

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física

# Compressibilidade da Matéria Nuclear em Estrelas de Nêutrons

Verônica Antocheviz Dexheimer

*Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr.  
César Augusto Zen Vasconcellos, apresentada ao In-  
stituto de Física da UFRGS em preenchimento par-  
cial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre  
em Física.*

*Porto Alegre, Março de 2006.*

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os professores da UFRGS que contribuíram para minha formação, em especial, ao Prof. Dr. Bardo Emst Josef Bodmann e ao meu orientador Prof. Dr. César Augusto Zen Vasconcellos e, a todos os colegas que me ajudaram a chegar até aqui, principalmente, aos colegas do grupo de hádrons Rafael Bán Jacobsen, Moisés Razeira e Maurício Grohmann, sem os quais essa dissertação definitivamente não existiria.

Também gostaria de agradecer a meus pais Maria Luiza Antochviz Dexheimer e Gin Dexheimer por terem me apoiado durante todos os problemas e todas as crises e à minha gata Tamit, por todas as horas passadas comigo, em cima da mesa do computador, apoiando-me incondicionalmente e mostrando-me que nada é tão ruim quanto parece.

## Resumo

Neste trabalho, são discutidos modelos da hadrodinâmica quântica com aproximação de campo médio aplicados a estrelas de nêutrons. O modelo de Walecka define o ponto de partida para desenvolver o modelo de acoplamento derivativo ajustável. A presente dissertação visa a um estudo detalhado sobre a influência dos parâmetros do modelo ajustável no sistema, analisando seus limites, inclusive quando os parâmetros são iguais a zero ou infinito (modelo exponencial). Esta análise tem o propósito de estabelecer um conjunto de parâmetros que defina um modelo que esteja de acordo com as propriedades fenomenológicas tais como módulo de compressão da matéria nuclear, massa efetiva na saturação da matéria nuclear e também algumas propriedades estáticas globais das estrelas de nêutrons como, por exemplo, massa e raio. Estabelecido o modelo a ser considerado, a autora dessa dissertação introduz, como inovação, a compressibilidade hadrônica como função da densidade. Tradicionalmente, determinam-se propriedades da matéria apenas para a densidade de saturação.

## Abstract

In the present work we apply quantum hadrodynamics effective models in the mean-field approximation to the description of neutron stars. We consider the Walecka model as a starting point in the development of an adjustable derivative-coupling model. We study the influence that the parameters of this adjustable model have on the dynamics of the system by analyzing the full range of values they can take, including the limits when the parameters go to zero or infinity (exponential model). The present dissertation has the purpose of establishing a set of parameters which defines a specific model that is able to describe phenomenological properties such as the compression modulus of nuclear matter, effective mass of a nucleon at saturation point as well as global static properties of neutron stars (mass and radius for example). Once established the model, the author of this dissertation introduces a novel hadronic compressibility and its density dependence. Traditionally, nuclear matter properties are determined only at saturation density.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Estrutura Interna e Evolução Estelar</b>	<b>16</b>
2.1	Diagrama HR . . . . .	17
2.2	Proto-estrelas . . . . .	18
2.3	Estado de Equilíbrio . . . . .	19
2.4	Seqüência Principal de Idade Zero . . . . .	22
2.5	Seqüência Principal . . . . .	24
2.6	Gigante e Supergigante Vermelha . . . . .	25
2.7	Nova e Supernova . . . . .	28
2.8	Estrela de Nêutrons . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Uma Breve Descrição de Estrelas de Nêutrons</b>	<b>31</b>
3.1	Composição . . . . .	31
3.2	Equação de Estado . . . . .	31
3.3	Aspectos da Relatividade Geral . . . . .	32
3.4	Tópicos da Relatividade Geral na Astrofísica . . . . .	36
3.5	Aplicação da Relatividade Geral em Estrelas de Nêutrons . . . . .	40
3.6	Estabilidade . . . . .	41
3.7	Neutralidade Elétrica . . . . .	42
3.8	Equilíbrio Químico . . . . .	43
3.9	Temperatura . . . . .	45
3.10	Pulsares . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Modelo de Walecka</b>	<b>47</b>
4.1	Densidade Lagrangeana . . . . .	48
4.2	Equações de movimento . . . . .	49

4.2.1	Para o campo $\sigma$ . . . . .	49
4.2.2	Para o campo $\omega$ . . . . .	49
4.2.3	Para o campo $\bar{\psi}$ . . . . .	50
4.2.4	Para o campo $\psi$ . . . . .	50
4.3	Tensor Energia-momentum . . . . .	51
4.4	Aproximação de Campo Médio . . . . .	52
4.4.1	Para a Equação de Movimento do Campo $\sigma$ . . . . .	52
4.4.2	Para a Equação de Movimento do Campo $\omega$ . . . . .	53
4.4.3	Para a Equação de Movimento do Campo $\psi$ . . . . .	54
4.5	Pressão e Energia . . . . .	55
4.5.1	Pressão . . . . .	55
4.5.2	Densidade de Energia . . . . .	56
4.5.3	Densidade Bariônica . . . . .	57
4.5.4	Densidade Escalar . . . . .	59
4.5.5	Resultado para a Pressão . . . . .	62
4.5.6	Resultado para a Densidade de Energia . . . . .	66
4.6	Constantes de Acoplamento . . . . .	70
4.7	Massa Efetiva do Núcleon . . . . .	71
4.8	Resultados Numéricos para as Constantes de Acoplamento, Massa Efetiva e Equação de Estado . . . . .	71
4.8.1	Constantes de Acoplamento . . . . .	71
4.8.2	Massa Efetiva do Núcleon . . . . .	73
4.8.3	Energia de Ligação . . . . .	74
4.8.4	Equação de estado . . . . .	75
4.9	Função Compressibilidade . . . . .	76
4.10	Velocidade do Som: Limite para a Compressibilidade . . . . .	80
4.11	Resultados Numéricos para a Compressibilidade e Velocidade do Som . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Modelo de Acoplamento Ajustável</b> . . . . .	<b>86</b>
5.1	Densidade Lagrangeana . . . . .	87
5.2	Equações de movimento . . . . .	89
5.2.1	Para o campo $\sigma$ . . . . .	89
5.2.2	Para o campo $\omega$ . . . . .	90
5.2.3	Para o campo $\rho$ . . . . .	91

5.2.4	Para o campo $\psi_\lambda$ . . . . .	91
5.2.5	Para o campo $\psi_B$ . . . . .	91
5.3	Tensor Energia-momentum . . . . .	92
5.4	Aproximação de Campo Médio . . . . .	92
5.4.1	Para a Equação de Movimento do Campo $\sigma$ . . . . .	93
5.4.2	Para a Equação de Movimento do Campo $\omega$ . . . . .	93
5.4.3	Para a Equação de Movimento do Campo $\rho$ . . . . .	94
5.4.4	Para a Equação de Movimento do Campo $\bar{\psi}_\lambda$ . . . . .	94
5.4.5	Para a Equação de Movimento do Campo $\bar{\psi}_B$ . . . . .	94
5.5	Pressão e Energia . . . . .	95
5.5.1	Densidade Bariônica . . . . .	95
5.5.2	Densidade Escalar . . . . .	96
5.5.3	Densidade Leptônica . . . . .	96
5.5.4	Tensor Energia-Momentum na Aproximação de campo Médio . . . . .	96
5.5.5	Pressão . . . . .	97
5.5.6	Energia . . . . .	97
5.6	Constantes de Acoplamento . . . . .	99
5.6.1	Constantes de Acoplamento dos Núcleons . . . . .	99
5.6.2	Constantes de Acoplamento dos Outros Bárions . . . . .	102
5.7	Massa Efetiva . . . . .	105
5.8	Resultados Numéricos . . . . .	106
5.8.1	Constantes de Acoplamento . . . . .	106
5.8.2	Massa Efetiva . . . . .	111
5.8.3	Equação de Estado . . . . .	112
5.9	Função Compressibilidade . . . . .	115
5.10	Populações . . . . .	120
5.11	Resultados Numéricos . . . . .	125
5.11.1	Função Compressibilidade . . . . .	125
5.11.2	Velocidade do Som . . . . .	128
5.11.3	Populações . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Resolução das Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff</b>	<b>134</b>
6.1	Modelo de Walecka . . . . .	135
6.2	Modelos Escalares . . . . .	136

6.3	Modelo Independente . . . . .	138
6.4	Valores Observacionais . . . . .	141
6.4.1	Modelo Escalar . . . . .	142
6.4.2	Modelo Independente . . . . .	142
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Provas</b>	<b>153</b>
A.1	Prova da Equação de Equilíbrio Químico . . . . .	153
A.2	Prova da conservação de corrente bariônica . . . . .	153
A.3	Detalhes do Cálculo da Densidade Escalar . . . . .	154
A.4	Detalhes do Cálculo da Nova Forma para Pressão . . . . .	156
A.5	Resolução de Sistema das Constantes de Acoplamento . . . . .	160
A.6	Prova da Obtenção do Modelo Exponencial . . . . .	161
	<b>Bibliografia</b>	<b>162</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Henri Becquerel, em 1896, motivado pela então recente descoberta dos raios-X, por Conrad Roentgen, estudou as radiações emitidas por materiais fosforescentes, em particular aquelas emitidas pelo elemento urânio, que curiosamente eram identificadas com os assim denominados *saltos do urânio*. Ele descobriu, diferentemente do que era esperado pelos cientistas da época, que a natureza da radiação espontaneamente emitida pelo elemento urânio diferia da luz fosforescente e dos raios -X, e por isso denominou-a de *raios urânicos*. Nascia assim o campo de estudos denominado hoje de física nuclear<sup>[1]</sup>.

Estimulada pelos resultados dos estudos de Becquerel sobre os raios urânicos, Marie Curie primeiramente, logo secundada por Pierre Currie, iniciou estudos sistemáticos sobre a natureza desses raios. Esses estudos demonstraram que o fenômeno acima descrito não estava circunscrito apenas ao elemento urânio, levando à descoberta subsequente dos elementos polônio e rádio, ambos em 1898. Surgiu então, de seus estudos, o termo radioatividade para caracterizar tais emissões espontâneas, termo o qual é utilizado até hoje para expressar fenômenos de emissividade moleculares, atômicas e nucleares<sup>[1]</sup>.

Em 1901, os físicos Ernest Rutherford e Frederick Soddy descobriram o fenômeno da transmutação de elementos<sup>[2]</sup>. Em seus estudos eles observaram que determinadas substâncias, como o urânio e o tório, transmutam-se naturalmente em outros elementos. A partir daí, muitos outros elementos, ditos radioativos, foram então encontrados<sup>[3]</sup>.

Estudos subsequentes realizados por vários autores demonstraram que há três tipos de radiação: raios alfa e beta (ambos descobertos por Rutherford) e raios gama. O que diferenciava esses três tipos distintos de radiação seria, fundamentalmente, segundo a visão de então, os seus distintos poderes de penetração. Mas o que intrigava de maneira especial os cientistas da época era a origem desses distintos tipos de radiação bem como sua natureza. Um tempo expressivo se

passou até que os físicos pudessem compreender de maneira mais ampla seu significado. Algumas descobertas posteriores auxiliaram fundamentalmente nessa busca.

Rutherford, por exemplo, descobriu que uma determinada fração de uma substância radioativa decai em um certo intervalo de tempo, seguindo uma lei exponencial de decaimento. Era descoberto então um ingrediente fundamental para a compreensão da natureza e da origem das radiações alfa, beta e gama: uma lei universal de decaimento. E, ademais, que cada decaimento radioativo tem uma característica especial, a assim denominada *meia-vida*, espécie de impressão digital das distintas formas de decaimento, sendo independente das propriedades químicas e térmicas da substância radioativa<sup>[4]</sup>.

Mais tarde, foi descoberto que as partículas alfa são, na realidade, núcleos do elemento hélio, desprovidos de elétrons e contendo em seu interior duas unidades de carga positiva, porém com suas massas aproximadamente iguais a quatro vezes a massa do próton<sup>[5]</sup>. Essa descoberta revelava que, quando uma partícula alfa é emitida, o número atômico  $Z$  decresce por duas unidades, trazendo luz ao efeito de transmutação de elementos, pois através dessa emissividade, um dado átomo, se percebia então, é transmutado em um novo elemento com duas unidades de carga a menos comparativamente ao elemento original.

Uma descoberta surpreendente posterior, trouxe uma nova visão da estrutura atômica, e contribuiu para uma compreensão muito mais profunda da natureza mais íntima da matéria e para um melhor entendimento, a partir daí, da própria natureza das radiações. Trata-se da descoberta do núcleo atômico.

Em 1911, a partir da observação dos resultados de espalhamentos de partícula-alfa colidentes em folhas de ouro a grandes ângulos, resultados esses completamente inesperados à época, Rutherford elaborou um modelo teórico para a estrutura atômica que representou um marco fundamental para uma melhor compreensão da natureza dos mundos *microscópico* e *fentométrico*. Nesse modelo, o átomo seria constituído de um núcleo central, contendo  $Z$  cargas positivas,  $A-Z$  "partículas" massivas com massas aproximadamente iguais às massas dos prótons<sup>1</sup> e uma esfera de cargas elétricas negativas uniformemente distribuídas ao redor do núcleo<sup>[5]</sup>.

O modelo revolucionário criado por Rutherford foi subseqüentemente aprimorado por Niels Bohr, em 1913 ao elaborar um modelo dinâmico para o átomo de hidrogênio, em que um elétron circulava em órbitas estáveis denominadas então de *estados estacionários*. No modelo, o elétron poderia emitir radiação luminosa ao saltar entre esses estados estacionários. Mas, enquanto o elétron circula em uma órbita estacionária, nenhuma radiação luminosa é emitida. Esse modelo

---

<sup>1</sup>Uma vez que a existência do nêutron ainda não era conhecida, se imaginava, como possibilidade, que essa "partícula" poderiam ser combinações muito especiais de pares próton-elétron (dinamido).

extraordinário tornou possível, pela primeira vez, o entendimento da natureza da radiação luminosa ao explicar, de maneira consistente, as energias já conhecidas, da luz emitida pelo átomo de hidrogênio<sup>[6]</sup>.

Após os trabalhos originais de Bohr, outros autores formularam as bases da mecânica quântica, que rapidamente foi incorporada aos modelos atômicos e nucleares fazendo com que as concepções, os modelos e o conhecimento da natureza mais íntima da matéria alcançassem patamares nunca antes imaginados.

Um dos resultados mais expressivos da combinação dos modelos primordiais com a mecânica quântica foi a explicação do decaimento de partículas alfa. Um dado preliminar, bem conhecido da época, era o fato de que, ao duplicar a energia de emissão de uma partícula alfa nuclear, por exemplo, de 4 para  $8MeV$ , ocorre um fenômeno interessante: sua meia-vida decresce de 1010 anos para  $10^{-2}$  segundos (um fator de  $10^{-19}$ )! Os cientistas logo perceberam, desses resultados, que há uma relação causal entre a energia de decaimento de uma partícula e sua meia-vida. As previsões da física clássica indicavam que a partícula alfa seria confinada ao núcleo por uma barreira *coulombiana* de potencial criada pelas partículas de carga positiva em seu interior. Não poderia haver então, segundo a física clássica, emissão de partículas alfa pelo núcleo. A explicação definitiva para esse fenômeno, foi fundamentalmente baseada nos princípios da mecânica quântica: ao introduzir o conceito de *tunelamento de barreira de potencial*, a mecânica quântica possibilitou a interpretação consistente dos resultados experimentais correspondentes à emissividade de partículas alfa<sup>[7]</sup>.

Retornando à questão de modelos atômicos, já em 1899, com a descoberta de que a radiação beta era constituída de elétrons e a posterior observação de que sua energia cinética de emissão era muito alta quando comparada às energias típicas de emissão atômicas, os cientistas indagavam-se então sobre sua origem (suas velocidades de emissão não diferem muito da velocidade da luz). O modelo de Rutherford trouxe então uma nova compreensão dessa realidade. As partículas beta, sabe-se hoje, são de origem nuclear; no processo de emissão de uma partícula beta o número atômico cresce de uma unidade e suas energias características são muito mais elevadas do que as energias correspondentes das emissões de elétrons pelos átomos e raios-X. Similarmente, descobriu-se que as radiações gama, de mesma natureza que os raios-X, são provenientes do núcleo atômico sendo ademais, de maneira similar ao caso anterior, mais energéticas do que aquelas.

Mas uma dúvida muito importante ainda pairava no semblante dos cientistas da época: a natureza da "partícula" massiva que complementava a estrutura nuclear. Foi somente em 1931, com a descoberta do nêutron por James Chadwick<sup>[8]</sup>, que essa dúvida foi resolvida. Iniciava-se

então uma nova era na física nuclear, em que os ingredientes mais fundamentais do núcleo eram então conhecidos. Essa era elevou a física nuclear clássica, nos anos subsequentes, a patamares nunca antes imaginados.

Iniciou-se então uma fase de ouro da física nuclear. Não somente na física nuclear tradicional, que buscava compreender com maior profundidade a natureza dos núcleos atômicos e da estrutura nuclear, mas também em campos correlatos, a física de partículas e a astrofísica.

Quando em 1930, Subrahmanyan Chandrasekhar, muito jovem ainda, publicou seus estudos sobre os mecanismos de formação e evolução das estrelas anãs brancas, ele predisse que se a massa desses objetos estelares fosse maior do que 1.44 massas solares (limite de Chandrasekhar), a pressão de degenerescência dos elétrons contidos em seu interior seria insuficiente para impedir o seu colapso gravitacional<sup>[9, 10]</sup>. Suas predições, que consideravam a possibilidade da existência de objetos estelares super-densos, foram na época muito contestadas, levando Arthur Eddington em particular a afirmar que: “deve (ou deveria) haver uma lei na natureza que impeça uma estrela de se comportar de forma tão absurda...” (“there should be a law of Nature to prevent a star from behaving in this absurd way.” ).

Mas Chandrasekhar, embora sua contribuição para a astrofísica estelar seja marcante, não é o precursor no que concerne a predições sobre a possibilidade da existência de objetos estelares super-densos. Albert Einstein, em sua publicação da teoria da relatividade geral aventava a possibilidade de matéria produzir alterações na estrutura do espaço-tempo, o que levou Karl Schwarzschild a estudar o fenômeno de distorção do espaço-tempo na vizinhança de uma estrela. Ele descobriu que dada uma massa estelar, há um certo valor do seu raio (raio de Schwarzschild) para o qual a coordenada do tempo pode ser comprimida até anular-se enquanto que as coordenadas espaciais são consistentemente alongadas ao infinito<sup>[11]</sup>. Esse limite imposto pela teoria da relatividade geral define um limite entre objetos densos, as chamadas estrelas de nêutrons, tema dessa dissertação, e buracos negros. O raio de Schwarzschild para o nosso sol é da ordem de 3 quilômetros. Mas o seu valor para uma estrela de nêutrons, com cerca de uma massa solar é da ordem de 10 quilômetros, implicando em que sua densidade tem que ser extremamente alta quando comparada a do Sol. Abriam-se as portas então para a possibilidade da existência de estrelas compactas, super-densas.

E novamente, a descoberta do nêutron por James Chadwick trouxe novas luzes para essa questão. Em especial o astrofísico Fritz Zwicky e o físico Lev D. Landau especularam que o nêutron poderia ser o elemento chave para a compreensão da possível existência de estrelas muito mais densas do que as anãs brancas.

Dentre as especulações mais notáveis desses cientistas, estava a idéia de que no processo de colapso estelar, caso a pressão atingisse valores extremos, poderia ocorrer processos nucleares de absorção de elétrons por prótons, em processos do tipo beta inversos<sup>2</sup> (neutronização), produzindo nêutrons e criando assim uma esfera de nêutrons densamente “empacotada” cuja massa seria da ordem das massas estelares típicas mas cujo raio se estenderia a apenas cerca de 10 quilômetros. Essa esfera ofereceria uma resistência à pressão gravitacional, devido ao caráter repulsivo de curto alcance da força nuclear. Considerações de equilíbrio hidrostático levavam à conclusão que sua massa excederia o limite de Chandrasekhar, até um certo valor, e não colapsaria. Foi então que Fritz Zwicky e Walter Baade sugeriram que essa pressão que sustenta a compressão gravitacional em esferas de nêutrons poderia ter sido originada em uma explosão de supernova. Criava-se então o termo “estrela de nêutrons” para caracterizar tais objetos estelares.

Lev Landau acreditava que uma estrela normal poderia ter um caroço comprimido de nêutrons em seu interior e que a energia da estrela seria alimentada continuamente por processos de acumulação de massa ao invés de reações de fusão, as quais tornam-se endotérmicas a partir do elemento ferro<sup>[12]</sup>. J. Robert Oppenheimer demonstrou mais tarde que se uma estrela normal contivesse em seu interior um caroço comprimido de nêutrons, a estrela colapsaria<sup>[13]</sup>.

Julius Robert Oppenheimer e Hartland Snyder, influenciados pelos estudos de Chandrasekhar dos limites de massa para anãs brancas, abordaram então a questão do limite superior de uma estrela de nêutrons chegando a conclusões fascinantes no contexto da relatividade geral que indicavam que uma estrela de nêutrons, que atingisse limites de massa tais em que o seu equilíbrio hidrostático era rompido, o colapso tornava-se inevitável, formando uma singularidade, de forma que, ao atingir o raio de Schwarzschild, a luz não escaparia do objeto formado<sup>[14]</sup>.

Alguns fatos marcantes contribuíram decisivamente para a evolução então do conhecimento nesse campo de investigação. Em 1932, ao investigar, a pedido da Companhia Telefônica Bell, um ruído enigmático captado por uma de suas antenas, o técnico de rádio Karl Guthe Jansky notou que os equipamentos da empresa registravam um sinal vindo do espaço exterior, mais precisamente da constelação de Sagitário, localizada no centro da Via Láctea e repleta de estrelas. Jansky foi o precursor de um novo modo de estudo das estrelas: “ouvi-las” através de suas emissões de rádio, embora aquelas fossem imperceptíveis muitas vezes ao olhar<sup>[15, 16]</sup>.

Outro fato marcante ocorreu em 1967, quando Anthony Hewish captou sinais de rádio do primeiro pulsar, um tipo de estrela que emite radiação na forma de pulsos regulares. Alguns

---

<sup>2</sup>Quando nos referimos ao decaimento beta, sabemos hoje que o nêutron é uma partícula instável e que sofre, devido à interação fraca, decaimento do tipo  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ . O decaimento  $p + e \rightarrow n + \nu$  é denominado de inverso e é essencial para compreendermos o processo de neutronização da matéria nuclear em estrelas de nêutrons.

desses pulsos chegam na Terra ao ritmo de um a cada milésimo de segundo. Isso acontece porque o pulsar lança um único feixe de luz (ou de ondas de rádio). Como o astro gira, esse feixe passa pelos telescópios de tempos a tempos, como se fossem pulsos. Os pulsares são hoje identificados com estrelas de nêutrons que possuem um forte campo magnético e uma alta velocidade de rotação.

Voltando à física nuclear mais tradicional e seus impactos na evolução da ciência, é importante ressaltar que estudos dos raios beta emitidos pelo núcleo, diferentemente do que ocorre na emissão de raios gama e raios-X, apresentam um resultado surpreendente: ao invés de uma energia bem definida, há uma distribuição contínua de energia dos raios beta emitidos, denominada de espectro de energias. E que há um déficit de energia entre o valor da energia nuclear inicial e final, ao qual, impondo-se a lei de conservação de energia, implicava na existência, na época, de uma partícula “invisível” , que carregaria a energia faltante.

Foi o físico Wolfgang Pauli, em 1931, que ao introduzir o conceito do neutrino, partícula fundamental para o processo de neutronização que ocorre em estrelas de nêutrons, conseguiu explicar a existência de um espectro característico da emissividade do tipo beta. Evidências experimentais para sua existência apareceram apenas 25 anos após, obtidas por Frederick Reines e Clyde Cowan. Sua emissão está diretamente relacionada à interação fraca, fundamental para a compreensão da radioatividade nuclear e sub-nuclear, em processos que violam a lei de conservação da paridade<sup>[17, 18, 19]</sup>.

Nesse breve relato de alguns avanços da física nuclear, é importante ressaltar um modelo criado nos anos 50, que representa até hoje uma das mais importantes bases de estudo de núcleos e de estrelas de nêutrons, o assim denominado modelo da matéria nuclear infinita. Esse modelo nuclear hipotético é basicamente constituído de uma fração fixa do número de prótons e nêutrons, não há superfície nuclear e a interação de Coulomb entre os prótons é nele desconsiderada. Originalmente inventado de forma a simplificar a descrição de sistemas físicos de muitos corpos fortemente interagentes, matéria nuclear infinita representa uma excelente aproximação para a física de estrelas de nêutrons, que contém cerca de  $10^{57}$  partículas, e na física das reações de núcleos pesados<sup>[20]</sup>.

Surpreendentemente, a concepção de matéria nuclear infinita aplicada ao estudo de núcleos finitos apresenta resultados, em algumas vezes, bastante próximos da *realidade*. Evidentemente, estão fora do escopo dessa dissertação, as implicações físicas e filosóficas dessa constatação. Apesar disso, é importante ressaltar uma preocupação nesse sentido por parte da comunidade científica, a qual diz respeito aos múltiplos caminhos que podem levar, de um modelo de matéria

nuclear infinita e suas predições quanto a grandezas nucleares fundamentais, - densidade, energia de ligação, densidade de saturação, energia de saturação e módulo de compressibilidade -, à interpretação dos resultados fenomenológicos correspondentes de núcleos finitos.

Na busca de respostas a essa indagação, modelos semi-empíricos de massa e de energia de ligação nuclear foram criados, com base em modelos da gota líquida. A mais antiga dessas fórmulas para a energia de um núcleo foi desenvolvida por Hans Bethe e Carl von Weizsäcker<sup>[21]</sup>, e é dada por:

$$B_0(A, Z) = -a_1A + a_2A^{\frac{2}{3}} + a_3\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4\frac{(A - 2Z)^2}{A}, \quad (1.1)$$

onde os parâmetros acima descrevem termos de volume, superfície, coulombiano e assimetria (ver discussão posterior no capítulo 4).

Apesar do sucesso de modelos semi-empíricos na descrição de propriedades fundamentais de núcleos finitos, esses modelos apresentavam alguns problemas conceituais: eram fórmulas clássicas, portanto sem a inclusão de aspectos quanto-mecânicos, essências para uma melhor compreensão do mundo fentométrico; não faziam alusão à existência e propriedades de partículas nucleares e não continham ingredientes que pudessem descrever a imensa complexidade de um sistema fermiônico de muitos corpos fortemente interagente.

Embora o coeficiente de Coulomb,  $a_3$ , especificasse a densidade nuclear na forma indireta  $a_3 = 0.6e^2/r_0$ , pois o raio do núcleon  $r_0$  e a densidade nuclear  $\rho$  são grandezas relacionadas, para núcleos finitos como  $\rho = 3/4\pi r_0^3$ , o modelo introduzia o famoso paradoxo do  $r_0$ : uma vez que tal relação não é adotada na formulação da matéria nuclear, os cálculos correspondentes levavam a valores menores da densidade de núcleos pesados em comparação à densidade da matéria nuclear.

Havia argumentos para consolidar essa posição como por exemplo de que a presença da interação de Coulomb em fórmulas semi-empíricas de massa, mas não considerada nos modelos de matéria nuclear infinita, seria o elemento responsável por tais discrepâncias: a presença da repulsão de Coulomb entre os prótons faz com que exista uma tendência para aumento do raio do núcleo<sup>[22]</sup>. Isto fez com que houvesse uma mudança das concepções que levavam a adotar primeiramente os valores  $r_0 = 1.22fm$ , para núcleos finitos, o que corresponderia, para densidades da matéria nuclear, a  $r_0 = 1.12 - 1.13fm$ , passando-se mais tarde a adotar os valores  $\rho_\infty = 0.24fm^{-3}$ ,  $k_F = 1.52fm^{-1}$  e  $r_o = 1.00fm$ , obtidos através de processos de espalhamento de elétrons<sup>[23]</sup>.

Posteriormente, investigações concluíram que a tensão superficial em um núcleo pesado pode aproximadamente contrabalançar a repulsão de Coulomb, de forma que os resultados acima,

obtidos através de espalhamento de elétrons, poderiam representar então os resultados correspondentes para a matéria nuclear<sup>[24]</sup>.

Esse resultado foi contestado subsequenteemente, através de cálculos de propriedades fundamentais da matéria nuclear infinita em um tratamento dependente de densidade na aproximação de Hartree-Fock<sup>[25]</sup>, chegando-se aos valores  $\rho_\infty = 0.15 fm^{-3}$ ,  $k_F = 1.31 fm^{-1}$  e  $r_o = 1.16 fm$ .

Hoje, é possível afirmarmos que a determinação dos valores empíricos das propriedades de saturação da matéria nuclear infinita é uma questão ainda em aberto, não estando portanto satisfatoriamente resolvida e não havendo argumentos convincentes para a sua extrapolação para a descrição de propriedades da matéria nuclear infinita a partir dos valores das propriedades correspondentes em núcleos finitos. E essas indeterminações se estendem para outras propriedades da matéria nuclear como coeficiente de assimetria e módulo de compressibilidade, uma propriedade fundamental da equação de estado da matéria nuclear simétrica.

Em particular, quando examinamos a questão da determinação do módulo de compressibilidade de núcleos finitos e sua extensão para a descrição da matéria nuclear infinita, percebemos que há uma lacuna expressiva na compreensão de seu papel na dinâmica nuclear bem como de evidências de correlações que garantam vínculos entre a compressibilidade nuclear e a física de estrelas de nêutrons. Acrescenta-se a isso o fato de que essa grandeza, bem como as demais, são determinadas na física de núcleos finitos, utilizando-se modelos de matéria nuclear simétrica, sendo ademais determinadas no ponto de saturação nuclear, enquanto que estrelas de nêutrons são melhor representadas por matéria nuclear infinita com altos índices de assimetria e cujas densidades vão muito além da densidade de saturação nuclear.

Definido como a segunda derivada da energia por núcleon da matéria nuclear simétrica, no ponto de saturação nuclear, onde a pressão se anula no equilíbrio, o módulo de compressibilidade controla a dinâmica de pequenas flutuações de densidade em torno do ponto de equilíbrio. Em conseqüência, do ponto de vista formal, o módulo de compressibilidade tem influência crucial na dinâmica de uma ampla classe de fenômenos que envolvem sistemas de muitos corpos fortemente interagentes: na estrutura de núcleos, em colisões a altas energias de íons pesados, na dinâmica de estrelas de nêutrons, pulsares, estrelas de quarks e estranhas e na física das explosões de supernova.

A questão fundamental para a falta de consenso quanto ao valor de  $K_\infty$ , reside na correspondente falta de unanimidade com respeito aos métodos para sua determinação. A principal fonte de determinação experimental desse parâmetro é a ressonância isoescalar de monopólo gigante (RIMG), que combina a seleção de uma série de interações efetivas, com a aproximação

de Hartree-Fock, levando ao cálculo das energias de RIMG para diversos núcleos finitos, e ao resultado  $K_\infty \sim 210 \pm 30 \text{ MeV}$ , correspondentemente aos núcleos Ca, Zr, e Pb.

Outra fonte de determinação desse parâmetro é uma formulação macroscópica que utiliza uma aproximação de escala, relacionando então o modelo de compressibilidade da matéria nuclear com as energias RIMG.

Utilizando-se a fórmula da gota líquida, é possível construir uma expressão para a compressibilidade da matéria nuclear, similar à fórmula semi-empírica de massa:

$$K_0(A, Z) = K_\infty + b_2 A^{-\frac{1}{3}} + b_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{4}{3}}} + b_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A^2}, \quad (1.2)$$

onde os parâmetros acima descrevem termos de volume, superfície, coulombiano e assimetria. Essa expansão apresenta como dificuldade problemas de convergência, uma vez que o número de dados é insuficiente para uma precisa determinação de  $K_\infty$  a partir da fórmula semi-empírica de compressibilidade da matéria nuclear.

A conclusão que se chega é que não existe uma formulação consistente para a determinação da compressibilidade nuclear. A proposta dessa dissertação é trazer alguma luz a essa discussão, buscando estudar, através de uma formulação relativística de muitos corpos, o papel da compressibilidade nuclear a altas densidades e a conexão entre os regimes que caracterizam núcleos finitos e matéria nuclear infinita assimétrica.

Em especial, derivamos uma expressão para a compressibilidade nuclear válida para todas as densidades nucleares que vão do regime de núcleos finitos, passando pela matéria nuclear simétrica e atingindo a região de domínio da matéria nuclear assimétrica:

$$K = 9\rho \frac{d^2 \epsilon}{d\rho^2}. \quad (1.3)$$

Nesse contexto, não há a necessidade de extrapolação dos dados e do comportamento do módulo de compressibilidade da matéria nuclear no regime de saturação para a região de densidades extremas como aquelas encontradas em estrelas de nêutrons.

Diferentemente das análises que consideram colisões de íons pesados, na astrofísica de estrelas de nêutrons, a relação central é a equação de estado (EOS); assim, calcular processos oriundos de colapsos de supernovas depende, fundamentalmente, do conhecimento das equações de estado do sistema em cada fase de evolução. Até então, mecanismos como rotação estelar e instabilidade não foram explorados o suficiente para abordar o problema de modo reverso e tentar vincular a equação de estado com características mensuráveis a partir de dados de supernovas [26]. Por enquanto, a abordagem mais promissora para estudar matéria nuclear em fenômenos da astrofísica que envolvem densidades elevadas é partir de modelos efetivos que, no caso presente,

são modelos baseados na hadrodinâmica quântica (QHD) e o seu modelo pioneiro é o modelo de Walecka<sup>[27, 28]</sup>.

O modelo de John Dirk Walecka é baseado na formulação de Hideki Yukawa e representa as características da interação nuclear, atração de longo alcance e repulsão de curto alcance, através dos campos mesônicos  $\sigma$  e  $\omega$ , e suas interações com os núcleons. Esse modelo tem uma compressibilidade na saturação  $K \simeq 500\text{MeV}$ , enquanto valores considerados plausíveis para a compressibilidade na saturação se encontram no intervalo de  $200 - 300\text{MeV}$ , o que é classificado como equação de estado suave. Uma possibilidade para corrigir essa propriedade é adicionar novos graus de liberdade bariônicos e mesônicos. Como se trata de um trabalho sobre teorias efetivas, as interações nucleares estão representadas através das interações dos bárions com os mésons, e suas intensidades estão "escondidas" nas constantes de acoplamento no modelo de Walecka e nas constantes de acoplamento efetivas (funções das constantes de acoplamento originais e do campo do méson  $\sigma$ ) no modelo chamado ajustável.

Na matéria nuclear comum,  $\rho = 0,14\text{fm}^{-3}$ , o limiar para a produção de híperons fica acima do nível de Fermi, mesmo levando em consideração a mudança na massa efetiva devido à influência do meio nuclear. Antes de criar híperons, a densidade de estados na aproximação de campo médio corresponde a uma distribuição homogênea e os níveis são ocupados até o nível de Fermi. Passando o limiar, os híperons serão criados. Dois efeitos determinam a abundância dos híperons produzidos: a densidade da matéria e a rigidez da equação de estado.

Quanto mais densa é a matéria, mais energia de Fermi existe para ultrapassar o limite da massa dos híperons, de forma que sua criação reduz a energia e a pressão do sistema, sendo um estado preferencial. Quanto maior é a pressão do sistema, ou seja, quanto mais rígida é a sua equação de estado, maior a probabilidade para que dois núcleons interajam, o que aumenta, também, a probabilidade de produzir híperons. Devido ao fato de que a produção de partículas é, em primeiro lugar, devido à interação forte e o decaimento devido à interação fraca, e as escalas de tempo de decaimento são tipicamente ordens de grandezas maiores, é garantida a predominância da produção de bárions contendo estranheza. Nesse trabalho, supomos que as estrelas são eletricamente neutras, que conservam número bariônico e que estão em equilíbrio químico. Dessa forma, podemos calcular, numericamente, as populações da estrela para observar como a quantidade de uma certa partícula varia com a densidade, sendo que densidades maiores correspondem a regiões mais internas da estrela, e como o aparecimento dos híperons se reflete no comportamento da compressibilidade.

No último capítulo, será estabelecida a conexão entre a descrição microscópica (hadrônica)

e a macroscópica, que permite validar modelos através da observação, ou seja, será analisado como a matéria estudada se comporta sob gravidade. Isso pode ser feito porque o tamanho e a massa de estrelas de nêutrons dependem crucialmente da equação do estado. É um tópico em discussão atual, se o núcleo de uma estrela superdensa contém matéria de quarks ao invés de matéria hadrônica<sup>[29, 30]</sup>. Esse grau de liberdade adicional dificulta a identificação inequívoca da equação de estado. O estudo dos efeitos dos graus de liberdade de quarks para a equação de estado e as suas conseqüências em possíveis processos é tema abordado em outra dissertação<sup>[31]</sup>.

A motivação dessa formulação tem como pressuposto construirmos futuramente um modelo no qual a energia do estado fundamental de um núcleo finito possa ser expressa em termos das propriedades de saturação da matéria nuclear, buscando-se assim construir um caminho consistente que conecte a descrição da matéria contida em núcleos finitos e nas estrelas de nêutrons.

## Capítulo 2

# Estrutura Interna e Evolução Estelar

No estudo das estrelas algumas perguntas se impõem. Entre essas, uma ressalta: por que grandezas tais como luminosidade, temperatura, raio e massa das estrelas apenas aparecem na natureza seguindo certas combinações, que constituem, na sua maioria, a seqüência principal no diagrama Hertzsprung-Russell? A resposta a essa indagação resulta de um estudo do equilíbrio de esferas de gás a altas temperaturas contrabalançadas pela força gravitacional. Devido ao fato de que, em temperaturas altas, o interior das estrelas é composto por núcleons e elétrons livres, a equação de estado é consideravelmente simples e, portanto, é possível concluir, de forma confiável, sobre as distribuições de temperatura, pressão e densidade nesse domínio. Para uma dada massa estelar e uma determinada distribuição de elementos químicos, pode-se determinar modelos estelares. Esses modelos fornecem, entre outras, relações entre as grandezas estelares luminosidade  $L$ , temperatura efetiva  $T_{ef}$ , raio  $R$  e massa  $M$ , que podem ser comparados com relações oriundas de observações.

A fonte principal de energia das estrelas é fornecida pelos processos de fusão, nos quais a contribuição dominante provém da transformação de hidrogênio em hélio. Esse reservatório de energia tem um tempo de vida associado, que é, qualitativamente, inversamente proporcional à massa das estrelas, pois, quanto maior sua massa, maior é a perda de energia via radiação. Esses processos nucleares modificam, ao longo da evolução estelar, a sua composição química, o que implica a mudança das grandezas que caracterizam o estado das estrelas. Uma seqüência de modelos estelares sob condições de equilíbrio permite construir a história de sua evolução.

## 2.1 Diagrama HR

Na evolução estelar, estuda-se como as propriedades observáveis de uma estrela variam com o tempo. No entanto, sabendo-se que o tempo de vida estelar é comparável ao tempo da evolução do universo ( $10^{15}$  anos) para estrelas com massas baixas, é preciso achar uma solução para a questão da observação dessas propriedades estelares que não seja observar a evolução de cada estrela individualmente. Sabe-se que estrelas com massas parecidas evoluem de forma semelhante e nascem continuamente. Então, a observação de estrelas com idades diferentes e massas semelhantes permite interpretar os resultados como se representassem a evolução de uma única estrela. Hipótese semelhante é utilizada na mecânica estatística, quando a evolução temporal de um ente de um *ensemble*, na média, equivale à média sobre o *ensemble* inteiro. Esse processo resulta no Diagrama Hertzsprung-Russell (figura 2.1).

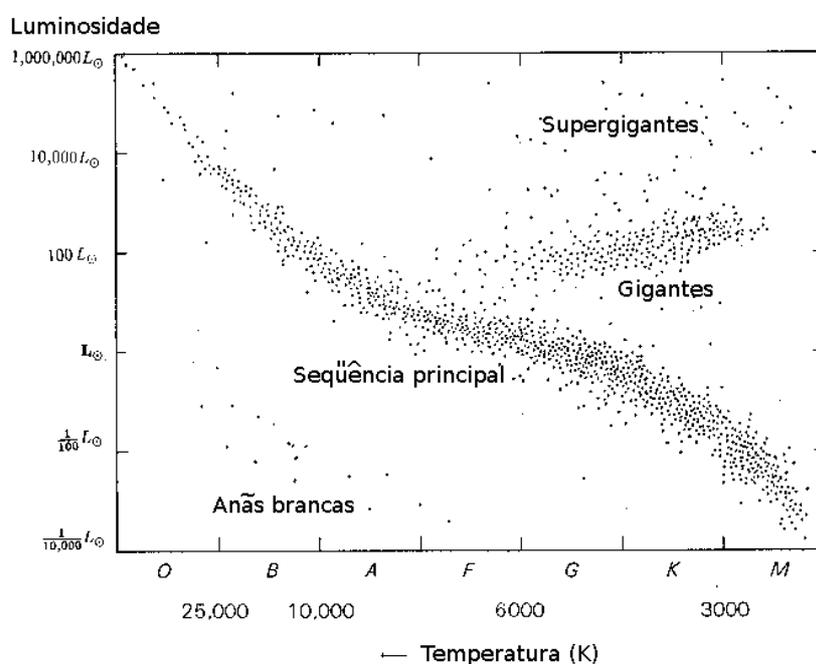


Figura 2.1: Diagrama HR: Luminosidade em múltiplos da luminosidade solar ( $L_{sol} = 3,9 \cdot 10^{26} W$ ) por temperatura. As letras na coordenada representam uma antiga classificação espectral.

Esse diagrama, que fornece um meio de classificação, representa a luminosidade (energia total emitida por segundo em todas as direções) em função da temperatura superficial das estrelas. O diagrama HR não é contínuo; nele pode-se localizar uma fina diagonal que corresponde à assim chamada seqüência principal e as regiões das gigantes, supergigantes e anãs brancas. Uma seqüência diagonal não indicada na figura e que se encontra abaixo da seqüência das anãs brancas, é a região onde se encontram as estrelas de nêutrons.

Na seção que segue, serão detalhados os passos da evolução de estrelas que não são encontradas em sistemas múltiplos; as características e propriedades apresentadas nos capítulos 4, 5 e 6 se referem a estrelas de nêutrons isoladas. Nesse caso, sua evolução só depende da massa inicial da estrela. Para estrelas que fazem parte de sistemas múltiplos, a evolução depende tanto da massa inicial de cada estrela quanto da separação entre as estrelas e só será brevemente comentada no decorrer do trabalho. Além disso, será dado enfoque ao comportamento de estrelas que terminarão a sua vida luminosa como estrelas de nêutrons.

## 2.2 Proto-estrelas

As estrelas são formadas a partir de nuvens interestelares compostas de gás (basicamente hidrogênio) e poeira (composta principalmente de grafite, silicatos e gelo de água) com temperatura média de 10 a 30K. Eventualmente, essas nuvens tornam-se gravitacionalmente instáveis, possivelmente pela passagem de uma onda de choque causada pela explosão de uma supernova nas proximidades, ou pela passagem de outra forma de matéria. Se, quando isso ocorrer, a nuvem tiver atingido um valor crítico correspondente à assim chamada massa de Jeans <sup>1</sup>, pode ocorrer seu colapso. Forma-se, então, uma região interior um pouco mais densa, o núcleo, que começa a acumular material da nuvem. Quando a nuvem colapsa devido à gravidade, a matéria ao redor do núcleo está em queda livre, e o material mais externo permanece afastado. O processo de colapso começa a espalhar-se pela nuvem, e o núcleo começa a acumular mais massa. Nesse ponto, o núcleo, mais quente do que o resto do gás, com aproximadamente 150.000K, chamado de proto-estrela, tem um raio de aproximadamente 50 vezes o raio do Sol. Esse processo depende, proporcional e exclusivamente, da temperatura inicial da nuvem e dura alguns anos. Como a estrela, nesse estágio, ainda é fria e muito luminosa (por ser consideravelmente grande), estados que caracterizam sua evolução estão situados na parte superior do diagrama HR, à direita.

Quando a nuvem colapsa, o ganho de energia é igual à energia potencial gravitacional da estrela, porém com sinal oposto. Considerando-se a nuvem inicial como tendo forma esférica e raio infinito, resulta:

$$E_G = -E_{pot} \approx G \frac{M^2}{R}, \quad (2.1)$$

onde  $E_G$  é a energia gravitacional,  $E_{pot}$  é a energia potencial gravitacional,  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa e  $R$  é o raio da estrela formada.

---

<sup>1</sup>A massa de Jeans é proporcional ao cubo do Comprimento de Jeans, acima do qual o comprimento de onda que perturba o sistema pode deixá-lo instável. Para uma nuvem com temperatura entre 10 – 100K a massa de Jeans fica entre 4.000 – 120.000 $M_{sol}$

Quando em um processo de colapso resulta uma estrela com raio suficientemente pequeno, o processo correspondente pode liberar quantidades de energia consideráveis, levando-se em conta apenas a contribuição gravitacional. O fato de que a energia gravitacional e a energia térmica têm a mesma ordem de grandeza pode ser entendido através do teorema Virial da mecânica estatística para sistemas em equilíbrio:  $2E_T = E_G$ . Conforme essa relação, conclui-se que, para uma estrela em "colapso lento" (para justificar um modelo de quase equilíbrio), apenas a metade de energia gravitacional se transforma em energia térmica e a metade da energia restante passa a ser irradiada. A escala de tempo em que esta energia pode ser irradiada é conhecida como escala de tempo de Helmholtz-Kelvin e é dada por:

$$\tau_{HK} = \frac{E_G}{2L} = \frac{E_T}{2L}, \quad (2.2)$$

onde  $E_G$  é a energia gravitacional,  $E_T$  é a energia térmica e  $L$  é a luminosidade.

A radiação resultante dá origem a uma onda de choque que se propaga, sendo desacelerada pela viscosidade do meio até a superfície da estrela, onde é resfriada rapidamente por irradiação (a temperatura na superfície é de aproximadamente  $3.500K$ ). Essa irradiação faz com que o acúmulo de matéria do núcleo diminua gradualmente, fazendo a estrela entrar em equilíbrio. Para estimar a energia térmica, a energia cinética de uma partícula ( $\frac{3}{2}kT$ ) é multiplicada pelo número de partículas contido na estrela  $M/m$  onde  $m$  é a massa média das partículas.

## 2.3 Estado de Equilíbrio

Durante esse estado estacionário extenso, uma estrela que não está em rotação e não tem influência de forças externas (pela presença de outros objetos estelares na vizinhança) pode ser considerada em equilíbrio hidrostático. Para provar essa asserção, considera-se a força gravitacional atuando em uma porção infinitesimal de uma casca esférica genérica de área de superfície  $r^2 \sin \phi d\phi d\theta$  e espessura  $dr$ , localizada a uma distância  $r$  do centro da estrela e que tem densidade  $\rho$ :

$$dF_G = \frac{GM(r)dM}{r^2}, \quad (2.3)$$

onde  $M(r)$  é a massa da esfera interior à casca. Essa massa pode ser imaginada como estando totalmente concentrada num ponto no centro da estrela e é dada por:

$$M(r) = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr; \quad (2.4)$$

$dM$  é a massa correspondente da porção infinitesimal, tal que:

$$dM = \rho dV = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (2.5)$$

onde  $\rho$  caracteriza a densidade da estrela. Substituindo  $dM$  na fórmula da força gravitacional:

$$dF_G = \frac{GM(r)\rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi}{r^2}; \quad (2.6)$$

então a força originada pela pressão do gás e da radiação exercida pelas camadas mais internas sobre essa porção infinitesimal é:

$$dF_P = dPdA = dPr^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.7)$$

sendo  $P$  a sua pressão interior. A força originada pela pressão do gás e da radiação exercida pelas camadas mais externas é nula devido à simetria. Igualando-se as duas forças expressas em (2.3) e (2.7) e acrescentando-se um sinal negativo devido aos seus sentidos opostos, resulta:

$$dF_P = -dF_G, \quad (2.8)$$

tal que:

$$dPr^2 \sin\theta d\theta d\phi = -\frac{GM(r)\rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi}{r^2}, \quad (2.9)$$

$$dP = -\frac{GM(r)\rho dr}{r^2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}; \quad (2.11)$$

obtem-se, assim, a equação de equilíbrio hidrostático estelar.

Devido às altas temperaturas no seu interior ( $T > 10^5 K$ ), o gás encontra-se completamente ionizado, ou seja, existe em forma de núcleons e elétrons livres. A relação entre  $P$ ,  $\rho$  e  $T$  para densidades até  $\rho \approx 10^4 \frac{g}{cm^{-3}}$  é dada através da equação de estado de um gás ideal:

$$P_{gs} = \frac{k}{m}\rho T, \quad (2.12)$$

onde  $m$ , como citado anteriormente, é a massa média das partículas e  $k$  é a constante dos gases.

Essas duas equações permitem estimar a temperatura interna de uma estrela. Ao substituir-se o quociente diferencial pela diferença da pressão na superfície e no centro dividida pelo raio  $\frac{P(R)-P(0)}{R}$  e, adicionalmente, levando-se em consideração que a densidade de massa cresce em direção ao centro, pode-se fazer as seguintes aproximações:  $M(r) = M$ ,  $r = \frac{R}{2}$ ,  $\rho \approx \rho_0/4$ ,  $P(R) = 0$ ,  $P(0) = P_0$ . Uma vez que a pressão na superfície da estrela é muito menor que no centro, segue que:

$$P_0 \approx GM \frac{\rho_0}{R}. \quad (2.13)$$

A pressão total, que é a soma da pressão de radiação e da pressão do gás, pode ser aproximada usando somente a pressão do gás. Nesse caso, a temperatura central é dada por:

$$T_0 = \frac{P_0 m}{k \rho_0} \approx G \frac{m}{k} \frac{M}{R}. \quad (2.14)$$

Para determinar as grandezas  $P(r)$ ,  $\rho(r)$  e  $M(r)$  com mais precisão, será usada, junto com as equações do gradiente de pressão e da equação da massa radial, uma equação que permite calcular a pressão de radiação. Essa equação é chamada de equação de transporte de radiação e pode ser deduzida da seguinte forma.

A energia cruzando a área  $dA$  é dada por  $I \cos \theta dA d\omega dt$ , onde  $I \cos \theta$  é a intensidade na direção  $\theta$ ,  $dt$  é a unidade de tempo e  $d\omega$  é a unidade de ângulo sólido. Sabendo-se que o número de fótons irradiados é dado pela energia total dividida pela energia de cada fóton  $h\nu$ , e o momento de cada fóton é dado por  $\frac{h\nu}{c}$ , a pressão transferida para a área normal à direção  $\cos \theta dA$ , é dada por (para  $dA$  e  $dt$  unitários):

$$P_{rad} = \frac{I \cos \theta dA d\omega dt}{h\nu} \frac{h\nu \cos \theta dA}{c} = \frac{1}{c} \int I(\theta) \cos^2 \theta d\omega. \quad (2.15)$$

Integrando-se sobre as frequências, o resultado pode ser escrito na forma:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa}{c} \Phi(r), \quad (2.16)$$

onde  $\kappa$  representa a opacidade, ou seja, o coeficiente de absorção como média sobre todas as frequências e  $\Phi(r)$  representa o fluxo total de radiação. Quando se utiliza o espectro de radiação de um corpo negro, a equação para a pressão de radiação resulta na lei de Stefan-Boltzmann:

$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3c} I = \frac{1}{3} a T^4, \quad (2.17)$$

onde a constante de Stefan-Boltzmann é definida como  $a = 4\sigma/c$ . O fluxo de energia no raio  $r$ ,  $\phi(r)$ , é útil para definir a luminosidade:

$$L(r) = 4\pi r^2 \phi(r). \quad (2.18)$$

Como o gradiente de temperatura é proporcional ao fluxo de radiação, segue:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa}{4caT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}. \quad (2.19)$$

Como nesse estágio, a estrela ganha energia através dos processos nucleares, a luminosidade pode ser escrita em função da taxa de produção de energia por massa  $\epsilon_N(\rho, T)$ , na forma:

$$L(r) = \int_0^r \epsilon_N \rho 4\pi r^2 dr. \quad (2.20)$$

Devido ao alto grau de ionização estelar, o coeficiente de opacidade é dominado pelo espalhamento de radiação com os elétrons livres (efeito Compton). A definição de  $\kappa$  exige uma média adequada sobre as frequências, onde o peso da intensidade de uma dada frequência pode ser aproximado através de uma distribuição de Planck,  $B(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ . Nas regiões das estrelas

onde o transporte de energia é dominado por processos de convecção, o gradiente de temperatura pode ser aproximado utilizando o gradiente adiabático de um gás ideal:

$$\frac{dT}{dr} = \left( \frac{dT}{dr} \right)_{ad} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}, \quad (2.21)$$

com  $P \sim \rho^\gamma$  e  $P \sim \rho T$  e  $\gamma = c_p/c_V = 5/3$  (para um gás monoatômico). O transporte de energia, por sua vez, via condução de calor, não contribui em estrelas.

Em vez de utilizar a forma integral das grandezas, pode-se utilizar a forma diferencial  $\frac{dM}{dr}$  e  $\frac{dL}{dr}$ . Nesse caso, resultam quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para as funções  $P(r)$ ,  $T(r)$ ,  $M(r)$  e  $L(r)$ . Então, dadas as distribuições dos elementos químicos, a densidade pode ser determinada através da sua relação com  $P$ , e respectivamente  $T$ ,  $\kappa$  e  $\epsilon_N$  são determinados em função de  $\rho$ ,  $P$  e  $T$ . Para resolver as equações diferenciais utilizam-se as seguintes condições de contorno:  $P(R) = 0$ ,  $T(R) \approx 0$ ,  $M(0) = 0$  e  $L(0) = 0$ . Para fixar o raio da estrela, é adicionada a condição  $M = M(R)$ . Quando são dadas a composição química e a massa total  $M$  da estrela, a estrutura e as grandezas características do estado são determinadas e o teorema de Vogt-Russell indica que existe apenas uma solução. No caso da homogeneidade química no interior da estrela, e para produção de energia através de fusão nuclear, esse teorema é válido. Para estrelas com distribuição de elementos equivalentes, as quantidades integrais que representam o seus estados apenas dependem da massa total da estrela. Nesse caso vale  $L = L(M)$  e  $T = T(M)$ , de tal forma que existe uma relação rígida entre  $L$  e  $T_{ef}$ , o que se observa de fato na seqüência principal no diagrama de Hertzsprung-Russell.

## 2.4 Seqüência Principal de Idade Zero

A estrela continua sua evolução, irradiando energia. Então, por causa do equilíbrio hidrostático, ela continua contraindo-se até que a temperatura do núcleo seja alta o suficiente (aproximadamente  $10.000.000K$ ) para que a energia cinética dos núcleons supere a repulsão coulombiana durante as colisões e, dessa forma, as reações termonucleares comecem. Nesse processo, núcleos mais leves transformam-se em núcleos mais massivos, liberando energia e aquecendo mais ainda a estrela. Corpos com massa inferior a 0,01 massa solar não têm temperatura suficiente para que ocorram quaisquer tipos de reações nucleares e são chamadas de planetas.

Para a fusão de dois núcleos com número de carga  $Z$  e  $Z'$ , sem o efeito de tunelamento, as partículas precisariam de uma energia cinética do movimento relativo da ordem da energia potencial,  $E_{pot} = \frac{ZZ'e^2}{R^2}$ , com o raio nuclear  $R \approx 10^{-15}m$ . Conseqüentemente, essa barreira coulombiana é menor para os elementos com menor carga elétrica. Para prótons, essa energia é

$E_{pot} \approx 1MeV$ . A energia cinética média de uma partícula num *ensemble* com temperatura  $T = 10^7 K$  é  $E_{cin} \approx \frac{3}{2}kT \approx 1keV$ . De acordo com a distribuição de Maxwell para os momenta lineares, a distribuição decai de forma exponencial para as energias mais elevadas. Assim, praticamente não há um número suficientemente grande de partículas com energias altas ( $\sim 1MeV$ ) na estrela para viabilizar a fusão. O efeito túnel, por outro lado, aumenta com energia crescente, de tal forma que, para valores da ordem de  $5keV$ , existe um máximo para a probabilidade de tunelamento, o chamado *pico de Gamov*.

Portanto, o processo que pode contribuir para a fusão a uma temperatura de  $T \approx 10^7 K$  é a transformação de  $H$  em  $He$ , a chamada queima de hidrogênio ou cadeia  $p - p$ . Esse processo é constituído pelas reações discutidas a seguir.

O primeiro tipo de reação só acontece acima de  $10^7 K$  e é a transformação de hidrogênio em hélio, em que dois prótons reagem formando um deutério mais um pósitron e um neutrino:

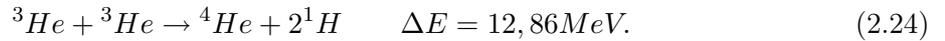


O pósitron vai, rapidamente, aniquilar-se com um elétron e formar raios gama, que serão absorvidos pela matéria no interior estelar, reemitidos e gradualmente transformados em fótons de baixa energia. Essa reação tem uma pequena probabilidade de acontecer; por exemplo, para as condições presentes no sol, o tempo de reação é da ordem de  $10^{10} \text{anos}$ , que também corresponde à escala de tempo total do ciclo.

No segundo tipo, o deutério reage com outro próton para formar  ${}^3He$  e raios gama:



Para que a terceira reação (que cria  ${}^4He$ ) ocorra, as duas primeiras devem ter ocorrido, pelo menos, duas vezes. A seguir, dois núcleos de  ${}^3He$  reagem para formar  ${}^4He$ , cedendo energia cinética extra para outros dois prótons:



Efetivamente, essas reações podem ser reescritas como:



O processo de fusão que transforma  $4H \rightarrow He$  fornece a contribuição principal para a produção de energia. A partir da diferença das unidades de massa atômica,  $4 \times 1,008 - 4,004 = 0,028$ , determina-se que 0,7% da massa do hidrogênio é transformada em energia. Portanto, a energia total fornecida pela cadeia próton-próton, através de reações nucleares, é:

$$E_N = 0,007Mc^2. \quad (2.26)$$

A cadeia próton-próton acontece no núcleo da estrela. Enquanto isso, matéria continua “caindo” para dentro da estrela, e matéria é expelida da estrela em forma de jatos.

## 2.5 Seqüência Principal

Como a transformação de hidrogênio em hélio é a reação nuclear mais eficiente, a seqüência principal dura a maior parte do tempo de vida da estrela ( $10^9$  anos para uma estrela de baixa massa). Durante esse período, a luminosidade da estrela não é determinada através da sua taxa de produção de energia, mas sim da efetividade do transporte de energia, ou seja, depende do gradiente de temperatura. Isso resulta da condição de equilíbrio hidrostático local. A estrela, nesse ponto, é estável, ou seja, se a energia produzida no núcleo não é suficiente para igualar a energia irradiada na superfície, a estrela perde energia e contrai-se. Quando isso ocorre, a temperatura no centro da estrela aumenta, e a taxa de geração de energia também, até que ela se iguale à energia irradiada. Similarmente, se a estrela produz energia demais, ela aumenta a pressão no núcleo, que se expande contra a gravidade e esfria um pouco até que a energia produzida equilibre a energia irradiada.

Por causa do processo lento da evolução estelar, ela pode ser reconstruída através do cálculo de modelos estáticos que modificam sucessivamente a sua composição, como por exemplo a reação:  $X_H(t + \delta t) = X_H(t) + \dot{X}_H \Delta t$  (onde  $X$  é a quantidade de um elemento e  $\dot{X}$  é taxa de variação no tempo desse elemento). A equação  $\dot{X}_H = -\dot{X}_{He}$  é o produto da transformação de hidrogênio em hélio. O análogo vale para as demais reações nucleares. Dessa forma, obtém-se, para uma dada massa inicial e composição química  $X_H(0), X_{He}(0), \dots$  uma seqüência de evolução para modelos estelares.

A permanência da estrela na seqüência principal termina quando, no núcleo da estrela, o hidrogênio é inteiramente transformado em hélio. Cálculos indicam que esse é o caso quando a estrela transformou cerca de 10% do seu hidrogênio em hélio. A fração de tempo  $\tau_{HR}$  que a estrela permanece na seqüência principal corresponde aproximadamente a:

$$\tau_{HR} = 0,1 \times \tau_N = 6 \times 10^9 \frac{M}{M_\odot} \frac{L_\odot}{L}, \quad (2.27)$$

onde  $\tau_N$  significa o tempo total de reações nucleares da estrela.

Utilizando-se a aproximação  $L \sim M^3$  segue  $\tau_{HR} \sim M^{-2}$ ; conseqüentemente, o tempo de permanência  $\tau_{HR}$  diminui com a massa crescente. O intervalo que caracteriza o tempo de vida das estrelas que constituem a seqüência principal se encontra entre  $2 \times 10^6$  anos para as mais massivas e até  $2 \times 10^{10}$  anos para as estrelas menores. Para o sol, essa aproximação resulta em

$\tau_{HR} = 6 \times 10^9 \text{anos}$  com  $4, 5 \times 10^9 \text{anos}$  já passados.

Estrelas com massa inicial menor do que 0,4 massas solares nunca terão temperatura suficiente para desencadear outro processo além da cadeia próton-próton. Elas terão uma vida longa e se transformarão em anãs marrons. Estrelas com massa inicial maior que 25 massas solares, depois da seqüência principal, viram estrelas de Wolf-Rayet. Estrelas Wolf-Rayet são corpos massivos e quentes com um envoltório de poeira e gás ejetados.

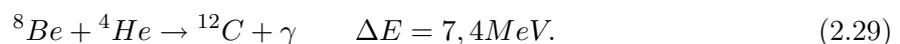
## 2.6 Gigante e Supergigante Vermelha

Quando o núcleo da estrela composto de hélio se contrai, as reações nucleares continuam fora dele. Essa energia extra faz a temperatura aumentar e iniciam-se, então, as reações de fusão fora do núcleo. A energia resultante dessas reações faz a estrela crescer, a temperatura diminuir e a luminosidade aumentar (figura 2.1). A estrela transformou-se numa gigante. A temperatura é alta o suficiente para ultrapassar a barreira elétrica repulsiva e fundir carbono. O equilíbrio do núcleo é agora mantido pela pressão de degenerescência dos elétrons e não mais pela pressão dos gases ideais. Essa degenerescência vem do princípio de exclusão de Pauli que proíbe dois elétrons de ocuparem o mesmo estado quântico. Então, como todos os estados de baixa energia estão ocupados, por causa da alta densidade, os estados de alta energia são também ocupados, e o núcleo da estrela resiste à compressão.

O hélio transforma-se, agora, em carbono a partir do processo triplo alfa:



Essa reação é endotérmica e o núcleo de  $Be$  decai imediatamente em duas partículas  $\alpha$ , mas a densidade de núcleos  $Be$  é suficiente para garantir a segunda reação:



Esse processo só ocorre acima de  $10^8\text{K}$  e libera apenas 20 por cento da energia da queima de hidrogênio.

Em uma estrela com massa entre 1,2 e 8 massas solares, quando o hélio no núcleo da estrela acaba, o ciclo CNO (carbono  $\rightarrow$  oxigênio  $\rightarrow$  nitrogênio) inicia-se, e o processo triplo alfa ainda é realizado fora do núcleo por algum tempo, mas nenhuma outra reação é possível. Está formada uma nebulosa, onde, durante a queima de hélio, pulsos térmicos causados pelo processo triplo alfa podem causar aumento na luminosidade e ejeções de massa (basicamente hidrogênio). Quando a nebulosa se dispersa, as reações fora do núcleo acabam, e a estrela se contrai. Ela é composta por

um núcleo de carbono e oxigênio junto com um gás degenerado de elétrons, envolvido por uma camada de hélio. O resfriamento da estrela é muito lento (alguns bilhões de anos) devido à sua pequena área de superfície (equivalente à da Terra). Ela é chamada de anã branca, tem massa aproximadamente igual à do sol e uma temperatura superficial de cerca de  $25.000K$ . Quando esse processo acaba, a anã branca vira uma anã preta.

Por causa da degenerescência no gás de elétrons, a pressão torna-se independente da temperatura, e, portanto, vale  $P = P_e \sim \rho^{\frac{5}{3}}$ . Com essa relação, a equação da massa integral e a do gradiente da pressão são suficientes para resolver o sistema de equações para  $M$ ,  $P$  e  $\rho$ . Entre outras, daqui resulta uma relação entre massa e raio que coincide com valores observados em anãs brancas. A pressão alta oriunda do gás degenerado contrabalança o colapso. Por causa da pequena superfície da estrela, a energia térmica das partículas que se encontram acima do nível de Fermi a estabiliza por cerca de  $10^{10}$  anos. As soluções para massas diferentes indicam que quando a massa é  $M \approx 1,4M_{\odot}$ , a densidade central diverge e o raio tende a zero. Esse limite é chamado de massa limite de Chandrasekhar; acima dele, a estrela sofre colapso gravitacional. Em estrelas com massas entre 8 e 25 massas solares, além da evolução ser mais rápida, são fundidos elementos mais pesados, dependendo de sua temperatura. Quando todo o hélio da gigante acaba, ela se transforma em supergigante.

Reações adicionais em estrelas com temperatura acima de  $10^8K$  :



Em estrelas com temperatura acima de  $5 \times 10^8K$ :



Em estrelas com temperatura maior que  $10^9K$ :



Finalmente, em estrelas com temperatura de  $3 \times 10^9K$ , existe queima de enxofre através de reações que produzem elementos com massa próxima a do ferro, o elemento com maior energia de ligação da tabela periódica. Depois disso, a fusão não é mais exotérmica, e sim endotérmica, e não é mais favorável ao sistema (figura 2.2). Isso ocorre porque a repulsão coulombiana entre os prótons começa a influenciar muito, e, como se sabe, não se pode ter um núcleo só de nêutrons devido ao princípio de exclusão de Pauli.

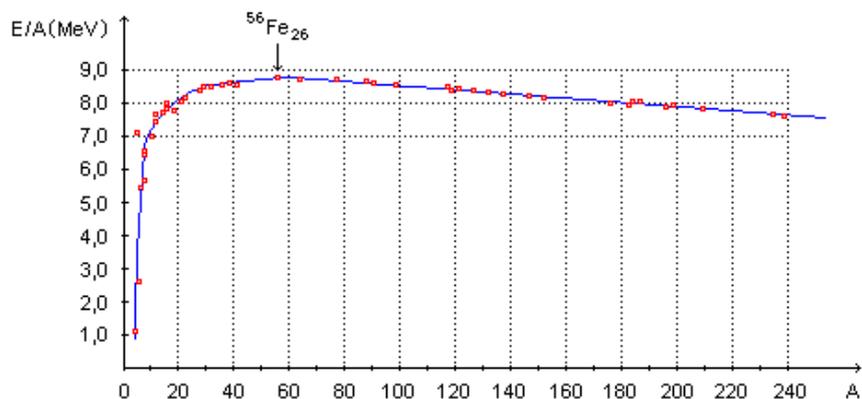


Figura 2.2: Energia de ligação por núcleon  $E/A$  por número  $A$  de núcleons.

Apesar de as reações que formam núcleos mais pesados não contribuírem com quantidades relevantes de energia para a estrela, elas são essenciais para a gênese de elementos pesados. Hoje, existe uma variedade de argumentos em favor da teoria de que, logo depois do *Big Bang*, os elementos presentes no universo eram apenas hidrogênio e hélio, enquanto a produção de elementos pesados (a partir do carbono) aconteceu e acontece principalmente no interior de estrelas. Nas explosões das estrelas em supernovas, esses núcleos entram no espaço interestelar. Gerações de estrelas mais jovens, que se formam a partir dessa matéria, contêm, por isso, uma fração cada vez maior de elementos pesados.

Os núcleos mais pesados que o ferro, os quais são relativamente raros, provavelmente se formam através da captura de nêutrons pelos núcleos do grupo do ferro. Durante a evolução equilibrada das estrelas massivas, a captura de nêutrons acontece em média a cada  $10^4$  anos. O tempo de decaimento  $\beta$  dos núcleos instáveis, em geral, é mais curto que essa escala de tempo, o que favorece a formação de núcleos estáveis além do ferro, tal como chumbo, até o limite da instabilidade. Devido à evolução lenta por captura de nêutrons, esse processo é chamado de *processo-s*. Condições opostas aparecem em casos de concentrações altas de nêutrons. Neles, a captura de nêutrons acontece mais freqüentemente que os decaimentos  $\beta$ , o que caracteriza o processo como rápido, *processo-r*. Assim são criados núcleos com número atômico alto, o que viabiliza a criação de núcleos mais pesados que o chumbo, especialmente os isótopos ricos em nêutrons. A condição de concentrações altas em nêutrons é válida durante a explosão de supernova. Uma questão recentemente levantada é se esse fenômeno permanece por um intervalo de tempo suficientemente longo. Quanto maior a massa inicial da estrela, maior a sua energia gravitacional e mais rapidamente acontecerão os processos de fusão.

## 2.7 Nova e Supernova

Quando esses processos começam a acontecer fora do núcleo da estrela, a gravidade a faz contrair-se de tal forma que os elétrons se tornam relativísticos. A densidade aumenta, e a energia cinética dos elétrons relativísticos também aumenta a ponto de ocorrer a sua captura por prótons para formar nêutrons (decaimento  $\beta$ ) e produzir assim um estado energeticamente mais favorável:



dessa forma, os núcleos dissolvem-se formando um "plasma nuclear", enquanto que a energia liberada acelera o processo.

A pressão dos elétrons do núcleo está abaixo do ponto em que ela suporta o crescimento da massa de ferro, produzido por fusão, contra a gravidade (limite de massa de Chandrasekhar<sup>[9, 10]</sup>). O núcleo, então, implode em menos de um segundo e torna-se extremamente quente, chegando a temperaturas de  $10^{11}K$  no fim do processo, produzindo neutrinos. A seção de choque de interação entre os neutrinos e o núcleo da estrela (a densidades de  $\simeq 10^{12}g/cm^3$ ) é grande o suficiente para aprisionar os neutrinos por colisões no núcleo: eles são "engolidos" junto com o material em colapso.

Enquanto a matéria do núcleo é comprimida a uma alta densidade, a energia térmica dos elétrons termalizados e neutrinos aumenta. Mas, como a pressão resiste à compressão, o material em colapso no núcleo volta em forma de ondas de choque que se propagam perdendo energia (por perda de neutrinos e fotodesintegração) e dispersa-se. Quando o material estelar fora do núcleo não é mais suportado por ele, uma onda de descompressão propaga-se para fora da supergigante na velocidade do som. O material contido na onda demora, em comparação com a velocidade da onda de choque, para chegar à superfície da estrela e, ao longo do caminho, vai acumulando mais material, inicialmente em queda livre, e aquecendo. Forma-se, então, entre essa região e o núcleo, um espaço rarefeito que se expande devido ao escape de neutrinos vindos do interior quente. Então, através de complexos processos de convecção e aquecimento dos neutrinos, uma pequena fração da energia de ligação gravitacional do núcleo é acrescentada à onda e fornece a energia cinética necessária para a ejeção de toda a estrela com exceção do núcleo<sup>[32]</sup>. Essa ejeção caracteriza a explosão da supernova.

Além do cenário descrito acima, existe outro mecanismo de acúmulo de massa possível. Para estrelas que fazem parte de sistemas múltiplos, uma anã branca pode acumular massa de sua companheira, menos massiva, e começar a queimar o hidrogênio acumulado pelo processo CNO. Mas, como esse processo acontece em ocasiões instáveis, a estrela acaba explodindo como uma

*nova*. Se o acúmulo de massa ultrapassar um certo limite, a explosão como nova não ocorre, a estrela começa a fundir carbono, e, devido à alta degenerescência dos elétrons, a queima de carbono aumenta a tal ponto que a fusão de todos os elementos até o ferro acontece quase instantaneamente. Nesse ponto, a energia liberada pelas reações nucleares é maior do que a energia gravitacional, e a estrela é totalmente dispersa no espaço.

## 2.8 Estrela de Nêutrons

A energia de ligação liberada na formação de uma estrela de nêutrons equivale a  $\Delta E_G \approx G \frac{M^2}{R} \approx 10^{46} J$ , que é maior que o repositório inteiro de energia nuclear do sol. O que restou da explosão é chamado de estrela protoneutrônica. Em alguns segundos, ela perde seus neutrinos aprisionados, que levam consigo grande parte dessa energia [33]. Nesse ponto, a estrela já chegou à sua composição de equilíbrio, contendo predominantemente nêutrons. A ausência, em termos globais, da repulsão coulombiana tem como efeito uma diminuição considerável no volume do núcleo da estrela. A configuração resultante é comparável à das anãs brancas, exceto pelo fato de que o "gás de fermi" é constituído por nêutrons ao invés de elétrons. A estrela de nêutrons tem um raio menor do que o das anãs brancas por um fator  $m_e/m_n \approx 5 \times 10^{-4}$ , o que dá, para uma massa solar  $M = M_\odot$ , um raio  $R \approx 10 km$  e uma densidade  $\rho \approx 10^{15} \frac{g}{cm^3}$ . A estrela esfria por um longo processo de difusão de fótons na superfície, que dura milhões de anos. A energia gravitacional de uma estrela de nêutrons pode ser da ordem de dez vezes sua energia de ligação nuclear. Isso ocorre porque a força nuclear é de curto alcance (da ordem de  $10^{-14} m$ ), ou seja, ela é intensa a pequenas distâncias, mas é praticamente nula a grandes distâncias, o que faz com que uma partícula nuclear interaja predominantemente somente com as partículas à sua volta. Já a interação gravitacional, de longo alcance, faz com que uma partícula sofra a ação de praticamente de "todas" as outras partículas da estrela.

Para estrelas de nêutrons também existe um limite superior de massa, chamado limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff que, dependendo do modelo, se encontra entre aproximadamente 1,5 e 3 massas solares. Ultrapassando esse limite, a estrela não se encontra mais em um estado estável e colapsa.

Estrelas com massas maiores do que 25 massas solares que, depois da seqüência principal, viraram estrelas de Wolf-Rayet, em vez de explodirem como supernovas, continuam a colapsar gravitacionalmente. Está formado, então, um buraco negro, com seu horizonte de eventos, do qual nem sequer a luz pode escapar. Buracos negros são, matematicamente, considerados singularidades nas equações de Einstein, correspondendo, no caso de simetria esférica e estática à

aproximação de Schwarzschild<sup>[34]</sup>, cujo raio, no sistema de unidades em que  $G = c = 1$ , é dado por:

$$R = 2M. \tag{2.35}$$

Buracos negros também são formados quando uma estrela de nêutrons está em um sistema binário com um parceiro menos denso do qual ela começa a acumular massa. Esse acúmulo de massa aquece a superfície da estrela. Quando essa quantidade é tal que a pressão de radiação da superfície contrabalança a força gravitacional do material no sentido do centro, é alcançado o chamado limite de Eddington<sup>[35]</sup> e determina se a estrela vai se tornar um buraco negro ou não. Quando um dos objetos estelares de um sistema binário se transformou em um buraco negro, o segundo objeto (visível) permite, através da observação de seu movimento relativo circular, provar a existência do buraco negro. Nesse caso, o objeto visível deve ter uma massa maior que  $3M_{sol}$  para que o sistema seja estável.

Como motivação do presente trabalho, pode-se dizer que, a partir da formação de uma estrela protoneutrônica, os modelos como os apresentados nessa dissertação tornam-se relevantes para descrever propriedades que determinam suas características, sua evolução e sua transformação em uma estrela de nêutrons. Evidentemente, torna-se necessário, nesse caso, considerar explicitamente a presença da temperatura, pois em estrelas protoneutrônicas  $T \sim 10^{12}K$ .

## Capítulo 3

# Uma Breve Descrição de Estrelas de Nêutrons

Neste capítulo será feita uma análise das propriedades das estrelas de nêutrons. Também será feito um breve comentário sobre sua constituição e sobre a maneira mais adequada de descrevê-las, usando a relatividade geral.

### 3.1 Composição

Apesar de seu nome, as estrelas de nêutrons são compostas por uma gama extremamente rica de partículas. Elas também contêm prótons e, como se verá mais adiante, dependendo da região de energia da estrela em questão, é plausível encontrar, no seu interior, o octeto bariônico completo, bem como léptons (para estabelecer neutralidade de carga), mésons (mediadores de interação da teoria efetiva em questão) e quanta de *gauge* das interações fraca, forte e eletromagnética.

### 3.2 Equação de Estado

O intervalo de densidades relevantes para estrelas de nêutrons é muito grande. Na borda da estrela, onde a pressão é nula, a densidade é da ordem da densidade do ferro, enquanto, no centro, a densidade é da ordem de  $10^{15}g/cm^3$ .

Podem ser definidas 4 regiões de densidade em uma estrela de nêutrons e para cada uma delas se determina uma equação de estado apropriada. Para densidades entre  $2 \times 10^3g/cm^3$  e  $1 \times 10^{11}g/cm^3$ , que correspondem à matéria cristalina, aos metais leves e ao gás de elétrons, é usada, em geral, a equação de estado de Harrison e Wheeler<sup>[36]</sup>. Para densidades entre  $1 \times$

$10^{11}g/cm^3$  e  $2 \times 10^{13}g/cm^3$ , que correspondem ainda à matéria cristalina, aos metais pesados e ao gás de elétrons relativísticos, é muito usada a equação de estado de Negele e Vautherin<sup>[37]</sup>. Para densidades entre  $2 \times 10^{13}g/cm^3$  e  $5 \times 10^{15}g/cm^3$ , que correspondem à matéria de núcleons, híperons e léptons relativísticos, ou seja, a matéria constituinte de uma estrela de nêutrons, será deduzida uma equação de estado adequada nos capítulos 4 e 5. Como a descrição de matéria nuclear a altas densidades é o interesse principal desse trabalho, não serão levadas em conta as equações de estado para a matéria com densidades menores.

### 3.3 Aspectos da Relatividade Geral

O princípio fundamental da relatividade geral diz que uma lei permanece válida quando é invariante frente a transformações de coordenadas em um sistema de referência. Einstein, ao elaborar a teoria da relatividade geral, combinou componentes espaciais e temporais em quadri-vetores, como, por exemplo, na composição do elemento diferencial  $dx^\mu = (cdt, dx_1, dx_2, dx_3)^T = (cdt, dx, dy, dz)^T$ , onde  $T$  é o operador de transposição. Esse diferencial, em relação a um novo referencial, transforma-se de acordo com

$$dx^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (3.1)$$

onde índices que aparecem duplicados indicam uma soma, conhecida também como convenção de Einstein. Na relatividade geral, as componentes novas de um quadri-vetor dependem das componentes do sistema de coordenadas espaciais e temporais originais. Essa propriedade já está presente na relatividade restrita, ao contrário da física clássica, em que espaço e tempo são tratados como grandezas independentes. A equação anterior, após ser derivada em relação ao tempo próprio  $\tau$ , fornece uma grandeza relevante para a hidrodinâmica relativística, a quadri-velocidade  $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  (onde  $d\tau$  é o diferencial de tempo no sistema referencial onde vale  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)^T \equiv 0$  para as diferenças espaciais), que será utilizada na seção seguinte. A relatividade geral, além de possibilitar velocidades relativas entre sistemas referenciais, também permite acelerações relativas. A quadri-aceleração é a derivada da quadri-velocidade em relação ao tempo próprio

$$A^{\mu'} = \frac{dU^{\mu'}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\nu \partial \tau} U^\nu, \quad (3.2)$$

ou seja, o segundo termo do lado direito da equação (3.2) é igual a zero quando os coeficientes da transformação são constantes, como, por exemplo, na transformação de Lorentz da relatividade restrita. Então, entende-se que a contribuição da segunda derivada na equação (3.2) é um efeito

não inercial, ou seja, um efeito que aparece caso dois referencias se encontram em aceleração relativa.

De fato, é mais conveniente formular o princípio de equivalência de forma invertida: efeitos gravitacionais são idênticos, em sua natureza, aos que surgem na presença de aceleração. Uma das conseqüências desse raciocínio é que não existe diferença entre massa inercial e massa gravitacional. Por inteireza, serão dadas, explicitamente, as duas formas do princípio de equivalência<sup>[38]</sup>.

**Na relatividade geral é válido o denominado princípio fraco de equivalência:** Essa forma do princípio refere-se apenas ao espaço-tempo. Em qualquer campo gravitacional e independente da sua intensidade, um observador em queda livre não observa efeitos gravitacionais quando forças, como as responsáveis pelas marés, devido à não-uniformidade no campo gravitacional, são desprezíveis. Nesse caso, o espaço-tempo é o da relatividade restrita, ou seja, o espaço-tempo de Minkowski. Note-se que, para a discussão dos graus de liberdade microscópicos, se aplica a forma fraca do princípio de equivalência. Consequentemente, basta abordar a física microscópica, utilizando o formalismo apenas compatível com a relatividade restrita, porque, na abordagem presente de campo médio, a teoria apresenta-se como uma teoria de partículas livres, ou seja, de um gás ou fluido ideal, e, portanto, apenas a determinação das grandezas globais precisa de um tratamento em bom acordo com a relatividade geral.

**Na relatividade geral também é válido o princípio forte de equivalência:** Essa forma restringe a forma anterior levando em conta que todas as leis da física são representadas da mesma forma num referencial em queda livre (referencial inercial), como na ausência de gravitação. Essa forma do princípio de equivalência é crucial, no sentido que garante a dedução das leis na sua validade geral a partir do conhecimento do comportamento de um sistema físico em relação a um referencial no qual vale a relatividade restrita. Isso corresponde ao procedimento usualmente adotado na descrição da matéria nuclear no contexto da relatividade restrita e as suas conseqüências para objetos estelares, neste caso estrelas de nêutrons.

Então, para um sistema referencial sem efeitos aparentes de gravitação (ou seja, aceleração), vale:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (3.3)$$

Utilizando-se as transformações para grandezas infinitesimais (3.1), resulta a equação dinâmica da relatividade geral conhecida também como geodésica:

$$\frac{d^2 x^{\mu'}}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha'}}{d\tau} \frac{dx^{\beta'}}{d\tau} = 0, \quad (3.4)$$

com a conexão afim,  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ , que descreve a contribuição da curvatura como o gradiente das coordenadas localmente planas ( $x^{\mu}$ ) em relação às curvas ( $x^{\mu'}$ ),

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}. \quad (3.5)$$

A derivação das transformações para quadri-vetores pode ser estendida para escalares e tensores. O caso dos escalares é trivial em decorrência do fato que o produto escalar de quadri-vetores  $c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g'_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$  é invariante de Lorentz. A generalização de vetores para tensores muda de um referencial para outro, compensando, para cada componente, a dependência nas coordenadas antigas. O tensor métrico utilizado para determinar as grandezas invariantes obedece a lei de transformação:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

o que garante a invariância de grandezas escalares que surgem por contração dos índices (soma sobre respectivas componentes com ocorrência de índices duplos). A partir dessa equação, resulta a relação entre a conexão afim e o tensor métrico

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} g_{\beta\mu}. \quad (3.7)$$

Nessa dissertação, o modelo hadrônico será elaborado utilizando-se a métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

que após a transformação para um referencial com coordenadas curvas, no caso presente, respeitando simetria esférica e estacionaridade (como será discutido mais tarde), resulta no modelo de Schwarzschild para uma estrela de nêutrons.

Nos modelos introduzidos nos capítulos 4 e 5, aparecem os quadri-operadores de derivadas que permitem construir grandezas como densidades de correntes, de interesse na discussão da hadrodinâmica relativística, e leis de simetria como a conservação do número bariônico (o análogo nuclear à conservação de carga da eletrodinâmica). Conforme a relatividade, as quadri-derivadas são:

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

e

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial ct} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\partial_x \\ -\partial_y \\ -\partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

A grandeza quadri-densidade de corrente pode ser escrita como  $j^\mu = (\rho c, \vec{j})^T$ , onde  $\rho$  é a densidade usual de partículas e  $\vec{j}$  é a densidade de corrente com as suas três componentes espaciais. A equação de continuidade, que pode ser interpretada também como uma lei de conservação, reduz-se, na sua forma invariante relativística, à quadri-divergência da quadri-densidade de corrente  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Uma lei de conservação presente em teorias de todas as escalas, macroscópicas e microscópicas, é a lei de conservação de energia e momentum linear. No contexto do modelo microscópico hadrônico, definido através de uma densidade lagrangeana, a grandeza correspondente é o chamado tensor de (densidade) energia-momentum, que contém nos termos diagonais, em particular no termo com índices 00, a densidade de energia  $e$ , nos demais termos, a pressão, analogamente às componentes do vetor de Poynting do eletromagnetismo.

É essa grandeza que permite estabelecer uma relação entre matéria e campo gravitacional. O limite mais simples é o de um campo estacionário (independente do tempo) e fraco. Em aproximação de primeira ordem,  $\tau$  pode ser substituído por  $t$  e a parte espacial da equação dinâmica se reduz a:

$$\ddot{x}^i + c^2 \Gamma_{00}^i = 0, \quad (3.11)$$

onde  $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{\nu i} (0 + 0 - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu})$ . A equação de movimento se reduz, então, à segunda lei de Newton  $\ddot{\vec{x}} = -\frac{c^2}{2} \vec{\nabla} g_{00}$  com um gradiente de um potencial no lado direito da equação. O fato de que a componente  $g_{00}$  aparece no lado direito indica que a grandeza deve ser um tensor de ordem 2. Conservação de energia-momentum é expressa na forma  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$  (prova no capítulo 4).

O tensor energia-momentum pode ser determinado para um fluido perfeito. Devido à ausência de interações entre elementos do fluido, não existem componentes de cisalhamento, ou seja, todos os elementos da matriz com ambos os coeficientes espaciais não diagonais são nulos. No referencial de repouso relativo ao fluido, o tensor energia-momentum se reduz a uma forma diagonal:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

onde a pressão é uma manifestação do fluxo de momentum nas respectivas direções. O fluido em

movimento é, então, associado ao tensor de energia-momentum para um fluido perfeito após a transformação de Lorentz,

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\epsilon}{c} + p\right)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

com  $U^\mu U_\mu = 1$ . Na presente discussão, como a abordagem de campos médios torna a teoria pseudo-livre, o tensor de energia-momentum relevante é exatamente o de um fluido perfeito.

### 3.4 Tópicos da Relatividade Geral na Astrofísica

A partir da determinação do tensor energia-momentum, pode-se obter as equações dinâmicas levando em consideração os campos gravitacionais; essas equações dinâmicas contêm termos envolvendo segundas derivadas do tensor métrico  $\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial \beta}$ . A única possibilidade de estabelecer-se um tensor linear nas segundas derivadas da métrica tem a forma [34]:

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \frac{d\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{dx^\beta} - \frac{d\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{dx^\gamma} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma\alpha} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha}, \quad (3.14)$$

e é chamada de tensor de Riemann. A existência de um tensor de Riemann, cujos termos envolvendo as segundas derivadas não desaparecem, implica na curvatura do espaço-tempo. O tensor de Riemann, por sua vez, tem ordem quatro. A redução para uma grandeza de ordem 2 é dada pela contração do tensor de Riemann, que resulta no tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}$  e adicionalmente no escalar de curvatura  $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ . A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, pode-se construir uma equação cuja quadri-divergência é nula e tem uma estrutura semelhante à do tensor de energia-momentum

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \quad (3.15)$$

Conservação de energia-momentum implica sua quadri-divergência nula, o que indica a proporcionalidade entre o tensor de Einstein e o de energia-momentum e define as equações de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

As soluções dessas equações determinam, para um dado tensor energia-momentum, o tensor métrico associado que, no limite de campos fracos e estacionários, se reduz à expressão clássica de Newton, como indicado previamente. O significado dos termos adicionais pode ser entendido, contraindo-se as equações de Einstein, o que resulta em uma relação entre o invariante do tensor energia-momentum  $T$  e a curvatura escalar:

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (3.17)$$

Isso permite escrever o tensor de Ricci em termos do escalar  $T$  e do tensor energia-momentum:

$$R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T). \quad (3.18)$$

A expressão de  $T$  para um fluido perfeito é  $T = \frac{\epsilon}{c} - 3p$ , o que resulta em uma equação de Poisson modificada para o potencial de gravitação

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G}{c^4} \left( \frac{\epsilon}{c} + 3p \right). \quad (3.19)$$

Então, para um gás de partículas que se movimentam com a mesma velocidade  $u$ , a densidade efetiva de energia é  $\epsilon(1 + \frac{u^2}{c^2})$ , o que mostra que um fluido dominado por radiação gera uma atração gravitacional duas vezes a do limite newtoniano.

O tensor energia-momentum para um fluido perfeito é útil para fazer contato com as equações da termodinâmica estatística, que serão utilizadas para caracterizar propriedades da matéria nuclear e da propagação do som, que é correlacionada com a compressibilidade da matéria nuclear (tema principal dessa dissertação). Utilizando-se a forma específica da quadri-velocidade reduzida,  $U^\mu = \gamma(1, \vec{\beta})^T$ , onde  $\vec{\beta}$  são as velocidades das partículas divididas pela velocidade da luz, e inserindo essa forma na equação de conservação, ou seja, a quadri-convergência do tensor energia-momentum,  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , pode-se manipular o resultado, utilizando a chamada derivada convectiva  $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial ct} + \vec{\beta} \vec{\nabla} = \gamma^{-1} U^\mu \partial_\mu$ .

As equações que resultam da conservação de energia-momentum têm uma interpretação. Para os componentes espaciais  $\mu = 1, 2, 3$ ,  $\partial_\nu T^{\mu\nu}$  fornece a generalização relativística da equação de Euler para conservação de momentum linear na mecânica dos fluidos:

$$\frac{d}{dt} \vec{\beta} = -\frac{1}{\gamma^2(\epsilon/c + p)} (\vec{\nabla} p + \dot{p} \vec{\beta}), \quad (3.20)$$

onde  $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial ct}$ . A componente temporal resulta na expressão generalizada da conservação de energia:

$$\frac{d}{dct} \left( \gamma^2 \left( \frac{\epsilon}{c} + p \right) \right) = \dot{p} - \gamma^2 (\epsilon/c + p) \vec{\nabla} \vec{\beta}. \quad (3.21)$$

O significado dessa equação torna-se mais transparente quando combinado com a lei de conservação de número de partículas:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu (n U^\mu) = \partial_\mu (\gamma n (1, \vec{\beta})^T). \quad (3.22)$$

A lei de conservação de energia pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{dct} \left( \frac{\gamma(\epsilon/c + p)}{n} \right) = \frac{\dot{p}}{\gamma n}, \quad (3.23)$$

para um fluxo estacionário.

No limite não-relativístico, para momenta e temperaturas moderadas ( $p \ll \epsilon/c$ ,  $T \sim 300K$  e  $\gamma \rightarrow 0$ ), as equações para conservação de energia e de momentum reduzem-se nos seus lados direitos a:

$$-\frac{\vec{\nabla}p + \dot{p}\vec{\beta}}{\epsilon}, \quad (3.24)$$

$$\text{e } \dot{p} - \epsilon\vec{\nabla}\vec{\beta}. \quad (3.25)$$

Substituindo  $\dot{p}$  nos dois casos e seguindo argumentos motivados pela análise dimensional, resulta então:

$$|\vec{\nabla}p| \sim \frac{p}{L}, \quad (3.26)$$

$$\text{e } |\dot{p}| \sim \frac{p}{\tau}, \quad (3.27)$$

onde  $L$  e  $\tau$  são escalas características de comprimento e de tempo para variações no fluido. O quociente  $\frac{L}{\tau}$  caracteriza a velocidade interna  $V = \frac{L}{\tau}$ . Então, a ordem de grandeza dos dois termos é:

$$\frac{|\dot{p}\vec{\beta}|}{|\vec{\nabla}p|} \sim \frac{v}{V}. \quad (3.28)$$

O termo  $|\dot{p}|$  é desprezível quando o fluido é completamente não-relativístico. As equações para o momentum linear e a energia são então simplificadas para:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad (3.29)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\vec{\nabla}\vec{v}, \quad (3.30)$$

o que representa, respectivamente, conservação de momentum e de massa. A densidade  $\rho$  é definida em termos da densidade de repouso  $\rho_0$  e da energia interna por massa  $\epsilon_m$ :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\epsilon_m}{c^2}\right), \quad (3.31)$$

onde a densidade de repouso é  $\rho_0 = nm$ . O limite não relativístico de

$$\frac{\gamma(\epsilon/c + P)}{\rho_0} \quad (3.32)$$

tende a

$$1 + \frac{\epsilon_m}{c^2} + \frac{P}{\rho_0 c^2} + \frac{1}{2}\beta^2, \quad (3.33)$$

e, portanto, a forma não relativística da equação de conservação é:

$$\frac{d}{dt} \left( \epsilon_m + \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2}v^2 \right) = \frac{\dot{P}}{\rho_0}, \quad (3.34)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n\epsilon_m + \frac{n}{2}v^2 \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left( n\vec{v} \left( \epsilon_m + \frac{v^2}{2} \right) + P\vec{v} \right); \quad (3.35)$$

essa equação é interpretada como a variação da densidade de energia cinética que responde a uma densidade de corrente de energia cinética mais uma taxa de trabalho.

Propriedades de fluidos são descritas, além das equações citadas, pela equação de estado. Quando a densidade de massa de repouso é  $\rho_0 = \sum_i m_i n_i$ , onde a soma percorre todas os tipos diferentes de partículas:

$$\frac{P}{c^2} = (\Gamma - 1)(\rho - \rho_0). \quad (3.36)$$

Para um gás frio,  $\Gamma$  é determinado pela razão dos calores específicos ( $= 5/3$ ) para um gás monoatômico. Para um fluido ultrarelativístico dominado pela radiação com  $P = \frac{\rho c^2}{3}$ , então  $\Gamma = \frac{4}{3}$ . Entende-se o papel de  $\Gamma$ , considerando uma mudança adiabática, em que a deformação de um elemento de fluido é dada por  $\Delta E = -p\Delta V$ . A energia pode ser escrita então como  $E = \rho c^2 V$ , e, utilizando  $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0}$ , resulta a generalização da relação adiabática:

$$(\rho - \rho_0) \propto P \propto \rho_0^\Gamma. \quad (3.37)$$

Inserindo essa relação na versão relativística de Bernoulli

$$\frac{\gamma \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right)}{\rho_0} = cte. \quad , \quad (3.38)$$

resulta a relação

$$\gamma \propto P^{-\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \quad (3.39)$$

para um fluxo estacionário de um fluido dominado por radiação. Então, uma queda de pressão tem como consequência que um plasma relativístico converte energia interna em movimento relativístico.

A linearização das equações para os fluidos permite derivar a velocidade do som nesse meio. Considerando-se perturbações infinitesimais de cada grandeza  $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho, \dots$ , subtraindo a grandeza sem a perturbação, levando em consideração apenas a primeira ordem e supondo que o estado original tem densidade constante, pressão e velocidade nulas, as equações assumem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\vec{v} = -\frac{1}{\rho + \frac{P}{c^2}} \vec{\nabla} \delta P \quad (3.40)$$

$$\text{e } \frac{\partial}{\partial t} \delta\rho = -\left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{V}. \quad (3.41)$$

A velocidade perturbada pode ser eliminada, inserindo-se a segunda equação na divergência da primeira que resulta em uma equação de onda

$$\nabla^2(\delta\rho) - \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right) \frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} = 0; \quad (3.42)$$

então a velocidade de som é determinada por  $c_S^2 = \frac{\partial P}{\partial\rho}$ , que é o mesmo resultado de uma abordagem não relativística. Conseqüentemente, a velocidade de som num fluido dominado por radiação tem uma velocidade de som  $c_S = \frac{c}{\sqrt{3}}$ .

### 3.5 Aplicação da Relatividade Geral em Estrelas de Nêutrons

Estrelas de nêutrons são as menores e mais densas estrelas conhecidas. Elas têm, tipicamente, uma massa de 1,4 massas solares e um raio de  $\sim 10km$ , o que resulta numa densidade de aproximadamente  $10^{16}g/cm^3$ . Numa concentração tão grande de massa, a curvatura do espaço tempo tem de ser levada em conta, ou seja, propriedades macroscópicas da estrela devem ser contempladas pela teoria da relatividade geral.

No espaço vazio em torno de uma estrela estática e esfericamente simétrica, a solução para as equações de Einstein resulta na métrica de Schwarzschild<sup>[34]</sup> (considerando-se o sistema relativístico de unidades em que  $G = c = 1$ ):

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.43)$$

Para o interior da estrela, tanto o tensor de Ricci como a curvatura escalar dependem da matéria incluída numa esfera com raio  $r$ , conforme a lei de Gauss . Tomando-se as equações de campo de Einstein, com constante cosmológica nula, compatibilizadas com o limite newtoniano da teoria e considerando-se a solução de Schwarzschild citada acima, derivam-se as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{e(r)M(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{e(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(R)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} \quad (3.44)$$

$$\text{e } M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 e(r') dr', \quad (3.45)$$

que também pode ser escrita, em forma diferencial, como

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 e(r). \quad (3.46)$$

Nas equações acima,  $P(r)$  é a pressão no raio  $r$ ,  $e(r)$  é a densidade de energia incluída na esfera de raio  $r$  e  $M(r)$  é a massa contida no raio  $r$ . As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

tornam-se singulares para  $r = 2M$ . Assim fica definida uma massa máxima para uma estrela de nêutrons, acima da qual ela se transforma em um buraco negro. No capítulo 6, será determinada a massa máxima de uma estrela de nêutrons para vários modelos.

As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff descrevem o balanço da pressão de degenerescência dos nêutrons e da gravidade de estrelas de nêutrons não rotantes à temperatura zero. Ao desprezar os três fatores da direita na equação (3.44) (correções relativísticas), recupera-se a equação de equilíbrio hidrostático clássica (2.11).

### 3.6 Estabilidade

As soluções das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff correspondem a configurações estelares que estão em equilíbrio hidrostático, ou seja, correspondem a um mínimo ou a um máximo na energia. Mas equilíbrio hidrostático não assegura estabilidade estelar. Então, precisa-se de um critério para assegurar que existem regiões de estabilidade. Pelo princípio de Le Châtelier, pode-se afirmar que, ao longo do contínuo de configurações de equilíbrio correspondentes à equação de estado que satisfazem à condição de estabilidade microscópica da matéria, vale a relação:

$$\frac{dp}{d\epsilon} \geq 0. \quad (3.47)$$

Existem, então, duas configurações estáveis frente a modos radiais de oscilação: uma para anãs brancas e uma para estrelas de nêutrons (figura 3.1). Entre elas existe uma região instável. Estrelas nessa configuração, quando sujeitas a modos de vibração, ou fora dessa região, desmancham-se ou colapsam em estrelas de nêutrons. Para densidades menores do que a das anãs brancas, existe uma grande região de instabilidade e, mais além, a região estável das anãs marrons e dos planetas. Para densidades maiores que a das estrelas de nêutrons, existe uma grande região de instabilidade e, mais além, a região estável dos buracos negros.

Uma condição necessária, mas não suficiente, para a estabilidade estelar é:

$$\frac{\partial M(\epsilon_c)}{\partial \epsilon_c} > 0, \quad (3.48)$$

que pode ser entendida através da figura (3.1), onde  $E_c$  é a energia central da estelara. Considere-se uma estrela cuja massa encontra-se perto de um máximo e suponha-se que o equilíbrio seja perturbado de forma que a densidade central aumente, levando a estrela para um ponto fora da curva. Para estar em equilíbrio com essa nova densidade central, a estrela deveria ter uma massa correspondentemente maior. Como a estrela não ganha massa, esse *déficit* faz com que a gravidade contrabalance o aumento de pressão central. Essa pressão adicional, por sua vez, faz

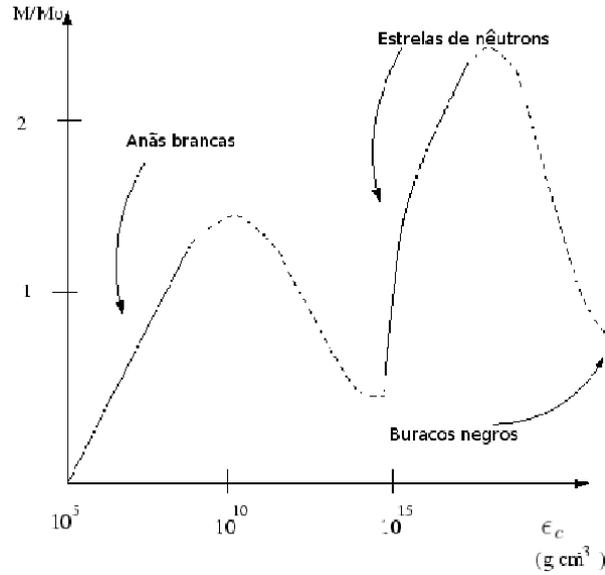


Figura 3.1: Massa por densidade de energia central

a estrela retornar à posição inicial. O mesmo acontece se a perturbação faz a densidade central diminuir.

O ponto de mudança de uma região estável para instável, e vice-versa, é representado por:

$$\frac{\partial M(\epsilon_c)}{\partial \epsilon_c} = 0. \quad (3.49)$$

Caso a estrela que sofre a perturbação não esteja em uma região estável, a força (agora causada pela diminuição da pressão) provoca um colapso por causa do gradiente negativo

$$\frac{\partial M(\epsilon_c)}{\partial \epsilon_c} < 0. \quad (3.50)$$

### 3.7 Neutralidade Elétrica

Estrelas de nêutrons são eletricamente neutras. Para prová-lo, considere-se uma partícula de carga elementar situada na borda da estrela com carga elétrica de sinal igual ao da carga líquida da estrela. Para que essa partícula não seja expulsa pela estrela, a força gravitacional deve ser maior do que a força elétrica entre a partícula e a carga líquida:

$$\frac{GMm}{R^2} > \frac{Z_{liq}.e^2}{R^2}, \quad (3.51)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa da estrela,  $m$  é a massa da partícula,  $R$  é o raio da estrela,  $Z_{liq.}$  é a carga líquida da estrela e  $e$  é a carga elementar.

Como a massa gravitacional da estrela é menor que a sua massa bariônica, pode-se escrever:

$$\frac{G(Am)m}{R^2} > \frac{GMm}{R^2} > \frac{Z_{liq}.e^2}{R^2}, \quad (3.52)$$

onde  $A$  é o número de bárions na estrela. Então:

$$\frac{Z_{liq.}}{A} < \frac{Gm^2}{e^2} \approx 10^{-36}. \quad (3.53)$$

Portanto fica provado que a carga elétrica por partícula é praticamente nula em uma estrela de nêutrons.

### 3.8 Equilíbrio Químico

Para encontrar o estado de equilíbrio de um sistema, não se precisa conhecer o caminho que ele tomou para chegar lá, mas somente as componentes  $A_i$  das reações químicas que são conservadas na escala de tempo evolutivo da estrela. Uma reação química genérica pode ser escrita como:



onde os  $a_i$  representam a quantidade numérica dos  $A_i$  envolvidos no processo. Colocando todos os termos à esquerda da equação:

$$\sum_i a_i A_i = 0, \quad (3.55)$$

onde um sinal negativo ou positivo nos  $a_i$  significa que o  $A_i$  correspondente estava antes respectivamente no lado direito ou esquerdo do ponto de equilíbrio. O mesmo vale para os potenciais químicos:

$$\sum_i a_i \mu_i = 0. \quad (3.56)$$

Como se verá a seguir, o número mínimo de potenciais químicos necessários para expressar qualquer potencial químico corresponde ao número de quantidades conservadas no sistema. No caso considerado nessa dissertação, as quantidades conservadas são duas: carga elétrica e número bariônico. Essas quantidades conservadas são expressas respectivamente na forma:

$$\sum_i^N a_i q_{ei} = 0 \quad (3.57)$$

e

$$\sum_i^N a_i q_{bi} = 0, \quad (3.58)$$

onde  $q_{ei}$  e  $q_{bi}$  são, respectivamente, carga elétrica e número bariônico. Obtêm-se, então, duas equações e  $N$  variáveis, ou seja,  $N-2$  variáveis independentes:

$$a_1 q_{e1} + a_2 q_{e2} + \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{ei} = 0, \quad (3.59)$$

e

$$a_1 q_{b1} + a_2 q_{b2} + \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{bi} = 0. \quad (3.60)$$

Considerar-se-á, por razões de conveniência, o caso particular no qual o elemento 1 é um nêutron ( $q_{e1} = q_{en} = 0$  e  $q_{b1} = q_{bn} = 1$ ) e o elemento 2 é um elétron ( $q_{e2} = q_{ee^-} = -1$  e  $q_{b2} = q_{be^-} = 0$ ). Nesse caso:

$$-a_{e^-} + \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{ei} = 0, \quad (3.61)$$

$$a_n + \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{bi} = 0. \quad (3.62)$$

Reescrevendo (3.56):

$$\sum_i^N a_i \mu_i = a_{e^-} \mu_{e^-} + a_n \mu_n + \sum_{i \neq e^-,n}^N a_i \mu_i = 0. \quad (3.63)$$

Substituindo (3.61) e (3.62) em (3.63):

$$\sum_{i \neq e^-,n}^N a_i q_{ei} \mu_{e^-} - \sum_{i \neq e^-,n}^N a_i q_{bi} \mu_n + \sum_{i \neq e^-,n}^N a_i \mu_i = 0, \quad (3.64)$$

e rearranjando os termos:

$$\sum_{i \neq e^-,n}^N a_i \mu_i = \sum_{i \neq e^-,n}^N a_i q_{bi} \mu_n - \sum_{i \neq e^-,n}^N a_i q_{ei} \mu_{e^-} . \quad (3.65)$$

Para que essa equação seja válida:

$$\mu_i = q_{bi} \mu_n - q_{ei} \mu_{e^-} , \quad (3.66)$$

ou seja, os potenciais químicos de todas as outras partículas podem ser colocados em função dos potenciais químicos do elétron e do nêutron. A equação (3.66) serve para estabelecer a equação de equilíbrio químico para o próton ( $q_{bp} = 1$  e  $q_{ep} = 1$ ):

$$\mu_p = \mu_n - \mu_{e^-} . \quad (3.67)$$

Para provar a validade do resultado, essa expressão é obtida de outra forma no apêndice A. A partir da equação (3.66), encontram-se as relações de equilíbrio químico para todas as partículas presentes na estrela. Para o múon ( $q_{b\mu} = 0$  e  $q_{e\mu} = -1$ ):

$$\mu_\mu = \mu_{e^-} . \quad (3.68)$$

Para o  $\Sigma^+$  ( $q_{b\Sigma^+} = 1$  e  $q_{e\Sigma^+} = 1$ ):

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_{e^-} \quad . \quad (3.69)$$

Para o  $\Sigma^-$  ( $q_{b\Sigma^-} = 1$  e  $q_{e\Sigma^-} = -1$ ):

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_{e^-} \quad . \quad (3.70)$$

Para o  $\Sigma^0$  ( $q_{b\Sigma^0} = 1$  e  $q_{e\Sigma^0} = 0$ ):

$$\mu_{\Sigma^0} = \mu_n \quad . \quad (3.71)$$

Para o  $\Xi^-$  ( $q_{b\Xi^-} = 1$  e  $q_{e\Xi^-} = -1$ ):

$$\mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_{e^-} \quad . \quad (3.72)$$

Para o  $\Xi^0$  ( $q_{b\Xi^0} = 1$  e  $q_{e\Xi^0} = 0$ ):

$$\mu_{\Xi^0} = \mu_n \quad . \quad (3.73)$$

Para o  $\Lambda$  ( $q_{b\Lambda} = 1$  e  $q_{e\Lambda} = 0$ ):

$$\mu_{\Lambda} = \mu_n \quad . \quad (3.74)$$

### 3.9 Temperatura

Todos os modelos, nesse trabalho, serão desenvolvidos à temperatura zero. Nota-se que  $T = 0$  simplifica a discussão pelo fato de não necessitar do uso da entropia do sistema. Para estrelas de nêutrons ( $T \sim 10^{10}K \simeq 1MeV$ ), essa é uma aproximação razoável. Mas tal aproximação já não seria indicada caso se estivesse tratando de estrelas protoneutrônicas ( $T \sim 10^{12}K \simeq 100MeV$ )<sup>[39, 40, 41]</sup>.

### 3.10 Pulsares

Quando uma estrela explode como uma supernova, devido à conservação de momentum angular e de fluxo magnético, a estrela de nêutrons restante (que tem um raio muito menor do que a supergigante) adquire alta velocidade de rotação e campos magnéticos intensos, cujo eixo em geral não coincide com o eixo de rotação da estrela. Os pulsares recebem esse nome devido à emissão de energia em certas direções que, devido à rotação da estrela, é detectada como pulsos. Eles têm períodos que variam de mili-segundos a segundos e frequências que vão desde a emissão de rádio até raios gama. Com o decorrer do tempo, os pulsares diminuem sua frequência de rotação porque perdem energia por emitir radiação, até que chegam a um ponto chamado de linha

da morte, quando param de emitir. Eles podem existir em sistemas binários e também podem acumular massa de seu companheiro, o que aumenta seu tempo de vida. Apesar de estarem desacelerando, alguns pulsares sofrem pequenas acelerações, chamadas de *glitches*, causadas por pequenos “estremotos” alterações na sua estrutura interna que poderiam ser explicadas como decorrentes de transições de fase (da matéria de hadrons para a matéria de quarks) ocorridas no interior da estrela, entre outras possibilidades.

## Capítulo 4

# Modelo de Walecka

As propriedades de uma estrela de nêutrons dependem da equação de estado da matéria nuclear em densidades maiores do que as observadas em um núcleo ou em cenários criados em laboratórios como, por exemplo, colisões de íons pesados. Além disso, na matéria nuclear comum, os núcleons mais rápidos já têm uma velocidade cerca de um quarto da velocidade da luz. Para descrever esse sistema, utiliza-se a teoria quântica de campos, uma teoria local (ou pseudolocal). A teoria da relatividade geral se reduz, no limite local, à relatividade restrita. Portanto, como já foi justificado pelo princípio da equivalência, é suficiente abordar a parte microscópica, utilizando a relatividade restrita. É essencial, então, ter um modelo para a física nuclear que incorpore os princípios da covariância de Lorentz e a relatividade especial, ou seja, é importante manter a relação correta, do ponto de vista de covariância, entre energia e momentum linear, bem como considerar a propagação causal de sinais no meio nuclear. Uma teoria covariante precisa conter antipartículas e, conseqüentemente, o vácuo quântico adquire um caráter dinâmico. Essa teoria de muitos corpos é a teoria quântica de campos renormalizada, baseada em densidades lagrangeanas que são invariantes de Lorentz locais, e o modelo usado é a hadrodinâmica quântica (QHD), na qual os graus de liberdade são os campos de bárions e mésons.

A seguir, discutir-se-á o modelo de Walecka, um modelo da hadrodinâmica quântica que busca descrever um sistema nuclear de muitos corpos, considerando que os bárions (núcleons) interagem através da troca de mésons. Esse modelo está em concordância com a formulação de Yukawa, ou melhor, no caso estacionário e com simetria esférica, reduz-se a ela. Nessa formulação é definido um potencial efetivo nuclear composto por dois termos: um relacionado ao méson  $\omega$ , que representa a repulsão entre dois bárions a curta distância, e outro relacionado ao méson  $\sigma$ , que representa a atração a longas distâncias, características principais da interação forte no nível

hadrônico:

$$V_{eff}(r) = \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r} - \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r}. \quad (4.1)$$

Deve-se salientar que o méson  $\sigma$  é fictício. Ele representa as componentes escalares atrativas de longo alcance da força forte, atração essa que ocorre, por exemplo, via troca de dois píons.

Tanto nesse modelo quanto nas suas extensões abordadas nessa dissertação, será adotado o Sistema Natural de Unidades no qual a velocidade da luz ( $c$ ) e a Constante de Planck ( $\hbar$ ) são iguais à unidade. Para reproduzir os resultados no sistema SI, as correspondentes grandezas determinadas neste trabalho devem ser multiplicadas por uma combinação dessas constantes.

## 4.1 Densidade Lagrangeana

Os bárions são representados pela densidade lagrangeana de Dirac (porque são férmions), pelo campo espinorial  $\psi$  e têm massa  $M$ . O méson  $\sigma$  é representado pela densidade lagrangeana de Klein-Gordon (porque é um bóson escalar e iso-escalar), pelo campo  $\sigma$  e tem massa  $m_\sigma$ . O méson  $\omega$  é representado pela densidade lagrangeana de Proca (porque é um bóson vetorial e iso-escalar), pelo campo  $\omega$  e tem massa  $m_\omega$ . Montar-se-á a densidade lagrangeana de Walecka<sup>[42]</sup>, juntando os três termos com o termo de interação, que é definido supondo-se que o méson escalar se acopla à densidade escalar dos bárions através de  $g_\sigma \bar{\psi}\psi\sigma$  (onde  $g_\sigma$  é a constante de acoplamento  $\sigma N$ ) e que o méson vetorial se acopla à corrente de bárions (conservada) através de  $g_\omega \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu$  (onde  $g_\omega$  é a constante de acoplamento  $\omega N$ )<sup>[43]</sup>. Com isso pode-se definir a densidade lagrangeana de Walecka:

$$\mathcal{L}_W = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) + \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu\right) + (g_\sigma\bar{\psi}\psi\sigma - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu), \quad (4.2)$$

que pode ser escrita ainda na forma:

$$\mathcal{L}_W = \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega^\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \quad (4.3)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu. \quad (4.4)$$

Como pode ser visto, nessa densidade lagrangeana, o maior mérito do modelo de Walecka é a sua simplicidade formal. Embora simples, esse modelo mostra-se eficiente na descrição de várias propriedades da matéria nuclear em densidades típicas, como será visto a seguir.

## 4.2 Equações de movimento

Tratando o sistema de muitos corpos como um sistema mecânico com infinitos graus de liberdade, pode ser feita uma analogia com a mecânica clássica de uma partícula sob a ação de um campo de potencial. O campo passa a ser descrito por um funcional, e as equações de movimento são obtidas a partir da densidade lagrangeana através do princípio variacional. Uma vez definido o modelo através da densidade lagrangeana, obtém-se, via o princípio hamiltoniano, aplicando a essa as equações de Euler-Lagrange, as equações dinâmicas para o modelo de Walecka (conhecidas na mecânica clássica, como equações de movimento).

### 4.2.1 Para o campo $\sigma$

A equação dinâmica para o campo escalar, incluindo os termos de interação, é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) = 0 \quad (4.5)$$

$$\bar{\psi} g_\sigma \psi - m_\sigma^2 \sigma - \partial_\mu (\partial^\mu \sigma) = 0 \quad (4.6)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma = \bar{\psi} g_\sigma \psi, \quad (4.7)$$

que é a Equação de Klein-Gordon com fonte escalar  $g_\sigma \bar{\psi} \psi$ .

### 4.2.2 Para o campo $\omega$

De forma análoga, obtém-se para o campo vetorial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \omega^\mu)} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Como mencionado anteriormente, o espaço-tempo é localmente plano, então vale:

$$F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \quad (4.9)$$

e

$$\frac{\partial(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} = \frac{\partial(-\frac{1}{4}(F^{\mu\nu})^2)}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial(F^{\mu\nu})}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\left(\frac{\partial(\partial^\mu\omega^\nu)}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} - \frac{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)}\right) = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\xi_{\mu\nu} - 1), \quad (4.11)$$

onde  $\xi_{\mu\nu}$  é o operador que troca  $\mu$  por  $\nu$  e  $\nu$  por  $\mu$ . Assim resulta:

$$\frac{\partial(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} = -\frac{1}{2}(F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}). \quad (4.12)$$

Como o tensor  $F^{\mu\nu}$  é anti-simétrico sob troca de índices:

$$F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial(\partial^\nu\omega^\mu)} = -\frac{1}{2}(-F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Substituindo a derivada em (4.8):

$$-\bar{\psi}\gamma_\mu g_\omega\psi + m_\omega^2\omega_\mu - \partial^\nu(F_{\mu\nu}) = 0 \quad (4.15)$$

$$-\partial^\nu F_{\mu\nu} + m_\omega^2\omega_\mu = g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (4.16)$$

que é a Equação de Proca com fonte vetorial  $g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , ou seja, com corrente bariônica no lugar de corrente eletromagnética (como na eletrodinâmica quântica):

$$B_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (4.17)$$

Para provar o importante princípio da conservação de corrente bariônica, ainda é preciso desenvolver mais duas equações de movimento. Esse procedimento será feito no apêndice A.

### 4.2.3 Para o campo $\bar{\psi}$

Para o hermitiano conjugado do campo espinorial, vale

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{\psi})}\right) = 0 \quad (4.18)$$

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega^\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi = 0, \quad (4.19)$$

que é a Equação de Dirac na presença dos campos vetorial  $\omega$  e escalar  $\sigma$ .

### 4.2.4 Para o campo $\psi$

Analogamente, obtém-se para o campo espinorial:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\right) = 0 \quad (4.20)$$

$$\bar{\psi}[-\gamma_\mu g_\omega\omega^\mu - (M - g_\sigma\sigma)] - \partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu i) = 0 \quad (4.21)$$

$$\bar{\psi}[\gamma_\mu(i\overleftarrow{\partial}^\mu + g_\omega\omega^\mu) + (M - g_\sigma\sigma)] = 0, \quad (4.22)$$

onde a seta, apontando para esquerda na equação acima, indica que a derivada está atuando no elemento a sua esquerda. A equação obtida é a Equação de Dirac adjunta com campos vetorial e escalar. Essa equação de movimento não será usada daqui em diante, porque é apenas a conjugada da equação (4.19) e não trará nenhuma informação adicional além das obtidas através da equação para o campo  $\bar{\psi}$ .

### 4.3 Tensor Energia-momentum

A definição do tensor energia-momentum surge, a partir do princípio variacional, na teoria quântica de campos, como uma quantidade que é conservada no tempo, sendo dado por:

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \sum_{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}Q_{\eta})} \partial_{\nu}Q_{\eta}, \quad (4.23)$$

onde  $Q_{\eta}$  é um campo genérico e  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Obtém-se, para o sistema nuclear, utilizando-se a densidade lagrangeana de Walecka:

$$T_{\mu\nu} = -\left[\bar{\psi}[\gamma_{\theta}(i\partial^{\theta} - g_{\omega}\omega^{\theta}) - (M - g_{\sigma}\sigma)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_{\theta}\sigma\partial^{\theta}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F_{\theta\phi}F^{\theta\phi} + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\theta}\omega^{\theta}\right]g_{\mu\nu} \\ + (\partial_{\mu}\sigma)\partial_{\nu}\sigma - (F_{\mu\eta})\partial_{\nu}\omega^{\eta} + (\bar{\psi}\gamma_{\mu}i)\partial_{\nu}\psi. \quad (4.25)$$

Usando a equação de movimento do campo  $\psi$ , o primeiro termo desaparece, restando:

$$T_{\mu\nu} = -\left[\frac{1}{2}(\partial_{\theta}\sigma\partial^{\theta}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F_{\theta\phi}F^{\theta\phi} + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\theta}\omega^{\theta}\right]g_{\mu\nu} \\ + \partial_{\mu}\sigma\partial_{\nu}\sigma + F_{\eta\mu}\partial_{\nu}\omega^{\eta} + i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}\psi, \quad (4.26)$$

ou seja

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[-\partial_{\theta}\sigma\partial^{\theta}\sigma + m_{\sigma}^2\sigma^2 + \frac{1}{2}F_{\theta\phi}F^{\theta\phi} - m_{\omega}^2\omega_{\theta}\omega^{\theta}\right]g_{\mu\nu} \\ + \partial_{\mu}\sigma\partial_{\nu}\sigma + F_{\eta\mu}\partial_{\nu}\omega^{\eta} + i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial_{\nu}\psi. \quad (4.27)$$

Uma forma particular do tensor energia-momentum que será útil para a determinação da equação de estado da matéria nuclear é a forma que esse tensor assume para o caso específico de um fluido perfeito. Um fluido perfeito é um meio no qual a pressão é isotrópica no referencial próprio de cada elemento de fluido e no qual forças de cisalhamento e transporte de calor não existem. Seja  $v$ , em um certo ponto, a velocidade do fluido. Um observador com essa mesma velocidade observará o fluido em sua vizinhança como sendo isotrópico, com uma densidade de energia  $\epsilon$  e pressão  $p$ . Nesse referencial local, as componentes do tensor de energia-momentum são dadas por<sup>[44]</sup>:

$$T_{ij}(\text{para } i = j) = \delta_{ij}p, \quad (4.28)$$

$$T_{ij}(\text{para } i \neq j) = 0, \quad (4.29)$$

$$T_{00} = \epsilon, \quad (4.30)$$

onde as variáveis  $p$  e  $\epsilon$  são a pressão e a densidade de energia, respectivamente. A equação (4.29) indica que não existem termos de cisalhamento.

## 4.4 Aproximação de Campo Médio

A solução, sem o uso de aproximações, das equações de movimento dos campos  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\psi$  só é viável utilizando-se métodos numéricos, já que se trata de equações não-lineares altamente acopladas. Uma alternativa seria resolvê-las através de teoria de perturbação, mas essa não é aplicável porque as constantes de acoplamento,  $c_i$ , não são parâmetros adequados para introduzir uma expansão desse tipo, pois existem problemas de convergência na medida em que  $c_i > 1$ .

Considerando-se a matéria nuclear como uniforme, estática e em seu estado fundamental, pode-se enxergar o núcleon sob ação de uma interação nuclear média<sup>[45]</sup> e operar apenas com os valores médios dos campos dos mésons. Quanto maior a densidade bariônica, melhor a validade dessa aproximação, pois, em altas densidades, as flutuações dos campos mesônicos são desprezíveis quando comparadas com as amplitudes dos campos dos núcleons, o que permite substituí-los por seus valores esperados. Emprega-se, então, a aproximação de campo médio, que permite a dedução de uma solução semi-analítica e que consiste no uso dos valores médios (clássicos) dos campos mesônicos:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0 \quad (4.31)$$

e

$$\omega^\mu \rightarrow \langle \omega^\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0. \quad (4.32)$$

As equações do modelo de Walecka com aproximação de campo médio são exatamente solúveis e mantêm as características principais da QHD, tais como, covariância de Lorentz, a presença explícita de graus de liberdade mesônicos e a incorporação dos campos das antipartículas. Portanto, essa é uma ferramenta importante na resolução de sistemas nucleares de muitos corpos.

Fazendo essas substituições nas equações de movimento obtidas anteriormente, pode-se reescrevê-las conforme mostrado nas próximas subseções.

### 4.4.1 Para a Equação de Movimento do Campo $\sigma$

Nesse caso, tem-se:

$$\langle (\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma \rangle = \langle \bar{\psi} g_\sigma \psi \rangle, \quad (4.33)$$

ou

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \langle \sigma \rangle = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle . \quad (4.34)$$

Como o campo  $\sigma_0$  é constante no espaço de configuração, a sua derivada é nula, resultando:

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (4.35)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle . \quad (4.36)$$

Definindo uma densidade escalar de Lorentz

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle , \quad (4.37)$$

obtém-se:

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_s . \quad (4.38)$$

Pode-se notar que a densidade escalar definida acima é fisicamente, a fonte do campo escalar.

#### 4.4.2 Para a Equação de Movimento do Campo $\omega$

Tem-se, nesse caso, que:

$$\langle -\partial^\nu F_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \rangle = \langle g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \rangle , \quad (4.39)$$

ou

$$-\partial^0 \langle F_{\mu\nu} \rangle + m_\omega^2 \langle \omega_\mu \rangle = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle \quad (4.40)$$

Pela definição de  $F_{\mu\nu}$ ,

$$\langle F_{\mu\nu} \rangle = 0 , \quad (4.41)$$

pois o tensor é composto apenas por derivadas do campo vetorial, o qual, ressalta-se, está sendo tomado como idêntico ao seu valor médio. Utilizando a definição

$$\psi^\dagger = \bar{\psi} \gamma_0 , \quad (4.42)$$

estabelece-se a relação entre as componentes temporais do campo  $\omega$  e da densidade de corrente bariônica:

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \psi^\dagger \psi \rangle , \quad (4.43)$$

tal que

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle . \quad (4.44)$$

Pode-se notar que a densidade bariônica definida acima é fisicamente, a fonte do campo vetorial.

Definindo uma densidade bariônica

$$\rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (4.45)$$

obtem-se:

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B. \quad (4.46)$$

A densidade bariônica é assim chamada porque está relacionada ao número de bárions  $B$  do sistema. O número de bárions pode, logicamente, ser obtido através da integração do operador de corrente bariônica (4.17) sobre todo o volume:

$$B = \int_V d^3x \ B^0. \quad (4.47)$$

Usando (4.17) e (4.42):

$$B = \int_V d^3x \ \psi^\dagger \psi \quad (4.48)$$

e a definição de valor médio, obtém-se:

$$B = V \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (4.49)$$

ou seja:

$$\frac{B}{V} = \rho_B. \quad (4.50)$$

Justifica-se assim a denominação densidade bariônica para a grandeza  $\psi^\dagger \psi$ .

#### 4.4.3 Para a Equação de Movimento do Campo $\psi$

Nesse caso, temos que:

$$\langle [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi \rangle = 0, \quad (4.51)$$

ou

$$\langle [\gamma_\mu i\partial^\mu - \gamma_0 g_\omega \omega_0 - (M - g_\sigma \sigma_0)] \psi \rangle = 0 \quad (4.52)$$

Definindo a massa efetiva do núcleon

$$M^* = M - g_\sigma \sigma_0, \quad (4.53)$$

a equação acima, em notação compacta, fica:

$$\langle (i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma_0 g_\omega \omega_0 - M^*) \psi \rangle = 0. \quad (4.54)$$

Nessa equação,  $M^*$  representa uma alteração na massa de repouso dos núcleons devido à sua interação com o méson escalar. Já a presença do méson vetorial aparece na equação acima como uma alteração no termo do quadri vetor momentum-energia.

## 4.5 Pressão e Energia

Aplicando as aproximações de campo médio à densidade lagrangeana de Walecka, esta se reduz à seguinte estrutura:

$$\mathcal{L}_{MFT} = \langle \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma_0 \omega_0 - M^*)\psi \rangle - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2. \quad (4.55)$$

A partir daí resulta o tensor energia-momentum com as aproximações de campo médio. Primeiro é usada a definição de tensor energia-momentum para o campo  $\psi$ , que foi o único campo do qual restou derivada temporal na densidade lagrangeana acima:

$$(T_{\mu\nu})_{MFT} = -\mathcal{L}_{MFT}g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{MFT}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi, \quad (4.56)$$

ou

$$(T_{\mu\nu})_{MFT} = -\left[ \langle \bar{\psi}(i\gamma_\eta \partial^\eta - g_\omega \gamma_0 \omega_0 - M^*)\psi \rangle - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 \right] g_{\mu\nu} + \langle \bar{\psi}i\gamma_\mu \partial_\nu \psi \rangle. \quad (4.57)$$

O uso da equação de movimento do campo  $\psi$  na aproximação de campo médio elimina o primeiro termo, restando:

$$(T_{\mu\nu})_{MFT} = \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 \right) g_{\mu\nu} + \langle i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\nu \psi \rangle. \quad (4.58)$$

### 4.5.1 Pressão

Da equação (4.28), surge a pressão:

$$p = \frac{1}{3}(T_{ii})_{MFT}. \quad (4.59)$$

Usando a definição de tensor para a matriz de Dirac  $\gamma$ :

$$\gamma_\mu = (\gamma_0, -\gamma_i), \quad (4.60)$$

calculando a componente  $ii$  do tensor energia-momentum na aproximação de campo médio e substituindo a respectiva componente do tensor métrico, obtém-se:

$$p = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 \right) g_{ii} - \langle i\bar{\psi}\gamma_i \partial_i \psi \rangle \right], \quad (4.61)$$

ou ainda

$$p = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 \right) (-3) - \langle i\bar{\psi}\gamma_i \partial_i \psi \rangle \right]. \quad (4.62)$$

Usando (4.42) e a definição de derivada covariante:

$$\gamma_\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_0 - \gamma_i \partial_i = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}, \quad (4.63)$$

onde  $\alpha$  também é uma matriz de Dirac composta pelas matrizes de Pauli, chega-se à expressão explícita da pressão:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \left\langle \frac{1}{3}i\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi \right\rangle. \quad (4.64)$$

Nessa equação, além do termo livre, têm-se os termos de contribuição dos mésons. Como vimos, o méson escalar representa a parte atrativa da força forte; logo, quanto maior o valor de seu campo, menor é a pressão (note-se o sinal negativo na contribuição do méson escalar para a pressão). Já o méson vetorial representa a parte repulsiva da força forte; logo, quanto maior o valor de seu campo, maior é a pressão (note-se o sinal positivo na contribuição do méson vetorial).

### 4.5.2 Densidade de Energia

Da equação (4.30), segue:

$$\epsilon = (T_{00})_{MFT} \quad (4.65)$$

$$\epsilon = \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \right) g_{00} + \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle. \quad (4.66)$$

Usando o tensor métrico:

$$\epsilon = \left( \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \right) (1) + \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle, \quad (4.67)$$

e usando a equação (4.42), resulta que:

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \langle i\psi^\dagger\partial_0\psi \rangle. \quad (4.68)$$

Nessa equação, além do termo livre (que representa a pressão de um gás de Fermi), têm-se os termos de contribuição dos mésons. Como vimos, o méson escalar representa a parte atrativa da força forte; logo, quanto maior o valor de seu campo, maior a energia de ligação, o que, obviamente, implica um incremento na densidade de energia total do sistema (por isso, o sinal positivo na contribuição do méson escalar). Já o méson vetorial representa a parte repulsiva da força forte; logo, quanto maior o valor de seu campo, menor a energia de ligação (por isso, o sinal negativo na contribuição do méson vetorial). Além disso, pode-se notar que essa inversão de sinais entre as expressões para pressão e densidade de energia estão em concordância com a primeira lei da termodinâmica, que, para temperatura zero e número constante de partículas, pode ser escrita como:

$$p dV = -dE, \quad (4.69)$$

onde o volume entra nas expressões através da variável  $\rho_B = B/V$ .

### 4.5.3 Densidade Bariônica

A simples definição de  $\rho_B$  conforme (4.45) não fornece, a princípio, muita informação. Portanto, o próximo passo consiste em calcular uma expressão analítica para essa grandeza, o que necessita do conhecimento da função de onda  $\psi$  que representa a solução da equação de campo (4.54). A equação de movimento do campo  $\psi$  na aproximação de campo médio é linear; logo, ela admite soluções estacionárias na forma:

$$\psi = \psi(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon(k)t}, \quad (4.70)$$

onde  $\psi(\vec{k}, \lambda)$  é o espinor de Dirac de 4 componentes e  $\lambda$  é o índice de spin. Utilizando um volume finito no espaço e adotando condições de contorno periódicas, tem origem a forma normalizada:

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^- t} \right], \quad (4.71)$$

onde  $A$  é o operador destruição para bárions,  $B^\dagger$  é o operador criação para anti-bárions,  $U$  é a parte da solução da equação de Dirac com energia positiva e  $V$  é a parte da solução da equação de Dirac com energia negativa. Define-se também sua conjugada:

$$\psi^\dagger(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^- t} \right]. \quad (4.72)$$

Para calcular a densidade bariônica em função dos operadores de criação e destruição, faz-se a multiplicação  $\psi^\dagger\psi$ , e os termos cruzados se anulam (porque  $U$  e  $V$  são ortonormais:  $U^\dagger V = V^\dagger U = 0$  e  $U^\dagger U = V^\dagger V = 1$ ), restando:

$$\psi^\dagger\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \quad (4.73)$$

Substituindo  $\psi^\dagger\psi$  em (4.48):

$$B = \int d^3x \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \quad (4.74)$$

Usando a condição de normalidade:

$$\frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad (4.75)$$

o número bariônico é expresso em termos do operador número de ocupação:

$$B = \sum_{\vec{k}\lambda} [A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger]. \quad (4.76)$$

Usando a relação de anticomutação do operador destruição de bárions, resulta:

$$[B^\dagger, B]_+ = 1, \quad (4.77)$$

de forma que:

$$B = \sum_{\vec{k}\lambda} [A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}] + \sum_{\vec{k}\lambda} 1. \quad (4.78)$$

O último termo dessa expressão é uma constante que pode ser interpretada como a soma de todos os estados de energia negativa ocupados no mar de Dirac. Como todas as medições físicas se referem ao vácuo, a física do sistema está contida no termo:

$$B = \sum_{\vec{k}\lambda} [A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}]. \quad (4.79)$$

Agora, substituindo (4.79) em (4.50):

$$\rho_B = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} [A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}]. \quad (4.80)$$

Determinando o limite para um volume infinitamente grande:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k, \quad (4.81)$$

resulta na expressão para a densidade bariônica:

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k [A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}]. \quad (4.82)$$

Para calcular o valor médio dos operadores criação e destruição, conforme apresentados na expressão acima, deve-se lembrar qual estado quântico da matéria é relevante. Quando se introduziu a aproximação de campo médio, foi feita a suposição de matéria nuclear uniforme, estática e em seu estado fundamental, estado esse conhecido como estado de Fermi. Aplicando os operadores no estado de Fermi:

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k \left[ \langle F | A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} | F \rangle - \langle F | B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} | F \rangle \right]. \quad (4.83)$$

Como em uma esfera de Fermi todos os níveis estão preenchidos com bárions até o assim chamado nível de Fermi e nenhum preenchido acima dele:

$$A_{\vec{k}\lambda} | F \rangle = 0, \quad \text{para } |k| > k_F, \quad (4.84)$$

$$A_{\vec{k}\lambda}^\dagger | F \rangle = 0, \quad \text{para } |k| < k_F, \quad (4.85)$$

$$B_{\vec{k}\lambda} | F \rangle = 0, \quad \text{para todo } k, \quad (4.86)$$

$$A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} |F\rangle = |F\rangle, \text{ para } |k| < k_F. \quad (4.87)$$

Os antibárions não estão presentes devido à escolha do uso de temperatura zero neste trabalho.

Substituindo em  $\rho_B$ :

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (4.88)$$

Por motivos de conveniência, o somatório em  $\lambda$  será transformado em um fator de degenerescência  $\gamma$ . Para matéria de nêutrons,  $\gamma = 2$ , porque existem dois sentidos de spin  $J = \pm 1/2$ . Para matéria de bárions (matéria nuclear),  $\gamma = 4$ , porque, além dos dois sentidos de spin, existem dois de isospin,  $I = 1/2$  para o próton e  $I = -1/2$  para o nêutron:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (4.89)$$

Integrando:

$$\rho_B = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk \quad (4.90)$$

$$\rho_B = \frac{\gamma}{8\pi^3} \frac{4}{3} \pi k_F^3 \quad (4.91)$$

$$\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3, \quad (4.92)$$

foi obtida uma expressão que relaciona a densidade bariônica total com o momento de Fermi de cada núcleon.

#### 4.5.4 Densidade Escalar

Outro passo importante na busca de uma expressão consistente para a equação de estado da matéria nuclear é a obtenção de uma expressão analítica para a densidade escalar conforme definida em (4.37). Para obter  $\bar{\psi}\psi$ , utiliza-se (4.71) e (4.72):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma_0 \psi = & \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^- t} \right] \right] \gamma_0 \\ & \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^- t} \right] \right], \end{aligned} \quad (4.93)$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} & \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ & \left. + A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right], \end{aligned} \quad (4.94)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} & \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} U^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 U(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 V(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ & \left. + A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 V(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) \gamma_0 U(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Aqui, devido à presença da matriz  $\gamma_0$  entre os campos  $\psi^\dagger$  e  $\psi$ , os espinores  $U$  e  $V$  não desaparecem como ocorreu no cálculo da densidade bariônica. Portanto, precisamos de sua forma operacional explícita para realização do cálculo. Serão usadas as partes com energia positiva e negativa da equação de Dirac<sup>[46]</sup> com spin  $\uparrow$  (embora, se fossem usadas as partes com spin  $\downarrow$ , não haveria diferença nos resultados):

$$U_\uparrow = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.96)$$

$$U_\uparrow^\dagger = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \left( 1 \quad 0 \quad \frac{k}{E^* + M^*} \quad 0 \right), \quad (4.97)$$

$$V_\uparrow = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.98)$$

$$V_\uparrow^\dagger = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \left( \frac{-k}{E^* + M^*} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right), \quad (4.99)$$

onde a energia efetiva, modificada pela presença do méson escalar, é definida como:

$$E^* = \sqrt{k^2 + (M^*)^2}. \quad (4.100)$$

Usando essas matrizes juntamente com a definição da matriz  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.101)$$

calcula-se cada termo de  $\bar{\psi}\psi$  (detalhes no apêndice A):

$$U_\uparrow^\dagger \gamma_0 U_\uparrow = \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}, \quad (4.102)$$

$$V_\uparrow^\dagger \gamma_0 V_\uparrow = \frac{-M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}, \quad (4.103)$$

$$U_\uparrow^\dagger \gamma_0 V_\uparrow = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}, \quad (4.104)$$

$$V_\uparrow^\dagger \gamma_0 U_\uparrow = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (4.105)$$

Substituindo os termos na equação (4.95):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} \left( \frac{M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger \left( \frac{-M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ \left. + A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}'\lambda} \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Substituindo a equação acima em (4.37):

$$\begin{aligned} \rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{1}{V} \int d^3x \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} \left( \frac{M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ \left. + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger \left( \frac{-M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ \left. + B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}'\lambda} \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Usando a condição de normalidade:

$$\begin{aligned} \rho_s = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger \left( \frac{-M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) \right. \\ \left. + A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}^\dagger \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) + B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Através do mesmo argumento usado no cálculo da densidade bariônica,  $B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  pode ser substituído por  $-B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}$ . Como os operadores dos bárions comutam com os operadores dos antibárions, então

$$\begin{aligned} \rho_s = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{-M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) \right. \\ \left. + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda}^\dagger \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) + A_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Ao recuperar o limite volumétrico infinito:

$$\begin{aligned} \rho_s = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{-M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) \right. \\ \left. + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda}^\dagger \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) + A_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda} \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Quando se aplica a equação acima em um estado de Fermi e se usam as equações (4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), resulta:

$$\rho_s = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}. \quad (4.111)$$

Reescrevendo a equação utilizando o fator de degenerescência e considerando simetria esférica:

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (4.112)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} dk \ 4\pi \ k^2 \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (4.113)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \ . \quad (4.114)$$

Usando a fórmula (2.272-3) da Tabela Gradshteyn<sup>[47]</sup> :

$$\int dx \frac{x^2}{\sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{2} \frac{x}{c} \sqrt{a + cx^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{c} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a + cx^2}). \quad (4.115)$$

Nesse caso:  $x = k$ ,  $a = (M^*)^2$  e  $c = 1$ . Então a expressão acima se transforma em

$$\int dk \frac{k^2}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} = \frac{1}{2} k \sqrt{(M^*)^2 + k^2} - \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln(k + \sqrt{(M^*)^2 + k^2}). \quad (4.116)$$

Definindo a integral:

$$\int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} = \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln(k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}) + \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln(M^*) \quad (4.117)$$

$$\int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} = \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \quad (4.118)$$

Substituindo (4.118) em (4.114):

$$\rho_s = \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \left( \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right) \quad (4.119)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{4\pi^2} \left( k_F M^* \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - (M^*)^3 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right), \quad (4.120)$$

obtém-se uma expressão para a densidade escalar total em função do momentum de Fermi.

#### 4.5.5 Resultado para a Pressão

Deseja-se encontrar uma expressão para a pressão que seja adequada para análises quantitativas. Para isso, precisa-se calcular o terceiro termo da equação (4.64) com o intuito de obter uma expressão analítica para a pressão em função do momentum de Fermi, da mesma forma que foi feito para densidade bariônica e para densidade escalar.

Calculando o gradiente de (4.71)

$$\nabla\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}\lambda) (i\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}\lambda) (-i\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^- t} \right] \quad (4.121)$$

$$\nabla\psi(\vec{x}, t) = \frac{i\vec{k}}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^+ t} - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^- t} \right], \quad (4.122)$$

e substituindo juntamente com (4.72) na equação obtida anteriormente para pressão, resulta que:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \left\langle \frac{1}{3}i \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^- t} \right] \vec{\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. \left[ \frac{i\vec{k}}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^+ t} - B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^- t} \right] \right] \right\rangle, \quad (4.123)$$

ou

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \left\langle \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^+ t} + B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^- t} \right] \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' \right. \right. \\ \left. \left. \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^+ t} - B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^- t} \right] \right] \right\rangle, \quad (4.124)$$

ou ainda

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \left\langle \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \right. \\ \left. \left. - B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} - A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \right. \\ \left. \left. + B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right] \right\rangle; \quad (4.125)$$

finalmente obtém-se

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \left\langle \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} U^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' U(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \right. \\ \left. \left. - B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' V(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} - A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' V(\vec{k}'\lambda) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \right. \\ \left. \left. + B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}'\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) \vec{\alpha}\cdot\vec{k}' U(\vec{k}'\lambda) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right] \right\rangle. \quad (4.126)$$

Uma forma conveniente para  $\vec{\alpha}\cdot\vec{k}$  pode ser derivada, usando-se a expressão relativística para a energia efetiva do núcleon e  $\gamma_0$ :

$$E^* = \vec{\alpha}\cdot\vec{k} + \gamma_0 M^*, \quad (4.127)$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{k} = E^* - \gamma_0 M^*. \quad (4.128)$$

Ou, na forma matricial:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{k} = E^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} M^* \quad (4.129)$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

As equações (4.96), (4.97), (4.98) e (4.99) permitem calcular cada termo da pressão (detalhes no apêndice A):

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}, \quad (4.131)$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{k^2 + 2(M^*)^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}, \quad (4.132)$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{kM^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}, \quad (4.133)$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{kM^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (4.134)$$

Substituindo os termos na equação da pressão, resulta:

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \left\langle \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda'} \left( \frac{k'^2}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) e^{(-i\vec{k} + i\vec{k}') \cdot \vec{x}} \right. \right. \\ & - B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger \left( \frac{k'^2 + 2(M^*)^2}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) e^{(i\vec{k} - i\vec{k}') \cdot \vec{x}} - A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger \left( \frac{k'M^*}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \\ & \left. \left. + B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}'\lambda'} \left( \frac{k'M^*}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.135)$$

ou usando a definição de valor médio:

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{V} \int d^3x \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ \left( \frac{k'^2}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda'} e^{(-i\vec{k} + i\vec{k}') \cdot \vec{x}} \right. \\ & - \left( \frac{k'^2 + 2(M^*)^2}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{(i\vec{k} - i\vec{k}') \cdot \vec{x}} - \left( \frac{k'M^*}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \\ & \left. + \left( \frac{k'M^*}{\sqrt{k'^2 + (M^*)^2}} \right) B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}'\lambda'} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Usando a condição de normalidade, tem-se:

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ \left( \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \right) A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \right. \\ & \left. - \left( \frac{k^2 + 2(M^*)^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \right) B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger - \left( \frac{kM^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \right) A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}^\dagger + \left( \frac{kM^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \right) B_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Através do mesmo argumento usado no cálculo da densidade bariônica, é possível substituir  $B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  por  $-B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}$  e, como os operadores dos bárions comutam com os operadores dos

antibárions, segue então que:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\lambda}\left[\left(\frac{k^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} + \left(\frac{k^2+2(M^*)^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} - \left(\frac{kM^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)B_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda}^\dagger + \left(\frac{kM^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}\right]. \quad (4.138)$$

No limite contínuo, ou seja, para um volume infinito, vale:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_\lambda\int d^3k\left[\left(\frac{k^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} + \left(\frac{k^2+2(M^*)^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} - \left(\frac{kM^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)B_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda}^\dagger + \left(\frac{kM^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}\right)A_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}\right]. \quad (4.139)$$

Aplicando a equação acima em um estado de Fermi e usando as equações (4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), resulta:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_\lambda\int_0^{k_F} d^3k\frac{k^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}. \quad (4.140)$$

A degenerescência do número de ocupação de férmions reduz a soma a um simples fator:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} d^3k\frac{k^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}. \quad (4.141)$$

Nessa expressão, os dois primeiros termos se referem às interações com os mésons, enquanto o terceiro pode ser interpretado como a pressão de um gás de férmions relativístico de bárions com massas  $M^*$ .

Integrando a expressão acima, resulta:

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{8\pi^3}\int_0^{k_F} dk\ 4\pi\frac{k^4}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \quad (4.142)$$

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{2\pi^2}\int_0^{k_F} dk\frac{k^4}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}}. \quad (4.143)$$

Usando a fórmula (2.273-3) da Tabela Gradshteyn<sup>[47]</sup>:

$$\int dx\frac{x^4}{\sqrt{a+cx^2}} = \frac{1}{4}\frac{x^3\sqrt{a+cx^2}}{c} - \frac{3}{8}\frac{ax}{c^2}\sqrt{a+cx^2} + \frac{3}{8}\frac{a^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{c}}\ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a+cx^2}). \quad (4.144)$$

Neste caso:  $x = k$ ,  $a = (M^*)^2$  e  $c = 1$ . Então a expressão acima fica:

$$\int dk\frac{k^4}{\sqrt{(M^*)^2+k^2}} = \frac{1}{4}k^3\sqrt{(M^*)^2+k^2} - \frac{3}{8}(M^*)^2k\sqrt{(M^*)^2+k^2} + \frac{3}{8}(M^*)^4\ln(k + \sqrt{(M^*)^2+k^2}). \quad (4.145)$$

Definindo a integral:

$$\int_0^{k_F} dk\frac{k^4}{\sqrt{(M^*)^2+k^2}} = \frac{1}{4}k_F^3\sqrt{(M^*)^2+k_F^2} - \frac{3}{8}(M^*)^2k_F\sqrt{(M^*)^2+k_F^2} + \frac{3}{8}(M^*)^4\ln(k_F + \sqrt{(M^*)^2+k_F^2}) - \frac{3}{8}(M^*)^4\ln M^*, \quad (4.146)$$

tem-se que

$$\int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} = \frac{1}{4} k_F^3 \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}, \quad (4.147)$$

ou ainda

$$\int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} = \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \quad (4.148)$$

Substituindo (4.148) em (4.143):

$$p = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \quad (4.149)$$

Usando a equação de movimento de  $\omega$  na aproximação de campo médio e a definição de massa efetiva:

$$p = -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \quad (4.150)$$

Usando a equação (4.92), resulta:

$$p = -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \left( \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \quad (4.151)$$

ou

$$p = -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma^2}{72\pi^4} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} k_F^6 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \quad (4.152)$$

obtém-se uma expressão para a pressão em função do momentum de Fermi.

#### 4.5.6 Resultado para a Densidade de Energia

Pretende-se encontrar uma expressão para a densidade de energia que permita uma análise quantitativa. Para isso, calcula-se o terceiro termo dessa equação com o intuito de obter uma expressão analítica para a energia em função do momentum de Fermi, da mesma forma que foi feito para a pressão.

Calculando a derivada temporal de  $\psi$  através de (4.71):

$$\frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}\lambda) (-i\epsilon^+(k)) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^+(k)t} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}\lambda) (-i\epsilon^-(k)) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^-(k)t} \right], \quad (4.153)$$

ou

$$\frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}\lambda) \epsilon^+(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^+(k)t} + B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}\lambda) \epsilon^-(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^-(k)t} \right], \quad (4.154)$$

e substituindo juntamente com (4.72) na equação obtida anteriormente para a densidade de energia:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \left\langle i \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^+(k)t} + B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}\lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^-(k)t} \right] \right. \right. \\ \left. \left. \left[ \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ A_{\vec{k}'\lambda} U(\vec{k}'\lambda) \epsilon^+(k') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^+(k')t} + B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger V(\vec{k}'\lambda) \epsilon^-(k') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^-(k')t} \right] \right] \right\rangle. \quad (4.155)$$

Como U e V são ortonormais, os termos cruzados se anulam restando:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \left\langle \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ \epsilon^+ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \epsilon^- B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} \right] \right\rangle, \quad (4.156)$$

ou ainda usando a definição de valor médio:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{V} \int d^3x \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda} \left[ \epsilon^+ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}'\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \epsilon^- B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}'\lambda}^\dagger e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} \right]. \quad (4.157)$$

Usando a condição de normalidade:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} [\epsilon^+ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} + \epsilon^- B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger]. \quad (4.158)$$

Através do mesmo argumento usado no cálculo da densidade bariônica, a densidade de energia pode ser escrita, ainda, na forma:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} [\epsilon^+ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - \epsilon^- B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}]. \quad (4.159)$$

Fazendo o limite para um volume infinitamente grande:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k [\epsilon^+ A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - \epsilon^- B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}]. \quad (4.160)$$

Quando se aplica a equação acima em um estado de Fermi e se usam as equações (4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), obtém-se:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k \epsilon^+. \quad (4.161)$$

Reduzindo a soma a estados degenerados:

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \epsilon^+. \quad (4.162)$$

Dos autovalores da equação de Dirac modificada, obtém-se:

$$\pm E^* = \epsilon^\pm - g_\omega\omega_0, \quad (4.163)$$

onde os sinais positivo e negativo se referem às soluções com energia positiva e negativa da equação de Dirac e de (4.100), obtém-se:

$$\epsilon^+ = \sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega\omega_0 = \mu. \quad (4.164)$$

A solução positiva de energia será chamada, daqui em diante, de potencial quântico  $\mu$ , já que sua expressão é idêntica à do potencial quântico definido na primeira lei da termodinâmica e que pode ser escrito como:

$$\mu = \frac{\epsilon + p}{\rho}. \quad (4.165)$$

Substituindo a solução com energia positiva em (4.162):

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (\sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega\omega_0), \quad (4.166)$$

ou

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega\omega_0 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (4.167)$$

Substituindo (4.89) no último termo:

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sqrt{k^2 + (M^*)^2} + g_\omega\omega_0\rho_B. \quad (4.168)$$

Nessa expressão, analogamente à pressão, os dois primeiros termos se referem às interações com os mésons enquanto o terceiro pode ser interpretado como a energia de um gás de férmions relativístico de bárions com massa  $M^*$ .

Integrando:

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + g_\omega\omega_0\rho_B + \frac{\gamma}{8\pi^3} 4\pi \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + (M^*)^2}, \quad (4.169)$$

ou

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + g_\omega\omega_0\rho_B + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + (M^*)^2}. \quad (4.170)$$

Usando a fórmula (2.272-2) da Tabela Gradshteyn<sup>[47]</sup>:

$$\int dx x^2 \sqrt{a + cx^2} = \frac{1}{4} \frac{x(\sqrt{a + cx^2})^3}{c} - \frac{1}{8} \frac{ax\sqrt{a + cx^2}}{c} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{c} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a + cx^2}). \quad (4.171)$$

Nesse caso:  $x = k$ ,  $a = (M^*)^2$  e  $c = 1$ . Então, a expressão a cima fica:

$$\int dk \ k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \frac{1}{4}k(\sqrt{(M^*)^2 + k^2})^3 - \frac{1}{8}(M^*)^2 k \sqrt{(M^*)^2 + k^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln(k + \sqrt{(M^*)^2 + k^2}). \quad (4.172)$$

Definindo a integral:

$$\int_0^{k_F} dk \ k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \frac{1}{4}k_F(\sqrt{(M^*)^2 + k_F^2})^3 - \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln(k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}) + \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln M^*, \quad (4.173)$$

tem-se que

$$\int_0^{k_F} dk \ k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \frac{1}{4}k_F(\sqrt{(M^*)^2 + k_F^2})^3 - \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}, \quad (4.174)$$

ou

$$\int_0^{k_F} dk \ k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \left[ \frac{1}{4}k_F \left( (M^*)^2 + k_F^2 \right) - \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F \right] \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}, \quad (4.175)$$

ou ainda

$$\int_0^{k_F} dk \ k^2 \sqrt{(M^*)^2 + k^2} = \left( \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F + \frac{1}{4}k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \quad (4.176)$$

Substituindo (4.176) em (4.170):

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_0^2 + g_\omega \omega_0 \rho_B + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F + \frac{1}{4}k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \quad (4.177)$$

Usando a equação de movimento do campo  $\omega$  na aproximação de campo médio e a definição de massa efetiva:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F + \frac{1}{4}k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \quad (4.178)$$

Usando (4.92), resulta:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \left( \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \right)^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8}(M^*)^2 k_F + \frac{1}{4}k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8}(M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \quad (4.179)$$

ou

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma^2}{72\pi^4} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} k_F^6 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right], \quad (4.180)$$

obtém-se, assim, uma expressão para a densidade de energia em função do momentum de Fermi.

## 4.6 Constantes de Acoplamento

Nessa seção serão deduzidas expressões para determinar as razões  $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$  e  $\frac{g_\omega}{m_\omega}$  em função de  $\rho_0$  (densidade bariônica na saturação),  $\epsilon_0$  (densidade de energia na saturação),  $M$  (massa nua do núcleon) e  $M^*$  (massa efetiva do núcleon). O ponto de saturação representa a densidade que caracteriza o alcance máximo da força nuclear. Como sabe-se, a força nuclear é de curto alcance, tem componentes atrativas e repulsivas e caráter de saturação, isto é, dado um núcleon típico, o alcance da interação desse núcleon no sistema nuclear é limitado a uma região onde se localizam apenas alguns poucos núcleons.

As constantes de acoplamento são escolhidas de modo que o modelo reproduza as propriedades da matéria em equilíbrio termodinâmico. Primeiro, iguala-se a pressão (4.152) a zero:

$$-\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] = 0. \quad (4.181)$$

Depois, iguala-se a densidade de energia (4.180) a  $\epsilon_0$ , já que se sabe o valor da energia no ponto de saturação:

$$\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 + \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{(M^*)} \right] = \epsilon_0. \quad (4.182)$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se duas equações, uma para a constante de acoplamento do méson escalar e outra para a constante de acoplamento do méson vetorial (detalhes no apêndice A), ou seja:

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = \left\{ \frac{\epsilon_0}{(M - M^*)^2} - \frac{1}{(M - M^*)^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) E^* - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + E^*}{M^*} \right] \right\}^{-1} \quad (4.183)$$

$$\text{e } \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{E^*}{\rho_0} + \frac{\epsilon_0}{\rho_0^2}. \quad (4.184)$$

## 4.7 Massa Efetiva do Núcleon

Uma expressão para a massa efetiva em função do momentum de Fermi resulta das substituições (4.114) em (4.38) e (4.38) em (4.53):

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (4.185)$$

Substituindo (4.118) em (4.185):

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \left[ \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \quad (4.186)$$

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left[ k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right]. \quad (4.187)$$

Obtém-se, assim, uma expressão autoconsistente transcendental para a massa efetiva do núcleon. Consistentemente com a definição de massa efetiva (4.53), essa expressão é função somente do méson escalar.

## 4.8 Resultados Numéricos para as Constantes de Acoplamento, Massa Efetiva e Equação de Estado

### 4.8.1 Constantes de Acoplamento

A determinação das duas constantes de acoplamento (4.183) e (4.184), juntamente com a massa efetiva (4.187), implica em resolver um sistema de 3 equações e 3 incógnitas. É preciso ainda usar alguns valores obtidos experimentalmente. Escrevendo  $\rho_B$  na saturação como  $\rho_0 = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$  e usando para o raio efetivo do núcleon  $r_0 = 1,12 fm$ , obtemos  $\rho_0 = 0,17 fm^{-3}$ . Escrevendo  $k_F$  na saturação como

$$k_{F0} = \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_0 \right)^{\frac{1}{3}} = (6\pi^2 \rho_0)^{\frac{1}{3}} \gamma^{-\frac{1}{3}} = 2,16 \gamma^{-\frac{1}{3}}, \quad (4.188)$$

obtém-se, para  $\gamma = 2$ ,  $k_{F0} = 1,71 fm^{-1}$  e, para  $\gamma = 4$ ,  $k_{F0} = 1,36 fm^{-1}$ .

Como a energia de ligação por núcleon é a diferença entre a razão  $\epsilon/\rho$  e a massa *nua* do núcleon, na saturação, pode-se então determinar  $\epsilon_0$  através da equação:

$$\frac{B_0}{A} = \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right)_0 - M. \quad (4.189)$$

O valor de  $B_0$  é determinado através da fórmula semi-empírica de massa:

$$B_0(A, Z) = -a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A}. \quad (4.190)$$

Nela, o primeiro termo é chamado de energia de volume: devido à saturação, a densidade central do núcleo é constante, então a energia de ligação é simplesmente proporcional a  $A$ . O segundo termo é chamado de energia de superfície: os núcleons da superfície do núcleo tem um número menor de vizinhos do que os núcleons mais internos, então deve ser feita uma correção na energia de ligação proporcional à área de superfície do núcleo, ou seja, a  $r^2$ . Mas como o volume é proporcional a  $A$ ,  $r^3$  é proporcional a  $A$  e o segundo termo é então, proporcional a  $A^{\frac{2}{3}}$ . O terceiro termo é chamado de energia de repulsão: devido à repulsão coulombiana entre os prótons, existe uma correção proporcional a  $Z(Z-1)/r$ , ou aproximadamente,  $Z^2/A^{\frac{1}{3}}$ . O quarto termo é chamado de energia de simetria: é necessário que se acrescentem cada vez mais nêutrons para que a componente atrativa da força forte contrabalance a repulsão coulombiana entre os prótons, de forma a manter o núcleo ligado. Assim, ainda é necessária uma correção porque a matéria nuclear não é mais simétrica.

Os coeficientes calculados em [48, 49] são:

$$a_1 \sim 16,0MeV \quad , \quad a_2 \sim 17,8MeV \quad , \quad a_3 \sim 0,710MeV \quad e \quad a_4 \sim 32,5MeV. \quad (4.191)$$

Dividindo a energia de ligação pelo número de núcleons e tomado o limite para matéria nuclear infinita ( $A \rightarrow \infty$ ), simétrica ( $a_4 \rightarrow \infty$ ) e sem interação coulombiana ( $a_3 \rightarrow \infty$ ), a fórmula semi-empírica de massa fica, nesse limite:

$$\frac{B(A)}{A} = -a_1 = -16,0MeV = -0,08fm^{-1}. \quad (4.192)$$

Considerando-se que a massa  $M$  do núcleon é  $4,76fm^{-1}$  e substituindo todos os valores em (4.189), obtém-se  $\epsilon_0 = 0,79fm^{-4}$ .

Substituindo  $\rho_0$ ,  $k_{F0}$ ,  $\epsilon_0$  e  $M$  nas equações obtidas através da resolução do sistema, obtém-se para  $\gamma = 4$  (matéria nuclear):

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = 13,68fm^2, \quad (4.193)$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = 10,26fm^2 \quad (4.194)$$

e

$$\frac{M^*}{M} = 0,55. \quad (4.195)$$

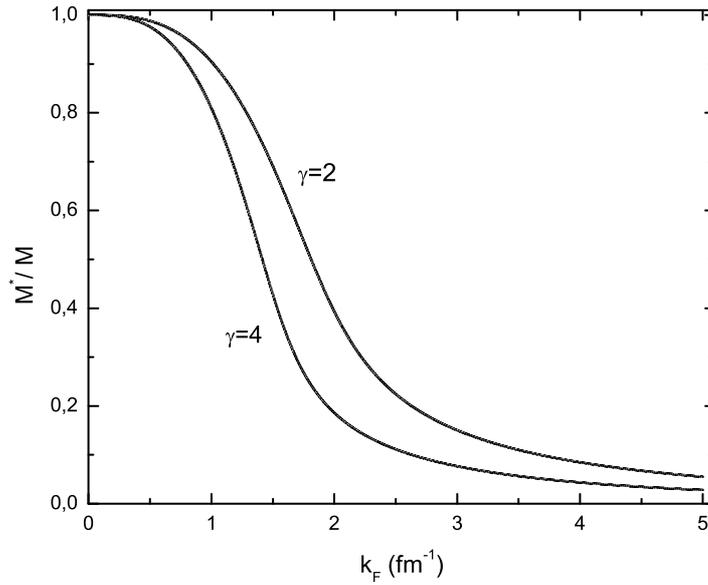


Figura 4.1: Massa efetiva

#### 4.8.2 Massa Efetiva do Núcleon

Usando os valores experimentais e os valores das constantes de acoplamento, um algoritmo numérico resolve a equação da massa efetiva, iterando  $M^*$  (começando com  $M^* = M$ ). Os resultados são mostrados na figura (4.1).

A figura mostra, ademais, que a massa efetiva do núcleon decresce com o aumento do momento de Fermi (ou com a densidade). Isso ocorre devido à proporcionalidade entre a densidade e o campo do méson escalar, que é subtraído da massa do núcleon. Dessa forma, o campo do méson escalar introduz uma mudança na escala de energia do sistema. Na saturação ( $k_F = 1,71 fm^{-1}$  para  $\gamma = 2$  e  $k_F = 1,36 fm^{-1}$  para  $\gamma = 4$ ), obtém-se  $M^*/M = 0,56$  para  $\gamma = 2$  e  $M^*/M = 0,55$  para  $\gamma = 4$ , enquanto os valores experimentais estão entre 0,70 e 0,80. Encontra-se, assim, um limite físico no modelo de Walecka: ele resulta em uma massa efetiva abaixo dos valores estimados fenomenologicamente.

Analisando a definição de massa efetiva (4.53):

$$\frac{M^*}{M} = 1 - \frac{g_\sigma \sigma_0}{M}, \quad (4.196)$$

pode-se encontrar uma densidade limite, porque, quando a densidade bariônica aumenta,  $\sigma$  assume valores muito altos, e a massa efetiva começa a ter valores negativos. Nesse caso, a massa efetiva começa a ficar pequena (da ordem de  $0,01M$ ) somente para valores de  $k_F > 11,96 fm^{-1}$

( $\rho_B > 57,80 fm^{-3}$ ) para  $\gamma = 2$  e para valores de  $k_F > 8,45 fm^{-1}$  ( $\rho_B > 40,77 fm^{-3}$ ) para  $\gamma = 4$ . As densidades correspondentes já estão fora do limite de validade desse tipo de modelo porque é provável que, nesse caso, os graus de liberdade dos quarks já deveriam ser levados em conta<sup>[50]</sup>.

### 4.8.3 Energia de Ligação

Usando os valores experimentais, os valores das constantes de acoplamento e o algoritmo para resolver a equação da massa efetiva, pode-se substituir a equação da energia na definição de energia de ligação:

$$\frac{B}{A} = \frac{\epsilon}{\rho_B} - M, \quad (4.197)$$

e calcular a energia de ligação por núcleon:

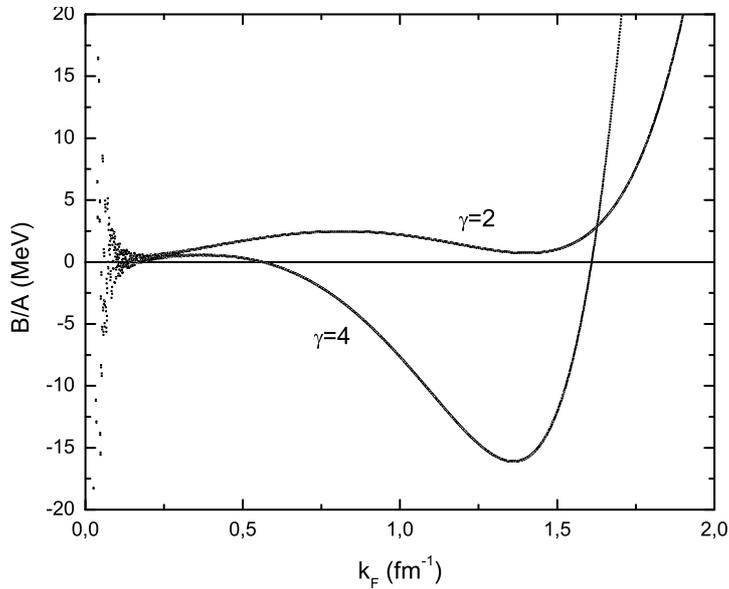


Figura 4.2: Energia de ligação por núcleon

A figura (4.2) mostra o caráter de saturação das forças nucleares, pois, a partir de um determinado momentum de Fermi, a energia de ligação do sistema começa a diminuir seu valor absoluto. Vale salientar que é a natureza relativística dos acoplamentos escalares e vetoriais a responsável pela propriedade de saturação. Uma aproximação análoga não-relativística não possui essa característica, de forma que o sistema torna-se então instável<sup>[46]</sup>

A energia de ligação por núcleon satura em  $k_F = 1,40 fm^{-1}$  para  $\gamma = 2$  e  $k_F = 1,36 fm^{-1}$  para  $\gamma = 4$  (como foi definido) quando o valor experimental é  $k_F = 1,71 fm^{-1}$  para  $\gamma = 2$  e  $k_F = 1,36 fm^{-1}$  para  $\gamma = 4$ . Para  $k_F$  menor que 0,88 para  $\gamma = 2$  e  $k_F$  menor que 0,55

para  $\gamma = 4$ , a energia de ligação começa a diminuir novamente. Como esse comportamento não condiz com a realidade, percebe-se que esse modelo não é válido para baixas densidades, o que já era de se esperar devido à suposição de altas densidades na aproximação de campo médio. Encontram-se então, limites inferiores de densidade para o modelo de Walecka.

#### 4.8.4 Equação de estado

As equações  $\epsilon$  (4.180) e  $p$  (4.152) formam a equação de estado da matéria nuclear:  $\epsilon(k_F)$  e  $p(k_F)$ . Substituindo os valores experimentais e os valores das constantes de acoplamento, pode-se resolver a equação da massa efetiva para obter a pressão em função da energia como mostra a figura (4.3). Nessa figura pode-se observar uma descontinuidade referente a uma transição de fase semelhante à líquido-gás na equação de estado de Van der Waals.

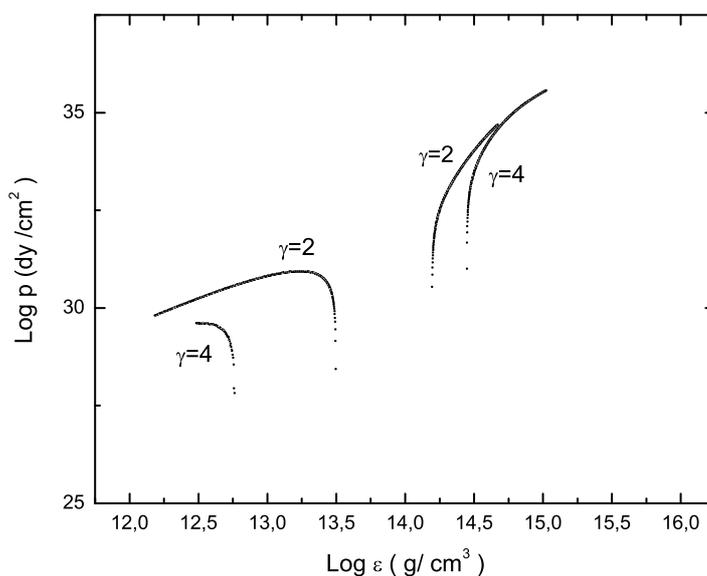


Figura 4.3: Equação de Estado

A equação de estado é crucial na descrição de estrelas de nêutrons, já que, através de seu estudo, pode-se não só obter suas propriedades locais, como suas propriedades globais, tais como massa e raio. Tal análise será feita no capítulo 6.

## 4.9 Função Compressibilidade

Nesta seção será deduzida, pela primeira vez, até onde sabemos, uma expressão para a função compressibilidade válida para todas as densidades onde o modelo em questão pode ser considerado válido. Faremos isso, partindo da definição termodinâmica de compressibilidade. Nela, a compressibilidade isotérmica ou adiabática é a variável que mede como o volume do sistema diminui quando sua pressão aumenta, respectivamente, a temperatura ou entropia constante<sup>[51]</sup>:

$$k_{T,S} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,S}, \quad (4.198)$$

onde  $V$  é o volume e  $P$  é a pressão do sistema. As compressibilidades isotérmica e adiabática relacionam-se da forma:

$$k_T = k_S + \frac{TV\alpha^2}{Nc_P}, \quad (4.199)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $N$  é o número de moles e  $c_P$  é a capacidade calorífica molar a pressão constante. Nesse caso, como a temperatura é zero, as duas compressibilidades são iguais, e serão redefinidas como:

$$k = \frac{1}{k_{T,S}} = -V \frac{\partial P}{\partial V}. \quad (4.200)$$

Essa redefinição é devida à transição da termodinâmica para a mecânica. Na termodinâmica,  $k$  se refere à incompressibilidade do sistema, enquanto, na mecânica, o significado é o oposto. Para escrever a função compressibilidade em função da densidade, em vez do volume, define-se a densidade como o número de partículas pelo volume:

$$\rho = \frac{N}{V}, \quad (4.201)$$

obtem-se:

$$\frac{d\rho}{dV} = -\frac{N}{V^2}. \quad (4.202)$$

Usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dV} = \frac{d\rho}{dV} \frac{d}{d\rho} \quad (4.203)$$

e agregando os termos na expressão correspondente para  $k$ :

$$k = -V \left( -\frac{N}{V^2} \right) \frac{dP}{d\rho} = \frac{N}{V} \frac{dP}{d\rho}. \quad (4.204)$$

Então:

$$k = \rho \frac{dP}{d\rho}. \quad (4.205)$$

No caso específico da física nuclear, para sistemas fermiônicos relativísticos, deve-se proceder a mais uma redefinição<sup>[26]</sup>:

$$K = 9 \frac{dP}{d\rho}, \quad (4.206)$$

de forma que a função compressibilidade, no caso específico da densidade de saturação, coincida com a definição usual.

Da primeira lei da termodinâmica:

$$E = TS - PV + \mu N, \quad (4.207)$$

onde  $\mu$  é o potencial químico do sistema. Dividindo a equação acima por  $V$ :

$$\epsilon = Ts - P + \mu\rho, \quad (4.208)$$

onde  $\epsilon = E/V$  e  $s = S/V$ . Como no presente trabalho é considerado o limite de temperatura zero:

$$P = \mu\rho - \epsilon. \quad (4.209)$$

Substituindo a expressão da pressão na da compressibilidade, tem-se:

$$K = 9 \frac{d(\mu\rho - \epsilon)}{d\rho} = 9 \left( \frac{d\mu}{d\rho} \rho + \mu - \frac{d\epsilon}{d\rho} \right). \quad (4.210)$$

O potencial químico total  $\mu$  também é definido como:

$$\mu = \frac{d\epsilon}{d\rho}, \quad (4.211)$$

de forma que se obtém:

$$K = 9\rho \frac{d\mu}{d\rho}. \quad (4.212)$$

Reescrevendo o símbolo da densidade total mais especificamente como o da densidade bariônica total:

$$K = 9\rho_B \frac{d\mu}{d\rho_B}, \quad (4.213)$$

onde a energia de Fermi  $\mu$  é o autovalor da Equação de Dirac modificada pelo méson sigma e pelo méson omega com o campo  $\omega_0$  já substituído através da sua equação de campo médio:

$$\mu = \frac{g_\omega^2 \rho_B}{m_\omega^2} + \sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}. \quad (4.214)$$

Substituindo (4.214) na função compressibilidade, resulta:

$$K = 9\rho_B \frac{d}{d\rho_B} \left( \frac{g_\omega^2 \rho_B}{m_\omega^2} + \sqrt{k_F^2 + (M^*)^2} \right), \quad (4.215)$$

ou ainda

$$K = 9\rho_B \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{2k_F}{\sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}} \frac{dk_F}{d\rho_B} + \frac{1}{2} \frac{2M^*}{\sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}} \frac{dM^*}{d\rho_B} \right). \quad (4.216)$$

Pode-se encontrar uma expressão para as derivadas da equação acima a partir da definição de massa efetiva do núcleon e de  $\rho_B$ :

$$\frac{dM^*}{d\rho_B} = -g_\sigma \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}, \quad (4.217)$$

$$k_F = \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_B \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.218)$$

$$\frac{dk_F}{d\rho_B} = \frac{1}{3} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_B \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{6\pi^2}{\gamma} \quad (4.219)$$

$$\frac{dk_F}{d\rho_B} = \frac{1}{3} k_F^{-2} \frac{6\pi^2}{\gamma} \quad (4.220)$$

$$\frac{dk_F}{d\rho_B} = \frac{2\pi^2}{\gamma k_F^2}. \quad (4.221)$$

Substituindo as duas derivadas em  $K$ :

$$K = 9\rho_B \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}} - \frac{g_\sigma M^*}{\sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right). \quad (4.222)$$

Usando a definição de energia efetiva:

$$K = 9\rho_B \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{E^*} - \frac{g_\sigma M^*}{E^*} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right). \quad (4.223)$$

A expressão para  $\frac{d\sigma_0}{d\rho_B}$  resulta das equações (4.38) e (4.114):

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (4.224)$$

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \frac{k_F^2 M^*}{\sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}} \frac{dk_F}{d\rho_B} + \int_0^{k_F} dk \left( \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} - \frac{1}{2} \frac{2k^2 (M^*)^2}{[k^2 + (M^*)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{dM^*}{d\rho_B} \right]. \quad (4.225)$$

Substituindo (4.217) e (4.221):

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \frac{M^*}{\sqrt{k_F^2 + (M^*)^2}} \frac{2\pi^2}{\gamma} - g_\sigma \int_0^{k_F} dk \left( \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} - \frac{k^2 (M^*)^2}{[k^2 + (M^*)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right]. \quad (4.226)$$

Substituindo (4.100):

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*} + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \left( -\frac{k^2}{E^*} + \frac{k^2 (M^*)^2}{(E^*)^3} \right) \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \quad (4.227)$$

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*} + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \left( -\frac{k^2 (E^*)^2}{E^* (E^*)^2} + \frac{(M^*)^2 k^2}{(E^*)^3} \right) \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (4.228)$$

Usando (4.100) novamente:

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*} - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \quad (4.229)$$

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*} \quad (4.230)$$

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \left[ 1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3} \right] = \frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*} \quad (4.231)$$

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \frac{\frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*}}{1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3}}. \quad (4.232)$$

Substituindo (4.232) em (4.223):

$$K = 9\rho_B \left[ \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{E^*} - \frac{g_\sigma M^*}{E^*} \left( \frac{\frac{g_\sigma M^*}{m_\sigma^2 E^*}}{1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3}} \right) \right] \quad (4.233)$$

$$K = 9\rho_B \left[ \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{E^*} - \frac{g_\sigma^2 (M^*)^2}{m_\sigma^2 (E^*)^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3}} \right) \right]. \quad (4.234)$$

Usando a fórmula (2.272-4) da Tabela Gradshteyn<sup>[47]</sup>:

$$\int dx \frac{x^4}{(a + cx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{x}{c^2} \sqrt{a + cx^2} + \frac{ax}{c^2} \frac{1}{\sqrt{a + cx^2}} - \frac{3}{2} \frac{a}{c^2} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a + cx^2}) \quad (4.235)$$

Neste caso:  $x = k$ ,  $a = (M^*)^2$  e  $c = 1$ . Então a expressão a cima fica:

$$\int dk \frac{k^4}{[(M^*)^2 + k^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} k \sqrt{(M^*)^2 + k^2} + (M^*)^2 k \frac{1}{\sqrt{(M^*)^2 + k^2}} - \frac{3}{2} (M^*)^2 \ln(k + \sqrt{(M^*)^2 + k^2}). \quad (4.236)$$

Definindo a integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{[(M^*)^2 + k^2]^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + (M^*)^2 k_F \frac{1}{\sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}} \\ &\quad - \frac{3}{2} (M^*)^2 \ln(k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}) + \frac{3}{2} (M^*)^2 \ln M^* \end{aligned} \quad (4.237)$$

$$\int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{[(M^*)^2 + k^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} k_F \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + (M^*)^2 k_F \frac{1}{\sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}} - \frac{3}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*}. \quad (4.238)$$

Usando a expressão para energia efetiva (4.100):

$$\int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(E^*)^3} = \frac{1}{2} k_F E^* + (M^*)^2 k_F \frac{1}{E^*} - \frac{3}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + E^*}{M^*}. \quad (4.239)$$

Substituindo (4.239) em (4.234):

$$K = 9\rho_B \left[ \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{E^*} - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{(M^*)^2}{(E^*)^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left( \frac{1}{2} k_F E^* + (M^*)^2 k_F \frac{1}{E^*} - \frac{3}{2} (M^*)^2 \ln \frac{k_F + E^*}{M^*} \right)} \right) \right] \quad (4.240)$$

$$K = 9\rho_B \left[ \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{E^*} - \left( \frac{1}{\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} \frac{(E^*)^2}{(M^*)^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left( \frac{1}{2} k_F \frac{(E^*)^3}{(M^*)^2} + k_F E^* - \frac{3}{2} (E^*)^2 \ln \frac{k_F + E^*}{M^*} \right)} \right) \right]. \quad (4.241)$$

A expressão acima determina o valor da compressibilidade  $K$  para todo e qualquer  $k_F$ , ou seja, para todas as densidades. Vale enfatizar que a função compressibilidade só havia sido calculada anteriormente no ponto de saturação, nesse caso, sendo chamada de módulo de compressão. Módulo de compressão, a grosso modo, é o parâmetro que determina se e quanto o sistema em questão vai sair do equilíbrio, se aplicar-se a ele uma perturbação. Quanto maior for o valor do módulo de compressibilidade, maior a dificuldade de tirar o sistema do equilíbrio e maior a facilidade com que ele volta para o equilíbrio. Portanto, um dos tópicos inovadores dessa dissertação é a dedução de uma expressão para a função compressibilidade válida para qualquer densidade.

Vale notar que considerando as constantes de acoplamento  $g_\sigma$  e  $g_\omega$  iguais a zero, chamando  $M^*$  de  $M$  e  $E^*$  de  $E$ , ou seja, eliminando a presença dos mésons no sistema, tem-se a compressibilidade de um gás de férmions relativístico para bárions com massa  $M$ :

$$K = 9\rho_B \left[ \frac{2\pi^2}{\gamma k_F} \frac{1}{E} - \left( \frac{1}{\frac{\gamma}{2\pi^2} \left( \frac{1}{2} k_F \frac{E^3}{M^2} + k_F E - \frac{3}{2} E^2 \ln \frac{k_F + E}{M} \right)} \right) \right]. \quad (4.242)$$

## 4.10 Velocidade do Som: Limite para a Compressibilidade

Uma aplicação direta da função compressibilidade é o cálculo da velocidade do som em um meio. Isso pode ser feito considerando-se que a velocidade do som  $v$  em um fluido relativístico homogêneo estático é dada por:

$$\left( \frac{v}{c} \right)^2 = \left( \frac{dP}{d\epsilon} \right)_S, \quad (4.243)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Calcular-se-á o lado direito da equação acima, aplicando a regra da cadeia na definição de compressibilidade (4.206):

$$K = 9 \frac{dP}{d\rho} = 9 \frac{dP}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\rho}. \quad (4.244)$$

Substituindo (4.211):

$$K = 9\mu \frac{dP}{d\epsilon}. \quad (4.245)$$

Substituindo em (4.243):

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{K}{9\mu} \quad (4.246)$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{K}{9\mu}}. \quad (4.247)$$

Tem-se, assim, uma expressão para a velocidade do som no meio em função da compressibilidade e do potencial quântico do sistema. Além disso, como é sabido que, devido à causalidade, a velocidade do som nunca pode ser maior do que a da luz, estabelecem-se as inequações:

$$\frac{v}{c} < 1, \quad (4.248)$$

$$K < 9\mu. \quad (4.249)$$

Portanto, estabelece-se um limite superior para os valores da função compressibilidade.

A velocidade do som também tem aplicações, como, por exemplo, no cálculo do ângulo que uma partícula supersônica forma quando entra em um determinado meio. Quando uma partícula se move com velocidade  $v_s$  maior do que a do som  $v$ , ela se move mais rápido do que a onda sonora emitida por ela e forma um cone chamado cone de Mach (figura 4.4) cujo ângulo  $\theta$  pode ser calculado através de:

$$\sin \theta = \frac{v}{v_s}. \quad (4.250)$$

Portanto, para uma partícula com velocidade  $v_s$ , maior do que a velocidade do som no meio  $v$ , que penetra nesse meio, pode-se através da compressibilidade, calcular o ângulo formado pelas ondas sonoras.

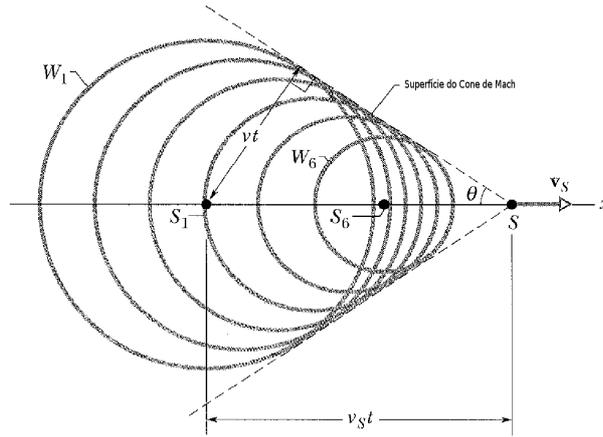


Figura 4.4: Cone de Mach.  $W_1$  é a onda sonora formada pela partícula quando ela estava em  $s_1$  e  $W_6$  é a onda sonora formada pela partícula quando ela estava em  $s_6$ . O raio de cada onda sonora é igual a  $v \cdot t$ , e a distância entre o ponto em que a partícula emitiu a primeira onda e o fim do cone é  $v_s \cdot t$ .

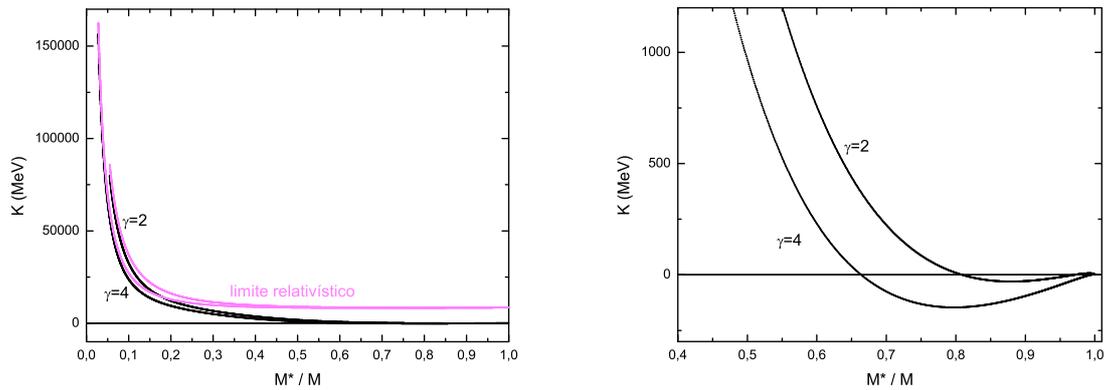


Figura 4.5: Compressibilidade por massa efetiva (esquerda) e compressibilidade por massa efetiva com destaque na parte em que a compressibilidade é negativa (direita).

## 4.11 Resultados Numéricos para a Compressibilidade e Velocidade do Som

Substituindo (4.100) e (4.92) em  $K$ , obtém-se a expressão para compressibilidade em função dos parâmetros desejados e pode-se, agora plotar a função compressibilidade. As figuras (4.6) e (4.7) (à direita) mostram que, na saturação ( $\rho_B = 0,17 fm^{-3}$  e  $k_F = 1,71 fm^{-1}$  para  $\gamma =$

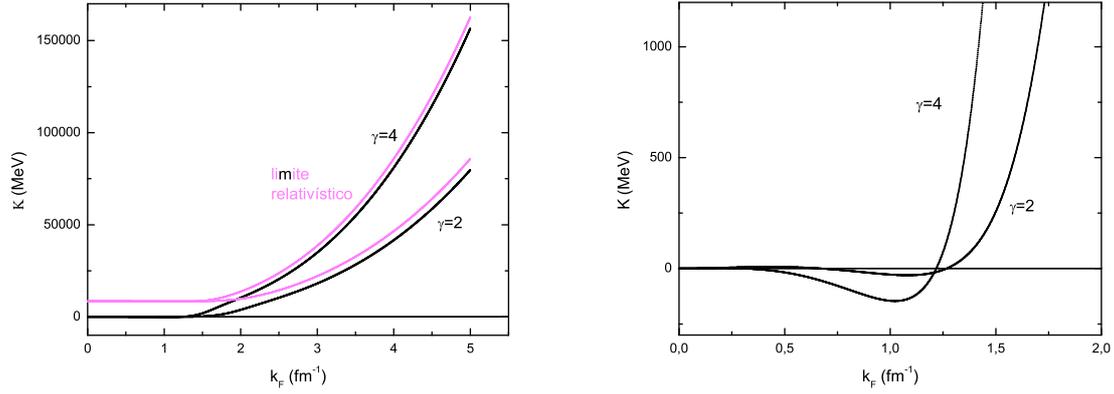


Figura 4.6: Compressibilidade por  $K_F$  (esquerda) e compressibilidade por  $K_F$  com destaque na parte em que a compressibilidade é negativa (direita).

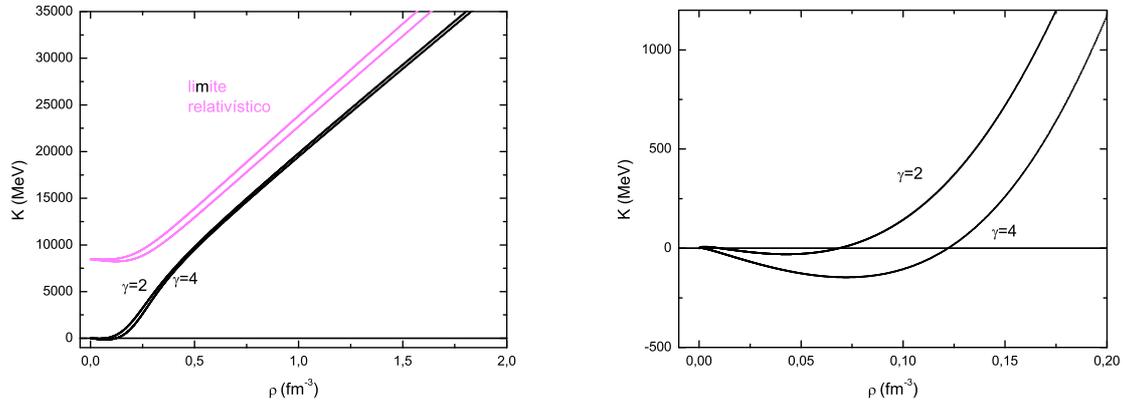


Figura 4.7: Compressibilidade por  $\rho_B$  (esquerda) e compressibilidade por  $\rho_B$  com destaque na parte em que a compressibilidade é negativa (direita).

2 e  $k_F = 1,36 fm^{-1}$  para  $\gamma = 4$ ), os valores para a compressibilidade são respectivamente,  $1093,84 MeV$  e  $551,53 MeV$ , enquanto os valores experimentais estão entre  $200$  e  $300 MeV$ . Encontra-se aí mais um limite do modelo de Walecka: os valores da compressibilidade são maiores do que os valores oriundos da análise do comportamento da matéria nuclear em laboratório.

As figuras (4.5), (4.6) e (4.7) (à direita) mostram que, para  $\rho_B$  entre  $0,01 fm^{-3}$  e  $0,06 fm^{-3}$  para  $\gamma = 2$  e  $\rho_B$  entre  $0,001 fm^{-3}$  e  $0,12 fm^{-3}$  para  $\gamma = 4$  e  $k_F$  entre  $0,67 fm^{-1}$  e  $1,27 fm^{-1}$  para  $\gamma = 2$  e  $k_F$  entre  $0,31 fm^{-1}$  e  $1,22 fm^{-1}$  para  $\gamma = 4$  ( o que representa massas efetivas de  $0,81M$  a  $0,97M$  para  $\gamma = 2$  e de  $0,66M$  a  $0,99M$  para  $\gamma = 4$ ), obtém-se valores negativos para a compressibilidade. Como a compressibilidade é, fisicamente, positiva definida, percebe-se que

os limites de validade do modelo encontrados no gráfico da energia de ligação por núcleon (figura 4.2) devem ser modificados para  $k_F$  maior que  $1,27 fm^{-1}$  para  $\gamma = 2$  e  $k_F$  maior que  $1,22 fm^{-1}$  para  $\gamma = 4$ .

As figuras (4.5), (4.6) e (4.7) (à esquerda) mostram que a função compressibilidade nunca cruza a linha superior do gráfico, que denota o limite causal. Isso mostra a consistência do modelo.

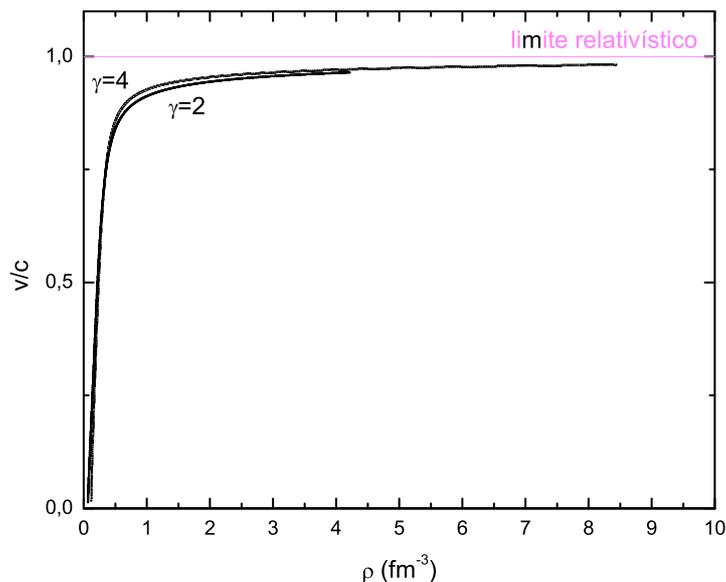


Figura 4.8: Velocidade do som (como fração de  $c$ ) por densidade.

A figura (4.8) mostra que, com aumento de densidade, a velocidade do som no meio aumenta até que se estabiliza em  $v = 0,9c$  a partir de  $\rho_B = 0,8 fm^{-3}$ . De acordo com a equação (4.250) e a figura (4.8), para uma partícula que viaja com uma velocidade fixa  $v_s$ , quanto maior a densidade do meio, maior a velocidade do som nesse meio e, portanto, maior o ângulo de Mach. Para um núcleon, a velocidade típica é da ordem de  $v_s = c/4$  resultando na figura (4.9).

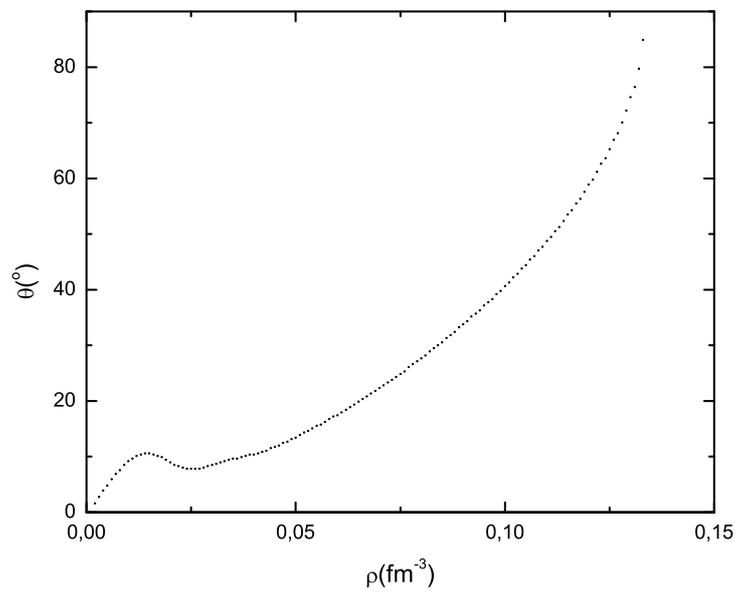


Figura 4.9: ângulo do cone de Mach por densidade.

## Capítulo 5

# Modelo de Acoplamento Ajustável

Apesar do sucesso do Modelo de Walecka na descrição de algumas propriedades da matéria nuclear, ele apresenta discrepâncias em suas predições com os valores experimentais de algumas propriedades como, por exemplo, compressibilidade e massa da estrela de nêutrons correspondente. Uma vez que, predições teóricas consistentes para a compressibilidade, em especial, e que sejam compatíveis com os valores experimentais é uma das questões fundamentais deste trabalho, é preciso encontrar um tratamento formal no qual essa discrepância seja resolvida. Modelos relativísticos efetivos, os quais baseiam-se na premissa de que, em teorias relativísticas quânticas de campos, pode-se trabalhar com graus de liberdade compostos e não só de partículas fundamentais, poderiam representar uma alternativa para a solução dessas discrepâncias. Uma teoria efetiva tem validade somente em uma escala de comprimento ou energia (tipicamente definida pelas massas das partículas), e as outras escalas entrarão, naturalmente, através das constantes de acoplamento.

O primeiro modelo efetivo que poderia ser usado para descrever o sistema seria o modelo de Boguta-Bodmer<sup>[52]</sup>. É um modelo não-linear que soluciona os problemas do Modelo de Walecka, adicionando termos (de ordem cúbica e quártica) de auto-interação do méson  $\sigma$ . Mas esse modelo traz novos problemas, porque apresenta comportamentos não físicos, tais como picos na equação de estado (que, como foi visto no capítulo 3, violam o princípio de Le Chatelier) e existência de três soluções de massa efetiva para uma mesma densidade bariônica. Outra alternativa seria um dos modelos de Zimanyi-Moszkowski<sup>[53]</sup>. São modelos não lineares que solucionam os problemas do modelo de Walecka, introduzindo uma dependência do campo  $\sigma$  na constante de acoplamento do méson  $\omega$  (ZM1, ZM2 e ZM3) e do próprio méson  $\sigma$  (ZM2 e ZM3) com os bárions. Será usado, neste trabalho, um modelo de acoplamento ajustável <sup>[54]</sup>. Ao contrário dos modelos de Zimanyi-Moszkowsky, ele tem uma parametrização das constantes de acoplamento ajustável,

característica essa, que permite a ampliação de seu escopo de validade.

## 5.1 Densidade Lagrangeana

A estrutura da densidade lagrangeana do modelo ajustável é análoga à do capítulo anterior, só que, agora, em termos de graus de liberdade bariônicos, além dos núcleons, serão considerados também os híperons, de forma a incluir o octeto bariônico fundamental. É importante considerá-los no modelo utilizado porque, à medida em que a densidade bariônica aumenta, a energia de Fermi cresce o suficiente para alcançar valores que excedem o valor correspondente à massa dos híperons, e a conversão para essas partículas reduz a energia e a pressão do sistema, sendo esse um estado preferencial. Então, tanto a equação de Dirac para os bárions quanto os termos de interação dos bárions com os mésons estão sendo somados, sendo os bárions representados pelo campo espinorial  $\psi_B$  com massa  $M_B$ .

Nesse modelo, além do méson  $\sigma$  e do méson  $\omega$ , será incluído também o méson  $\rho$ . Ele, assim como o méson  $\omega$ , é, no espaço-tempo, um bóson vetorial, logo, tem um termo de interação com os bárions análogo ao do méson  $\omega$  e é representado pela densidade lagrangeana de Proca. Ele é representado pelo campo vetorial  $\rho^\mu$  e tem massa  $m_\rho$ . Porém, no espaço de isospin, ele é um isovetor e tem as duas primeiras componentes do campo  $\rho^\mu$  efetivamente nulas, restando apenas  $\rho_3^\mu$ <sup>[55]</sup>. Isso se deve à condição de invariância rotacional em torno do eixo de quantização no espaço de isospin. Fisicamente, o méson  $\rho$  introduz uma assimetria entre o número de prótons e nêutrons no sistema (já que é através dele que o isospin das partículas entra na densidade lagrangeana), o que é muito importante já que, em uma estrela de nêutrons, têm-se muito mais nêutrons do que prótons.

O méson  $\sigma$ , ao invés de se acoplar apenas diretamente aos bárions, como antes, agora contribui para a dinâmica do sistema também através da sua participação na conformação das “constantes” de acoplamento associadas à interação dos outros mésons com os bárions e da sua própria constante de acoplamento. Nesse modelo, os léptons (não interagentes), múons e elétrons equilibram a carga positiva dos bárions. Eles são representados pela densidade lagrangeana de Dirac (porque são férmions), pelo campo espinorial  $\psi_\lambda$  e têm massa  $m_\lambda$ . Assim, a densidade lagrangeana para o modelo de acoplamento ajustável pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - M_B) \psi_B + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \left( -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) + \left( -\frac{1}{4} \rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu \right) \\ & + (g_{\sigma B}^* \bar{\psi}_B \psi_B \sigma - g_{\omega B}^* \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde os tensores  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\rho_{\mu\nu}$  são definidos na forma:

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \quad (5.2)$$

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu. \quad (5.3)$$

O isovetor  $\tau$ , que aparece devido à existência do campo vetorial-isovetorial  $\rho$ , é composto a partir das matrizes de Pauli:

$$\tau = \tau_x \mathbf{i} + \tau_y \mathbf{j} + \tau_z \mathbf{k}. \quad (5.4)$$

Na densidade lagrangeana (5.1), de forma a incorporar a participação dinâmica do méson  $\sigma$  nas constantes de acoplamento  $g_{\sigma B}$ ,  $g_{\omega B}$  e  $g_{\rho B}$ , foi feito um reescalonamento:

$$g_{\sigma B}^* \equiv m_{\lambda B}^* g_{\sigma B}, \quad (5.5)$$

$$g_{\omega B}^* \equiv m_{\beta B}^* g_{\omega B}, \quad (5.6)$$

$$g_{\rho B}^* \equiv m_{\gamma B}^* g_{\rho B}, \quad (5.7)$$

onde:

$$m_{iB}^* \equiv \left( 1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B} \right)^{-i}, \quad (5.8)$$

em que  $i = \lambda, \beta$  ou  $\gamma$  representa parâmetros reais (positivos ou negativos) que variam continuamente. Cada conjunto de parâmetros forma um novo modelo e é objetivo desse trabalho escolher, através de variações sistemáticas dos parâmetros  $\lambda, \beta$  e  $\gamma$ , o modelo que melhor descreva a fenomenologia de estrelas de nêutrons.

Rearranjando os termos da densidade lagrangeana (5.1), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T = & \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B}^* \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \tau \cdot \rho^\mu) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) + \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu} + m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu). \end{aligned} \quad (5.9)$$

A densidade lagrangeana (5.9), junto com as definições (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8), origina um modelo relativístico efetivo que representa a generalização de outros modelos efetivos encontrados na literatura. Isso pode ser melhor observado tomando-se alguns limites dos parâmetros ajustáveis do modelo. Assim, para  $\lambda, \beta$  e  $\gamma$  tendendo a zero,  $m_{\lambda B}^* = m_{\beta B}^* = m_{\gamma B}^* \rightarrow 1$  e o modelo de Walecka é recuperado. Para  $\lambda$  igual à unidade e  $\beta$  e  $\gamma$  tendendo a zero,  $m_{\lambda B}^* = (1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{M_B})^{-1}$  e  $m_{\beta B}^* = m_{\gamma B}^* \rightarrow 1$  e o modelo ZM1 é recuperado. Para  $\lambda, \beta$  e  $\gamma$  iguais à unidade,  $m_{\lambda B}^* = m_{\beta B}^* = m_{\gamma B}^* = (1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{M_B})^{-1}$  e o modelo ZM3 é então recuperado. Quando os índices do modelo tendem a infinito ( $i \rightarrow \infty$ ), o acoplamento torna-se exponencial (prova no apêndice A):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_{nB}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{iM_B} \right)^{-i} g_{nB} \rightarrow e^{-\frac{g_{\sigma\sigma}}{M_B}} g_{nB}, \quad (5.10)$$

onde  $n$  pode representar  $\sigma$ ,  $\omega$  ou  $\rho$ , contemplando, assim, contribuições não-enumeráveis de termos, por exemplo, de interações do tipo  $\psi_B \frac{g_\sigma}{M_B} \sigma \bar{\psi}_B$ , em diferentes ordens, tornando a interpretação dos resultados extremamente complexa devido a não-linearidade. O acoplamento exponencial é, por outro lado, importante por seu caráter de *naturalidade*<sup>[56]</sup>.

Os índices também podem variar de forma contínua e assumir valores intermediários aos dos modelos citados acima. Esses modelos serão classificados em 3 grupos:

- Escalar:  $\lambda$  varia e  $\beta$  e  $\gamma$  são sempre nulos; por exemplo: modelos de Walecka e ZM1.
- Vetorial:  $\lambda$  varia com o vínculo  $\lambda=\beta=\gamma$ ; por exemplo: modelos de Walecka e ZM3.
- Independente:  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam sem vínculo algum.

O comportamento dos dois primeiros grupos já foi analisado<sup>[54]</sup> enquanto o terceiro grupo está sendo proposto, nesta dissertação, segundo sabemos, pela primeira vez.

## 5.2 Equações de movimento

Agora, vamos aplicar a Equação de Euler-Lagrange à densidade lagrangeana do modelo ajustável (5.9) para obter as correspondentes equações de movimento.

### 5.2.1 Para o campo $\sigma$

Nesse caso, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) = 0 \quad (5.11)$$

$$\sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( -\frac{\partial g_{\omega B}^*}{\partial \sigma} \omega^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho B}^*}{\partial \sigma} \tau \cdot \rho^\mu \right) + g_{\sigma B}^* + \frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \sigma} \sigma \right] \psi_B - m_\sigma^2 \sigma - \partial_\mu (\partial^\mu \sigma) = 0. \quad (5.12)$$

Para obter-se as derivadas correspondentes, substitui-se (5.8) em (5.5), (5.6) e (5.7) e, após proceder-se à derivação parcial em função de  $\sigma$  das correspondentes constantes de acoplamento, tem-se:

$$g_{\sigma B}^* = \left( 1 + \frac{g_\sigma \sigma}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda} g_{\sigma B} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \sigma} = -\lambda \left( 1 + \frac{g_\sigma \sigma}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda-1} \frac{g_\sigma g_{\sigma B}}{\lambda M_B} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \sigma} = -(m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_\sigma g_{\sigma B}}{M_B}, \quad (5.15)$$

$$g_{\omega B}^* = \left( 1 + \frac{g_\sigma \sigma}{\beta M_B} \right)^{-\beta} g_{\omega B} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial g_{\omega B}^*}{\partial \sigma} = -\beta \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\beta M_B}\right)^{-\beta-1} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{\beta M_B} \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial g_{\omega B}^*}{\partial \sigma} = -(m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B}, \quad (5.18)$$

$$g_{\rho B}^* = \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\gamma M_B}\right)^{-\gamma} g_{\rho B} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial g_{\rho B}^*}{\partial \sigma} = -\gamma \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma}}{\gamma M_B}\right)^{-\gamma-1} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{\gamma M_B} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial g_{\rho B}^*}{\partial \sigma} = -(m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B}. \quad (5.21)$$

Então, substituindo as derivadas na equação de movimento para  $\sigma$  resulta:

$$\begin{aligned} \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_{\mu} \left( - \left( - (m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \right) \omega^{\mu} - \frac{1}{2} \left( - (m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu} \right) \right. \\ \left. + \left( m_{\lambda B}^* g_{\sigma B} \right) + \left( - (m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} g_{\sigma B}}{M_B} \right) \sigma \right] \psi_B - m_{\sigma}^2 \sigma - \partial_{\mu} (\partial^{\mu} \sigma) = 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

de forma que

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m_{\sigma}^2) \sigma = \\ \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_{\mu} \left( (m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \omega^{\mu} + \frac{1}{2} (m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu} \right) + g_{\sigma B} m_{\lambda B}^* - (m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} g_{\sigma B}}{M_B} \sigma \right] \psi_B. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Definindo a razão entre as constantes de acoplamento de interação dos bárions e dos núcleons com os mésons:

$$\chi_{nB} = \frac{g_{nB}}{g_n}, \quad (5.24)$$

onde n pode ser  $\sigma$ ,  $\omega$  ou  $\rho$ , a equação do campo  $\sigma$  fica, então, escrita como:

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m_{\sigma}^2) \sigma = \\ g_{\sigma} \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_{\mu} \left( (m_{\beta B}^*)^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega^{\mu} + \frac{1}{2} (m_{\gamma B}^*)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu} \right) + \chi_{\sigma B} m_{\lambda B}^* - (m_{\lambda B}^*)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma \right] \psi_B, \end{aligned} \quad (5.25)$$

que é a Equação de Klein-Gordon com fontes escalar e vetorial.

### 5.2.2 Para o campo $\omega$

A equação dinâmica para o bóson vetorial isoescalar é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^{\mu}} - \partial^{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\nu} \omega^{\mu})} \right) = 0 \quad (5.26)$$

$$-\sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu g_{\omega B}^* \psi_B + m_\omega^2 \omega_\mu - \partial^\nu (\omega_{\mu\nu}) = 0, \quad (5.27)$$

tal que

$$-\partial^\nu \omega_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu = \sum_B m_{\beta B}^* g_{\omega B} \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B, \quad (5.28)$$

que é a Equação de Proca com fonte vetorial e corrente bariônica, em analogia à corrente eletromagnética da eletrodinâmica quântica (QED).

### 5.2.3 Para o campo $\rho$

A equação dinâmica para o bóson vetorial isovetorial é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \rho^\mu)} \right) = 0 \quad (5.29)$$

$$-\sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \boldsymbol{\tau} \psi_B + m_\rho^2 \rho_\mu - \partial^\nu (\rho_{\mu\nu}) = 0, \quad (5.30)$$

tal que

$$-\partial^\nu \rho_{\mu\nu} + m_\rho^2 \rho_\mu = \frac{1}{2} \sum_B m_{\gamma B}^* g_{\rho B} \bar{\psi}_B \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \psi_B, \quad (5.31)$$

que é a Equação de Proca com fonte vetorial e corrente bariônica.

### 5.2.4 Para o campo $\psi_\lambda$

A equação para os léptons é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\lambda} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi}_\lambda)} \right) = 0 \quad (5.32)$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda = 0, \quad (5.33)$$

que é a Equação de Dirac sem fontes porque os léptons, nesse modelo, não interagem entre si nem com os demais campos do sistema.

### 5.2.5 Para o campo $\psi_B$

A equação para os bárions é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} \right) = 0, \quad (5.34)$$

ou

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B}^* \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B = 0, \quad (5.35)$$

que é a Equação de Dirac com campos mesônicos vetoriais e escalar.

Pode-se notar que, se nas equações de movimento todos os  $g_{nB}^*$  forem substituídos por  $g_n$ , os  $m_{iB}^*$  por 1, os  $(m_{iB}^*)^{\frac{1+i}{i}}$  por 0 e todos os  $\chi_{nB}$  por 1, são recuperadas as equações originais do modelo de Walecka.

### 5.3 Tensor Energia-momentum

Usando a mesma definição de tensor energia-momentum do capítulo anterior:

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \sum_{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}Q_{\eta})} \partial_{\nu}Q_{\eta} \quad (5.36)$$

e aplicando-a essa definição à densidade lagrangeana do modelo ajustável, obtém-se:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\left[ \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_{\theta}(i\partial^{\theta} - g_{\omega B}^* \omega^{\theta} - \frac{1}{2}g_{\rho B}^* \tau \cdot \rho^{\theta}) - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)] \psi_B + \sum_{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} (i\gamma_{\theta} \partial^{\theta} - m_{\lambda}) \psi_{\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\partial_{\theta} \sigma \partial^{\theta} \sigma - m_{\sigma}^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \omega_{\theta\phi} \omega^{\theta\phi} + m_{\omega}^2 \omega_{\theta} \omega^{\theta} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \rho_{\theta\phi} \rho^{\theta\phi} + m_{\rho}^2 \rho_{\theta} \rho^{\theta} \right) \right] g_{\mu\nu} \\ & + (\partial_{\mu} \sigma) \partial_{\nu} \sigma + (-\omega_{\mu\eta}) \partial_{\nu} \omega^{\eta} + (-\rho_{\mu\eta}) \partial_{\nu} \rho^{\eta} + (\sum_{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_{\mu} i) \partial_{\nu} \psi_{\lambda} + (\sum_B \bar{\psi}_B \gamma_{\mu} i) \partial_{\nu} \psi_B. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Usando as equações de movimento dos campos  $\psi_B$  e  $\psi_{\lambda}$ , o primeiro e o segundo termos da expressão acima desaparecem, restando então:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[ -(\partial_{\theta} \sigma \partial^{\theta} \sigma - m_{\sigma}^2 \sigma^2) + \left( \frac{1}{2} \omega_{\theta\phi} \omega^{\theta\phi} - m_{\omega}^2 \omega_{\theta} \omega^{\theta} \right) + \left( \frac{1}{2} \rho_{\theta\phi} \rho^{\theta\phi} - m_{\rho}^2 \rho_{\theta} \rho^{\theta} \right) \right] g_{\mu\nu} \\ & + \partial_{\mu} \sigma \partial_{\nu} \sigma - \omega_{\mu\eta} \partial_{\nu} \omega^{\eta} - \rho_{\mu\eta} \partial_{\nu} \rho^{\eta} + \sum_{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_{\mu} i \partial_{\nu} \psi_{\lambda} + \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_{\mu} i \partial_{\nu} \psi_B. \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 5.4 Aproximação de Campo Médio

Da aproximação de campo médio resulta para os campos mesônicos  $\sigma$  e  $\omega$ :

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0, \quad (5.39)$$

e

$$\omega^{\mu} \rightarrow \langle \omega^{\mu} \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0. \quad (5.40)$$

Como dito previamente, só existe a terceira componente do espaço de isospin de  $\rho$ :

$$\rho^{\mu} \rightarrow \langle \rho^{\mu} \rangle = \delta_{\mu 0} \rho_{03}, \quad (5.41)$$

de forma que é permitido escrever:

$$\frac{\tau \rho^{\mu}}{2} \rightarrow \frac{\langle \tau \rho^{\mu} \rangle}{2} = \frac{\tau_3 \delta_{\mu 0} \rho_{03}}{2}. \quad (5.42)$$

Redefinindo a terceira componente de isospin:

$$I_{3B} = \frac{\tau_3}{2}, \quad (5.43)$$

a contribuição do méson vetorial-isovetorial fica:

$$\frac{\tau \rho^{\mu}}{2} \rightarrow \delta_{\mu 0} \rho_{03} I_{3B}. \quad (5.44)$$

A seguir, essas definições serão utilizadas nas equações de movimento obtidas anteriormente:

### 5.4.1 Para a Equação de Movimento do Campo $\sigma$

A equação do méson escalar-isoescalar na aproximação de campo médio assume a forma:

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle \right], \quad (5.45)$$

onde:

$$(m_{iB}^*)_0 \equiv \left( 1 + \frac{g_\sigma \sigma_0}{i M_B} \right)^{-i}. \quad (5.46)$$

Substituindo (4.37) e (4.45), obtém-se, sucessivamente:

$$g_\sigma \sigma_0 = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \rho_s \right], \quad (5.47)$$

e

$$g_\sigma \sigma_0 \left( 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s \right) = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right], \quad (5.48)$$

e finalmente

$$g_\sigma \sigma_0 = \frac{\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right]}{1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s}. \quad (5.49)$$

### 5.4.2 Para a Equação de Movimento do Campo $\omega$

A equação do méson vetorial isoescalar na aproximação de campo médio assume a forma:

$$m_\omega^2 \omega_0 = \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 g_{\omega B} \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle. \quad (5.50)$$

Substituindo (4.45) nessa equação, tem-se que:

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 g_{\omega B} \rho_B. \quad (5.51)$$

Substituindo (5.24) na equação anterior resulta então:

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 \chi_{\omega B} \rho_B. \quad (5.52)$$

### 5.4.3 Para a Equação de Movimento do Campo $\rho$

A equação do méson vetorial-isovetorial na aproximação de campo médio toma a forma:

$$m_\rho^2 \rho_{03} = \sum_B (m_{\gamma B}^*)_0 g_{\rho B} I_{3B} \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \psi_B \rangle. \quad (5.53)$$

Substituindo (4.45), resulta:

$$m_\rho^2 \rho_{03} = \sum_B (m_{\gamma B}^*)_0 g_{\rho B} I_{3B} \rho_B. \quad (5.54)$$

Substituindo (5.24) na equação anterior, obtém-se:

$$g_\rho \rho_{03} = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \sum_B (m_{\gamma B}^*)_0 \chi_{\rho B} I_{3B} \rho_B. \quad (5.55)$$

Analisando de outra forma, pode-se definir as densidades de isospin para os prótons e nêutrons como  $\frac{\rho_p}{2}$  e  $-\frac{\rho_n}{2}$ , para obter-se outra forma para a equação de movimento de  $\rho$ :

$$\frac{\rho_p - \rho_n}{2} = \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 I_{3B} \psi_B \rangle, \quad (5.56)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = (m_{\gamma B}^*)_0 g_{\rho B} \sum_B \frac{\rho_p - \rho_n}{2}, \quad (5.57)$$

e

$$g_\rho \rho_{03} = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} (m_{\gamma B}^*)_0 \chi_{\rho B} \frac{\rho_p - \rho_n}{2}. \quad (5.58)$$

### 5.4.4 Para a Equação de Movimento do Campo $\bar{\psi}_\lambda$

Para os léptons, a equação dinâmica na aproximação de campo médio é :

$$\langle (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda \rangle = 0. \quad (5.59)$$

### 5.4.5 Para a Equação de Movimento do Campo $\bar{\psi}_B$

Para os bárions, a equação dinâmica na aproximação de campo médio resulta em:

$$\langle [(\gamma_\mu i\partial^\mu - \gamma_0 (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 - \gamma_0 (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \rho_{03}) - (M_B - (g_{\sigma B}^*)_0 \sigma_0)] \psi_B \rangle = 0, \quad (5.60)$$

onde, além dos termos livres, têm-se também os termos que representam as interações dos bárions com os mésons escalar-isoescalar, vetorial-isoescalar e vetorial-isovetorial.

Definindo a massa efetiva bariônica:

$$M_B^* = M_B - (g_{\sigma B}^*)_0 \sigma_0 \quad (5.61)$$

e substituindo-a em (5.60), tem-se:

$$\left\langle [\gamma_\mu^i \partial^\mu - \gamma_0 (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 - \gamma_0 (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \rho_{03} - M_B^*] \psi_B \right\rangle = 0. \quad (5.62)$$

Pode-se notar, novamente, que, se nas equações de movimento na aproximação de campo médio, os os  $g_{nB}^*$  forem substituídos por  $g_n$ , os os  $m_{iB}^*$  por 1, os os  $(m_{iB}^*)^{\frac{1+i}{i}}$  por 0 e dos os  $\chi_{nB}$  por 1, recuperamos as equações do modelo de Walecka na aproximação de campo médio.

## 5.5 Pressão e Energia

### 5.5.1 Densidade Bariônica

Em analogia à equação (4.89) do modelo de Walecka, o somatório referente à degenerescência dos bárions será substituído por  $2J_B + 1$  ( $J_B$  representa o spin do bárion) já que, agora, todo o octeto bariônico fundamental é contemplado na densidade lagrangeana e não só núcleons. A expressão para a densidade bariônica de cada bárion fica então:

$$\rho_B = \frac{2J_B + 1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k, \quad (5.63)$$

ou

$$\rho_B = \frac{2J_B + 1}{6\pi^2} k_{FB}^3 \quad (5.64)$$

As características físicas de cada bárion podem ser vistas na tabela 1.

Tabela 1: Propriedades dos bárions constituintes do octeto bariônico fundamental.

B bárion	$M_B$ massa (MeV)	J spin	I isospin	$I_3$ 3 <sup>a</sup> comp. de isospin	S estranheza	Q carga elétrica
p	939	1/2	1/2	+1/2	0	+1
n	939	1/2	1/2	-1/2	0	0
$\Lambda$	1116	1/2	0	0	-1	0
$\Sigma^+$	1193	1/2	1	+1	-1	+1
$\Sigma^0$	1193	1/2	1	0	-1	0
$\Sigma^-$	1193	1/2	1	-1	-1	-1
$\Xi^0$	1318	1/2	1/2	+1/2	-2	0
$\Xi^-$	1318	1/2	1/2	-1/2	-2	-1

### 5.5.2 Densidade Escalar

Mudando de notação, substituindo-se  $\gamma$  por  $2J_B + 1$  em (4.114) (que reflete a inclusão do octeto bariônico) a expressão para a densidade escalar de cada bárion fica:

$$(\rho_s)_B = \frac{(2J_B + 1)M_B^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_B}} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M_B^*)^2}}, \quad (5.65)$$

ou

$$(\rho_s)_B = \frac{2J_B + 1}{4\pi^2} \left( k_{F_B} M_B^* \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{F_B}^2} - (M_B^*)^3 \ln \frac{k_{F_B} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{F_B}^2}}{M_B^*} \right) \quad (5.66)$$

### 5.5.3 Densidade Leptônica

Analogamente à densidade bariônica, pode-se definir uma densidade leptônica de cada lépton, de acordo com:

$$\rho_\lambda = \langle \psi_\lambda^\dagger \psi_\lambda \rangle. \quad (5.67)$$

Substituindo  $\gamma$  por 2 em (4.92) (para incluirmos 2 léptons), resulta:

$$\rho_\lambda = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_\lambda}^3. \quad (5.68)$$

### 5.5.4 Tensor Energia-Momentum na Aproximação de campo Médio

Utilizando as aproximações de campo médio na densidade lagrangeana do modelo ajustável, obtém-se a densidade lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{TMFT} = & \left\langle \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\mu i \partial^\mu - \gamma_0 (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 - \gamma_0 (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \rho_{03} - M_B^*] \psi_B \right\rangle \\ & + \left\langle \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i \gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda \right\rangle - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2. \end{aligned} \quad (5.69)$$

E, a partir dela, deriva-se o tensor energia momentum com as aproximações de campo médio, conforme segue. Primeiro, é usada a expressão do tensor energia-momentum para os campos  $\psi_\lambda$  e  $\psi_B$  que foram os únicos campos dos quais restaram derivadas temporais na densidade lagrangeana (5.69):

$$\begin{aligned} (T_{\mu\nu})_{MFT} = & - \left[ \left\langle \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\theta i \partial^\theta - \gamma_0 (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 - \gamma_0 (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \rho_{03} - M_B^*] \psi_B \right\rangle \right. \\ & + \left\langle \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i \gamma_\theta \partial^\theta - m_\lambda) \psi_\lambda \right\rangle - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \left. \right] g_{\mu\nu} \\ & + \left\langle \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu i \partial_\nu \psi_B \right\rangle + \left\langle \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda \gamma_\mu i \partial_\nu \psi_\lambda \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Depois, usando as equações de movimento no campo médio dos campos  $\bar{\psi}_B$  e  $\bar{\psi}_\lambda$ , os dois primeiros termos são cancelados, restando:

$$(T_{\mu\nu})_{MFT} = \left[ \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right] g_{\mu\nu} + \left\langle \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu i \partial_\nu \psi_B \right\rangle + \left\langle \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda \gamma_\mu i \partial_\nu \psi_\lambda \right\rangle. \quad (5.71)$$

### 5.5.5 Pressão

Da equação (4.28) resulta que:

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle_{MFT}. \quad (5.72)$$

Usando (5.71), (4.24) e (4.60), obtém-se:

$$p = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right) (-3) - \left\langle \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_i \partial_i \psi_B \right\rangle - \left\langle \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda \gamma_i \partial_i \psi_\lambda \right\rangle \right]. \quad (5.73)$$

Usando (4.42) e (4.63), tem-se que:

$$p = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 - \frac{1}{3} \left\langle \sum_B i \psi_B^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi_B \right\rangle - \frac{1}{3} \left\langle \sum_\lambda i \psi_\lambda^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi_\lambda \right\rangle. \quad (5.74)$$

Substituindo-se  $\psi^\dagger$  e  $\nabla\psi$  na fórmula acima, tanto para os campos bariônicos quanto para os campos leptônicos, e usando os resultados obtidos no capítulo anterior em (4.143) (adicionando os termos do méson  $\rho$  e dos léptons, levando em conta todo o octeto bariônico e substituindo  $\gamma$  pelo novo fator de degenerescência de spin), resulta:

$$p = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B+1}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2+(M_B^*)^2}} + \frac{1}{3} \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F\lambda}} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2+m_\lambda^2}}, \quad (5.75)$$

ou

$$p = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 + \sum_B \frac{2J_B+1}{6\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_{FB}^3 - \frac{3}{8} (M_B^*)^2 k_{FB} \right) \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2} + \frac{3}{8} (M_B^*)^4 \ln \frac{k_{FB} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{FB}^2}}{M_B^*} \right] + \sum_\lambda \frac{1}{3\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_{F\lambda}^3 - \frac{3}{8} m_\lambda^2 k_{F\lambda} \right) \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F\lambda}^2} + \frac{3}{8} m_\lambda^4 \ln \frac{k_{F\lambda} + \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F\lambda}^2}}{m_\lambda} \right]. \quad (5.76)$$

A pressão do modelo ajustável, agora, contém também um termo referente ao méson isovetorial e um termo referente aos léptons.

### 5.5.6 Energia

Da equação (4.30), segue:

$$\epsilon = \langle T_{00} \rangle_{MFT}. \quad (5.77)$$

Usando (5.71), (4.24) e (4.60), tem-se que:

$$\epsilon = \left( \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right) (1) + \left\langle \sum_B i \bar{\psi}_B \gamma_0 \partial_0 \psi_B \right\rangle + \left\langle \sum_\lambda i \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 \partial_0 \psi_\lambda \right\rangle. \quad (5.78)$$

Usando (4.42), obtêm-se:

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \left\langle \sum_B i\psi_B^\dagger \partial_0 \psi_B \right\rangle + \left\langle \sum_\lambda i\psi_\lambda^\dagger \partial_0 \psi_\lambda \right\rangle. \quad (5.79)$$

Substituindo  $\psi^\dagger$  e  $\nabla\psi$  na fórmula acima, tanto para os campos bariônicos quanto para os campos leptônicos, e usando os resultados obtidos no capítulo anterior em (4.162) (adicionando os termos do méson  $\rho$  e dos léptons, levando em conta todo o octeto bariônico e substituindo  $\gamma$  pelo novo fator de degenerescência de spin):

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \sum_B \frac{2J_B+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k \epsilon^+ + \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F\lambda}} d^3k \epsilon^+. \quad (5.80)$$

Para os bárions,  $\epsilon^+$  é construída a partir de (4.164), acrescentando-se um termo referente ao méson isovetorial (que contém a terceira componente de isospin):

$$\epsilon^+ = \sqrt{k_{FB}^2 + (M_B^*)^2} + (g_{\omega B}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho B}^*)_0\rho_{03}I_{3B}, \quad (5.81)$$

onde:

$$(g_{nB}^*)_0 = (m_{iB}^*)_0 g_{nB}, \quad (5.82)$$

e em que  $n$  pode ser  $\sigma$ ,  $\omega$  ou  $\rho$  e  $i$  pode ser  $\lambda$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$ .

Para os léptons, permanece a forma:

$$\epsilon^+ = \sqrt{k_\lambda^2 + m_\lambda^2}. \quad (5.83)$$

Substituindo-se na expressão para a energia, resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \sum_B \frac{2J_B+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k (\sqrt{k^2 + (M_B^*)^2} + (g_{\omega B}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho B}^*)_0\rho_{03}I_{3B}) \\ & + \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F\lambda}} d^3k \sqrt{k^2 + m_\lambda^2}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

ou

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \sum_B \frac{2J_B+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k \sqrt{k^2 + (M_B^*)^2} \\ & + \omega_0 \sum_B (g_{\omega B}^*)_0 \frac{2J_B+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k + \rho_{03} \sum_B (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \frac{2J_B+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k + \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F\lambda}} d^3k \sqrt{k^2 + m_\lambda^2}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Substituindo-se (5.64) nessa equação:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \sum_B \frac{2J_B+1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k \sqrt{k^2 + (M_B^*)^2} \\ & + \omega_0 \sum_B (g_{\omega B}^*)_0 \rho_B + \rho_{03} \sum_B (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \rho_B + \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F\lambda}} d^3k \sqrt{k^2 + m_\lambda^2}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Usando as equações de movimento dos mésons  $\omega$  e  $\rho$  na campo médio

$$m_\omega^2 \omega_0 = \sum_B (g_{\omega B}^*)_0 \rho_B, \quad (5.87)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = \sum_B (g_{\rho B}^*)_0 I_{3B} \rho_B, \quad (5.88)$$

a expressão para a densidade de energia fica escrita como:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B+1}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_B}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + (M_B^*)^2} + \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_\lambda}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + m_\lambda^2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

ou

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B+1}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} (M_B^*)^2 k_{F_B} + \frac{1}{4} k_{F_B}^3 \right) \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{F_B}^2} - \frac{1}{8} (M_B^*)^4 \ln \frac{k_{F_B} + \sqrt{(M_B^*)^2 + k_{F_B}^2}}{M_B^*} \right] \\ &+ \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} m_\lambda^2 k_{F_\lambda} + \frac{1}{4} k_{F_\lambda}^3 \right) \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F_\lambda}^2} - \frac{1}{8} m_\lambda^4 \ln \frac{k_{F_\lambda} + \sqrt{m_\lambda^2 + k_{F_\lambda}^2}}{m_\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (5.90)$$

A energia de modelo ajustável, agora, contém também um termo referente ao méson isovetorial e um termo referente aos léptons.

## 5.6 Constantes de Acoplamento

### 5.6.1 Constantes de Acoplamento dos Núcleons

Esta seção visa encontrar uma expressão para as constantes de acoplamento dos núcleons  $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$ ,  $\frac{g_\omega}{m_\omega}$  e  $\frac{g_\rho}{m_\rho}$  em função de  $\rho_0$  (densidade bariônica dos núcleons na saturação),  $\epsilon_0$  (densidade de energia na saturação),  $M_N$  (massa do núcleon) e  $(M_N^*)_0$  (massa efetiva do núcleon na saturação). Como as constantes de acoplamento serão calculadas no ponto de saturação, serão utilizadas expressões que contenham apenas os graus de liberdade relevantes para a dinâmica da matéria nuclear, os núcleons. Para calcular  $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$  e  $\frac{g_\omega}{m_\omega}$ , considera-se matéria nuclear simétrica, portanto sem o méson  $\rho$ .

A pressão (5.76) nesse ponto é igual a zero :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \\ & + \frac{4}{6\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} (k_{F_N})_0^3 - \frac{3}{8} (M_N^*)_0^2 (k_{F_N})_0 \right) \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{F_N})_0^2} + \frac{3}{8} (M_N^*)_0^4 \ln \frac{(k_{F_N})_0 + \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{F_N})_0^2}}{(M_N^*)_0} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.91)$$

A energia (5.90) é igual a  $\epsilon_0$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \\
& + \frac{4}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4}(k_{FN})_0^3 + \frac{1}{8}(M_N^*)_0^2(k_{FN})_0 \right) \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2} - \frac{1}{8}(M_N^*)_0^4 \ln \frac{(k_{FN})_0 + \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2}}{(M_N^*)_0} \right] = \epsilon_0.
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Na saturação, para matéria simétrica, vale:

$$(k_{FN})_0 = \left( \frac{3\pi^2}{2} \rho_0 \right)^{\frac{1}{3}}, \tag{5.93}$$

$$\rho_0 = \frac{2(k_{FN})_0^3}{3\pi^2}, \tag{5.94}$$

$$m_\sigma^2\sigma_0^2 = \frac{\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} 4 \left[ \left( (m_{\beta N}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_\omega}{M_N} \omega_0 + (m_{\gamma N}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_\rho}{M_N} \rho_{03} I_{3N} \right) \rho_0 + (m_{\lambda N}^*)_0 \rho_s \right]^2}{\left[ 1 + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda N}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{1}{M_N} \rho_s \right]^2}, \tag{5.95}$$

$$m_\omega^2\omega_0^2 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} 4 (m_{\beta N}^*)_0^2 \rho_0^2, \tag{5.96}$$

$$\rho_{03} = 0, \tag{5.97}$$

$$\rho_s = \frac{1}{4\pi^2} \left( (k_{FN})_0 (M_N^*)_0 \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2} - (M_N^*)_0^3 \ln \frac{(k_{FN})_0 + \sqrt{(M_N^*)_0^2 + (k_{FN})_0^2}}{(M_N^*)_0} \right). \tag{5.98}$$

Como a constante de acoplamento do méson  $\rho$   $\frac{g_\rho}{m_\rho}$  não pode ser calculada como as dos outros mésons, será utilizada a equação da densidade de energia, (5.89) (somente com os núcleons):

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \frac{2}{2\pi^2} \left[ \int_0^{k_{Fn}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} + \int_0^{k_{Fp}} dk \ k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} \right], \tag{5.99}$$

onde:

$$m_\rho^2\rho_{03}^2 = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} (m_{\gamma N}^*)_0^2 \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{4}. \tag{5.100}$$

Quando:

$$t = \frac{N - Z}{A} = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_N}, \tag{5.101}$$

$$\rho_N = \rho_n + \rho_p, \tag{5.102}$$

$$k_{Fn} = k_F (1 + t)^{\frac{1}{3}}, \tag{5.103}$$

$$\frac{dk_{Fn}}{dt} = k_F \frac{1}{3} (1 + t)^{-\frac{2}{3}}, \tag{5.104}$$

$$k_{Fp} = k_F (1 - t)^{\frac{1}{3}}, \tag{5.105}$$

$$\frac{dk_{Fp}}{dt} = -k_F \frac{1}{3} (1-t)^{-\frac{2}{3}}, \quad (5.106)$$

onde  $t$  é o parâmetro de assimetria, obtém-se para a terceira componente do campo  $\rho$ :

$$m_{\rho}^2 \rho_{03}^2 = \frac{g_{\rho}^2}{m_{\rho}^2} (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{t^2 \rho_N^2}{4}. \quad (5.107)$$

Dividindo a densidade de energia pela densidade dos núcleons e substituindo a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\rho_N} &= \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{2} m_{\sigma}^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{2} m_{\omega}^2 \omega_0^2 + \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{2} \frac{g_{\rho}^2}{m_{\rho}^2} (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{t^2 \rho_N^2}{4} \\ &+ \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_{Fn}} dk \quad k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} + \int_0^{k_{Fp}} dk \quad k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} \right], \end{aligned} \quad (5.108)$$

ou então

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\rho_N} &= \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{2} m_{\sigma}^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{2} m_{\omega}^2 \omega_0^2 + \frac{g_{\rho}^2}{m_{\rho}^2} (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{t^2 \rho_N}{8} \\ &+ \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_{Fn}} dk \quad k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} + \int_0^{k_{Fp}} dk \quad k^2 \sqrt{k^2 + (M_N^*)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Derivando essa expressão em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t} &= \frac{1}{8} \left( \frac{g_{\rho}}{m_{\rho}} \right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 2t \rho_N + \frac{1}{\rho_N} \frac{1}{\pi^2} \left[ k_{Fn}^2 \sqrt{k_{Fn}^2 + (M_N^*)^2} \frac{dk_{Fn}}{dt} \right. \\ &\quad \left. + k_{Fp}^2 \sqrt{k_{Fp}^2 + (M_N^*)^2} \frac{dk_{Fp}}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Substituindo (5.94), (5.103), (5.104), (5.105) e (5.106), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t} &= \frac{1}{8} \left( \frac{g_{\rho}}{m_{\rho}} \right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 2t \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 + \frac{3\pi^2}{2k_F^3} \frac{1}{\pi^2} \left[ k_F^2 (1+t)^{\frac{2}{3}} \sqrt{k_F^2 (1+t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2} \left( k_F \frac{1}{3} (1+t)^{-\frac{2}{3}} \right) \right. \\ &\quad \left. + k_F^2 (1-t)^{\frac{2}{3}} \sqrt{k_F^2 (1-t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2} \left( -k_F \frac{1}{3} (1-t)^{-\frac{2}{3}} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.111)$$

ou

$$\frac{\partial(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t} = \left( \frac{g_{\rho}}{m_{\rho}} \right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{k_F^2 (1+t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2} - \sqrt{k_F^2 (1-t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2} \right]. \quad (5.112)$$

Derivando em relação a  $t$  novamente, obtem-se:

$$\frac{\partial^2(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t^2} = \left( \frac{g_{\rho}}{m_{\rho}} \right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{1}{2} k_F^2 \frac{2}{3} (1+t)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{k_F^2 (1+t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2}} - \frac{-\frac{1}{2} k_F^2 \frac{2}{3} (1-t)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{k_F^2 (1-t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2}} \right] \quad (5.113)$$

ou

$$\frac{\partial^2(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t^2} = \left( \frac{g_{\rho}}{m_{\rho}} \right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} + \frac{k_F^2}{6} \left[ \frac{(1+t)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{k_F^2 (1+t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2}} + \frac{(1-t)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{k_F^2 (1-t)^{\frac{2}{3}} + (M_N^*)^2}} \right] \quad (5.114)$$

Para  $t = 0$ :

$$\frac{\partial^2(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t^2} = \left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} + \frac{k_F^2}{6} \left[ \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}} + \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}} \right] \quad (5.115)$$

$$\frac{\partial^2(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t^2} = \left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{6\pi^2} + \frac{k_F^2}{3} \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}}. \quad (5.116)$$

A definição do coeficiente de assimetria<sup>[57]</sup> é relacionada com a segunda derivada da densidade de energia em relação ao parâmetro de assimetria:

$$a_{sim} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2(\frac{\epsilon}{\rho_N})}{\partial t^2} \right)_{t=0}, \quad (5.117)$$

que permite estabelecer uma relação entre o coeficiente de assimetria, o momentum de Fermi e a massa efetiva do nucleon:

$$a_{sim} = \left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 (m_{\gamma N}^*)^2 \frac{k_F^3}{12\pi^2} + \frac{k_F^2}{6} \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}}. \quad (5.118)$$

Manipulando a equação para colocá-la em termos da constante de acoplamento:

$$\frac{g_\rho}{m_\rho} = \sqrt{\frac{12\pi^2}{k_F^3} \frac{1}{(m_{\gamma N}^*)^2} \left( a_{sim} - \frac{k_F^2}{6} \frac{1}{\sqrt{k_F^2 + (M_N^*)^2}} \right)}, \quad (5.119)$$

tem-se a equação para a constante de acoplamento do méson  $\rho$ .

### 5.6.2 Constantes de Acoplamento dos Outros Bárions

As relações a seguir ajudam a determinar valores para as constantes de acoplamento dos bárions com os mésons a partir das constantes de acoplamento dos nucleons com os mésons para que se possa calcular as razões:

$$\chi_{nB} = \frac{g_{nB}}{g_n}, \quad (5.120)$$

onde  $n$  pode ser  $\sigma$ ,  $\omega$  ou  $\rho$ . Para isso, serão adotadas como base as chamadas regras de contagem para quarks, resultando em um acoplamento do tipo SU(6).

#### Mésons $\sigma$ e $\omega$

O acoplamento desses mésons com os bárions é proporcional ao número de quarks dos tipos  $up$  e  $down$  que compõem esses bárions:

$$q_u = u, \quad (5.121)$$

$$q_d = d, \quad (5.122)$$

$$\Sigma = uus, uds, dds, \quad (5.123)$$

$$\Xi = uss, dss, \quad (5.124)$$

$$\Lambda = uds, \quad (5.125)$$

$$\text{Núcleon} = N = udd, uud. \quad (5.126)$$

Dessa contagem, resultam relações em que a constante de acoplamento  $g_\sigma$  de cada espécie é proporcional somente ao número de quarks *up* e *down* envolvidos:

$$g_{\sigma\Sigma} = 2g_{\sigma q_{u,d}}, \quad (5.127)$$

$$g_{\sigma\Xi} = g_{\sigma q_{u,d}}, \quad (5.128)$$

$$g_{\sigma\Lambda} = 2g_{\sigma q_{u,d}}, \quad (5.129)$$

$$g_{\sigma N} = 3g_{\sigma q_{u,d}}. \quad (5.130)$$

Ao eliminar as variáveis  $g_{\sigma q_{u,d}}$  das 3 primeiras equações, usando (5.130):

$$g_{\sigma\Sigma} = \frac{2}{3}g_{\sigma N}, \quad (5.131)$$

$$g_{\sigma\Xi} = \frac{1}{3}g_{\sigma N}, \quad (5.132)$$

$$g_{\sigma\Lambda} = \frac{2}{3}g_{\sigma N}. \quad (5.133)$$

Analogamente, para o méson  $\omega$ :

$$g_{\omega\Sigma} = \frac{2}{3}g_{\omega N}, \quad (5.134)$$

$$g_{\omega\Xi} = \frac{1}{3}g_{\omega N}, \quad (5.135)$$

$$g_{\omega\Lambda} = \frac{2}{3}g_{\omega N}. \quad (5.136)$$

Por motivos de conveniência será introduzida a notação compacta  $g_{\sigma N}, g_{\omega N} \rightarrow g_\sigma, g_\omega$ .

### Méson $\rho$

Parece claro, já que o méson  $\rho$  está relacionado com a assimetria de isospin, que suas constantes de acoplamento se relacionem de acordo com seu isospin:

$$I_{q_{u,d}} = \frac{1}{2}, \quad (5.137)$$

$$I_\Sigma = 1, \quad (5.138)$$

$$I_{\Xi} = \frac{1}{2}, \quad (5.139)$$

$$I_{\Lambda} = 0, \quad (5.140)$$

$$I_N = \frac{1}{2}. \quad (5.141)$$

Definem-se, então, relações em que a constante de acoplamento  $g_{\rho}$  de cada espécie é proporcional somente ao isospin das partículas envolvidas:

$$g_{\rho\Sigma} = 2g_{\rho q_{u,d}}, \quad (5.142)$$

$$g_{\rho\Xi} = g_{\rho q_{u,d}}, \quad (5.143)$$

$$g_{\rho\Lambda} = 0g_{\rho q_{u,d}}, \quad (5.144)$$

$$g_{\rho N} = g_{\rho q_{u,d}}. \quad (5.145)$$

Devem-se eliminar, agora, as variáveis  $g_{\sigma q_{u,d}}$  das 3 primeiras equações, usando (5.145):

$$g_{\rho\Sigma} = 2g_{\rho N}, \quad (5.146)$$

$$g_{\rho\Xi} = g_{\rho N}, \quad (5.147)$$

$$g_{\rho\Lambda} = 0. \quad (5.148)$$

**Calculando os  $\chi_{\sigma B}$**

$$\chi_{\sigma B} = \frac{g_{\sigma B}}{g_{\sigma}}. \quad (5.149)$$

Usando (5.131), (5.132) e (5.133):

$$\chi_{\sigma\Sigma} = \frac{g_{\sigma\Sigma}}{g_{\sigma}} = \frac{2}{3}, \quad (5.150)$$

$$\chi_{\sigma\Xi} = \frac{g_{\sigma\Xi}}{g_{\sigma}} = \frac{1}{3}, \quad (5.151)$$

$$\chi_{\sigma\Lambda} = \frac{g_{\sigma\Lambda}}{g_{\sigma}} = \frac{2}{3}. \quad (5.152)$$

Calculando os  $\chi_{\omega B}$

$$\chi_{\omega B} = \frac{g_{\omega B}}{g_{\omega}}. \quad (5.153)$$

Usando (5.134), (5.135) e (5.136):

$$\chi_{\omega\Sigma} = \frac{g_{\omega\Sigma}}{g_{\omega}} = \frac{2}{3}, \quad (5.154)$$

$$\chi_{\omega\Xi} = \frac{g_{\omega\Xi}}{g_{\omega}} = \frac{1}{3}, \quad (5.155)$$

$$\chi_{\omega\Lambda} = \frac{g_{\omega\Lambda}}{g_{\omega}} = \frac{2}{3}. \quad (5.156)$$

Calculando os  $\chi_{\rho B}$

$$\chi_{\rho B} = \frac{g_{\rho B}}{g_{\rho}} \quad (5.157)$$

Usando (5.146), (5.147) e (5.148):

$$\chi_{\rho\Sigma} = \frac{g_{\rho\Sigma}}{g_{\rho}} = 2, \quad (5.158)$$

$$\chi_{\rho\Xi} = \frac{g_{\rho\Xi}}{g_{\rho}} = 1, \quad (5.159)$$

$$\chi_{\rho\Lambda} = \frac{g_{\rho\Lambda}}{g_{\rho}} = 0. \quad (5.160)$$

## 5.7 Massa Efetiva

Para obter uma expressão de masa efetiva bariônica  $M_B^*$  em função de  $k_{FB}$ , substitui-se (5.49) em (5.61), obtendo:

$$M_B^* = M_B - \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{\frac{g_{\sigma}^2}{m_{\sigma}^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right]}{1 + \frac{g_{\sigma}}{m_{\sigma}^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s} \quad (5.161)$$

ou

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_{\sigma}^2}{m_{\sigma}^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right] \right\} \left\{ 1 + \frac{g_{\sigma}}{m_{\sigma}^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s \right\}^{-1}. \quad (5.162)$$

Substituindo (5.52) e (5.55) na equação acima, resulta:

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \left( \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 \chi_{\omega B} \rho_B \right) + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \sum_B (m_{\gamma B}^*)_0 \chi_{\rho B} I_{3B} \rho_B \right) I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right] \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s \right\}^{-1}, \quad (5.163)$$

Inserindo, nessa expressão, a expressão da densidade bariônica (5.64), resulta:

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \left( \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 \chi_{\omega B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{F_B}^3 \right) + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \sum_B (m_{\gamma B}^*)_0 \chi_{\rho B} I_{3B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{F_B}^3 \right) I_{3B} \right) \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{F_B}^3 + \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right] \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s \right\}^{-1}, \quad (5.164)$$

Substituindo, nessa expressão, a expressão da densidade escalar (5.66) com a forma da energia efetiva reduzida, tem-se:

$$M_B^* = M_B - \left\{ \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \left( \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \sum_B (m_{\beta B}^*)_0 \chi_{\omega B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{F_B}^3 \right) + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \sum_B (m_{\gamma B}^*)_0 \chi_{\rho B} I_{3B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{F_B}^3 \right) I_{3B} \right) \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{F_B}^3 + \chi_{\sigma B}(m_{\lambda B}^*)_0 \frac{(2J_B+1)}{4\pi^2} \left( k_{F_B} M^* E^* - (M^*)^3 \ln \frac{k_{F_B} + E^*}{M^*} \right) \right] \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{(2J_B+1)}{4\pi^2} \left( k_{F_B} M^* E^* - (M^*)^3 \ln \frac{k_{F_B} + E^*}{M^*} \right) \right\}^{-1}, \quad (5.165)$$

que é a expressão desejada para a massa efetiva.

## 5.8 Resultados Numéricos

### 5.8.1 Constantes de Acoplamento

Substituindo-se (5.96), (5.97) e (5.98) em (5.95), obtém-se uma equação que, com (5.91) e (5.92), forma um sistema de 3 equações e 3 incógnitas que será resolvido numericamente. Também é calculada numericamente a massa efetiva dos núcleons na saturação, a constante de acoplamento do méson  $\rho$  e o módulo de compressão da matéria nuclear.

É preciso ainda substituir os valores obtidos experimentalmente: a massa nua do núcleon  $M_N = 4,76 fm^{-1}$ , o coeficiente de assimetria  $a_{sim} = 32,5 MeV = 0,16 fm^{-1}$ ,  $\rho_0 = 0,17 fm^{-3}$  e  $\epsilon_0 = 0,79 fm^{-4}$ .

Para facilitar a análise dos resultados, será estudado cada grupo de modelos separadamente: escalar, vetorial e independente.

- Escalar:  $\lambda$  varia e  $\beta$  e  $\gamma$  são sempre nulos (figura 5.1).

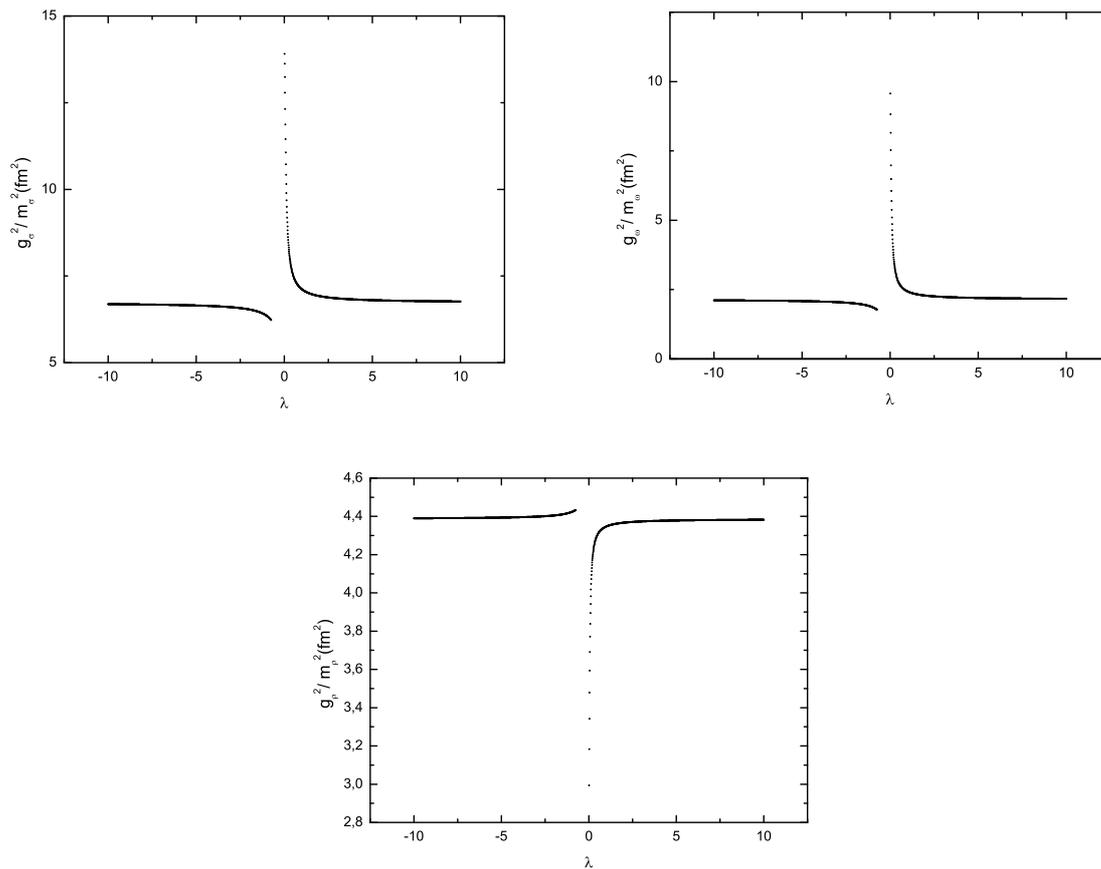


Figura 5.1: Constantes de acoplamento do méson  $\sigma$  (esquerda), do méson  $\omega$  (centro) e do méson  $\rho$  (direita) em função de parâmetro  $\lambda$ .

A massa efetiva na saturação tem como valores aceitáveis  $0,7 - 0,8 M_N$ , que correspondem (figura 5.2, esquerda) a  $0,06 < \lambda < 0,19$ . A compressibilidade na saturação tem como valores aceitáveis  $200 - 300 MeV$ , que correspondem (figura 5.2, direita) a  $0,04 < \lambda < 0,75$ . Fazendo uma intersecção com os dois conjuntos de dados, conclui-se que, para o caso escalar, reproduziu-se a massa efetiva e o módulo de compressão esperados para  $0,06 < \lambda < 0,19$ . Pode-se notar que, tanto na figura (5.1) quanto na figura (5.2), o sistema estabiliza para

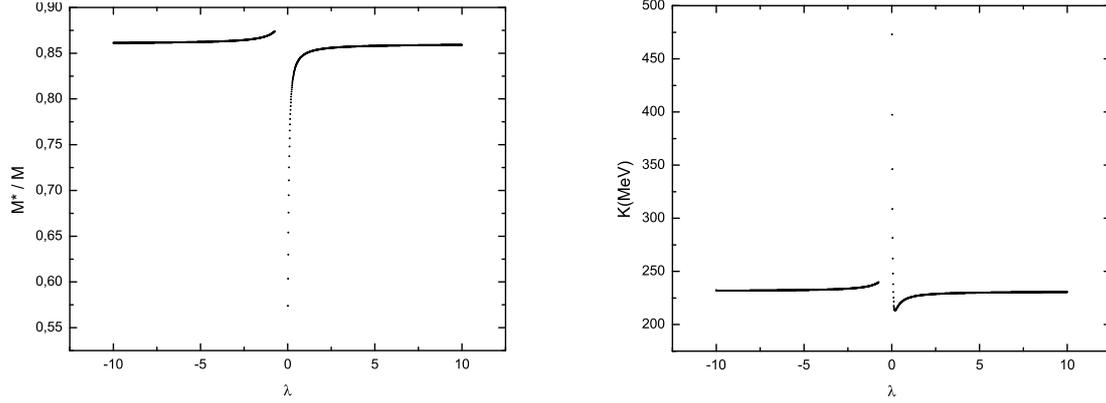


Figura 5.2: Massa efetiva (esquerda) e módulo de compressão (direita) em função de  $\lambda$ .

$$\lambda \gtrsim 2 \text{ e } \lambda \lesssim -2.$$

- Vetorial:  $\lambda$  varia com o vínculo  $\lambda=\beta=\gamma$  (figura 5.3).

A massa efetiva na saturação tem como valores aceitáveis, como citado anteriormente 0,7 - 0,8  $M_N$ , que correspondem (figura 5.4, esquerda) a  $\lambda < -1,31$  ou  $\lambda > 0,68$ . A compressibilidade na saturação tem como valores aceitáveis de 200 - 300 MeV, que correspondem (figura 5.4, direita) a  $0,15 < \lambda < 0,36$ . Da intersecção com os dois conjuntos de dados, conclui-se que, para o caso vetorial, não se reproduziu a massa efetiva e o módulo de compressão esperados para nenhum valor de  $\lambda$ ; portanto, essa configuração pode ser descartada.

Nesse caso, também se pode notar que, tanto na figura (5.3) quanto na figura (5.4), o sistema estabiliza-se para  $\lambda \gtrsim 1$  e  $\lambda \lesssim -2$ .

- Independente:  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variam sem vínculo algum (figura 5.5).

Neste capítulo, não serão discutidos valores aceitáveis para o parâmetro  $\gamma$ , porque sua única influência na saturação é na constante de acoplamento do méson  $\rho$ . Pode-se observar, na figura (5.5), que a constante de acoplamento do méson  $\rho$  satura para  $\gamma \gtrsim 2$  e  $\gamma \lesssim -2$ . Depois que estabiliza, a constante de acoplamento é, aproximadamente, a mesma para  $\gamma$  positivo ou negativo.

Segue, então, a análise do efeito da variação de  $\lambda$  e  $\beta$  no sistema. Variando-se  $\beta$  para um valor de  $\lambda$  fixo (figura 5.6, esquerda),  $K$  estabiliza para  $\beta$  maior que 10 ou 20 e menor que -10 ou -20. Para  $\beta$  positivo e  $\lambda$  menor que 5 o comportamento das curvas fica diferente,

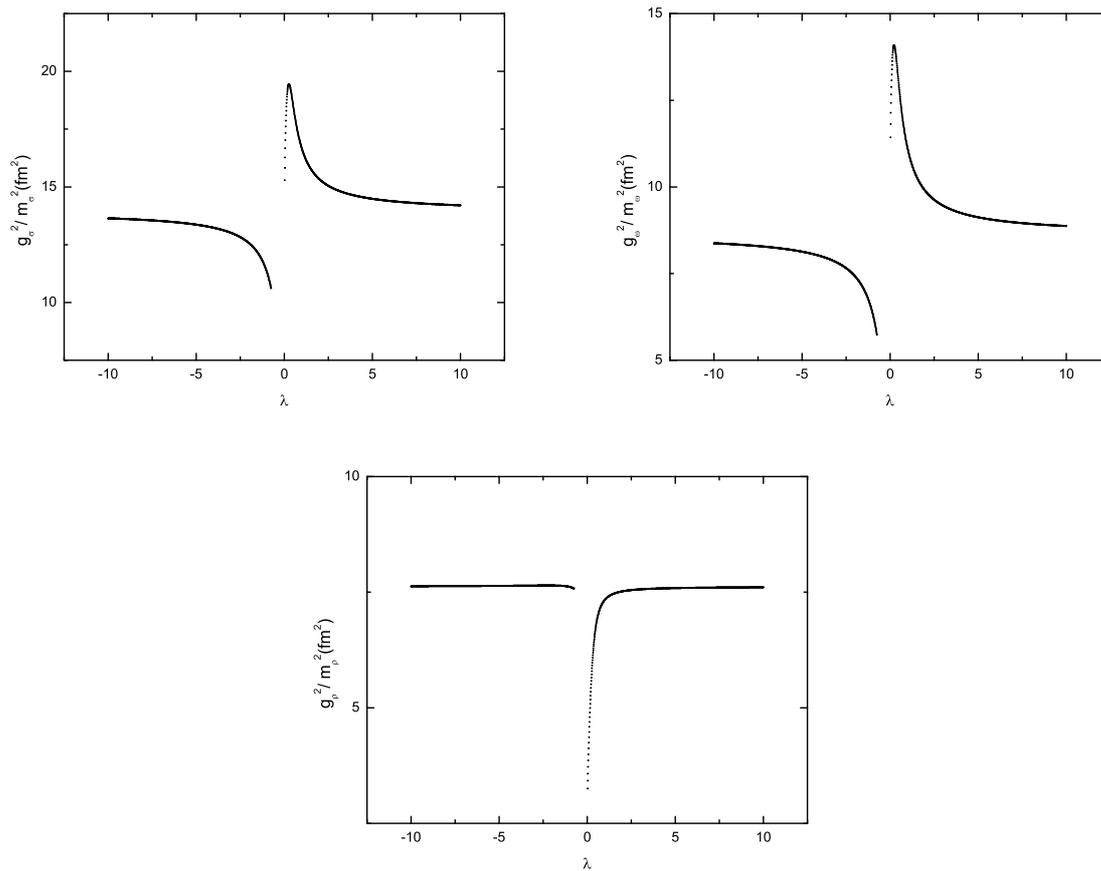


Figura 5.3: Constantes de acoplamento do méson  $\sigma$  (esquerda), do méson  $\omega$  (centro) e do méson  $\rho$  (direita) em função de  $\lambda$ .

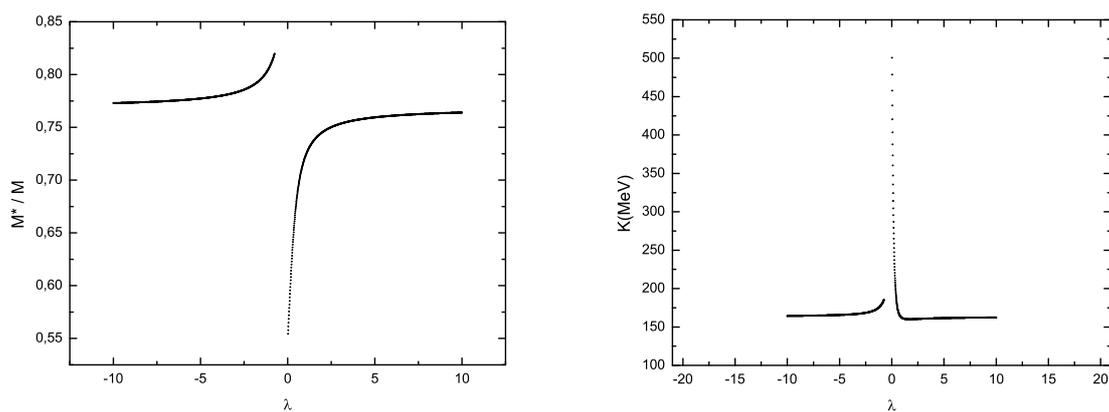


Figura 5.4: Massa efetiva (esquerda) e módulo de compressão (direita) em função de  $\lambda$ .

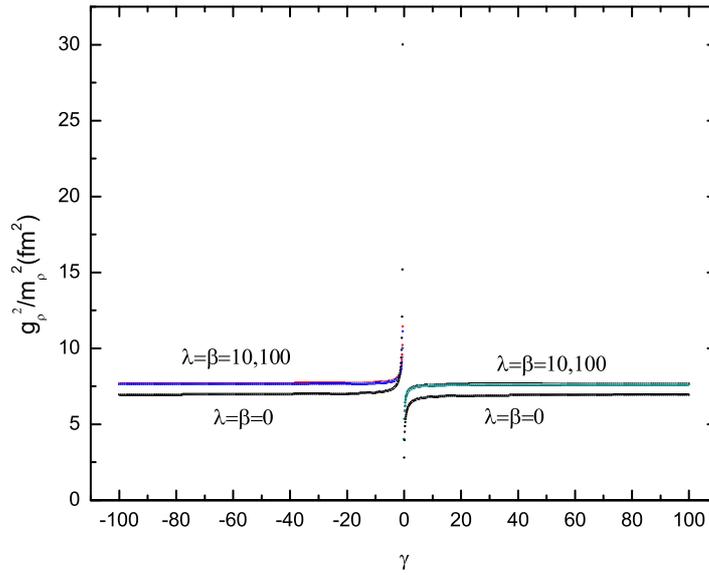


Figura 5.5: Constante de acoplamento do méson  $\rho$  em função do parâmetro  $\gamma$ .

porque, ao invés de decrescer com a diminuição de  $\lambda$ , as curvas crescem e saturam para valores bem maiores. Analisando de outra forma, se variar-se  $\lambda$  para um  $\beta$  fixo (figura 5.6 direita),  $K$  estabiliza para  $\lambda$  maior que 10 ou 20 e menor que -10 ou -20.

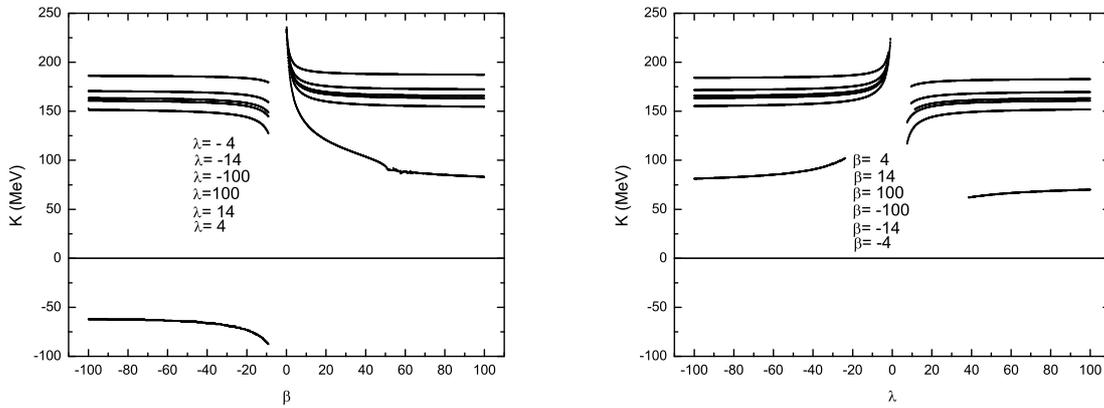


Figura 5.6: Módulo de compressão em função de  $\beta$  (esquerda) e em função de  $\lambda$  (direita).

Analisando o módulo de compressão da matéria nuclear e a massa efetiva bariônica em função dos parâmetros do modelo, pode-se ver que, para esse grupo, existem regiões em que o sistema não apresenta solução. Pode-se ver também que não se encontra nenhum

valor negativo de  $\lambda$  ou  $\beta$  que forneça um módulo de compressão maior que 200MeV e menor que 300MeV e uma massa efetiva na saturação maior que  $0,7M_N$  e menor que  $0,8M_N$  (vale notar que, se esses limites fossem estendidos para incluir uma massa efetiva de  $0,8M_N$  ou um módulo de compressão de 196MeV, ter-se-iam vários valores de  $\lambda$  e  $\beta$  aceitáveis). Nota-se ainda que, para valores positivos de  $\lambda$  e  $\beta$ , só existem valores aceitáveis para  $\beta$  menores que 1,35.

Basicamente, para cada valor de  $\beta$  existe um intervalo de  $\lambda$  em que o módulo de compressão e a massa efetiva na saturação adquirem os valores desejados (tabela 2). Portanto, pode-se escolher alguns conjuntos de valores de  $\lambda$  e  $\beta$  e investigar o comportamento do sistema.

Tabela 2: Intervalos de  $\beta$  e  $\lambda$  que correspondem à fenomenologia

$\beta$	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$
0,00	0,064→0,191	0,05	0,117→0,304
0,10	0,169→0,423	0,15	0,370→0,550
0,20	0,330→0,686	0,25	0,330→0,832
0,30	0,528→0,988	0,35	0,661→1,158
0,40	0,798→1,342	0,45	0,944→1,541
0,50	1,103→1,766	0,55	1,276→1,999
0,60	1,469→2,264	0,65	1,683→2,556
0,70	1,923→2,882	0,75	2,194→3,247
0,80	2,504→3,659	0,85	2,850→4,128
0,90	3,260→4,667	0,95	3,343→5,291
1,00	4,321→6,025	1,05	5,024→6,895
1,10	6,508→7,952	1,15	7,013→9,253
1,20	8,490→10,902	1,25	10,602→13,058
1,30	13,932→15,995	1,35	19,136→20,224

### 5.8.2 Massa Efetiva

Substituindo-se (5.46) em (5.82) e (5.82) em (5.61), tem-se a expressão para a massa efetiva bariônica:

$$M_B^* = M_B - \frac{g_{\sigma B} \sigma_0}{\left(1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B}\right)^\lambda} \quad (5.166)$$

$$\frac{M_B^*}{M_B} = 1 - \frac{\frac{g_{\sigma B} \sigma_0}{M_B}}{\left(1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B}\right)^\lambda} \quad (5.167)$$

Note-se que, para certos valores de  $\lambda$  e  $\sigma$ , a massa efetiva bariônica pode assumir valores negativos (não físicos). Examina-se, a seguir, em que condições a massa efetiva pode tornar-se negativa:

- no modelo de Walecka com méson  $\rho$ : efeito não observado no intervalo analisado.
- no modelo de Walecka com méson  $\rho$  e octeto bariônico: para  $\rho_B > 0,72fm^{-3}$ .
- modelo escalar com  $\lambda = 0,06$ : para  $\rho_B > 1,28fm^{-3}$ .
- no modelo escalar com  $\lambda = 0,13$ : efeito não observado no intervalo analisado.
- no modelo escalar com  $\lambda = 0,19$ : efeito não observado no intervalo analisado.
- no modelo independente com  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$ : para  $\rho_B > 1,32fm^{-3}$ .
- nos modelos exponenciais: efeito não observado no intervalo analisado.

Como pode-se ver, quando isso ocorre, os modelos só apresentam massa efetiva negativa para densidades que já saíram do limite de validade dos mesmos, pois é uma conjectura estabelecida na comunidade científica que existe uma transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks a uma densidade entre 2,5 a 4,0 vezes a densidade de saturação ( $0,42fm^{-3} < \rho_B < 0,68fm^{-3}$ )<sup>[50]</sup>. A partir desse ponto, os modelos que não tratam com os graus de liberdade dos quarks perdem a validade.

### 5.8.3 Equação de Estado

A equação de estado (EOS) representa as propriedades fundamentais da matéria nuclear. Sua determinação, um dos desafios para uma melhor compreensão da dinâmica de estrelas de nêutrons e pulsares, depende basicamente do estabelecimento de vínculos de natureza distinta (formais, fenomenológicos e conceituais), tema do trabalho desta dissertação.

As equações que relacionam  $p$  (5.76) e  $\epsilon$  (5.90) são chamadas de equações de estado da matéria nuclear em forma paramétrica. Elas são calculadas numericamente, e têm resultados diferentes para cada modelo. Apresenta-se, a seguir, algumas características das EOS associadas aos modelos em foco.

- Modelo de Walecka

Com a inclusão do octeto bariônico (figura 5.7), a pressão diminui, na média, substancialmente. Esse fato será discutido mais detalhadamente na seção que trata da função compressibilidade da matéria nuclear.

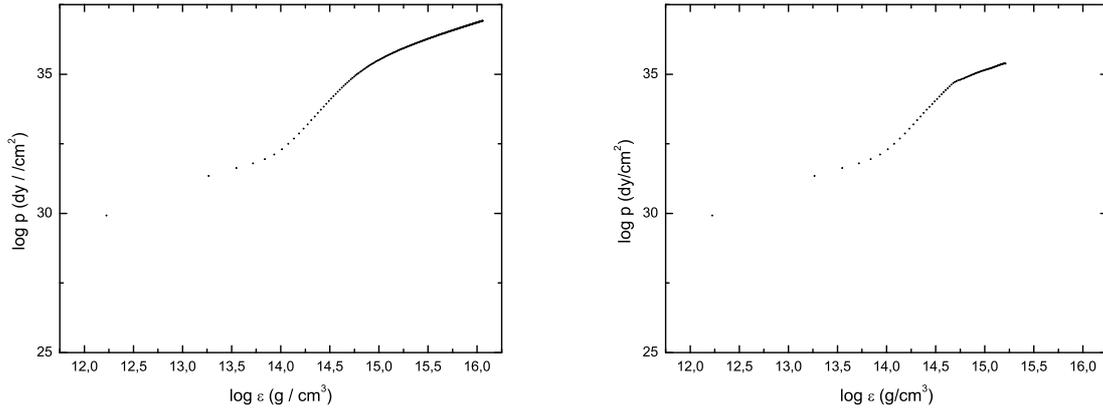


Figura 5.7: Equações de estado para os modelos de Walecka com méson  $\rho$  (esquerda) e com méson  $\rho$  e octeto bariônico (direita).

- Modelos Escalares

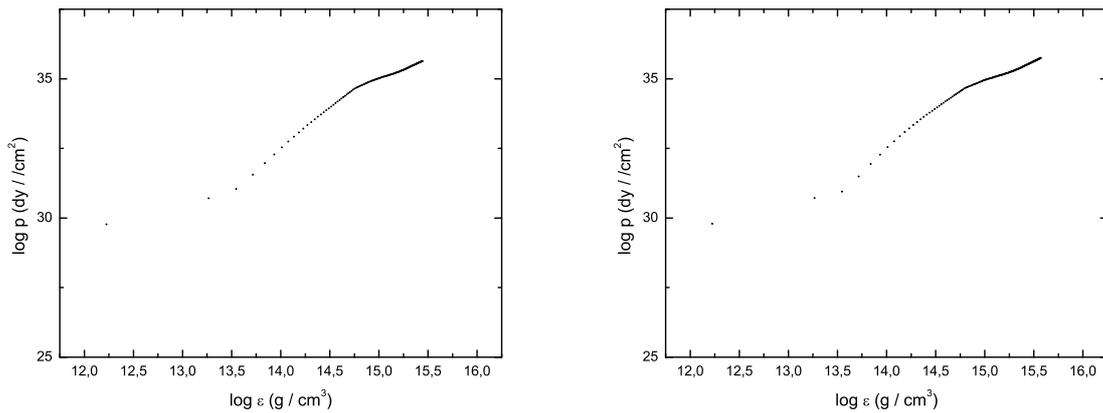


Figura 5.8: Equações de estado para  $\lambda = 0,06$  (esquerda) e para  $\lambda = 0,13$  (direita).

A pressão diminui muito pouco com o aumento de  $\lambda$  até 0,3. Para valores de  $\lambda$  maiores que 0,3 a pressão não varia mais (figuras 5.8 e 5.9).

- Modelos Independentes

Pode-se observar, na tabela 2, que, para  $\beta$  aumentar,  $\lambda$  também deve aumentar, de modo que a intensidade da atração nuclear de longo alcance (relacionada com o valor de  $\lambda$ ) contrabalance a da repulsão nuclear de curto alcance (relacionada com o valor de  $\beta$ ) e torne o sistema estável. Quando  $\beta$  aumenta até 0,5 e  $\lambda$  até 1,75, a pressão diminui. A

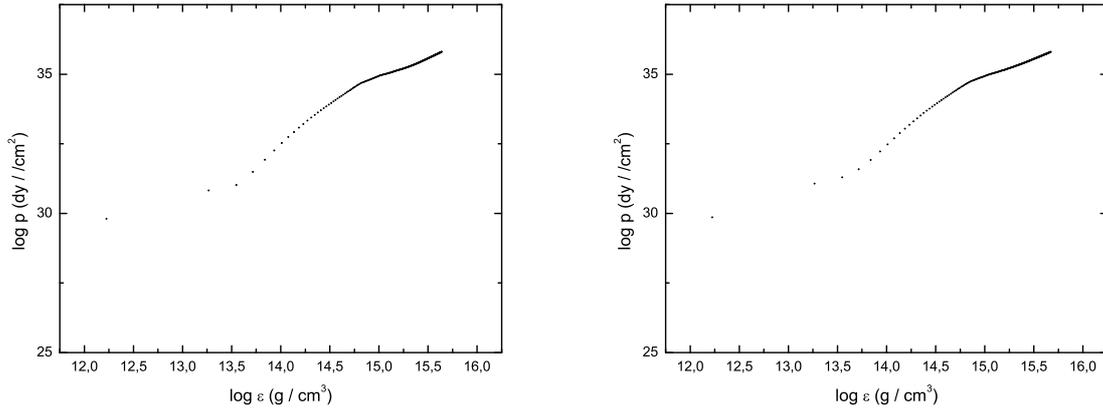


Figura 5.9: Equações de estado para  $\lambda = 0, 19$  (esquerda) e para  $\lambda \rightarrow \infty$  (direita).

partir desse ponto, a pressão praticamente não muda mais até  $\beta = 1,3$  e  $\lambda = 16$ . Daí em diante, a curva não é mais sensível a alterações de  $\lambda$ , mas diminui para o aumento de  $\beta$  até 10, a partir de onde a pressão já é praticamente igual à do modelo exponencial  $\beta, \lambda \rightarrow \infty$  (figura 5.10, esquerda).

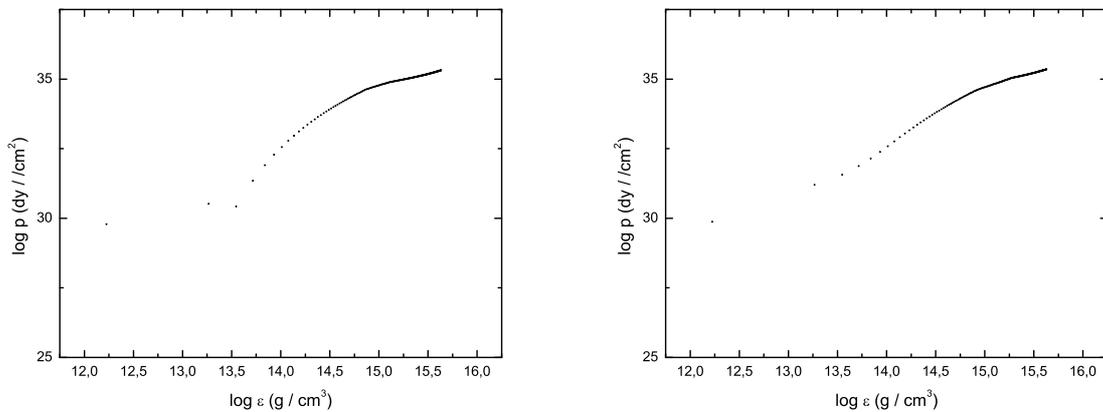


Figura 5.10: Equações de estado para  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$  (esquerda) e para  $\lambda, \beta, \gamma \rightarrow \infty$  (direita).

O aumento de  $\gamma$ , tanto negativo como positivo, muda um pouco a forma da curva da equação de estado, fazendo com que a pressão fique menor para energias mais altas e maior para energias mais baixas (figura 5.10, direita). Quando  $\gamma$  aumenta negativamente, o comportamento é o mesmo, porém mais acentuado, até uma certa densidade. Depois disso, a pressão começa a aumentar, tendendo a estabilizar-se da mesma forma que os

modelos com  $\gamma$  positivo.

## 5.9 Função Compressibilidade

Com a expressão para a compressibilidade em função da densidade obtida no capítulo anterior, considerando todo o octeto bariônico, segue que

$$K = \left( \sum_B 9\rho_B \right) \left( \sum_B \frac{d\mu}{d\rho_B} \right) \quad (5.168)$$

e, ao substituir a energia de Fermi dos bárions, (5.81), que é o autovalor da equação de Dirac modificada pelo méson  $\omega$  e pelo méson  $\rho$

$$\mu = \epsilon^+ = \sqrt{k_{FB}^2 + (M_B^*)^2} + (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho B}^*)_0 \rho_{03} I_{3B}, \quad (5.169)$$

obtém-se, assim:

$$K = \left( \sum_B 9\rho_B \right) \left( \sum_B \frac{d}{d\rho_B} \left( \sqrt{k_{FB}^2 + (M_B^*)^2} + (g_{\omega B}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho B}^*)_0 \rho_{03} I_{3B} \right) \right), \quad (5.170)$$

ou então

$$K = (\sum_B 9\rho_B) \left( \sum_B \left( \frac{k_{FB}}{\sqrt{k_{FB}^2 + (M^*)^2}} \frac{dk_{FB}}{d\rho_B} + \frac{M^*}{\sqrt{k_{FB}^2 + (M^*)^2}} \frac{dM^*}{d\rho_B} + (g_{\omega B}^*)_0 \frac{d\omega_0}{d\rho_B} + \omega_0 \frac{d(g_{\omega B}^*)_0}{d\rho_B} + (g_{\rho B}^*)_0 \frac{d\rho_{03}}{d\rho_B} I_{3B} + \rho_{03} \frac{d(g_{\rho B}^*)_0}{d\rho_B} I_{3B} \right) \right). \quad (5.171)$$

Para obter-se as derivadas acima, usa-se, primeiro, a definição de massa efetiva dos bárions:

$$M^* = M - g_{\sigma B} \left( 1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda} \sigma_0, \quad (5.172)$$

de forma que

$$\frac{dM^*}{d\rho_B} = -g_{\sigma B} \left( 1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} - g_{\sigma B} (-\lambda) \left( 1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda-1} \frac{g_{\sigma}}{\lambda M_B} \sigma_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \quad (5.173)$$

$$\frac{dM^*}{d\rho_B} = -g_{\sigma B} \left( 1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + g_{\sigma B} \left( 1 + \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{\lambda M_B} \right)^{-\lambda-1} \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (5.174)$$

Substituindo (5.46):

$$\frac{dM^*}{d\rho_B} = \left[ -(g_{\sigma B}^*)_0 + g_{\sigma B} (m_{\sigma B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{M_B} \right] \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (5.175)$$

Usando (5.64), pode-se escrever:

$$k_{FB} = \left( \frac{6\pi^2}{2J_B + 1} \rho_B \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.176)$$

e derivar:

$$\frac{dk_F}{d\rho_B} = \frac{1}{3} \left( \frac{6\pi^2}{2J_B + 1} \rho_B \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{6\pi^2}{2J_B + 1} \quad (5.177)$$

$$\frac{dk_F}{d\rho_B} = \frac{1}{3} k_F^{-2} \frac{6\pi^2}{2J_B + 1} \quad (5.178)$$

$$\frac{dk_F}{d\rho_B} = \frac{2\pi^2}{(2J_B + 1)k_F^2} = \frac{k_{FB}}{3\rho_B}. \quad (5.179)$$

Utilizando-se a aproximação de campo médio em (5.18) e derivando em relação a  $\rho_B$ :

$$\frac{d(g_{\omega B}^*)_0}{d\rho_B} = \frac{d(g_{\omega B}^*)_0}{d\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = -(m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (5.180)$$

Aplicando a aproximação de campo médio em (5.21) e derivando em relação a  $\rho_B$ :

$$\frac{d(g_{\rho B}^*)_0}{d\rho_B} = \frac{d(g_{\rho B}^*)_0}{d\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = -(m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (5.181)$$

A equação (5.52) pode ser escrita, então, como:

$$\omega_0 = \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_{\omega}^2} \rho_B, \quad (5.182)$$

tal que pode-se derivá-la em relação a  $\rho_B$ , usando (5.180):

$$\frac{d\omega_0}{d\rho_B} = \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_{\omega}^2} + \sum_B \frac{\rho_B}{m_{\omega}^2} \frac{d(g_{\omega B}^*)_0}{d\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_{\omega}^2} + \sum_B \frac{\rho_B}{m_{\omega}^2} \left( -(m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \right) \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \quad (5.183)$$

$$\frac{d\omega_0}{d\rho_B} = \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_{\omega}^2} - \sum_B \frac{\rho_B}{m_{\omega}^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (5.184)$$

Analogamente, podemos reescrever (5.55) como:

$$\rho_{03} = \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_{\rho}^2} I_{3B} \rho_B, \quad (5.185)$$

para derivar essa equação em relação a  $\rho_B$  usando (5.181):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{03}}{d\rho_B} &= \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_{\rho}^2} I_{3B} + \sum_B \frac{I_{3B}}{m_{\rho}^2} \rho_B \frac{d(g_{\rho B}^*)_0}{d\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \\ &= \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_{\rho}^2} I_{3B} + \sum_B \frac{I_{3B}}{m_{\rho}^2} \rho_B \left( -(m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \right) \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \end{aligned} \quad (5.186)$$

$$\frac{d\rho_{03}}{d\rho_B} = \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_{\rho}^2} I_{3B} - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_{\rho}^2} \rho_B (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}. \quad (5.187)$$

Substituindo todos os resultados na expressão para K, resulta:

$$\begin{aligned} K &= (\sum_B 9\rho_B) \left\{ \sum_B \left[ \frac{k_{FB}}{\sqrt{k_{FB}^2 + (M^*)^2}} \frac{k_{FB}}{3\rho_B} + \frac{M^*}{\sqrt{k_{FB}^2 + (M^*)^2}} \left( -(g_{\sigma B}^*)_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + g_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma} \sigma_0}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (g_{\omega B}^*)_0 \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_{\omega}^2} - \sum_B \frac{\rho_B}{m_{\omega}^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) + \omega_0 \left( -(m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma} g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (g_{\rho B}^*)_0 \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_{\rho}^2} I_{3B} - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_{\rho}^2} \rho_B (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) I_{3B} + \rho_{03} \left( -(m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma} g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) I_{3B} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.188)$$

Substituindo-se a expressão da energia efetiva (4.100) e a expressão do momentum de Fermi (5.176) na equação acima:

$$\begin{aligned}
K = (\sum_B 9\rho_B) & \left\{ \sum_B \left[ \frac{k_{FB}^2}{E^*} \frac{1}{3\rho_B} - \frac{M^*}{E^*} (g_{\sigma B}^*)_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + \frac{M^*}{E^*} g_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma\sigma_0}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right. \right. \\
& + (g_{\omega B}^*)_0 \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} - \sum_B \frac{\rho_B}{m_\omega^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma g_{\omega B}}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) - (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma g_{\omega B}}}{M_B} \omega_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \\
& \left. \left. + (g_{\rho B}^*)_0 \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_\rho^2} \rho_B (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma g_{\rho B}}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) I_{3B} - (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \rho_{03} \frac{g_{\sigma g_{\rho B}}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} I_{3B} \right] \right\}. \tag{5.189}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões do méson  $\omega$ , (5.182), méson  $\rho$ , (5.185) e a expressão da densidade bariônica (5.64):

$$\begin{aligned}
K = \left( \sum_B \frac{3(2J_B+1)}{2\pi^2} k_{FB}^3 \right) & \left\{ \sum_B \left[ \frac{2\pi^2}{2J_B+1} \frac{1}{k_{FB} E^*} - \frac{M^*}{E^*} (g_{\sigma B}^*)_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + \frac{M^*}{E^*} g_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma\sigma_0}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right. \right. \\
& + (g_{\omega B}^*)_0 \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} - \sum_B \frac{2J_B+1}{6\pi^2} k_{FB}^3 \frac{1}{m_\omega^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma g_{\omega B}}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \\
& \quad - (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\sigma g_{\omega B}}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} \frac{2J_B+1}{6\pi^2} k_{FB}^3 \right) \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \\
& + (g_{\rho B}^*)_0 \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_\rho^2} \frac{2J_B+1}{6\pi^2} k_{FB}^3 (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\sigma g_{\rho B}}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) I_{3B} \\
& \quad \left. \left. - (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} \frac{2J_B+1}{6\pi^2} k_{FB}^3 \right) \frac{g_{\sigma g_{\rho B}}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} I_{3B} \right] \right\}. \tag{5.190}
\end{aligned}$$

Para obter  $\frac{d\sigma_0}{d\rho_B}$ , basta rearranjar (5.47) na forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B & \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B \right. \\
& \left. + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \right] \tag{5.191}
\end{aligned}$$

e derivar essa equação com relação a  $\rho_B$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = & \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \frac{1+\beta}{\beta} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{d(m_{\beta B}^*)_0}{d\rho_B} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 \rho_B + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\omega_0}{d\rho_B} \rho_B + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 \right. \\
& + \frac{1+\gamma}{\gamma} (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{d(m_{\gamma B}^*)_0}{d\rho_B} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\rho_{03}}{d\rho_B} I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} \frac{d(m_{\lambda B}^*)_0}{d\rho_B} - \frac{1+\lambda}{\lambda} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d(m_{\lambda B}^*)_0}{d\rho_B} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \frac{k_{FB}^2 M^*}{\sqrt{k_{FB}^2+(M^*)^2}} \frac{dk_{FB}}{d\rho_B} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2+(M^*)^2}} \frac{dM^*}{d\rho_B} \\
& \left. - \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 (M^*)^2}{(k^2+(M^*)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dM^*}{d\rho_B} \right]. \quad (5.192)
\end{aligned}$$

Usando a expressão da energia efetiva (4.100), pode-se simplificar a equação acima:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = & \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \frac{1+\beta}{\beta} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{d(m_{\beta B}^*)_0}{d\rho_B} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 \rho_B + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\omega_0}{d\rho_B} \rho_B + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 \right. \\
& + \frac{1+\gamma}{\gamma} (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{d(m_{\gamma B}^*)_0}{d\rho_B} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\rho_{03}}{d\rho_B} I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} \frac{d(m_{\lambda B}^*)_0}{d\rho_B} - \frac{1+\lambda}{\lambda} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d(m_{\lambda B}^*)_0}{d\rho_B} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{E^*} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \frac{k_{FB}^2 M^*}{E^*} \frac{dk_{FB}}{d\rho_B} \\
& \left. + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4}{E^3} \frac{dM^*}{d\rho_B} \right]. \quad (5.193)
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas das constantes de acoplamento efetivas, (5.180) e (5.181), e uma expressão análoga a essas, que pode ser deduzida a partir de (5.15),

$$\frac{\partial g_{\sigma B}^*}{\partial \rho_B} = -(m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_\sigma g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B}, \quad (5.194)$$

a variação do campo escalar com a densidade bariônica fica:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = & \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ -\frac{1+\beta}{\beta} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{2+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B} g_\sigma}{M_B^2} \omega_0 \rho_B \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\omega_0}{d\rho_B} \rho_B + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 \right. \\
& - \frac{1+\gamma}{\gamma} (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B} g_\sigma}{M_B^2} \rho_{03} I_{3B} \rho_B \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\rho_{03}}{d\rho_B} I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \\
& + \left( -\chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_\sigma}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + \frac{1+\lambda}{\lambda} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B} g_\sigma}{M_B^2} \sigma_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \\
& \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{E^*} + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \frac{k_{FB}^2 M^*}{E^*} \frac{dk_{FB}}{d\rho_B} \\
& \left. + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4}{E^3} \frac{dM^*}{d\rho_B} \right]. \quad (5.195)
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas dos campos  $\omega$  (5.184) e  $\rho$  (5.187):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = & \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ -\frac{1+\beta}{\beta} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{2+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B} g_\sigma}{M_B^2} \omega_0 \rho_B \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \right. \\
& \left. \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} - \sum_B \frac{\rho_B}{m_\omega^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_\sigma g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \rho_B \right. \\
& + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 - \frac{1+\gamma}{\gamma} (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B} g_\sigma}{M_B^2} \rho_{03} I_{3B} \rho_B \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} \right. \\
& \left. - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_\rho^2} \rho_B (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_\sigma g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \\
& + \left( \frac{1+\lambda}{\lambda} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B} g_\sigma}{M_B^2} \sigma_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} - 2(m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{E^*} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{E^*} \frac{dk_{FB}}{d\rho_B} \\
& \left. + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4}{E^3} \frac{dM^*}{d\rho_B} \right]. \quad (5.196)
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas do momentum de Fermi (5.179) e da massa efetiva (5.175):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = & \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ -\frac{1+\beta}{\beta} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{2+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B} g_\sigma}{M_B^2} \omega_0 \rho_B \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right. \\
& \left. + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} - \sum_B \frac{\rho_B}{m_\omega^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_\sigma g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \rho_B \right. \\
& + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 - \frac{1+\gamma}{\gamma} (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B} g_\sigma}{M_B^2} \rho_{03} I_{3B} \rho_B \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} \right. \\
& \left. - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_\rho^2} \rho_B (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_\sigma g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) I_{3B} \rho_B + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \\
& + \left( \frac{1+\lambda}{\lambda} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B} g_\sigma}{M_B^2} \sigma_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} - 2(m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{E^*} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \frac{k_{FB}^2 M^*}{E^*} \left( \frac{k_{FB}}{3\rho_B} \right) + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \\
& \left. \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4}{E^3} \left( \left[ -(g_{\sigma B}^*)_0 + g_{\sigma B} (m_{\sigma B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_\sigma \sigma_0}{M_B} \right] \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \right]. \quad (5.197)
\end{aligned}$$

Substituindo os campos  $\omega$  (5.182) e  $\rho$  e as equações (5.185) e (5.64):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_0}{d\rho_B} = & \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ -\frac{1+\beta}{\beta} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{2+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B} g_\sigma}{M_B^2} \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \right) \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right. \\
& + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} - \sum_B \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \frac{1}{m_\omega^2} (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_\sigma g_{\omega B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \\
& \quad \left. + (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\omega B}^*)_0}{m_\omega^2} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \right) \right. \\
& - \frac{1+\gamma}{\gamma} (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B} g_\sigma}{M_B^2} \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \right) I_{3B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} \right. \\
& - \sum_B \frac{I_{3B}}{m_\rho^2} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_\sigma g_{\rho B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \left. \right) I_{3B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \left( \sum_B \frac{(g_{\rho B}^*)_0}{m_\rho^2} I_{3B} \frac{(2J_B+1)}{6\pi^2} k_{FB}^3 \right) I_{3B} \\
& + \left( \frac{1+\lambda}{\lambda} (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B} g_\sigma}{M_B^2} \sigma_0 \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} - 2(m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^2 M^*}{E^*} \\
& + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \frac{M^*}{3E^*} + \left( \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 - (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \sigma_0 \right) \\
& \quad \left. \frac{(2J_B+1)}{2\pi^2} \int_0^{k_{FB}} dk \frac{k^4 (M^*)^2}{E^3} \left( \left[ -(g_{\sigma B}^*)_0 + g_{\sigma B} (m_{\sigma B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_\sigma \sigma_0}{M_B} \right] \frac{d\sigma_0}{d\rho_B} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.198}$$

Isolando  $\frac{d\sigma_0}{d\rho_B}$  e substituindo a equação (5.198) em (5.190), obtém-se a expressão para a compressibilidade em função dos parâmetros desejados.

## 5.10 Populações

Todas as partículas incluídas nas densidades lagrangeanas não se encontram em todas as regiões de densidade da estrela de nêutrons, algumas só aparecem acima de uma certa densidade crítica. Para saber qual é a faixa de densidade na qual cada partícula passa a existir, será deduzida uma equação de densidade da partícula em função de  $\rho_B$  para cada partícula. Para fazer isso, primeiro se substituirá o autovalor de energia de cada partícula:

$$\mu_p = \sqrt{k_{Fp}^2 + (M_p^*)^2} + (g_{\omega p}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho p}^*)_0 \rho_0 I_{3p}, \tag{5.199}$$

$$\mu_n = \sqrt{k_{Fn}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0 \rho_0 I_{3n}, \tag{5.200}$$

$$\mu_{\Sigma^+} = \sqrt{k_{F\Sigma^+}^2 + (M_{\Sigma^+}^*)^2} + (g_{\omega \Sigma^+}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Sigma^+}^*)_0 \rho_0 I_{3\Sigma^+}, \tag{5.201}$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \sqrt{k_{F\Sigma^-}^2 + (M_{\Sigma^-}^*)^2} + (g_{\omega \Sigma^-}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Sigma^-}^*)_0 \rho_0 I_{3\Sigma^-}, \tag{5.202}$$

$$\mu_{\Sigma^0} = \sqrt{k_{F\Sigma^0}^2 + (M_{\Sigma^0}^*)^2} + (g_{\omega \Sigma^0}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Sigma^0}^*)_0 \rho_0 I_{3\Sigma^0}, \tag{5.203}$$

$$\mu_{\Xi^-} = \sqrt{k_{F\Xi^-}^2 + (M_{\Xi^-}^*)^2} + (g_{\omega \Xi^-}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Xi^-}^*)_0 \rho_0 I_{3\Xi^-}, \tag{5.204}$$

$$\mu_{\Xi^0} = \sqrt{k_{F\Xi^0}^2 + (M_{\Xi^0}^*)^2} + (g_{\omega \Xi^0}^*)_0 \omega_0 + (g_{\rho \Xi^0}^*)_0 \rho_0 I_{3\Xi^0}, \tag{5.205}$$

$$\mu_\Lambda = \sqrt{k_{F\Lambda}^2 + (M_\Lambda^*)^2} + (g_{\omega\Lambda}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Lambda}^*)_0\rho_{03}I_{3\Lambda}, \quad (5.206)$$

$$\mu_e = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (5.207)$$

$$\mu_\mu = \sqrt{k_\mu^2 + m_\mu^2}, \quad (5.208)$$

nas equações de equilíbrio químico obtidas no capítulo 3:

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad (5.209)$$

$$\mu_\mu = \mu_e, \quad (5.210)$$

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e, \quad (5.211)$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_e, \quad (5.212)$$

$$\mu_{\Sigma^0} = \mu_n, \quad (5.213)$$

$$\mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_e, \quad (5.214)$$

$$\mu_{\Xi^0} = \mu_n, \quad (5.215)$$

$$\mu_\Lambda = \mu_n, \quad (5.216)$$

para obter-se:

$$\sqrt{k_{F_p}^2 + (M_p^*)^2} + (g_{\omega p}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho p}^*)_0\rho_{03}I_{3p} = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (5.217)$$

$$\sqrt{k_\mu^2 + m_\mu^2} = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (5.218)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^+}}^2 + (M_{\Sigma^+}^*)^2} + (g_{\omega\Sigma^+}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Sigma^+}^*)_0\rho_{03}I_{3\Sigma^+} \\ &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.219)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^-}}^2 + (M_{\Sigma^-}^*)^2} + (g_{\omega\Sigma^-}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Sigma^-}^*)_0\rho_{03}I_{3\Sigma^-} \\ &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.220)$$

$$\sqrt{k_{F_{\Sigma^0}}^2 + (M_{\Sigma^0}^*)^2} + (g_{\omega\Sigma^0}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Sigma^0}^*)_0\rho_{03}I_{3\Sigma^0} = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n}, \quad (5.221)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Xi^-}}^2 + (M_{\Xi^-}^*)^2} + (g_{\omega\Xi^-}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Xi^-}^*)_0\rho_{03}I_{3\Xi^-} \\ &= \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_n^*)^2} + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.222)$$

$$\sqrt{k_{F_{\Xi^0}}^2 + (M_{\Xi^0}^*)^2 + (g_{\omega\Xi^0}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Xi^0}^*)_0\rho_{03}I_{3\Xi^0}} = \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_n^*)^2 + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n}}, \quad (5.223)$$

$$\sqrt{k_{F_{\Lambda}^*}^2 + (M_{\Lambda}^*)^2 + (g_{\omega\Lambda}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho\Lambda}^*)_0\rho_{03}I_{3\Lambda}} = \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_n^*)^2 + (g_{\omega n}^*)_0\omega_0 + (g_{\rho n}^*)_0\rho_{03}I_{3n}}. \quad (5.224)$$

Nessa expressão, partículas de mesma massa (o mesmo bárion com carga diferente) têm valor idêntico de  $m^*$  e:

$$g_{\sigma\Sigma} = \frac{2}{3}g_{\sigma}, \quad g_{\sigma\Xi} = \frac{1}{3}g_{\sigma}, \quad g_{\sigma\Lambda} = \frac{2}{3}g_{\sigma}, \quad (5.225)$$

$$g_{\omega\Sigma} = \frac{2}{3}g_{\omega}, \quad g_{\omega\Xi} = \frac{1}{3}g_{\omega}, \quad g_{\omega\Lambda} = \frac{2}{3}g_{\omega}, \quad (5.226)$$

$$g_{\rho\Sigma} = 2g_{\rho}, \quad g_{\rho\Xi} = g_{\rho}, \quad g_{\rho\Lambda} = 0, \quad (5.227)$$

$$\chi_{\sigma\Sigma} = \frac{2}{3}, \quad \chi_{\sigma\Xi} = \frac{1}{3}, \quad \chi_{\sigma\Lambda} = \frac{2}{3}, \quad (5.228)$$

$$\chi_{\omega\Sigma} = \frac{2}{3}, \quad \chi_{\omega\Xi} = \frac{1}{3}, \quad \chi_{\omega\Lambda} = \frac{2}{3}, \quad (5.229)$$

$$\chi_{\rho\Sigma} = 2, \quad \chi_{\rho\Xi} = 1, \quad \chi_{\rho\Lambda} = 0, \quad (5.230)$$

$$I_{3p} = \frac{1}{2}, \quad I_{3n} = -\frac{1}{2}, \quad I_{3\Sigma^+} = 1, \quad I_{3\Sigma^0} = 0, \quad I_{3\Sigma^-} = -1, \quad I_{3\Xi^-} = -\frac{1}{2}, \quad I_{3\Xi^0} = \frac{1}{2}, \quad I_{3\Lambda} = 0. \quad (5.231)$$

Reescrevendo as equações obtidas, tem-se:

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_p^*}^2 + (M_N^*)^2 + (m_{\beta}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + (m_{\gamma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\frac{1}{2}} = \\ & \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_N^*)^2 + (m_{\beta}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + (m_{\gamma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.232)$$

$$\sqrt{k_{\mu}^2 + m_{\mu}^2} = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (5.233)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^+}^*}^2 + (M_{\Sigma}^*)^2 + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}1} = \\ & \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_N^*)^2 + (m_{\beta}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + (m_{\gamma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.234)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^-}^*}^2 + (M_{\Sigma}^*)^2 + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}(-1)} = \\ & \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_N^*)^2 + (m_{\beta}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + (m_{\gamma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.235)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^0}^*}^2 + (M_{\Sigma}^*)^2 + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}0} = \\ & \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_N^*)^2 + (m_{\beta}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + (m_{\gamma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (5.236)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Xi^-}^*}^2 + (M_{\Xi}^*)^2 + \frac{1}{3}(m_{\beta\Xi}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + 1(m_{\gamma\Xi}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)} = \\ & \sqrt{k_{F_n^*}^2 + (M_N^*)^2 + (m_{\beta}^*)_0g_{\omega}\omega_0 + (m_{\gamma}^*)_0g_{\rho}\rho_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.237)$$

$$\sqrt{k_{F_{\Xi^0}}^2 + (M_{\Xi^*}^*)^2} + \frac{1}{3}(m_{\beta\Xi}^*)_0 g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2}(m_{\gamma\Xi}^*)_0 g_\rho \rho_{03} = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 + (m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03} \left(-\frac{1}{2}\right), \quad (5.238)$$

$$\sqrt{k_{F_\Lambda}^2 + (M_\Lambda^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Lambda}^*)_0 g_\omega \omega_0 + \frac{2}{3}(m_{\gamma\Lambda}^*)_0 g_\rho \rho_{03} = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 + (m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03} \left(-\frac{1}{2}\right). \quad (5.239)$$

Simplificando os termos nas equações acima, resulta que:

$$\sqrt{k_{F_p}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03} = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (5.240)$$

$$\sqrt{k_\mu^2 + m_\mu^2} = \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \quad (5.241)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^+}}^2 + (M_{\Sigma^*}^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0 g_\omega \omega_0 + 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0 g_\rho \rho_{03} = \\ & \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03} - \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.242)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Sigma^-}}^2 + (M_{\Sigma^*}^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0 g_\omega \omega_0 - 2(m_{\gamma\Sigma}^*)_0 g_\rho \rho_{03} = \\ & \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.243)$$

$$\sqrt{k_{F_{\Sigma^0}}^2 + (M_{\Sigma^*}^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Sigma}^*)_0 g_\omega \omega_0 = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03}, \quad (5.244)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Xi^-}}^2 + (M_{\Xi^*}^*)^2} + \frac{1}{3}(m_{\beta\Xi}^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_{\gamma\Xi}^*)_0 g_\rho \rho_{03} I_{3\Xi^-} = \\ & \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03} + \sqrt{k_e^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (5.245)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_{F_{\Xi^0}}^2 + (M_{\Xi^*}^*)^2} + \frac{1}{3}(m_{\beta\Xi}^*)_0 g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2}(m_{\gamma\Xi}^*)_0 g_\rho \rho_{03} I_{3\Xi^-} = \\ & \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03}, \end{aligned} \quad (5.246)$$

$$\sqrt{k_{F_\Lambda}^2 + (M_\Lambda^*)^2} + \frac{2}{3}(m_{\beta\Lambda}^*)_0 g_\omega \omega_0 = \sqrt{k_{F_n}^2 + (M_N^*)^2} + (m_\beta^*)_0 g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2}(m_\gamma^*)_0 g_\rho \rho_{03}. \quad (5.247)$$

Dessa forma, resultam 8 equações e 13 incógnitas ( $k_{F_p}$ ,  $k_{F_n}$ ,  $k_{F_e}$ ,  $k_{F_\mu}$ ,  $k_{F_{\Sigma^+}}$ ,  $k_{F_{\Sigma^-}}$ ,  $k_{F_{\Sigma^0}}$ ,  $k_{F_{\Xi^-}}$ ,  $k_{F_{\Xi^0}}$ ,  $k_{F_\Lambda}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\omega_0$  e  $\rho_{03}$ ). Precisa-se de mais cinco equações para obter um sistema determinado.

Para que a estrela seja eletricamente neutra, é necessário ter a mesma quantidade de carga positiva e negativa:

$$\rho_p + \rho_{\Sigma^+} = \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Xi^-} + \rho_e + \rho_\mu. \quad (5.248)$$

A segunda equação é:

$$\rho_B = \rho_p + \rho_n + \rho_{\Sigma^+} + \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Sigma^0} + \rho_{\Xi^-} + \rho_{\Xi^0} + \rho_\Lambda, \quad (5.249)$$

onde:

$$\rho_p = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_p}^3, \quad (5.250)$$

$$\rho_n = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_n}^3, \quad (5.251)$$

$$\rho_{\Sigma^+} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_{\Sigma^+}}^3, \quad (5.252)$$

$$\rho_{\Sigma^-} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_{\Sigma^-}}^3, \quad (5.253)$$

$$\rho_{\Sigma^0} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_{\Sigma^0}}^3, \quad (5.254)$$

$$\rho_{\Xi^-} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_{\Xi^-}}^3, \quad (5.255)$$

$$\rho_{\Xi^0} = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_{\Xi^0}}^3, \quad (5.256)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_\Lambda}^3. \quad (5.257)$$

É o objetivo dessas manipulações escrever  $\rho_p$ ,  $\rho_n$ ,  $\rho_{\Sigma^+}$ ,  $\rho_{\Sigma^-}$ ,  $\rho_{\Sigma^0}$ ,  $\rho_{\Xi^-}$ ,  $\rho_{\Xi^0}$  e  $\rho_\Lambda$  em função de  $\rho_B$ .

A terceira, quarta e quinta equações são as equações, anteriormente apresentadas, dos mésons  $\omega$  (5.52),  $\rho$  (5.55) e  $\sigma$  (5.49) na aproximação de campo médio, com os  $\chi_{iB}$ , os  $I_{3B}$  e os  $\rho_B$  devidamente substituídos:

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \left[ (m_\beta^*)_0 (\rho_p + \rho_n) + (m_{\beta\Sigma}^*)_0 \frac{2}{3} (\rho_{\Sigma^+} + \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Sigma^0}) + (m_{\beta\Xi}^*)_0 \frac{1}{3} (\rho_{\Xi^-} + \rho_{\Xi^0}) + (m_{\beta\Lambda}^*)_0 \frac{2}{3} \rho_\Lambda \right], \quad (5.258)$$

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \left[ (m_\gamma^*)_0 \frac{1}{2} \rho_p + (m_\gamma^*)_0 \left(-\frac{1}{2}\right) \rho_n + (m_{\gamma\Sigma}^*)_0 2.1 \rho_{\Sigma^+} + (m_{\gamma\Sigma}^*)_0 2(-1) \rho_{\Sigma^-} + (m_{\gamma\Sigma}^*)_0 2.0 \rho_{\Sigma^0} \right. \\ \left. + (m_{\gamma\Xi}^*)_0 1 \left(-\frac{1}{2}\right) \rho_{\Xi^-} + (m_{\gamma\Xi}^*)_0 1 \frac{1}{2} \rho_{\Xi^0} + (m_{\gamma\Lambda}^*)_0 0.0 \rho_\Lambda \right], \quad (5.259)$$

ou

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \left[ (m_\gamma^*)_0 \frac{1}{2} (\rho_p - \rho_n) + (m_{\gamma\Sigma}^*)_0 2 (\rho_{\Sigma^+} - \rho_{\Sigma^-}) + (m_{\gamma\Xi}^*)_0 1 \frac{1}{2} (\rho_{\Xi^0} - \rho_{\Xi^-}) \right], \quad (5.260)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \left[ \left( (m_{\beta B}^*)_0^{\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{g_{\omega B}}{M_B} \omega_0 + (m_{\gamma B}^*)_0^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \frac{g_{\rho B}}{M_B} \rho_{03} I_{3B} \right) \rho_B + \chi_{\sigma B} (m_{\lambda B}^*)_0 \rho_s \right] \\ 1 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B (m_{\lambda B}^*)_0^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \frac{g_{\sigma B}}{M_B} \rho_s. \quad (5.261)$$

onde

$$\rho_s = \frac{1}{2\pi^2} \left( k_{F_B} M^* \sqrt{(M^*)^2 + k_{F_B}^2} - (M^*)^3 \ln \frac{k_{F_B} + \sqrt{(M^*)^2 + k_{F_B}^2}}{M^*} \right). \quad (5.262)$$

## 5.11 Resultados Numéricos

### 5.11.1 Função Compressibilidade

A função compressibilidade da matéria nuclear é calculada através da derivada segunda da densidade de energia, resultando em:

- Modelo de Walecka

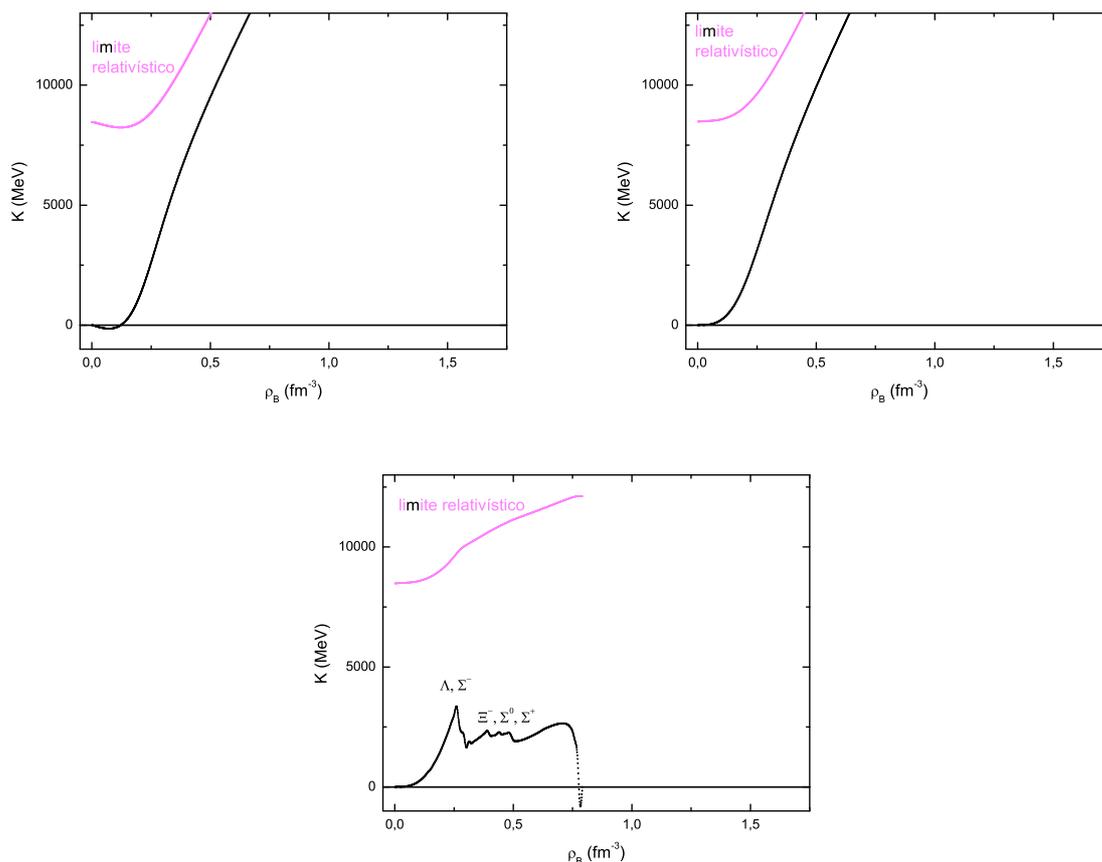


Figura 5.11: Compressibilidade por densidade bariônica para o modelo de Walecka, respectivamente, sem o méson  $\rho$  (esquerda), com o méson  $\rho$  (direita) e com o octeto bariônico (abaixo).

A adição do méson  $\rho$  no sistema tem efeito semelhante a uma amplificação da parte repulsiva da força forte; portanto, ele deixa a estrela mais “dura”, ou seja, a compressibilidade cresce para qualquer densidade, como podemos perceber na figura (5.11) (direita). Resolve-se, assim, o problema da compressibilidade negativa, mas cria-se outro: agora, a compressibilidade é muito alta na saturação, passando de 551,53 para 1108,29 MeV.

Quando se acrescenta o resto do octeto bariônico (figura 5.11, abaixo), a compressibilidade

começa mais alta (1054,98 MeV na saturação) mas, cada vez que aparece um híperon, ela decai um pouco, o que faz com que, para altas densidades, ela permaneça menor do que no caso anterior. Essas quedas no valor da compressibilidade acontecem porque, quando um híperon surge, ele diminui um pouco a energia do sistema (justamente por isso ele é um estado favorável) e, como a compressibilidade é proporcional à derivada segunda da densidade de energia, uma diminuição na taxa de crescimento da energia representa uma queda na curva da compressibilidade.

- Modelos Escalares

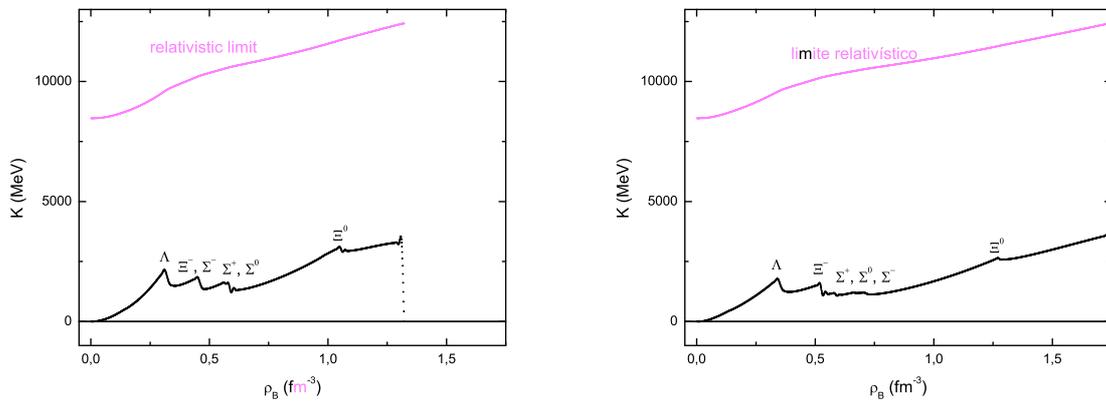


Figura 5.12: Compressibilidade por densidade bariônica para  $\lambda = 0,06$  (esquerda) e para  $\lambda = 0,13$  (direita).

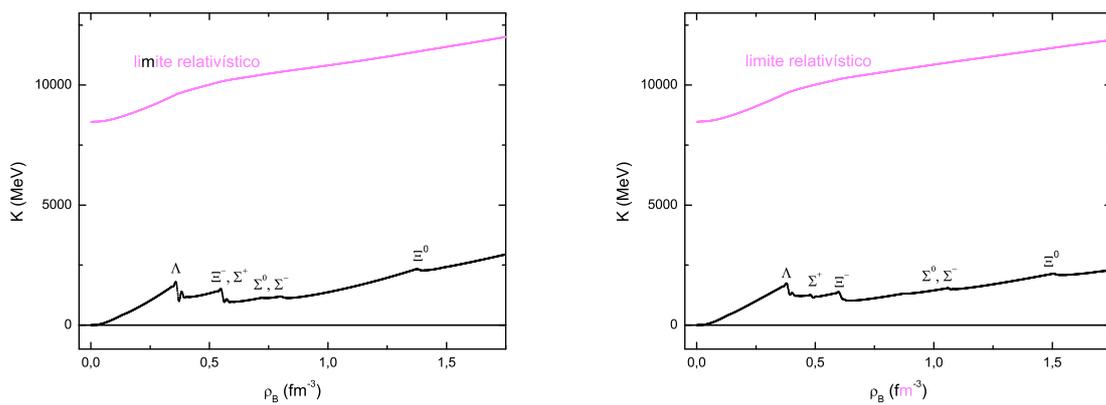


Figura 5.13: Compressibilidade por densidade bariônica para  $\lambda = 0,19$  (esquerda) e para  $\lambda \rightarrow \infty$  (direita).

A compressibilidade diminui, consideravelmente, com o aumento de  $\lambda$  até 0,3. Para  $\lambda > 0,3$ , ela estabiliza até  $\lambda = 1,75$  e, depois disso, não muda mais de forma (figuras (5.12) e (5.13)).

Na saturação, a compressibilidade assume os valores: 672,57 MeV para  $\lambda = 0,06$ , 601,89 MeV para  $\lambda = 0,13$  e 586,73 MeV para  $\lambda = 0,19$  (figuras 5.12 e 5.13).

A linha pontilhada vertical que aparece no fim de alguns gráficos da função compressibilidade existe devido a um problema de propagação de erro numérico e não tem significado físico.

- Modelos Independentes

Já se sabe, através da tabela 2, que, para  $\beta$  aumentar,  $\lambda$  também deve aumentar para que a fenomenologia seja aceitável. Quando  $\beta$  aumenta até 0,1 e  $\lambda$  até 0,3, a compressibilidade diminui bruscamente; depois disso, ela diminui até  $\beta = 0,5$  e  $\lambda = 1,75$ . A partir desse ponto, a curva praticamente não muda mais de forma até  $\beta = 1,3$  e  $\lambda = 16$ . Daí em diante, a curva não é mais sensível a alterações de  $\lambda$ , mas diminui para o aumento de  $\beta$  até 10, a partir de onde a compressibilidade já é praticamente igual à do modelo exponencial  $\lambda \beta$  (figura 5.14, esquerda).

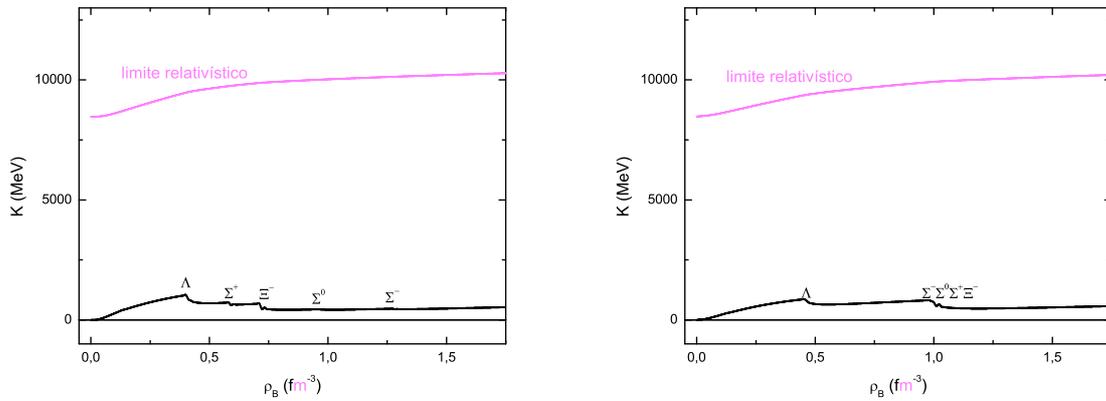


Figura 5.14: Compressibilidade por densidade bariônica para  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$  (esquerda) e para  $\lambda, \beta, \gamma \rightarrow \infty$  (direita).

O aumento de  $\gamma$ , tanto negativo como positivo, somente muda a forma da curva da função compressibilidade, mas não afeta a faixa de valores para essa grandeza (figura 5.14 à direita). Quando  $\gamma$  aumenta negativamente, o comportamento é o mesmo, porém mais acentuado, até uma certa densidade. Depois disso, a compressibilidade muda, a ponto de recuperar o seu comportamento inicial, tendendo a estabilizar-se da mesma forma que os

modelos com  $\gamma$  positivo.

### 5.11.2 Velocidade do Som

A partir das equações obtidas no capítulo anterior, calcula-se a razão entre a velocidade do som no meio e a velocidade da luz no vácuo para todos os modelos:

- Modelo de Walecka

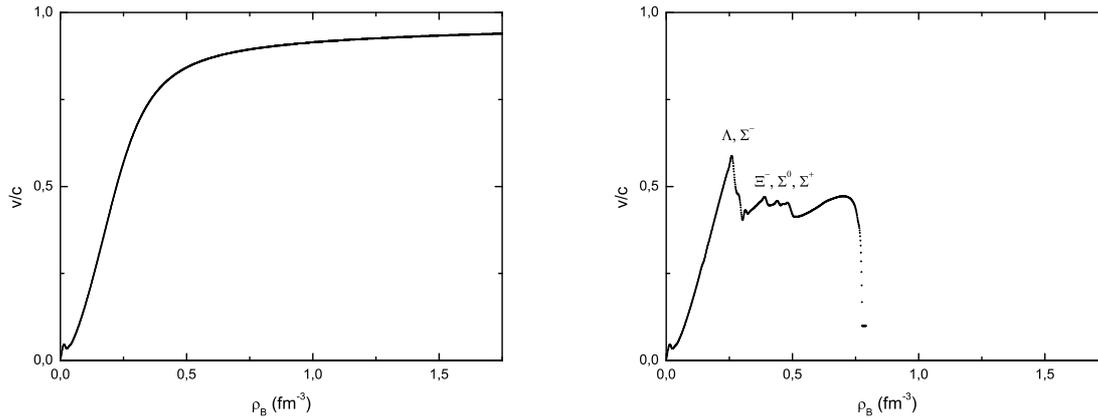


Figura 5.15: Velocidade do som para o modelo de Walecka com méson  $\rho$  (esquerda) e para o modelo de Walecka com méson  $\rho$  e octeto bariônico (direita).

Quando se inclui o octeto bariônico, a velocidade do som cai bruscamente (figura 5.15), o que era de se esperar, já que a velocidade do som é proporcional à compressibilidade, e a compressibilidade, como foi visto, cai bruscamente com a inclusão dos híperons.

- Modelos Escalares

A velocidade do som diminui com o aumento de  $\lambda$  até 0,3. Depois de  $\lambda = 1,75$ , não há mudança significativa (figura 5.16 e 5.17).

- Modelos Independentes

Pode-se observar na tabela 2 que, para  $\beta$  aumentar,  $\lambda$  também deve aumentar. Quando  $\beta$  aumenta até 0,1 e  $\lambda$  até 0,3, a velocidade do som diminui bruscamente, depois disso, ela diminui um pouco até  $\beta = 0,5$  e  $\lambda = 1,75$ . A partir desse ponto, a curva praticamente não muda mais de forma até  $\beta = 1,3$  e  $\lambda = 16$ . Daí em diante, a curva não é mais sensível a  $\lambda$ , mas ela diminui para o aumento de  $\beta$  até 10, a partir de onde

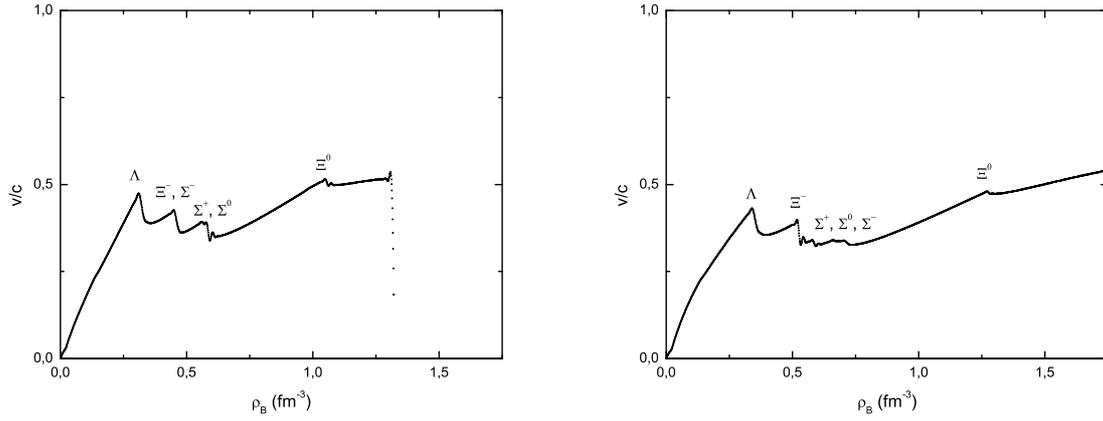


Figura 5.16: Velocidade do som para  $\lambda = 0,06$  (esquerda) e para  $\lambda = 0,13$  (direita).

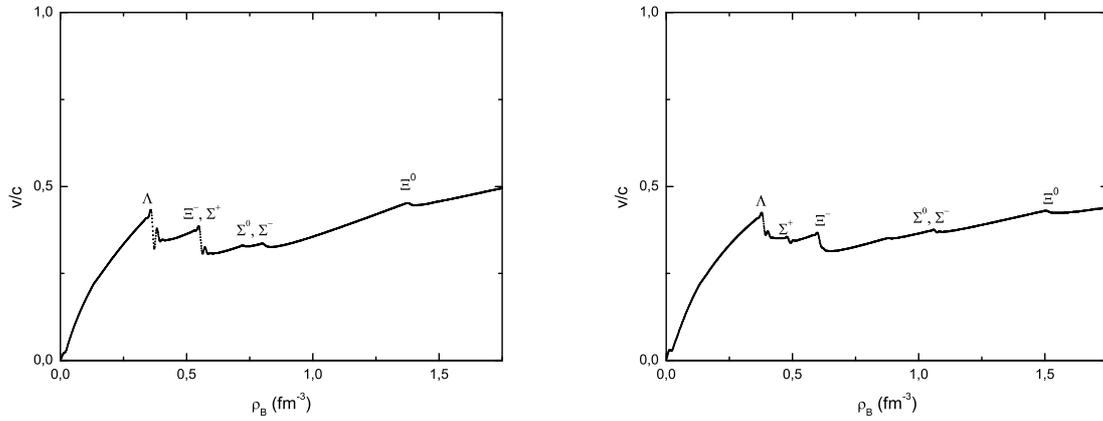


Figura 5.17: Velocidade do som para  $\lambda = 0,19$  (esquerda) e para  $\lambda \rightarrow \infty$  (direita).

a velocidade do som já é praticamente igual a do modelo exponencial  $\lambda \beta$  (figura 5.18 à esquerda).

O aumento de  $\gamma$ , tanto negativo como positivo, somente muda a forma da curva da velocidade do som, mas não afeta a sua faixa de valores (figura 5.18, direita). Dependendo dos valores de  $\lambda$  e  $\beta$  utilizados, a curva estabiliza em pontos diferentes. Quando  $\gamma$  aumenta negativamente, o comportamento é o mesmo, porém mais acentuado, até uma certa densidade. Para densidades maiores, a velocidade do som começa a aumentar, tendendo a estabilizar-se da mesma forma que para os modelos com  $\gamma$  positivo.

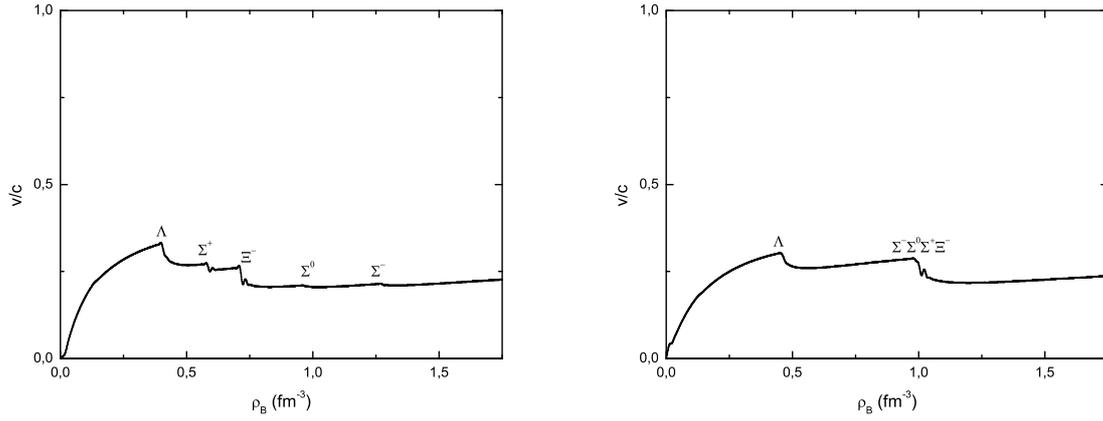


Figura 5.18: Velocidade do som para  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$  (esquerda) e para  $\lambda, \beta, \gamma \rightarrow \infty$  (direita).

### 5.11.3 Populações

- Modelo de Walecka

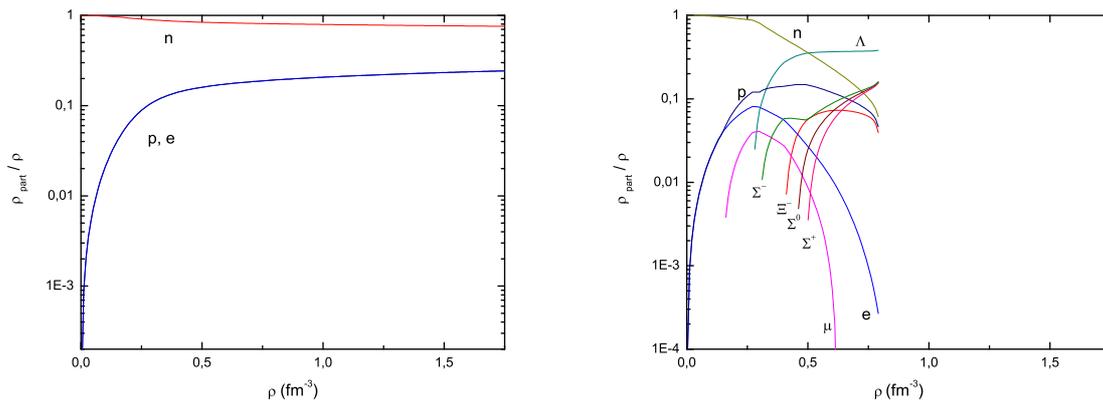


Figura 5.19: Populações para o modelo de Walecka com méson  $\rho$  (esquerda) e para o modelo de Walecka com méson  $\rho$  e octeto bariônico (direita).

Quando é incluído todo o octeto bariônico, a modificação nas quantidades das partículas é considerável, pois, à medida que os híperons aparecem, as populações dos prótons e nêutrons diminuem de maneira a manter uma densidade bariônica total constante (figura 5.19).

- Modelos Escalares

Pode-se perceber, nos gráficos de população, que, quando  $\lambda$  varia, a densidade necessária

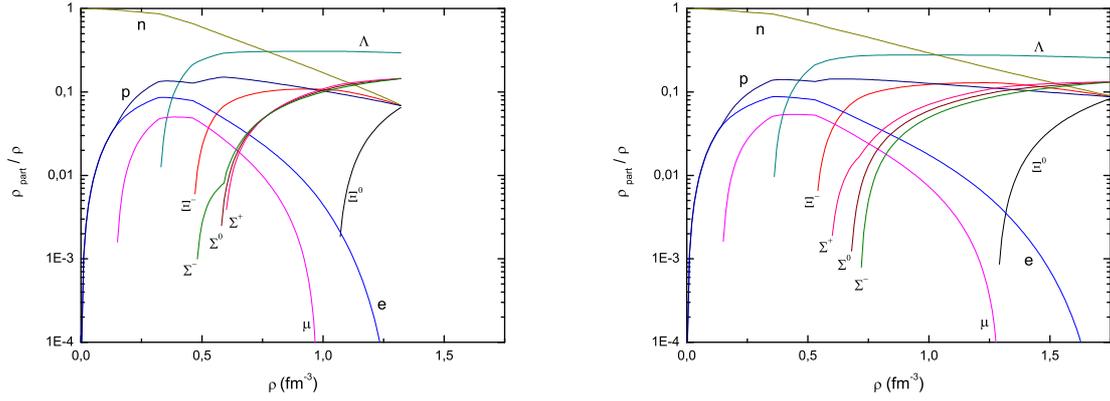


Figura 5.20: Populações para  $\lambda = 0,06$  (esquerda) e para  $\lambda = 0,13$  (direita).

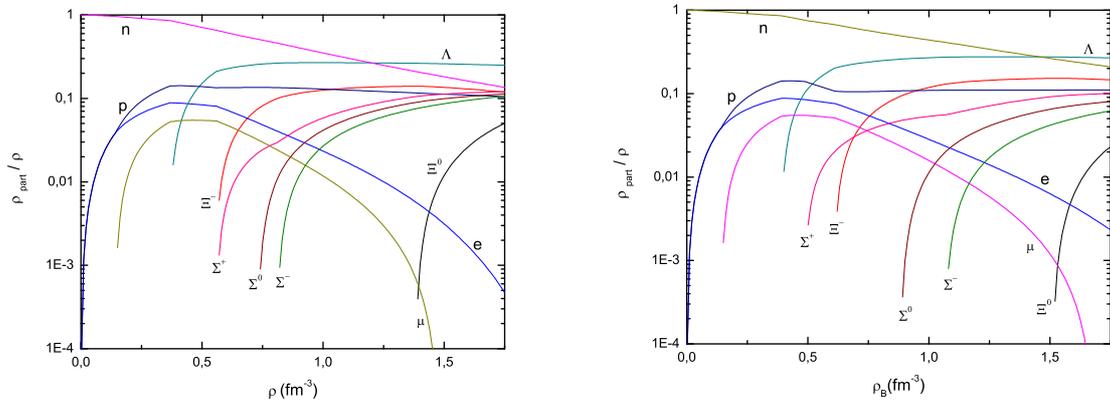


Figura 5.21: Populações para  $\lambda = 0,19$  (esquerda) e para  $\lambda \rightarrow \infty$  (direita).

para que cada híperon apareça também varia. Isso acontece porque, para que um híperon exista, é preciso haver energia suficiente para criá-lo, ou seja, nas equações de potencial químico (5.242), (5.243), (5.244), (5.245), (5.246) e (5.247), o lado direito deve ser maior do que o lado esquerdo (com  $k_{hip} = 0$ ). Quando  $\lambda$  aumenta, muda o balanço entre os termos dessas equações, porque a intensidade das interações muda.

A densidade necessária para que os híperons e léptons apareçam aumenta com o aumento de  $\lambda$ , ou seja, os híperons e léptons aparecem mais para a direita, até  $\lambda = 0,3$  (menos o híperon  $\Sigma^+$ , que aparece mais esquerda para  $\lambda > 0,1$ ). Depois, as curvas não mudam mais de forma (figuras 5.20 e 5.21).

- Modelos Independentes

Como já foi verificado, para  $\beta$  aumentar  $\lambda$  também deve aumentar. Quando  $\beta$  aumenta até 0,1 e  $\lambda$  até 0,3, a densidade necessária para que os híperons apareçam aumenta, ou seja, os híperons e léptons aparecem mais para a direita (menos o híperon  $\Sigma^+$ , que, por exemplo, aparece mais à esquerda para  $\lambda > 0,2$  maior que, por exemplo, 0,2 para  $\beta = 0,1$ ); depois disso, a densidade necessária para o aparecimento dos híperons aumenta até  $\beta = 0,5$  e  $\lambda = 1,75$ . A partir desse ponto, as curvas, praticamente, não mudam mais sua forma até  $\beta = 1,3$  e  $\lambda = 16$ . Daí em diante, as curvas não são mais sensíveis a alterações no valor de  $\lambda$ , mas diminuem conforme  $\beta$  aumenta até 10, a partir de onde as populações já são praticamente iguais às do modelo exponencial  $\lambda \beta$  (figura 5.22, esquerda).

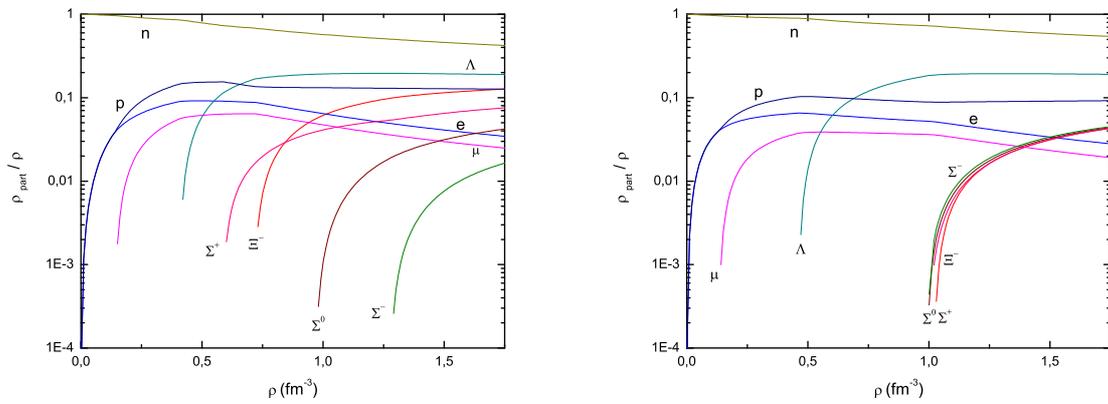


Figura 5.22: Populações para  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$  (esquerda) e para  $\lambda, \beta, \gamma \rightarrow \infty$  (direita).

O aumento de  $\gamma$ , tanto negativo quanto positivo, tem como efeito que alguns híperons aparecem em densidades maiores ( $\Lambda$ ,  $\Sigma^+$  e  $\Xi^-$ ) e alguns em densidades menores ( $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$  e  $\Xi^0$ ). Dependendo do  $\lambda$  e  $\beta$  utilizados, as curvas estabilizam-se em pontos diferentes. Quando  $\gamma$  aumenta negativamente, o comportamento é o mesmo, porém mais acentuado, até uma certa densidade. Para densidades maiores, as populações das partículas mudam de forma a recuperar o seu comportamento inicial, tendendo a se estabilizar da mesma forma que os modelos com  $\gamma$  positivo.

É interessante ver que, no modelo exponencial (figura 5.22, direita), quase todos os híperons aparecem no sistema em uma mesma densidade. Isso deve-se ao fato de que, diferentemente de uma formulação linear de aparecimento de uma dada espécie (5.240, 5.241, 5.242, 5.243, 5.244, 5.245, 5.246 e 5.247), o modelo exponencial, devido ao seu caráter não linear, axaure o espaço de fase de produção de híperons de uma forma tal a assegurar que, em termos

práticos, nenhuma espécie (com exceção do híperon  $\Lambda$ ) apresenta caráter de dominância.

## Capítulo 6

# Resolução das Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Até agora a gravidade não foi contemplada e a métrica usada em nossos estudos era a de Minkowski. Essa abordagem é justificada pelo princípio de equivalência, citado no capítulo 3, pois, na escala de comprimento nuclear ( $\sim 10^{-15}\text{m}$ ), o espaço pode ser considerado localmente plano, podendo ser ignorado, nesse caso, qualquer efeito de curvatura do espaço-tempo. Em termos quantitativos, pode-se mostrar que, na escala nuclear, a mudança na métrica, a qual determina a curvatura do espaço-tempo, é  $\delta g_{00} = 10^{-14}$ , o que justifica plenamente essa aproximação.

De agora em diante, visto que se tem como objetivo analisar as propriedades globais das estrelas de nêutrons (como sua massa, seu raio), é estabelecida a conexão entre os modelos microscópicos e macroscópicos através da integração das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. As equações de estado obtidas nos capítulos anteriores são inseridas nas equações da relatividade geral, as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff apresentadas no capítulo 3, que serão resolvidas numericamente. É importante salientar que, para cada EOS, existe uma única seqüência de estrelas possível.

Nesse sentido, primeiro será estimada a massa, o raio e o *redshift*<sup>1</sup> previstos teoricamente. Depois, serão impostos vínculos fenomenológicos para proceder a escolha do modelo mais adequado.

Considerando-se uma estrela como um gás degenerado de nêutrons relativísticos em que não exista nenhuma interação entre as partículas, sendo então a gravidade suportada apenas pela

---

<sup>1</sup>*Redshift* é o desvio da frequência dos fótons emitidos pela estrela para o vermelho devido à diferença entre o campo gravitacional próximo e distante da estrela

pressão de degenerescência dos nêutrons, Oppenheimer e Volkoff, em 1939, descobriram um limite inferior para a massa máxima e para o raio de uma estrela de nêutrons<sup>[13]</sup>.

$$M_{max} > 0,71M_{sol} \quad (6.1)$$

e

$$R > 9,5km. \quad (6.2)$$

Por outro lado, Rhoades e Ruffini consideraram uma estrela com matéria incompressível, ou seja, no limite causal  $dp/d\epsilon = 1$ , para obter um limite superior para a massa máxima, o raio, e o *redshift*<sup>[58]</sup>.

$$M_{max} < 3,14M_{sol} \quad (6.3)$$

e

$$R < 13,4km. \quad (6.4)$$

Para o *redshift* gravitacional ( $z$ ), essas restrições teóricas impõem:

$$z < 2. \quad (6.5)$$

Portanto, estão estabelecidos intervalos teóricos para os quais as equações de estado e os modelos associados mostram consistência.

## 6.1 Modelo de Walecka

Para o modelo de Walecka, obtém-se uma massa máxima de  $2,77M_{sol}$  (a massa máxima observada até então é  $2,1M_{sol}$ ), um raio  $< 13,15km$  e um *redshift* (desvio para o vermelho)  $< 0,77$  (figura 6.1). O fato de a massa máxima desse modelo ser grande pode ser explicado através da compressibilidade. O modelo de Walecka, como visto no capítulo 4, apresenta uma compressibilidade muito grande, não condizente com a fenomenologia. Uma estrela tão incompressível, tem condições de sustentar uma massa maior, evitando um possível colapso gravitacional.

Como visto anteriormente (capítulo 4), o modelo de Walecka com méson  $\rho$  é mais verossímil que o modelo anterior, por não resultar em uma compressibilidade negativa para nenhuma densidade. Esse modelo resulta uma massa máxima de  $2,78M_{sol}$ , um raio  $< 14,00km$  e um *redshift*  $< 0,70$  (figura 6.2). Nota-se que a massa máxima tem um valor semelhante para as duas versões do modelo de Walecka, fato decorrido dos dois modelos terem compressibilidade semelhante. A diferença entre eles surge na comparação do raio máximo e conseqüentemente na comparação do *redshift*.

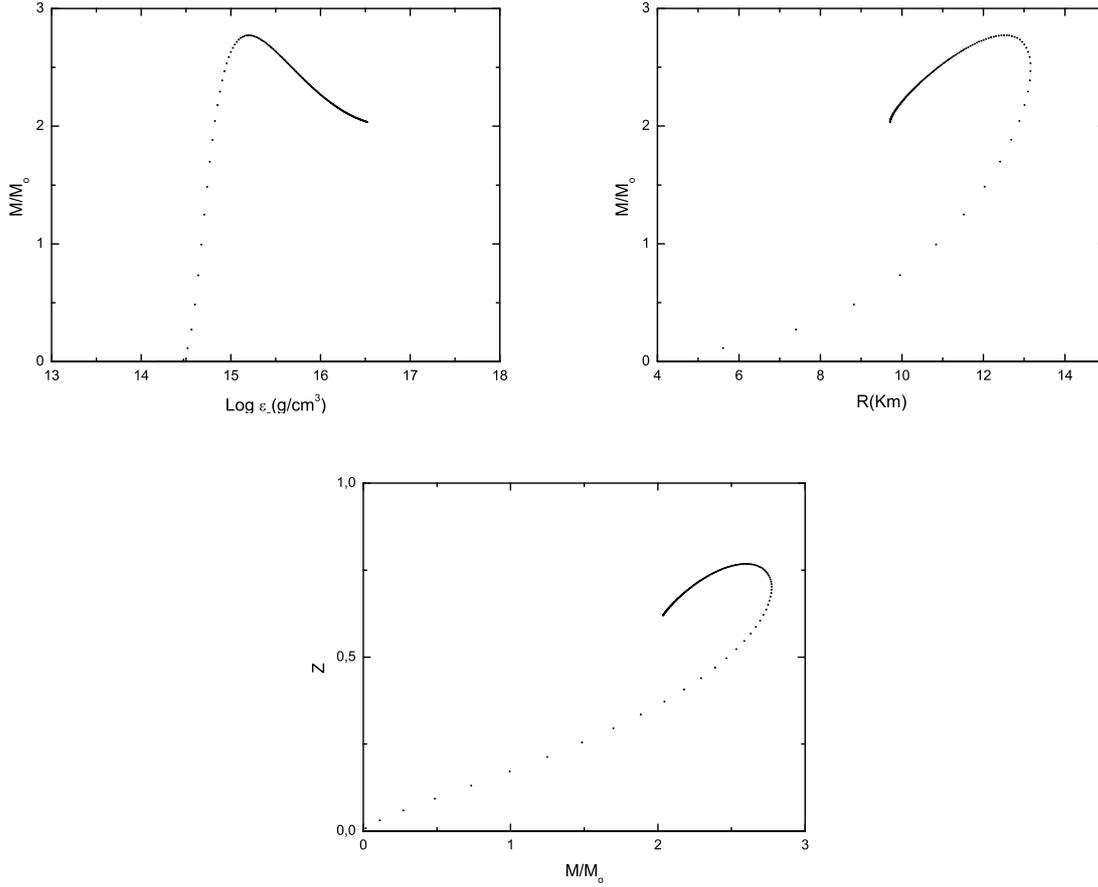


Figura 6.1: Massa máxima, raio e *redshift* para o modelo de Walecka.

Para o modelo de Walecka com méson  $\rho$  e o octeto bariônico, resulta uma massa máxima de  $1,92M_{sol}$ , um raio  $< 14,00km$  e um *redshift*  $< 0,36$  (figura 6.3). Em decorrência deste modelo ter o mesmo raio máximo do modelo anterior, porém com massa máxima menor, indica que sua densidade média é menor do que a do modelo de Walecka com méson  $\rho$ . No entanto, essa densidade é suficiente para a criação de híperons. Esse modelo tem uma massa máxima mais próxima das massas observadas em estrelas de nêutrons e menor do que a dos modelos de Walecka sem todo o octeto bariônico, porque tem uma compressibilidade menor, ou seja, ela pode sustentar menos massa para continuar estável.

## 6.2 Modelos Escalares

Esse é o grupo do modelo de acoplamento ajustável no qual varia somente o parâmetro  $\lambda$ , referente ao acoplamento do méson  $\sigma$ . No capítulo anterior, já foi demonstrado que para o modelo

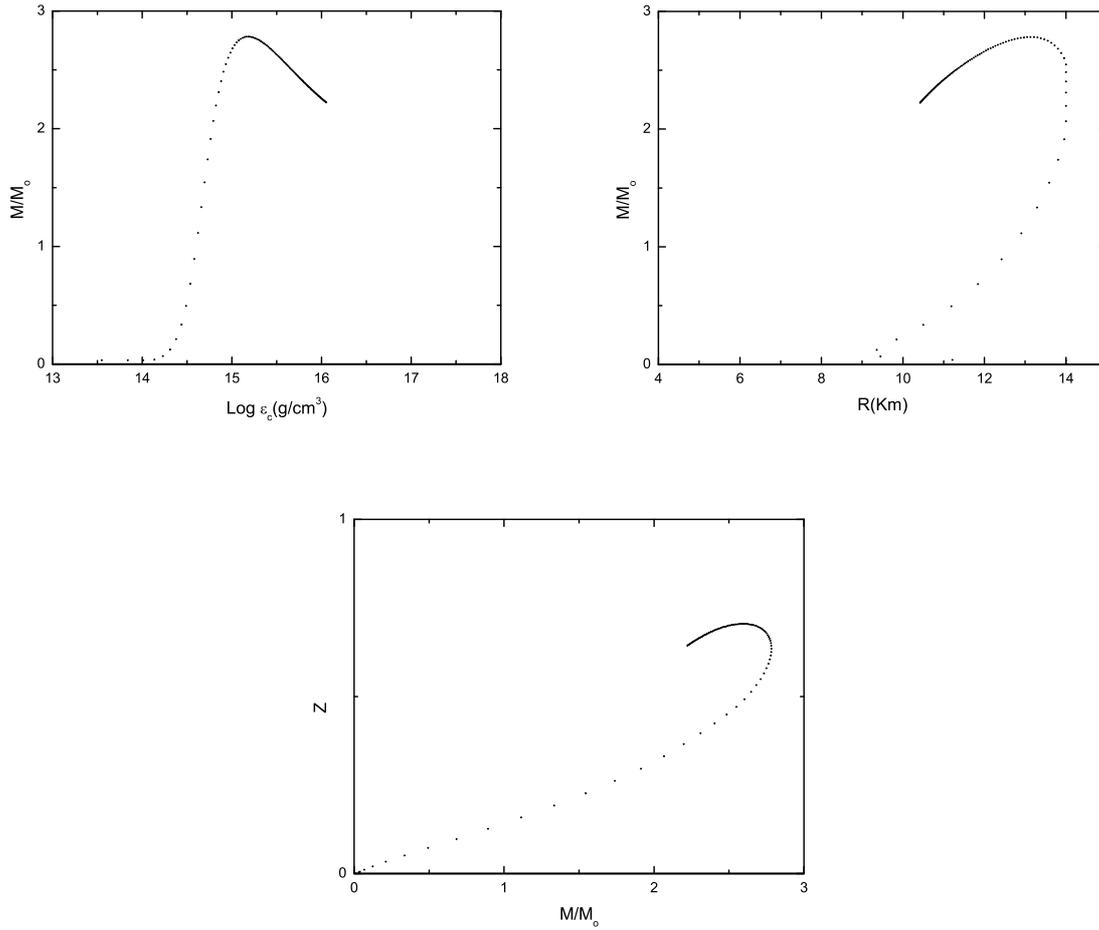


Figura 6.2: Massa máxima, raio e *redshift* para o modelo de Walecka com méson  $\rho$ .

ajustável, quando  $\lambda$  aumenta, a compressibilidade das estrelas diminui e, conseqüentemente, a massa das estrelas também deve ser menor. Observa-se que a massa máxima reduz de  $M_{max} = 1,92M_{sol}$  ( $\lambda = 0$ , modelo acima) para  $M_{max} = 1,22M_{sol}$  (onde estabiliza). Para os valores de  $\lambda$  estudados no modelo escalar no capítulo anterior, apresentaremos os resultados a seguir.

Para o modelo  $\lambda = 0,06$ , resulta uma massa máxima de  $1,46M_{sol}$ , um raio  $< 12,22km$  e um *redshift*  $< 0,29$  (figura 6.4), resultados condizentes com a fenomenologia.

Para o modelo  $\lambda = 0,13$ , resulta uma massa máxima de  $1,27M_{sol}$ , um raio entre  $< 11,77km$  e um *redshift*  $< 0,26$  (figura 6.5). A massa máxima desse modelo já está abaixo do valor esperado.

Para o modelo  $\lambda = 0,19$ , resulta uma massa máxima de  $1,22M_{sol}$ , um raio  $< 11,63km$  e um *redshift*  $< 0,25$  (figura 6.6). A massa máxima desse modelo também já está abaixo do valor esperado.

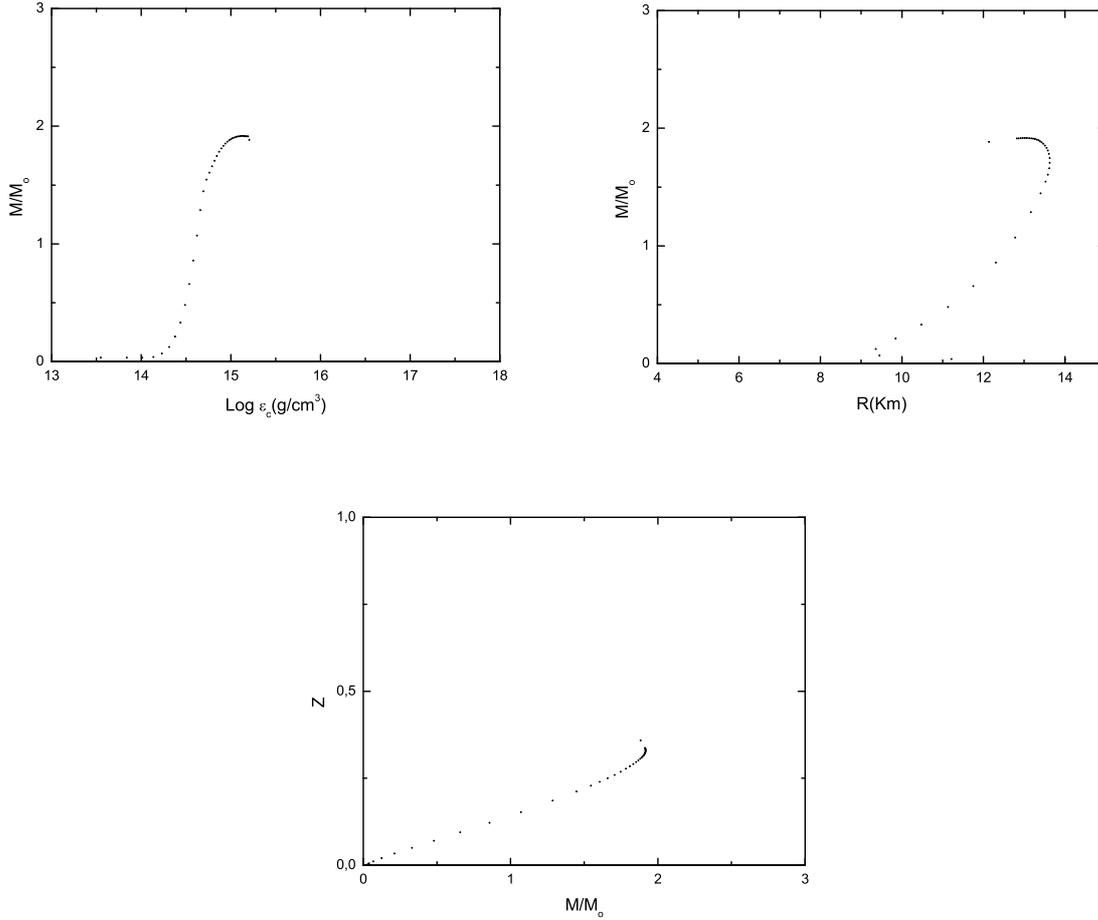


Figura 6.3: Massa máxima, raio e *redshift* para o modelo de Walecka com méson  $\rho$  e octeto bariônico.

Para o modelo  $\lambda \rightarrow \infty$ , resulta uma massa máxima de  $1,22M_{sol}$ , um raio  $< 11,51km$  e um *redshift*  $< 0,25$  (figura 6.7). O fato dos resultados para esse modelo serem parecidos com os do modelo anterior, decorre da propriedade que esses modelos têm de se estabilizar depois de um certo valor dos parâmetros, no caso,  $\lambda = 1.75$

### 6.3 Modelo Independente

Esse é o grupo do modelo de acoplamento ajustável no qual variam os três parâmetros  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  independentemente. Quando  $\lambda$  aumenta, já é sabido que a massa máxima, o raio e o *redshift* diminuem. Quando  $\beta$  aumenta, sabe-se, do capítulo anterior, que o efeito é o mesmo do aumento de  $\lambda$  (a compressibilidade diminui), de forma que a massa máxima também diminui quando  $\beta$

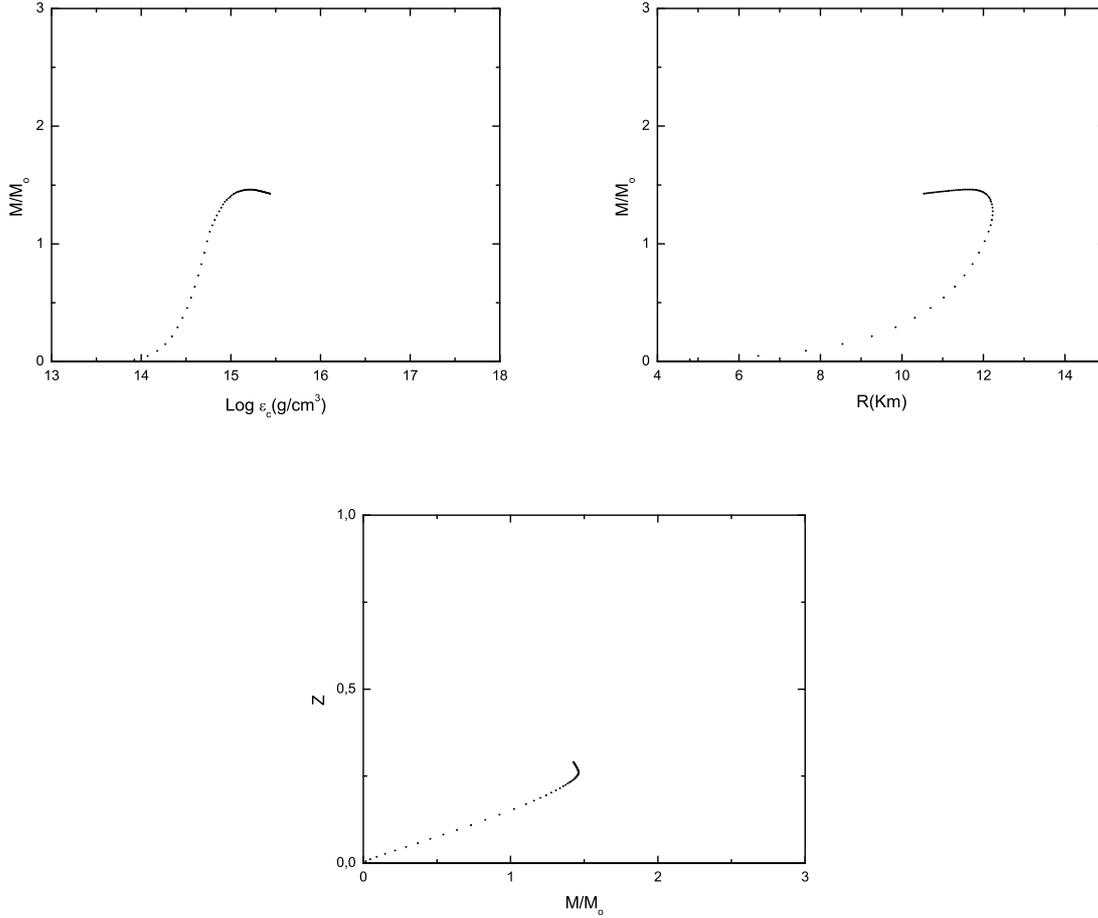


Figura 6.4: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda = 0,06$ .

aumenta.

Para o modelo  $\lambda \beta$  exponencial, resulta uma massa máxima de  $0,89M_{sol}$ , um raio  $< 11,12 \text{ km}$  e um *redshift*  $< 0,15$  (figura 6.8), valores que certamente podem caracterizar este modelo como não adequado para descrever estrelas de nêutrons.

Quando  $\gamma$  varia, o efeito na estrela mostra-se fraco, o que já era esperado devido ao pequeno efeito que a introdução do méson  $\rho$  produz na função compressibilidade. O aumento positivo de  $\gamma$  faz com que a massa máxima da estrela aumente levemente, cerca de  $0,02M_{sol}$ . O aumento negativo de  $\gamma$  até  $-1$  faz com que o sistema não tenha solução. Em  $\gamma = -1$ , a massa máxima tem seu valor máximo, cerca de  $0,03M_{sol}$  maior do que em  $\gamma = 0$  (para qualquer  $\beta$  e  $\lambda$ ). O aumento negativo de  $\gamma$  a partir de  $-1$  faz com que a massa máxima da estrela diminua sutilmente (cerca de  $0,01M_{sol}$ ). Pode-se concluir que o acoplamento não linear do méson  $\rho$  não tem grande influência nas variáveis macroscópicas, ou seja, a assimetria entre prótons e nêutrons não causa

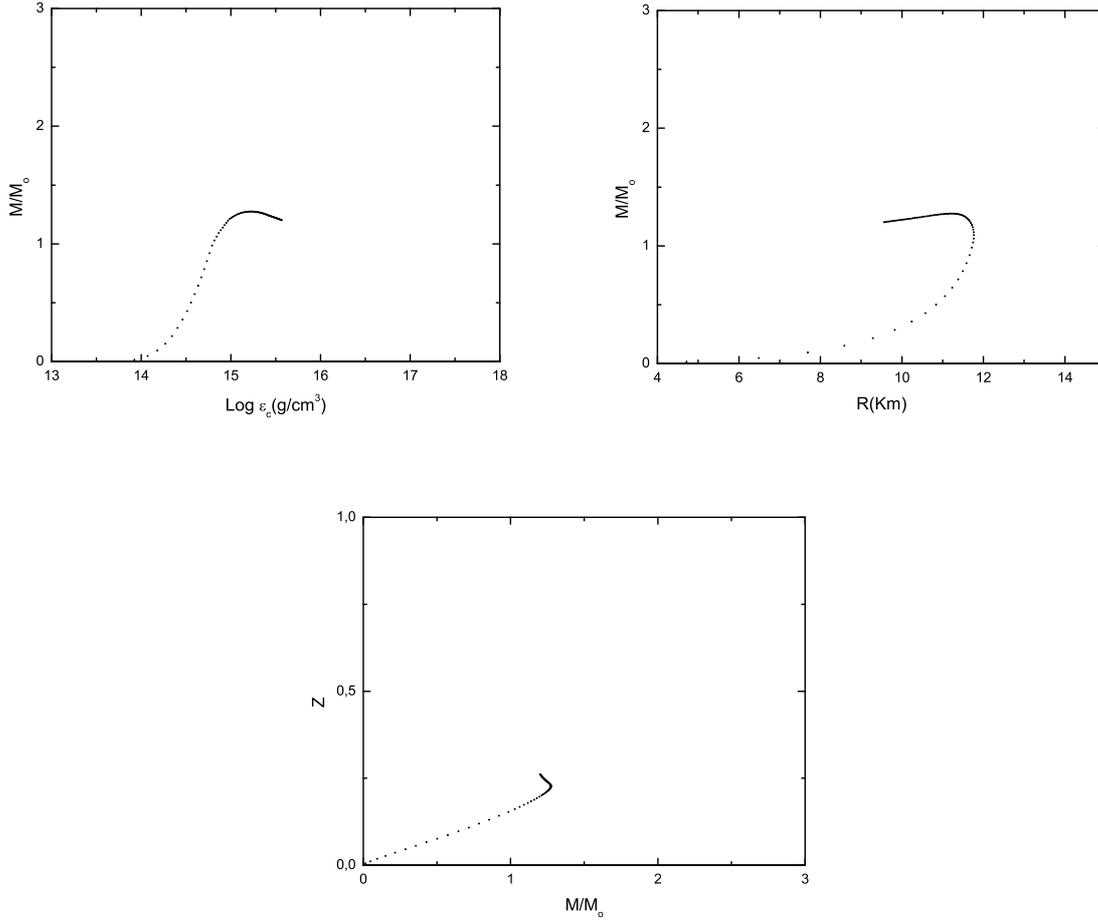


Figura 6.5: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda = 0, 13$ .

modificações consideráveis na estrela de nêutrons.

Para o modelo  $\lambda, \beta, \gamma \rightarrow \infty$ , resulta uma massa máxima de  $0,74M_{sol}$ , um raio  $< 10,10\text{km}$  e um *redshift*  $< 0,14$  (figura 6.9), valores que certamente podem caracterizar este modelo como não adequado para descrever estrelas de nêutrons.

Já que a maioria das estrelas das famílias de todos os modelos estudados se encontra dentro dos limites teóricos, precisa-se de outro critério para escolher o modelo mais adequado. Pode-se partir, por essa razão, para a comparação da previsão de massa máxima dos modelos com os valores observados. Dessa forma, pode-se também escolher valores para parâmetro  $\gamma$  do modelo ajustável, que ainda não foi especulado, por não influir no módulo de compressibilidade e na massa efetiva na saturação, critérios utilizados para a escolha de modelos aceitáveis nos capítulos anteriores.

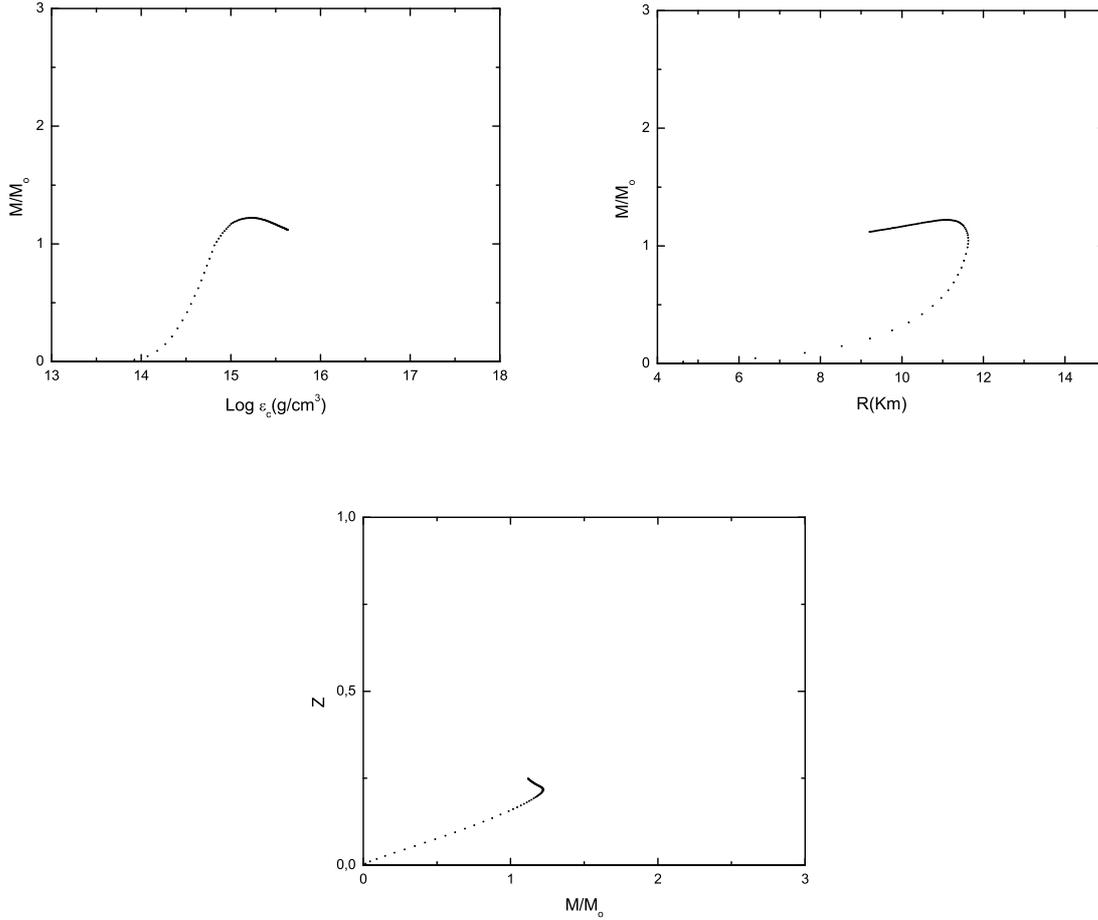


Figura 6.6: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda = 0, 19$ .

## 6.4 Valores Observacionais

Existem cerca de 730 pulsares conhecidos dos quais as massas de mais de 20 são conhecidas. Desses, a maioria tem uma massa em torno de  $1,4M_{sol}$  (figura 6.10). A estrela de nêutrons com maior massa medida até hoje tem uma massa de  $2,1M_{sol}$ , medida com erro de  $0,2M_{sol}$ <sup>[59]</sup>. O modelo de Walecka com méson  $\rho$  e octeto bariônico resulta em um valor de massa máxima próximo desse valor; porém, como foi demonstrado no capítulo 5, este modelo não reproduz a massa efetiva e a compressibilidade desejados na saturação. Serão apresentados, a seguir, os valores de massa máxima de estrelas para os modelos que dão valores adequados de compressibilidade e massa efetiva na saturação.

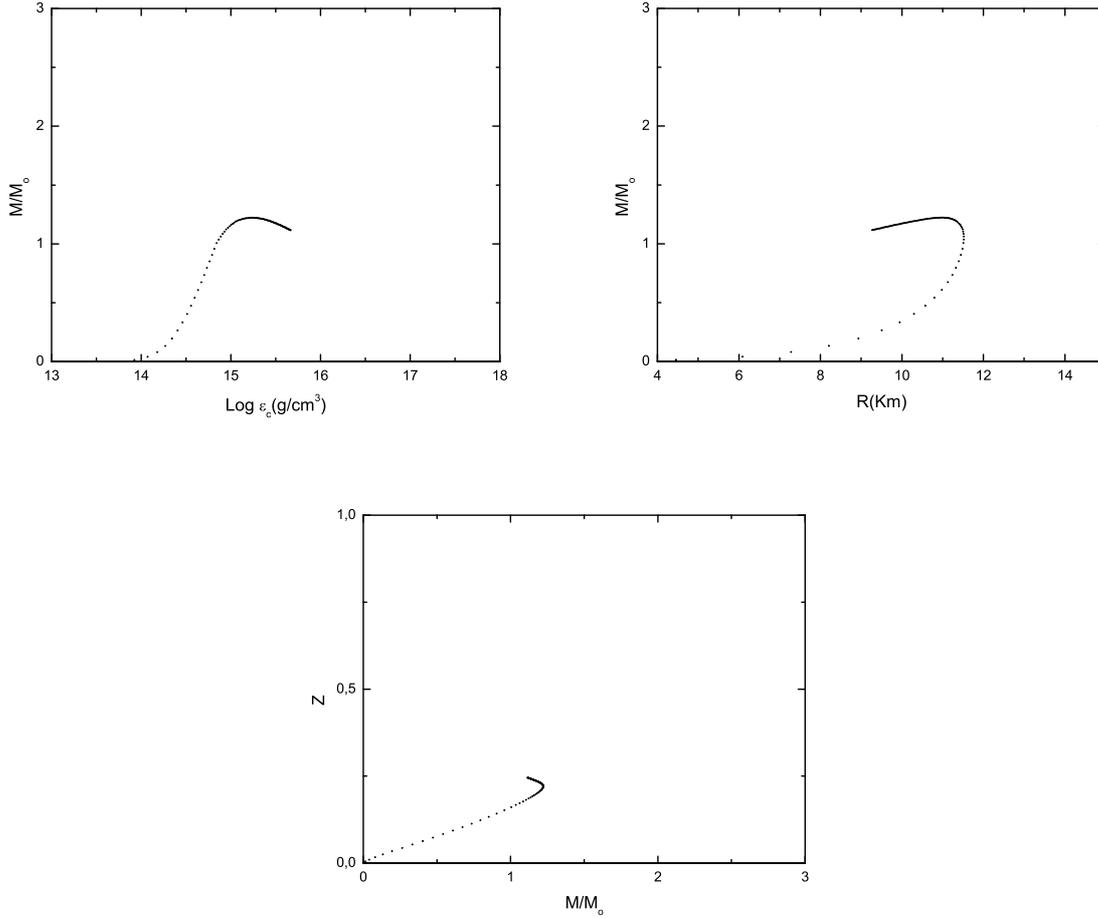


Figura 6.7: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda \rightarrow \infty$ .

#### 6.4.1 Modelo Escalar

O modelo escalar com  $\lambda = 0,06$  gera uma massa máxima de  $1,46M_{sol}$ , um raio entre  $4,80$  e  $12,22\text{km}$  e um *redshift* entre  $0,00$  e  $0,29$  (figura 6.4). Sua massa efetiva na saturação é  $0,70M$ , e seu módulo de compressão é  $257,19\text{MeV}$ . Sua equação de estado, populações, compressibilidade e velocidade do som no meio estão representadas, respectivamente, nas figuras (5.8)(esquerda), (5.20)(esquerda), (5.12)(esquerda) e (5.16)(esquerda).

#### 6.4.2 Modelo Independente

Quando  $\beta = 0$ , o modelo  $\lambda = 0,06$  e  $\gamma = -1$  resulta uma massa máxima de  $1,48M_{sol}$ , um raio  $< 11,31\text{km}$  e um *redshift*  $< 0,32$  (figura 6.11). Sua massa efetiva na saturação é  $0,70M$ , e seu módulo de compressão é  $257,19\text{MeV}$ . Sua equação de estado, populações, compressibilidade

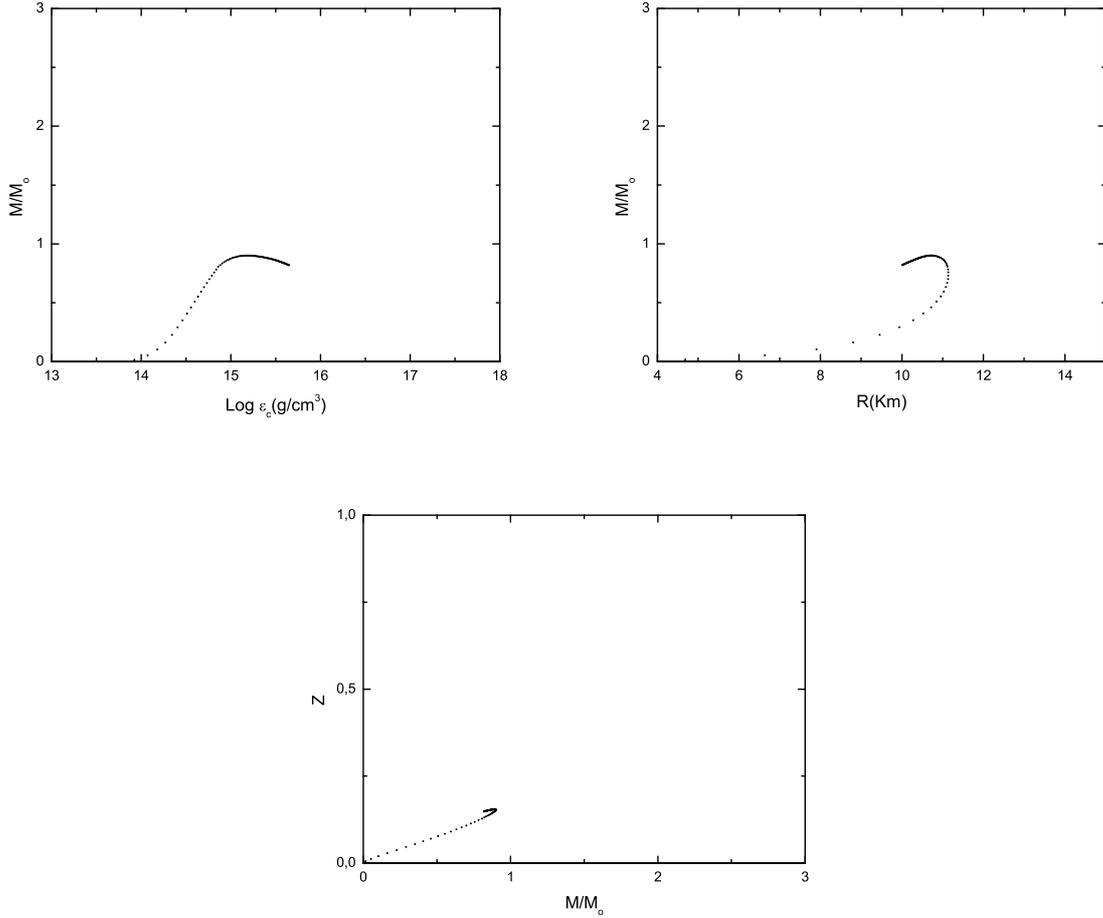


Figura 6.8: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$ .

e velocidade do som no meio estão representadas nas figuras (6.12) e (6.13).

Como esse modelo não foi discutido nos capítulos anteriores, serão discutidas, agora, suas propriedades.

Para  $\gamma = 0$ , o modelo  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$  resulta em uma massa máxima de  $1,44M_{sol}$ , um raio  $< 12,18\text{km}$  e um *redshift*  $< 0,29$  (figura 6.14). Sua massa efetiva na saturação é  $0,70M$ , e seu módulo de compressão é  $252,90\text{MeV}$ . Sua equação de estado, populações, compressibilidade e velocidade do som no meio estão, respectivamente, nas figuras (6.15) e (6.16).

Considerando todos os parâmetros diferentes de zero, o modelo  $\beta = 0,01$ ,  $\lambda = 0,08$  e  $\gamma = -1$  resulta uma massa máxima de  $1,46M_{sol}$ , um raio  $< 11,22\text{km}$  e um *redshift*  $< 0,32$  (figura 6.17). Sua massa efetiva na saturação é  $0,70M$ , e seu módulo de compressão é  $252,90\text{MeV}$ . Comparando com os valores fenomenológicos, esta combinação de parâmetros parece plausível. Sua equação de estado, populações, compressibilidade e velocidade do som no meio estão, respecti-

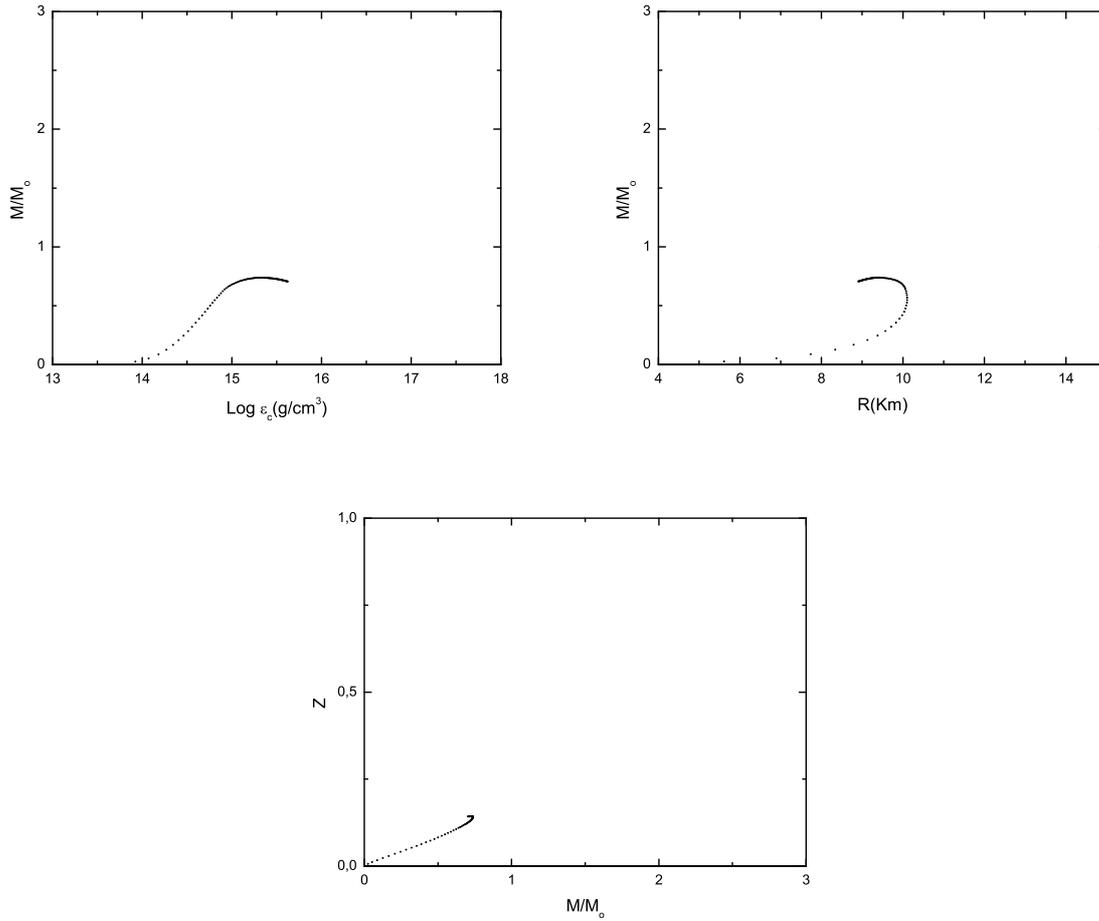


Figura 6.9: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda, \beta, \gamma \rightarrow \infty$

vamente, nas figuras (6.18) e (5.19). Portanto, pode-se concluir que o modelo dentre os quais tem-se a massa efetiva e a compressibilidade adequadas na saturação, o que resulta na maior massa máxima para estrelas de nêutrons é o modelo com  $\lambda = 0,06$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -1$ . O conhecimento da massa máxima das estrelas de nêutrons é relevante, pois a existência de um corpo com massa maior do que o valor estabelecido indica a existência de um buraco negro.

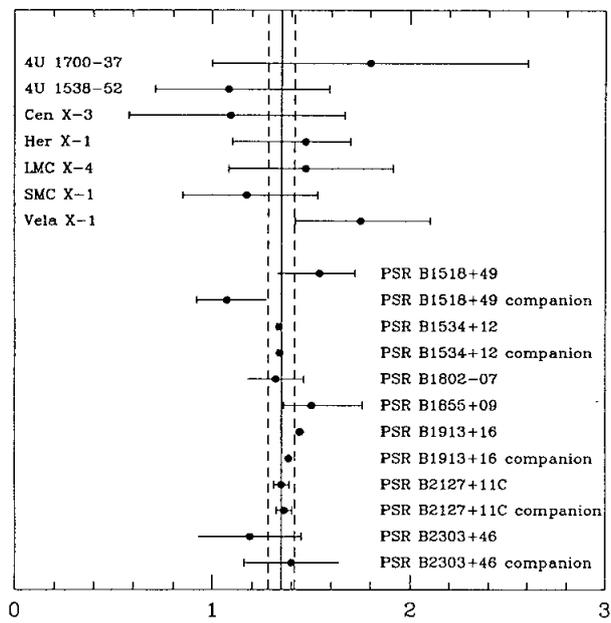


Figura 6.10: Massa dos pulsares conhecidos em múltiplos da massa solar.

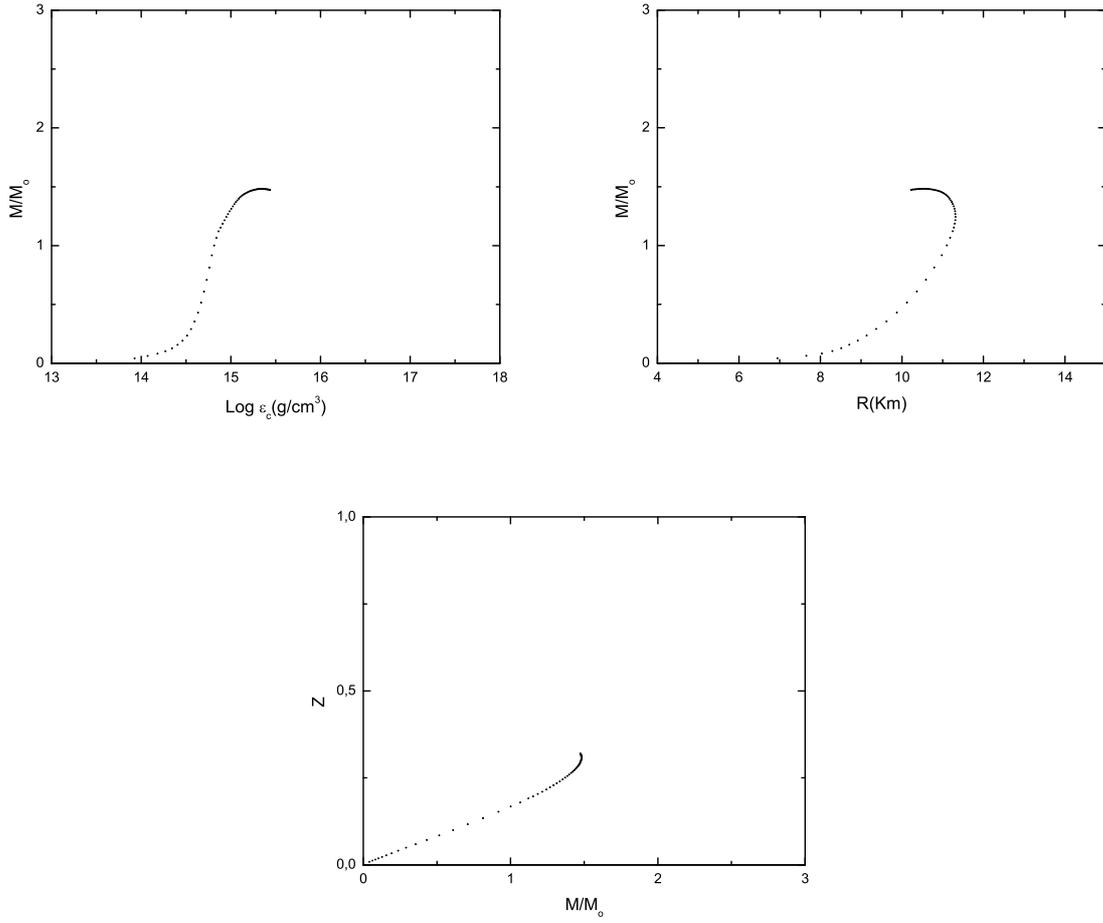


Figura 6.11: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda = 0,06$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -1$ .

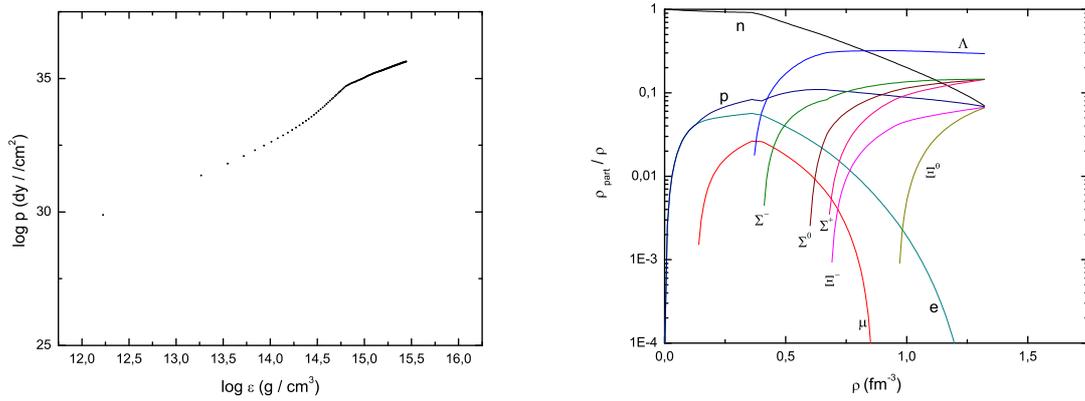


Figura 6.12: Equação de estado e populações para  $\lambda = 0,06$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -1$ .

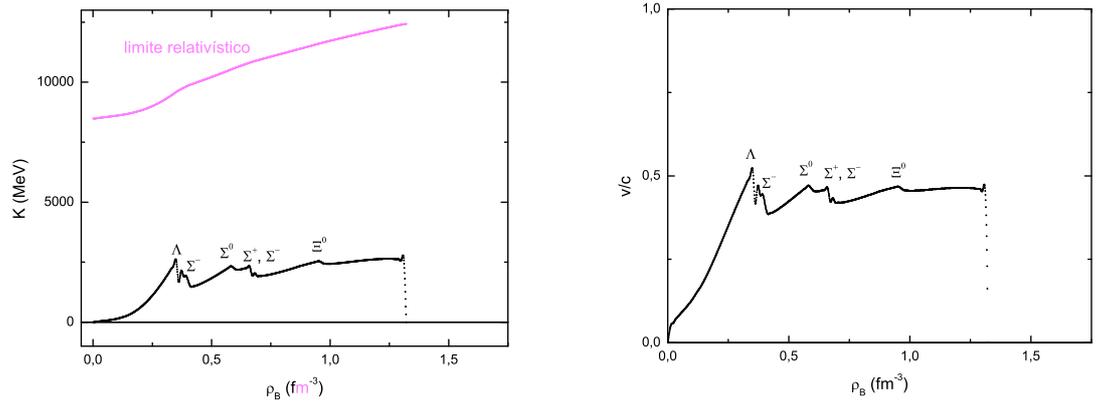


Figura 6.13: Compressibilidade e velocidade do som para  $\lambda = 0,06$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -1$ .

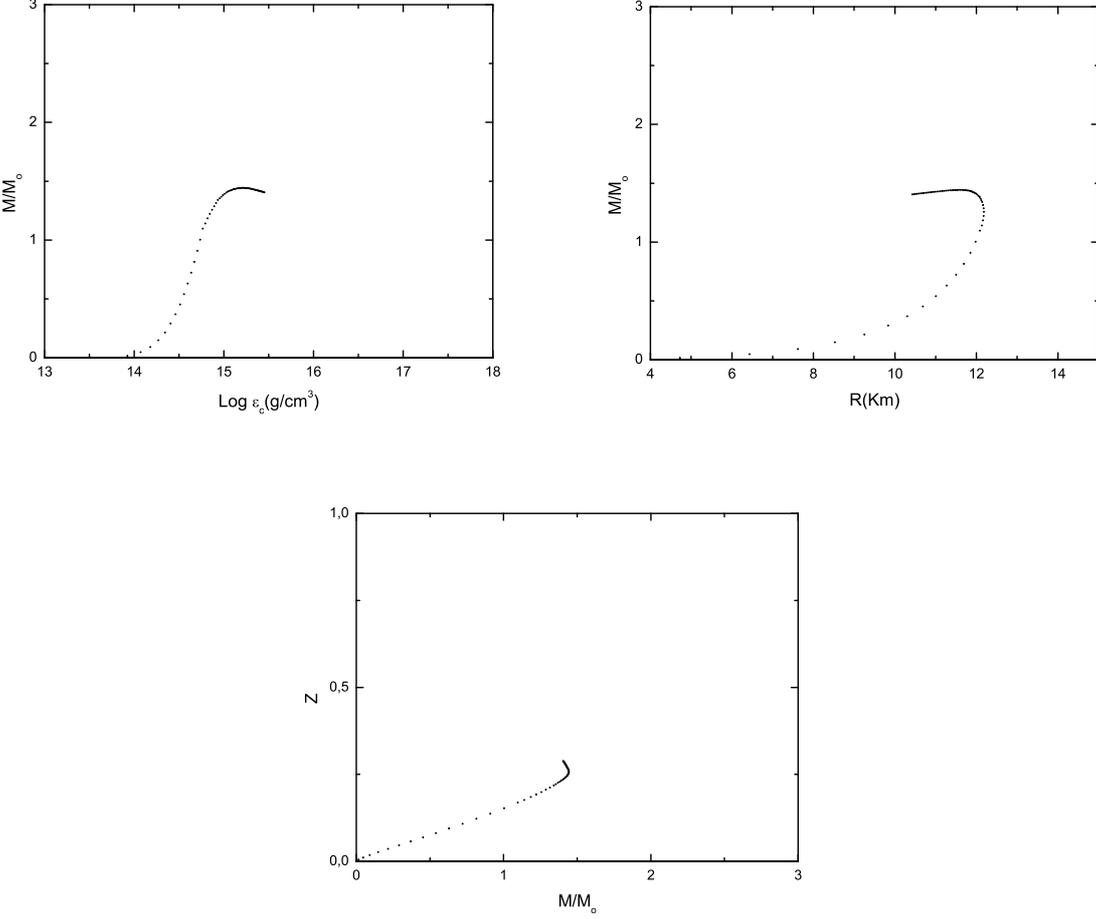


Figura 6.14: Massa máxima, raio e redshift para  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$ .

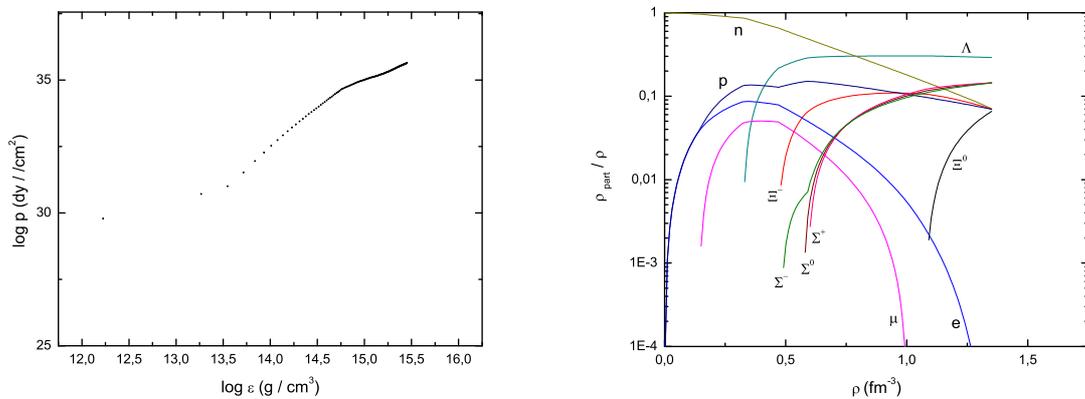


Figura 6.15: Equação de estado e populações para  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$ .

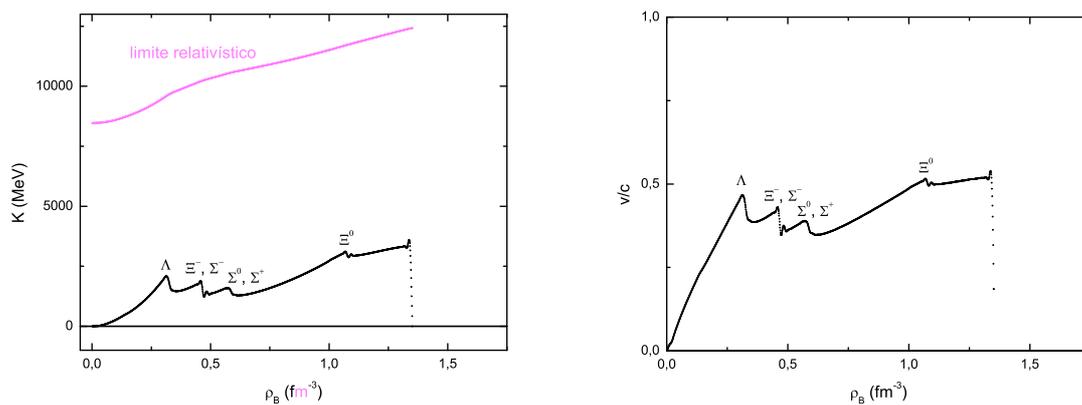


Figura 6.16: Compressibilidade e velocidade do som para  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$ .

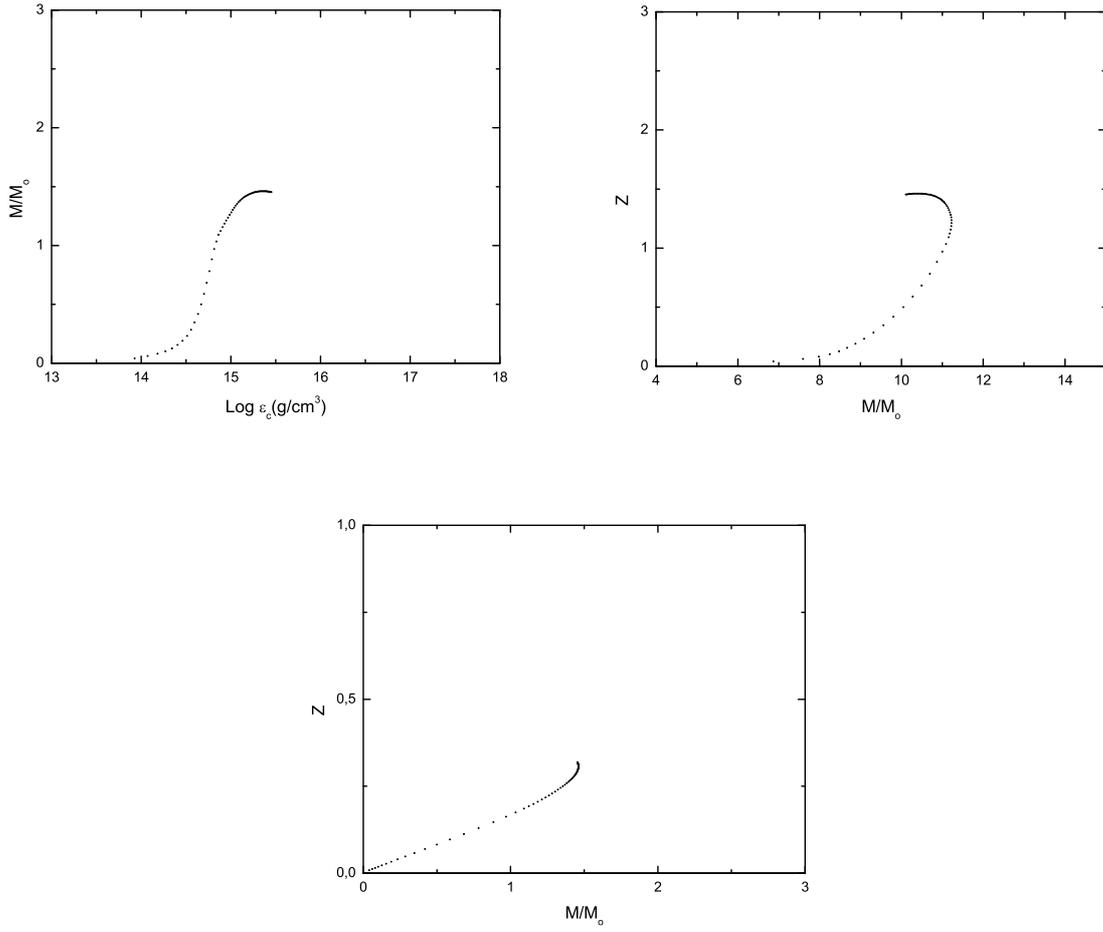


Figura 6.17: Massa máxima, raio e *redshift* para  $\lambda = 0,08$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\gamma = -1$ .

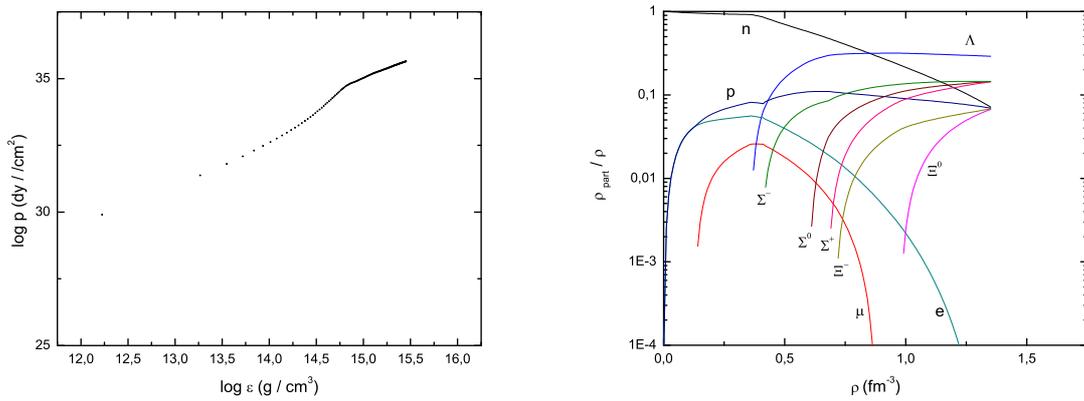


Figura 6.18: Equação de estado e populações para  $\gamma = -1$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$ .

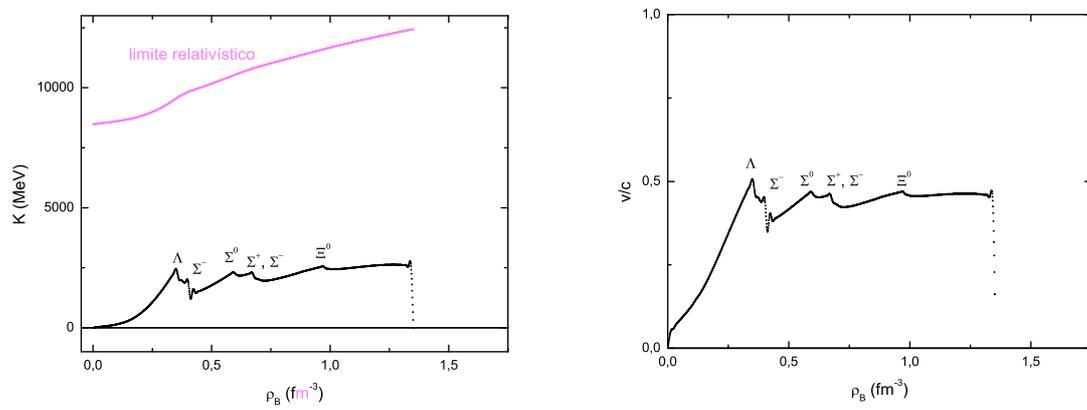


Figura 6.19: Compressibilidade e velocidade do som para  $\gamma = -1$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\lambda = 0,08$ .

## Capítulo 7

# Conclusão

Primeiramente, este trabalho faz uma análise detalhada do já conhecido modelo de Walecka usando certas propriedades para estabelecer limites de validade do modelo. Esses limites de validade estão, por sua vez, associados a vínculos de distintas naturezas: formal/conceitual e fenomenológico. Entre os vínculos de natureza formal/conceitual ressalta a recém definida função compressibilidade, que fisicamente deve ser positiva para qualquer densidade; além disso, existe a causalidade, que impede que qualquer velocidade seja maior do que a da luz, a massa efetiva do núcleon, que deve, também, ser positiva para qualquer densidade e a energia de ligação por núcleon, que deve refletir os aspectos atrativo e repulsivo da força forte. As propriedades experimentais utilizadas, que representam vínculos fenomenológicos, são a compressibilidade da matéria nuclear e a massa efetiva do núcleon no ponto de saturação. Tais limites indicam que o modelo de Walecka é válido para uma densidade entre  $0,06$  e  $57,80 fm^{-3}$  para matéria de nêutrons e entre  $0,12$  e  $40,77 fm^{-3}$  para matéria nuclear.

Este trabalho também apresenta um modelo que unifica e generaliza os principais modelos efetivos da hadrodinâmica quântica encontrados na literatura (Walecka, ZM, exponencial) e também permite o estudo de modelos com propriedades intermediárias. Estuda-se o comportamento da matéria nuclear densa sob a variação dos 3 parâmetros do modelo  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  que se referem a acoplamentos não lineares e representam a influência do meio nuclear na dinâmica dos bárions. Todas as grandezas calculadas, a equação de estado, a compressibilidade, a velocidade do som no meio e as populações de partículas no sistema, variam consideravelmente com o aumento do parâmetro  $\lambda$ . O aumento de  $\beta$  acentua o efeito do aumento de  $\lambda$  e o efeito de  $\gamma$  é, por sua vez, muito pequeno.

Através do estudo da função compressibilidade e do estudo da velocidade do som no meio da matéria nuclear, grandezas essas intimamente relacionadas, percebe-se, claramente, que os

parâmetros do modelo influenciam o surgimento e o desaparecimento de partículas no sistema, verificando-se de que forma isso acontece. Dependendo do valor de  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , os híperons aparecem em ordem diferente nos gráficos das populações. Isso acontece porque, nas equações de potencial químico, além das massas das partículas, também são considerados os valores de isospin, as constantes de acoplamento  $g_\sigma, g_\omega$  e  $g_\rho$  e os campos mesônicos  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$ .

Quando se estuda o comportamento desse sistema sob ação da gravidade, ou seja, considerando-se uma estrela de nêutrons, entre os modelos que reproduzem os valores adequados de compressibilidade e massa efetiva na saturação, e que respeitam os limites formais/conceituais citados anteriormente, o que fornece maior massa estelar ( $1,48M_{sol}$ ) é o modelo com  $\lambda = 0,06$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -1$ . Embora esse seja um valor de massa maior do que o da maioria das estrelas de nêutrons conhecidas, é um valor muito inferior ao das estrelas que têm sido observadas mais recentemente.

Como o modelo hadrônico utilizado nessa abordagem tem um limite superior para a massa das estrelas de nêutrons muito baixo, as estrelas com massas com valores superiores necessitam de uma nova física para modelá-las, física essa que, além de incluir efeitos de rotação estelar, pode conter componentes exóticos, tais como estrelas compostas somente por quarks, estrelas contendo fases mistas de matéria de quarks estranhos, entre outros aspectos.

Mais recentemente, a discussão sobre a existência de uma fase hadrônica e de quarks e glúons na matéria nuclear tem se intensificado. Neste contexto, a inclusão da simetria quiral nos tratamentos teóricos tem se tornado importante para estabelecer uma conexão entre os graus de liberdade da QCD e a sua manifestação na QHD. Neste sentido, uma possível futura abordagem do tratamento teórico utilizado nesta dissertação é a extensão do modelo para o estudo da transição de fase para matéria de quarks, incluindo-se elementos de simetria quiral e, adicionalmente, propriedades globais como a rotação estelar. Dessa forma espera-se ser possível atingir uma compreensão mais detalhada da matéria nuclear e, especialmente, da função compressibilidade da matéria nuclear. Esses tópicos serão abordados pela autora deste trabalho nos seus estudos do doutorado.

# Apêndice A

## Provas

### A.1 Prova da Equação de Equilíbrio Químico

Da reação

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (\text{A.1})$$

segue:

$$\mu_n - \mu_p - \mu_{e^-} - \mu_{\bar{\nu}_e} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Como todos os neutrinos produzidos no processo de formação da estrela de nêutrons sofrem difusão no processo de resfriamento, o seu potencial químico é zero. Assim:

$$\mu_{\nu_e^-} = \mu_{\nu_\mu} = \mu_{\nu_\tau} = \mu_{\bar{\nu}_e} = \mu_{\bar{\nu}_\mu} = \mu_{\bar{\nu}_\tau} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Então:

$$\mu_p = \mu_n - \mu_{e^-} \quad (\text{A.4})$$

### A.2 Prova da conservação de corrente bariônica

Derivando corrente bariônica:

$$\partial^\mu B_\mu = \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \quad (\text{A.5})$$

$$\partial^\mu B_\mu = \partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi. \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando toda relação pelo número imaginário  $i$ , obtém-se:

$$i \partial^\mu B_\mu = i \partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi. \quad (\text{A.7})$$

Agora, de 4.21, pode ser visto que

$$i \partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu = -\bar{\psi} \gamma_\mu g_\omega \omega^\mu - \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma), \quad (\text{A.8})$$

de onde vem que

$$i\partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = -\bar{\psi} \gamma_\mu g_\omega \omega^\mu \psi - \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi. \quad (\text{A.9})$$

Por outro lado, de 4.19, pode ser visto que:

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi = \gamma_\mu g_\omega \omega^\mu \psi + (M - g_\sigma \sigma) \psi, \quad (\text{A.10})$$

de onde vem que

$$i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu g_\omega \omega^\mu \psi + \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo A.9 e A.11 em A.7, resulta que

$$i\partial^\mu B_\mu = [-\bar{\psi} \gamma_\mu g_\omega \omega^\mu \psi - \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi] + [\bar{\psi} \gamma_\mu g_\omega \omega^\mu \psi + \bar{\psi} (M - g_\sigma \sigma) \psi], \quad (\text{A.12})$$

ou seja

$$\partial^\mu B_\mu = 0, \quad (\text{A.13})$$

como queria-se mostrar.

### A.3 Detalhes do Cálculo da Densidade Escalar

- $U^\dagger \gamma_0 U$  :

$$U^\dagger \gamma_0 U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( 1 - \frac{k^2}{(E^* + M^*)^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( \frac{(E^* + M^*)^2 - k^2}{(E^* + M^*)^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{2E^*} \left( \frac{(E^*)^2 + (M^*)^2 + 2E^* M^* - k^2}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.18})$$

Fazendo a substituição

$$k^2 = (E^*)^2 - (M^*)^2 \quad (\text{A.19})$$

na expressão acima, fica-se com:

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{2E^*} \left( \frac{(E^*)^2 + (M^*)^2 + 2E^*M^* - (E^*)^2 + (M^*)^2}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{2E^*} \left( \frac{2(M^*)^2 + 2E^*M^*}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{E^*} \left( \frac{(M^*)^2 + E^*M^*}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{E^*} \left( \frac{M^*(M^* + E^*)}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{M^*}{E^*}. \quad (\text{A.24})$$

Substituindo 4.100:

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.25})$$

•  $V^\dagger \gamma_0 V$  :

$$V^\dagger \gamma_0 V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$V^\dagger \gamma_0 V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$V^\dagger \gamma_0 V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( \frac{k^2}{(E^* + M^*)^2} - 1 \right), \quad (\text{A.28})$$

que é igual a A.16 com sinal negativo e, portanto, é igual a A.25 com sinal negativo:

$$V^\dagger \gamma_0 V = \frac{-M^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.29})$$

•  $U^\dagger \gamma_0 V$  :

$$U^\dagger \gamma_0 V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$U^\dagger \gamma_0 V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$U^\dagger \gamma_0 V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( \frac{-k}{E^* + M^*} + \frac{-k}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$U^\dagger \gamma_0 V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( \frac{-2k}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.33})$$

$$U^\dagger \gamma_0 V = \frac{-k}{E^*} \quad (\text{A.34})$$

Substituindo 4.100 na expressão acima:

$$U^\dagger \gamma_0 V = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.35})$$

•  $V^\dagger \gamma_0 U$ :

$$V^\dagger \gamma_0 U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$V^\dagger \gamma_0 U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$V^\dagger \gamma_0 U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( \frac{-k}{E^* + M^*} + \frac{-k}{E^* + M^*} \right), \quad (\text{A.38})$$

que é igual a A.32 e, portanto, é igual a A.35:

$$V^\dagger \gamma_0 U = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.39})$$

## A.4 Detalhes do Cálculo da Nova Forma para Pressão

•  $U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U$  :

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \\ E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \\ E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* - M^* \\ 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( E^* - M^* + \frac{k^2}{E^* + M^*} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{(E^* + M^*)(E^* - M^*) + k^2}{2E^*} \quad (\text{A.44})$$

Fazendo a multiplicação e substituindo A.19:

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{(E^*)^2 - (M^*)^2 + (E^*)^2 - (M^*)^2}{2E^*} \quad (\text{A.45})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{(E^*)^2 - (M^*)^2}{E^*}. \quad (\text{A.46})$$

Fazendo a substituição 4.100:

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.47})$$

•  $V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V$ :

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \\ E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \\ E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E^* - M^*) \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ E^* + M^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( (E^* - M^*) \frac{k^2}{(E^* + M^*)^2} + (E^* + M^*) \right) \quad (\text{A.51})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{k^2(E^* - M^*)}{2E^*(E^* + M^*)} + \frac{(E^* + M^*)^2}{2E^*} \quad (\text{A.52})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{k^2(E^* - M^*) + (E^* + M^*)^3}{2E^*(E^* + M^*)}. \quad (\text{A.53})$$

Após a substituição A.19:

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{[(E^*)^2 - (M^*)^2](E^* - M^*) + (E^* + M^*)^3}{2E^*(E^* + M^*)} \quad (\text{A.54})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{(E^* + M^*)(E^* - M^*)^2 + (E^* + M^*)^3}{2E^*(E^* + M^*)} \quad (\text{A.55})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{(E^* - M^*)^2 + (E^* + M^*)^2}{2E^*} \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{(E^*)^2 + (M^*)^2 - 2E^*M^* + (E^*)^2 + (M^*)^2 + 2E^*M^*}{2E^*} \quad (\text{A.57})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{(E^*)^2 + (M^*)^2}{E^*}. \quad (\text{A.58})$$

Após a substituição 4.100:

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{k^2 + 2(M^*)^2}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}} \quad (\text{A.59})$$

•  $U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V$ :

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E^* - M^*) \frac{-k}{E^* + M^*} \\ 0 \\ (E^* + M^*) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( (E^* - M^*) \frac{-k}{(E^* + M^*)} + \frac{k}{(E^* + M^*)} (E^* + M^*) \right) \quad (\text{A.63})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( -k \frac{(E^* - M^*)}{(E^* + M^*)} + k \right) \quad (\text{A.64})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{-k(E^* - M^*) + k(E^* + M^*)}{2E^*} \quad (\text{A.65})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{-kE^* + kM^* + kE^* + kM^*}{2E^*} \quad (\text{A.66})$$

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{kM^*}{E^*}. \quad (\text{A.67})$$

Após a substituição 4.100:

$$U^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} V = \frac{kM^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.68})$$

•  $V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U$ :

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.69})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \\ E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.70})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \\ E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* - M^* \\ 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.71})$$

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( -k \frac{(E^* - M^*)}{(E^* + M^*)} + k \right), \quad (\text{A.72})$$

que é igual a A.64 e, portanto, é igual a A.68:

$$V^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U = \frac{kM^*}{\sqrt{k^2 + (M^*)^2}}. \quad (\text{A.73})$$

## A.5 Resolução de Sistema das Constantes de Acoplamento

Para resolver o sistema das equações 4.181 e 4.182, rearranja-se a primeira equação para isolar o termo que contém  $\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} = & -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Substituindo na segunda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 + \frac{1}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{(M^*)} \right] \\ + & \left[ -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 \right] \\ & = \epsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

$$\begin{aligned} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \\ = \epsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (M - M^*)^2 = \\ \epsilon_0 - & \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} = \frac{\epsilon_0}{(M - M^*)^2} \\ - \frac{1}{(M - M^*)^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = \left\{ \frac{\epsilon_0}{(M - M^*)^2} - \frac{1}{(M - M^*)^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) E^* - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + E^*}{M^*} \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{A.79})$$

Agora substituindo A.77 em A.74:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} = & -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{M^*} \right] \\ + & \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \left( \left( \frac{1}{6} k_F^3 + \frac{1}{4} (M^*)^2 k_F \right) \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{4} (M^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2}}{(M^*)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \left( -\frac{1}{6} k_F^3 \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} \right) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{\gamma}{6\pi^2} \frac{k_F^3}{\rho_0^2} \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{\epsilon_0}{\rho_0^2}. \quad (\text{A.82})$$

Da equação 4.92:

$$k_F^3 = \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_B. \quad (\text{A.83})$$

Substituindo na equação acima:

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{\gamma}{6\pi^2} \frac{1}{\rho_0^2} \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_0 \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{\epsilon_0}{\rho_0^2} \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{1}{\rho_0} \sqrt{(M^*)^2 + k_F^2} + \frac{\epsilon_0}{\rho_0^2}. \quad (\text{A.85})$$

Substituindo 4.100:

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{E^*}{\rho_0} + \frac{\epsilon_0}{\rho_0^2}. \quad (\text{A.86})$$

## A.6 Prova da Obtenção do Modelo Exponencial

Pela série binomial:

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = 1 + (-i) \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right) + \frac{(-i)(-i-1)}{2!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^2 + \frac{(-i)(-i-1)(-i-2)}{3!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^3 + \dots \quad (\text{A.87})$$

Quando  $|i|$  é muito grande, pode-se fazer a aproximação:

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = 1 + (-i) \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B} + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^2 + \frac{(-i)^3}{3!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^3 + \dots \quad (\text{A.88})$$

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = 1 - \frac{g_\sigma \sigma}{M_B} + \frac{1}{2!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{M_B}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{g_\sigma \sigma}{M_B}\right)^3 + \dots \quad (\text{A.89})$$

Identifica-se a série acima como a expansão da função exponencial:

$$e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.90})$$

Portanto, pode-se escrever que:

$$\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{iM_B}\right)^{-i} = e^{-\frac{g_\sigma \sigma}{M_B}}. \quad (\text{A.91})$$

# Bibliografia

- [1] WONG, S. M. Introductory Nuclear Physics. John Wiley 2004, ISBN: 0471239739, cap. 1.
- [2] THADDEUS, T. The Self-Spilling Atom, The history of the Rutherford-Soddy collaboration. Taylor and Francis Ltd 1977 , ISBN 0-85066-109-9.
- [3] PASACHOFF, N. Marie Curie: And the Science of Radioactivity. Oxford University Press, USA, Reissue edition, November 27, 1997, ISBN: 0195120116.
- [4] FRAUENFELDER, H. and HENLEY, E. M. Subatomic Physics. Prentice Hall, 2 edition, January 4, 1991, ISBN: 0138594309.
- [5] LOPES, J. L. A estrutura quântica da matéria. Rio de Janeiro, UFRJ, 1992.
- [6] BORN, M. Atomic Physics. Dover Publications, 8th Rvsd edition June 1, 1989, ISBN: 0486659844.
- [7] SHALIT, A. D. and FESHBACH, H. Theoretical Nuclear Physics. John Wiley, June 5, 1974, ISBN: 0471203858.
- [8] CHADWICK, J. Possible existence of a neutron, Nature, London, v. 129, p. 312, Feb. 1932.
- [9] CHANDRASEKHAR, S. Astrophys. J. **74** (1931) 81.
- [10] CHANDRASEKHAR, S. Mon. Not. R. Astron. Soc. **95** (1935) 207.
- [11] CHENG, T. P. Relativity, Gravitation, and Cosmology: A Basic Introduction. Oxford University Press, USA, February 17, 2005, ISBN: 0198529570.
- [12] LANDAU, L. D. Phys. Z. Sowjetunion, v. 1, p. 285, 1932.
- [13] OPPENHEIMER, J. R., VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. Physic. Rev., New York, v. 55, n. 4, p. 374-381, Feb. 1939.

- [14] TAYLOR, E. F. and WHEELER, J. A. Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity. Addison Wesley, 1st edition, July 12, 2000, ISBN: 020138423X.
- [15] HEY, J. S. The Evolution of Radio Astronomy. New York, Science History Publications, 1973.
- [16] Sullivan, W. III (Ed.). The Early Years of Radio Astronomy: Reflections Fifty Years after Jansky's Discovery. London: Cambridge University Press, 1984.
- [17] YANG, C. N. The law of parity conservation and other symmetry laws of physics. Nobel Lectures Physics: 1942-1962, 1964.
- [18] LEE, T. D. and YANG, C. N. Question of Parity Conservation in Weak Interactions. The Physical Review, 104, Oct 1, 1956.
- [19] WU, C. S., AMBLER, E., HAYWARD, R. W., HOPPES, D. D. and HUDSON, R. P. Experimental test of parity conservation in beta decay. Physical Review, 105(4), 1957.
- [20] SATPATHY, L. 1987 J. Phys. G: Nucl. Phys. 13 761-781.
- [21] WEIZSÄCKER, C. F. Zur Theorie der Kernmassen. Zeitschrift für Physik, 96 (1935) 431-458.
- [22] BRUECKNER, K. A. and GAMMEL, J. L. Properties of Nuclear Matter. Phys. Rev. 109, 1023-1039 (1958).
- [23] WALECKA, J. D. Nuclear Physics AS74 (1994) 271c-296.
- [24] WALECKA, J. D. Theoretical Nuclear and subnuclear Physics. Oxford Univ. Press (1995) p. 13.
- [25] SCHWABL, F. Quantum Mechanics Springer Verlag New York (1995).
- [26] AICHELIN, J., HARTNACK, C., OESCHLER, H. The nuclear equation of state observed in earthbound experiments. Int. J. Mod. Phys. D, Singapore, 2006 (a ser publicado).
- [27] SEROT, B. D. and WALECKA, J. D. Adv. in Nucl. Phys. vol.16, Plenum, NY (1986).
- [28] SEROT, B. D. and WALECKA, J. D. Int. J. Mod. Phys. E6, 515 (1997).
- [29] SHURYAK, E. How should we probe a strongly coupled quark gluon plasma? Eur.Phys.J.C (2005).

- [30] LEE, T.D. The strongly interacting quark gluon plasma and future physics Nuclear Physics A 750 (2005) 1-8.
- [31] JACOBSEN, R. B. Plasma de Quarks e Glúons no Interior de Estrelas de Nêutrons , Dissertação de Mestrado, UFRGS 2006.
- [32] BAADE, W. and ZWICKY, F. Phys. Rev. **45** (1934) 138.
- [33] BURROWS, A. and LATTIMER, J. M. Astrophys. J. **307** (1986) 178.
- [34] WEINBERG, S. Gravitation and Cosmology, New York, John Wiley, 1972, p. 179-182.
- [35] PEACK, J.A. Cosmological Physics, Cambridge University Press, 1999 p. 436 and 451.
- [36] HARRISON, B. K., THORNE, K. S., WAKANO, M. and WHEELER, J. A. Gravitation theory and gravitational collapse, Chicago, University of Chicago Press, 1965.
- [37] NEGELE, J. W. and VAUTHERIN, D. Neutron star matter at sub-nuclear densities. Nuclear Phys. A, Amsterdam, v. 207, n. 2, p. 298-320, June 1973.
- [38] FINKELSTEIN, D. R. Quantum Relativity: A Synthesis of the Ideas of Einstein and Heisenberg. Publisher: Springer-Verlag (November 1996), ISBN: 3540570845.
- [39] MARRANGHELLO, F. G. Estruturas Nucleares de Estrelas Compactas, Dissertação de Mestrado, UFRGS 2000.
- [40] MARRANGHELLO, G. F. ; VASCONCELLOS, Cesar Augusto Zen ; PACHECO, José de Freitas ; DILLIG, Manfred . A Nuclear Many-Body Theory at Finite Temperature Applied to Protoneutron Star. International Journal Of Modern Physics E, Singapura, v. 11, n. 2, p. 83-104, 2002.
- [41] MARRANGHELLO, G. F. ; VASCONCELLOS, Cesar Augusto Zen ; DILLIG, Manfred ; PACHECO, José de Freitas . Nuclear Many-body theory at finite temperature applied to a protoneutron star. International Journal of Modern Physics B, v. 17, n. 28, p. 5191-5196, 2003.
- [42] WALECKA, J. D. A theory of high condensed matter. Annals of Physics, New York, v. 83, n. 2, p. 491-529, Apr. 1974.
- [43] GRIFFITIS, D. Introduction to Elementary Particles. Wiley editors, 1987, p. 343-368.
- [44] WEINBERG, S. Gravitation and Cosmology. New York, John Wiley, 1972, p. 47-52.

- [45] GOMES, L. C., WALECKA, J. D. and WEISKOPF, V. F. Properties of Nuclear Matter. Ann. Phys, New York, v. 3, n. 3, p. 241-274, Mar. 1958.
- [46] MESSIAH, A. Mecanique quantique. Dumond, Paris, 1964 V.2 P. 796.
- [47] GRADSTEYN AND RYZHIK. Table of Integrals, Series, and Products. Alan Jeffrey, Fifth edition, January 1994, ISBN: 0-12-294755-X.
- [48] MYERS, W. D. and SWIATECKI, W. J. Average nuclear properties. Ann. Phys., New York, V. 55, N. 3, P. 395-505, Dec. 1969.
- [49] MOLLER, P., MYERS, W. D., SWIATECKI, W. J. and TREINER, J. Nuclear mass formula with a finite-range droplet model and a folded-Yukawa single-particle potential. Atom. Data Nucl. Data Tables, New York, V. 39, N. 2, P. 225-253, July 1988.
- [50] GLENDENNING, N. K. First-order phase transitions more than one conserved charge: consequences for neutron stars. *Phys. Rev. D*, New York, v. 46, p. 1274-1287, Aug. 1992.
- [51] CALLEN, H. B. Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. Second edition, Wiley, p. 84.
- [52] BOGUTA, J., BODMER, A. R. Relativistic calculation on nuclear matter and the nuclear surface. Nuclear Physics A, Amsterdam, V. 292, N. 3, P. 413-428, Dec. 1977.
- [53] ZIMANYI, J., MOSZKOWSKI, S. A. Nuclear equation of state with derivative scalar coupling. Phys. Rev. C, Woodbury, V. 42, N. 4, P. 1416-1421, Oct. 1990.
- [54] TAURINES, A. R. Estrelas de Nêutrons em Teorias Relativísticas de Campos Médios, Dissertação de Mestrado, 1999.
- [55] BANERJEE, B., GLENDENNING, N. K., GYULASSY, M. Pion condensation in a relativistic field theory consistent with bulk properties of nuclear matter. Nucl. Phys. A, Amsterdam, V. 361, N. 1, P. 326-354, May 1981.
- [56] MAEKAWA, C. M., RAZEIRA, M., LIÉZ, E. F. e VASCONCELLOS, C. A. Z. Nijve dimensional analysis in a effective field theory for neutron stars. International Journal Of Modern Physics D, Singapura, v. 13, n. 7, p. 1223-1228, 2004.
- [57] GLENDENNING, N. K. Compact Stars, Springer, New York, 1996, p. 168.
- [58] RHOADES, C. E., RUFFINI, R. Maximum mass of a neutron star. Phys. Rev. Lett., New York, v. 32, n. 6, p. 324-327, Feb. 1974.

[59] NICE, D. J., SPLAVER, E. M., STAIRS, I. H., LIGER, O., JESSED, A., KRAMER, M. and CORDES, J. M. Astrophysical Journal to be published. A 2.1 Solar Mass Pulsar Measured by Relativistic Orbital Decay.