descobertas dos estudantes foi que nas atividades experimentais, muitas vezes temos que trabalhar com aproximações e que os resultados modelados pelas equações matemáticas são idealizações". Em Matté, Rocha e Sant'Ana (2011), criticamos alguns livros didáticos que trazem problemas fabricados artificialmente, envolvendo a aplicação de um único conceito e que sequer mencionam as incertezas inerentes às atividades experimentais.

Além disso, a análise das incertezas pode dar à Matemática o papel de conscientização social, ao contrário do método tradicional que com seus problemas de solução única e exata criam a falsa ideia de que contra resultados matemáticos nunca cabe argumentação. Em outras palavras, no presente trabalho defende-se o *caráter relativo da Matemática* e dos seus resultados, o que se opõe ao *caráter absoluto da Matemática* no método tradicional. Essa abordagem no âmbito da Modelagem Matemática e na perspectiva sócio-crítica, além de desmitificar a Matemática como ciência exata, combate o seu uso como ferramenta de dominação política. É preciso esclarecer à população que a ideia de que contra números não há argumentos é relativa, depende principalmente de como os números foram obtidos[9], ou seja, da precisão das medidas e simplificações envolvidas no processo. Borba e Skovsmose (2001) identificam na ideia errônea de exatidão aspectos antidemocráticos na Educação Matemática. Eles chamaram de *ideologia da certeza* a esse poder da Matemática de conter o

[8] Isso não quer dizer que em todas as atividades devemos calcular os *erros*. Em algumas situações a percepção de que o valor obtido é uma aproximação pode ser suficiente.
[9] Além do fato de que em algumas situações que envolvem pessoas e seus destinos, os números são irrelevantes.

argumento definitivo. Em suas palavras, “essa visão da Matemática – como um sistema perfeito, como pura, como uma ferramenta infalível se bem usada – contribui para o controle político” (p. 129). Assim, o professor de Matemática também tem um papel importante na formação política dos estudantes. Como defende D’Ambrósio (1996), “se algum professor julga que sua ação é politicamente neutra, não entendeu nada de sua profissão”. Na visão de Melo e Oliveira (2009), “a discussão sobre a utilização de modelos matemáticos que ludibriam a população da verdade é uma discussão sobre princípios morais”.

A Matemática é frequentemente usada para embasar tomadas de decisão e, por vezes, é fundamental para a compreensão da realidade. Os resultados matemáticos são o produto de um estudo e, por isso, podem fornecer evidências do que ocorreu, ocorre ou está para ocorrer em determinado fenômeno estudado. Entretanto, ela apenas aponta tendências, e estas podem ser momentâneas. Como exemplos temos as pesquisas eleitorais, as previsões matemáticas para os campeonatos de futebol, as pesquisas de mercado para o lançamento de certo produto, entre outros. Desse modo, pensar na Matemática como testemunho de credibilidade é esperar dela mais do que ela está apta a oferecer. Mas o caráter relativo da Matemática não a torna menos interessante. Pelo contrário, as oscilações de opiniões são de interesse da indústria, do comércio, dos políticos, dos torcedores e, principalmente, da publicidade.

O conceito de erro como a diferença entre o valor medido e o valor real (ou valor mais provável), pressupõe a existência de um valor real. No entanto, em muitos casos é difícil obter esse valor real.

Nas atividades desenvolvidas no presente trabalho, em algumas situações em que não existiam dados confiáveis sobre as dimensões do objeto de estudo adotamos como valor padrão (mais próximo do real) as medidas realizadas pela professora que era a pessoa mais experiente nesse tipo de atividade. Foi considerada como erro a diferença entre os valores obtidos por cada aluno e o valor de referência. Em outras situações, foi considerado como erro a diferença entre os valores obtidos por meio de medidas realizadas pelos alunos e os calculados usando o valor conhecido (considerado verdadeiro) para tal medida.

Os erros podem ser sistemáticos e/ou acidentais. Erros sistemáticos são produzidos por falhas no método, por exemplo, defeitos dos instrumentos. Erros acidentais ou grosseiros ocorrem por imperícia de quem faz a medida, como displicência na leitura.

Em geral, em atividades experimentais adota-se um valor que melhor representa a grandeza medida e uma margem de erro, dentro da qual deve estar compreendido o valor real. O valor mais provável é o valor médio de uma série de medidas e o erro é considerado como a diferença entre o valor experimental e o valor adotado como mais provável. Dada a pouca experiência dos alunos em atividades experimentais e a falta de um controle de qualidade sobre as réguas vendidas no Brasil, considerei a minha medida como o valor mais provável. Além de usar uma régua de boa qualidade, tomei muito cuidado ao realizar as medidas, de modo que o valor por mim estimado está mais próximo do valor real do que a média das medidas dos alunos.

## 1.4. JUSTIFICATIVA E QUESTÕES NORTEADORAS DA PESQUISA

A principal estratégia de ensino na educação matemática tradicional é a resolução de exercícios. Trata-se da transmissão de conhecimentos e técnicas principalmente por repetição. Essa abordagem, em geral, leva ao desinteresse, visto que o aluno não percebe a aplicabilidade e a importância do que está aprendendo.

Para tentar mudar esse cenário que acredito ser pouco construtivo propus uma sequência didática que foi desenvolvida junto com uma pesquisa que pretendia verificar a percepção dos alunos sobre a matemática presente em fotografias e a evolução dessa percepção no desenvolver das atividades propostas.

Nesse sentido, a Arte (principalmente a Arquitetura e a Pintura) apresenta um elo com a Matemática que se estende à antiguidade. É comum o interesse dos artistas pela Matemática. A Matemática, em especial a Geometria, é um recurso muito utilizado pelos artistas, no entanto, a Arte poderia ser mais bem explorada pelos matemáticos. É chegada à hora dos matemáticos, principalmente professores, se utilizarem da Arte. O presente trabalho propõe a utilização dessa relação, Arte versus Matemática, como instrumento de aprendizagem. Mas a pesquisa não se limita às obras de Arte ou à Arquitetura, ela pretende analisar a percepção dos alunos sobre a Matemática do mundo que os cerca. Para evitar transtornos provocados por frequentes deslocamentos de alunos para visitar monumentos históricos, igrejas ou paisagens interessantes, bem como gerar desorganização do planejamento das aulas dos demais professores, optei por trabalhar com fotografias.

As questões norteadoras da pesquisa estão relacionadas a seguir:

- Os alunos percebem a matemática fora da sala de aula?
- Que matemática os alunos percebem nas paisagens e estruturas que visualizam no cotidiano?
- É possível ensinar Matemática usando fotografias?

- Quais as opiniões dos alunos sobre atividades utilizando fotografias?
- Como são os resultados desse ensino quando comparado ao tradicional?

## 1.5. OBJETIVOS

São objetivos do estudo aqui relatado:

- Investigar a percepção dos alunos sobre a matemática presente em fotografias relacionadas com obras de arte, arquitetura e com o mundo que os rodeia.
- Investigar a evolução dessa percepção à medida que novas situações são por eles analisadas.
- Investigar a potencialidade da utilização de fotografias como instrumentos de aprendizagem.
- Possibilitar aos alunos um comportamento crítico e criativo de modo a contribuir para a autonomia intelectual, a fim de que eles sejam capazes de recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando tiverem que tomar decisões.
- Propiciar aos alunos a oportunidade de fazer conexões entre a Arte e a Matemática ampliando o conhecimento sobre Arte, ao mesmo tempo em que descobrem a Ciência que fundamenta a obra do artista. Pretende-se assim, tornar as aulas de Matemática dinâmicas e contextualizadas.
- Incentivar o desenvolvimento de um olhar sobre a ótica da ciência do mundo que o rodeia.
- Tornar a geometria mais atraente e aplicada ao olhar dos alunos.
- Abordar o tratamento dos erros inerentes às atividades experimentais.
- Desmitificar a Matemática como ciência exata e abstrata, dando a ela um caráter aplicado, por meio da Modelagem Matemática e da análise de erros.

## 1.6. CARACTERIZAÇÃO DA TURMA

A turma escolhida para desenvolver este trabalho foi o 3º ano do Ensino Médio de 2011 de uma escola privada de Porto Alegre (Figura 1.2 e Figura 1.3). A escolha levou em consideração o fato de eu ser a professora regente da disciplina de Matemática desde o 1º ano do Ensino Médio e estar trabalhando a Geometria Espacial. A turma era composta de 34 alunos, sendo 22 meninas e 12 meninos, com idade entre 15 e 18 anos que estudavam no turno da manhã.

Figura 1.2: Estudantes fotografados durante as atividades.

Figura 1.3: Estudantes trabalhando na Modelagem Matemática com fotografias.

## 1.7. O PRESENTE TRABALHO

Esta dissertação está dividida em nove capítulos. No segundo capítulo estão caracterizadas a metodologia e a ação docente. O terceiro capítulo descreve o processo de sondagem para detectar o interesse dos estudantes e definir as ações futuras. No capítulo 4 foi abordado o paralelepípedo que sustenta a Estátua da Vitória no Monumento ao Expedicionário, localizado no Parque Farroupilha em Porto Alegre. No capítulo 5 abordamos o monumento em homenagem a Santos Dumont, localizado no mesmo parque. No sexto capítulo analisamos a esfera do parque EPCOT na Disney World. O capítulo 7 foi dedicado à análise da pirâmide do Louvre. No capítulo 8 abordamos a Torre de Pisa. No capítulo 9 foram analisadas as opiniões que os educandos expressaram sobre o trabalho. Finalmente, o capítulo 10 é dedicado às considerações finais.

## 2. METODOLOGIA DE PESQUISA E DE AÇÃO DOCENTE

O presente trabalho foi proposto, discutido e desenvolvido com os alunos baseando-se principalmente na experiência didática e conhecimento teórico prévio da autora (com importantes contribuições de sua orientadora) e posteriormente foi buscado um maior embasamento teórico. Um dos motivos é que esta é uma nova linha de pesquisa, tanto para a Modelagem Matemática quanto para o ensino de Geometria e, por isso, não existem muitas discussões sobre o tema. Como o trabalho deveria resultar na presente dissertação havia o interesse em contribuir de alguma forma para o ensino de Geometria, ampliar o campo de aplicação da Modelagem Matemática e permitir a reflexão sobre que matemática os alunos percebem no cotidiano e como essa percepção evolui. Em resumo, havia o desejo de que o presente trabalho gerasse alguma contribuição autêntica. O professor precisa se permitir escolher os próprios caminhos fazendo da sua ação uma atividade de pesquisa.

Nesse sentido, encontrei apoio em Pedro Demo (1997, p.38) que defende que a educação pela pesquisa requer um professor pesquisador, porém não precisa ser um profissional da pesquisa que realiza pesquisas específicas. Tratando-se de um ambiente escolar, a pesquisa deve ser voltada para a educação do aluno. Segundo ele, o professor deve construir o seu próprio projeto pedagógico e reconstruí-lo constantemente. Em suas palavras, “em vez de falar pelos outros, ou de ser mero porta-voz de teorias alheias, ou de apresentar-se como mero discípulo, precisa comparecer com proposta própria, elaborada e sempre reelaborada”. O professor também deve construir textos científicos próprios, pelo menos nos temas de seu interesse e voltados para a sua área. Neste sentido, penso ser o professor o profissional indicado para fazer a transposição didática dos conteúdos científicos da sua área, já que ele domina o conteúdo, tem formação pedagógica e conhece o nível de compreensão dos alunos. Pedro Demo ainda sugere que o professor deve fazer e refazer constantemente o seu próprio material didático. Inovar a prática didática e recuperar constantemente a competência.

O mestrado em Ensino de Matemática do PPGEMat da UFRGS é um curso para professores, já que exige experiência mínima de 2 anos para o ingresso. Portanto, o curso tem como característica a formação de professores-pesquisadores, pois um curso de mestrado pressupõe o desenvolvimento de uma atividade de pesquisa. Mas aqui, o professor-pesquisador é visto no âmbito da pesquisa acadêmica e não apenas como o professor que investiga a sua própria ação. Talvez essa seja uma saída para resolver o problema da falta de conexão entre o que os professores fazem na sala de aula e a pesquisa acadêmica. Como sugerem alguns trabalhos, a maioria dos professores não procura a pesquisa educacional para melhorar suas práticas e consideram a pesquisa acadêmica irrelevante para as suas vidas nas escolas (COOKSON, 1987; DOIG, 1994; GURNEY, 1989; ZEICHNER, 1998). No âmbito da pesquisa acadêmica, os pesquisadores consideram os trabalhos desenvolvidos pelos professores do ensino básico triviais, sem embasamento teórico e irrelevantes para as suas pesquisas (NOFFKE, 1994; ZEICHNER, 1998). Neste sentido, Zeichner (1995) argumenta que é muito raro ver citações do conhecimento produzido por professores do ensino básico nos artigos de pesquisadores acadêmicos, apesar destas pesquisas serem facilmente encontradas. Ele também lembra que não é comum esses professores serem solicitados a dar palestras em congressos sobre pesquisa educacional. De modo geral, esse cenário ainda prevalece, mas alguns pesquisadores acadêmicos consideram a possibilidade dos professores do ensino básico produzirem conhecimento, outros mostram interesse em ao menos ouvir o que o professor tem a dizer (CUNHA E PRADO, 2005; LÜDKE, 2001; PEREIRA, 1998; REZENDE E OSTERMANN, 2005; ZEICHNER, 2000). Zeichner (1998) lembra que a produção de conhecimentos para um ensino de qualidade não se dá apenas na universidade, mas tem uma grande contribuição daqueles que constroem a experiência escolar cotidiana. A abordagem detalhada do assunto é complexa e está além dos objetivos do presente trabalho, mas me parece que mobilizar professores para desenvolverem pesquisas no ambiente acadêmico é um bom começo (ver secção 1.1), visto que quando estiveram neste ambiente eles não tinham o conhecimento prático para confrontar com as teorias. Iniciativas como esta do PPGEMat permitem confrontar teoria e prática, reduzindo os contrastes entre a pesquisa acadêmica e a pesquisa do professor. Além disso, abre a possibilidade para que professores do ensino básico migrem para a pesquisa acadêmica levando para esse ambiente de pesquisa experiências de cunho prático e que pesquisadores acadêmicos conheçam melhor as dificuldades enfrentadas por professores e alunos do ensino básico, bem como os motivos pelos quais suas pesquisas não os sensibilizam. Possivelmente, ambos, professores e pesquisadores, tenham muito a aprender. Essas informações poderão ser úteis na formação de novos professores.

A presente pesquisa foi desenvolvida com uma abordagem predominantemente qualitativa, tomando como base a percepção dos alunos das conexões matemáticas nas obras de arte, arquitetura e outras construções ou paisagens naturais.

Para Borba 2004, "... não há metodologia de pesquisa qualitativa ideal, visto que ela depende do que se quer olhar, de como se quer olhar e de fatores inefáveis". Goldenberg (1999, p. 14) assume que "na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, etc”. Ele acrescenta que a pesquisa qualitativa permite descrições detalhadas de situações para que se possa compreender os indivíduos em seus próprios termos. Bogdan e Biklen (1999, p. 50) expõem que os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo em si, do que pelos resultados, o que interessa é compreender o significado que os participantes dão às suas experiências. Eles defendem que para o investigador qualitativo separar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. Em suma, a pesquisa qualitativa é indicada quando deseja-se compreender melhor particularidades de um determinado processo localizado, típico de estudos de caso e estudos de campo, em que o pesquisador está diretamente ligado ao objeto de pesquisa. Na busca por generalizações outros métodos são mais adequados. No caso do professor-pesquisador, a pesquisa qualitativa abre espaço para a sua experiência, o que muitas vezes resulta de uma estatística de acontecimentos e, portanto, embora informal, não deixa de ser quantitativa.

As dificuldades encontradas pelos professores para retirar os alunos do ambiente escolar em busca de cenários de aprendizagem condizentes com as suas necessidades, frequentemente limitam a ação docente à sala de aula. Mesmo que não existam dificuldades financeiras e por menor que seja a locomoção, faz-se necessário uma autorização dos pais ou responsáveis para que isso aconteça. Além disso, há sempre uma preocupação com a segurança dos estudantes, de modo que a direção da escola precisa disponibilizar funcionários para auxiliar o professor. Isso, se não inviabiliza completamente esse tipo de atividade, pelo menos reduz a sua frequência. Mas o professor não pode se acomodar, ele precisa encontrar saídas. A Matemática pode ser usada para descrever o mundo real, e esse mundo precisa ser transportado para a sala de aula. Não podemos ensinar os profissionais do futuro com os métodos do passado. Felizmente, o recente desenvolvimento tecnológico possibilita aos educadores e educandos o acesso a informações e imagens digitais de grande parte do nosso planeta e do espaço. Neste contexto, o sucesso das redes sociais e a inclusão de câmeras digitais e internet nos telefones celulares aumentaram o interesse, principalmente dos jovens, pelas fotografias. Então, por que não usá-las como ferramenta de ensino-aprendizagem?

Uma fotografia pode ser entendida como um modelo ou uma representação visual de estruturas reais. Esse modelo visual pode ser usado para desenvolver um modelo matemático que descreva tais estruturas. No entanto, muitas estruturas são complexas e requerem um bom nível de desenvolvimento cognitivo e grande interesse para descrevê-las por completo com uma única (ou um número reduzido) equação matemática. Por exemplo, podemos encontrar uma equação matemática que descreva a área externa de uma igreja, mas possivelmente esta seja uma estrutura complexa e muitos estudantes podem sentir-se desestimulados antes do final da tarefa. É preciso lembrar que o processo de aquisição do conhecimento é gradual e não é aconselhável queimar etapas. Mas isso não significa que não podemos usar a referida igreja como objeto de estudo. Essas construções geralmente são ricas em detalhes tanto nos componentes estruturais quanto nos decorativos, de modo que estudantes de todos os níveis de ensino encontrarão objetos de investigação adequados ao seu nível.

As fotografias têm a função de criar um "cenário de investigação", que é o ambiente necessário para o trabalho de investigação. Para Skovsmose (2000), um cenário para a investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Quando os alunos assumem essa postura, o cenário para a investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem, onde eles, os alunos, são os responsáveis pelo processo de aprendizagem. Esse cenário difere muito daquele desenvolvido na educação matemática tradicional centrada no professor, baseado na resolução de exercícios e sem a participação dos alunos. Bisognin, Bisognin e Isaia (2009) creditam parte do insucesso e desinteresse dos alunos pela Matemática a esse ensino tradicional.

O trabalho com fotografias não teve como objetivo encontrar equações que descrevessem por completo o objeto de estudo[10]. Nesta perspectiva, a Modelagem Matemática na Educação Matemática, não precisa necessariamente conduzir à construção de modelos matemáticos no sentido rigoroso das palavras, aqui o que importa é o processo de investigação por meio da matemática. Nas palavras de Barbosa:

> À medida que não compreendo atividades de Modelagem contendo encaminhamentos e fins a priori, sustento que os alunos podem investigar matematicamente uma dada situação, sem necessariamente construir um modelo matemático. O importante- assim julgo- não é a construção do modelo em si, mas o processo de indagação e investigação, que pode, ou não, envolver a formulação de um modelo matemático propriamente dito. (BARBOSA, 2001-a, p. 36)

Iniciei o trabalho com fotos escolhidas pelos alunos. Este procedimento pretendia verificar que tipo de objeto de estudo representa o interesse da maioria e quais eram as suas percepções iniciais sobre a matemática presente nessas estruturas. Em seguida, desenvolvi uma sequência de atividades fornecendo as fotos para a análise e organizando grupos de trabalho. As fotos fornecidas levaram em consideração o tema que se pretendia abordar em cada aula, evitando que muitas informações fossem colocadas ao mesmo tempo.

[10] Entretanto, foi construído um método de trabalho que permitiu que as dimensões das edificações e monumentos fossem obtidas pela análise de suas fotos.

Os estudantes deveriam analisar as fotografias buscando aplicações da Matemática e, sempre que possível, construir um modelo matemático que descrevesse as estruturas pesquisadas. Essas atividades foram desenvolvidas com um espaço de tempo entre elas e geralmente ocorreram após os comentários da professora sobre a atividade anterior. O intervalo de tempo entre as atividades é necessário para que os estudantes reflitam sobre cada trabalho e apliquem os conhecimentos adquiridos nas atividades subseqüentes.

Um número razoável de atividades é necessário para evitar que o desinteresse de algum aluno por uma determinada fotografia possa gerar frustrações no decorrer das atividades. Neste sentido, o professor não pode usar um único método de ensino, ele pode ter preferências, ou métodos com os quais sente-se mais a vontade, mas não pode permitir que a sua insegurança limite as oportunidades de seus alunos. Os educandos não reagem da mesma forma aos estímulos recebidos, cada um tem uma forma particular de aprender e o professor precisa estar atento a isso. Além disso, como defendemos em Camargo, Rocha e Matté (2011), “a diversificação dos métodos de ensino com o uso de atividades experimentais e participativas, softwares educativos e aplicadas a assuntos atuais e do cotidiano do aluno, podem motivá-lo, promovendo uma aprendizagem significativa”. Neste sentido, as fotografias foram uma das múltiplas abordagens adotadas para trabalhar a geometria.

Para Polya (1985, p. 11), não existe um método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor. De modo que até mesmo o ensino por repetição pode produzir alguns resultados. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) manifestam que não há oposição entre a aprendizagem mecânica e a significativa, elas representam um contínuo. Eles defendem que a aprendizagem mecânica é inevitável quando se trata de conceitos completamente novos para os alunos, mas posteriormente esta aprendizagem se transforma em significativa. Nestes casos, eles sugerem o uso de organizações prévias para evitar aprendizagem mecânica e facilitar a aprendizagem significativa. A aprendizagem é significativa quando os atributos relevantes dos conceitos em formação ficam retidos na memória do educando servindo de âncora para a formação dos próximos conceitos (AUSUBEL, NOVAK & HANESIAN, 1980; MOREIRA, 2006).

De acordo com Skovsmose (2000) o que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Neste sentido, percebo que a comunidade escolar ainda apresenta dificuldades para entender que os alunos aprendem de formas diferentes, seja por problemas na formação dos profissionais ou por falta das condições necessárias para que realizem um bom trabalho (falta de material, carga horária elevada, número de alunos em sala de aula, etc). Nas palavras de Tapia (1999) “o professor deve ser um pesquisador de suas próprias atitudes e das atitudes dos alunos, e estar disposto a realizar mudanças nas formas de trabalho conforme a realidade de cada turma, que envolve as características dos alunos. O que não podemos pensar é que a turma seja homogênea e que tudo dá certo a todos, isto é muito difícil de acontecer."

É preciso considerar que os indivíduos apresentam preferências que são pessoais e que a Matemática não terá a mesma importância na vida de todos. Algumas pessoas já me disseram que nunca usaram a matemática que aprenderam na escola. Acho que é um exagero, certamente elas usaram algumas coisas que não creditam à escola. Mas é possível que alguns conteúdos que trabalhamos não sejam usados por muitos de nossos estudantes que optam por áreas que não estão ligadas às ciências exatas. Eu mesmo, não uso profissionalmente as coisas que estudei em Literatura, por exemplo. Mas elas fazem parte da minha formação, e por mais que eu não perceba, possivelmente eu fosse uma pessoa um pouco diferente sem as experiências vividas nas aulas de Literatura. Além disso, para escolher o que queremos fazer como profissão precisamos conhecer o básico de cada área. Em minha opinião, isso seria suficiente para justificar o fato dos estudantes terem que estudar tantas disciplinas e conteúdos distintos. Com isso quero defender a ideia de que além da qualidade, a quantidade também é importante. Eu não concordo com a premissa de que para ter qualidade é preciso reduzir a quantidade. Para os educandos que pretendem trabalhar futuramente com áreas como Matemática, Física e Engenharia, a quantidade também é importante[11]. A solução ideal reside no equilíbrio, quantidade com boa qualidade. Já que o problema não está no conteúdo, mas na forma como ele é abordado. Talvez ao invés de reduzir os conteúdos abordados e o nível de cobrança, devêssemos usar os tais conteúdos como ferramentas para desenvolver habilidades mais gerais, incentivando o estudante a pensar por conta própria durante as nossas aulas.

Certamente, o professor não é o único responsável pelo desempenho do educando, são muitos os fatores a serem considerados (por exemplo, falta de perspectivas para o futuro, aspectos familiares, indisciplina, etc), mas ele é um dos profissionais indicados para tratar do problema e está diretamente ligado ao mesmo.

Neste sentido, um princípio básico para que ocorra a comunicação é adequar a linguagem ao público que se deseja atingir. Se o vocabulário dos estudantes não apresenta muitos recursos, devemos desenvolver atividades para melhorá-lo aos poucos, mas é necessário falar sempre numa linguagem que eles entendam. Neste sentido, os educadores e pesquisadores da Educação Matemática envolvidos com a Modelagem Matemática têm

[11] Estou pensando aqui no professor que constrói o seu próprio currículo. Obviamente, muitos conteúdos apresentados pelos livros didáticos não merecem tanto destaque e outros deveriam ser incluídos.

tomado os cuidados necessários para que os alunos e professores, principalmente do ensino básico os entendam.

Trata-se de um trabalho colaborativo entre professor e alunos. Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) também afirmam que o processo ensino-aprendizagem é bilateral, dinâmico e coletivo, e por isso, há a necessidade de que sejam estabelecidas parcerias entre o professor e os alunos e dos alunos entre si (BRASIL, 2002).

## 3. SONDAGEM – O INTERESSE DOS ESTUDANTES

A modelagem apresenta diferentes definições na literatura, mas os autores convergem em dois aspectos: ela deve começar com uma situação do mundo real e que seja do interesse do grupo de educandos.

Mas o que é o mundo real? A maioria dos trabalhos, refere-se a uma aplicação prática do cotidiano dos estudantes, sendo usado para destacar a aplicabilidade da matemática e a sua função social como ciência. É uma forma de se contrapor a excessiva abstração do Movimento da Matemática Moderna, onde as raras aplicações são geralmente criadas artificialmente pelo professor ou pelo autor do livro didático. Mas mundo real pode ter diferentes concepções, dependendo do grupo de trabalho. Por exemplo, o mundo real de um físico ou químico pode ser bem abstrato, já que para eles átomos, hádrons, léptons, quarks, etc. (estrutura microscópica), são reais e estão presentes na estrutura do mundo macroscópico. A teoria quântica é do cotidiano desse grupo de pessoas, já que ela é usada para explicar a estrutura da matéria. Embora possa nos parecer estranho, é possível que esses profissionais antes de morder uma maçã, fiquem olhando para ela e vizualizando micropartículas interagindo entre si por meio de forças explicadas pela teoria quântica. Assim, na minha concepção, a Modelagem Matemática aplicada à Educação é uma metodologia de ensino-aprendizagem que não se restringe ao ensino de Matemática, ela é muito mais ampla, a exemplo da definição de mundo real. Por exemplo, em Camargo, Rocha e Matté (2011) defendemos que "a inserção da Física nesta modalidade de trabalho é bastante produtiva, visto que muitos professores dessa disciplina já trabalham com a Modelagem Matemática, mesmo que não se dêem conta disso ou chamem por outro nome". Neste sentido, os professores das ciências irmãs da Matemática como Física, Química, Astronomia e Engenharia demonstram interesse pela matemática, de modo que a Modelagem está presente em muitas de suas atividades, especialmente as experimentais. Agora, nós matemáticos da Modelagem Matemática estamos vendo nessas ciências um excelente campo de investigação e integração. Afinal, foi assim que elas nasceram, juntas[12]. Essa tendência pode ser percebida nos inúmeros

[12] Um limitador na busca dessa interdisciplinaridade é a apropriação dos conteúdos, típica dos professores do método tradicional que concebem essas ciências como blocos fechados onde cada um é especialista na sua área e os limites não podem ser extrapolados. Trata-se de insegurança do professor, já que no método tradicional o professor transmite o conhecimento e situações como essa podem gerar comparações.

trabalhos que sugerem que a Modelagem é um processo de abordagem por meio da Matemática de problemas não matemáticos[13]. Porém, na minha concepção, todos os problemas que podem ser matematicamente tratados são problemas matemáticos, de modo que parece que a Modelagem (e de modo geral, a Matemática) ainda não se livrou completamente dos termos decorrentes do particionamento do conhecimento oriundo do método tradicional. Nesse sentido, penso que não existem problemas da Matemática, da Física ou da Química, existem apenas problemas, que podem ser abordados por métodos ou professores de diferentes áreas.

Quanto à necessidade de escolha do tema pelos educandos, creio que é muito mais uma concepção da maioria dos pesquisadores envolvidos com a Modelagem (com o que eu concordo, caso o professor tenha tal opção) do que uma necessidade. Porém, nem sempre é permitido ao professor alterar a estrutura curricular da escola e é melhor que ele faça adaptações do que deixe de trabalhar com Modelagem. Além disso, não concebo a Modelagem Matemática como a única estratégia de ensino-aprendizagem para a Matemática. Cairíamos no erro do ensino tradicional, onde se ensina sempre da mesma forma.

A Modelagem é um excelente método de ensino-aprendizagem, mas é preciso que os educadores lembrem que nem tudo o que fazem está errado. Existem outras abordagens interessantes que não devem ser abandonadas. Em Camargo e Rocha (2011) ao nos referirmos a utilização de computadores nas aulas de Matemática, lembramos que o computador vem para agregar, não para substituir. O mesmo vale para a Modelagem Matemática. Existem os professores do método da moda que seguidamente mudam tudo o que fazem para dedicar-se inteiramente ao método do momento. É preciso tomar cuidado, mudanças são essenciais para a evolução profissional, mas quem muda tudo com muita frequência não está seguro do que faz.

A teoria das inteligências múltiplas (GARDNER, 1995) indica que cada estudante apresenta uma forma particular de aprender. Portanto, cabe ao professor trabalhar com essas diferenças, criando os cenários necessários para que aflorem as múltiplas inteligências, de modo que os talentos individuais possam se somar na construção do conhecimento coletivo. Por outro lado, é importante que os educandos sejam incentivados a aprender de diversas maneiras, ampliando a capacidade de buscar novos conhecimentos e facilitando a aprendizagem no decorrer da vida. Eles também precisam aprender a se adaptar a situações

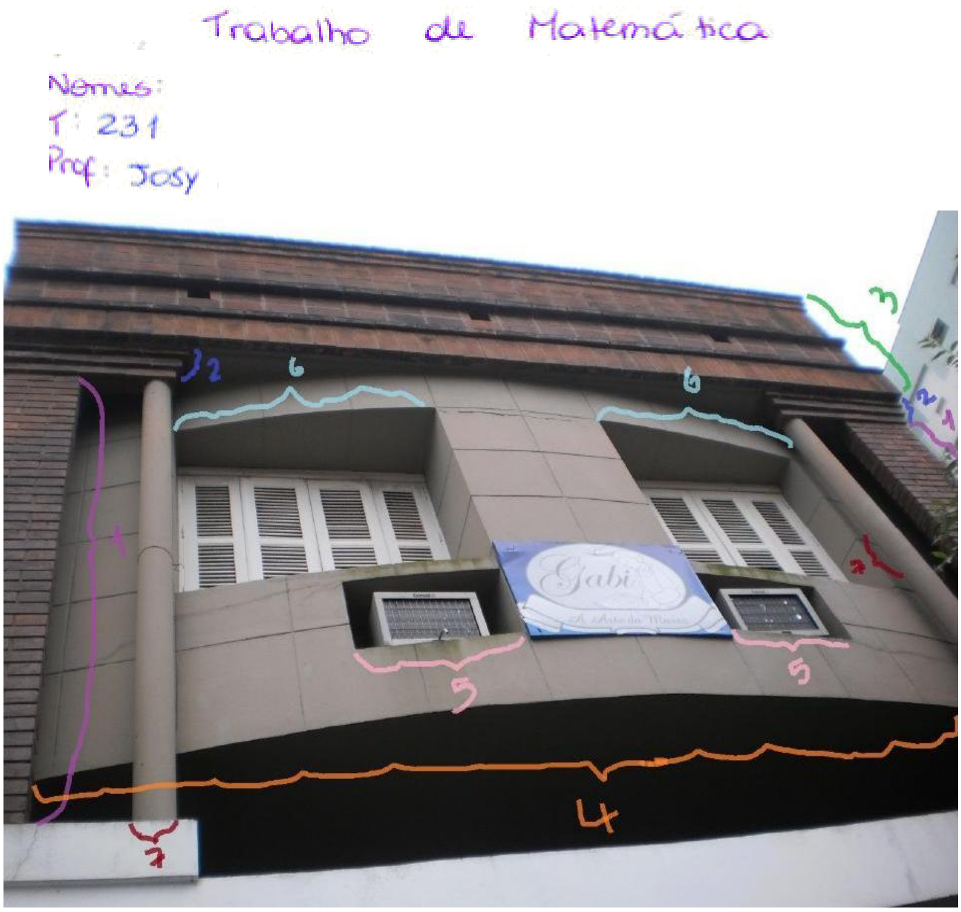
[13] Alguns autores se referem a problemas não matemáticos como situações ainda não convertidas para a linguagem matemática.

novas e, por isso, dentro de suas limitações devem realizar todas as atividades propostas pelo professor e não apenas as suas preferidas.

Como relatei anteriormente, para evitar transtornos para a escola e colegas de trabalho, decidi que usaria fotografias como geradoras de cenários de aprendizagem. Para descobrir o tipo de atividade que era do interesse da maioria dos estudantes da turma, propus um trabalho em grupo (duplas), onde eles deveriam fotografar alguma paisagem, objeto, edifício ou monumento onde percebessem a presença de matemática.

Ficou claro que a maioria dos alunos estava interessada em analisar edifícios ou monumentos históricos. Além disso, eles me indicaram os caminhos, já que alguns usaram proporcionalidade para estimar as medidas reais dessas construções a partir das fotos. Isso mostra que os alunos percebem a aplicação da Matemática trabalhada em sala de aula em ambientes externos a escola. É possível que esse resultado tenha sido influenciado pelo fato de essa professora (eu) ter o costume de brincar com os alunos nos corredores da escola mostrando a matemática presente nas estruturas e decorações dos prédios e ambientes. Eles costumam achar graça, mas gostam.

Nas páginas seguintes mostro um destes trabalhos (o estudante cometeu alguns erros) e no Anexo A apresento outros trabalhos completos.



1) A tijolos
↳ 90 unid.
por lado

a

a = 25 cm
b = 10 cm
c = 5 cm

$A_{total} = 2(ab + bc + ac)$
$A_t = 2(25 \times 10 + 10 \times 5 + 25 \times 5)$
$A_t = 2(250 + 50 + 125)$
$A_t = 2(425)$
$AT = 850 \text{ cm} \rightarrow \underbrace{8{,}5 m^2 \times 180}_{1530 m^2}$

$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 25 \cdot 10 \cdot 5$
$V = \underbrace{1250 m^3 \times 180}_{225\,000 m^3}$

2) A tijolos de cima
↳ 13,5 unid. por lado

a

$A_{total} = 2(ab + bc + ac)$
$A_t = 2(25 \times 10 + 10 \times 5 + 25 \times 5)$
$A_t = 2(250 + 50 + 125)$
$A_t = 2(425)$
$AT = 850 \text{ cm} \rightarrow \underbrace{8{,}5 m^2 \times 27}_{229{,}5 m^2}$

$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 25 \cdot 10 \cdot 5$
$V = \underbrace{1250 m^3 \times 27}_{33\,750 m^3}$

3) A tijolos superiores
↳ 206 unid.
ao total

$A_t = \underbrace{8{,}5 m^2 \times 206}_{1751 m^2}$

$V = \underbrace{1250 \times 206}_{257\,500 m^3}$

4) A quadrados do meio
↳ 50 inteiros
↳ 20/3 (pedaços)

a

a = 30 cm
a = 30 cm

$A_q = a^2$
$A_q = 30 \cdot 30 =$
$A_q = 900 \text{ cm} \rightarrow 9 m^2$

$A_t = 9 \times 50 = 450 m^2 + 9 \cdot 3 \times 20 = 60$
$AT = 450 + 60 = 510 m^2$

5) A retângulo (ar-cond.)
↳ 2 unid.



a

a = 50 cm
b = 30 cm

$A_t = a \cdot b$
$A_t = 50 \cdot 30 = 1500 \text{ cm} \rightarrow \underbrace{15 m^2 \times 2}_{30 m^2}$

6) A janelas
↳ 2 unid.



a

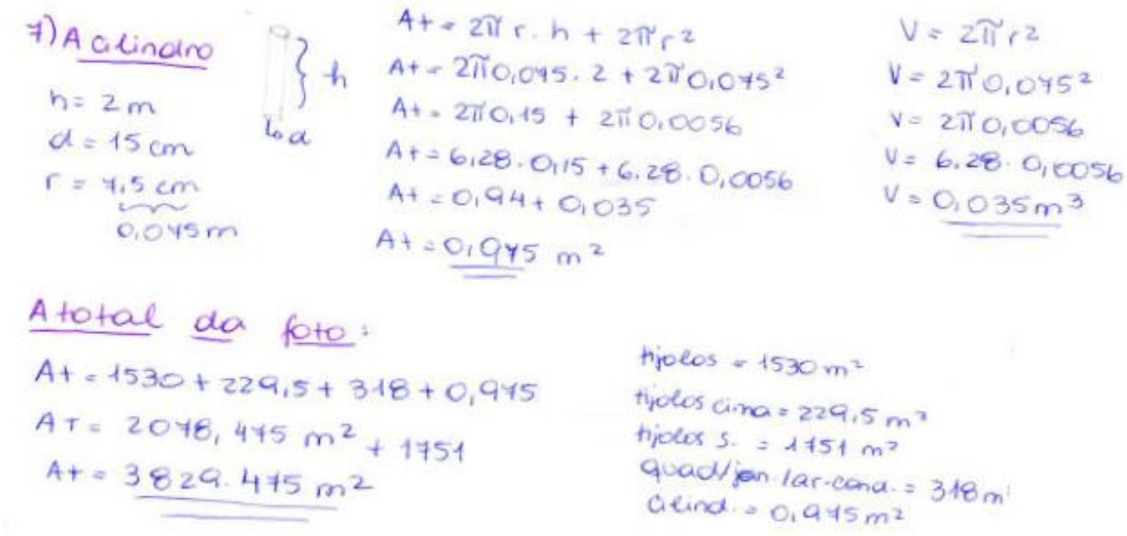
a = 90 cm
b = 90 cm

$A_t = a^2$
$A_t = 90 \cdot 90$
$A_t = 8\,100 \text{ cm}$
$A_t = \underbrace{81 m^2 \times 2}_{162 m^2}$

A final do meio (quadrados, janelas e ar-cond.)

$A_t = 510 - 162 + 30$
$A_t = 510 - 192$
$A_t = 318 m^2$

Q = 510 m²
ar-cond. = 30 m²
janelas = 162 m²



7) A cilindro

h = 2 m

d = 15 cm

r = 7,5 cm

0,075 m

h

6 a

$A_t = 2\pi r . h + 2\pi r^2$

$A_t = 2\pi 0,075 . 2 + 2\pi 0,075^2$

$A_t = 2\pi 0,15 + 2\pi 0,0056$

$A_t = 6,28 . 0,15 + 6,28 . 0,0056$

$A_t = 0,94 + 0,035$

$A_t = 0,975 \ m^2$

$V = 2\pi r^2$

$V = 2\pi 0,075^2$

$V = 2\pi 0,0056$

$V = 6,28 . 0,0056$

$V = 0,035 m^3$

A total da foto:

$A_t = 1530 + 229,5 + 318 + 0,975$

$A_T = 2078,475 \ m^2 + 1751$

$A_t = 3829.475 \ m^2$

tijolos = 1530 $m^2$

tijolos cima = 229,5 $m^2$

tijolos s. = 1751 $m^2$

quad/jan. lar-cana. = 318 m

cilind. = 0,975 $m^2$

A análise dos trabalhos dos estudantes sugere que eles identificam as figuras geométricas básicas e calculam a área e o volume das estruturas que apresentam tais formatos. É possível que isso seja uma consequência da abordagem adotada nos materiais didáticos. Nas últimas décadas houve um aumento significativo no número de atividades contextualizadas nos livros didáticos, mas elas geralmente mostram uma única estrutura e de fácil identificação. Atividades desse tipo pouco contribuem para o desenvolvimento de uma percepção matemática do mundo que nos cerca, mas representam um avanço em relação ao ensino tradicional. Para que o ensino da Matemática se desvincule das típicas atividades de treinamento, é necessário que sejam oferecidos aos educandos ambientes de aprendizagem com múltiplas informações, favorecendo a construção de múltiplas habilidades. A Modelagem Matemática apresenta essas características permitindo que a matemática flua livremente de um cenário do cotidiano (ou do interesse) do educando aceito como ambiente de aprendizagem. Cenários excessivamente delimitados para abordar um único tópico da Matemática podem não ser aceitos como ambientes de aprendizagem.

# 4. O MONUMENTO AO EXPEDICIONÁRIO MODELADO EM SALA DE AULA

No presente capitulo descrevo a primeira atividade realizada com os estudantes (Figura 4.1). Como se tratava de uma atividade introdutória, na qual deveriam ser expostos e discutidos, tanto os objetivos e procedimentos específicos da aula que estava para ocorrer quanto aqueles mais gerais relacionados com a atividade como um todo, optei por utilizar uma figura geométrica simples e fácil de ser analisada. A base que sustenta a Estátua da Vitória no Monumento ao Expedicionário, localizado no Parque Farroupilha, na cidade de Porto Alegre preenche esses requisitos.

Figura 4.1: Estudantes desenvolvendo as atividades de modelagem do presente capítulo.

## 4.1. O PARQUE FARROUPILHA

A origem do Parque Farroupilha é um potreiro, conhecido como campos da várzea do portão, construído para a pastagem do gado que chegava para abastecer os açougues de Porto Alegre, bem como para acampamento dos viajantes carreteiros vindos do interior para vender seus produtos na Capital.  A área foi doada à cidade em 24 de outubro de 1807 pelo então governador Paulo José da Silva Gama (FRANCO, 1998, p.103). Inicialmente era uma região alagadiça, mas no decorrer de sua história foi sendo aterrada (PORTO ALEGRE, 1994, p. 53).

Figura 4.2: Vista aérea do Parque Farroupilha, localizado na cidade de Porto Alegre.
Fonte: <http://www.aredencao.com.br/localizacao.htm>

Foram muitas as tentativas de lotear e vender a várzea, mas a carta de doação além de deixar claro a finalidade da área, impôs que ela não poderia ser alienada sem a licença de Sua Alteza Real. Isso foi importante para a preservação da área, principalmente na fase inicial de sua existência.

A primeira tentativa de venda da Várzea parece ter ocorrido entre 1820 e 1826 (FRANCO, 1998, p. 158). A Câmara municipal estaria com dificuldades para manter as crianças abandonadas, que à época ficavam sob a responsabilidade do município. Em outubro de 1826 o Imperador D. Pedro I negou o pedido informando que a Várzea tinha sido destinada a exercícios militares do exército (MACEDO, 1968).

Em 1833 uma nova tentativa por parte da Câmara que pretendia construir um jardim botânico e passeio público no potreiro da várzea e parte da área seria vendida para custear a obra. A carta de concessão teria frustrado o negócio preservando a área como logradouro público.

Em 1834 e em 1848 a presidência da Província teria enviado para a Câmara projetos de urbanização que foram rejeitados. Em 1837 a Província cedeu um terreno para a Santa Casa de Caridade que assumiu a tutela dos expostos.

Em 1880 foi construído um circo de touradas no interior dos campos da várzea. Em 1883 foi inaugurada a Igreja Nosso Senhor do Bom Fim e a Várzea passou a ser chamada de

Campos do Bom Fim. No ano de 1887 foi inaugurado, no interior dos Campos do Bom Fim, o Colégio Militar, cujo projeto inicial era de um quartel (inicialmente chamado de Escola de Guerra) em uma posição estratégica para a defesa da cidade. Em 1884 a cidade de Porto Alegre foi a primeira do País a libertar os seus escravos e em comemoração ao fato a Câmara Municipal teria proposto a mudança do nome da área para Campos da Redenção.

Em 1899 o intendente José Montaury conseguiu a licença para vender terrenos no alinhamento do Colégio Militar, mas por causa dos preços elevados não conseguiu vender nenhum terreno.

Em 1900 foi construído um velódromo na região atualmente ocupada pela Faculdade de Arquitetura da UFRGS. Nesse mesmo ano foi inaugurado o prédio da Escola de Engenharia em terreno que fazia parte dos Campos da Redenção. Há indícios de que no final dos anos 1800 ocorreram exposições agrícola e industrial na Redenção. Em 1901 ocorreu uma grande exposição com o que havia de mais moderno e avançado na época. Diversas cidades do estado teriam montado pavilhões para expor os seus produtos, música e arte em geral. Muitos desses pavilhões ficaram em pé até 1913. O primeiro ajardinamento do parque ocorreu em decorrência da exposição de 1901. Com a retirada dos pavilhões essa área foi cedida para a construção do Ginásio Júlio de Castilhos, da Faculdade de Direito, das Escolas de Engenharia, Observatório Astronômico e da Escola de Medicina. Assim se formou o Campus Central da UFRGS.

Em 1911 o primeiro terreno no alinhamento do Colégio Militar foi vendido e criada a avenida José Bonifácio. Durante o governo do Intendente Otávio Rocha, foi contratado o Arquiteto João Moreira Maciel (MACIEL, 1914) para desenvolver um projeto de embelezamento da cidade. O projeto propôs dividir o parque em 9 quadras, sendo que uma delas já estava ocupada pelos prédios da UFRGS e do Colégio Júlio de Castilhos. Este último foi completamente destruído por um incêndio. Felizmente o projeto de Moreira Maciel não saiu do papel.

Em 1927 a região noroeste do parque foi denominada Parque Paulo Gama e foi ajardinada (o Roseiral). Em 1928, o prefeito Alberto Bins contratou o arquiteto e urbanista francês Alfred Hubert Donat Agache para desenvolver um projeto de ajardinamento da Redenção. O projeto de Agache, apesar de manter as vias principais do projeto de Moreira Maciel mantém a unidade do Campo da Redenção.

Em 1935, durante o governo de Flores da Cunha foi inaugurado o Instituto de Educação Flores da Cunha. Nesse mesmo ano ocorreu no Campo da Redenção a Exposição Comemorativa do Centenário da Revolução Farroupilha com a participação de outros estados da federação, como Paraná, Santa Catarina, São Paulo, Minas Gerais, Distrito Federal, Pernambuco e Pará. A exposição contou com 3080 expositores e mais de um milhão de pessoas a visitaram (BINS, 1936, p. 34). No dia 19 de setembro o Campo da Redenção recebeu o nome de Parque Farroupilha, embora ainda hoje seja conhecido como Redenção. Nos preparativos para essa exposição parte do projeto de Agache foi implantado, tais como: o lago, o eixo principal e a fonte luminosa. Essas obras caracterizaram o Parque Farroupilha como parque urbano. O prefeito José Loureiro da Silva, em 1937, contratou o arquiteto e urbanista Arnaldo Gladosch como responsável pelo Plano Diretor da cidade. Arnaldo Gladosch propôe a criação de um sistema de Parques e Praças e se opõe a expansão do Campus da UFRGS no interior do parque. Em 1939 foram construídos o Estádio Ramiro Souto e o espelho d'água do eixo central.

Em 1941 foram introduzidos no parque os recantos Oriental, Europeu, Solar e Alpino. Em 1947 o espelho d'água foi transformado numa piscina olímpica onde foram realizadas competições.

No ano de 1953 foi inaugurado o Monumento ao Expedicionário.

Em 1961 foi construído o Auditório Araújo Vianna que anteriormente ficava na Praça da Matriz, mas foi demolido para a construção do prédio da Assembléia Legislativa. No ano de 1967 uma criança morreu afogada na piscina e o então prefeito Célio Marques Fernandes providenciou para que ela voltasse a ser um espelho d'água.

Em 1970, o único pavilhão mantido após a Exposição Farroupilha (Pavilhão do Pará), onde funcionava a Divisão de Parques e Jardins pegou fogo queimando a documentação sobre o Parque Farroupilha. Em 1978 tem início a feira que se tornou ponto de encontro dos portoalegrenses nos domingos, o Brique da Redenção.

O Parque Farroupilha foi tombado como Patrimônio Histórico e Cultural de Porto Alegre em 1997.

As sucessivas intervenções, com criação de recantos e monumentos deram ao Parque Farroupilha um ar eclético. Inicialmente os Campos da Várzea tinham 69 hectares, dos quais restam apenas 37 hectares.

Do ponto de vista paisagístico o Parque Farroupilha (Figura 4.2) foi inicialmente projetado de acordo com escola francesa que moldava os ambientes com traçados geométricos. Elementos da escola francesa, idealizados por Agache, podem ser observados no lago artificial e nos eixos do Parque Farroupilha. Esses elementos sobreviveram as diversas intervenções feitas no parque. A forma elíptica alongada do lago pode ser facilmente percebida. Os dois eixos, principal e secundário, com uma fonte marcando a intersecção entre eles é característica marcante da escola francesa. Os canteiros simétricos e geometricamente desenhados e as árvores em fileiras criando eixos laterais ao longo dos eixos principal e secundário destacam o caráter matemático dessa escola (LUZ & OLIVEIRA, 2004).

## 4.2. O MONUMENTO AO EXPEDICIONÁRIO E A ESTÁTUA DA VITÓRIA

A ideia de um monumento em homenagem aos "pracinhas" brasileiros que lutaram na Segunda Guerra Mundial foi uma iniciativa do jornal Correio do Povo que em 1946 propôs um concurso público para a construção de um arco no Parque Farroupilha. O projeto escolhido foi o de Antônio Caringi que propunha a construção de um arco duplo em granito. O Monumento ao Expedicionário, também chamado Altar da Pátria, foi inaugurado em 27 de maio de 1953. Esse monumento foi alvo de algumas críticas justamente por seu arco duplo.

Na parte posterior ao arco foi colocada uma estátua em bronze de uma mulher pisando uma cobra e empunhando numa das mãos uma armadura e na outra uma lança. A estátua simboliza a vitória e ocupa uma posição de destaque em cima de uma base em formato de paralelepípedo.

## 4.3. A MODELAGEM MATEMÁTICA USANDO FOTOGRAFIAS DO MONUMENTO AO EXPEDICIONÁRIO

Após as discussões e esclarecimentos iniciais, os estudantes receberam uma foto da professora junto à base que sustenta a Estátua da Vitória no Monumento ao Expedicionário (Figura 4.3), localizado no Parque Farroupilha, na cidade de Porto Alegre. Os alunos mediram a altura real da professora na sala de aula e a sua altura na foto. Com esses dados estabeleceram uma escala entre as medidas reais e as medidas na fotografia. A escala permitiu que os educandos determinassem as dimensões do paralelepípedo que forma a base e calculassem a área e o volume.

Os alunos trabalharam em duplas, mas discussões de ordem geral foram permitidas. No entanto, as perguntas que os alunos fizeram durante o trabalho, em geral, foram respondidas com outras perguntas que os direcionava para possíveis soluções. Não permiti que os alunos se locomovessem entre os grupos e que trocassem ideias sobre os detalhes da análise, pois o objetivo era que os membros das duplas trocassem ideias chegando a um consenso. Neste sentido, a formação de pequenos grupos de trabalho permite que todos os alunos participem das tarefas que não deixam de ser coletivas, já que interações com o grande grupo são permitidas, desde que não desincentive a interação nos pequenos grupos.

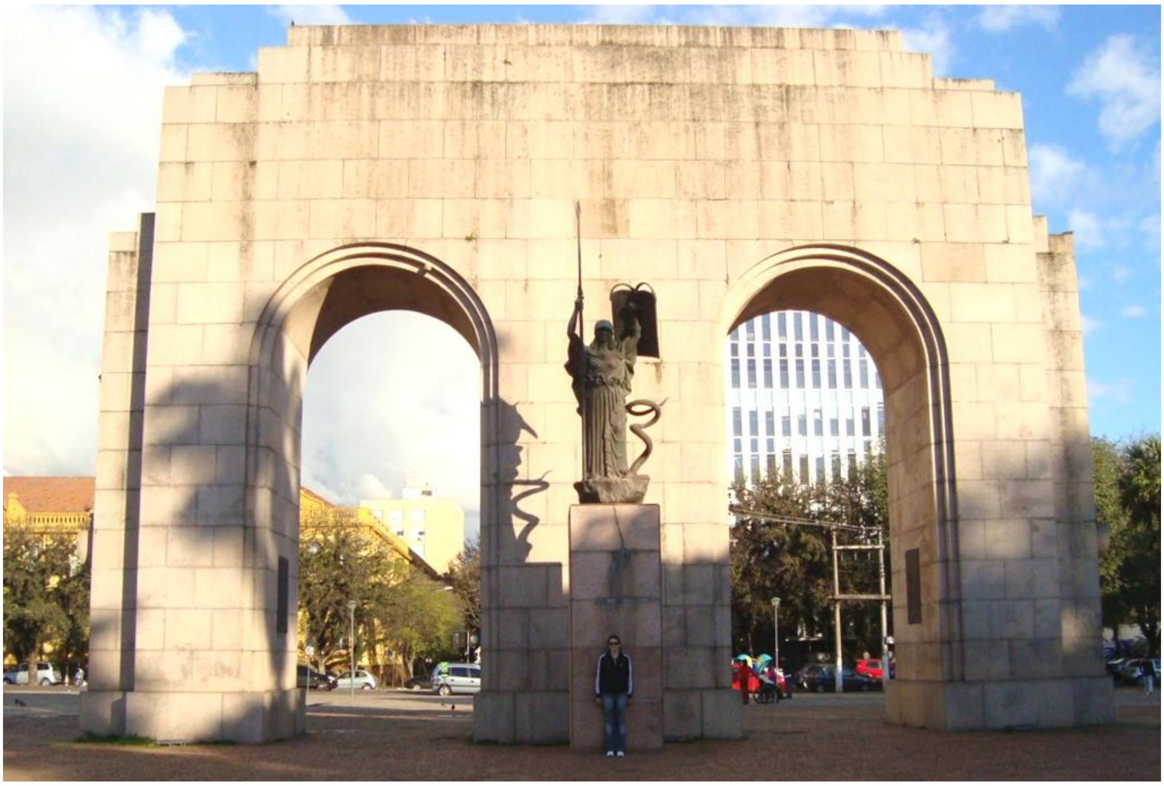


Figura 4.3: Fotografia da professora junto à base que sustenta a Estátua da Vitória no Parque Farroupilha.

No que se refere a formação dos grupos, Johnson, Johnson e Holubec (1998) argumentam que os grupos formais são o melhor exemplo de grupos cooperativos, já que os educandos se envolvem ativamente nas atividades e se organizam melhor, integrando os seus conhecimentos.

Na fase seguinte, foi abordada a questão da precisão das medidas em atividades experimentais ou observacionais. Questionei sobre os efeitos de um erro de 2 cm na medida da altura real da professora para a determinação das dimensões, da área e do volume do paralelepípedo de base quadrada. Em seguida, solicitei que estimassem os erros nos resultados para um erro de 1 mm na altura da professora na foto.

Os estudantes estavam inicialmente muito ansiosos com o trabalho proposto, pois não queriam cometer equívocos e por nunca terem feito uma atividade deste tipo tiveram dificuldades para interpretar as questões que estavam sendo propostas. O planejamento era completar a atividade em 2 períodos de 50 minutos cada, mas isso não foi possível e tive que estender a atividade por mais um período, já que foi necessária a minha intervenção em várias situações para esclarecer o que eles deveriam fazer. Mas no final, eles ficaram encantados com a possibilidade de obter tantas informações sobre o monumento sem a necessidade do deslocamento para medi-lo - bastando para isso o conhecimento de uma medida para ser usada como padrão - no nosso caso, a altura da professora. Um aluno comentou: “como que a gente nunca pensou nisso?”

Segundo Perrenoud (1995, p. 32),

> A Escola deve oferecer situações escolares que favorecem a formação de esquemas de ações e de interações relativamente estáveis e que, por um lado, possam ser transpostas para outras situações comparáveis, fora da escola ou após a escolaridade.

O presente trabalho foi planejado e desenvolvido pensando na formação dos educandos como indivíduos que vivem num mundo em constante modificação. Para que sejam cidadãos livres, eles precisam desenvolver a capacidade de aprender por conta própria longe da Escola. Além disso, com o desenvolvimento tecnológico é fundamental que os novos profissionais estejam dispostos a trabalhar em grupos, agregando o seu conhecimento específico ao dos demais componentes para resolver problemas e gerar novos conhecimentos.

## 4.4. ROTEIRO

As atividades foram guiadas por um roteiro, cuja principal função era criar um ambiente de investigação.

**1)** Qual é a <u>altura</u> do paralelepípedo que sustenta a Estátua da Vitória?

**2)** Qual é a <u>largura</u> do paralelepípedo que sustenta a Estátua da Vitória?

**3)** a) Qual é a área lateral do paralelepípedo (em $m^2$)?

b) Qual é a área total do paralelepípedo (em $m^2$)?

**4)** Qual é o volume do paralelepípedo (em $m^3$)?

**5)** Ao cometermos um erro de 2cm ao medirmos a altura real da professora., estaremos alterando os resultados dos cálculos:

a) da altura do paralelepípedo em quanto (em m)?

b) Qual seria o erro (em m)?

c) da largura do paralelepípedo em quanto (em m)?

d) Qual seria o erro (em m)?

**6)** a) Qual seria o efeito de um erro de 2cm na medida da altura da professora no resultado do cálculo da área total (em $m^2$)?

b) Qual seria o efeito de um erro de 2cm na medida da altura da professora no resultado do cálculo do volume (em $m^3$)?

**7)** a) Se errarmos em 1mm (0,1cm) a altura da professora na foto estaremos alterando o cálculo da altura em quanto (em m)?

b) Quais seriam os erros (em m)?

c) Se errarmos em 1mm (0,1cm) a altura da professora na foto estaremos alterando o cálculo da largura em quanto (em m)?

d) Quais seriam os erros (em m)?

**8)** a) Considerando os cálculos da questão anterior (q.7) qual seria a área total (em $m^2$)?

b) Qual seria o erro (em $m^2$)?

c) Qual seria o volume (em $m^3$)?

d) Qual seria o erro (em $m^3$)?

## 4.5. RESULTADOS

**Questões 1 e 2:** A Tabela 2 mostra os resultados das medidas de cada dupla e da professora para a altura (Q.1) e largura (Q.2) do paralelepípedo. As Figura 4.4, Figura 4.5 e Figura 4.6 ilustram o processo de obtenção dos dados realizado pelos educandos.

Tabela 2 - Estimativas da altura e largura do paralelepípedo que sustenta a Estátua da Vitória. Dados obtidos nas questões 1 e 2.

| Dupla | Q.1 (m) | Q.2 (m) |
|---|---|---|
| A | 3,70 | 1,44 |
| B | 3,51 | 1,28 |
| C | 3,51 | 1,28 |
| D | 3,76 | 1,37 |
| E | 3,60 | 1,28 |
| F | 3,53 | 1,28 |
| G | 3,51 | 1,28 |
| H | 3,50 | 1,27 |
| I | 3,50 | 1,38 |
| J | 3,40 | 1,24 |
| K | 3,76 | 1,36 |
| L | 3,51 | 1,28 |
| M | 3,87 | 1,32 |
| N | 3,53 | 1,18 |
| O | 3,40 | 1,27 |
| P | 3,76 | 1,37 |
| Q | 3,51 | 1,28 |
| **PROF.** | 3,51 | 1,27 |

A Figura 4.4 mostra a resolução da questão 1 feita pela dupla D. Essa dupla mostra os detalhes da obtenção da relação entre as medidas dos objetos e de suas representações fotográficas. Os parâmetros mensurados foram a altura da professora e a sua altura na foto. Segundo a dupla D, a altura da professora é 171 cm e a altura da mesma professora na foto que eles receberam (Figura 4.3) é igual a 1,5cm. A razão entre esses parâmetros forneceu a escala da foto, valor este que foi usado para estimar a altura do paralelepípedo partindo da medida deste na fotografia. De acordo com as suas medidas, a altura do paralelepípedo na foto é de 3,3cm, o que resultou numa estimativa de 3,76m para a altura real do sólido geométrico.

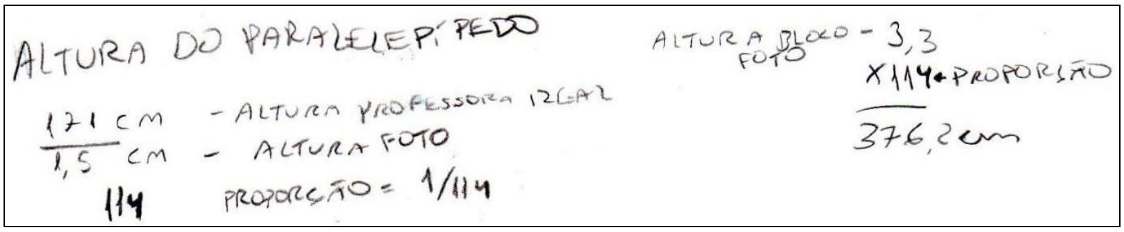



Figura 4.4: resolução da dupla D para a questão de número 1.

A dupla G (Figura 4.5) preferiu usar uma regra de três, entendendo que existe uma proporcionalidade entre as medidas reais e as medidas na foto.  Para esse grupo a professora tem 170 cm de altura, mas na foto essa altura é de 1,6 cm. As pequenas diferenças nos parâmetros medidos pelos dois grupos geraram uma diferença significativa na estimativa da altura do paralelepípedo (25,6cm).

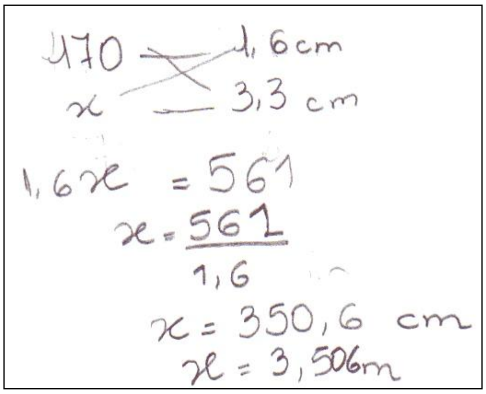



Figura 4.5: resposta da dupla G para a questão 1.

Na Figura 4.6 é apresentada a estimativa da largura do paralelepípedo feito pela dupla G, assumindo a existência de uma proporcionalidade entre os parâmetros reais de um objeto e esses mesmos parâmetros medidos na fotografia.

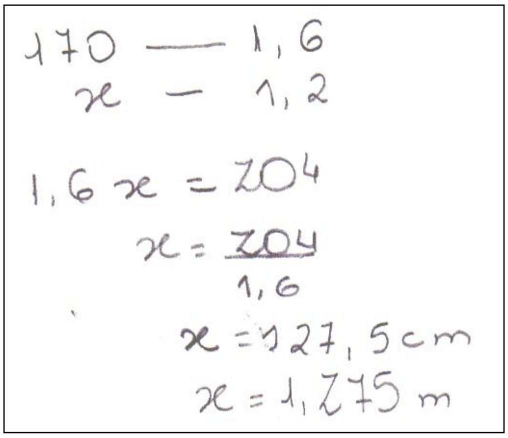



Figura 4.6: resposta da dupla G para a questão 2.

A altura real da professora é de 170cm, mas na foto essa altura é de apenas 1,6cm. A altura do paralelepípedo na foto é igual a 3,3cm. Com esses dados, os valores estimados para a altura e largura do paralelepípedo são 3,5m e 1,27m, respectivamente.

**Questão 3:** Após as estimativas da altura e largura do paralelepípedo os estudantes foram solicitados a utilizar esses resultados para derivar as áreas lateral e total da base da Estátua da Vitória. Usando os dados medidos pela professora obtém-se uma área lateral de 17,81 $m^2$ e área total igual a 24,31 $m^2$.

A Figura 4.7 apresenta a resolução da dupla H para a presente questão. As diferenças nos resultados, em relação aos da professora, são consequência dos diferentes valores medidos nas questões anteriores. No entanto, essa dupla é uma das poucas exceções, a maioria dos estudantes cometeram equívocos em pelo menos um dos cálculos.

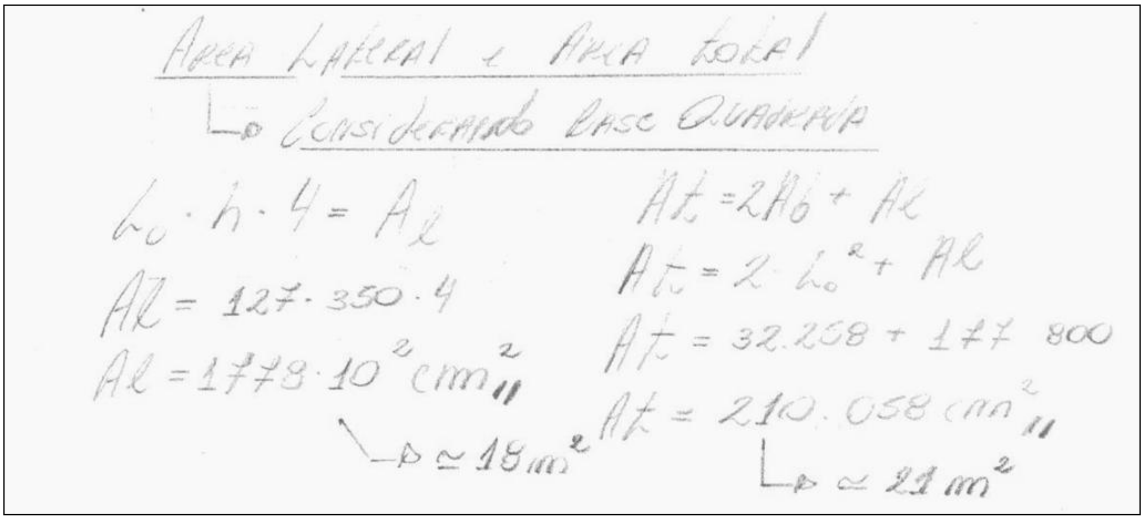


Figura 4.7: resposta do grupo H para a questão 3.

**Questão 4:** Procedimento similar ao da questão anterior foi solicitado na presente questão para obter o volume do paralelepípedo. A professora obteve um volume igual a 5,68 $m^3$. A Figura 4.8 mostra a solução da dupla B.

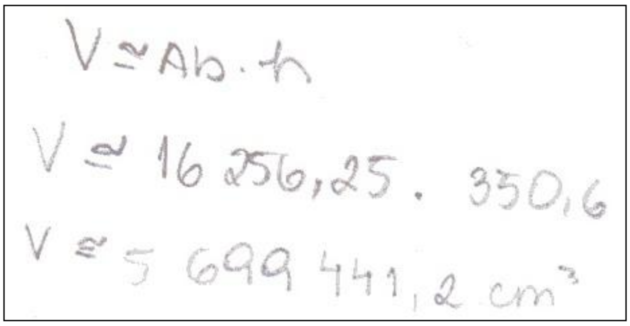



Figura 4.8: resolução da questão 4 pela dupla B.

**Questão 5:** Iniciei essa fase do trabalho questionando sobre o quê geraria um erro maior na estimativa da altura e da largura do paralelepípedo, um erro de 2cm na medida da altura real da professora ou 0,1cm na medida dessa altura na foto. Percebi que os estudantes não tinham nenhuma noção sobre incerteza ou erro nos processos de medição. Após alguns esclarecimentos a maioria dos estudantes da turma respondeu que um erro de 2cm na medida da altura real da professora acarretaria um erro na estimativa das medidas do paralelepípedo maior do que aquele resultante de um erro de 0,1cm na altura da professora na foto. No entanto, um aluno respondeu que o erro de 0,1cm resulta em um erro maior nas estimativas para o paralelepípedo, e lembrou que é uma questão de escala, no sentido de que 0,1cm representa uma fração maior da altura da professora na foto do que fração que 2cm representa para a altura real da professora.

Nas Figura 4.9 e Figura 4.10, mostro a resolução da questão 5 na ótica das duplas F e P, respectivamente. A dupla F faz parte de uma minoria que compreendeu a ideia central do tratamento de erros. Entretanto, a maioria dos estudantes não compreenderam o que estava sendo proposto, visto que muitos deles calcularam as dimensões do paralelepípedo assumindo a alteração na altura da professora, mas não explicitaram o erro. A dupla P (Figura 4.10) é um exemplo desse grupo de alunos.

Os resultados da professora foram a altura de 3,55m, o erro na altura de 0,04m, a largura de 1,29m e o erro na largura igual a 0,015m.

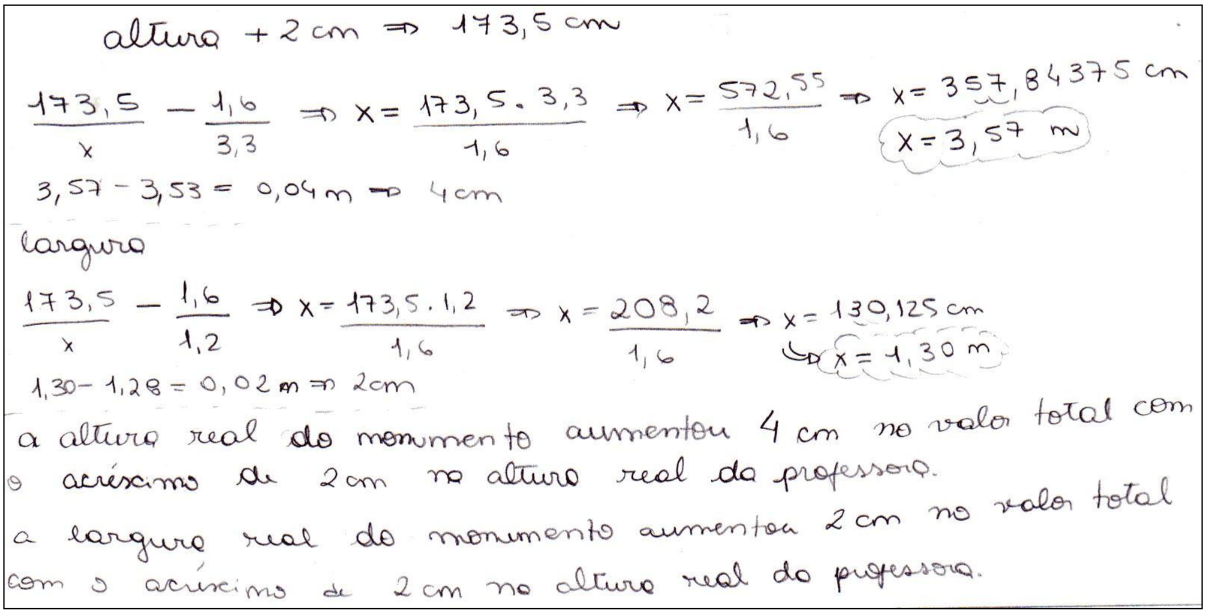



Figura 4.9: resposta da dupla F para a questão 5.

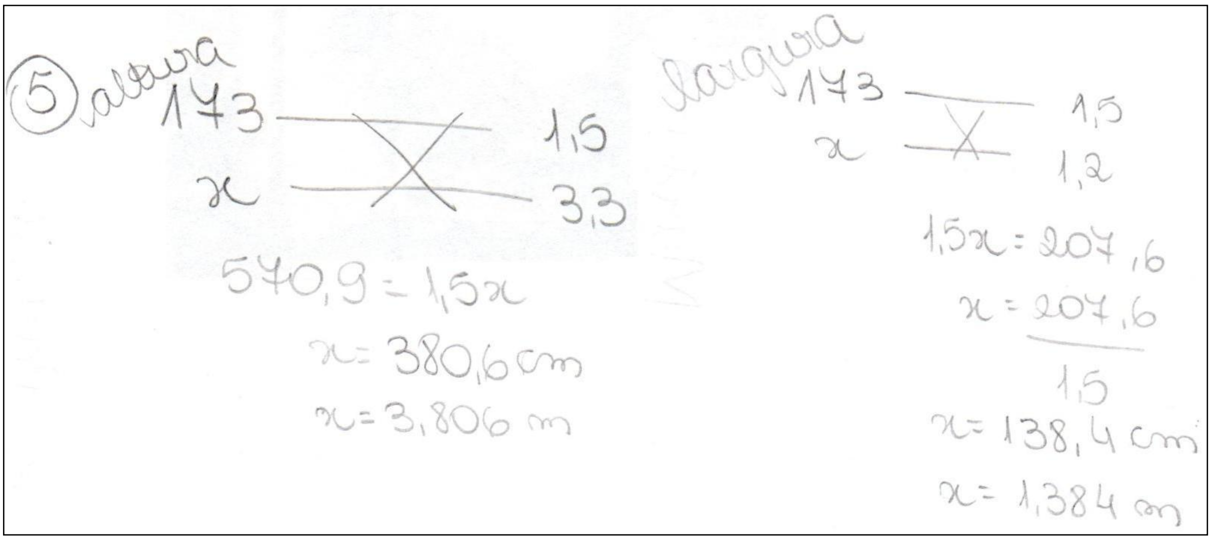



Figura 4.10: resposta da dupla P para a questão 5.

**Questão 6:** O passo seguinte foi verificar as consequências dos erros de medida considerados na questão anterior para o cálculo da área total e do volume do paralelepípedo do Parque Farroupilha. Os resultados obtidos pela professora foram: a área total igual a 21,59 m$^2$, o erro na estimativa da área total igual a 2,72 m$^2$, o volume de 5,2 m$^3$ e o erro na estimativa do volume igual a 0,48 m$^3$. Foram poucos os alunos que fizeram corretamente a questão completa. A Figura 4.11 mostra a solução da dupla O para a presente questão.

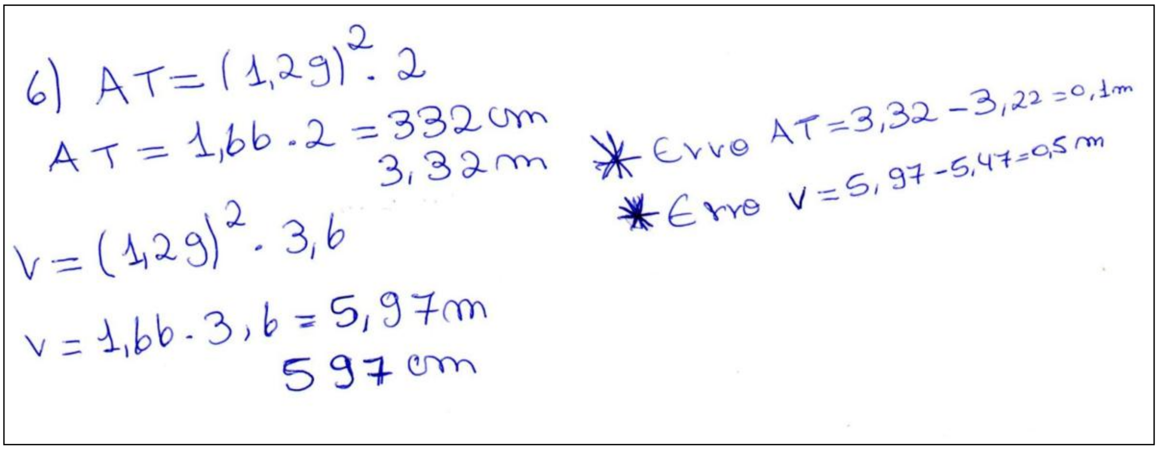



Figura 4.11: resposta da dupla O para a questão 6.

**Questão 7:** Os efeitos na estimativa das dimensões do paralelepípedo devido a possíveis descuidos na obtenção da altura da professora na fotografia são tratados na presente questão. A professora obteve como resultados a altura de 3,30 m, o erro na altura de 0,20 m, a largura de 1,2 m e o erro na largura de 0,07m.

A dupla F mais uma vez realizou a tarefa de modo simples e comunicou os resultados de forma clara, mas fez um arredondamento no calculo da altura para menos o qual o correto seria para mais neste caso, e teria obtido um erro menor ainda. (Figura 4.12). A dupla B também fez um bom trabalho (Figura 4.13).

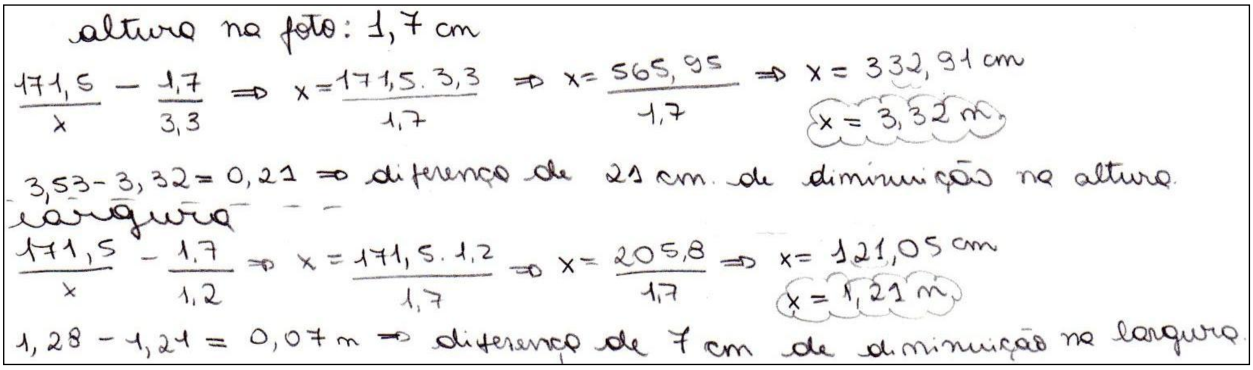



Figura 4.12: resolução da dupla F para a questão 7.

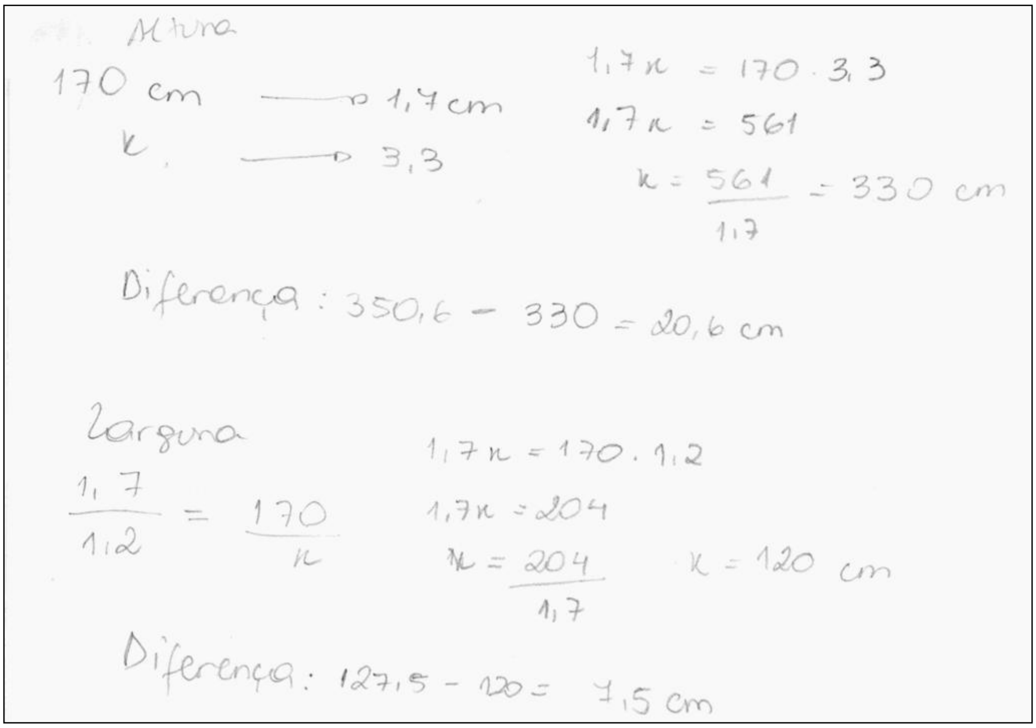



Figura 4.13: resposta da dupla B para a questão 7.

Os resultados da presente questão, quando comparados com aqueles da questão 5, permitem concluir que o estudante que defendeu que o erro de 0,1cm na altura da professora na foto produziria efeitos mais expressivos nas estimativas das dimensões da base da Estátua da Vitória estava correto (questão 5).

**Questão 8:** Considerando os dados obtidos na questão anterior, os alunos calcularam novamente a área total e o volume estimando os erros produzidos por uma variação de 0,1cm na altura da professora medida na foto. A área total, por mim calculada, é de 18,72 $m^2$. Subtraindo esse valor do resultado da questão 3, obtive um erro de 5,59 $m^2$. O volume obtido foi de 4,752 $m^3$ e o erro no volume igual a 0,93 $m^3$.

Na Figura 4.14 mostro a resolução da presente questão pela dupla M e na Figura 4.15 o mesmo para a dupla N. Na presente questão, os estudantes apresentaram dificuldades e poucos deles obtiveram resultados satisfatórios.

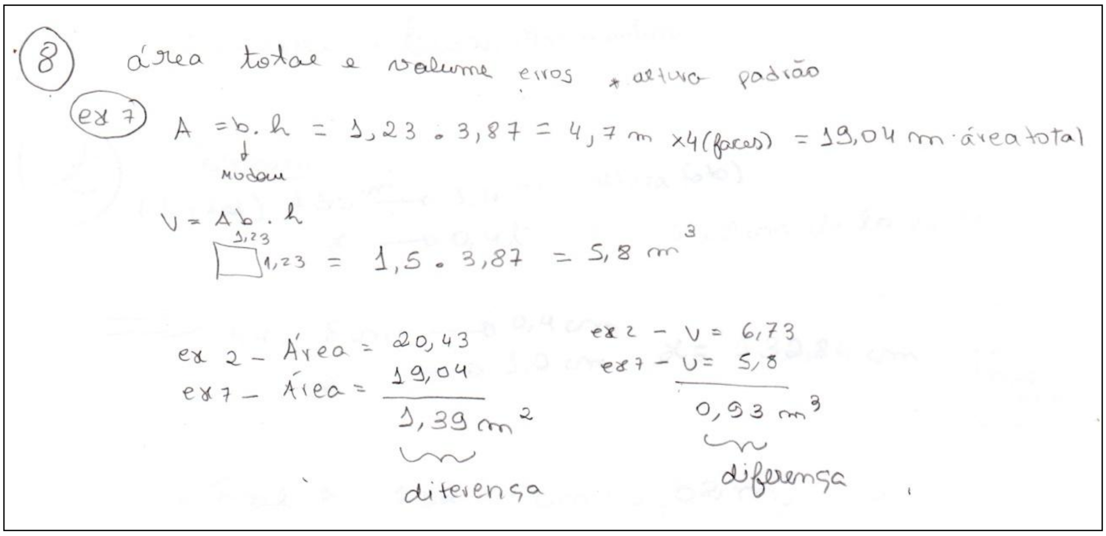



Figura 4.14: resposta da dupla M para a questão 8.

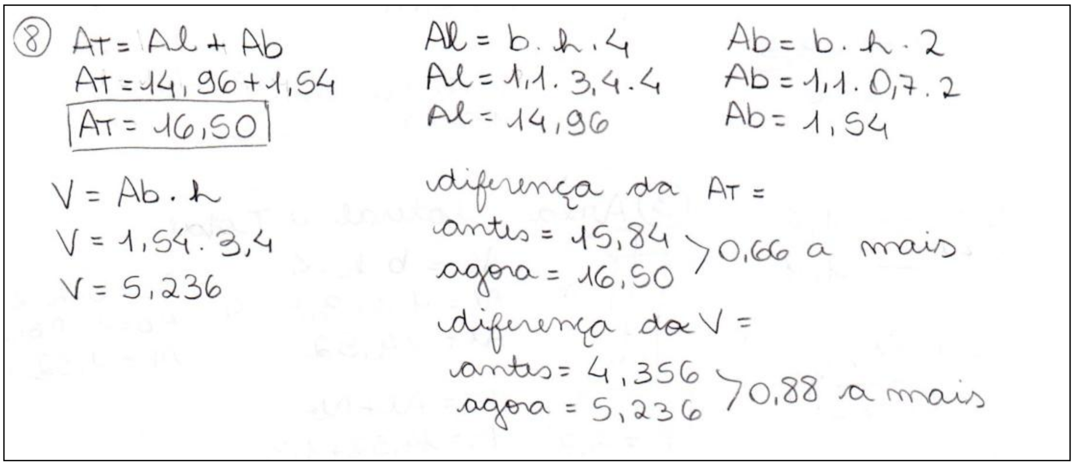



Figura 4.15: resposta  dupla N para a questão 8.

Os estudantes apresentaram muitas dificuldades para desenvolver as atividades propostas. Era esperado que eles tivessem problemas na obtenção dos dados, visto que não estão acostumados com atividades experimentais. No entanto, equívocos na resolução das questões do roteiro, em muitos casos, não permitiram que eles chegassem às conclusões que eu esperava que chegassem. Mas essa foi a primeira atividade e eles terão outras oportunidades para pensar por conta própria.

Em minha opinião, discussões como as que ocorreram quando questionei os alunos sobre os efeitos nos resultados de erros de medida na altura real da professora e na foto, adquirem um significado maior para aprendizagem desses educandos do que a simples transmissão de conteúdos pelo professor. Mas obviamente é mais fácil controlar e evitar excessos por parte de alunos menos interessados no cotidiano escolar numa aula expositiva e com pouca participação dos estudantes. No entanto, penso ser possível a abertura para uma maior participação dos estudantes sem que necessariamente a aula se desorganize.

# 5. MODELANDO O MONUMENTO EM HOMENAGEM A SANTOS DUMONT

Nesse capítulo abordamos o tronco de pirâmide por meio de uma fotografia do Monumento em homenagem a Santos Dumont, patrono da Força Aérea Brasileira, também localizada no Parque Farroupilha na cidade de Porto Alegre. Adicionalmente, abordamos os erros de medida nas atividades experimentais.

## 5.1. O MONUMENTO EM HOMENAGEM À SANTOS DUMONT

O Monumento em homenagem à Santos Dumont (Figura 5.1) está localizado no Parque Farroupilha em Porto Alegre e, é constituído de um busto depositado sobre uma base que pode ser aproximada por um tronco de pirâmide de base quadrada, que por sua vez, é sustentado por uma plataforma. Esse Monumento foi inaugurado em 20 de julho de 1973, por ocasião dos festejos em comemoração ao centenário do homenageado. O busto foi moldado em bronze pelo Exército Brasileiro.

Figura 5.1: Fotografia do monumento em homenagem a Santos Dumont. O monumento localiza-se no Parque Farroupilha na cidade de Porto Alegre no Rio Grande do Sul.

## 5.2. A ATIVIDADE DE MODELAGEM

Figura 5.2: Estudantes trabalhando com as atividades de modelagem do monumento em homenagem à Santos Dumont.

Para iniciar as atividades forneci aos estudantes um roteiro e uma fotografia do monumento. Como mostra o roteiro, foi fornecido como parâmetro de medida a altura da plataforma que sustenta o tronco de pirâmide (10 cm). Com essa informação, os estudantes foram capazes de determinar o volume da plataforma. Além disso, estimaram as medidas da altura, apótema, aresta lateral e das arestas das bases menor e maior da base aproximada por um tronco de pirâmide. Esses parâmetros permitiram o cálculo das áreas lateral e total e do volume do tronco de pirâmide.

Após realizados esses cálculos, os estudantes foram informados das reais medidas das dimensões do monumento feitas pela professora no Parque Farroupilha. Os alunos refizeram os cálculos com os novos dados. Feito isso, calcularam as diferenças entre os resultados obtidos, estimando os erros.

A Figura 5.2 mostra alguns educandos fotografados durante as atividades desenvolvidas no presente capítulo.

## 5.3. ROTEIRO

O presente roteiro está subdividido em duas partes. Na primeira parte, os parâmetros do tronco de pirâmide e de sua base de sustentação são estimados (questões 1 à 10). A segunda parte é dedicada à abordagem dos erros de medida (questões 11 à 14).

**1)** Sabendo que a plataforma que sustenta o tronco de pirâmide tem altura de 10 cm, encontre a largura dessa plataforma (em cm).

**2)** Qual é o volume dessa plataforma com as medidas encontradas (em $m^3$)?

**3)** Qual é a medida da aresta da base maior do tronco de pirâmide (em cm)?

**4)** Qual é a medida da aresta da base menor do tronco de pirâmide (em cm)?

**5)** Qual a medida da altura do tronco de pirâmide (em cm)?

**6)** Qual seria o apótema do tronco de pirâmide (em cm)?

**7)** Qual é a aresta lateral do tronco de pirâmide (em cm)?

**8)** Qual é o volume do tronco de pirâmide (em $m^3$ )?

**9)** Qual a área lateral do tronco de pirâmide (em $m^2$ )?

**10)** Qual é a área total do tronco de pirâmide (em $m^2$ )?

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, refazendo os cálculos com as medidas do tronco de pirâmide fornecidas pela professora. Então temos:

altura da plataforma = 10 cm

largura da plataforma = 200 cm

h = 131,74 cm (altura do tronco)

ap = 136 cm (apótema do tronco)

aresta lateral = 140 cm

aB = 120 cm (aresta da base maior)

ab = 52 cm (aresta da base menor)

**11)** a) Qual é o volume do tronco de pirâmide a partir das medidas feitas pela professora (em $m^3$)?

b) Qual foi o erro em relação ao volume calculado e o volume obtido a partir das medidas feitas pela professora (em $m^3$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**12)** a) Qual é o volume da plataforma que sustenta o tronco de pirâmide (em $m^3$)?

b) Qual foi o erro (em $m^3$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**13)** a) Qual é a área lateral do tronco de pirâmide calculado a partir das medidas feitas pela professora (em $m^2$)?

b) Qual foi o erro em relação a área calculada e a área obtida a partir das medidas feitas pela professora (em %)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**14)** a) Qual é a área total do tronco de pirâmide calculado a partir das medidas feitas pela professora (em $m^2$)?

b) Qual foi o erro em relação a área calculada e a área obtida a partir das medidas feitas pela professora (em %)?

## 5.4. RESULTADOS

A Tabela 3 mostra os parâmetros estimados pelos estudantes para o monumento em homenagem a Santos Dumont, usando a fotografia mostrada na Figura 5.1.

Tabela 3 – Parâmetros estimados para o monumento em homenagem a Santos Dumont.

| Dupla | Q.1(cm) | Q.3(cm) | Q.4(cm) | Q.5(cm) |
|---|---|---|---|---|
| A | 220,00 | 120,00 | 46,00 | 120,00 |
| B | 220,00 | 116,00 | 46,00 | 122,00 |
| C | 218,00 | 118,00 | 46,00 | 122,00 |
| D | 216,00 | 114,00 | 46,00 | 160,00 |
| E | 208,00 | 118,00 | 46,00 | 122,00 |
| F | 218,00 | 116,00 | 46,00 | 122,00 |
| G | 216,00 | 116,00 | 48,00 | 122,00 |
| H | 50,00 | 116,00 | 50,00 | 120,00 |
| I | 180,00 | 100,00 | 40,00 | 100,00 |
| J | 220,00 | 116,00 | 46,00 | 122,00 |
| K | 220,00 | 120,00 | 50,00 | 120,00 |
| L | 216,00 | 116,00 | 46,00 | 140,00 |
| M | 216,00 | 118,00 | 46,00 | 122,00 |
| N | 220,00 | 120,00 | 46,00 | 120,00 |
| O | 180,00 | 95,00 | 40,00 | 101,60 |
| P | 220,00 | 120,00 | 56,00 | 122,00 |
| Q | 220,00 | 116,00 | 46,00 | 120,00 |
| **PROF** | 218,00 | 118,00 | 46,00 | 122,00 |

**Questão 1:** para iniciar as atividades forneci a altura da plataforma que sustenta o tronco de pirâmide e os estudantes deveriam estimar a sua largura analisando uma fotografia do monumento.

A Figura 5.3 apresenta os cálculos da dupla C para a questão 1. Como mostra a Tabela 2, o resultado da dupla é semelhante ao da professora.

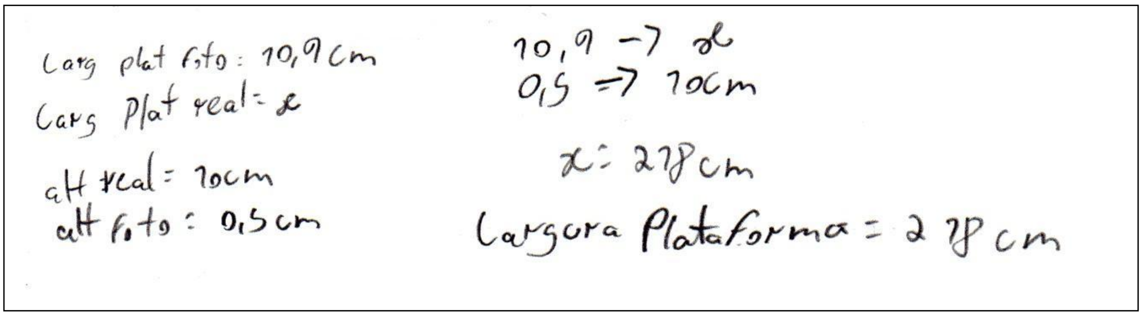



Figura 5.3: Resposta da dupla C para a questão 1.

**Questão 2:** A maioria dos estudantes calcularam corretamente o volume do sólido que sustenta o tronco de pirâmide. A Figura 5.4 apresenta a solução da dupla F para a questão. Os desvios em relação ao resultado da professora ocorreram por descuidos ou como consequência do resultado da questão anterior.

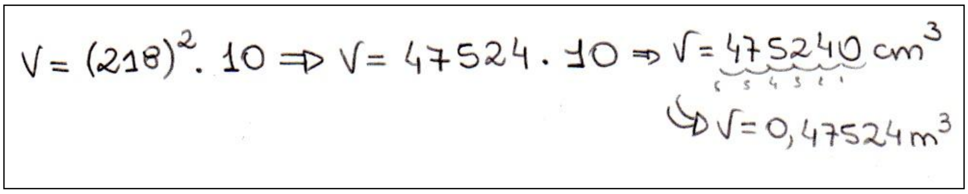



Figura 5.4: Cálculo da dupla F para o volume da plataforma que sustenta o tronco de pirâmide.

**Questão 3: A**s estimativas dos educandos para a medida da aresta da base maior do tronco de pirâmide não se afastam muito dos resultados obtidos pela professora (Tabela 3). A Figura 5.5 mostra a resolução da dupla E, cujo resultado é exatamente igual ao da professora.

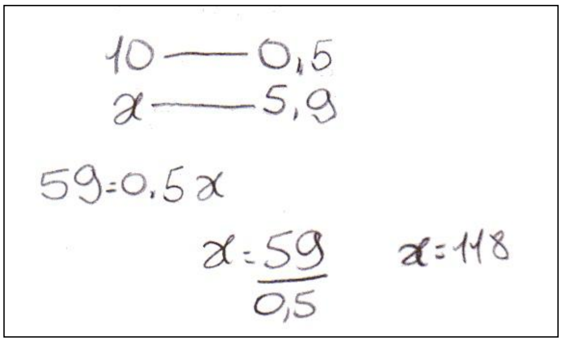



Figura 5.5: Resolução da dupla E para a questão 3.

**Questão 4:** A exemplo da questão 3, as estimativas dos educandos para a aresta da base menor estão de acordo com os resultados da professora, como mostra a Tabela 3. Um exemplo ilustrativo da atividade desenvolvida pelos estudantes é mostrado na Figura 5.6.

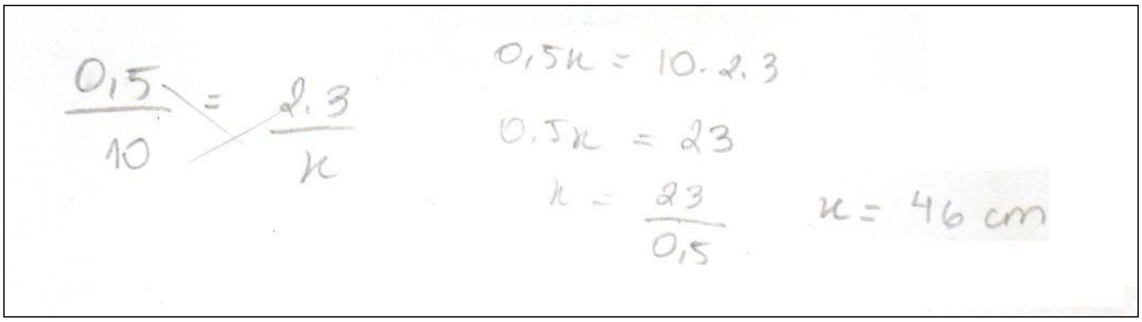



Figura 5.6: Estimativa da dupla B para a medida da aresta da base menor do tronco de pirâmide que sustenta o busto de Santos Dumont no monumento em sua homenagem.

**Questão 5:** As estimativas para a altura do tronco de pirâmide também são satisfatórias (Tabela 3). A título de ilustração, mostro na Figura 5.7 os cálculos desenvolvidos pela dupla P.

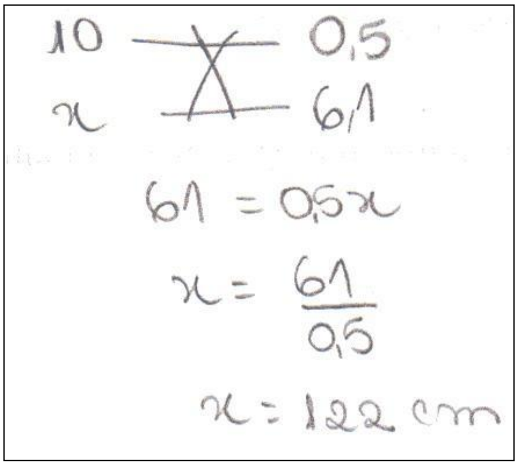



Figura 5.7: Estimativa da dupla P para a altura do tronco de pirâmide.

**Questão 6:** Apesar da dificuldade em estimar o apótema de uma pirâmide em uma imagem bidimensional, os resultados foram bons. Os valores obtidos pela maioria dos estudantes apresentam uma margem de erro inferior a 2 cm em relação à estimativa da professora (127,2 cm). As Figura 5.8 e Figura 5.9 mostram que os parâmetros derivados nas questões anteriores foram definitivos para obtenção de boas estimativas na presente questão. Mas alguns estudantes cometeram erros grosseiros, como os da dupla O que se equivocaram ao definir as medidas dos catetos do triângulo para aplicar o teorema de Pitágoras (Figura 5.9).

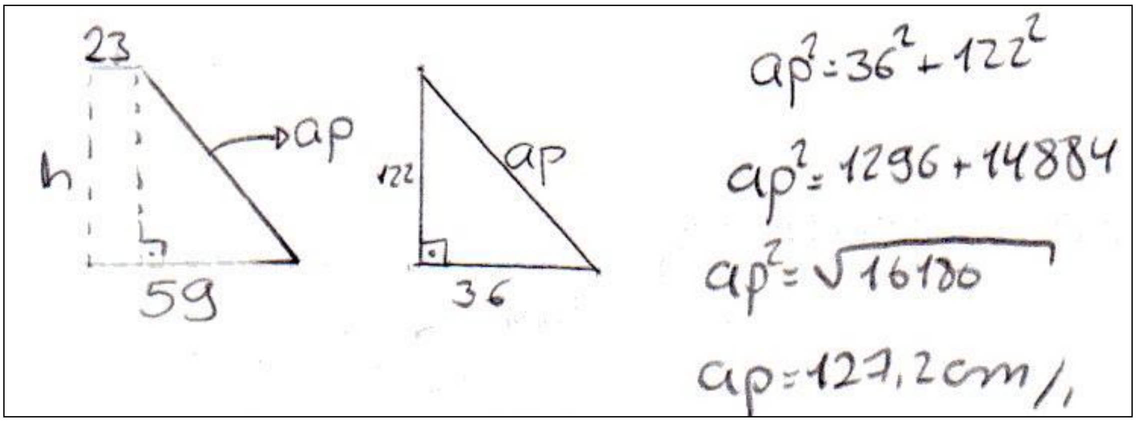



Figura 5.8: Estimativa da dupla E para o apótema do tronco de pirâmide do Parque Farroupilha (Redenção).

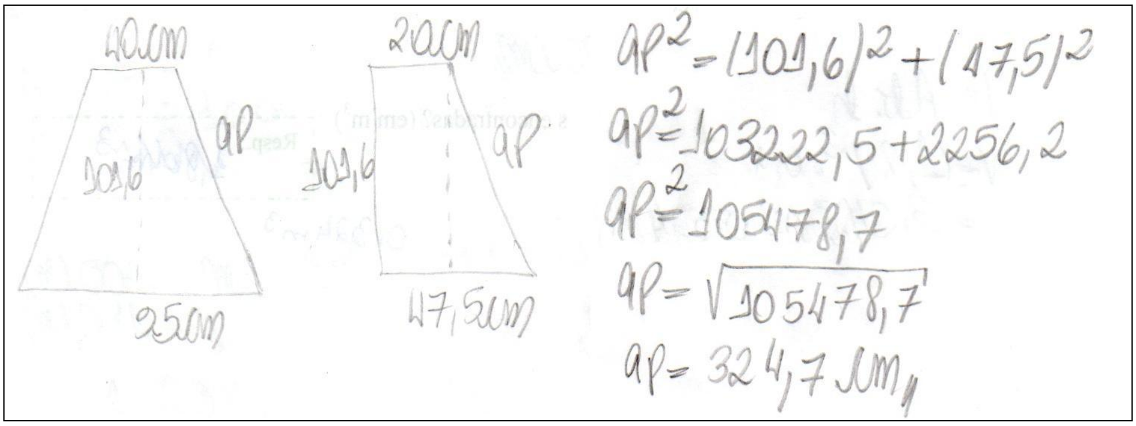



Figura 5.9: O mesmo da Figura 5.8 para a dupla O.

**Questão 7:** Havia duas possibilidades para estimar a medida da aresta lateral do tronco de pirâmide, usando a foto ou os parâmetros anteriormente estimados (questões 3, 4 e 6). Devido a distorções na imagem do tronco, esses processos geraram resultados ligeiramente diferentes. Todos os parâmetros foram estimados por meio da fotografia mostrada na Figura 5.2, mas a posição da câmera, por ocasião do registro, pode favorecer mais ou menos cada um deles. Independente da escolha de cada dupla, a maioria dos valores obtidos ficaram próximos aos da professora. A dupla B optou por deduzir uma escala entre as dimensões reais do monumento e da fotografia, usando uma regra de três para obter o parâmetro solicitado (Figura 5.10). A dupla J preferiu usar os parâmetros anteriormente estimados (Figura 5.11).

$$\frac{0,5}{10} = \frac{6,4}{x} \qquad 0,5x = 10 \cdot 6,4$$
$$0,5x = 64$$
$$x = \frac{64}{0,5} \qquad x = 128 \text{ cm}$$

Figura 5.10: Estimativa da dupla B para a medida da aresta lateral do tronco de pirâmide.

$$Arl^2 = 126,9^2 + 35^2$$
$$Arl^2 = 16103,6 + 1225$$
$$Arl^2 = 17328,6$$
$$Arl = 131,3 \text{ cm}$$

Figura 5.11: O mesmo da Figura 5.10 para a dupla J.

**Questão 8:** Como o cálculo do volume do tronco de pirâmide é mais complexo do que os realizados anteriormente e depende de vários parâmetros estimados, os educandos apresentaram mais dificuldades na presente questão. Ocorreram muitos erros grosseiros, como por exemplo, esquecer de elevar os valores ao quadrado. Na Figura 5.12 mostro a resolução da dupla N.

$$V = \frac{120}{3}\left((120)^2 + \sqrt{120^2 \times 46^2} + 46^2\right)$$
$$V = 40\,(14400 + 5520 + 2116)$$
$$V = 40\,(22036)$$
$$V = 881440 \text{ cm}^3$$
$$V = 881440 \div 10^6$$
$$V = 0,881440 \text{ m}^3$$

Figura 5.12: Cálculo do volume do tronco de pirâmide feito pela dupla N.

**Questão 9:** Novamente algumas duplas cometeram erros grosseiros, mas a maioria obteve valores que concordam com os da professora ($A_{Lateral}$=4,1721$m^2$ ) até a primeira casa decimal. Na Figura 5.13 é apresentada a resolução da dupla G para a presente questão.

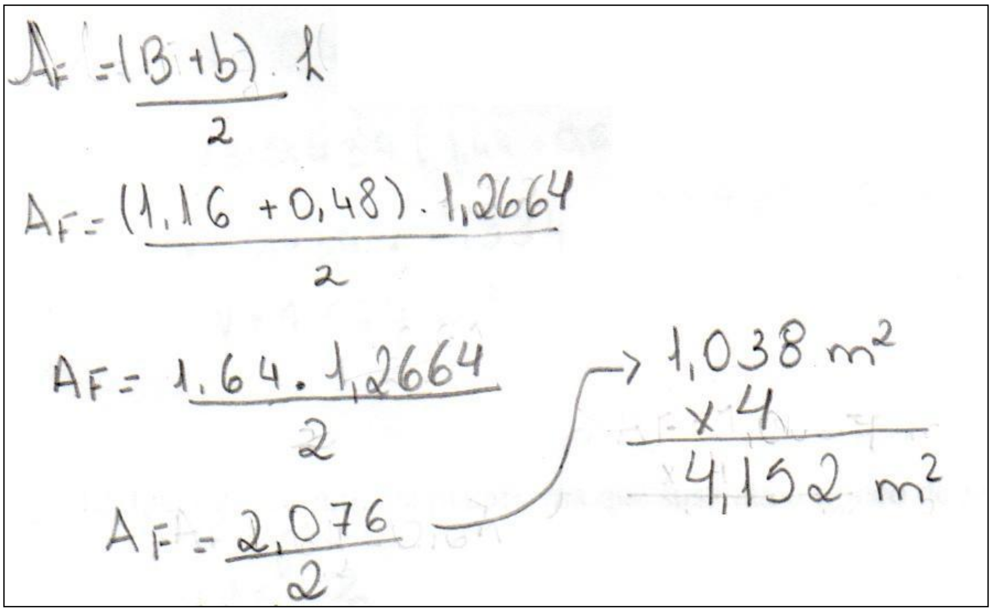



Figura 5.13: Cálculo da área lateral do tronco de pirâmide feito pela dupla G.

**Questão 10:** No cálculo da área total do tronco o número de respostas erradas aumentou. Algumas duplas obtiveram valores inferiores aos da área lateral por eles calculada, o que sugere falta de atenção ou comprometimento no desenvolvimento das atividades. A Figura 5.14 mostra um dos bons resultados para a presente questão.

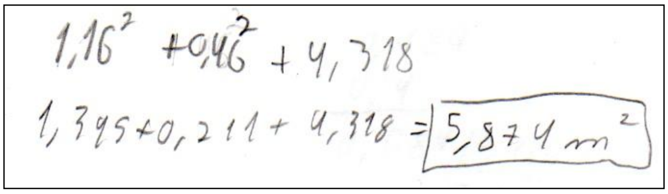



Figura 5.14: Resultado da dupla Q para a questão 10.

**Questão 11:** usando as medidas da professora para o tronco de pirâmide os estudantes recalcularam o seu volume. Em seguida, subtraíram desse valor o volume calculado na questão 8, obtendo o erro na sua estimativa. O erro relativo mostra a precisão dos parâmetros derivados. A maioria das duplas obteve resultados distantes dos da professora (erro relativo = 14,83%). O alto índice de respostas insatisfatórias deve-se aos equívocos cometidos na estimativa do volume do tronco (questão 8), mas algumas duplas apresentaram dificuldades no cálculo do erro. Por outro lado, é importante salientar que algumas duplas obtiveram erros relativos inferiores a 15%, o que é bom, levando em consideração as dificuldades impostas pela fotografia. Na Figura 5.15 mostro um dos bons resultados para a questão.

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left( B^2 + \sqrt{B^2 \cdot b^2} + b^2 \right)$$
$$V = \frac{131,74}{3} \left( 120^2 + \sqrt{120^2 \cdot 52^2} + 52^2 \right)$$
$$V = 43,91 \, (14400 + 6240 + 2704)$$
$$V = 43,91 \, (23344)$$
$$V = 1025035,0 \text{ cm}^3$$
$$V = 1,025035 \text{ m}^3$$

erro =
$$\begin{array}{r} 1,025035 \\ -\ 0,881440 \\ \hline 0,143595 \end{array}$$

$$\frac{0,143595}{1,025035} = 0,14 = 14\%$$

Figura 5.15: Resultado da dupla N para o volume real do tronco de pirâmide, e os erros absoluto e relativo do volume estimado em relação ao valor real.

**Questão 12:** Como o cálculo do volume da plataforma é mais simples do que o do tronco de pirâmide os resultados obtidos na presente questão foram melhores do que os da questão anterior. Entretanto, diferem bastante dos valores calculados pela professora. A dupla F obteve valores iguais aos da professora (Figura 5.16).

$$V = (200)^2 \cdot 10 \Rightarrow V = 40000 \cdot 10 \Rightarrow V = \underline{400000} \text{ cm}^3$$
$$\Rightarrow V = 0,4 \text{ m}^3$$

Erro: $0,4 - 0,47524 = -0,07524 \text{ m}^3$

Erro Relativo: $\dfrac{0,07524}{0,4} = 0,1881 \text{ m}^3$

$$0,1881 \times 100 = 18,81\%$$

Figura 5.16: Cálculos da dupla F para o volume da plataforma que serve de base para o tronco de pirâmide e para os erros absoluto e relativo.

**Questão 13:** Como os resultados da questão 9 foram próximos do valor de referência, os da presente questão também ficaram próximos daqueles obtidos pela professora (Área lateral = 4,678m$^2$, erro absoluto = 0,5063m$^2$ e erro relativo = 10,82%). A Figura 5.17 mostra os valores calculados pela dupla H.

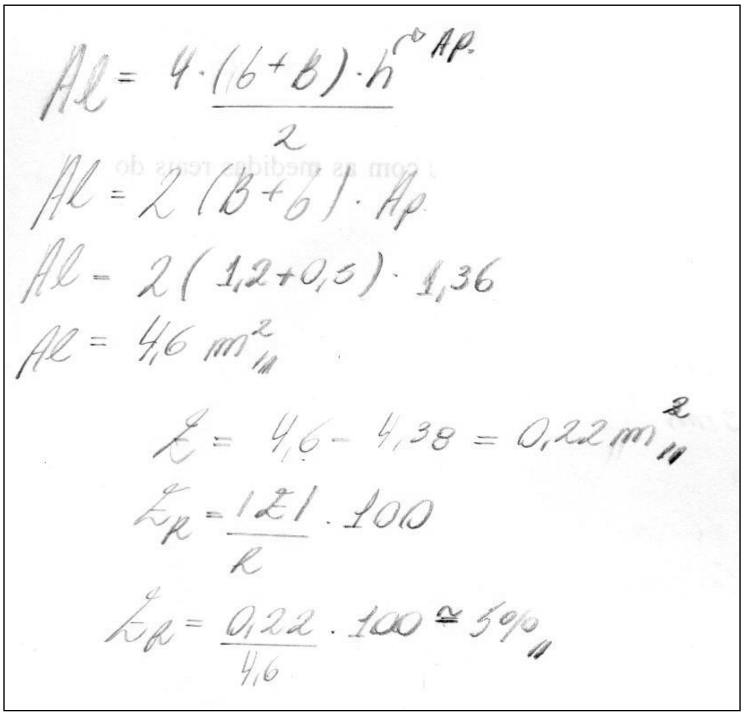



Figura 5.17: Solução da questão 13 feita pela dupla H.

**Questão 14:** Os resultados da presente questão refletem aqueles obtidos na questão 10, onde foram cometidos muitos equívocos. Os cálculos da professora indicam uma área total de 6,388m$^2$, um erro absoluto de 0,6127m$^2$ e um erro relativo igual a 9,59%. A Figura 5.18 mostra valores muito próximos dos obtidos pela professora.

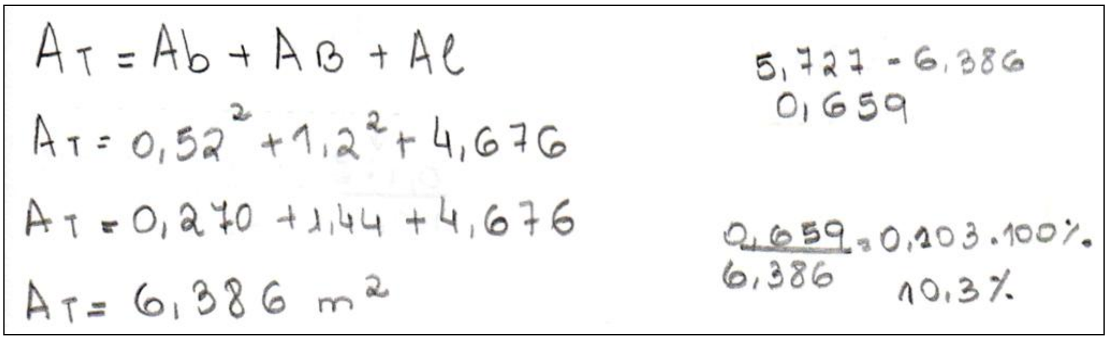



Figura 5.18: Cálculos realizados pela dupla G, para responder a questão 14.

As atividades realizadas no presente capítulo apresentam um grau de dificuldade superior às do capítulo anterior. Mesmo assim, muitos estudantes obtiveram resultados satisfatórios quando comparados com os resultados da professora.

Além das dificuldades inerentes ao estudo do tronco de pirâmide, a desatenção e falta de comprometimento de alguns estudantes transformaram-se em fontes de erros. Foram muitas as duplas que cometeram algum erro grosseiro no decorrer das atividades.

Além disso, por causa da posição da câmera, por ocasião do registro fotográfico, a estimativa da altura da plataforma na fotografia foi subestimada, o que gerou parâmetros com medidas inferiores aos reais. Esse problema foi previsto na fase de obtenção das imagens fotográficas. O tratamento do problema era possível, mas estava além dos objetivos do presente trabalho. A solução seria fazer registros precisos da posição e ângulo da câmera em relação ao monumento no instante da foto, acrescido de marcadores que permitissem formar triângulos para facilitar os cálculos.

Em relação ao entendimento do termo erro e do seu cálculo, houve evolução do capítulo anterior para o presente. No entanto, equívocos na estimativa dos parâmetros do tronco de pirâmide prejudicaram a análise.

Os educandos manifestaram que a atividade estava muito difícil. Mas penso que parte das dificuldades não devam ser creditadas à abordagem, mas ao grau de dificuldade do tópico abordado. Além disso, percebi que alguns educandos estavam começando a cansar das atividades e que fotos de monumentos de Porto Alegre não iriam mais motivá-los.

Antunes (2000, p. 36) defende que o interesse do aluno passou a ser a força que comanda o processo de aprendizagem, suas experiências e descobertas, o motor de seu progresso e o professor um gerador de situações estimuladoras e eficazes.

## 6. A MODELAGEM MATEMÁTICA NA DISNEY WORLD

Ao chegar na sala, na aula seguinte, os alunos já estavam ansiosos discutindo e apostando entre si sobre qual seria a figura geométrica que iríamos trabalhar. Eles notaram que as fotografias sempre traziam uma figura geométrica diferente de modo a contemplar diferentes tópicos da grade curricular.

A foto escolhida foi da esfera Espaçonave Terra do parque EPCOT (*Experimental Prototype of Community of Tomorrow*) na Disney em Orlando nos Estados Unidos da América (EUA). A escolha não poderia ser melhor, visto que muitos deles já visitaram a Disney e outros planejam visitá-la no futuro.

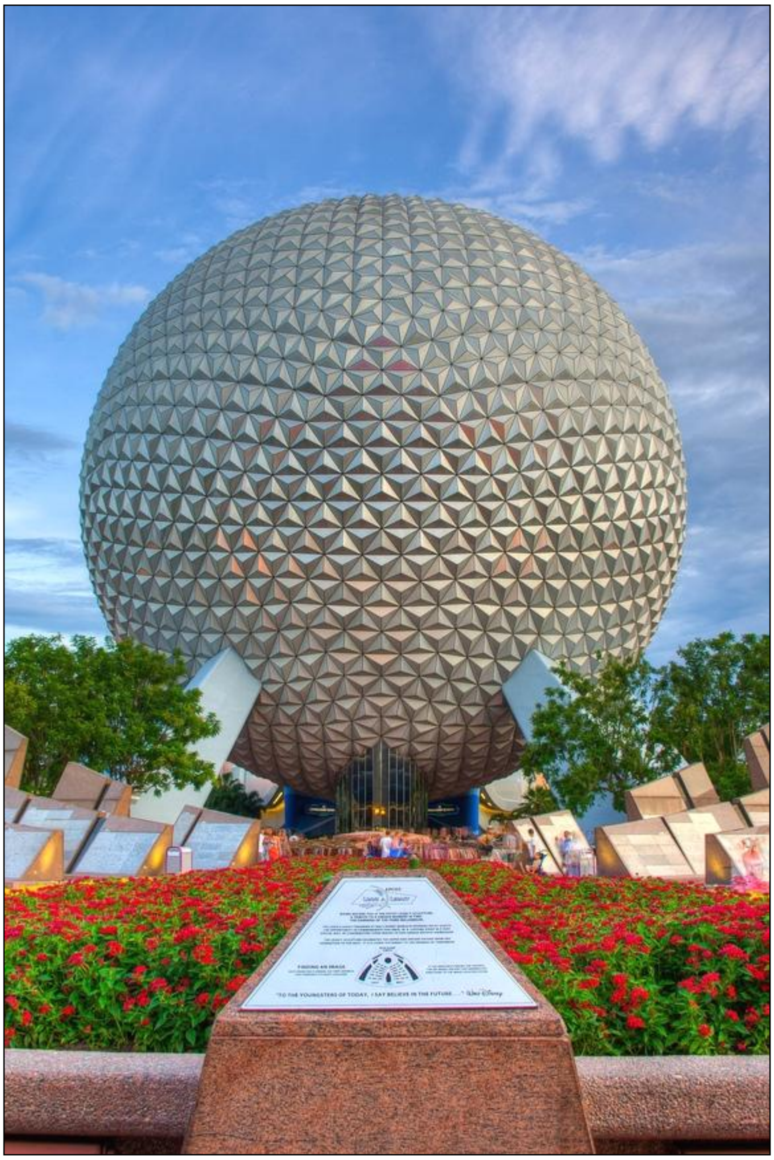


Figura 6.1: Foto da esfera Espaçonave Terra do parque EPCOT na Disney World.

Os estudantes que já conheciam o parque forneceram detalhes do local e da foto, principalmente a respeito do tamanho da esfera. Isso despertou o interesse dos demais que fizeram os cálculos empolgados para verificar a veracidade das informações dos colegas. Percebi que nesse ponto do trabalho, já havia conquistado a confiança dos alunos quanto à capacidade didática da estratégia utilizada.

## 6.1. A DISNEY WORLD – PARQUE EPCOT

A Disney é o resultado da imaginação e trabalho de Walter Ellias Disney (Walt Disney). O talento para o desenho e animação o tornaram mundialmente conhecido. Nasceu em 05 de dezembro de 1901 na cidade de Chicago em uma família pobre e problemática. Em 1923, mudou-se para Hollywood e fundou o *Studio Disney*, jundo com seu irmão mais velho Roy Disney e o desenhista Ub Iwerks. O seu primeiro grande sucesso, Mickey Mouse, foi lançado em 1928 e inicialmente se chamava Mortimer Mouse. Foi a sua esposa Lilian que batizou o famoso rato como Mickey. Além do Mickey, Walt Disney lançou outros sucessos como Pateta, Pato Donald, Minnie, os três porquinhos, Branca de neve e os sete anões, Pinóquio, Mary Poppins e outros. O sucesso permitiu ao autor entre outras coisas criar, em 1955 na Califórnia, o parque de diversões *Disneylândia* (Disneyland). Em outubro de 1971, após a sua morte, foi inaugurada a Disney World, em Orlando na Flórida. A Disney World cresceu e outros investimentos vieram, como o parque EPCOT, o Disney MGM Studios, Touchstone Films, Hollywood Records, o Animal Kingdom, parques temáticos em Paris, Hong Kong e Tóquio e até mesmo uma universidade, a Disney University (Thomas, 1969; Barrier, 2007; Nader, 2007; Gabler, 2009;).

Walt Disney sonhava em construir uma cidade do futuro, onde pessoas de diferentes nacionalidades convivessem em harmonia. No entanto, ele morreu de câncer em 1966, sem realizar esse sonho. O seu irmão Roy construiu a cidade do futuro, e em outubro de 1982 foi inaugurado o parque EPCOT, sigla que significa *Experimental Prototype of Community of Tomorrow,* que pode ser traduzido como Protótipo Experimental da Comunidade do Amanhã. Apesar de não ser uma cidade real, como queria Walt Disney, o EPCOT é um parque temático dedicado tanto à cultura de diversos países como às inovações tecnológicas. Ele é dividido em duas partes, o *future world* e *world showcase* (Figura 6.2). A esfera que é o símbolo do EPCOT se chama Espaçonave Terra (Spaceship Earth) e dentro dela os visitantes fazem uma viagem no tempo.

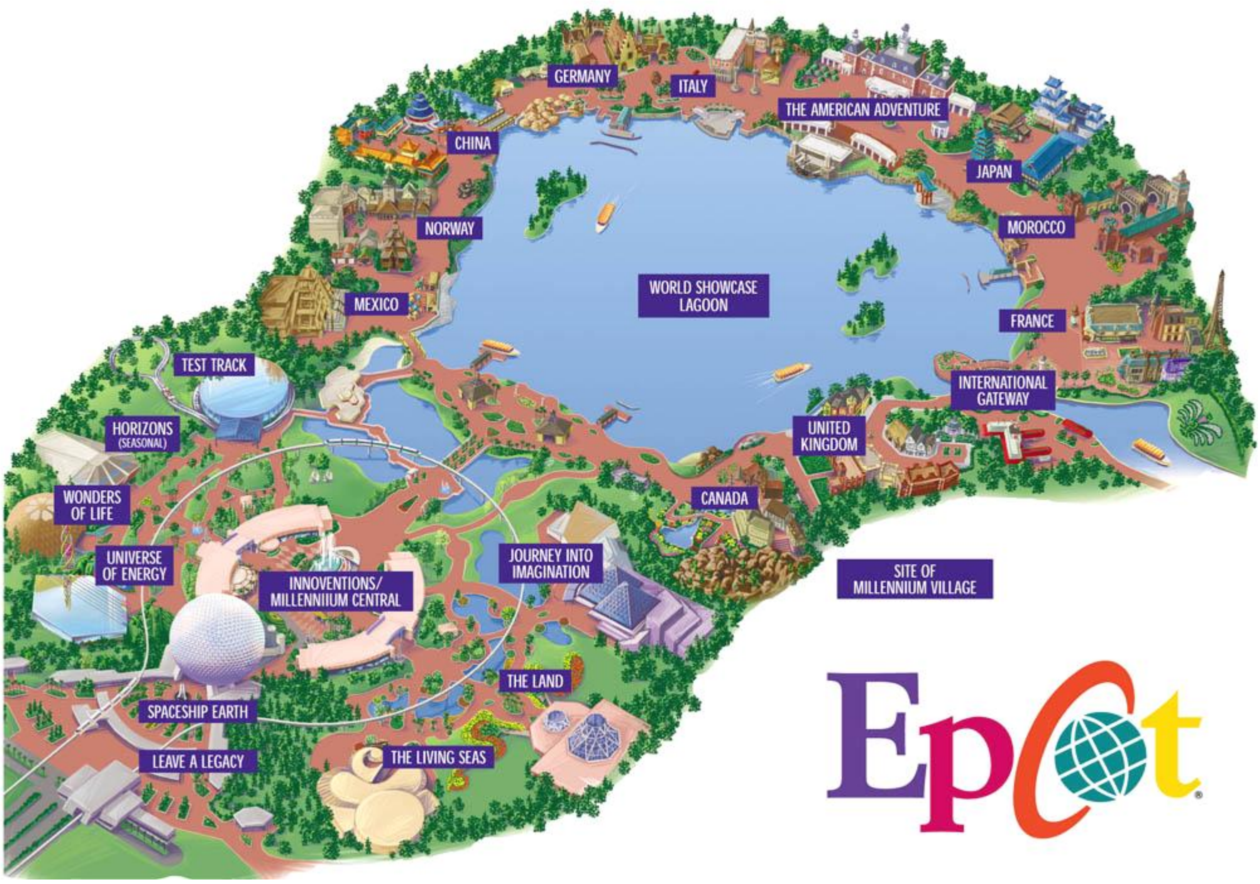



Figura 6.2: Mapa do parque EPCOT
Fonte: < http://www.dicasdeorlando.com.br/Mapas/Mapas_Epcot.html>

## 6.2. A ATIVIDADE DIDÁTICA

O trabalho descrito no presente capítulo teve como objetivo específico criar as condições necessárias para que os educandos construíssem os conceitos básicos e vivenciassem aplicações interessantes do estudo da esfera. Nesses termos, a presente abordagem possibilitou aos estudantes o desenvolvimento de um comportamento crítico e criativo, colaborando na formação da autonomia intelectual. Além disso, quando a Matemática é usada para obter informações sobre assuntos que são de interesse dos educandos ela torna-se uma aliada e a sua abordagem fica mais agradável. Dessa forma, as aulas de matemática tornaram-se interessantes sem que fosse necessário buscar contextualizações forçadas. Buscamos juntos construir uma visão científica do mundo que nos rodeia e, por isso, um tratamento das incertezas inerentes às atividades de medida fez-se necessário. O trabalho foi desenvolvido em duas etapas, como mostra o roteiro fornecido aos alunos.

Figura 6.3: Foto de alguns alunos trabalhando na Modelagem Matemática da esfera do parque EPCOT.

A primeira fase teve como objetivo deduzir as medidas do diâmetro e raio da esfera por meio da análise da sua foto (Figura 6.1). Para realizar essa tarefa os estudantes receberam a medida da altura do suporte que sustenta a esfera. Deduzidos o diâmetro e o raio da esfera, o próximo passo foi calcular a área superficial e o volume.

Na segunda fase do trabalho, abordamos as incertezas inerentes a todo processo de medida. Os alunos foram informados sobre a real dimensão do raio da esfera e refizeram os cálculos. A comparação entre os valores obtidos nesses cálculos e os da primeira fase abriu espaço para a discussão sobre erros de medida e suas prováveis causas.

## 6.3. ROTEIRO

PARTE 1 – coleta de dados

1. Sabendo que o suporte central que sustenta a esfera tem altura de 7,36m, encontre o diâmetro desta esfera (em m)?
2. Qual é o raio desta esfera (em m)?
3. Qual é a área total desta esfera (em $m^2$)?

**4.** Qual é o volume desta esfera (em $m^3$)?

PARTE 2 – Análise

Agora vamos verificar quais foram os nossos *erros*, sabendo que a esfera possui raio de 25,1460m.

**5.** a) Qual foi o erro em relação ao raio da esfera (em m)?

b) Qual foi o erro relativo em relação ao raio da esfera (em %)?

**6.** a) Qual é a área real da esfera (em $m^2$)?

b) Qual foi o erro em relação a área real e a área calculada na questão 3 (em $m^2$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**7.** a) Qual é o volume real da esfera (em $m^3$) ?

b) Qual foi o erro em relação ao volume real e o volume calculado na questão 4? (em $m^3$)

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**8.** Qual é a circunferência de um círculo máximo nessa esfera (em m) ?

**9.** O que você achou sobre os erros encontrados nesta foto? Comente.

## 6.4. RESULTADOS

Questão 1: A Tabela 4 mostra os resultados das medidas de cada dupla e da professora para o diâmetro da esfera.

Tabela 4 – Dados obtidos na primeira questão

| **Dupla** | **Q.1(m)** |
|---|---|
| A | 46,985 |
| B | 50,293 |
| C | 50,293 |
| D | 54,865 |
| E | 50,290 |
| F | 50,293 |
| G | 50,900 |
| H | 46,423 |
| I | 50,293 |
| J | 50,293 |
| K | 50,907 |
| L | 49,680 |
| M | 45,855 |
| N | 45,855 |
| O | 49,680 |
| P | 60,352 |
| Q | 46,424 |
| **PROF** | 50,293 |

Muitas duplas obtiveram para medida do diâmetro valores iguais ou próximos ao meu resultado. Para outros tantos, essa medida permanece num patamar aceitável. A exceção foi a dupla P, cuja medida supera a minha em mais de 10 m.

Abaixo mostro os cálculos feitos pela dupla F (Figura 6.4), cujo resultado é igual àquele por mim obtido.

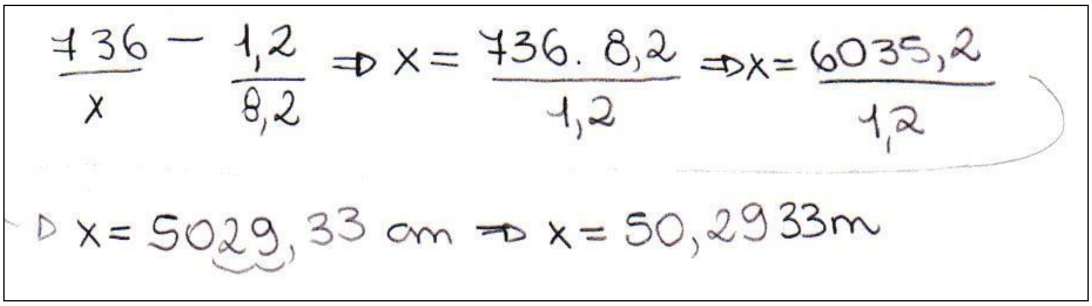



Figura 6.4: Resolução da dupla F para a questão 1.

No entanto, nem todos os resultados concordaram com os meus, por exemplo, a medida obtida pela dupla H (Figura 6.5) difere bastante do meu resultado.

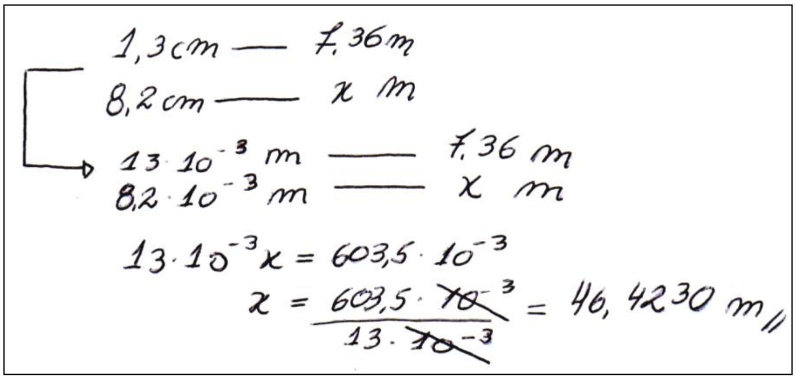



Figura 6.5: Resposta da dupla H para a questão 1.

No caso da dupla P (Figura 6.6), a variação em relação ao meu resultado foi superior a 10 m.

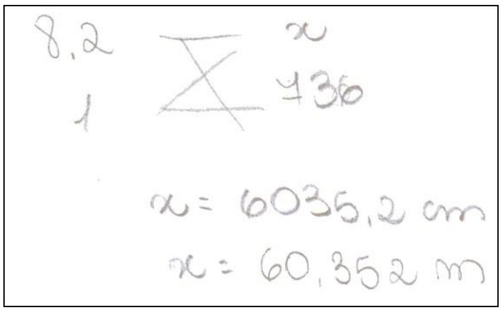



Figura 6.6: Resolução da dupla P para a presente questão.

As duplas F, H e P mediram alturas diferentes para a o suporte da esfera (usado como padrão de medida) na fotografia. Enquanto para a dupla F tal suporte mede na foto 1,2 cm, para a dupla H essa medida é de 1,3 cm e, para a dupla P mede 1,0 cm. Essa discrepância na medida inicial resultou em diâmetros com diferenças de medidas não desprezíveis. Erros de medida, sistemáticos ou acidentais, foram à causa da maioria das discrepâncias nos resultados.

Questão 2: essa questão não apresentou problemas, de modo que as discrepâncias de valores são conseqüências daquelas registradas na questão anterior.

Na Figura 6.7, mostro a resposta da dupla B para a questão 2.

$$D = 2 . r$$

$$\frac{50{,}2933r}{2} \qquad r = 25{,}1466\ m$$

Figura 6.7: Resposta da dupla B para a questão 2.

O resultado da dupla C (Figura 6.8), foi tão bom quanto o da dupla B (Figura 6.7). A tabela 1 mostra que os dois grupos obtiveram resultados iguais aos meus para a questão 1.

$$\frac{50{,}29\ m}{2} = 25{,}145\ m$$

Figura 6.8: Resposta da dupla C para a questão 2.

Questões 3 e 4: os resultados obtidos para essas questões também estão relacionados com àqueles encontrados para as questões 1 e 2, mas aqui, arredondamentos de valores também se caracterizaram como fontes de erros.

Mostro na Figura 6.9 o cálculo da área da Espaçonave Terra feita pela dupla B.

$$A = 4\pi r^2$$
$$A = 4\pi\, 25{,}1466^2$$
$$A = 4\pi\, 632{,}3514$$
$$A = 4 . 3{,}14 . 632{,}3514$$
$$A = 7942{,}3335\ m^2$$

Figura 6.9: Resolução da questão 3 pela dupla B.

A Figura 6.10 mostra o cálculo da área da mesma esfera na versão da dupla C.

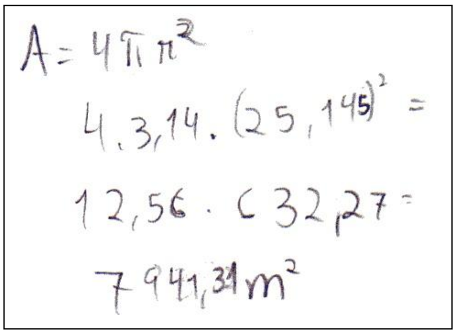



Figura 6.10: Resposta da dupla C para questão 3.

Apesar de os dois resultados estarem próximos, pode-se perceber a importância das casas decimais na potenciação.

A seguir (Figura 6.11), a resposta da dupla J para a questão 4.

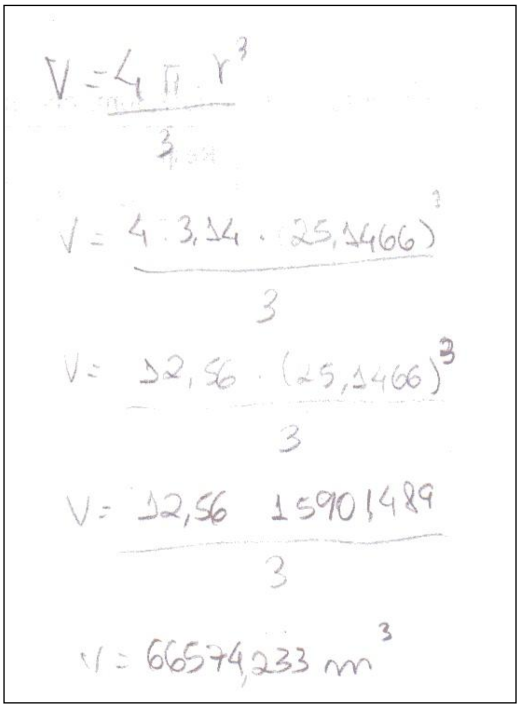
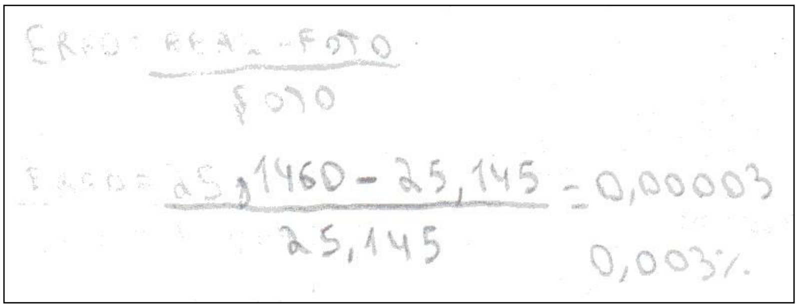



Figura 6.11: Resposta da dupla J para a questão 4.

Questão 5: após tomar conhecimento da medida real do raio da Espaçonave Terra do parque EPCOT (25,1460 m), os estudantes calcularam o erro (absoluto e relativo) cometido na estimativa do raio na fase inicial do trabalho. O meu erro absoluto na estimativa do raio foi de 0,001 m, o que dá um erro relativo de 0,002%. Seis duplas obtiveram resultados muito próximos aos meus, com erros relativos variando entre 0,002% e 0,004% e 4 duplas obtiveram erros relativos de 1,2% para a estimativa do raio. Podemos perceber pelos resultados obtidos para o erro relativo na medida do raio que alguns alunos foram extremamente cuidadosos na medição. Por outro lado, outros alunos não tomaram o mesmo cuidado e, por isso, sofreram as consequências no decorrer do trabalho. O caso extremo é a dupla P com um erro relativo de aproximadamente 20% ou um erro absoluto de 5 m na medida do raio.

Para ilustrar, mostro a seguir (Figura 6.12) os cálculos dos erros absoluto e relativo da dupla E.



$$\text{Erro} = \frac{\text{real} - \text{foto}}{\text{foto}}$$

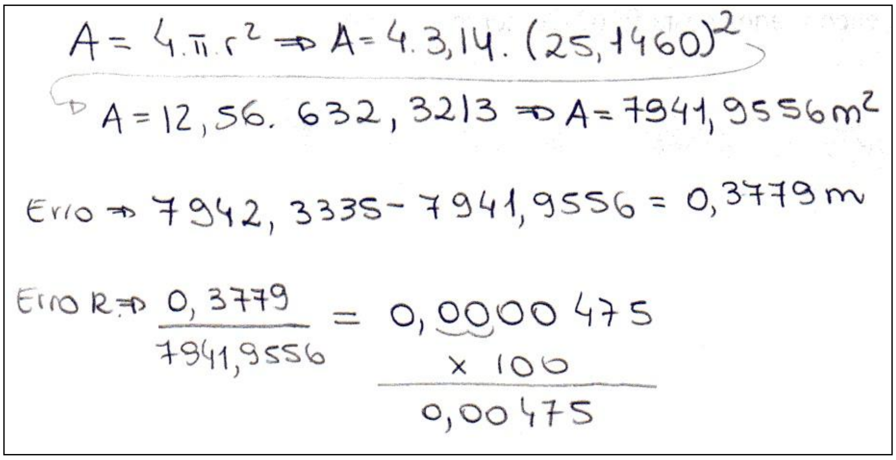
$$\text{Erro} = \frac{25,1460 - 25,145}{25,145} = 0,00003$$

$$0,003\%$$

Figura 6.12: Resolução da dupla E para a questão 5.

Questão 6: os alunos recalcularam a área da esfera Espaçonave Terra usando o raio real e calcularam o erro subtraindo do valor obtido a área estimada na fase anterior. O erro foi comunicado em termos absoluto e relativo. Os comentários das questões anteriores também se aplicam aqui, com a dupla P se afastando muito dos resultados dos demais colegas.

A resposta da dupla F para a questão 6 é mostrada a seguir (Figura 6.13).



$$A = 4.\pi.r^2 \Rightarrow A = 4.3,14.(25,1460)^2$$

$$\Rightarrow A = 12,56.\ 632,3213 \Rightarrow A = 7941,9556\,m^2$$

$$\text{Erro} \Rightarrow 7942,3335 - 7941,9556 = 0,3779\,m$$

$$\text{Erro R} \Rightarrow \frac{0,3779}{7941,9556} = 0,0000475$$

$$\times 100$$

$$0,00475$$

Figura 6.13: Resposta da dupla F para a questão 6.

A solução da dupla P (Figura 6.14) reflete a falta de cuidado na medição inicial.

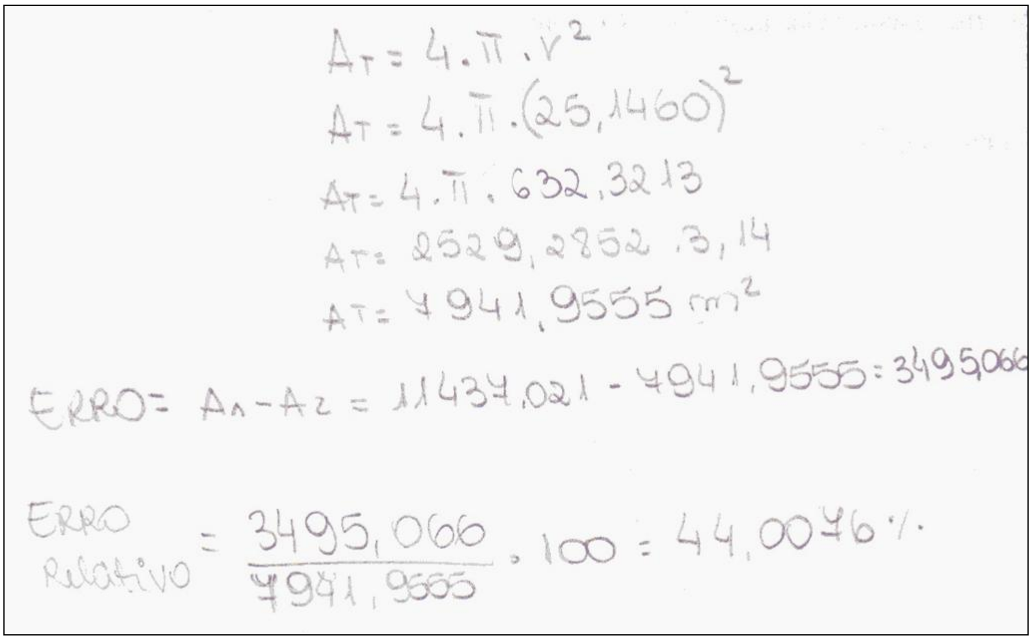



Figura 6.14: Cálculos da dupla P para a questão 6.

Questão 7: para o cálculo do volume real da esfera e dos erros absoluto e relativo foi adotado um procedimento similar àquele empregado na questão 6.

A dupla I é um exemplo de bom resultado, com erro relativo de 0,00476% (Figura 6.15).

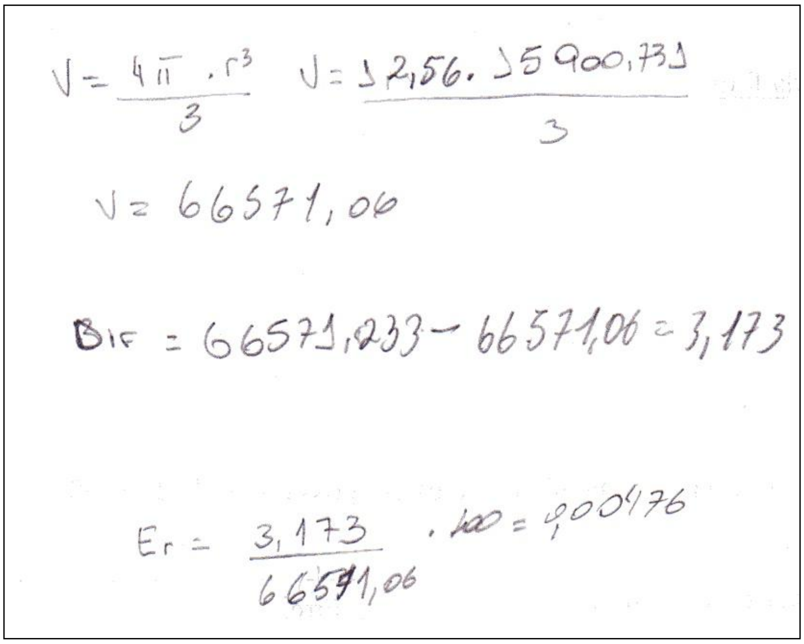



Figura 6.15: Resposta da dupla I para a questão 7.

A dupla K obteve um resultado satisfatório, com um *erro relativo* de 3,7% em relação ao volume real (Figura 6.16).

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4 . 3{,}14 . 15900{,}351}{3}$$

$$V = \frac{63601{,}404 . 3{,}14}{3}$$

$$V = \frac{199708{,}4}{3} = 66569{,}466 \, m^3$$

erro =

$$\begin{array}{r} 69039{,}977 \\ -\ 66569{,}466 \\ \hline 2470{,}511 \, m^3 \end{array}$$

erro relativo

$$\frac{2470{,}511}{66569{,}466} = 0{,}037 = 3{,}7\%$$

Figura 6.16: Solução da dupla K para a questão 7.

Algumas duplas obtiveram erros relativos significativos, entre 15% e 30%. Esses resultados são consequências, principalmente, dos erros nas estimativas feitas na primeira fase (medida do diâmetro). Para a dupla P o erro na estimativa do volume superou 70%.

Questão 8: nessa questão os alunos foram convidados a relembrar como se calcula o comprimento de uma circunferência.

Questão 9: tem como objetivo provocar uma reflexão sobre a atividade didática realizada, criando o cenário necessário para que os estudantes percebam o que aprenderam e como aprenderam. Ela abriu espaço para que os educandos tirassem suas próprias conclusões, favorecendo a formação de indivíduos mais autônomos.

Os estudantes concluíram que as principais fontes de erros foram problemas com as medidas na fase inicial e arredondamentos das casas decimais, como mostro nos comentários (Secção 6.5).

Para uma melhor compreensão da atividade desenvolvida, mostro um trabalho completo no Anexo D.

## 6.5. COMENTÁRIOS

Por se tratar de uma estrutura mais simples do que aquelas analisadas nos capítulos anteriores os alunos realizaram as atividades propostas com mais facilidade. Prova disso é o comentário de um aluno da dupla H: "... professora, estamos fazendo os trabalhos mais rápido, acho que pegamos a ideia principal e agora está bem mais fácil. No início estava chatinho!"

Como já mencionado na introdução do presente capítulo a receptividade dos alunos para com o método de trabalho desenvolvido foi muito boa. O comentário de um estudante do grupo E corrobora essa ideia: "... estou adorando esse trabalho, é muito legal sair da rotina e fazer cálculos diferentes sem sair do conteúdo." Além disso, as atividades do presente capítulo foram realizadas no dia escolhido pelos alunos para tirar as fotos para o convite de formatura, por isso, estavam todos preparados e receptivos aos registros fotográficos. Nas atividades anteriores, muitos alunos sentiam-se incomodados com a professora os fotografando.

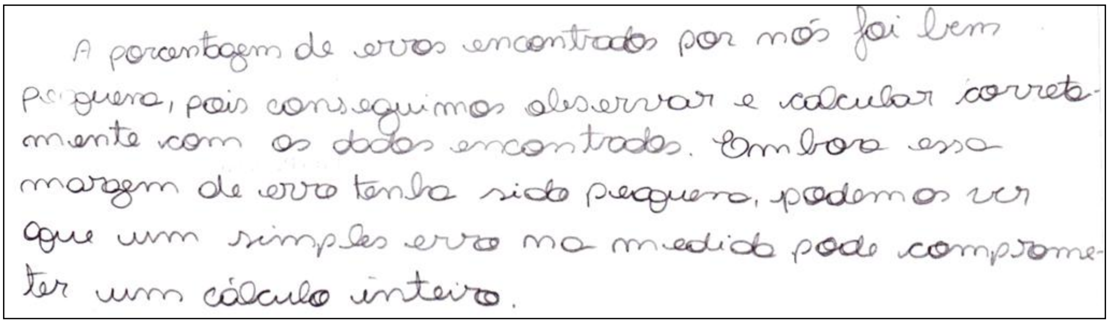
Além da satisfação dos alunos com as atividades, os seus relatos também sugerem que os objetivos no campo cognitivo foram atingidos. Ao responder a questão 9, eles demonstram que não realizaram apenas mecanicamente as tarefas, houve um entendimento do processo como um todo. No final da atividade a maioria dos alunos estava consciente das principais fontes de erros nos seus resultados. Em seguida são mostrados alguns relatos que apontam para tal conclusão.

Com o trabalho, percebi que um simples número a mais ou a menos, já influencia nos outros resultados, alterando-os.

Figura 6.17: Relato da dupla B.

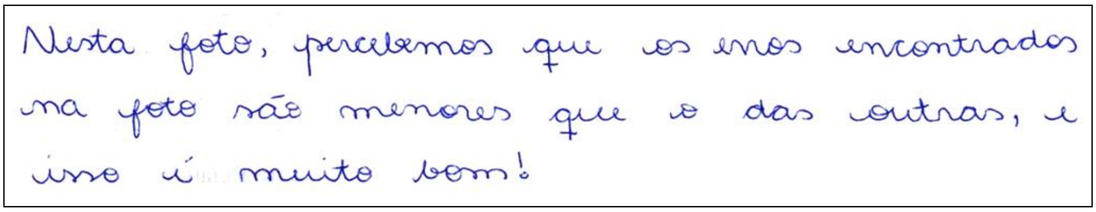
* Em virtude da ÁREA e volume dependerem diretamente de $r^2$ e $r^3$ respectivamente, nota-se um aumento progressivo do erro, devido ao erro inicial do raio.

Figura 6.18: Relato da dupla H.



A porcentagem de erros encontrados por nós foi bem pequena, pois conseguimos observar e calcular correta-mente com os dados encontrados. Embora essa margem de erro tenha sido pequena, podemos ver que um simples erro na medida pode comprometer um cálculo inteiro.

Figura 6.19: Relato da dupla I.



Nesta foto, percebemos que os erros encontrados na foto são menores que o das outras, e isso é muito bom!

Figura 6.20: Relato da dupla N.

Como não se tratava de um experimento científico, mas de uma atividade didática, considero que os objetivos foram alcançados. Apesar das dificuldades de algumas duplas, houve o entendimento do processo e de sua importância. Mais uma vez ficou claro que em atividades experimentais o cuidado na obtenção dos dados é fundamental para o sucesso do trabalho. Além disso, muitos estudantes obtiveram resultados muito próximos daqueles obtidos pela professora.

# 7. A PIRÂMIDE DO LOUVRE COMO CENÁRIO PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA

Percebi que fotos de lugares que alguns alunos conhecem favorecem a mobilização dos demais. Então, escolhi uma foto da Pirâmide do Louvre na França (Figura 7.1). Escolha certa novamente. Alguns alunos já a visitaram e deram seus relatos a respeito do museu. Esses relatos ajudaram no andamento dos trabalhos, pois os alunos que conhecem o local gostaram de relatar a experiência aos colegas e, esses por sua vez, ouviram tais relatos e perguntaram por detalhes da construção com o interesse de quem pretende visitá-lo um dia.

Figura 7.1: Pirâmide do Museu do Louvre em Paris, França. A pirâmide é a entrada principal para o museu.
Fonte:< http://www.flickr.com/photos/wallyg/1487228556/in/set-72157602250625298/> .

Percebemos que valorizar o conhecimento dos alunos é uma forma de mantê-los motivados, tornando as aulas de Matemática mais agradáveis. Para Tardif (2002, p. 39) o professor ideal é aquele que além de conhecimentos sobre educação, conteúdos e especificidades da sua disciplina, desenvolve um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos.

## 7.1. O MUSEU DO LOUVRE

Em 1190 o rei Philippe Auguste construiu um castelo na margem direita do rio Sena para proteger Paris dos ataques anglo-normandos. O castelo tinha função de defesa, por isso, o seu formato era de uma muralha com diversas torres e fossos. Essa muralha ficou conhecida como Louvre. Em meados do século XIV, Paris expandiu-se para além das muralhas de Philippe Auguste e o Louvre perdeu o seu papel de proteção. Então, Charles V alterou a forma de fortaleza militar transformando-o em palácio real.


Figura 7.2:Fotografia da pirâmide invertida.

Após a morte de Charles VI, o Louvre ficou abandonado por um século, até que François I decidiu mudar-se para o palácio. Em 1546, François I demoliu o castelo e construiu outro para servir de residência real. François I, grande colecionador de arte, trouxe Leonardo da Vinci para a França. As reformas se estenderam até o reinado de Henri II . Henri IV cedeu espaço para que artistas montassem ateliês no interior do castelo. O Louvre sofreu profundas transformações durante os reinados de Louis XIII e Louis XIV. Mas Louis XIV se mudou para o Palácio de Versalhes, em 1678 e o Louvre ficou abandonado. Então, a Academia

Francesa, a Academia de Belas Letras e a Academia Real de Pintura e Escultura mudaram-se para o Palácio do Louvre.

Em 1793, durante a revolução francesa, o governo revolucionário transformou o Louvre em museu nacional denominado Museu Central de Artes e o abriu ao público. Nesse sentido, os ideais de liberdade, igualdade e fraternidade dos revolucionários alcançaram as artes. No decorrer da história, ocorreram diversas ampliações e ligações do Louvre a prédios vizinhos, principalmente com Louis XIV, Louis XV e Mitterand. Nos anos de 1980 e 1990, durante o governo de François Mitterand, o Museu do Louvre foi remodelado e ampliado. O projeto escolhido foi do arquiteto Ieo Ming Pei que gerou muita polêmica ao propor a construção de uma grande pirâmide de vidro na praça central do antigo castelo (Figura 7.1).

Atualmente, o museu tem quatro andares, sendo um deles subterrâneo. Segundo Ieo Ming Pei, como o projeto era grande, com muitas galerias, e a construção ocorreria num lugar histórico, a solução foi a construção subterrânea. A ideia era a construção de um grande átrio interligando as galerias do museu e onde pudessem ser instaladas lojas comerciais. As pirâmides moldadas em vidro e aço, além das funções estéticas permitem a iluminação natural do átrio.

A obra arquitetônica foi inaugurada em 1988 e está situada na praça central do museu do Louvre (cour Napoléon) funcionando como entrada principal do museu. Além da pirâmide principal, existem outras 3 menores ao redor da principal e uma invertida no subsolo (Figura 7.2). A pressão foi tão forte que surgiu inclusive uma lenda urbana, segundo a qual, a pirâmide principal havia sido construída com 666 placas de vidro, esse número, de acordo com a tradição cristã, evoca o diabo. Na verdade a pirâmide principal é formada de 673 placas, 603 losangos e 70 triângulos. A pirâmide invertida localizada no Carrousel du Louvre é composta de 84 losangos e 28 triângulos (McCLELLAN, 1999)[14].

[14] Para maiores detalhes: http://www.louvre.fr/histoire-du-louvre.

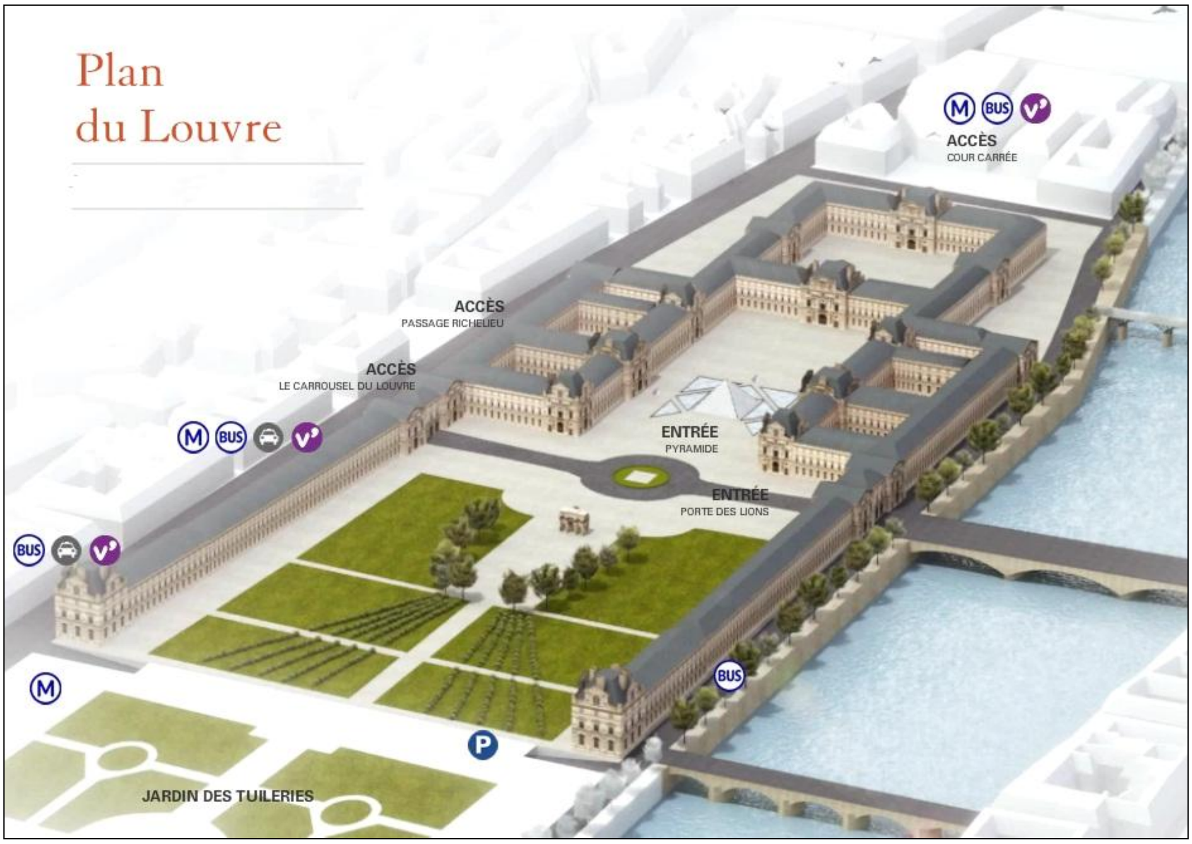



Figura 7.3: Museu do Louvre em Paris, França.
Fonte: <http://omundonabagagem.com/2012/03/27/musee-du-louvre/>

## 7.2. A ATIVIDADE DIDÁTICA

A Pirâmide do Louvre tem base quadrada e na base de suas faces as placas de vidro são triângulos. Forneci a medida da aresta desses triângulos e solicitei os cálculos da aresta da base da pirâmide, a altura, o apótema, a área lateral e o volume da pirâmide. Então, forneci as medidas da aresta da base e da altura da Pirâmide do Louvre e pedi para que calculassem os erros nos cálculos realizados. Essas informações constam no roteiro fornecido aos estudantes.

Figura 7.4: Estudantes trabalhando na Modelagem Matemática da Pirâmide do Louvre

## 7.3. ROTEIRO

Na primeira parte do roteiro (questões 1 à 5) parâmetros são estimados e na segunda esses parâmetros são validados por meio do confrontamento com os valores reais. Nessa fase os erros de medida são considerados.

1. Sabendo que a aresta de um triângulo pequeno da base dessa pirâmide quadrangular possui 196,777cm calcule a aresta da base desta pirâmide (em m).
2. Qual é a altura desta pirâmide (em m)?
3. Com os dados da aresta e da altura já calculados nas questões anteriores, encontre o apótema desta pirâmide (em m).
4. Qual é a área lateral desta pirâmide (em $m^2$)?
5. Qual é o volume desta pirâmide (em $m^3$)?

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, considerando que a Pirâmide do Louvre - possui aresta da base de 35,42 metros e altura de 21,64 metros[15].

6. Qual foi o erro em relação à aresta da base encontrada na foto (em m)?
7. Qual é o volume desta pirâmide (em $m^3$)?
8. Qual é o apótema desta pirâmide, sabendo a altura e aresta da base reais (em m)?
9. Qual é a área lateral desta pirâmide (em $m^2$)?

## 7.4. RESULTADOS

**Questões 1 e 2:** Os estudantes perceberam que havia três possibilidades de resolução. Eles poderiam estabelecer uma razão entre a medida real da aresta de cada um dos triângulos de vidro pequenos que compõem a base da pirâmide (medida essa que foi fornecida pela professora) e essa medida na fotografia. Usando essa proporcionalidade, poderiam calcular as reais medidas da aresta e da altura da Pirâmide do Louvre. Mas, poderiam apenas multiplicar a medida da aresta de cada triângulo de vidro pelo número destes triângulos que formam a base da face da pirâmide. Uma aluna enxergou três triângulos de tamanho intermediário formando a base e três formando a altura da pirâmide. Apenas as duplas G e O optaram pela primeira possibilidade. Os demais adotaram o segundo processo de resolução. Esse fato é importante porque mostra que os educandos estavam verdadeiramente em um processo de construção do conhecimento, levantando as possibilidades de resolução e avaliando o caminho mais simples a ser seguido. Isso, em geral, não acontece no ensino tradicional no qual os alunos repetem o processo sugerido pelo professor memorizando os conteúdos e métodos.

Mas até o início da aula, nem todos os estudantes estavam conscientes do que estavam fazendo. Apesar de conseguirem fazer os cálculos dos erros de medida nas atividades anteriores, alguns deles não tinham uma ideia clara do que isso representa. A seguir mostro um diálogo ocorrido após efetuadas as medidas iniciais.

A aluna K1 questiona:

- Professora, os nossos valores não batem com os das outras duplas! E agora? Como é que vai ficar?

Eu respondo:

[15] Ver http://fr.wikipedia.org/wiki/Pyramide_du_Louvre.

- É uma boa pergunta! Todos estão chegando ao mesmo resultado?

Os estudantes respondem:

- Não!

Eu replico:

- A Matemática é exata?

Os alunos respondem quase todos ao mesmo tempo:

-  Não! Sim! Sim! Não!

A aluna K1 reage:

- Era para ser! Sempre me disseram que sim!

A aluna J2 esboça uma resposta:

- A Matemática é uma ciiiênciaa ...

Ela pára e fica com uma expressão de quem não está convicta do que vai falar. Eu olho para ela como quem diz, continua! Mas ela responde:

- Nada não, “sôra”!

Falei sobre medição e erros.

O aluno Q1 conclui:

- Não é erro da Matemática, é erro humano.

Para exemplificar falei sobre o cálculo da área de pisos, situação em que por maior que seja a precisão do cálculo e a aptidão do profissional que vai colocá-lo, a metragem do piso a ser comprado terá que ser maior do que a área medida. Normalmente, acrescenta-se 10% na metragem do piso a ser comprado para suprir as quebras e cortes.

A Figura 7.5 mostra a resolução da dupla F para a questão 1. Essa dupla optou pela segunda possibilidade de resolução.

$$18 \cdot 196{,}777 = 3541{,}986 \text{ cm}$$
$$\hookrightarrow 35{,}41986 \text{ m}$$

Figura 7.5:  Resolução da dupla F para a questão 1.

Na Figura 7.6 apresento os cálculos desenvolvidos pela dupla G para responder a questão 1. Essa dupla optou por resolver a questão da maneira proposta ao longo das atividades desenvolvidas utilizando fotografias, ou seja, a primeira das possibilidades descritas anteriormente. Os dois métodos de resolução fornecem resultados ligeiramente diferentes. Os cálculos da professora usando o método empregado pela dupla G sugerem 36,4037m para medida da aresta da pirâmide.

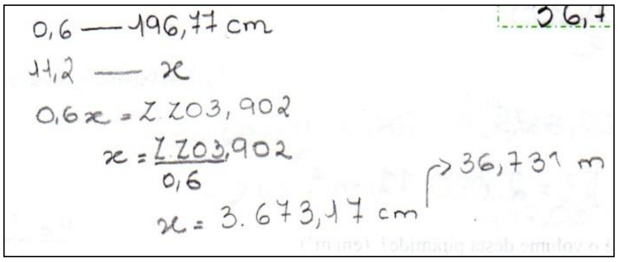



Figura 7.6: Cálculos da dupla G para a questão 1. A dupla optou pelo primeiro método de resolução.

Ao contrário do que ocorreu na questão anterior, na 2 todos os estudantes optaram pela primeira possibilidade. Isso porque foi fornecida a medida da aresta dos triângulos de vidro, mas na vertical, exceto por uma, todas as placas de vidro são losangos. Na Figura 7.7 é mostrada a resolução da dupla H para a questão 2.

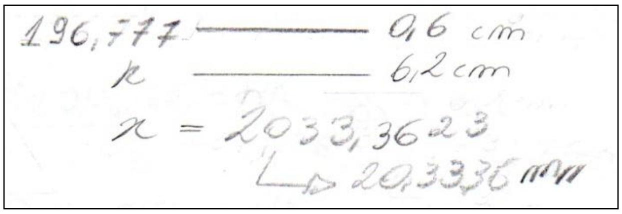



Figura 7.7: Resolução da dupla H para a questão 2.

Os resultados de todas as duplas e da professora para as questões 1 e 2 são mostrados na Tabela 5. Tomando como referência o valor calculado pela professora, os resultados dos estudantes são satisfatórios, principalmente para a questão 1.

Tabela 5 - Aresta da base e altura da pirâmide

| | Q.1(m) | Q.2(m) |
|---|---|---|
| A | 35,420 | 17,360 |
| B | 35,420 | 17,429 |
| C | 35,280 | 16,250 |
| D | 35,419 | 19,800 |
| E | 35,410 | 20,580 |
| F | 35,420 | 19,784 |
| G | 36,731 | 20,661 |
| H | 36,404 | 20,334 |
| I | 35,420 | 19,964 |
| J | 35,419 | 19,963 |
| K | 35,419 | 24,400 |
| L | 35,420 | 19,964 |
| M | 35,410 | 19,780 |
| N | 35,410 | 19,780 |
| O | 36,075 | 20,662 |
| P | 35,420 | 19,784 |
| Q | 35,420 | 20,465 |
| **PROF** | **35,420** | **20,334** |

**Questão 3:** A maioria dos estudantes resolveram com facilidade a questão. Desenharam um triângulo e aplicaram o teorema de Pitágoras. Na Figura 7.8 mostro a resolução da dupla H, cujo resultado é igual ao obtido pela professora.

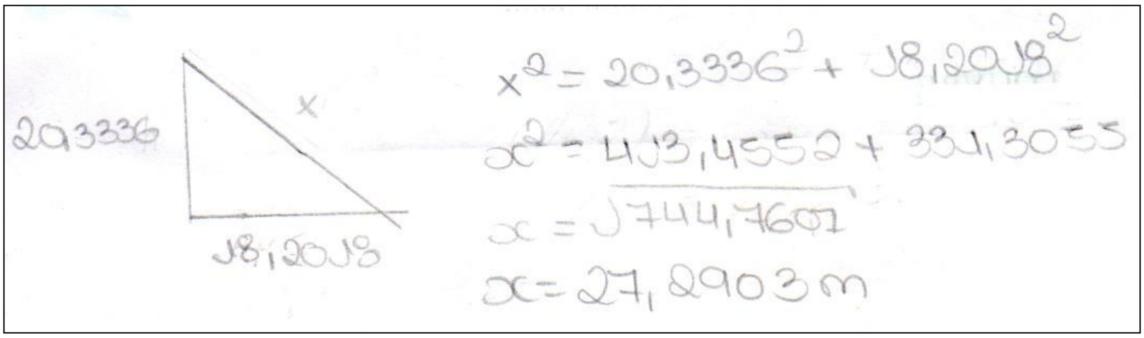



Figura 7.8: Resolução da dupla H para obter o apótema da pirâmide que dá acesso ao Museu do Louvre.

**Questão 4:** Os valores calculados pela maioria dos educandos ficaram muito próximos do resultado da professora (1926,793m$^2$). Como exemplo, mostro a resolução da dupla Q (Figura 7.9).

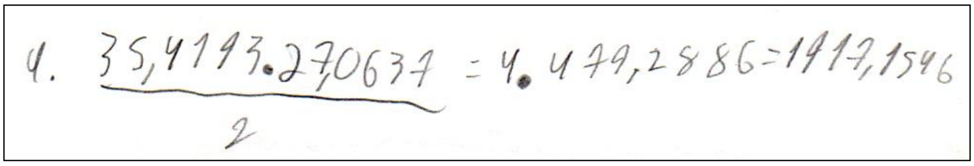



Figura 7.9: Resposta da dupla Q para a área lateral (superfície de vidro) da Pirâmide do Louvre.

**Questão 5:** A exemplo da questão anterior, os resultados obtidos pelos estudantes para o volume da Pirâmide do Louvre são bons em relação a medida professora adotada como referência (8502,6793m$^3$). A Figura 7.10 mostra os cálculos da dupla E para responder a presente questão.

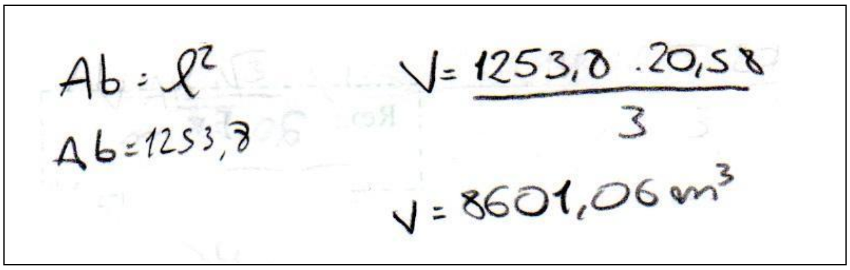



Figura 7.10: Cálculo do volume da pirâmide desenvolvido pela dupla E como resposta da questão 5.

**Questão 6:** Os cálculos dos erros dos valores estimados em relação à medida real da base da Pirâmide do Louvre mostra a mudança de postura dos educandos frente às atividades em desenvolvimento. Não ocorreram erros grosseiros na presente questão, pelo contrário, os resultados foram melhores do que o esperado. A segunda coluna da Tabela 6 mostra o erro relativo na estimativa da aresta da base para todas as duplas. A Figura 7.11 apresenta a solução da dupla B para a presente questão. Usando uma fotografia da Pirâmide do Louvre os componentes dessa dupla foram capazes de estimar a medida da aresta da base da mesma, obtendo um valor apenas 0,00056% inferior ao valor verdadeiro.

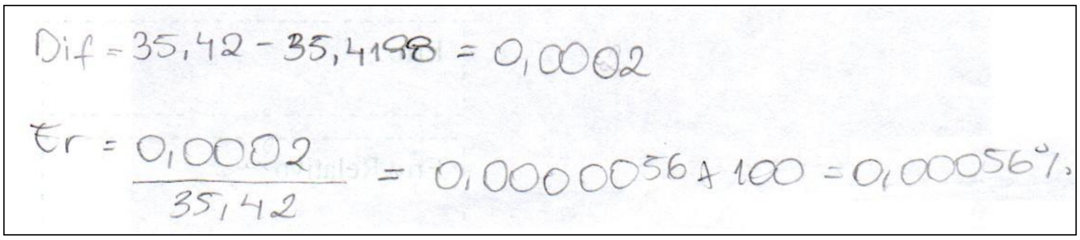



Figura 7.11: Resposta da dupla B para a questão 6. Cálculo do erro no valor estimado para a medida da aresta da base da pirâmide em relação a medida real.

**Questão 7:** Na determinação do volume real da pirâmide também ocorreram poucos equívocos. Os estudantes foram solicitados a comparar o resultado da presente questão com o da questão 5. A terceira coluna da Tabela 6 mostra os erros relativos para a estimativa do volume da pirâmide de vidro. A Figura 7.12 apresenta os procedimentos da dupla E para responder a questão. Na Figura 7.13 mostro a resolução da dupla H, cujos estudantes cometeram um equívoco no cálculo da área da base da pirâmide.

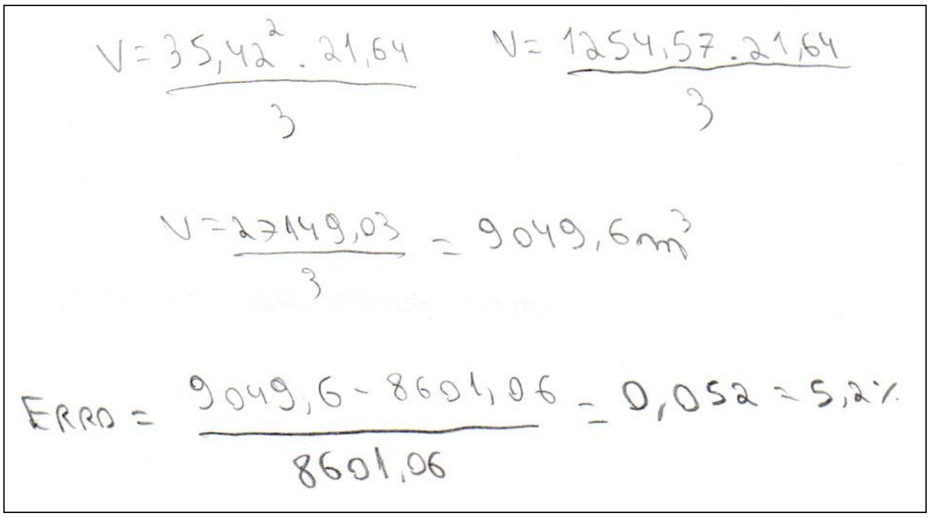



Figura 7.12: Resposta da dupla E para a questão 7.

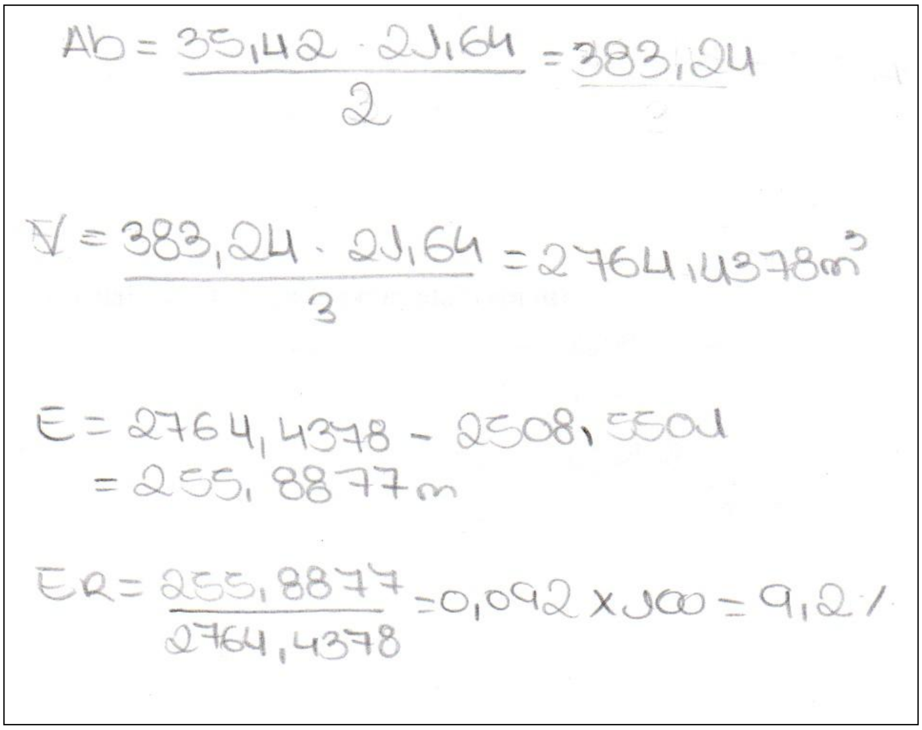



Figura 7.13: O mesmo da Figura 7.12 para a dupla H.

**Questão 8:** Com o resultado dessa questão foi possível validar o método utilizado para derivar o apótema da pirâmide na questão 3. Na Figura 7.14 é mostrado o cálculo do apótema da pirâmide feita pela dupla P.

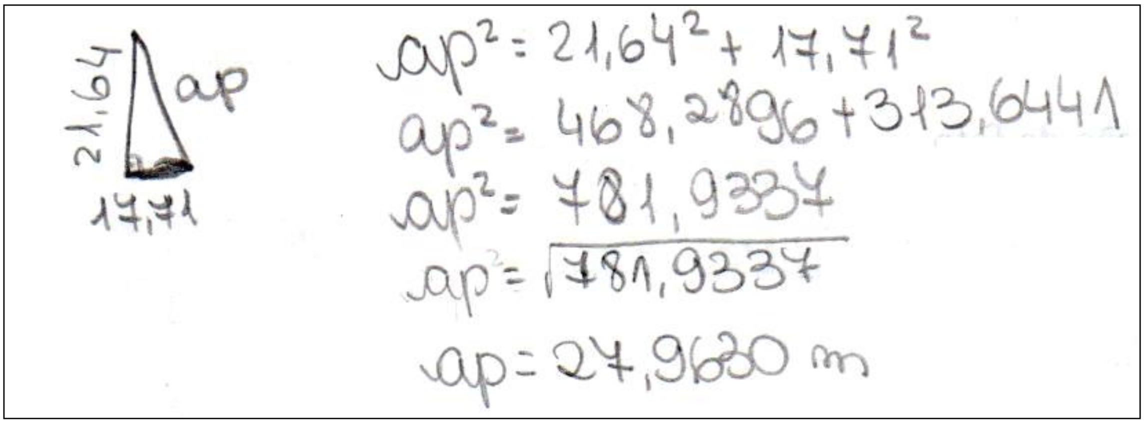
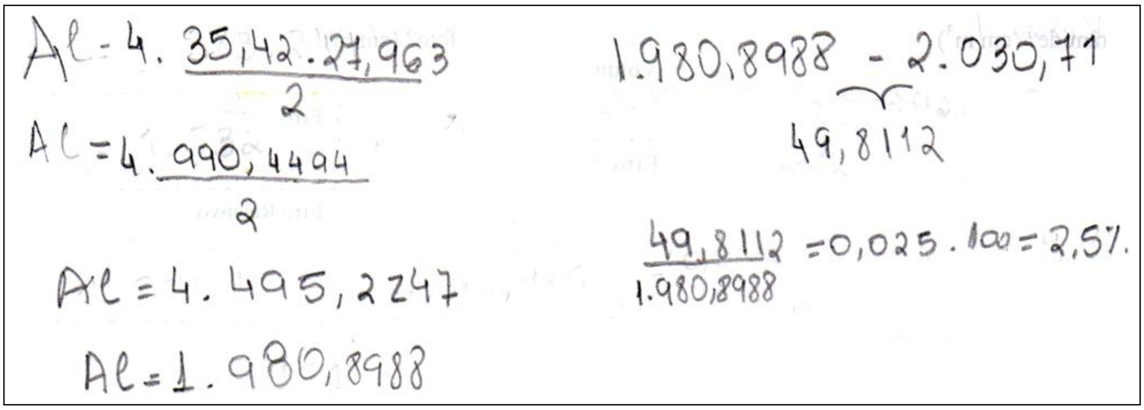



Figura 7.14: Resposta da dupla P para a questão 8. Cálculo do valor real do apótema da pirâmide.

**Questão 9:** Comparando os resultados da atual questão e da 4, verifica-se que a maioria das duplas estimou valores próximos do real para a área lateral. A última coluna da Tabela 6 indica os erros relativos para as áreas laterais estimadas na questão 4. A resolução da dupla G é mostrada na Figura 7.15.



$$Al = 4 \cdot \frac{35{,}42 \cdot 27{,}963}{2}$$

$$Al = 4 \cdot \frac{990{,}4494}{2}$$

$$Al = 4 \cdot 495{,}2247$$

$$Al = 1.980{,}8988$$

$$1.980{,}8988 - 2.030{,}71$$

$$49{,}8112$$

$$\frac{49{,}8112}{1.980{,}8988} = 0{,}025 \cdot 100 = 2{,}5\%$$

Figura 7.15: Resolução da dupla G para a questão 9. O erro relativo para a área lateral estimada usando a fotografia também é mostrado.

Tabela 6 - Erros relativos nos parâmetros estimados.

| Dupla | Q.6b(%) | Q.7c(%) | Q.9c(%) |
|---|---|---|---|
| A | 0,000 | 0,197 | 0,113 |
| B | 0,001 | 19,460 | 11,142 |
| C | 0,395 | 75,000 | 14,500 |
| D | 0,028 | 8,559 | 5,063 |
| E | 0,020 | 5,200 | 3,050 |
| F | 0,001 | 8,570 | 4,580 |
| G | 3,700 | 2,600 | 2,500 |
| H | 2,760 | 9,200 | 29,600 |
| I | 0,000 | 7,746 | 4,564 |
| J | 0,004 | 7,750 | 4,500 |
| K | 0,020 | 12,747 | 7,840 |
| L | 0,000 | 7,740 | 4,560 |
| M | 0,020 | 8,600 | 5,090 |
| N | 0,020 | 0,056 | 1,550 |
| O | 1,849 | 0,959 | 0,118 |
| P | 0,001 | 8,570 | 5,040 |
| Q | 0,002 | 4,640 | 3,210 |
| **PROF** | **0,001** | **6,044** | **2,731** |

Os baixos valores dos erros nos parâmetros estimados (Tabela 6) por meio da fotografia da Pirâmide do Louvre respondem a nossa indagação inicial. É possível usar fotografias para estimar as dimensões reais do que é mostrado na imagem. Para isso, basta que se conheça uma medida real para ser usada como padrão.

A Modelagem Matemática da Pirâmide do Louvre mostrou aos educandos que os resultados matemáticos (área e volume da pirâmide) dependem fortemente da precisão na fase de medição. Entretanto, nas atividades experimentais uma precisão de 100% é algo muito difícil de se conseguir. Assim sendo, os profissionais das áreas experimentais da Matemática, como a Modelagem,  questionam a exatidão da Matemática.

Os resultados obtidos pelos estudantes na presente atividade são testemunhos da mudança de postura e evolução dos mesmos no decorrer do processo de aprendizagem. A mudança de estratégia, fornecendo aos educandos uma foto de um monumento que permitiu trocas de informações e experiências entre os que já o visitaram e os que pretendem fazê-lo no futuro também contribuiu para o sucesso da atividade. Dada a pluralidade do ser humano é difícil agradar a todos, além disso, não penso que estudar possa e deva ser sempre uma atividade prazerosa. No entanto, é papel do professor definir as estratégias procurando os caminhos menos árduos.

# 8. MODELANDO A TORRE DE PISA

A aula referente a quinta atividade foi iniciada com a indagação da professora sobre qual seria a foto a ser trabalhada. Saliento que para fazer isso o educador deve estar seguro de que a atividade irá corresponder às expectativas dos educandos, caso contrário, ele corre o risco de gerar frustrações, comprometendo o bom andamento das atividades. Mas eu estava segura quanto a isso e, entre as tentativas de adivinhação, uma das respostas foi a Torre de Pisa (Figura 8.1).

Figura 8.1: Torre de Pisa.
Fonte: http://www.flickriver.com/photos/treyerice/4890197601/

Os alunos vibraram com a foto escolhida. Mas logo, sem que precisasse a professora comentar, surgiu a pergunta: como calcular o ângulo de inclinação da Torre? Então, a professora forneceu a medida da menor altura do primeiro pavimento da Torre de Pisa e solicitou que calculassem o diâmetro, o raio, a área lateral e o volume da Torre.  O próximo passo foi fornecer os valores reais do diâmetro e da altura da Torre de Pisa e pedir para que calculassem os erros em relação ao diâmetro e a altura obtidos com a foto. Quanto ao ângulo de inclinação, eles perceberam que poderiam formar um triângulo e usar as razões trigonométricas para fazer o cálculo. Os detalhes da atividade são. mostrados no roteiro e nos comentários das questões.

A Figura 8.2 mostra alguns alunos fotografados durante as atividades de Modelagem da Torre de Pisa.

Figura 8.2: Estudantes trabalhando na Modelagem Matemática com a foto da Torre de Pisa.

## 8.1. HISTÓRICO DA CONSTRUÇÃO E ESTABILIZAÇÃO

A Torre de Pisa foi construída para ser o campanário da catedral da cidade. Ela é uma dos quatro monumentos medievais da Praça dos Milagres (catedral, campanário, batistério e cemitério) na cidade de Pisa, na Itália. A Torre é toda revestida de mármore branco, o que a torna extremamente pesada. Pouca coisa se sabe sobre história da sua construção. As obras iniciaram em 9 de agosto de 1173, como indica uma inscrição próximo da porta de entrada. O solo é constituído de areia e argila (BURLAND, JAMIOLKOWSKI, VIGGIANI, 2009; SARTI, ROSSI, AMOROSI, 2012) e por causa da baixa compactação cedeu no decorrer dos anos.

A evolução da inclinação da Torre no decorrer do tempo pode ser parcialmente deduzida com base em alguns registros feitos no passado e pela análise da curvatura da Torre. O quadro pintado por Antonio Veneziano em 1384 mostra a Torre visivelmente inclinada. As medições dos arquitetos ingleses Cressy e Taylor feitas em 1817 apontam para uma inclinação de cerca de 5º. Posteriormente, em 1859 Ruhault de Fleury mediu uma inclinação de 5,5º.

Em meados de 1178 a construção estava pronta até o quarto andar. Ao que parece, por causa da guerra entre as cidades-estado da Itália, a construção parou por cerca de um século. Essa pausa permitiu que a fundação se acomodasse prevenindo o colapso. Em 1272 os trabalhos recomeçaram e por volta de 1278 a construção tinha atingido o sétimo andar, mas novamente os trabalhos foram interrompidos. Parece que mais uma vez a Torre foi salva pelo acaso, já que se os trabalhos tivessem continuado as chances de um colapso eram grandes. Em torno do ano de 1360 as obras recomeçaram e próximo de 1370 a Torre foi concluída, após cerca de 200 anos do seu início (Figura 8.3).

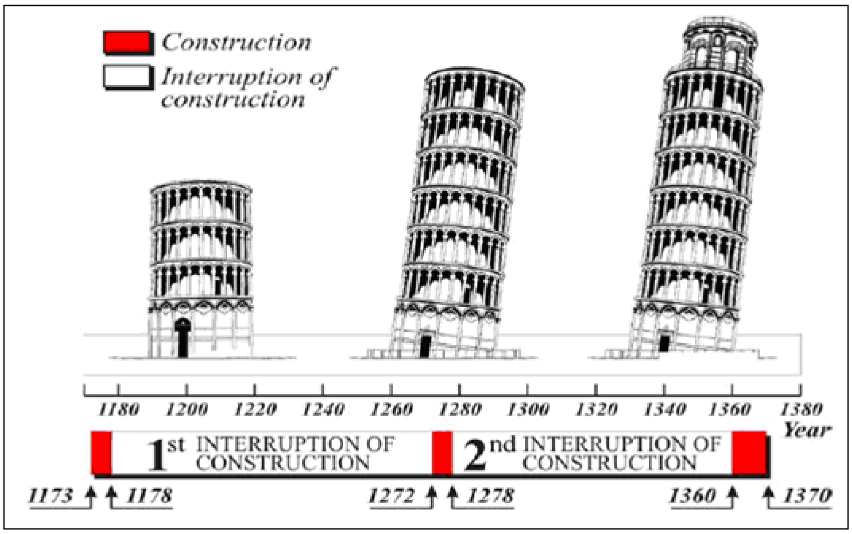



Figura 8.3: Cronologia da construção da Torre Pendente de Pisa. Fonte: Burland, Jamiolkowski, Viggiani, 2009.

As paredes da edificação são feitas com blocos de alvenaria medievais com o espaço entre as superfícies interna e externa preenchido com entulho e argamassa. Uma escada em espiral foi construída no interior dessa parede (Figura 8.4). Um detalhe importante descoberto por meio da medição dos blocos de alvenaria das paredes é que a construção foi feita usando blocos retangulares alinhados e paralelos, com uma ou duas exceções. Nesses casos, foram feitos ajustes com blocos recortados. O mais importante ajuste ocorre no quarto andar, justamente no andar em que a construção ficou parada por quase 100 anos. Provavelmente ao retomar a obra, a inclinação da Torre tinha aumentado significativamente e foram feitas correções para manter as camadas de alvenaria horizontais, o que só piorou a situação (CROCI, 2000). Na construção do último andar que abrigaria os sinos pode-se perceber uma nova tentativa de alinhamento vertical. A cornija entre o sétimo andar e a câmara dos sinos é visivelmente mais larga no lado sul do que no norte. As tentativas de correção da inclinação durante a construção são evidenciadas pela ligeira curvatura da Torre. A primeira correção feita indica que, a época, a Torre apresentava uma inclinação de 0,2° para o lado sul. A segunda correção equivale a uma rotação da base em 1,5°.

Em 1838 o arquiteto Alessandro Della Gherardesca escavou o passeio em torno da fundação provavelmente para desenterrar a parte inferior dos pilares e da base que tinham afundado por causa do assentamento da Torre. No entanto, a escavação atingiu o lençol de água no lado sul da Torre , o que aumentou a inclinação em cerca de 0,5º. A vala foi concretada e ficou conhecida como catino (bacia). As consequências desastrosas da construção do catino são apontadas pelo aumento de 0,5º na inclinação da Torre no intervalo de tempo entre os registros de 1817 e 1859.

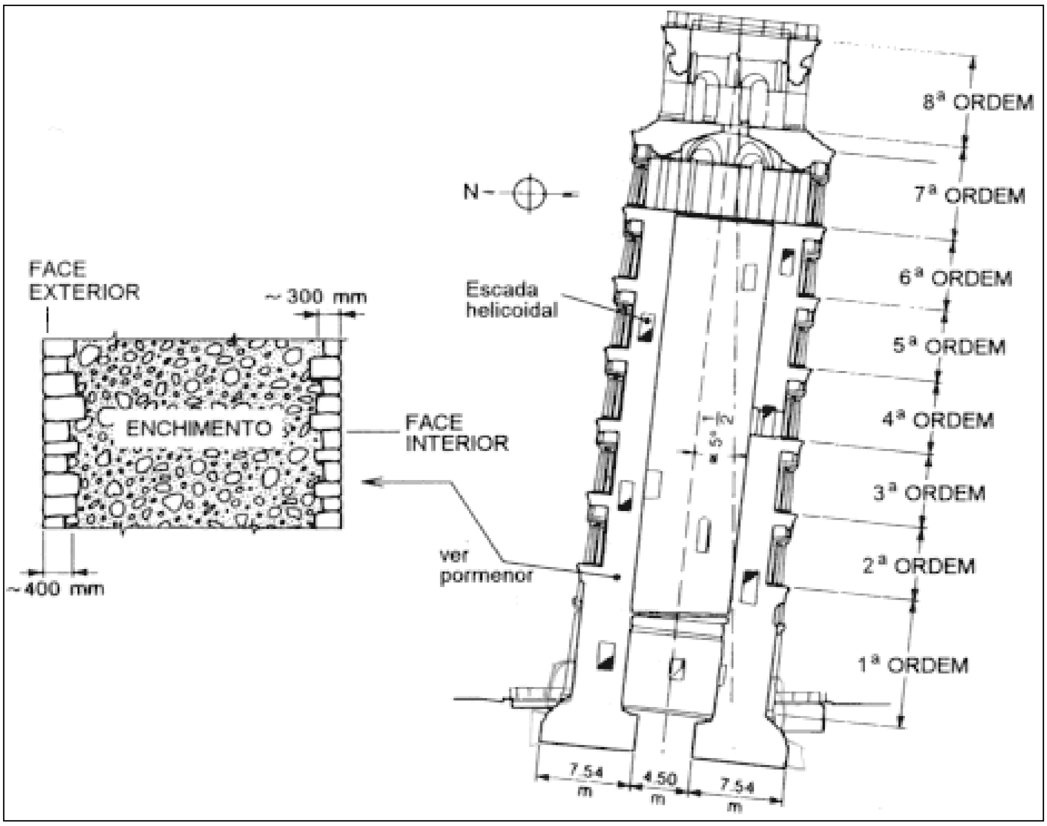



Figura 8.4: Estrutura da Torre de Pisa.

Fonte:<http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/seminario/trabalhos/RRF_ALVARO_AZEVEDO/Trabalho/Exem%20de%20Pisa/torre_de_pisa.htm>

Em 1990, a Torre apresentava uma inclinação de 5,5º e a alvenaria apresentava sinais de fragilidade. O aumento da inclinação era de cerca de 6" por ano, o que equivale a um deslocamento horizontal do topo da Torre de aproximadamente 1,5 mm por ano (JAMIOLKOWSKI, 2001). Como em 1989 a Torre Cívica de Pavia tinha caído matando 4 pessoas, havia uma preocupação muito grande com a segurança. Então o Governo italiano nomeou uma comissão multidisciplinar internacional para desenvolver um projeto de estabilização da Torre de Pisa. A comissão recomendou que a Torre fosse fechada ao público, o que aconteceu no início de 1990.

Muitas medições, simulações e modelagens foram feitas antes da ação concreta. Verificou-se, por exemplo, que o assentamento diferencial da Torre era de cerca de 1,7m com a parte sul assentando em aproximadamente 2,85m de profundidade e a parte norte em 2,15m. Além disso, descobriu-se que a pressão média sobre a fundação era de 500kPa, mas a pressão sobre a fundação no lado sul era de 1000kPa enquanto no lado norte era zero (BURLAND & POTTS, 1994; BURLAND, JAMIOLKOWSKI & VIGGIANI, 2009). Faz-se necessário lembrar que o problema mais urgente da Torre não era a inclinação, já que o centro de gravidade da Torre estava projetado sobre a parte interna da base de sustentação. O fator mais preocupante foi a descoberta de um ponto crítico na estrutura da Torre entre o primeiro e o segundo andares. A escada apresenta uma grande abertura logo acima da primeira cornija reduzindo a secção transversal da alvenaria. Em 1992 essa região foi estabilizada através da aplicação de cabos de aço em torno da Torre nesse andar. Outra importante descoberta foi que a variação anual do nível freático provocada principalmente pelas fortes chuvas entre setembro e dezembro desempenhava um papel importante no movimento da Torre (BURLAND, JAMIOLKOWSKI, VIGGIANI, 2003)

Em 1993, 600 toneladas de chumbo foram colocados na base do lado norte da Torre em busca de uma estabilização temporária (BURLAND, et al; 1993); (BURLAND, POTTS; 1994). Mas em setembro de 1995 (apelidado de setembro negro) houve um grande susto, a Torre voltou a inclinar-se para o sul. A causa foi a tentativa de substituir os ligotes de chumbo por âncoras presas ao solo. Felizmente a reposição e aumento do contrapeso na parte norte a estabilizou novamente.

A solução final veio em 1999, quando pequenas quantidades de solo foram extraídas de uma camada abaixo da fundação do lado norte da Torre usando uma broca inclinada (30º em relação a horizontal). A ideia era retirar pequenas quantidades de solo nos locais desejados criando uma cavidade. A cavidade rapidamente se fecha por causa da enorme pressão causando um pequeno rebaixamento do solo. O processo é repetido em vários locais de forma muito gradual reduzindo a inclinação da Torre. Esse método havia sido proposto por Terracina (1962) e já usado anteriormente na Catedral da Cidade do México (TAMEZ, OVANDO, SANTOYO, 1997; JOHNSTON, BURLAND; 2004). Mas como a Torre estava instável, havia o risco de a extração de solo no lado norte causar o aumento da inclinação. Para garantir que não haveriam surpresas a Torre foi amarrada por cabos horizontais na altura do terceiro andar. Em 9 de fevereiro de 1999, iniciou-se a retirada de terra e a Torre lentamente retornou para o norte. No início de junho ela tinha se movido em 80" e a escavação foi interrompida. A Torre continuou o seu retorno ao norte até outubro de 1999. Os resultado iniciais convenceram o Comitê e entre dezembro e janeiro do ano seguinte, 41 brocas foram instaladas no lado norte. Essas brocas atuaram lentamente e de forma alternada desde o início de fevereiro até o final de maio de 2000. O passo seguinte foi retirar, aos poucos, os blocos de chumbo, trabalho que se estendeu até 16 de janeiro de 2001. A obra levou a Torre de volta para o estado em que se encontrava em 1838, antes da construção do catino, reduzindo em 0,5º a inclinação (BURLAND, JAMIOLKOWSKI, VIGGIANI; 2009).

Essa redução da inclinação, apesar de pequena para ser visível, reduziu a pressão sobre a alvenaria e estabilizou a fundação.

Em 16 de junho de 2001, após onze anos de trabalho, a Torre de Pisa foi reaberta ao público, com uma garantia de segurança de 300 anos. Após essa data a Torre se estabilizou ainda mais, de forma que não é mais a construção mais inclinada do mundo (TAGLIABUE, 2012).

Existem outras construções inclinadas na cidade de Pisa. Recentemente descobriu-se que a torre do Big Ben, na Inglaterra está se inclinando. No Brasil, prédios da cidade de Santos sofrem com o mesmo problema.

## 8.2. O ROTEIRO

**1.** Sabendo que a menor altura do primeiro pavimento da Torre de Pisa mede 943,80 cm, encontre a altura da Torre (em m)?

**2.** Qual o diâmetro da Torre de Pisa (em m)?

**3.** Qual é o raio (em m)?

**4.** Qual é a área lateral (em $m^2$)?

**5.** Qual é o volume (em $m^3$)?

**6.** a) Sabendo que o diâmetro desta Torre é de 15,484 metros, quais foram os erros em relação ao diâmetro calculado com a foto?

b) Qual foi o erro relativo (em %)?

**7.** a) Sabendo que a altura da Torre é de 56,294 metros, qual foi seu erro em relação a altura calculada com a foto?

b) Qual foi o erro relativo (em %)?

**8.** Como poderíamos calcular a inclinação da Torre utilizando a foto (em graus)?

**9.** a) Sabendo que o ângulo de inclinação da Torre de Pisa é de 3,97º , qual foi seu erro em relação ao cálculo feito utilizando a foto?

b) Qual foi o erro relativo (em %)?

## 8.3. RESULTADOS

O roteiro fornecido aos estudantes foi dividido em duas partes. Na primeira foram efetuadas medições e parâmetros estimados (Tabela 7). A segunda parte foi destinada a análise dos resultados e cálculo dos erros.

Tabela 7 - Estimativas da altura e do diâmetro da Torre.

| | Q.1 (m) | Q.3 (m) |
|---|---|---|
| A | 52,2900 | 7,2700 |
| B | 49,8326 | 7,9279 |
| C | 44,2609 | 6,1835 |
| D | 55,8073 | 8,0017 |
| E | 43,6100 | 6,6716 |
| F | 53,0887 | 7,2751 |
| G | 53,4820 | 7,8650 |
| H | 50,9652 | 7,3616 |
| I | 49,0050 | 6,7155 |
| J | 50,2101 | 8,1166 |
| K | 49,0050 | 6,8970 |
| L | 52,6955 | 6,4886 |
| M | 50,9652 | 6,9841 |
| N | 50,9652 | 7,3616 |
| O | 50,9652 | 7,5504 |
| P | 50,9652 | 7,5504 |
| Q | 49,8326 | 7,8334 |
| **PROF** | **53,4820** | **7,6683** |

**Questão 1:** A variação nas estimativas, em relação ao valor obtido pela professora (Tabela 7), na maioria dos casos, é conseqüência de diferenças nas medidas efetuadas na foto. Como propositadamente não foi estipulado em que posição os estudantes deveriam medir a altura da Torre, eles fizeram opções distintas. A Figura 8.5 mostra a resposta da dupla G para a questão 1.

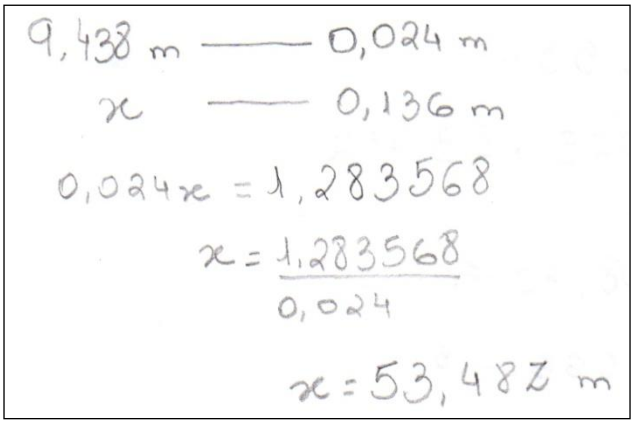



Figura 8.5: Estimativa da altura da Torre de Pisa feita pela dupla G.

**Questões 2 e 3:** Como na questão anterior, a principal causa da variação nos resultados (Tabela 7) foi o processo de medição. Nas Figura 8.6 e Figura 8.7 mostro os cálculos feitos pela dupla B para as questões 2 e 3, respectivamente.

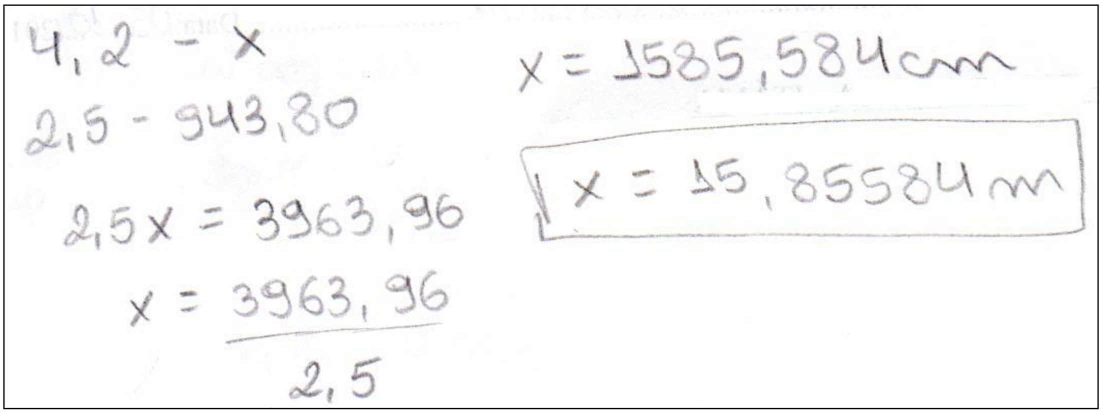



Figura 8.6: Cálculo do diâmetro da Torre de Pisa feito pela dupla B para responder a questão 2.

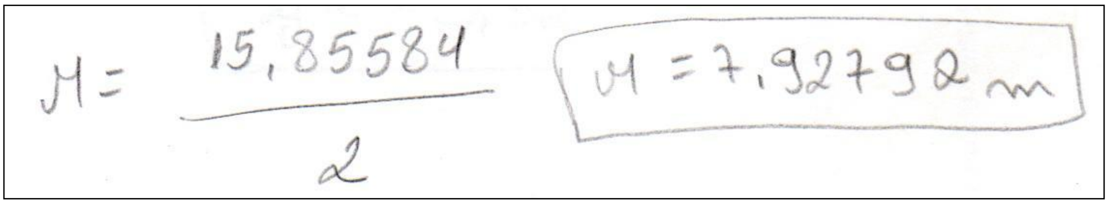



Figura 8.7: Resposta da dupla B para a questão 3.

**Questões 4 e 5:** Essas duas questões refletem as respostas das questões 1 e 3. Os estudantes não mais apresentam dificuldades na realização das atividades e os erros grosseiros são quase inexistentes. Como amostra ilustrativa das atividades realizadas mostro as resoluções das duplas F e Q para as questões 4 e 5, respectivamente (Figura 8.8 e Figura 8.9).

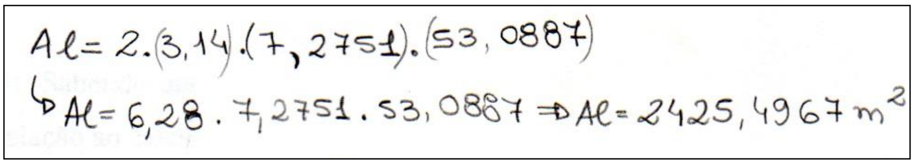



Figura 8.8: Estimativa da área lateral da Torre feita pela dupla F.

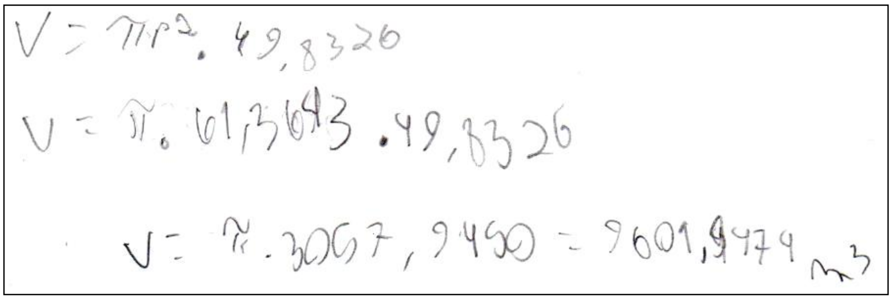



Figura 8.9: Cálculo feito pela dupla Q para estimar o volume da Torre Pendente.

**Questão 6:** A maioria das duplas obtiveram erros relativos inferiores a 1%. Isso sugere que o método desenvolvido no presente trabalho é eficiente o suficiente para que seja considerada a possibilidade de utilizá-lo em trabalhos técnicos e não apenas em atividades didáticas. Além disso, esse resultado corrobora a conclusão do capítulo anterior, indicando que houve uma evolução significativa dos educandos no decorrer das atividades.

A resposta da dupla P para a presente questão é mostrada na Figura 8.10.

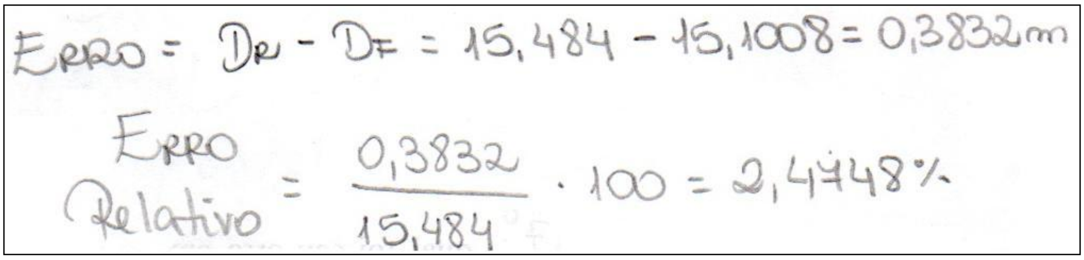

$$\text{ERRO} = D_R - D_F = 15{,}484 - 15{,}1008 = 0{,}3832\,m$$
$$\text{Erro Relativo} = \frac{0{,}3832}{15{,}484} \cdot 100 = 2{,}4748\%$$

Figura 8.10:Cálculo do erro na estimativa do diâmetro em relação ao valor verdadeiro, feito pela dupla P.

**Questão 7:** Os resultados aqui encontrados sofreram a influência das medições realizadas na questão 1. Mesmo assim, os erros calculados são baixos. A Figura 8.11 apresenta a resolução da dupla D para a presente questão.

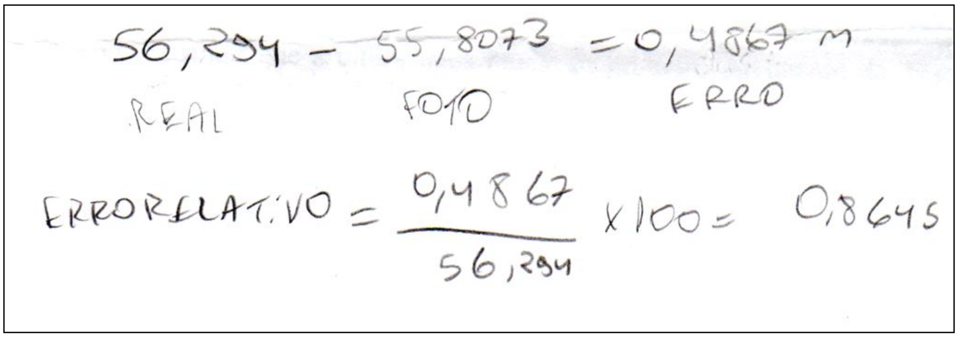

$$\underset{\text{REAL}}{56{,}294} - \underset{\text{FOTO}}{55{,}8073} = \underset{\text{ERRO}}{0{,}4867\,m}$$
$$\text{ERRO RELATIVO} = \frac{0{,}4867}{56{,}294} \times 100 = 0{,}8645$$

Figura 8.11: Resposta da dupla D para a questão 7.

**Questão 8:** Nesta questão além da inclinação da Torre era preciso considerar que ela apresenta uma pequena curvatura para o lado oposto ao da inclinação. Mesmo assim, os resultados foram satisfatórios, como veremos na próxima questão ao considerar os erros. Os resultados da dupla L são mostrados na Figura 8.12.

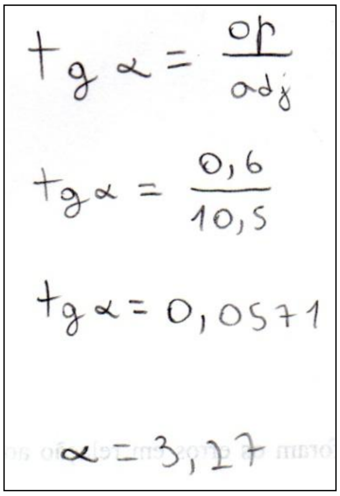



Figura 8.12: Resposta da dupla L para a questão 8.

**Questão 9:** Apesar das dificuldades impostas para resolver a questão anterior, os erros relativos calculados pela maioria dos estudantes foram de aproximadamente 20%. Mas algumas duplas conseguiram valores inferiores a 1%. Além disso, os maus resultados são consequência dos valores obtidos na questão 8, sendo que todas as duplas efetuaram os cálculos dos erros absoluto e relativo de forma correta. A seguir mostro os cálculos da dupla O (Figura 8.13).

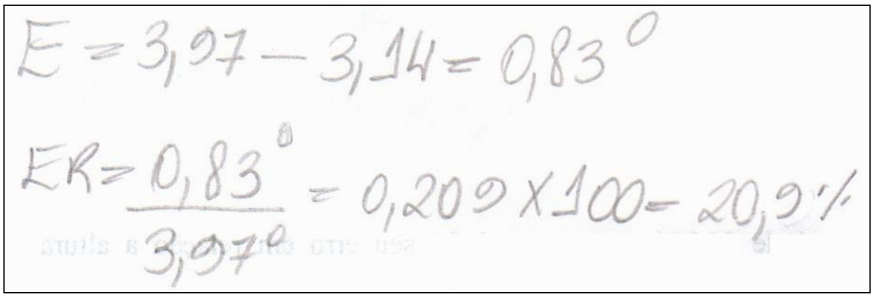



Figura 8.13: Resolução da dupla O para a questão 9.

A abordagem dos erros no decorrer das atividades foi um dos importantes legados do presente trabalho. Nesse sentido, a Modelagem Matemática tem muito a contribuir para a retomada da Matemática como ciência experimental, com aplicações práticas no cotidiano das pessoas.

Essa foi a última atividade com fotografia e, por isso, ao receber os registros feitos pelos estudantes ficou a sensação de dever cumprido. Não apenas por ter em mãos os trabalhos que gerariam a presente dissertação, mas também porque o conjunto de atividades repercutiu bem junto à comunidade escolar, principalmente pais e alunos.

# 9. PERSPECTIVA DOS EDUCANDOS

No presente trabalho procurei criar os ambientes necessários para que os estudantes pensassem por conta própria. As atividades foram planejadas focando no interesse dos educandos e de forma a não se tornarem cansativas.

Antes de iniciar as atividades solicitei uma autorização formal da escola e dos pais para que o trabalho pudesse ser publicado na presente dissertação. Essa exigência legal acabou favorecendo o desenvolvimento do projeto, visto que muitos pais gostaram da proposta e acompanharam com interesse as atividades dos filhos. Percebi que mesmo que os pais não conheçam profundamente os conteúdos trabalhados, o fato de falarem com os filhos sobre as atividades desenvolvidas na escola pode favorecer a aprendizagem. Ao relatar para os pais o que fizeram, os estudantes, por vezes, explicam o conteúdo e, ao fazê-lo, revisam o que estudaram, aprendem a argumentar e organizar as ideias.

Baseada nos comentários e elogios recebidos (diretamente ou por meio da escola) tanto dos estudantes quanto dos pais posso afirmar que o trabalho repercutiu bem na comunidade escolar. No entanto, para confirmar as minhas impressões apliquei o questionário a seguir.

## 9.1. QUESTIONÁRIO

As questões propostas foram elaboradas levando-se em consideração as questões norteadoras da pesquisa (Seção 1.4) e os objetivos do presente trabalho (Seção 1.5).

**1)** Qual foto você achou mais interessante?

( ) Monumento Expedicionário – Porto Alegre

( ) Tronco de Pirâmide em Homenagem a Santos Dumont – Porto Alegre

( ) Esfera – Epcot na Disney – Orlando

( ) Pirâmide do Louvre – França

( ) Torre de Pisa – Itália

**2)** Justifique a resposta da questão 1, o motivo desta escolha.

**3)** Você considera que esta atividade lhe ajudou no entendimento do conteúdo de Geometria Espacial? Por quê?

**4)** Você já havia trabalhado a questão do erro, anteriormente?

**5)** Na sua opinião, qual é a maior fonte de erros nas fotos analisadas?

**6)** Como poderíamos reduzir esses erros?

**7)** É possível considerar margens de erro numa ciência exata como a Matemática?

**8)** O fato de ter trabalhado com erros alterou a sua visão da Matemática?

**9)** A sua visão da Matemática sofreu influência do trabalho com as fotos ou continua a mesma de antes?

**10)** Você acredita que poderá utilizar futuramente os conhecimentos adquiridos nesta atividade?

**11)** Você gostou da atividade proposta? ( ) Sim ( ) Não Justifique.

## 9.2. RESULTADOS E COMENTÁRIOS

Na Tabela 8 mostro as respostas dos alunos para algumas questões do questionário, principalmente as objetivas.

Tabela 8 - Respostas dos estudantes para questões do questionário.

| **Alunos** | **Q.1** | **Q.3** | **Q.4** | **Q.7** | **Q.8** | **Q.10** | **Q.11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | não | sim | sim |
| A2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| B1 | Torre de Pisa | sim | não | sim | não | sim | sim |
| B2 | Monumento expedicionário | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| C1 | Tronco de Pirâmide | sim | não | sim | não | sim | sim |
| C2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | não | não | sim | sim |
| D1 | Esfera-epcot | sim | não | sim | não | sim | sim |
| D2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | não | sim | sim |
| E1 | Torre de Pisa | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| E2 | Esfera-epcot | sim | não | sim | - | sim | sim |
| F1 | Torre de Pisa | sim | não | sim | - | sim | sim |
| F2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | sim | - | sim |
| G1 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | não | sim | sim |
| G2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| H1 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | não | sim | sim |
| H2 | Tronco de Pirâmide | sim | não | sim | - | sim | sim |
| I1 | Torre de Pisa | sim | sim | sim | sim | sim | sim |
| I2 | Torre de Pisa | sim | não | sim | não | sim | sim |
| J1 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | - | sim | sim |
| J2 | Esfera-epcot | sim | não | sim | sim | não | sim |
| K1 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| K2 | Esfera-epcot | sim | não | sim | sim | não | sim |
| L1 | Tronco de Pirâmide | sim | não | sim | não | sim | sim |
| L2 | Torre de Pisa | sim | não | sim | não | sim | sim |
| M1 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| M2 | Torre de Pisa | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| N1 | Torre de Pisa | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| N2 | Torre de Pisa | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| O1 | Torre de Pisa | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| O2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | não | sim | sim | sim |
| P1 | Esfera-epcot | sim | não | sim | sim | sim | sim |
| P2 | Esfera-epcot | sim | não | sim | sim | não | sim |
| Q1 | Torre de Pisa | sim | não | sim | não | sim | sim |
| Q2 | Pirâmide do Louvre | sim | não | sim | não | sim | sim |

Na questão 1 os estudantes marcaram a foto que eles mais gostaram. A Figura 9.1 e a Tabela 8 mostram as preferências dos alunos. Não foi surpresa a expressiva votação da Pirâmide do Louvre, mas eu esperava que a esfera do parque EPCOT fosse a segunda colocada. No entanto, os alunos acham a torre inclinada engraçada. Além disso, como foi a última atividade com fotos, os alunos já dominavam o método de trabalho. O diferencial foi a possibilidade de calcular o ângulo de inclinação da torre, o que eles gostaram de fazer. A baixa votação das fotografias dos monumentos localizados no Parque Farroupilha é a confirmação de que a mudança de enfoque de fotografias de monumentos e construções localizados na cidade de Porto Alegre para fotografias de edificações bem conhecidas e muito visitadas de outros países foi importante para o sucesso do projeto.


Figura 9.1: Gráfico mostrando a preferência dos estudantes pelas atividades desenvolvidas.

Na questão 2 solicitei que os estudantes justificassem o voto da questão 1. A seguir mostro algumas justificativas.

A Figura 9.2 apresenta a justificativa da estudante B2 para o voto na fotografia da base que sustenta a Estátua da Vitória localizada junto ao Monumento ao Expedicionário no Parque Farroupilha, em Porto Alegre. O planejamento inicial do trabalho apostava nesse tipo de opinião.

Eu escolhi a primeira foto, por me identificar mais e gostar, pois pude trabalhar e descobrir medidas de algo que está perto de mim e faz parte do meu mundo, devido ao fato de eu frequentar o parque da redenção.

Figura 9.2: Justificativa de voto na fotografia da base da Estátua da Vitória no Parque Farroupilha (Redenção) da aluna B2.

Na Figura 9.3 apresento a justificativa do estudante H2, que adora Matemática.

De todas as fotos, esta era a que apresentava mais cálculos, principalmente no exercício que pedia o volume do tronco de pirâmide, que apresenta resolução parte por semelhança, e parte por cálculo de volume de pirâmides. Foi a mais legal de calcular.

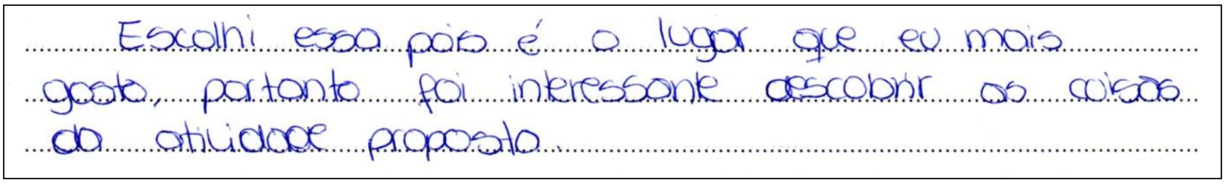
Figura 9.3: Justificativa do estudante H2 que votou na foto do tronco de pirâmide que sustenta o busto de Santos Dumont.

A atividade envolvendo a esfera do parque EPCOT foi a que mudou o rumo do trabalho. Alguns estudantes que já apresentavam sinais de cansaço voltaram a se interessar pelo trabalho. A Figura 9.4 mostra a justificativa da aluna K2 que votou na foto da Espaçonave Terra do parque EPCOT.

Além de achar a Esfera muito bonita, eu achei interessante calcular suas medidas, até porque entre todas as formas geométricas, a esfera é a mais divertida, no meu ver.

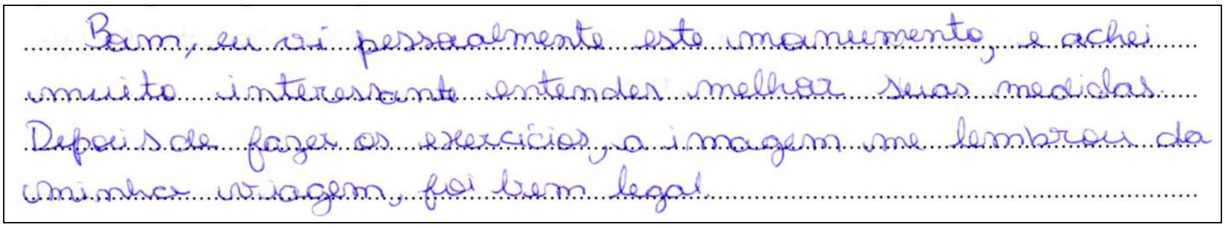
Figura 9.4: Justificativa de voto da aluna K2 que optou pela esfera do parque EPCOT na Disney World.

As Figura 9.5 e  Figura 9.6 apresentam as justificativas de votos de duas alunas (J1 e M1)  que já visitaram Paris e, por isso, votaram na Pirâmide do Louvre.



Escolhi essa pois é o lugar que eu mais gosto, portanto foi interessante descobrir as coisas da atividade proposta

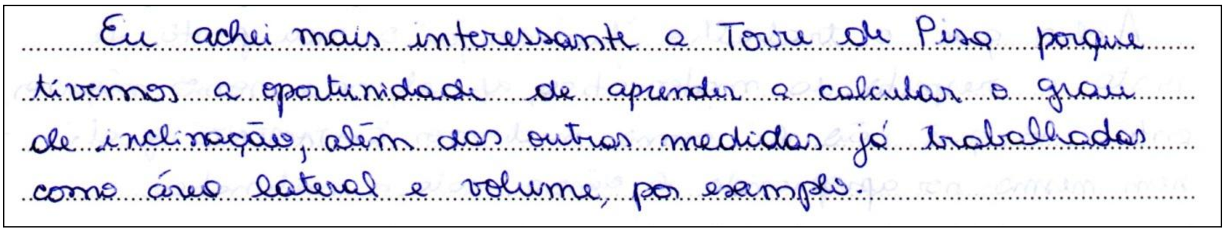
Figura 9.5: Justificativa de voto na Pirâmide do Louvre pela aluna J1.



Bem, eu vi pessoalmente este monumento, e achei muito interessante entender melhor suas medidas. Depois de fazer os exercícios, a imagem me lembrou da minha viagem, foi bem legal.

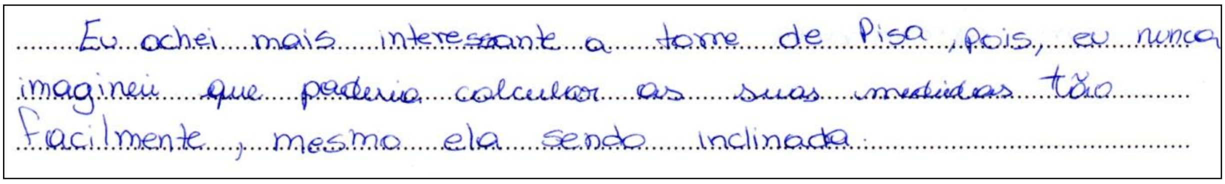
Figura 9.6: Justificativa da estudante M1 para a resposta da questão 1.

Nas Figura 9.7 e Figura 9.8 mostro as justificativas de duas alunas (F1 e M2) que optaram pela Torre de Pisa. Os comentários dessas alunas e de outros que optaram pela foto da Torre de Pisa sugerem que o cálculo da inclinação da torre foi um diferencial que permitiu aos estudantes novas descobertas. A expressiva votação da torre e as justificativas dos votos fortalecem tal dedução.



Eu achei mais interessante a Torre de Pisa porque tivemos a oportunidade de aprender a calcular o grau de inclinação, além das outras medidas já trabalhadas como área lateral e volume, por exemplo.

Figura 9.7: Justificativa de voto na foto da Torre de Pisa da aluna F1.



Eu achei mais interessante a torre de Pisa, pois, eu nunca imaginei que poderia calcular as suas medidas tão facilmente, mesmo ela sendo inclinada.

Figura 9.8: Justificativa da aluna M2 que votou na foto da Torre de Pisa.

Na questão 3, abri espaço para que os educandos opinassem sobre os resultados da abordagem adotada no presente trabalho. Os estudantes foram unânimes ao afirmar que a Modelagem Matemática com fotografias facilitou o entendimento da Geometria (Tabela 8). As respostas dos estudantes reforçam algumas afirmações defendidas nos capítulos anteriores.

A aluna P1 deixa claro, em sua resposta (Figura 9.9), que as atividades foram propostas de modo a permitir e incentivar os educandos a adquirirem a capacidade de aprender por conta própria, contribuindo assim para a autonomia intelectual dos mesmos.

Dessa forma a Matemática colabora para a formação da cidadania, preparando os educandos para que no futuro possam atualizar-se constantemente por conta própria (Seção 1.5). É a Matemática formando cidadãos livres.

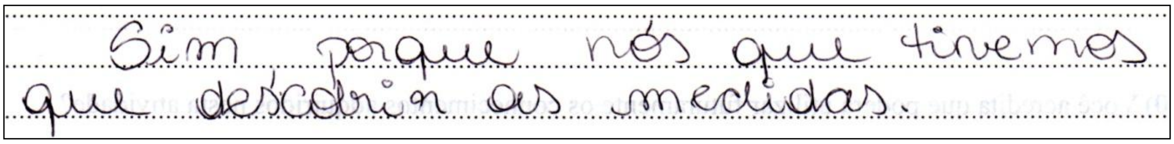

Sim porque nós que tivemos que descobrin as medidas.

Figura 9.9: Resposta da aluna P1 para a questão 3.

Um dos objetivos do presente trabalho (Seção 1.5) foi investigar a viabilidade do uso de fotografias para facilitar o entendimento de conteúdos de Matemática tornando as aulas mais interessantes para os alunos. Ao longo dessa dissertação destaquei a ocorrência de mudanças no papel do professor no processo ensino-aprendizagem. Em minha opinião, ao professor cabe a tarefa de definir as estratégias para atingir os objetivos e intervir sempre que necessário para manter o foco[16]. Trata-se de um orientador. Além disso, defendi que é função do professor tornar a caminhada dos educandos, no processo de construção do conhecimento, menos árdua (Seção 7.2). Outra importante meta foi dar um caráter experimental para a Matemática. Nesse sentido, a Modelagem Matemática tem muito a contribuir. As Figuras de 9.10 a 9.20 apresentam opiniões de alguns educandos sobre a utilização de fotografias na aprendizagem da Geometria. Essas opiniões são indicadores de que nossos objetivos foram alcançados.

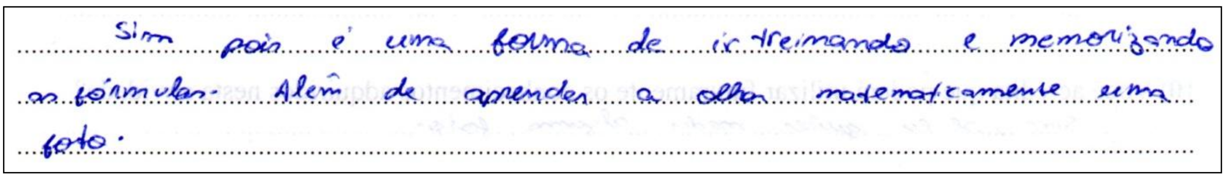

Sim pois é uma forma de ir treinando e memorizando as fórmulas. Além de aprender a olhar matematicamente uma foto.

Figura 9.10: Resposta da estudante A2 para a questão 3.

[16] Nesse sentido, guardadas as devidas proporções, os jogadores de futebol não estão errados ao chamarem seus técnicos de professores.

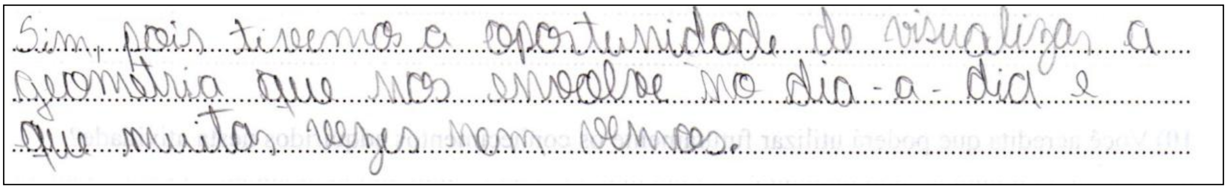

Sim, pois tivemos a oportunidade de visualizar a geometria que nos envolve no dia-a-dia e que muitas vezes nem vemos.

Figura 9.11: A importância da Modelagem Matemática com fotografias, na opinião da aluna F2.


Sim, muito! Trabalhando dessa forma, com lugares que todos conhecem, fica muito mais fácil visualizar a aplicação das fórmulas vistas em aula.

Figura 9.12: Opinião da estudante N2 sobre as atividades desenvolvidas.

O comentário da aluna D2 (Figura 9.13), mostra a importância de atividades baseadas na realidade dos alunos para a compreensão dos conteúdos. Esse é um lema da Modelagem Matemática que pretende ser um ambiente de aprendizagem que incentiva e, ao mesmo tempo, desafia os educandos a investigar situações de seu cotidiano aplicando métodos da Matemática.

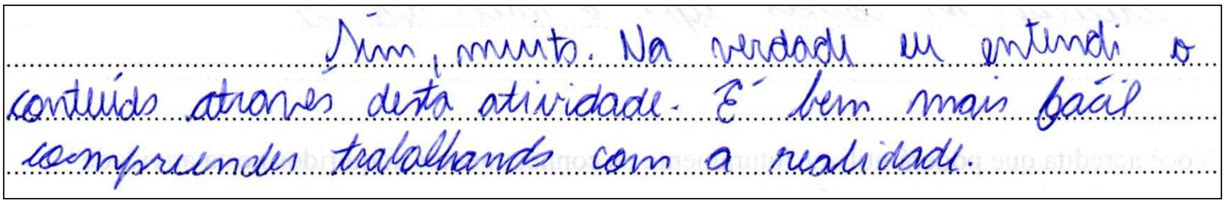

Sim, muito. Na verdade eu entendi o conteúdo através desta atividade. É bem mais fácil compreender trabalhando com a realidade.

Figura 9.13: Resposta da aluna D2 para a questão 3.


Sim, pois é um jeito bem mais interessante, divertido e menos estressante de entender o conteudo, as fórmulas e etc.

Figura 9.14: Opinião da aluna K2, expressa ao responder a questão 3.

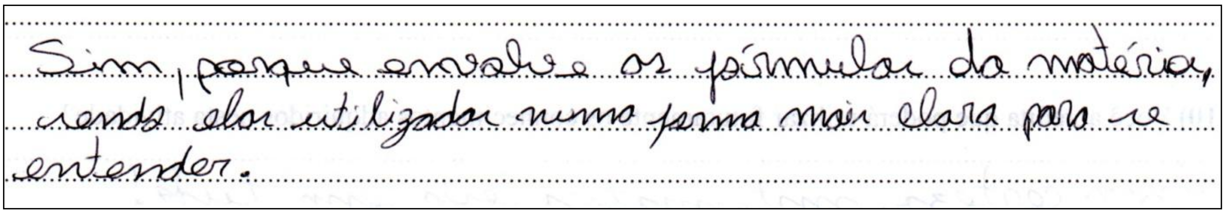

Sim, porque envolve as fórmulas da matéria, sendo elas utilizadas numa forma mais clara para se entender.

Figura 9.15: Resposta do estudante B1 para a questão 3.

A aluna F1 (Figura 9.16) nos remete a um problema sério do ensino tradicional, baseado na repetição. Os processos de memorização muitas vezes não levam a um entendimento completo da situação estudada, visto que os estudantes não são incentivados a pensar sobre seus resultados. Por outro lado, a Modelagem Matemática geralmente parte de uma situação da realidade do estudante que precisa ser descrita por meio da Matemática.

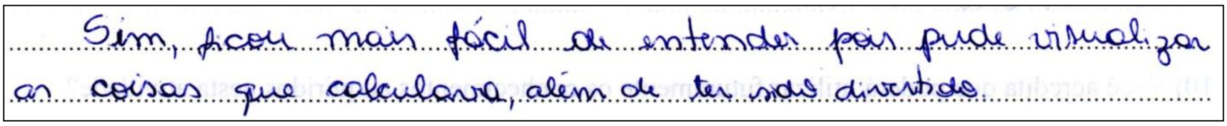

Sim, ficou mais fácil de entender pois pude visualizar as coisas que calculava, além de ter sido divertido.

Figura 9.16: Resposta da aluna F1 para a questão 3.


Sim, porque além de exercitar com a quantidade de exercícios, vi que se encaixa na vida, no dia a dia, ajudando no entendimento.

Figura 9.17: Resposta da estudante J1 para a questão 3.

A aluna M2 (Figura 9.18) além de destacar o enfoque aplicado das atividades propostas, confirma que elas foram pensadas de modo a permitir que os educandos participassem da construção de seus saberes, desenvolvendo o raciocínio lógico ao invés de aplicar mecanicamente fórmulas decoradas.


Sim, pois Finalment consegui ver o uso disto no dia-a-dia, e usei menos fórmula e mais raciocínio lógico.

Figura 9.18: Resposta da aluna M2 para a questão 3.

Frequentemente, o convite para estudar Geometria é feito por meio de figuras desinteressantes que, por isso, não são aceitas como cenários para a investigação por muitos alunos. As fotografias das atividades propostas na presente dissertação foram aceitas pelos educandos como ambientes de aprendizagem nos moldes de Skovsmose 2000, como indica a estudante M1 (Figura 9.19).

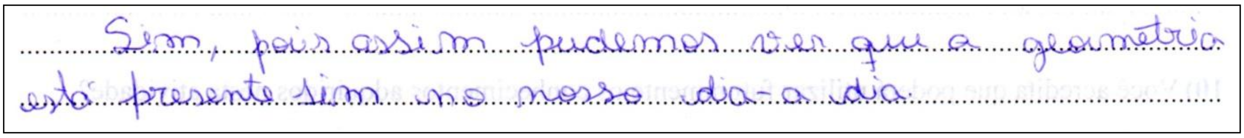

Sim, pois assim pudemos ver que a geometria esta presente sim no nosso dia-a-dia.

Figura 9.19: Opinião da aluna M1 ao responder a questão 3.

A estudante K1 indica que as fotos facilitaram o entendimento do conteúdo (Figura 9.20). Isso mostra que as fotografias têm um bom potencial como geradoras de ambientes de aprendizagem.


A atividade facilitou no entendimento do conteúdo porque com a visualização das fotos a compreensão foi maior

Figura 9.20: Resposta da aluna K1 para a questão 3.

A opinião do estudante E1 (Figura 9.21) mostra que o objetivo de tornar as aulas de Matemática dinâmicas e contextualizadas (Seção 1.5) foi atingido.

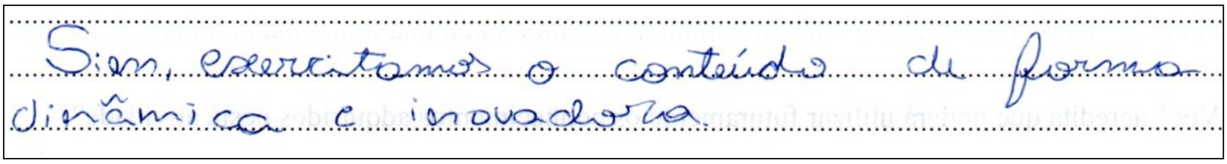

Sim, exercitamos o conteúdo de forma dinâmica e inovadora.

Figura 9.21: Resposta do estudante E1 para a questão 3.

Os comentários dos estudantes indicam claramente que a abordagem adotada no presente trabalho facilitou a compreensão dos conteúdos. Eles destacam que as atividades desenvolvidas mostraram que a Matemática está presente no dia a dia deles. Os comentários também sugerem que a Modelagem Matemática com fotografias foi uma atividade divertida. Essas foram metas destacadas ao longo desta dissertação e, de acordo com os estudantes, alcançadas.

O comentário do aluno I1 (Figura 9.22) mostra que a opção por trabalhar com pequenos grupos foi uma boa estratégia.

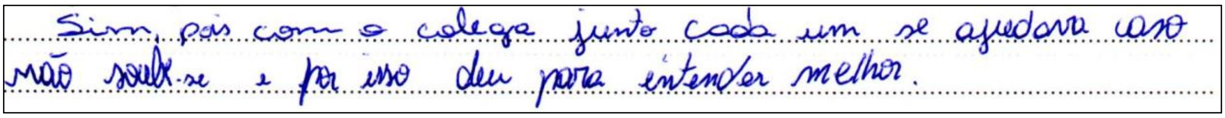

Sim, pois com o colega junto cada um se ajudava caso não soubesse e por isso deu para entender melhor.

Figura 9.22: Opinião do aluno I1 sobre as atividades de Modelagem.

Na opinião do estudante I2 (Figura 9.23) houve evolução na percepção dos educandos sobre a Matemática presente nas fotografias no decorrer do projeto.

Ajudou bastante, pois nós trabalhamos com figuras e medidas reais, o que melhora a nossa percepção e entendimento das figuras

Figura 9.23: Resposta do estudante I2 para a questão 3.

A Tabela 8 mostra que para a maioria dos estudantes essa foi a primeira vez que abordaram a questão do erro (questão 4).

Na questão 5 os estudantes elegeram as principais fontes de erro. Na opinião da maioria dos estudantes as principais fontes de erro foram o processo de medição (erro humano e imprecisão da régua) e arredondamentos de valores (Figura 9.24, Figura 9.25 e Figura 9.26).

A medida encontrada por cada um com a régua. Além disso, o arredondamento de números com muitas casas depois da vírgula

Figura 9.24: Resposta da aluna A1 para a questão 5.

É que as medidas obtidas por cada pessoa é diferente, portanto ocorrem os erros, sejam grandes ou pequenos.

Figura 9.25: Resposta da aluna F1 para a questão 5.

A régua, pois cada uma tem sua própria medida (muda em milímetros), mas em um trabalho como este faz toda diferença.

Figura 9.26: Resposta da aluna M2 para a questão 5.

Na questão 6 os educandos sugeriram estratégias para reduzir os erros. Esses comentários mostram que eles identificaram as causas das discrepâncias entre os valores obtidos e os valores de referência fornecidos ou calculados pela professora.

Ampliar a foto para ter uma melhor precisão.

Figura 9.27: Resposta do estudante I1 para a questão 6.

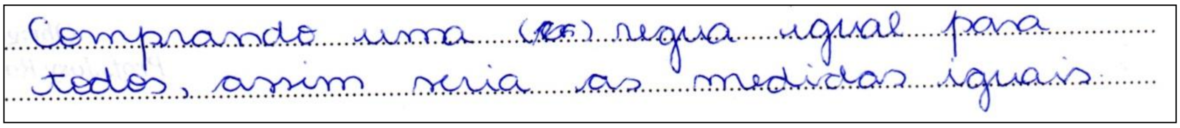

Comprando uma (só) regua igual para todos, assim seria as medidas iguais.

Figura 9.28: Resposta da estudante N1 para a questão 6.

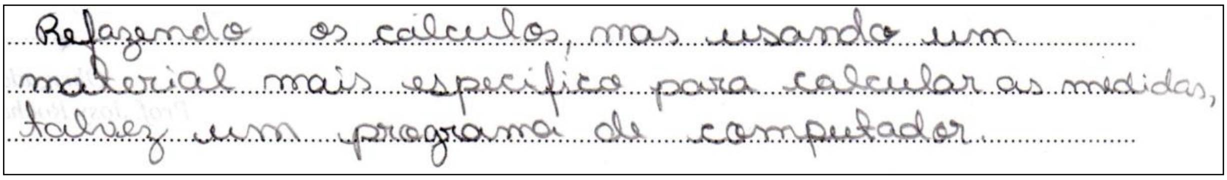

Refazendo os calculos, mas usando um material mais especifico para calcular as medidas, talvez um programa de computador.

Figura 9.29: Resposta da aluna P2 para a questão 6.

Um importante objetivo do presente trabalho (Seção 1.5) foi desmitificar a Matemática como ciência exata, cujos resultados são inquestionáveis. A seguir mostro alguns comentários (Figura 9.30 a Figura 9.32) de educandos que sugerem que tal objetivo foi alcançado.

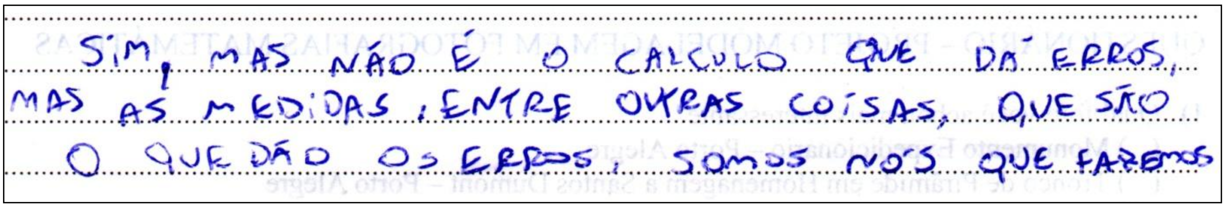

SIM, MAS NÃO É O CALCULO QUE DÁ ERROS, MAS AS MEDIDAS, ENTRE OUTRAS COISAS, QUE SÃO O QUE DÃO OS ERROS, SOMOS NOS QUE FAZEMOS

Figura 9.30: Resposta do aluno D1 para a questão 7.

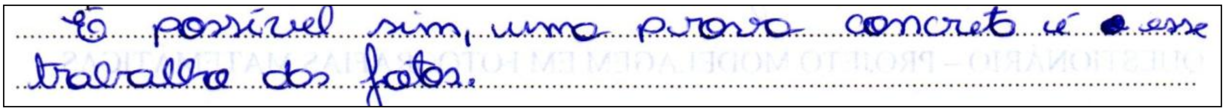

É possivel sim, uma prova concreta é esse trabalho dos fotos.

Figura 9.31: Resposta do estudante I2 para a questão 7.


Sim, creio que é possivel, pois como vimos nesse trabalho, um minimo numero a mais ou a menos já muda o resultado, gerando possiveis erros.

Figura 9.32: Resposta da aluna B2 para a questão 7.

Na questão 8 investigo se a abordagem dos erros alterou a forma de ver a Matemática. A Tabela 8 mostra que os estudantes estavam divididos em relação a esta questão. A maioria dos educandos que não mudaram a opinião justificaram a resposta afirmando que o erro não é da Matemática, mas do processo de obtenção dos resultados. Por outro lado, os demais justificaram o "sim" afirmando que nunca trabalharam com erros na Matemática. Ambas as justificativas sugerem que os estudantes entenderam o significado do termo erro. Nas Figura 9.33 e Figura 9.34, mostro duas respostas para a questão 8.


Sim, porque até então eu pensava que na matemática não havia erros.

Figura 9.33: Resposta da estudante K1 para a questão 8.

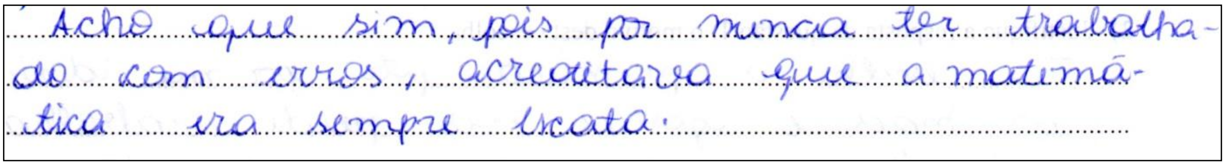

Acho que sim, pois por nunca ter trabalhado com erros, acreditava que a matemática era sempre exata.

Figura 9.34: Resposta da estudante B2 para a questão 8.

A questão 9 solicita que os estudantes respondam se o trabalho de Modelagem com as fotos alterou a visão deles sobre a Matemática. As manifestações dos educandos (Figura 9.35 a Figura 9.38) mostram que a presente abordagem melhorou a visão deles a respeito da Matemática. A estudante A1 (Figura 9.35) manifesta seu contentamento com a possibilidade de fazer conexões entre a Arte e a Matemática (Seção 1.5).

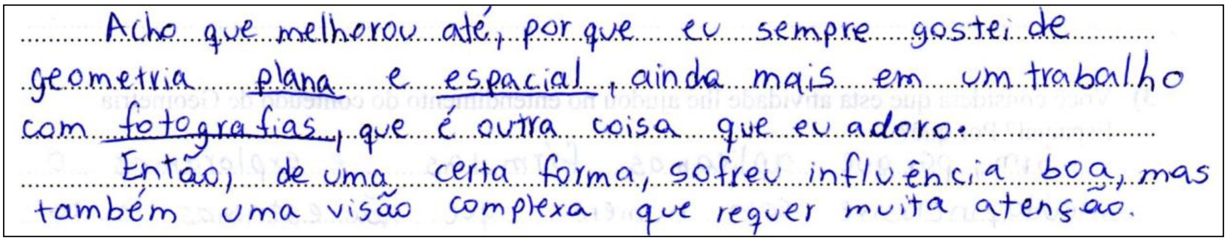

Acho que melhorou até, porque eu sempre gostei de geometria plana e espacial, ainda mais em um trabalho com fotografias, que é outra coisa que eu adoro.
Então, de uma certa forma, sofreu influência boa, mas também uma visão complexa que requer muita atenção.

Figura 9.35: Resposta da aluna A1 para a questão 9.

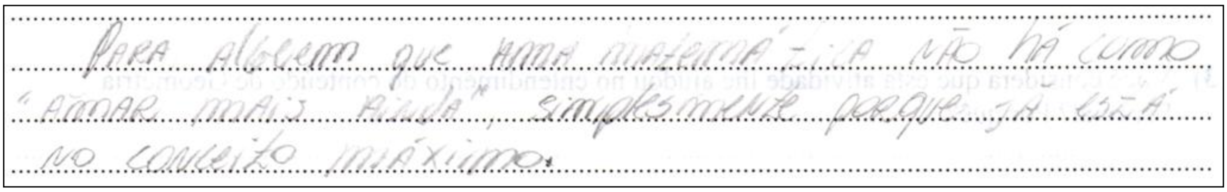

Para alguém que ama matemática não há como "amar mais ainda", simplesmente porque já está no conceito máximo.

Figura 9.36: Resposta do Aluno H2 para a questão 9.

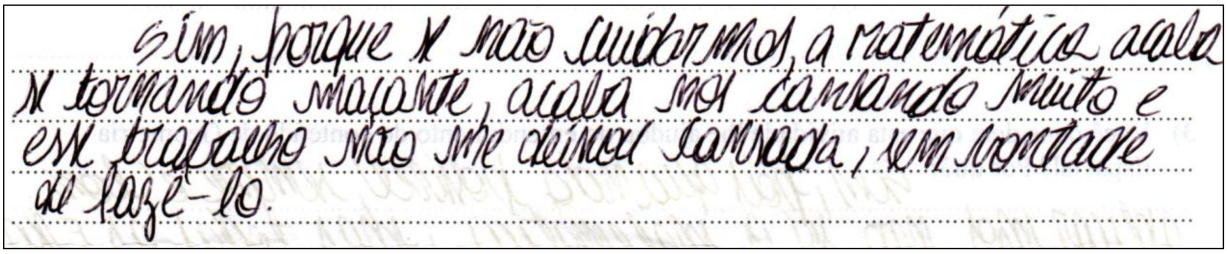

sim, porque se não cuidarmos, a matemática acaba se tornando maçante, acaba nos cansando muito e em trabalho não me deixou cansada, sem vontade de fazê-lo.

Figura 9.37: Comentário da estudante O1 como resposta da questão 9.

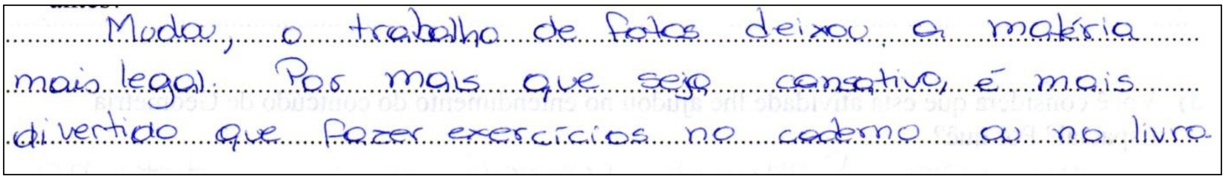

Muda, o trabalho de fotos deixou a matéria mais legal. Por mais que seja cansativo, é mais divertido que fazer exercícios no caderno ou no livro

Figura 9.38: Resposta da estudante M2 para a questão 9.

Na questão 10 os estudantes opinaram sobre a expectativa de aplicações futuras dos conhecimentos adquiridos ou aprimorados no presente trabalho. A Tabela 8 mostra que a maioria acredita que esses conhecimentos lhes serão úteis no futuro. Nas Figura 9.39 e Figura 9.40 mostro uma amostra representativa das respostas dos alunos para a questão 10.

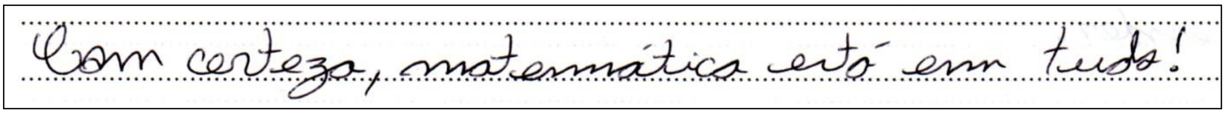

Com certeza, matemática está em tudo!

Figura 9.39: Resposta do estudante B1 para a questão 10.


Acho que sim, pois vou olhar os monumentos tentando encontrar formas geométricas neles.

Figura 9.40: Resposta da estudante O1 para a questão 10.

Na questão 11 abri espaço para que os educandos expressassem o seu grau de satisfação em relação ao trabalho desenvolvido. A Tabela 8 mostra que todos os estudantes gostaram do projeto de Modelagem Matemática com fotografias. A seguir mostro uma amostra dos comentários (Figura 9.41 a Figura 9.45) referentes a questão 11.

Pois acho uma atividade divertida, onde queremos saber se a resposta do outro é igual a sua, e assim ficarmos envolvidos com essas diferenças.

Figura 9.41: Comentários da estudante G2, respondendo a questão 11.

Gostei porque foi uma atividade diferenciada dos propostos feitos comumente nas aulas.

Figura 9.42: Resposta da aluna Joana para a questão 11.

Foi uma atividade diferente, que aprendemos sem fugir do conteúdo e de uma maneira mais fácil.

Figura 9.43: Comentários da aluna A2 em relação as atividades desenvolvidas.

É uma atividade diferente na qual nós trabalhamos vários fórmulas e raciocínios e mostra a parte prática da matemática.

Figura 9.44: Resposta do aluno E2 para a questão 11.

A atividade foi completamente diferente do usual, e com certeza foi muito mais divertida e sem contar que ajuda no entendimento da matéria usando a lógica.

Figura 9.45: Resposta da estudante M2 para a questão 11.

No presente capítulo procurei mostrar comentários de estudantes que sugerem que os objetivos foram alcançados. Por meio desses comentários os estudantes demonstraram o contentamento com as atividades propostas. Alguns deles classificaram a abordagem adotada como inovadora (Figura 9.21). Muitos estudantes classificaram as atividades como divertidas, no entanto, eles deixam claro que foram aulas de Matemática e não apenas recreação.

## 9.3. A EXPOSIÇÃO E REPERCUSSÃO DO TRABALHO

No fechamento das atividades escolhi um trabalho de cada foto para montar um mural na entrada principal da escola. As duplas escolhidas reorganizaram seus trabalhos para serem expostos (Figura 9.46 e Anexo G).


Figura 9.46: Fotos do mural montado na entrada principal da escola.

A montagem do mural na entrada principal foi uma boa estratégia de divulgação, visto que além dos estudantes da escola, que passam por ali, muitos pais esperam por seus filhos neste local. Nesse sentido, o mural transformou-se em propaganda, não apenas do trabalho dos estudantes da turma de terceira série do Ensino Médio, mas da própria escola.

Para mim, foi especialmente prazeroso ver pais e alunos pararem para lerem o mural. É possível que os editores de livros e revistas de divulgação científica estejam enganados quando pensam que equações e cálculos tornam seus produtos menos atrativos.

Essa foi a última atividade desenvolvida com os alunos e, tanto eu quanto eles, ficamos com a impressão de ter realizado um bom trabalho. No meu caso, ainda restava uma longa caminhada até que o produto final (a presente dissertação) fosse obtido. Os estudantes concluíram o Ensino Médio e ingressaram na universidade. Nos períodos de férias, frequentemente, recebo fotos da esfera do parque EPCOT, da pirâmide do Louvre e da Torre de Pisa, enviadas pelos alunos.

## 10. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

No presente trabalho foi desenvolvida uma sequência didática para o ensino de Matemática por meio da Modelagem Matemática com fotografias. Essas atividades permitiram a abordagem da Geometria de forma simples e ao mesmo tempo inovadora. A Modelagem permitiu que a Geometria fosse abordada de forma experimental sem sair da sala de aula e a relação com a Arte tornou a matemática mais humana. Adicionalmente, desenvolvi uma pesquisa sobre a percepção dos alunos sobre a matemática presente em fotografias e a evolução dessa percepção no decorrer dos trabalhos.

Os alunos mostraram-se bastante receptivos com o trabalho, o que facilitou o seu desenvolvimento e maximizou os resultados. O trabalho repercutiu bem na comunidade escolar, especialmente com os pais dos alunos que por diversas vezes manifestaram o seu contentamento com a abordagem diferenciada da Matemática.

A escolha das fotografias e a participação dos alunos com a descrição dos monumentos que eles já haviam visitado e relatos dessas visitas foram essenciais para manter a turma animada com o trabalho que estava sendo feito.

Em parte, o sucesso do trabalho se deve ao fato de que percebi ainda na fase inicial das atividades que as aulas precisavam de um ingrediente novo, que não fosse do conhecimento de todos. A novidade é que estava criando as condições iniciais para que o ambiente de aprendizagem e investigação fosse estabelecido. O fato de eles, os alunos, poderem trocar informações entre si, estava tornando as aulas menos formais e, ao que parece, nessas condições eles gostam de fazer cálculos.

O maior interesse por parte dos alunos se converteu em melhores resultados em termos de aprendizagem e, consequentemente, em termos de desempenho no final do trimestre. Isso provavelmente se deve ao fato de que a turma apresentou no decorrer das aulas curiosidades e questionamentos não apresentados pelos alunos desta mesma série nos anos anteriores. Nesse sentido, verifiquei que os alunos aprimoraram a percepção da matemática presente nas fotografias que analisaram no decorrer dos trabalhos. A necessidade de intervenção foi diminuindo, até desaparecer completamente nas últimas aulas.

As fotografias mostraram-se importantes ferramentas para o ensino-aprendizagem, criando os cenários necessários para que o espírito investigativo dos educandos aflorasse. Assim, a Matemática cumpre o seu papel social formando indivíduos intelectualmente autônomos, capazes de atualizar-se por conta própria. Adicionalmente, a Modelagem

Matemática com fotografias incentivou os estudantes a observarem o mundo que os cerca, identificando aplicações da Matemática.

Os registros das atividades ao longo dessa dissertação mostram o crescimento da turma em muitos aspectos como autonomia, atenção, envolvimento, responsabilidade, criatividade e conhecimento.

Um dos principais legados deste trabalho, foi levar os estudantes a perceberem o caráter experimental da Modelagem Matemática, por meio da análise de erros. Além disso, criou-se um cenário de investigação e aprendizagem que facilitou o entendimento e a apropriação de conceitos e métodos da Geometria de modo mais simples e participativo do que o praticado pelo ensino tradicional. Neste cenário, os educandos participaram ativamente do processo de construção do seu saber. Assim, o presente trabalho evidencia o novo papel do professor que deixa de ser um transmissor de conhecimentos para se tornar um incentivador e gerador dos cenários necessários para que os educandos construam os seus saberes. Nesse sentido, o professor do ensino básico está a se transformar (ou precisa) em orientador. Esse novo papel torna o professor ainda mais indispensável, visto que lhe confere a importante tarefa de pesquisar como os estudantes da sua comunidade pensam e aprendem para então gerir o ambiente de aprendizagem. O processo de ensino visto por essa ótica permite uma abordagem local (a comunidade escolar) e individualizada (cada educando), sem perder a unidade no âmbito global (estado, país, etc.).

Para dar continuidade à pesquisa, pretendo fazer novamente o trabalho com outra turma analisando também os efeitos da experiência do professor nos resultados. A Modelagem Matemática mostrou-se uma área de pesquisa interessante, podendo ser utilizada para abordar diferentes tópicos do ensino de Matemática. Nessa perspectiva, abordarei novas áreas da Matemática por meio da Modelagem. Além disso, pretendo continuar pesquisando sobre as possibilidades de tornar a Matemática mais atraente para o aluno, sem subestimar a sua capacidade de aprender ou tão pouco transformar as aulas em atividades recreativas com poucos propósitos.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ALMEIDA, L. M. W; DIAS, M.R. **Modelagem Matemática na Licenciatura em Matemática: contribuições para o debate.** In: Anais do segundo Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Santos – SP, 2003.

ANASTÁCIO, M. Q. A. **Considerações sobre a Modelagem Matemática e a Educação Matemática.** Dissertação de Mestrado. UNESP. Rio Claro, 1990.

ANTUNES, C. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências.** Rio de Janeiro: Vozes, 2000.

ARAÚJO, J. L. **A função é contínua ou não? – discussões que decorrem de uma atividade de Modelagem Matemática em um ambiente computacional.** In: Anais do IV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro (SP): Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, 2000. p. 47-52.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as Discussões dos Alunos.** Rio Claro: UNESP, 2002. Tese (Doutorado), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2002.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda, 1980.

BARBOSA, J. C. **Mathematical Modelling in preservice teacher education.** In: J. F. Mattos; W. Blum; S. Carreita; K. Houston. Modelling and Mathematics Education: applications in science and technology. Chichester: Ellis Horwood, p. 185, 2001-b.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.** 2001.253f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001-a.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?** Veriatati, n.4, p.73-80, 2004.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: Reunião anual da ANPED, 24, 2001, Caxambu. Anais. Rio de Janeiro: ANPED, 2001-c.

BARBOSA, J. C. **O que pensam os professores sobre a modelagem matemática?** *Zetetiké*, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. **Modelagem Matemática, perspectivas e discussões.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, Belo Horizonte. Anais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. 1 CDROM

BARRIER, J. M. **The animated man: a life of Walt Disney.** Los Angeles, California, University of California Press, 2007.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, pg.24, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2 ed. São Paulo: Contexto, 2004, 389p.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática - Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. In: XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1999, Santos. Biomatemática IX. Campinas: IMECC, 1999. v. 9. p. 9-22.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores.** *Biomatemática*, Campinas, n. 9, p. 9 , 1999. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/revistas.htm> Acesso em: 10 Maio. 2012.

BASSANEZI, R. C. **Modelling as a Teaching-Learning Strategy**. For the Learning of Mathematics, Vancouver, v. 14, n. 2, p. 31-35, june 1994.

BEAN, D. **Modelagem Matemática: uma mudança de base conceitual.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 5, Ouro Preto – MG. Anais. Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto e Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, p. 35 – 58, 2007.

BEHRENS, M. A., **Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente**. In: MORAN, J.M., MASETTO, MT., BEHRENS, M. A . Novas tecnologias e mediação pedagógica. Campinas: Papirus, 2000.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2003, 127p.

BINS, A. M. **A Exposição do Centenário Farroupilha.** Relatório sobre a Exposição Farroupilha apresentado pelo Comissário Geral Major Alberto Bins ao Exmo. Sr. Governador do Estado, Gal. J. A. Flores da Cunha. Porto Alegre: Globo, 1936, p.34.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. **Percepções de Professores sobre o Uso da Modelagem Matemática na Sala de Aula.** Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 26, p. 277-298, 2012.

BISOGNIN, E; BISOGNIN, V.; ISAIA, S. M. **A sala de aula e a modelagem matemática: contribuições possíveis em diferentes níveis de ensino**. Horizontes, v. 27, n. 1, p. 79, 2009.

BOERING, G. F. **Diferentes Conceitualizações de Modelagem Matemática.** Londrina: UEL, 2009. Monografia (Especialização em Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação – Uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, p. 47 – 51, 1999.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S. **Centro Virtual de Modelagem: possibilidades e obstáculos.** In.: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3, 2006, Águas de Lindóia, Anais. Águas de Lindóia: SIPEM, 2006. p. 1-15

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. **Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológicas.** Revista de Educação Matemática da SBEM-SP, São José do Rio Preto, v. 5, n. 3, p. 63-70, 1997.

BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. **A ideologia da certeza em matemática**. In: SKOVSMOSE, O. A educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. p. 127 - 148. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

BORBA, M.C. **A pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. In: Reunião anual da Anped, 2004, Caxambu - MG. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/artigos0307.php> Acesso em : 07 jan. 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Vol. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BURAK, D., **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, 1992.

BURLAND J.B.; JAMIOLKOWSKI, M.B.; VIGGIANI, C. **Leaning Tower of Pisa: Behaviour after Stabilization Operations.** International Journal of Geoengineering Case Histories, 2009. Vol.1, Issue 3, p.156-169. Disponível em: <http://casehistories.geoengineer.org> Acesso em: 15 jan. 2013.

BURLAND, J.B. et al. **The Leaning Tower of Pisa, what is going on?** ISSMFE News, 1993. Vol. 20, No. 3.

BURLAND, J.B.; JAMIOLKOWSKI, M.B.; VIGGIANI, C. **The stabilisation of the Leaning Tower of Pisa.** Soils and Foundations Vol. 43, 5, 2003. pg. 63-80.

BURLAND, J.B.; POTTS, D.M. **Development and application of a numerical model for the Leaning Tower of Pisa**. Int. Symp. on Pre-Failure deformation characteristics of geomaterials, Sapporo, Japan, 1994.Vol. 2; p. 715-738.

BURLAND, J.B.; VIGGIANI, C. **Osservazioni del comportamento della Torre di Pisa**. Rivista Italiana di Geotécnica - 1994. Vol. 28, 3, p. 179-200.

CABRERA, A.; CRISSMAN, J.; BERNAL, E.; NORA, A.; TERENZINI, P.; PASCARELLA, E. **Collaborative learning: Its impact on college students' development and diversity.** Journal of College Student Development, v. 43, n.1, p. 20–34, 2002.

CAMARGO, D. S. ; ROCHA, J. ; MATTÉ, I. . **A utilização da modelagem matemática e das novas tecnologias da informação e comunicação como ferramentas para a construção do conhecimento.** In: VII Conferência Nacional Sobre Modelagem Na Educação Matemática: práticas e ações em ambientes de formação e investigação, 2011, Belém.

CAMARGO, D. S.; ROCHA, J. **Ensinando funções de primeiro grau – experimento, software livre e mídia.** RENOTE. Porto Alegre, 2011, v. 9, n. 1 p. 1-10.

CHRISTOFOLETTI, A. **A Modelagem de sistemas ambientais.** São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

COHEN, E. G. **Designing Groupwork. Strategies for the heterogeneous classroom.** New York and London: Teachers College Press, 1994.

COOKSON. P. W. **Closing the rift between scholarship and practice: the need to revitalize educational research**, Educationl Policy nº 1, pp. 321-331, 1987.

CROCI, Giorgi. **General methodology for the structural restoration of historic buildings**: the cases of the Tower of Pisa and the Basilica of Assisi Journal of Cultural Heritage, Volume 1, Issue 1, January 2000, Pages 7–18.

CUNHA, R. B.; PRADO, G. V. T. **A produção de conhecimento e saberes do/a professor/a-pesquisador/a**. Educar, Curitiba, editora de UFPR, n. 30, p. 251-264, 2007.

CUNHA, R. B.; PRADO, G. V. T. **Percursos de autoria: exercícios de pesquisa**. Campinas: Gepec/FE/Unicamp, 2005.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, U. **Que matemática deve ser aprendida nas escolas hoje?** Teleconferência no Programa PEC – Formação Universitária, patrocinado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, 27 jul 2002-a. Disponível em: <http://vello.sites.uol.com.br/aprendida.htm> Acesso em 23 abril 2012.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatematica: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte, ed. Autentica, 2002-b.

DAVIDSON, N. **Cooperative Learning in Mathematics**. Addison-Wesley, Menlo Park, 1990.

DE JONG, O. **"How to teach scientific models and modelling: a study of prospective chemistry teachers' knowledge base".** Conferencia dictada en Springtime Seminar – Chemical Education Reseach Group. Londres, 2001.

DELIZOICOV, D. **Pesquisa em ensino de ciências como ciências humanas aplicadas**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 21, n. 2, p. 145-175, 2004.

DEMO, Pedro**. Educar pela Pesquisa.** Campinas, SP: Autores Associados, 1997.

DOIG. S. **Pinning the tale on the donkey: the placement of teacher voice in educational research.** Paper apresentado no Annaul Meeting of the Australian Association of Research in Education. New Castle, 1994.

DRIEL, J. V.; VERLOOP, N. **Teachers' knowledge of models and modelling in science.** International Jounal of Science Teaching, v. 21, p. 1141, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. **O ensino de Geometria no 1° e 2° Graus:** In Educação Matemática em revista – SBEM 4, 1995, p. 45-52.

FELDER, R. M.; BRENT, R. **"Effective strategies for cooperative learning."** J. Cooperation & Collaboration in College Teaching 10(2), 2001. pg. 69-72.

FRANCO, S.C. **Porto Alegre: guia histórico**. Porto Alegre, Editora da Universidade/UFRGS, 1998.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 27 edição. São Paulo: Paz e Terra, 2003, 148p. Coleção Leitura.

FREITAS, C. A. M. de; SANT'ANA, M. F. **Modelo Matemático do crescimento da Araucária angustifolia. Aplicação da Modelagem Matemática no Ensino do Cálculo Diferencial e Integral.** Acta Scientiae, v.8, n. 2, Canoas, 2007.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1973.

GABLER, Neal. **Walt Disney: O Triunfo da Imaginação Americana.** Osasco, São Paulo: Editora: Novo Século Editora, 2009.

GARDNER, Horward. **Inteligências múltiplas: a teoria na prática**. Trad. Maria Adriana Verissimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f.Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000.

GIERE, R. N. **Explaining science.** Chicago: The Univerty of Chicago Press, 1988.

GILBERT, J. K.; BOULTER, C. J. **Developing models in science education**. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

GILBERT, J. K.; **Models and Modelling: Routes to More Authentic Science Education.** International Journal of Science and Mathematics Education, v.2, n.2, p. 115, 2004.

GILBERT, S. **Model building and a definition of science**. Journal of Research in Science Teaching, vol.28, issue 1, 73-80.1991.

GILLIES, R. M. **The effects of cooperative learning on junior high school students during small group learning.** Learning & Instruction, v. 14, n. 2, p. 197 – 213, 2004.

GJALT, T. **Selection of Authentic Modelling Practices as Contexts for Chemistry Education.** International Journal of Science Education, v. 30, n. 14, p. 1867, november 2008.

GOBETZ, Wally. Disponível em: < http://www.flickr.com/photos/wallyg/1487228556/in/set-72157602250625298/>  Acesso em: 24 agosto  2011.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar – Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.** Revista Informática na Educação – teoria & prática, v.2, n.1. Porto Alegre: UFRGS, 1998, pg. 73 -88.

GROSSLIGHT, L.; UNGER, C.; JAY, E.; SMITH, C. **Understanding models and their use in science: conceptions of middle and high school students and experts.** Journal of Research in Science Teaching, v. 28, p. 799, 1991.

GURNEY, M. **Implementor or innovator? A teacher's challenge to the retrictive paradigm of traditional research.** In P. Lomax (Ed.), The Management of Change (pg. 13-51). Clevedon, UK: Multilingual Matters, 1989.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework**. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME International Conference, 1, 3-19, 1996.

ISLAS, S. M.; PESA, M. **Estudio comparativo sobre concepciones de modelo científico detectadas em Física.** Ciencia, Docencia y Tecnologia, XV(29), p. 117, 2004.

JAMIOLKOWSKI, M.B. **The Leaning Tower of Pisa: End of an Odyssey**. 15th Int. Conf. on SMGE, Third Millenium, Terzaghi Oration, Istanbul, Turkey, 2001.Vol 4, p. 2979-2996.

JOHNSTON, G.; BURLAND, J.B. **Some historic examples of underexcavation**. Int. Conf. on Advances in Geotechnical Engineering, The Skempton Conference, London, UK, Jardine, R.J. Potts, D. M. and Higgins, K. G. Eds, 2004. Vol.2, p. 1068-1079.

JEONG, H.; CHI, M. T. H. **Construction of shared knowledge during collaborative learning**. In: R. HALL, R.; MIYAKE, N.; ENYEDY, J. International Conference On Computer Support For Collaborative Learning, 2., Toronto, 1997. Anais. Toronto, 1997. p. 1.

JOHNSON, D.; JOHNSON, R.; HOLUBEC, E. **Cooperation in the classroom.** 7.ed. Edina, MN: Interaction Book Company, 1998.

JOHNSON, D.W.; JOHNSON, R.T., **Using Cooperative Learning in Math**, Cooperative Learning in Mathematics: a handbook for teachers. Neil Davidson Editor, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, pp 103-124, 1990.

KAISER, G. M. **Anwendungen im Mathematikunterricht**. Theoretische Konzeptionen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker. Vol.1, 1986.

KAISER, G. **Mathematical modelling in school: examples and experiences.** In: H.-W. Henn & G. Kaiser, Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Hildesheim: Fransbecker, p. 99, 2005.

KAUFMANN, H.; SCHMALSTIEG, D.; WAGNER, M**. Construct3D: A Virtual Reality Application for Mathematics and Geometry Education**. Education and Information Technologies 5:4, pp. 263-276, 2000.

KOLLAR, I.; FISCHER, F.; HESSE, F. **Collaboration Scripts - A Conceptual Analysis**, Educational Psychology Review, 18, pp 159-185, 2006.

LEIVAS, J. C. P. **Educação Matemática e Formação de Professores no Cone Sul.** Acta Scientiae, Canoas, 2002, v.4, n.1, p.27-35

LORENZATO, S. **Por que nao ensinar Geometria?** In: Revista A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, 1995, v.4.

LÜDKE, M. **O professor, seu saber e sua pesquisa.** Educação & Sociedade, ano 22, n. 74, p. 251-283, Campinas, abr. 2001.

LUZ, L. F.; OLIVEIRA, A.R. **Espaços de lazer e cidadania: o Parque Farroupilha**, Porto Alegre. Arquitextos, São Paulo, 05.053, Vitruvius, out 2004. Disponível em: <http://www.vitruvius.com.br/revistas/read/arquitextos/05.053/542>. Acesso em: dez. 2011.

MACEDO, F. R. **História de um parque**. Correio do Povo, 20/04/1968. Acervo do Arquivo Histórico Moysés Vellinho.

MACIEL, J. M. M. **Relatório do projeto de melhoramentos e orçamentos.** Porto Alegre, Oficinas Graphicas da Federação, Intendencia Municipal de Porto Alegre, 1914.

MATTÉ, I ; ROCHA, J.; SANT'ANA, M. F. **Modelagem Matemática Aplicada a Utilização de Termistores e Termoresistências**. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2011, Belém. Anais da VII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. Belém: UFPA, 2011. v. 1. p. 1-16.

McCLELLAN, A. **Inventing the Louvre.** University of California Press. London, 1999.

MELO, U. S.; OLIVEIRA, M. L. C. **Discussões Éticas em Modelagem Matemática.** ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.207-218, 2009.

MORAN, J. E. **A Educação que Desejamos**. São Paulo, Editora Papirus, 2008.

MOREIRA, M. A; MASINI, E. F. S. **A teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementacao em sala de aula**. Brasília: UNB, 2006.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas: Papirus, 1997.

MURARI, C. **Espelhos, Caleidoscópios, Simetrias, Jogos e Softwares Educacionais no Ensino e Aprendizagem de Geometria.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.) Educação Matemática: Pesquisas em Movimento. São Paulo: Cortez, p.198 , 2004.

NADER, G. **A Magia do Império Disney.** São Paulo: SENAC São Paulo, 2007.

NASSER, L.; SANT’ANNA, N.F.P. **Geometria segundo a Teoria de van Hiele.** Rio de Janeiro, Editora UFRJ. 1997.

NOFFKE, S. **Action Research: towards the next generation**. Educational Action Research, 2(1), 9-21, 1994.

**O mundo na bagagem**. Disponível em: <http://omundonabagagem.com/2012/03/27/musee-du-louvre/> Acesso em : 10 janeiro 2013.

ORTIGÃO, M. I. R. **Currículo de Matemática e Desigualdades Educacionais**. Rio de Janeiro: PUCRJ, 2005. Tese (Doutorado em Educação), Departamento de Educação. Pontifícia Universidade Católicado Rio de Janeiro, 2005.

PAIS, L. C.. **Estratégias de ensino de Geometria em livros didáticos de Matemática emnível de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental**. 29ª Reunião Anual da ANPED, 2006. Disponívelem <http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/29portal.htm>. Acesso em: 2 maio 2012.

PASSOS, C.L. **Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: a Geometria na Sala de Aula.** Campinas: UNICAMP, 2000. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica.** Campinas: UNICAMP, 1989. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1989.

PEREIRA, E. M. **Professor como pesquisador: o enfoque da pesquisa-ação na prática docente**. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Orgs.). Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, p. 153-182, 1998.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o seu abandono**.São Paulo: PUC, 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, 2001.

PERRENOUD, P. **Ofício de aluno e sentido do trabalho escolar**. Porto: Editora Porto, 1995.

PIVA, C.; DORNELES, L. D.; SPILIMBERGO, P. **Uma experiência no Ensino de Cálculo no Curso de Agronomia.** In: IV CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Anais. Feira de Santana:UEFS, 2005, 1 CD-ROM.

POLYA, G. **O ensino por meio de problemas.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n 7, p 11, 1985.

PONTE, J. P.. **A investigação sobre o professor de Matemática: problemas e perspectivas do professor**. Educação Matemática em Revista, ano 8, nº 11, p. 10 – 13, 2001.

PORTO ALEGRE, A. **História popular de Porto Alegre**. Porto Alegre, UE/Porto Alegre, 1994. p. 53.

REZENDE, F.; OSTERMANN, F. **A prática do professor e a pesquisa em ensino de física: novos elementos para repensar essa relação**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física. Florianópolis, v. 22, n. 3, 2005.

ROCHA, J. ; SANT'ANA, M. F. **A Modelagem Matemática com Fotografias**. In: Simpósio de Ensino de Física e de Matemática, 2012, Santa Maria, RS. Simpósio de Ensino de Física e de Matemática: relação entre saberes e fazeres. Santa Maria, RS: UNIFRA, 2012. v. 1. p. 1-9.

SANT'ANA, M. F. **As Práticas de Modelagem Matemática em Sala de Aula: Reflexões a partir de quatro situações.** In: VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 6, 2009, Londrina. Anais. Londrina: CNMEM, 2009. CDROM.

SANT’ANA, M. F. **Trabalhando o cálculo a partir da Modelagem de um Experimento.** Acta Scientiae, Canoas: v.6, n.2, p. 73-82, 2004.

SANT'ANA, A. A.; SANT'ANA, M. F. **Modelagem Matemática: Uma Experiência Inicial.** In: V Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2007, Ouro Preto / MG. Editora UFOP, 2007. v. 1. p. 1-13.

SARTI, G.; ROSSI, V.; AMOROSI, A. **Influence of Holocene stratigraphic architecture on ground surface settlements:** A case study from the City of Pisa (Tuscany, Italy) Sedimentary Geology, Volume 281, 15 December 2012, Pages 75–87.

SCHWARZ, C. V.; WHITE, B. Y. **Metamodeling knowledge: Developing students understanding of scientific modeling.** Cognition and Instruction, v 23, p. 165, 2005.

SENGE, P. M. **A quinta disciplina: arte, teoria e prática da organização de aprendizagem**. São Paulo: Circulo Do Livro, 1990.

SILVEIRA, J. C.; RIBAS, J. L.D. **Discussões sobre Modelagem Matemática e o ensino-aprendizagem**. 2004. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/> Acesso em 25 maio 2006.

SISOVIC, D.; BOJOVIC, S. **Approaching the concepts of acids and bases by cooperative learning.** Chemistry Education: Research and Practice in Europe 1(2):263-275, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. Bolema. Rio Claro, n.14, p.66 -91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica – A Questão da Democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. **Reflective knowledge: its relation to the mathematical modelling process.** Int. J. Math. Educ. Sci. Techol., London, v. 21, n. 5, p 765, 1990.

SLAVIN, R. E. **Cooperative Learning: Where behavioural and humanistic approaches to classroom motivation meet**. Elementary School Journal, 88, 9-37, 1987.

SLAVIN, R.E. **Research for the future – Research on Cooperative Learning and Achievement: What We Know, What We Need to Know.** Contemporaty Educational Psychology, v.21, n. 4, p. 43-69, 1996.

TAGLIABUE, J. **With Pisa’s Tower Straighter, Others Vie for Title.** The New York Times, Nova York, 6 fev. 2012. Disponível em: <http://www.nytimes.com/2012/02/07/world/europe/with-leaning-tower-of-pisa-straighter-others-vie-for-title.html?pagewanted=all&_r=0> Acesso em: 16 jan. 2013.

TAMEZ, E.; OVANDO, E.; SANTOYO, E. **Underexcavation of Mexico City’s Metropolitan Cathedral and Sagrario Church**, 14th Int., 1997. Conf. on SMFE, Hamburg, Germany Vol. 4, p. 2105-2126.

TAPIA, J. A; FITA, E. C. **A motivação em sala de aula: o que é, como se faz.** São Paulo, Brasil: Edições Loyola, 1999.

TARDIF, M.. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis: Vozes, 2002.

TERRACINA, F. **Foundations of the Leaning Tower of Pisa**. Géotechnique Vol. 12, 4, 1962. pg. 336-339.

THOMAS, B. **Walt Disney: O Mago da Tela.** Melhoramentos, São Paulo-SP, 1969.

TOMASI, J. **Models and modelling in theoretical chemistry**. Journal of Molecular Structure, 1988, 179, pg. 273-292.

TURNER, J. C. et al. **Creating Contexts for Involvement in Mathematics**. Journal of Educational Psychology, 1998, vol.90, n.4, pg 730-745.

**UNIVERSIDADE DO PORTO**. Disponível em: <http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/seminario/trabalhos/RRF_ALVARO_AZEVEDO/Trabalho/Exem%20de%20Pisa/torre_de_pisa.htm> Acesso: 17 jan. 2013.

VAN-HIELE P. M., **La pensée de l'enfant et la géométrie.** In Bulletin de l'APMEP. N°198, Paris, 1959.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

WELLS, G. **Indagación dialógica: hacia una teoria y una práctica socioculturales de la educación**. Barcelona: Paidós, 2001.

ZEICHNER, K. M. **Teacher research as professional devèlopment**. Washington, D.C.: U.S. Department of Education, 2000.

ZEICHNER, K. **Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico**. In: GERALDI, FIORENTINI & PEREIRA. Cartografias do trabalho docente. Campinas: Mercado das Letras/ALB, p. 207-236, 1998.

ZEICHNER, K. **Reflections of a teacher educator working for social change**. In: RUSSELL, T., KORTHAGEN, F. (orgs.). Teachers who teach teachers: reflections on teacher education. Londres: Falmer Press, 1995.

## APÊNDICE A – SEQUENCIA DIDÁTICA DAS ATIVIDADES

### Sequencia Didática – Atividade 1 - Capítulo 4

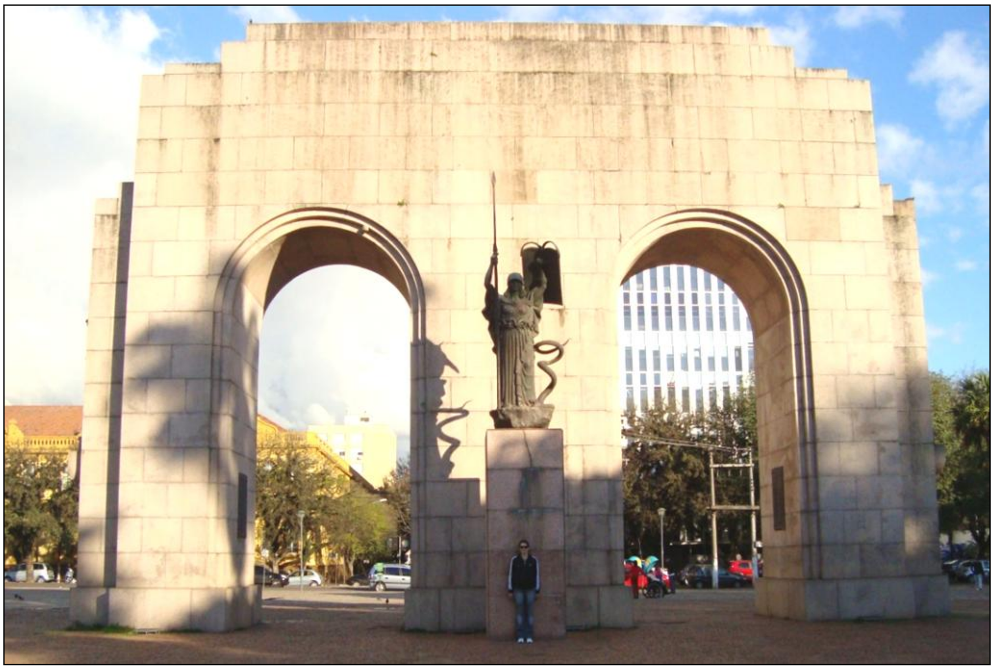


Figura 4.3: Fotografia da professora junto à base que sustenta a Estátua da Vitória no Parque Farroupilha.

**1)** Qual é a altura do paralelepípedo que sustenta a Estátua da Vitória?

**2)** Qual é a largura do paralelepípedo que sustenta a Estátua da Vitória?

**3)** a) Qual é a área lateral do paralelepípedo (em $m^2$) ?

b) Qual é a área total do paralelepípedo (em $m^2$) ?

**4)** Qual é o volume do paralelepípedo (em $m^3$)?

**5)** Ao cometermos um erro de 2cm ao medirmos a altura real da professora., estaremos alterando os resultados dos cálculos:

a) da altura do paralelepípedo em quanto (em m)?

b) Qual seria o erro (em m)?

c) da largura do paralelepípedo em quanto (em m)?

d) Qual seria o erro (em m)?

**6)** a) Qual seria o efeito de um erro de 2cm na medida da altura da professora no resultado do cálculo da área total?

b) Qual seria o efeito de um erro de 2cm na medida da altura da professora no resultado do cálculo do volume?

**7)** a) Se errarmos em 1mm (0,1cm) a altura da professora na foto estaremos alterando o cálculo da altura em quanto (em m)?

b) Quais seriam os erros (em m)?

c) Se errarmos em 1mm (0,1cm) a altura da professora na foto estaremos alterando o cálculo da largura em quanto (em m)?

d) Quais seriam os erros (em m)?

**8)** a) Considerando os cálculos da questão anterior (q.7)qual seria a área total (em $m^2$)?

b) Qual seria o erro (em $m^2$)?

c) Qual seria o volume (em $m^3$)?

d) Qual seria o erro (em $m^3$)?

**Sequencia Didática – Atividade 2 - Capítulo 5**

Figura 5.1: Fotografia do monumento em homenagem a Santos Dumont. O monumento localiza-se no Parque Farroupilha, na cidade de Porto Alegre, no Rio Grande do Sul.

**1)** Sabendo que a plataforma que sustenta o tronco de pirâmide tem altura de 10 cm, encontre a largura dessa plataforma (em cm).

**2)** Qual é o volume dessa plataforma com as medidas encontradas (em $m^3$)?

**3)** Qual é a medida da aresta da base maior do tronco de pirâmide (em cm)?

**4)** Qual é a medida da aresta da base menor do tronco de pirâmide (em cm)?

**5)** Qual a medida da altura do tronco de pirâmide (em cm)?

**6)** Qual seria o apótema do tronco de pirâmide (em cm)?

**7)** Qual é a aresta lateral do tronco de pirâmide (em cm)?

**8)** Qual é o volume do tronco de pirâmide (em $m^3$ )?

**9)** Qual a área lateral do tronco de pirâmide (em $m^2$ )?

**10)** Qual é a área total do tronco de pirâmide (em $m^2$ )?

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, refazendo os cálculos com as medidas do tronco de pirâmide fornecidas pela professora. Então temos:

altura da plataforma = 10 cm

largura da plataforma = 200 cm

h = 131,74 cm (altura do tronco)

ap=136 cm (apótema do tronco)

aresta lateral = 140 cm

aB= 120 cm (aresta da base maior)

ab = 52 cm (aresta da base menor)

**11)** a) Qual é o volume do tronco de pirâmide a partir das medidas feitas pela professora (em $m^3$)?

b) Qual foi o erro em relação ao volume calculado e o volume obtido a partir das medidas feitas pela professora (em $m^3$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**12)** a) Qual é o volume da plataforma que sustenta o tronco de pirâmide (em $m^3$)?

b) Qual foi o erro (em $m^3$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**13)** a) Qual é a área lateral do tronco de pirâmide calculado a partir das medidas feitas pela professora (em $m^2$)?

b) Qual foi o erro em relação a área calculada e a área obtida a partir das medidas feitas pela professora (em %)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**14)** a) Qual é a área total do tronco de pirâmide calculado a partir das medidas feitas pela professora (em $m^2$)?

b) Qual foi o erro em relação a área calculada e a área obtida a partir das medidas feitas pela professora (em %)?

**Sequencia Didática – Atividade 3 - Capítulo 6**

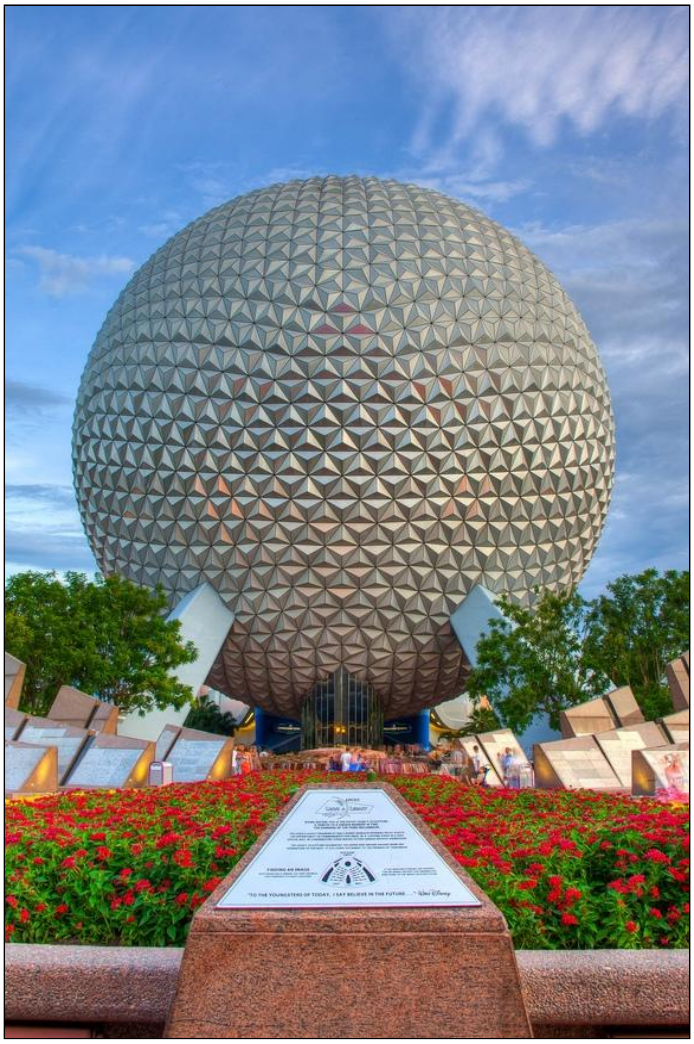


Figura 6.1: Foto da esfera Espaçonave Terra do parque EPCOT na Disney World.

1. Sabendo que o suporte central que sustenta a esfera tem altura de 7,36m, encontre o diâmetro desta esfera (em m)?
2. Qual é o raio desta esfera (em m)?
3. Qual é a área total desta esfera (em $m^2$)?
4. Qual é o volume desta esfera (em $m^3$)?

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, sabendo que a esfera possui raio de 25,1460m.

5. a) Qual foi o erro em relação ao raio da esfera (em m)?

b) Qual foi o erro relativo em relação ao raio da esfera (em %)?

**6.** a) Qual é a área real da esfera (em $m^2$)?

b) Qual foi o erro em relação a área real e a área calculada na questão 3 (em $m^2$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**7.** a) Qual é o volume real da esfera (em $m^3$)?

b) Qual foi o erro em relação ao volume real e o volume calculado na questão 4 (em $m^3$)?

c) Qual foi o erro relativo (em %)?

**8.** Qual é a circunferência de um círculo máximo nesta esfera (em m) ?

**9.** O que você achou sobre os erros encontrados nesta foto? Comente.

**Sequencia Didática – Atividade 4 - Capítulo 7**

Figura 7.1: Pirâmide do Museu do Louvre em Paris, França.

Fonte:< http://www.flickr.com/photos/wallyg/1487228556/in/set-72157602250625298/> .

1. Sabendo que a aresta de um triângulo pequeno da base desta pirâmide quadrangular possui 196,777cm calcule a aresta da base desta pirâmide (em m).
2. Qual é a altura desta pirâmide (em m)?
3. Com os dados da aresta e da altura já calculados nas questões anteriores, encontre o apótema desta pirâmide (em m).
4. Qual é a área lateral desta pirâmide (em $m^2$)?
5. Qual é o volume desta pirâmide (em $m^3$)?

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, considerando que a Pirâmide do Louvre - possui aresta da base de 35,42 metros e altura de 21,64 metros.

6. Qual foi o erro em relação à aresta da base encontrada na foto (em m)?
7. Qual é o volume desta pirâmide (em $m^3$)?
8. Qual é o apótema desta pirâmide, sabendo a altura e aresta da base reais (em m)?
9. Qual é a área lateral desta pirâmide (em $m^2$)?

**Sequencia Didática – Atividade 5 - Capítulo 8**

Figura 8.1: Torre de Pisa.
Fonte: http://www.flickriver.com/photos/treyerice/4890197601/ Acesso 30. set. 2011

1. Sabendo que a menor altura do primeiro pavimento da Torre de Pisa mede 943,80 cm, encontre a altura da Torre (em m)?
2. Qual o diâmetro da Torre de Pisa (em m)?

**3.** Qual é o raio (em m)?

**4.** Qual é a área lateral (em $m^2$)?

**5.** Qual é o volume (em $m^3$)?

**6.** a) Sabendo que o diâmetro desta Torre é de 15,484 metros, quais foram os erros em relação ao diâmetro calculado com a foto?

b) Qual foi o erro relativo (em %)?

**7.** a) Sabendo que a altura da Torre é de 56,294 metros, qual foi seu erro em relação a altura calculada com a foto?

b) Qual foi o erro relativo (em %)?

**8.** Como poderíamos calcular a inclinação da Torre utilizando a foto (em graus)?

**9.** a) Sabendo que o ângulo de inclinação da Torre de Pisa é de 3,97º , qual foi seu erro em relação ao cálculo feito utilizando a foto?

b) Qual foi o erro relativo (em %)?

# APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO

## TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ___________________________________________, R.G. _________________, responsável pelo(a) aluno(a) ________________________________________, da turma 231, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada Modelagem em Fotografias Matemáticas, desenvolvida pela pesquisadora e professora Josy Rocha. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Profª. Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana do Instituto de Matemática da UFRGS.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são de investigar a percepção dos alunos da matemática presente em fotografias relacionadas com obras de arte, arquitetura e com o mundo que os rodeia.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de questionário escrito, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, poderei contatar a pesquisadora / professora através da escola.

Porto Alegre, _____ de _________________ de _______.

Assinatura do Responsável: ..............................................................................

Assinatura do(a) pesquisador(a): ......................................................................

Assinatura do Orientador da pesquisa: ..............................................................

## APÊNDICE C - AUTORIZAÇÃO DO COLÉGIO

# Colégio Romano Santa Marta

**AUTORIZAÇÃO**

Autorizo a Professora Josy Rocha a aplicar seu projeto "Modelagem Matemática com Fotografias" com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio, o qual faz parte de sua pesquisa de Mestrado em Ensino de Matemática pela UFRGS.

Porto Alegre, 01 de setembro de 2011.

Daiane f. de Medeiros

Daiane Medeiros

Colégio Romano Santa Marta
Mantido pela Associação Dom Edmundo Luis Kunz - ADELK
Parecer CEED Nº 710/2010
Rua Marcílio Dias, 1201 - Azenha - POA/RS
(51) [illegible] - CNPJ: 01.056.357/0003-32

**ANEXO A - AMOSTRA REPRESENTATIVA DOS TRABALHOS DOS ESTUDANTES NO PERÍODO DE SONDAGEM**

O trabalho proposto pela professora de matemática Josy Rocha, visa a captura de uma imagem de qualquer ponto de Porto Alegre que apresente alguma relação com a matemática e explorar toda essa matemática contida na fotografia tirada pelos componentes do grupo.
A imagem escolhida foi um balanço, localizado no Centro Estadual de Treinamento Esportivo (CETE), que fica na rua Gonçalves Dias, 628.
A imagem desse balanço, representa um Prisma, como podemos ver a seguir:

As fórmulas para calcular a área e o volume de um Prisma são:

$$A_T = A_l + 2 . A_b$$

$$V = A_b . h$$

Turma: 231

Disciplina: Matemática

Professora: Josy

Data de entrega: 20/07/2011

Nesse monumento do Parque Farroupilha de Porto Alegre, representado na foto, podemos calcular a largura dele, a sua altura, sua área total, a área dos arcos.Podemos calcular também quantas pessoas de certa altura cabem dentro dos arcos, desde o chão.Entre outras muitas coisas.

Área do chão do Palco:
comprimento x largura
Área total do palco:
comprimento x largura
+ (altura x largura) x2
+ comprimento x altura
Volume do palco:
comprimento x largu-
ra x altura
Área do "container":
2x comp. x largura
+2 x comp. x altura
+2 x altura x largura
Volume do "container"
comp. x altura x largura
Supondo que as regiões
amarelas e cinzas (laterais)
sejam, cada uma,
um retângulo menos
um quarto de círculo,
seu volume seria:
largura x altura x comp.

$$- \frac{[\pi . (largura/2)^2]}{4}$$

2. resultado

## ANEXO B - AMOSTRA REPRESENTATIVA DA ATIVIDADE 1 – CAPÍTULO 4

A

① Altura do paralelepípedo

$m^3 \xrightarrow{\times 10^6} cm^3$ ; $cm^3 \xrightarrow{\div 10^6} m^3$

Tamanho real Josy → 1,66 m
Tamanho Josy na fig. → 1,5 cm = 0,015 m
Tamanho face paralelepípedo = altura → 3,35 cm (figura) = 0,0335 m
Tamanho real face → x

→ 1,66 — 0,015
x — 0,0335

0,015x = 0,05561

x = 3,70 m
↳ Altura real da face = alt. paral.

② Largura do paralelepípedo

Na foto → 1,3 cm = 0,013 m

largura — altura
0,013 — 0,0335 (figura)
x — 3,7 (real)

0,0335x = 0,0481

$\boxed{x = 1,435 \text{ m}}$ tam. largura real

④ Volume

V = ab.h
V = 4,2 . 3,7
$\boxed{V = 15,54 \text{ m}^3}$

⑥ Qual seria o efeito do erro de 2 cm na medida da Josy no resultado da área total e volume?

⑤ +2cm
altura paralelepípedo
largura paralelepípedo
370 + 2 :
↳ 372 cm
↳ 143,5 + 2,0 } 145,5 cm

modificaria as medidas da altura do paralelepípedo, o que afetaria na área total e volume, além da área lateral

③ Área lateral e área total (real)

Ab = $\ell^2$ (real)
Ab = $(1,435)^2$
Ab ≅ 2,1 m² x 2 = $\boxed{4,2 \text{ m}^2}$

Aℓ = b . h
Aℓ = 1,435 . 3,7
$\boxed{A\ell \cong 5,31 \text{ m}^2}$

AT = 5,31
+ 4,20
9,51 m²

⑦ Se errarmos em 1mm a altura da prof.ª na foto estaremos alterando o cálculo da altura e da largura do paralelepípedo em quanto? Quais seriam os erros?

0,016 m — 1,66
0,0335 — x

0,016 x = 0,05561
x = 3,48 m

3,70
− 3,48
0,22 m

⑧ Considerando os cálculos da questão 7 quais seriam os erros para os cálculos da área total e dos volume?

V = Ab . h

**ANEXO C - AMOSTRA REPRESENTATIVA DA ATIVIDADE 2 – CAPÍTULO 5**

COLÉGIO ROMANO SANTA MARTA

G

Aula 2 (FOTO 2)

1) Sabendo que a plataforma que sustenta o tronco de pirâmide tem altura de 10 cm, encontre a largura desta plataforma? (em cm)

Resp.: 216 cm

10 cm → 0,5 cm
x → 10,8 cm
0,5x cm → 108
$x = \frac{108}{0,5}$
x = 216 cm

2) Qual é o volume desta plataforma com as medidas encontradas? (em $m^3$)

Resp.: 0,4665 $m^3$

b = 2,16 m
h = 0,1 m

$V = Ab \cdot h$
$V = 2,16^2 \cdot 0,1$
$V = 4,665 \cdot 0,1$
$V = 0,4665\ m^3$

3) Qual é a medida da aresta da base maior do tronco de pirâmide? (em cm)

Resp.: 116 cm

$10\,cm \rightarrow 0{,}5\,cm$
$x \rightarrow 5{,}8\,cm$

$0{,}5x = 58$

$x = \frac{58}{0{,}5}$

$x = 116\,cm$

4) Qual é a medida da aresta da base menor do tronco de pirâmide? (em cm)

Resp.: 48 cm

$10\,cm \rightarrow 0{,}5\,cm$
$x \rightarrow 2{,}4$

$0{,}5x = 24$

$x = \frac{24}{0{,}5}$

$x = 48\,cm$

5) Qual a medida da altura do tronco de pirâmide? (em cm)

Resp.: 122 cm

$10\,cm \rightarrow 0{,}5\,cm$
$x \rightarrow 6{,}1\,cm$

$0{,}5x = 61$

$x = \frac{61}{0{,}5}$

$x = 122\,cm$

6) Qual seria a apótema do tronco de pirâmide? (em cm)

Resp.: 126,64 cm



$ap^2 = 122^2 + 34^2$

$ap^2 = 14884 + 1156$

$ap^2 = 16040$

$ap = \sqrt{16040}$

$ap = 126{,}64\,cm$

7) Qual é a aresta lateral do tronco de pirâmide? (em cm)

Resp.: 126 cm

10 cm → 0,5 cm
x → 6,3 cm

$0{,}5x = 63$

$x = \frac{63}{0{,}5}$

$x = 126$ cm

8) Qual é o volume do tronco de pirâmide? (em $m^3$ )

Resp.: $0{,}848\ m^3$

$h = 1{,}22$ m
$B = 1{,}16$ m
$b = 0{,}48$ m

$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b)$

$V = \frac{1{,}22}{3}(1{,}34 + \sqrt{1{,}16^2 \cdot 0{,}48^2} + 0{,}23)$

$V = 0{,}40\,(1{,}34 + 0{,}55 + 0{,}23)$

$V = 0{,}40 \cdot 2{,}12$

$V = 0{,}848\ m^3$

9) Qual a área lateral do tronco de pirâmide? (em $m^2$ )

Resp.: $4{,}152\ m^2$

$A_F = \frac{(B+b) \cdot l}{2}$

$A_F = \frac{(1{,}16 + 0{,}48) \cdot 1{,}2664}{2}$

$A_F = \frac{1{,}64 \cdot 1{,}2664}{2}$

$A_F = \frac{2{,}076}{2}$ → $1{,}038\ m^2$

$\times 4$

$4{,}152\ m^2$

10) Qual é a área total do tronco de pirâmide? (em $m^2$ )

Resp.: $5{,}727\ m^2$

$A_T = A_b + A_L + A_B$

$A_t = 0{,}48^2 + 4{,}152 + 1{,}16^2$

$A_t = 0{,}230 + 4{,}152 + 1{,}345$

$A_t = 5{,}727\ m^2$

Aula 2 – foto 2 – parte 2 - Análise

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, fazendo os cálculos com as medidas reais do tronco de pirâmide. Então temos:

altura da plataforma = 10 cm

largura da plataforma = 200 cm

h = 131,74 cm (altura do tronco)

ap=136 cm (apótema do tronco)

aresta lateral = 140 cm

aB= 120 cm (aresta da base maior)

ab = 52 cm (aresta da base menor)

11) Qual é o volume do tronco de pirâmide real? Qual foi o erro? (em $m^3$)

$l = 200 cm$ $V = \frac{h}{3} \cdot (B + \sqrt{Bb} + b)$

$V = \frac{1{,}3174}{3} (1{,}2^2 + \sqrt{1{,}2^2 \cdot 0{,}52^2} + 0{,}52^2)$

$V = 0{,}439 (1{,}44 + 1{,}2 \cdot 0{,}52 + 0{,}270)$

$V = 0{,}439 (1{,}44 + 0{,}624 + 0{,}270)$

$V = 0{,}439 \cdot 2{,}334$

$V = 1{,}024 \ m^3$

Volume = $1{,}024 \ m^3$

Erro = $0{,}848 - 1{,}024$
$0{,}176 \ m^3$

Erro Relativo

$17{,}1\%$

$\frac{0{,}176}{1{,}024} = 0{,}171 \times 100\%$
$17{,}1\%$

12) Qual é o volume da plataforma que sustenta o tronco de pirâmide? Qual foi o erro? (em $m^3$)

$V = Ab^2 \cdot h$

$V = 2^2 \cdot 0{,}1$

$V = 0{,}4 \ m^3$

Volume = $0{,}4 \ m^3$

Erro = $0{,}4665 - 0{,}4$
$0{,}0665$

Erro Relativo

$\frac{0{,}0665}{0{,}4} = 0{,}166 \cdot 100\%$
$16{,}6\%$

13) Qual é a área lateral do tronco de pirâmide real? Qual foi o erro? (em $m^2$)

$$A_F = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$A_F = \frac{(1,2 + 0,52) \cdot 1,36}{2}$$

$$A_F = \frac{1,72 \cdot 136}{2}$$

$$A_F = \frac{2,339}{2}$$

$$A_F = 1,169$$
$$\times\ 4$$
$$4,676\ m^2$$

Área lateral = $4,676 m^2$

Erro = $4,152 - 4,676$
$0,524$

Erro Relativo

$\frac{0,524}{4,676} = 0,112 \cdot 100\%$
$11,2\%$

14) Qual é a área total do tronco de pirâmide real? Qual foi o erro? (em $m^2$)

$$A_T = Ab + AB + A\ell$$

$$A_T = 0,52^2 + 1,2^2 + 4,676$$

$$A_T = 0,270 + 1,44 + 4,676$$

$$A_T = 6,386\ m^2$$

Área total = $6,386\ m^2$

Erro = $5,727 - 6,386$
$0,659$

Erro Relativo

$\frac{0,659}{6,386} = 0,103 \cdot 100\%$
$10,3\%$

# ANEXO D - AMOSTRA REPRESENTATIVA DA ATIVIDADE 3 – CAPÍTULO 6

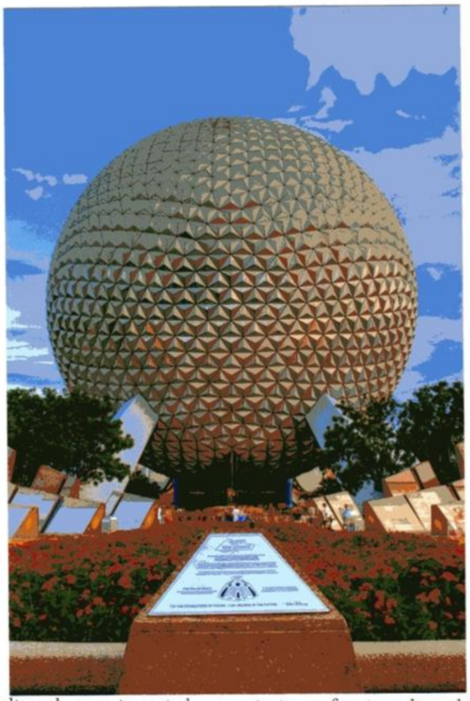
COLÉGIO ROMANO SANTA MARTA

F

Nomes:.

Data: 28/09/2011

Aula 3 (FOTO 3)



1) Sabendo que a altura do suporte central que sustenta a esfera tem altura de 7,36m, encontre o diâmetro desta esfera?(em m)

$\frac{736}{x} = \frac{1,2}{8,2} \Rightarrow x = \frac{736 . 8,2}{1,2} \Rightarrow x = \frac{6035,2}{1,2}$

$\Rightarrow x = 5029,33 \text{ cm} \Rightarrow x = 50,2933\text{m}$

Resp.: $d = 50,2933 \text{ m}$

2) Qual é o raio desta esfera? (em m)

$R = \frac{50,2933}{2} \Rightarrow R = 25,1466\text{m}$

Resp.: $R = 25,1466\text{m}$

3) Qual é a área total desta esfera? (em m²)

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow A = 4 . 3,14 . (25,1466)^2$

$\Rightarrow A = 4 . 3,14 . (632,3514) \Rightarrow A = 12,56 . 632,3514$

$\Rightarrow A = 7942,3335\text{m}^2$

Resp.: $A = 7942,3335\text{m}^2$

4) Qual é o volume desta esfera? (em m³)

$V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V = \frac{12,56 . (25,1466)^3}{3}$

$\Rightarrow V = \frac{12,56 . 15901,489}{3} \Rightarrow V = \frac{199722,7}{3} \Rightarrow V = 66574,233\text{m}^3$

Resp.: $V = 66574,233\text{m}^3$

Medidas encontradas com a utilização da foto

Raio: 25,1466 m

Área total: 7942,3335 $m^2$

Volume total: 66574,233 $m^3$

Foto 3 – Parte 2 - Análise

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, sabendo que a esfera possui raio de 25,1460 m.

5) Qual foi o erro em relação ao raio da esfera? (em m)

Erro ⇒ 25,1466 − 25,1460 = 0,0006 m

Erro R. ⇒ $\frac{0,0006}{25,1460} = 0,0000238$

× 100

0,00238

Erro.: 0,0006m

Erro Relativo.: aproximadamente 0,002%

6) Qual é a área real da esfera? (em $m^2$)

$A = 4.\pi.r^2 \Rightarrow A = 4.3,14.(25,1460)^2$

$\Rightarrow A = 12,56.632,3213 \Rightarrow A = 7941,9556 m^2$

Erro ⇒ 7942,3335 − 7941,9556 = 0,3779 m

Erro R ⇒ $\frac{0,3779}{7941,9556} = 0,0000475$

× 100

0,00475

Área = 7941,9556 $m^2$

Erro = 0,3779 m

Erro Relativo aproximadamente 0,005%

7) Qual é o volume real da esfera? (em $m^3$)

$V = \frac{4\pi.r^3}{3} \Rightarrow V = \frac{12,56.(25,1460)^3}{3}$

$\Rightarrow V = \frac{12,56.15900,351}{3} \Rightarrow V = \frac{199708,4}{3}$

$\Rightarrow V = 66569,466 m^3$

Erro ⇒ 66574,233 − 66569,466 = 4,767 m

Erro R ⇒ $\frac{4,767}{66569,466} = 0,0000716$

× 100

0,00716

Volume = 66569,466 $m^3$

Erro = 4,767 m

Erro Relativo aproximadamente 0,007%

8) Qual é a circunferência nesta esfera? (em m)

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2.3,14.25,1460 \Rightarrow C = 6,28.25,1460$

$\Rightarrow C = 157,9168 m$

Resp.: C = 157,9168 m

9) O que você achou sobre os erros encontrados nesta foto? Comente.

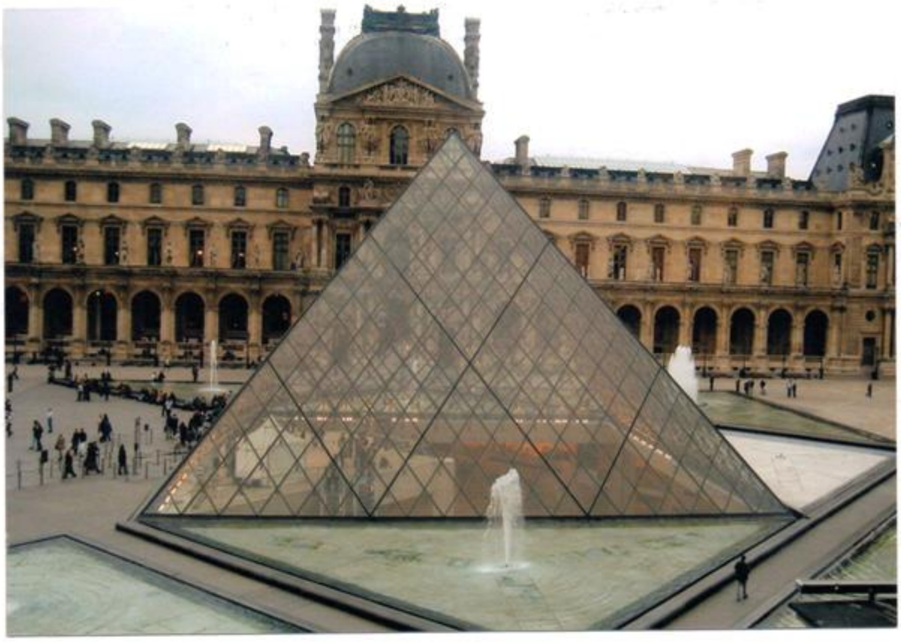
Os erros foram mínimos. Os valores que encontramos ficaram bem próximos dos valores reais.

**ANEXO E - AMOSTRA REPRESENTATIVA DA ATIVIDADE 4 – CAPÍTULO 7**

*COLÉGIO ROMANO SANTA MARTA*

E

Aula 4 (FOTO 4) – PIRÂMIDE DO LOUVRE



1) Sabendo a aresta de um triângulo pequeno da base desta pirâmide quadrangular possui 196,777cm calcule a aresta da base desta pirâmide. (em m)

Resp.: 35,41 m

a= 196,777 . 18 = 3541,98 cm

35,41 m

2) Qual é a altura desta pirâmide? (em m)

Resp.: 20,58 m

6,3 —— X    x = 20,58

0,6 —— 1,96

3) Com os dados da aresta e da altura já calculados nas questões anteriores, encontre a apótema desta pirâmide. (em m)

Resp.: 27,14 m


$x^2 = 20{,}58^2 + 17{,}7^2$

$x^2 = 423{,}53 + 313{,}29$

$x^2 = 736{,}82$

$x = \sqrt{736{,}82} = 27{,}14$

4) Qual é a área lateral desta pirâmide? (em m$^2$)

Resp.: 1922,05 cm$^2$


$\frac{35{,}41 \cdot 27{,}14}{2} = 480{,}51$

$480{,}51 \cdot 4 = 1922{,}05$

5) Qual é o volume desta pirâmide? (em m$^3$)

Resp.: 8601,06 m$^3$

$Ab = \ell^2$

$Ab = 1253{,}8$

$V = \frac{1253{,}8 \cdot 20{,}58}{3}$

$V = 8601{,}06\ m^3$

Medidas encontradas com a utilização da foto

Aresta: 35,41 m..............................

Área lateral: 1922,05 m²..............................

Volume: 8601,06 m³..............................

Foto 4 – Parte 2 - Análise

Agora vamos verificar quais foram os nossos erros, sabendo que a Pirâmide do Louvre - possui aresta da base 35,42 metros e altura de 21,64 metros.

6) Qual foi o erro em relação a aresta da base encontrada na foto? (em m)

$$\frac{35,42-35,41}{35,41}=0,0002$$

Erro.: 0,0002 m

Erro Relativo.: 0,02%

7) Qual é o volume desta pirâmide? (em m$^3$)

$$V=\frac{35,42^2 \cdot 21,64}{3} \qquad V=\frac{1254,57 \cdot 21,64}{3}$$

$$V=\frac{27149,03}{3}=9049,6\,m^3$$

$$ERRO=\frac{9049,6-8601,06}{8601,06}=0,052=5,2\%$$

Volume = 9049,6 m³

Erro = 448,54 m³

Erro Relativo: 5,2%

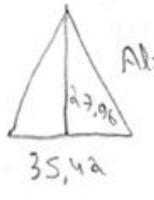
8) Qual é a apótema desta pirâmide, sabendo a altura e aresta da base reais? (em m)

27,96


$$a^2=17,71^2+21,64^2$$
$$a^2=313,64+468,28$$
$$a^2=781,92$$
$$a=\sqrt{781,92}=27,96$$

apótema = 27,96 m

9) Qual é a área lateral desta pirâmide? (em m$^2$)




$$Al=4\cdot\frac{35,42\cdot 27,96}{2}$$
$$Al=4\cdot 495,17$$
$$Al=1980,68$$

$$ERRO=\frac{1980,68-1922,05}{1922,05}=0,030=3\%$$

Área = 1980,68 m²

Erro = 58,63 m²

Erro Relativo: 3%

# ANEXO F - AMOSTRA REPRESENTATIVA DA ATIVIDADE 5 – CAPÍTULO 8

O

COLÉGIO ROMANO SANTA MARTA

Data: 05/10/2011

Aula 5 (FOTO 5) – TORRE DE PISA - ITÁLIA

1) Sabendo que a altura mais baixa do primeiro pavimento da Torre de Pisa mede 943,80 cm, encontre a altura da Torre? (em m)

Resp.: 50,96 m

altura baixa = 943,80 cm
altura da torre = ? (m)

943,80 → 2,5 cm
x → 13,5 cm

2,5x = 12741,3
x = 5096,52 cm → 50,96 m

2) Qual o diâmetro da Torre de Pisa? (em m)

Resp.: 15,1008 m

943,80 cm — 2,5 cm
r — 1 cm

2,5r = 3775,2 cm

r = 1510,08 cm — 15,1008 m

3) Qual é o raio? (em m)

Resp.: 7,55 m

$d = 2 \cdot r$

$15,10 = 2 \cdot r$

$\frac{15,10}{2} = r = 7,55\ m$

4) Qual é a área lateral? (em $m^2$)

Resp.: $2416,16\ m^2$

$Al = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$Al = 2 \cdot 3,14 \cdot 7,55 \cdot 50,96$

$Al = 6,28 \cdot 384,74$

$Al = 2416,16\ m^2$

5) Qual é o volume? (em $m^3$)

Resp.: $9120,82\ m^3$

$V = \pi r^2 \cdot h$

$V = 3,14 \cdot (7,55)^2 \cdot 50,96$

$V = 3,14 \cdot 57,00 \cdot 50,96$

$V = 178,98 \cdot 50,96 = 9120,82\ m^3$

Medidas encontradas com a utilização da foto

Diâmetro: 15,1008 m

Raio: 7,55 m

Altura: 50,96 m

Área lateral: 2416,16 $m^2$

Volume: 9120,82 $m^3$

Foto 5 – Parte 2 - Análise

6) Sabendo que o diâmetro desta Torre é de 15,484 metros, quais foram os erros em relação ao diâmetro calculado com a foto?

$E = 15,484 - 15,1008 = 0,3832\ m$

$ER = \frac{0,3832}{15,484} = 0,0247\ m \times 100 = 2,474\ \%$

Erro.: 0,3832 m

Erro Relativo.: 2,474 %

7) Sabendo que a altura da Torre é de 56,294 metros, qual foi seu erro em relação a altura calculada com a foto?

$E = 56,294 - 50,96 = 5,334\ m$

$ER = \frac{5,334}{56,294} = 0,0947\ m \times 100 = 9,47\ \%$

Erro = 5,334 m

Erro Relativo 9,47 %

8) Como poderíamos calcular a inclinação desta Torre utilizando esta foto?

$tg\ \alpha = \frac{c.op}{c.adj.}$

$tg\ \alpha = \frac{0,5}{9,1} = 0,05494 = \alpha = 3,14^0$

9) Sabendo que o ângulo de inclinação da Torre de Pisa é de 3,97⁰, qual foi seu erro em relação ao cálculo feito utilizando a foto?

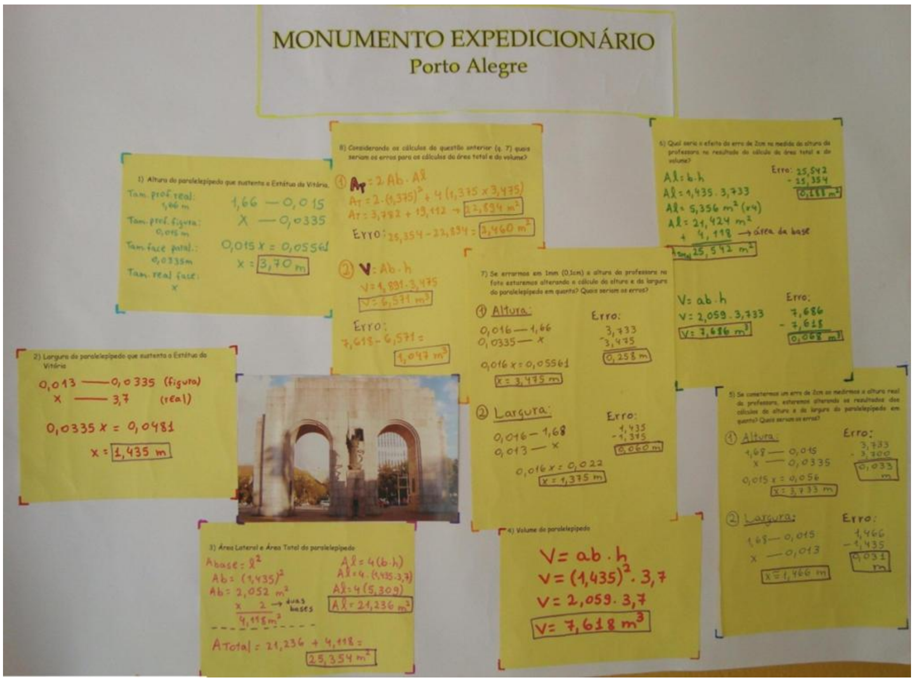
$E = 3,97 - 3,14 = 0,83^0$

$ER = \frac{0,83^0}{3,97^0} = 0,209 \times 100 = 20,9\ \%$

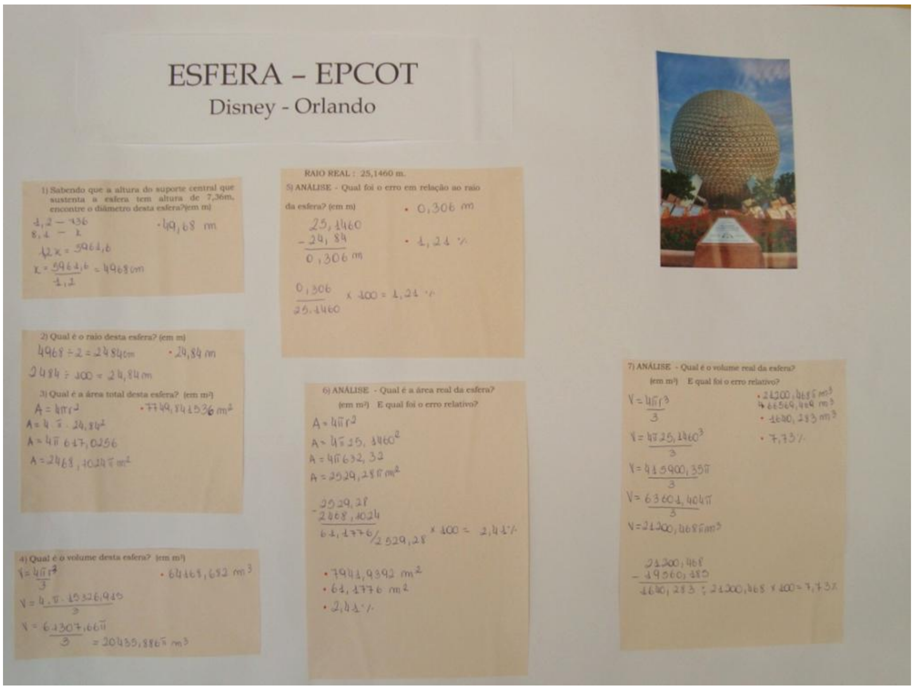
Erro = $0,83^0$

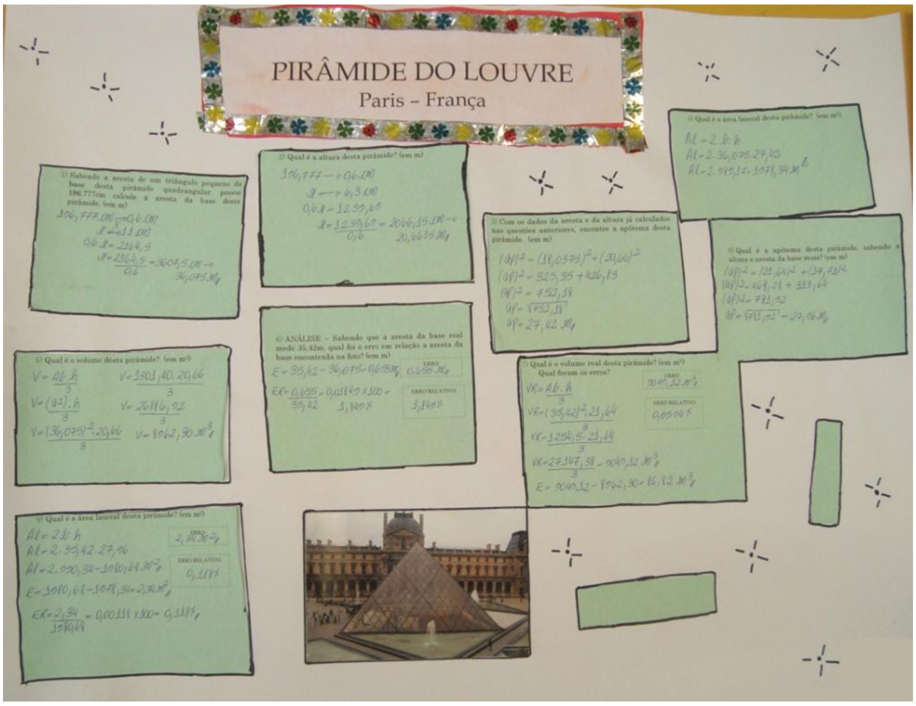
Erro Relativo 20,9 %

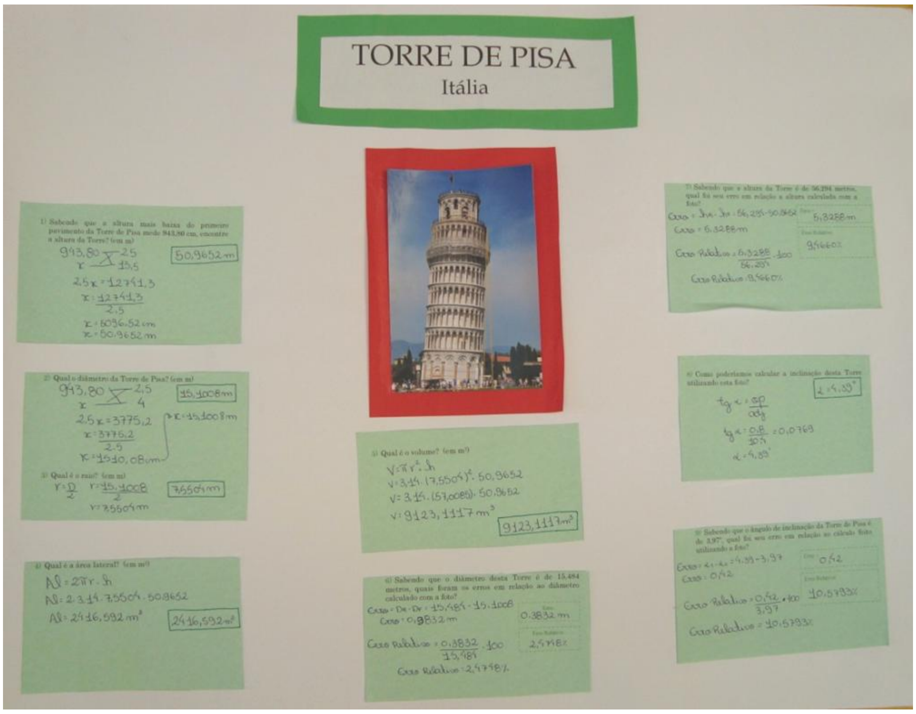
## ANEXO G - MURAL CONSTRUÍDO PELOS ALUNOS




TRONCO DE PIRÂMIDE
EM HOMENAGEM A SANTOS DUMONT
Porto Alegre


ESFERA – EPCOT
Disney - Orlando


PIRÂMIDE DO LOUVRE
Paris – França


TORRE DE PISA
Itália