

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS
VISCOPLÁSTICOS EM PEQUENAS E GRANDES DEFORMAÇÕES UTILIZANDO
O MEF

por

Tiago dos Santos

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2012

IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS
VISCOPLÁSTICOS EM PEQUENAS E GRANDES DEFORMAÇÕES UTILIZANDO
O MEF

por

Tiago dos Santos
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Samir Maghous (PPGEC/UFRGS - Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler (PROMEC/UFRGS - Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Rafael A. Comparsi Laranja (PROMEC/UFRGS - Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Francis H. R. França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 13, dezembro de 2012

É por meio da ciência que provamos, mas por meio da intuição que descobrimos.

H. Poincaré

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, à minha família e amigos. Agradeço também à CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

No presente trabalho é descrita uma formulação para modelos constitutivos elasto-viscoplásticos, considerando deformações infinitesimais e finitas. Os modelos são formulados em um contexto da termodinâmica de variáveis internas usando fundamentos de análise convexa. As equações de evolução são obtidas a partir do princípio da máxima dissipação, o qual desempenha um importante papel na abordagem adotada, a qual consiste na generalização do modelo reológico de *Bingham*. O problema constitutivo de valor inicial local é solucionado por um esquema de integração implícita combinado a um algoritmo de mapeamento de retorno. O problema de valor no contorno e inicial global, considerando casos quasi-estáticos, é solucionado por meio do método dos elementos finitos (MEF) empregando também um método de integração implícita. Esta estratégia é implementada empregando os modelos constitutivos viscoplásticos linear e não linear de Perzyna e o modelo de Perić. A implementação computacional é avaliada por meio da comparação dos resultados numéricos a soluções analíticas e também a problemas padrões disponíveis na literatura. Os resultados obtidos são importantes para avaliar o comportamento e as características dos modelos viscoplásticos na análise dos fenômenos de dependência da taxa de deformação e de relaxação de tensão. Embora os três modelos se mostrem adequados à captura destes fenômenos, uma atenção especial deve ser dada ao modelo não linear de Perzyna, pois este não recupera o modelo invíscido como um caso limite, além disso, apresenta mal condicionamento no algoritmo de mapeamento de retorno.

Palavras-chave: viscoplasticidade; deformações infinitesimais; deformações finitas; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

In this work an elastic-viscoplastic constitutive formulation is described, considering infinitesimal and finite deformations. The models are formulated inside a thermodynamic with internal variables framework using fundamentals from convex analysis. The evolution equations are obtained from the maximum dissipation principle, which plays an important role on the approach adopted, which is the generalization of the *Bingham* rheological model. The local initial value problem is solved by an implicit integration scheme with a return mapping algorithm. The global initial boundary value problem is solved by the finite element method (FEM) also employing an implicit integration method. The strategy is implemented employing the linear and nonlinear Perzyna and the Perić viscoplastic models. The computational implementation is evaluated by comparing the numerical results with analytical solutions and with benchmarks available in the literature. The results obtained are important to evaluate the behavior and the characteristics of the models on the analysis of rate-dependency and stress relaxation. The three models were suitable to predict these phenomena. However, a special attention is needed on the nonlinear Perzyna model, because it does not recover the inviscid model as a limit case. Further, it presents ill-conditioning in the return mapping algorithm.

Key-words: viscoplasticity; infinitesimal deformations; finite deformations; finite element method.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos do Trabalho	2
1.1.1	Objetivos Específicos	2
1.2	Aspectos sobre (Visco)Plasticidade	2
1.2.1	Efeitos da Taxa de Deformação	3
1.3	Diretrizes e Referências Importantes ao Trabalho	5
1.4	Organização do Trabalho	6
1.5	Preliminares e Notação	7
2	VISCOPLASTICIDADE EM DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS	9
2.1	Decomposição Aditiva do Tensor de Deformações	9
2.2	Lei Constitutiva, Potenciais de Energia Livre e de Dissipação	10
2.3	Domínio Elástico e Função de Escoamento	12
2.4	Características Fenomenológicas: modelo unidimensional	13
2.5	Equações de Evolução	16
2.6	Problema Constitutivo Viscoplastico de Valor Inicial	20
2.7	Discretização Temporal das Equações de Evolução	21
2.8	Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplastica	23
2.9	Solução das Equações de Correção Viscoplastica	24
2.9.1	Método de <i>Newton-Raphson</i>	25
2.10	Módulo Tangente Consistente	26
2.11	Aplicação ao Modelo J_2	29
2.11.1	Relações Constitutivas e Potencial de Energia Livre	31
2.11.2	Determinação da Função Distância	31
2.11.3	Equações de Evolução	34
2.11.4	Problema Constitutivo Viscoplastico	34
2.11.5	Discretização Temporal das Equações de Evolução	35
2.11.6	Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplastica	35
2.11.7	Alguns Modelos Viscoplasticos	39
2.11.8	Módulo Tangente Consistente	41
3	VISCOPLASTICIDADE EM GRANDES DEFORMAÇÕES	43

3.1	Decomposição Multiplicativa do Tensor Gradiente de Deformação	43
3.1.1	Resultados Cinemáticos da Decomposição Multiplicativa	44
3.2	Pares Conjugados de Tensão e Deformação	46
3.3	Lei Constitutiva Hiperelástica, Potenciais de Energia Livre e de Dissipação	47
3.3.1	Relação Constitutiva Hiperelástica Linear Isotrópica	49
3.3.2	Taxa de Deformação Inelástica Modificada	49
3.4	Domínio Elástico e Função de Escoamento	50
3.5	Equações de Evolução	51
3.6	Problema Constitutivo Viscoplastico de Valor Inicial	52
3.7	Discretização Temporal das Equações de Evolução	53
3.8	Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplastica	55
3.9	Módulo Tangente Consistente	57
3.10	Aplicação ao Modelo J_2	60
3.10.1	Relações Constitutivas e Potencial de Energia Livre	61
3.10.2	Determinação da Função Distância	62
3.10.3	Equações de Evolução	62
3.10.4	Problema Constitutivo Viscoplastico	63
3.10.5	Discretização Temporal das Equações de Evolução	64
3.10.6	Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplastica	64
3.10.7	Operador Tangente	68
4	PROBLEMA DE VALOR NO CONTORNO E INICIAL - PVCI E ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	69
4.1	Descrição do Problema	69
4.2	Formulação Forte	70
4.3	Formulação Fraca	71
4.4	Problema de Valor no Contorno Incremental	72
4.5	Linearização do Trabalho Virtual	74
4.6	Método de <i>Newton-Raphson</i>	75
4.7	Discretização Espacial - Método dos Elementos Finitos	77
4.8	Discretização Espacial do Trabalho Virtual	80
4.8.1	Discretização Espacial para Deformações Infinitesimais	83
4.8.2	Discretização Espacial para Deformações Finitas	85
5	SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA PROBLEMAS SIMPLES SOB DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS	87
5.1	Soluções Analíticas para Casos Unidimensionais Simples	87
5.1.1	Dependência da Taxa de Deformação na Resposta em Tensão	89
5.1.2	Relaxação de Tensão sob Deformação Constante	92

5.2	Solução Analítica para Cilindro Espesso Rígido-Viscoplástico . . .	94
6	AVALIAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS	101
6.1	Deformações Infinitesimais	101
6.1.1	Comparação dos Resultados Numéricos com as Soluções Exatas Unidimensionais	101
6.1.2	Comparação com a Solução Exata para o Cilindro Espesso Rígido-Viscoplástico	106
6.1.3	Placa com Furo	112
6.2	Deformações Finitas	123
6.2.1	Ensaio Hiperelástico: tração-compressão e cisalhamento puro . . .	123
6.2.2	Estricção de uma Barra Cilíndrica - <i>Necking</i>	126
7	CONCLUSÕES	134
	REFERÊNCIAS	136

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquema de um ensaio de tração uniaxial, $OABD$ - material elastoplástico perfeito, $OACE$ - material elastoplástico com endurecimento.	3
1.2	Fenômenos viscoplásticos. (a) Dependência da taxa de deformação na resposta em tensão; (b) Escorregamento sob tensão constante; (c) Relaxação de tensão sob deformação constante. Modificado de de Souza Neto et al. (2008).	4
1.3	Mapeamento de \mathcal{B}	7
2.1	Modelo reológico de <i>Bingham</i>	14
2.2	(a) Decomposição da tensão total; (c) Esquematização da função distância.	16
3.1	Esquema da decomposição multiplicativa de \mathbf{F}	44
3.2	Configurações de deformações entre os instantes t_n e t_{n+1}	57
4.1	Problema de valor no contorno e inicial.	69
4.2	Interpolação por elementos finitos. (a) Função de interpolação local; (b) Função de interpolação global.	79
5.1	(a) Barra unidimensional em alongamento; História de $\bar{u}_1(t)$: (b) Alongamento à taxa constante; (c) Alongamento constante.	88
5.2	Cilindro rígido-viscoplástico com deslocamento prescrito $\bar{u}_r(t)$ em $r = a$	95
6.1	Modelo de elementos finitos para o problema unidimensional.	101
6.2	Curva tensão-deformação para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\eta\beta$, 20 incrementos.	102
6.3	Curva tensão-deformação para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\eta\beta$, $m = 2$, 20 incrementos.	103
6.4	Curva tensão-deformação para o modelo de Perić com diferentes valores de $\eta\beta$, $m = 2$, 20 incrementos.	103
6.5	Relaxação de tensão para o modelo linear de Perzyna, 20 e 100 incrementos.	104
6.6	Relaxação de tensão para o modelo não linear de Perzyna, $m = 2$, 20 e 100 incrementos.	105
6.7	Relaxação de tensão para o modelo de Perić, $m = 1$, 20 e 100 incrementos.	105
6.8	Modelo de elementos finitos para o cilindro espesso.	106

6.9	Tensão $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo linear de Perzyna.	107
6.10	Tensão $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo linear de Perzyna.	107
6.11	Tensão $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo linear de Perzyna.	108
6.12	Pressão interna p_i numérica comparada à pressão limite p_i^{lim} exata, modelo linear de Perzyna.	108
6.13	Tensão $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	109
6.14	Tensão $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	109
6.15	Tensão $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	110
6.16	Pressão interna p_i numérica comparada à pressão limite p_i^{lim} exata, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	110
6.17	Tensão $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	111
6.18	Tensão $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	111
6.19	Tensão $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	112
6.20	Pressão interna p_i numérica comparada à pressão limite p_i^{lim} exata, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	112
6.21	Modelo de elementos finitos para a placa perfurada.	113
6.22	Curva reação-deslocamento para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	114
6.23	Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	115
6.24	Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	116
6.25	Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 5$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	117
6.26	Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 5$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	118
6.27	Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	119
6.28	Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	120
6.29	Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	121
6.30	Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).	122

6.31	Deformação viscoplástica acumulada, para $\bar{u}_2 = 26\text{mm}$. (a) Modelo linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$; (b) Modelo não linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$ e $m = 2$; (c) Modelo de Perić, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^3$ e $m = 2$	123
6.32	Modelos de elementos finitos. (a) Tração-compressão unidimensional sob hipótese de axissimetria; (b) cisalhamento puro sob hipótese de EPD.	124
6.33	Resultados analíticos e numéricos. (a) Tração-compressão unidimensional; (b) Cisalhamento puro	125
6.34	Modelo de elementos finitos para a barra cilíndrica, sob hipótese de axissimetria.	126
6.35	Curva reação-deslocamento para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$	127
6.36	Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$	128
6.37	Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$	128
6.38	Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 1$	129
6.39	Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10$	129
6.40	Curva raio-deslocamento para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$	130
6.41	Curva raio-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$	130
6.42	Curva raio-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$	131
6.43	Curva raio-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 1$	131
6.44	Curva raio-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10$	132
6.45	Deformação viscoplástica acumulada, para $\bar{u}_2 = 7\text{mm}$. (a) Modelo linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$; (b) Modelo não linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 1$ e $m = 2$; (c) Modelo de Perić, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10$ e $m = 2$	132

LISTA DE TABELAS

2.1	Resumo do modelo viscoplástico em pequenas deformações.	20
2.2	Resumo do modelo viscoplástico em pequenas deformações para o critério J_2	33
3.1	Resumo do modelo viscoplástico em grandes deformações.	53
3.2	Resumo do modelo viscoplástico em grandes deformações para o critério J_2	63
6.1	Propriedades elásticas e plásticas para o problema unidimensional.	101
6.2	Propriedades elásticas e plásticas para o cilindro elasto-viscoplástico.	106
6.3	Pressões limites p_i^{lim} exatas para o modelo linear de Perzyna.	107
6.4	Pressões limites p_i^{lim} exatas para o modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	108
6.5	Pressões limites p_i^{lim} exatas para o modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$	111
6.6	Propriedades elásticas e plásticas para a placa com furo.	113
6.7	Propriedades viscosas para a placa com furo, Figura 6.31.	113
6.8	Propriedades elásticas e plásticas para a barra.	127
6.9	Propriedades viscosas para a barra cilíndrica, Figura 6.45.	127

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Força termodinâmica associada a α , endurecimento isotrópico
\mathbf{A}	Conjunto das forças termodinâmicas associadas a α
\mathbf{b}	Vetor de forças de corpo na configuração corrente
$\bar{\mathbf{b}}$	Vetor de forças de corpo na configuração de referência
\mathbf{C}	Tensor de deformação de Cauchy-Green à Direita
$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\cdot)$	Cone normal ao conjunto \mathbb{K} em (\cdot)
$\mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\cdot)$	Cone normal unitário ao conjunto \mathbb{K} em (\cdot)
\mathbf{D}	Tensor de taxa de deformação, parte simétrica de \mathbf{L}
$\bar{\mathbf{D}}$	Tensor de taxa de deformação modificado, parte simétrica de $\bar{\mathbf{L}}$
$d_{\mathbb{K}}(\cdot)$	Função distância, menor distância de (\cdot) ao conjunto \mathbb{K}
\mathbf{E}_i	Versores Lagrangeanos
\mathbf{e}_i	Versores Eulerianos
$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}$	Tensor de deformação de Hencky
E	Módulo de Young
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação
\mathbf{F}_u	Incremento do gradiente de deformação
F_r	Força de reação
$f(\cdot, \mathbf{A})$	Função de escoamento
G	Módulo de cisalhamento
$g_{\mathbb{K}}(\cdot)$	Função de escoamento canônica, função de Minkowski do conjunto \mathbb{K}
H	Parâmetro material, endurecimento isotrópico linear

II	Tensor identidade de quanta ordem
I	Tensor identidade de segunda ordem
$I_{\mathbb{K}}$	Função indicatriz de \mathbb{K}
J	Jacobiano
$J_2(\cdot)$	Segundo invariante da parte desviadora do tensor de tensão (\cdot)
L	Tensor gradiente de velocidade
$\bar{\mathbf{L}}$	Tensor gradiente de velocidade modificado
\mathbf{l}_i	Direções principais Lagrangeanas
m	Parâmetro de não linearidade do modelo constitutivo viscoplástico
$N_i^{(e)}(\mathbf{X})$	Função de interpolação do elemento finito (e) associada ao nó i
$N_i^g(\mathbf{X})$	Função de interpolação global associada ao nó i
n	Vetor normal na configuração corrente
N	Vetor normal na configuração de referência
n_d	Número de dimensões do campo vetorial calculado
n_e	Número de elementos finitos
n_N	Número de nós da malha global
n_n	Número de nós do elemento finito
n_{int}	Número de variáveis internas
$O_{(\cdot)}$	Vizinhança do ponto (\cdot)
P	Primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff
P^S	Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff
P	Ponto material na configuração corrente
P_0	Ponto material na configuração de referência
$p(\cdot)$	Pressão hidrostática do tensor de tensão (\cdot)
p_i^{lim}	Pressão interna limite

$\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\cdot)$	Projeção de (\cdot) no conjunto \mathbb{K}
\mathbf{q}	Vetor de fluxo de calor
\mathbf{R}	Tensor de rotação, decomposição polar
$R(\Delta\gamma)$	Raio da superfície de escoamento, função de $\Delta\gamma$
\mathbf{S}	Parte desviadora de $\boldsymbol{\sigma}$
t_0	Instante inicial do intervalo de tempo de interesse
T	Instante final do intervalo de tempo de interesse
t_n	Instante inicial do intervalo de tempo incremental
t_{n+1}	Instante final do intervalo de tempo incremental
\mathbf{t}	Vetor tração na configuração corrente
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor tração na configuração de referência
\mathbf{U}	Tensor de alongamento à direita, decomposição polar
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos prescritos
\mathbf{V}	Tensor de alongamento à esquerda, decomposição polar
\mathbf{W}	Tensor de taxa de rotação, parte antissimétrica de \mathbf{L}
$\bar{\mathbf{W}}$	Tensor de taxa de rotação modificado, , parte antissimétrica de $\bar{\mathbf{L}}$
\mathbf{X}	Coordenadas Lagrangeanas
\mathbf{x}	Coordenadas Eulereanas
α	Variável interna, deformação viscoplástica acumulada
$\boldsymbol{\alpha}$	Conjunto de variáveis internas
δ	Parâmetro material, endurecimento isotrópico não linear
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações infinitesimais
$\boldsymbol{\eta}$	Vetor de deslocamento virtual

η	Parâmetro material, viscosidade
φ	Função de mapeamento da configuração de referência à configuração corrente
$\Delta\gamma$	Multiplicador viscoplástico incremental
$\dot{\gamma}$	Multiplicador viscoplástico
κ	Módulo volumétrico
λ_i	Autovalores de \mathbf{U}^e
λ, μ	Constantes elásticas de Lamé
Ω	Domínio corrente
Ω_0	Domínio de referência
$\partial\Omega$	Contorno do domínio corrente
$\partial\Omega_0$	Contorno do domínio de referência
$\partial\Omega^E$	Contorno essencial do domínio corrente
$\partial\Omega_0^E$	Contorno essencial do domínio de referência
$\partial\Omega^N$	Contorno natural do domínio corrente
$\partial\Omega_0^N$	Contorno natural do domínio de referência
$\Omega_0^{(e)}$	Domínio de referência do elemento finito (e)
Φ	Potencial de dissipação interna, configuração corrente
Φ_0	Potencial de dissipação interna, configuração de referência
ψ	Potencial de energia livre de Helmholtz
ρ	Massa específica na configuração corrente
ρ_0	Massa específica na configuração de referência
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensão de Cauchy
σ_∞	Parâmetro material, tensão de saturação
σ_y	Parâmetro material, tensão de escoamento inicial
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensão de Kirchhoff

$\bar{\tau}$	Tensor de tensão de Kirchhoff rotacionado
$\bar{\tau}^D$	Parte desviadora de $\bar{\tau}$
θ	Temperatura
$\Theta(d_{\mathbb{K}})$	Função constitutiva viscoplástica
ξ	Coordenada do estado local não tensionado
\mathcal{B}	Corpo deformável
\mathcal{K}	Conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis
\mathcal{V}	Conjunto dos deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis
$\mathbb{K}(\mathbf{A})$	Domínio elástico
$\partial\mathbb{K}(\mathbf{A})$	Superfície de escoamento
\mathbb{O}^+	Espaço contendo todos os tensores de segunda ordem ortogonais próprios
\mathbb{R}^3	Espaço Euclidiano
\mathbb{R}^+	Parte não negativa do espaço dos reais
$\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$	Parte não negativa do espaço dos reais estendida
$\mathbb{R}^{n_{int}}$	Espaço dos reais de dimensão n_{int}
\mathbb{S}	Espaço contendo todos os tensores de segunda ordem simétricos
\mathbb{S}^+	Espaço contendo todos os tensores de segunda ordem simétricos e positivos-definidos
\mathcal{C}	Tensor constitutivo elástico
$\tilde{\mathcal{C}}$	Módulo tangente consistente
\mathcal{C}^d	Módulo tangente contínuo para materiais dissipativos
\mathcal{C}^{ep}	Módulo tangente contínuo para materiais elasto-plásticos
\mathcal{C}^{vp}	Módulo tangente contínuo para materiais elasto-viscoplásticos
\mathcal{D}	Componente do módulo tangente consistente, deformações finitas
$\tilde{\mathcal{D}}$	Operador tangente consistente, deformações finitas
\mathcal{R}_0	Taxa de trabalho por unidade de volume

\mathcal{G}, \mathcal{H}	Termos geométricos do módulo \mathcal{D} , deformações finitas
$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$	Funcional do princípio dos trabalhos virtuais, resíduo
A	Operador de montagem de elementos finitos
\mathbf{B}^g	Operador gradiente simétrico global
$\mathbf{B}^{(e)}$	Operador gradiente simétrico local
$\tilde{\mathbf{C}}$	Versão matricial do módulo tangente consistente
$\vec{\eta}$	Vetor global de deslocamentos virtuais nodais
\vec{f}_{ext}	Vetor global de forças externas nodais
$\vec{f}_{ext}^{(e)}$	Vetor local de forças externas nodais
\vec{f}_{int}	Vetor global de forças internas nodais
$\vec{f}_{int}^{(e)}$	Vetor local de forças internas nodais
\mathbf{G}^g	Operador gradiente global
\mathbf{G}^l	Operador gradiente local
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente global
$\mathbf{K}_T^{(e)}$	Matriz de rigidez tangente local
\mathbf{N}^g	Matriz de interpolação global
$\mathbf{N}^{(e)}$	Matriz de interpolação local
$\vec{\sigma}$	Vetor global das tensões de Cauchy
\vec{P}	Vetor global das tensões PK1
\vec{u}	Vetor global de deslocamentos nodais
$D(u)[x]$	Derivada direcional de u na direção x
$\det(\cdot)$	Determinante de (\cdot)
$(\cdot)^e$	Parte elástica de (\cdot)
$(\cdot)^i$	Parte inelástica de (\cdot)
$(\cdot)^{vp}$	Parte viscoplástica de (\cdot)

$\exp(\cdot)$	Exponencial de (\cdot)
$\nabla(\cdot)$	Gradiente de (\cdot)
$\nabla^s(\cdot)$	Gradiente simétrico de (\cdot)
$\nabla_{\mathbf{X}}(\cdot)$	Gradiente de (\cdot) com relação a \mathbf{X}
$\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$	Gradiente de (\cdot) com relação a \mathbf{x}
$h(\cdot)$	Versão aproximada do MEF para (\cdot)
$\Delta(\cdot)$	Incremento de (\cdot)
$\text{int}(\cdot)$	Interior do conjunto (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$	Inversa de (\cdot)
$(\cdot)_{J_2}$	Particularização de (\cdot) ao modelo J_2
$\ln(\cdot)$	Logarítmo natural de (\cdot)
$\langle \cdot \rangle$	Operador de McAuley
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana de (\cdot)
$(\cdot)_d$	Parte desviadora do tensor de deformação (\cdot)
$(\cdot)_v$	Parte volumétrica do tensor de deformação (\cdot)
$\text{sign}(\cdot)$	Sinal de (\cdot)
$\dot{(\cdot)} = \frac{D(\cdot)}{Dt}$	Taxa ou derivada material de (\cdot)
$(\cdot)_e$	Tensão de equilíbrio, tensor de tensão (\cdot)
$(\cdot)_{st}$	Sobre tensão, tensor de tensão (\cdot)
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de (\cdot)
$(\cdot)^T$	Transposto de (\cdot)
$(\cdot)_n$	Valor de (\cdot) em t_n
$(\cdot)_{n+1}$	Valor de (\cdot) em t_{n+1}
$(\cdot)_{n+1}^t$	Tentativa elástica para (\cdot) em t_{n+1}

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho surge como parte de um projeto de pesquisa do *Laboratório de Modelagem de Materiais*¹ (lm^2). O projeto de pesquisa tem como principal objetivo a análise numérico-experimental de processos de conformação metálica a alta velocidade, tais como os de conformação eletromagnética. Uma das etapas do projeto consiste na simulação do comportamento mecânico do material sob conformação. Como o processo acontece a altas taxas de deformação, na ordem de 10^4 s^{-1} , é imperativo utilizar modelos constitutivos elasto-viscoplásticos, os quais compõem o objeto de estudo central desta dissertação.

Para realizar a simulação mecânica, decidiu-se por desenvolver uma rotina de elementos finitos própria, no ambiente FORTRAN, ao invés de utilizar um programa comercial. Esta decisão foi impulsionada pelo desejo de utilizar um recurso computacional de baixo custo e com programação aberta, possibilitando eventuais alterações e o total conhecimento das ferramentas e técnicas numéricas empregadas, bem como o futuro acoplamento a uma rotina de simulação do efeito eletromagnético. O programa de elementos finitos em questão soluciona problemas planos e axissimétricos, considerando modelos constitutivos elasto-viscoplásticos em pequenas e grandes deformações. Supõe-se que os processos de conformação se deem por meio de um carregamento monotônico, o que incentiva o uso de regras de endurecimento isotrópico, não necessitando o emprego de uma lei de endurecimento cinemático. Embora as deformações aconteçam a altas taxas, em um primeiro momento as formulações serão desenvolvidas segundo a hipótese de processos *quasi*-estáticos, sendo desprezados efeitos dinâmicos como propagação de ondas e inércia do corpo.

Existem diversos modelos de viscoplasticidade. Em uma revisão recente Chaboche (2008) traz algumas das principais abordagens sobre o assunto. Aqui são empregados três modelos viscoplásticos que consideram a existência de uma superfície de escoamento, são eles: modelos linear e não linear de Perzyna e o modelo de Perić (1993), seguindo a descrição utilizada em Alfano et al. (2001). Ao longo do trabalho são discutidas as particularidades de cada um destes modelos viscoplásticos, bem como suas vantagens e desvantagens. Estes modelos são formulados seguindo o formalismo da termodinâmica de variáveis internas em um contexto de análise convexa.

¹Este laboratório está inserido na Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), no Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC).

1.1 Objetivos do Trabalho

A partir da discussão e motivação colocadas anteriormente, define-se o objetivo principal do trabalho:

- Implementar, avaliar e validar a implementação de modelos constitutivos viscoplásticos usando o método dos elementos finitos.

1.1.1 Objetivos Específicos

Para que o objetivo principal seja alcançado, alguns objetivos específicos devem ser satisfeitos, são estes:

- Descrever uma formulação constitutiva (contínua e discreta) consistente, para modelos viscoplásticos associativos com superfície de escoamento suave, a partir da generalização do modelo reológico de *Bingham*;
- Implementar a formulação constitutiva no programa de elementos finitos;
- Comparar os resultados numéricos a soluções de referência, sejam soluções analíticas ou resultados aproximados disponíveis na literatura.

1.2 Aspectos sobre (Visco)Plasticidade

Embora os mecanismos de deformação, vistos em uma escala microscópica, sejam complexos, o fenômeno plástico pode ser simplificado por meio de uma abordagem fenomenológica em uma escala macroscópica. Neste contexto a plasticidade é caracterizada pela existência de um limite de tensão, chamado de *limite elástico*. O comportamento do material depende se o estado de tensão está dentro ou sobre o limite elástico². Dentro do limite de tensão assume-se que o meio apresente um comportamento elástico e que os processos nesse regime sejam reversíveis. Tal comportamento pode ser visualizado no trecho *OA* da curva mostrada na Figura 1.1, onde se tem a resposta tensão-deformação unidimensional de um material elastoplástico. O carregamento *OA* é aplicado a partir de um estado não tensionado até que seja atingida tensão σ_y , ponto *A*. Considera-se que o caminho de descarregamento a partir de *A* produza exatamente o caminho de carregamento em sentido inverso, tal que retorne à origem, ponto *O*, à medida em que a tensão volte a zero.

Para um estado de tensão sobre o limite elástico o comportamento do material, quando em carregamento, é bem diferente do elástico. Nesta situação o meio sofre deformações permanentes, caracterizando processos de dissipação de energia e variação na energia interna. Este comportamento plástico é esquematicamente mostrado na parte *AB* da

²É permitido que o estado de tensão esteja fora do limite elástico em modelos de materiais dependentes da taxa de deformação, em materiais ditos viscoplásticos, estes que são objeto de estudo deste trabalho.

curva tensão-deformação da Figura 1.1, onde considera-se um material dúctil perfeitamente plástico. Um material é dito perfeitamente plástico quando o limite de tensão é constante, ou seja, independe da história das deformações sofridas pelo material. Por outro lado, em casos onde o limite elástico evolui com os processos de carregamento, se diz que há *endurecimento* no material, ver trecho AC da Figura 1.1. Em um processo de descarregamento, a partir de um estado elastoplástico, ponto B ou C , assume-se que o caminho de descarga, BD ou CE , apresente a mesma inclinação de AO ³. Mas, nota-se que para uma mesma deformação total prescrita $\bar{\epsilon}$ as deformações permanentes ϵ_D^p e ϵ_E^p são diferentes, de forma que o material com endurecimento apresente a menor deformação plástica, $\epsilon_E^p < \epsilon_D^p$, ver Figura 1.1.

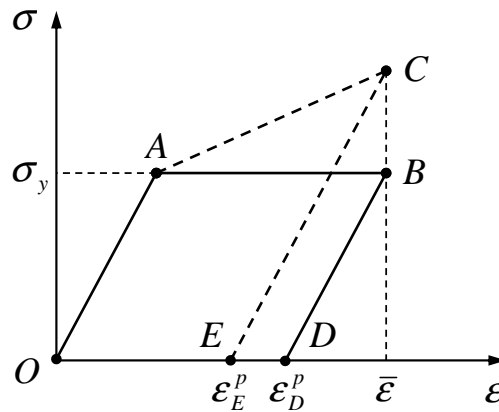


Figura 1.1: Esquema de um ensaio de tração uniaxial, $OABD$ - material elastoplástico perfeito, $OACE$ - material elastoplástico com endurecimento.

1.2.1 Efeitos da Taxa de Deformação

De forma geral, a resposta constitutiva de materiais reais depende da taxa de deformação. Especificamente em metais, este fenômeno está relacionado ao tempo necessário à ação de deslocamentos de grãos, deslizamentos intercristalinos e/ou movimento de discordâncias (Lemaitre e Chaboche, 1990). No entanto, esta dependência pode ou não ser significativa, dependendo de determinadas condições físicas. Para situações em que a dependência da taxa de deformação e/ou da escala de tempo possa ser desprezada se diz ter um *material plástico independente da taxa* (Lemaitre e Chaboche, 1990; Lubliner, 2008; Maugin, 1992). Embora esta característica esteja presente em grande parte das aplicações com metais, há condições sob as quais não é possível realizar tal simplificação, isto é, a influência do tempo passa a ser significativa no comportamento do material. Nestes casos, é possível que a tensão esteja fora do limite elástico, diferentemente do caso plástico. Isto

³Está hipótese será válida para um comportamento elástico linear, quando for possível desprezar os efeitos de dano e a influência dos processos (visco)plásticos sobre a rigidez do material.

ocorre quando o meio está sujeito a altas temperaturas⁴ e/ou a altas taxas de deformação. Nestas situações se diz que o material é *viscoplástico* (Lemaitre e Chaboche, 1990; Maugin, 1992; Ottosen e Ristinmaa, 2005).

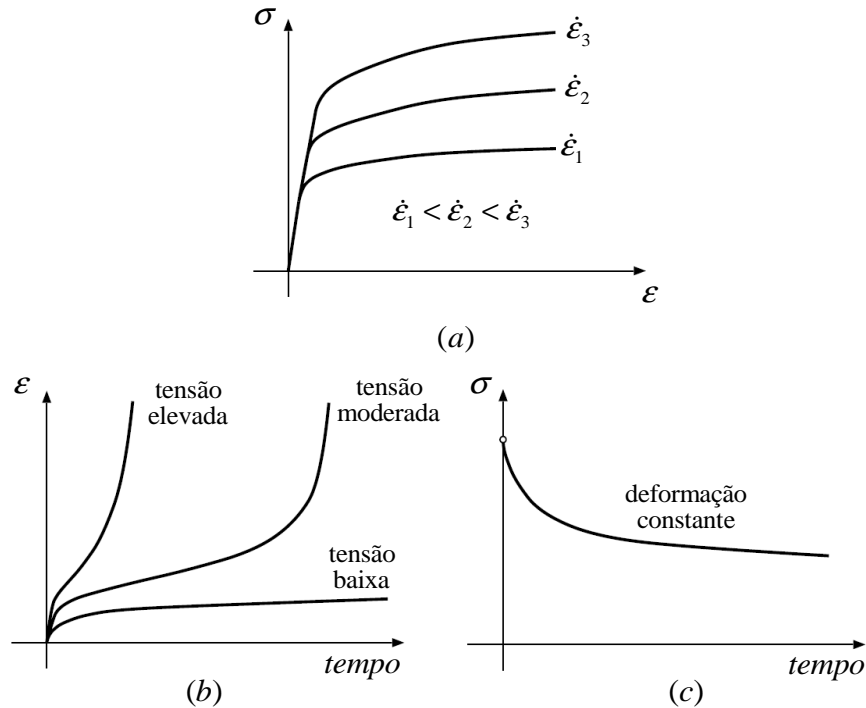


Figura 1.2: Fenômenos viscoplásticos. (a) Dependência da taxa de deformação na resposta em tensão; (b) Escorregamento sob tensão constante; (c) Relaxação de tensão sob deformação constante. Modificado de de Souza Neto et al. (2008).

Três fenômenos podem ser destacados em materiais viscoplásticos, a dependência da taxa de deformação na resposta em tensão, o escorregamento sob tensão constante (*creep*) e a relaxação de tensão sob deformação constante, mostrados nas Figuras 1.2(a)-(c), respectivamente. A Figura 1.2(a) mostra curvas tensão-deformação para ensaios unidimensionais de tração sob diferentes taxas de deformação. Uma importante informação que se pode extrair deste teste é que o limite de escoamento (dinâmico) e a curva de endurecimento de um material viscoplástico dependem fortemente da taxa de deformação. Observa-se que com o aumento da taxa do carregamento há um aumento no regime elástico verificado. Esse fenômeno deve ser levado em conta, em processos sob altas temperaturas, como forjamento a quente, e em processos de conformação sob altas velocidades, tais como os processos de conformação eletromagnética.

O escorregamento sob tensão constante, Figura 1.2(b), pode ser observado quando um corpo de prova, em um ensaio unidimensional, é mantido tensionado por um longo período de tempo, nota-se uma evolução das deformações com o passar do tempo. As taxas de deformação são maiores para tensões elevadas. Nas curvas da Figura 1.2(b), para

⁴Em metais se diz que a dependência do tempo se torna mais significativa a temperaturas próximas a $\frac{1}{3}$ da temperatura de fusão do material (Lemaitre e Chaboche, 1990, p.254).

as tensões elevadas e moderadas, são observados três estágios: escorregamento primário, trecho partindo da origem onde se tem uma taxa de deformação decrescente, escorregamento secundário, onde há uma aceleração constante (quase nula) das deformações, e escorregamento terciário, caracterizado por altas taxas de deformação que levam o material à ruptura. Para níveis baixos de tensão o material tende a estabilizar no segundo estágio. A predição deste comportamento é importante em aplicações onde componentes metálicos estejam submetidos a elevadas cargas e temperaturas por longos períodos de tempo. Dessa forma, este fenômeno não será abordado neste trabalho, pois os modelos viscoplásticos aqui descritos serão empregados na análise de processos que ocorrem em curtos períodos de tempo e a baixas temperaturas. Para detalhes sobre a formulação de modelos de escorregamento ver, por exemplo, Lemaitre e Chaboche (1990), Ottosen e Ristinmaa (2005), Shames e Cozzarelli (1997) e o trabalho de Chaboche (1989).

A relaxação de tensão sob deformação constante, Figura 1.2(c), pode ser verificada em um ensaio unidimensional onde prescreve-se uma deformação constante (virtualmente instantânea) no corpo de prova e este é mantido deformado por um longo período de tempo. Observa-se um decaimento na tensão do material com o passar do tempo. O que pode ocorrer, por exemplo, em componentes pré-tensionados.

1.3 Diretrizes e Referências Importantes ao Trabalho

As leis de dissipação serão obtidas por meio de uma abordagem fenomenológica macroscópica, seguindo o formalismo da termodinâmica de variáveis internas apresentado em Coleman e Gurtin (1967), Lubliner (1972) e Rice (1971). As leis de evolução e equações constitutivas serão formuladas a partir do *princípio da máxima dissipação*, frequentemente creditado a von Mises (Hill, 1950). Este princípio desempenha um importante papel na escrita de uma formulação matemática, ver, por exemplo, Duvaut e Lions (1976), Halphen e Son Nguyen (1975), Moreau (1976, 1977, 2011) e Temam (1985), ou ainda Lubliner (1984, 1986) em um contexto de deformações finitas explorando regras de normalidade. Seguindo esta abordagem matemática, há trabalhos como o de Eve et al. (1990) e Romano et al. (1993), os quais fornecem importantes resultados para as leis de evolução plásticas em um contexto de análise convexa. A aplicação do princípio da máxima dissipação à formulação de modelos dependentes da taxa de deformação pode ser vista em Perzyna (1966) e Rice (1970), e mais recentemente, empregando um processo de regularização por penalidade, em Simo et al. (1988). Esse processo é fortemente relacionado à regularização de Yosida, ver Pazy (1983, p.9), o que é brevemente comentado em Moreau (2011) e explorado em trabalhos como: Angelis (2000), Deseri e Mares (2000), Ibrahimbegović e Chorfi (2000) e Perić (1993). Em trabalhos como Lin e Brocks (2004) e Ristinmaa e Ottosen (2000) também utiliza-se o princípio da máxima dissipação, no entanto empregando o conceito de superfície de escoamento dinâmica ao invés do procedimento de regularização, o que é

válido somente a casos *quasi*-invíscidos (Simo e Honein, 1990).

Serão abordados problemas de viscoplasticidade em pequenas e grandes deformações. Para o primeiro caso adota-se a forma tradicional de decomposição aditiva do tensor de deformações infinitesimais, em suas partes elástica e inelástica (viscoplástica). Sabe-se que o problema de (visco)plasticidade em pequenas deformações possui uma formulação bem definida e de certa forma fechada, o que não ocorre no caso de deformações finitas. Há diversas abordagens para (visco)plasticidade em grandes deformações, diferindo quanto à lei elástica, quando à configuração onde define-se o estado de equilíbrio, quando a decomposição das medidas de deformação, quando ao método de integração das equações constitutivas locais, etc.

Aqui, no contexto de deformações finitas, adota-se um modelo hiperelástico, conforme Simo (1985) e Simo e Ortiz (1985), com a decomposição multiplicativa do gradiente de deformações empregada em Lee e Liu (1967) e Lee (1969). Com estas duas definições é possível contornar problemas oriundos da formulação hipoelástica utilizada em Argyris e Kleiber (1977), Argyris et al. (1978), Hibbitt et al. (1970), McMeeking e Rice (1975) e Nagtegaal e Jong (1981), como resposta oscilatória de tensão sob carregamento monotônico (Dafalias, 1983), comportamento dissipativo no domínio elástico (Kojić e Bathe, 1987; Simo e Pister, 1984) e perda de objetividade das leis constitutivas incrementais (Hughes e Winget, 1980; Rubinstein e Atluri, 1983). Também, utiliza-se a medida de energia de deformação de Hencky, ver Capítulo 2, juntamente a um esquema de integração implícito exponencial, levando a um algoritmo de mapeamento de retorno semelhante ao utilizado em deformações infinitesimais (de Souza Neto et al., 1996; Eterovic e Bathe, 1990; Perić et al., 1992; Simo, 1992; Simo e Miehe, 1992; Weber e Anand, 1990). As equações de equilíbrio são dadas segundo uma descrição *Lagrangiana Total* e solucionadas por meio do *método dos elementos finitos* (MEF).

1.4 Organização do Trabalho

De forma geral este trabalho consiste em três etapas principais. Na primeira delas apresentam-se as formulações contínua e discretizada para os problemas constitutivos viscoplásticos locais, para pequenas deformações no Capítulo 2 e para grandes deformações no Capítulo 3. Nestes dois capítulos também são descritos os algoritmos de solução para os problemas constitutivos de valor inicial de cada caso. No Capítulo 4 são descritas as equações de equilíbrio globais em suas formas forte e fraca, sendo assim definido o *problema de valor no contorno e inicial* (PVCi). No Capítulo 4 também é realizada a discretização espacial do problema global utilizando o MEF. A segunda etapa consiste na implementação do método dos elementos finitos (MEF) em FORTRAN para a solução numérica dos problemas viscoplásticos segundo as formulações locais apresentadas nos Capítulos 2 e 3, para deformações infinitesimais e deformações finitas, respectivamente.

Na terceira etapa é realizada a avaliação dos algoritmos locais e globais implementados. Para isto, são comparados os resultados numéricos de alguns problemas simples às soluções analíticas do Capítulo 5 e a alguns problemas padrões utilizados como *benchmarks* em (visco)plasticidade. Os resultados obtidos bem como as comparações são apresentados e discutidos no Capítulo 6. Por fim no Capítulo 7 encontram-se as conclusões pertinentes ao trabalho e também algumas sugestões para trabalhos futuros.

1.5 Preliminares e Notação

Seja um corpo \mathcal{B} que em um instante de referência $t = t_0$, ocupa uma região $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ com contorno $\partial\Omega_0$ (*configuração de referência*). Cada ponto material P_0 de \mathcal{B} é mapeado em um sistema cartesiano retangular fixo com origem “ O ” e base vetorial \mathbf{E}_i , por um vetor posição $\mathbf{X} \in \Omega_0$, relativo a “ O ”, conforme Figura 1.3.

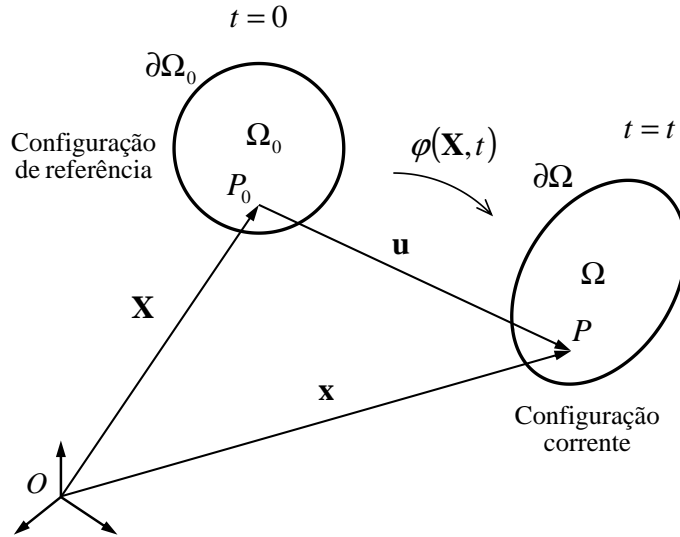


Figura 1.3: Mapeamento de \mathcal{B} .

Supõe-se que o corpo, inicialmente em sua configuração de referência, se mova de modo a ocupar uma nova região $\Omega \in \mathbb{R}^3$ com contorno $\partial\Omega$ (*configuração corrente*) em um instante t . O movimento é definido pela seguinte função

$$\varphi(\mathbf{X}, t) : \Omega_0 \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

que mapeia unicamente cada ponto material P_0 em sua nova posição P . Para cada instante t , a configuração corrente de \mathcal{B} é definida por um vetor $\mathbf{x} \in \Omega$, relativo a um sistema de referência \mathbf{e}_i com origem em “ O ”. A dependência do vetor \mathbf{x} em relação à posição \mathbf{X} é dada pela função de movimento φ , isto é

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (1.2)$$

As coordenadas \mathbf{X} são denominadas *coordenadas materiais* ou *Lagrangianas*, enquanto as coordenadas \mathbf{x} são *coordenadas espaciais* ou *Eulerianas*.

Durante o movimento a partícula P_0 sofre um deslocamento $\mathbf{u} : \Omega_0 \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, de modo que

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}. \quad (1.3)$$

O tensor de segunda ordem \mathbf{F} , denominado *tensor gradiente de deformação*, em coordenadas cartesianas é definido como (Gurtin, 1981; Lai et al., 1996; Reddy, 2008; Spencer, 2004)

$$\mathbf{F} \equiv \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), \quad (1.4)$$

ou em componentes

$$F_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}.$$

Em termos de deslocamentos, com base em (1.3), a Eq.(1.4) se torna

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}, \quad (1.5)$$

ou em componentes⁵

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}.$$

⁵O termo δ_{ij} é o delta de *Kronecker*, sendo: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \rightarrow & i \neq j \\ 1 \rightarrow & i = j \end{cases} \quad i, j = \{1, 2, 3\}.$

2 VISCOPLASTICIDADE EM DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

Nesta seção é descrita a formulação constitutiva elasto-viscoplástica considerando a hipótese de deformações infinitesimais.

É chamado de viscoplástico o comportamento que apresenta simultaneamente um *limite de tensão* e um *tempo característico de relaxação*, isto é, em viscoplasticidade, diferentemente da plasticidade independente da taxa de deformação, é permitido que determinado estado de tensão esteja fora do domínio elástico, no entanto, a tensão retorna ao limite em um tempo característico, chamado de *tempo de relaxação* (Maugin, 1999; Simo e Hughes, 1998).

2.1 Decomposição Aditiva do Tensor de Deformações

Em problemas sob pequenas deformações, a medida de deformação empregada é obtida a partir da linearização do *tensor de deformação de Green-Lagrange*¹. O que leva ao chamado *tensor de deformações infinitesimais*, definido como (Gurtin, 1981; Oden, 1972; Spencer, 2004)

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right], \quad (2.1)$$

ou em componentes

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

Em inelasticidade o *tensor de deformações infinitesimais* $\boldsymbol{\varepsilon}$ é tradicionalmente decomposto em suas parcelas elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e inelástica $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^i. \quad (2.3)$$

¹O *tensor de deformação de Green-Lagrange* é definido em termos de \mathbf{u} como $\mathbf{E}^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \left[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \right]$.

2.2 Lei Constitutiva, Potenciais de Energia Livre e de Dissipação

Dentro do enfoque da termodinâmica de variáveis internas postula-se a existência de um potencial de energia específica (*potencial de energia livre de Helmholtz*), definido como

$$\psi \equiv e - \theta s, \quad (2.4)$$

onde, e é a energia interna específica, θ é a temperatura e s a entropia. No caso particular de deformações infinitesimais, supõe-se que o estado termodinâmico possa ser definido pelo conjunto $(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$. Assim, o potencial de energia livre passa a ser escrito como

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.5)$$

onde, $\boldsymbol{\alpha}$ é conjunto

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_{int}}\}$$

de n_{int} variáveis internas, as quais podem ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial².

Se a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$ for decomposta segundo a Eq.(2.3), isto é compatível com a existência do potencial de energia livre ψ se e somente se este admitir a decomposição (Lubliner, 1972)

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i, \theta) + \psi^i(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.6)$$

assumindo que $\boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{\varepsilon}^i(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, sendo ψ^e e ψ^i as componentes elástica e inelástica de ψ , nesta ordem. Assim, conforme Eq.(2.6), considerando que ψ seja suave a taxa $\dot{\psi}$ fica dada por

$$\dot{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i + \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}, \quad (2.7)$$

onde, o símbolo $*$ denota o produto que reduz o termo $\frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k$ a um escalar. Ainda, de acordo com a decomposição (2.3), é possível escrever o potencial ψ em função da deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, na forma

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{\psi}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta) + \psi^i(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.8)$$

para a qual a taxa de ψ fica

$$\dot{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \bar{\psi}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (2.9)$$

Substituindo a equação acima na inequação de Clausius-Duhem³, para pequenas defor-

²A escolha das variáveis internas, as quais representam os fenômenos dissipativos microscópicos, deve ser guiada por meio de um modelo onde estas possuam interpretações físicas (Muschik, 1990).

³A combinação das duas primeiras leis da termodinâmica leva à chamada inequação de Clausius-Duhem, $\Phi \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left(\dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0$. O potencial Φ representa a dissipação interna por unidade de

mações, chega-se a

$$\Phi = \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \bar{\psi}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i - \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0, \quad (2.10)$$

onde, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensão de *Cauchy*, \mathbf{q} é o fluxo de calor e $\nabla_{\mathbf{x}} \theta$ é o gradiente espacial de temperatura. Como a inequação anterior deve ser válida a *toda evolução real do sistema*, considerando que o material não possui restrições internas, chega-se às seguintes relações constitutivas (Coleman e Gurtin, 1967; Germain, 1973; Germain et al., 1983; Halphen e Son Nguyen, 1975; Lubliner, 1972; Perzyna, 1971; Rice, 1971)

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.11)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (2.12)$$

Então, definindo um conjunto de forças termodinâmicas $\mathbf{A} : \Omega_0 \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{int}}$ conjugado ao conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}$ como

$$A_k \equiv \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k}, \quad (2.13)$$

o potencial de dissipação assume a forma reduzida

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0. \quad (2.14)$$

Ainda, é possível mostrar que

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i}. \quad (2.15)$$

Considerando uma evolução isotérmico, o potencial Φ (2.14) é reescrito apenas pela dissipação intrínseca

$$\Phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0, \quad (2.16)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma} = -\rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \quad \text{e} \quad A_k = \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k}. \quad (2.17)$$

Neste ponto, é importante comentar que Φ é uma função positiva, convexa, semicontínua inferior e homogênea de grau n em $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$, e desempenha um importante papel na formulação constitutiva de modelos inelásticos, o que será mostrado na Seção 2.5. O grau de homogeneidade de Φ depende do tipo de modelo inelástico (plástico, viscoplástico,

volume em Ω . \mathbf{D} é a taxa de deformação. Pode ser decomposto em suas partes intrínseca $\Phi_{intr} \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta})$ e térmica $\Phi_{term} \equiv -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0$, ver, por exemplo, Lubliner (2008, p.67) e Maugin (1999, p.51).

viscoelástico,...) e das hipóteses adotadas (Maugin, 1999, p.113).

Muitas vezes, em problemas de plasticidade, é conveniente trabalhar no espaço dual $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$, isso pode ser feito por meio da transformação de Legendre⁴, ver Rockafellar (1997). Neste senso as funções duais para $\Psi^e \equiv \rho\psi^e$ e $\Psi^i \equiv \rho\psi^i$, são expressas respectivamente por

$$\tilde{\Psi}^e(\boldsymbol{\sigma}) = -\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \quad (2.18)$$

$$\tilde{\Psi}^i(\mathbf{A}) = -\Psi^i(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{A} * \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.19)$$

logo

$$\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \tilde{\Psi}^e(\boldsymbol{\sigma}) + \tilde{\Psi}^i(\mathbf{A}), \quad (2.20)$$

com as variáveis duais relacionadas pelas seguintes expressões

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \iff \boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tilde{\Psi}^e(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.21)$$

$$A_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \Psi^i(\boldsymbol{\alpha}) \iff \alpha_k = \frac{\partial}{\partial A_k} \tilde{\Psi}^i(\mathbf{A}). \quad (2.22)$$

Essa formulação recai no conceito de *material padrão generalizado* (*generalized standard material*) introduzido por Halphen e Son Nguyen (1975). Além disso, é possível mostrar que um amplo conjunto de modelos constitutivos inelásticos são derivados a partir de particularizações dessa classe de materiais, como mostrado por Germain et al. (1983).

2.3 Domínio Elástico e Função de Escoamento

A decomposição da deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$ em suas parcelas elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e inelástica $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, Eq.(2.3), incentiva a definição do chamado domínio elástico. O que normalmente é feito pela introdução de um *conjunto convexo*⁵ *fechado* \mathbb{K} . Em (visco)plasticidade geralmente as forças termodinâmicas \mathbf{A} estão relacionadas ao tamanho e/ou à posição do conjunto \mathbb{K} em um espaço métrico (normado) (Moreau, 1977, 2011, p.268; p.347; p.392). Aqui este espaço é \mathbb{S} ⁶. Então, sendo \mathbb{S} e $\mathbb{R}^{n_{int}}$ espaços normados com dimensão finita o domínio elástico $\mathbb{K} : \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{S}$ é uma multifunção que associa a cada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_{int}}$ um conjunto convexo fechado $\mathbb{K}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{S}$ (Shapiro, 1988, p.392), de modo que \mathbb{K} possa ser definido como

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S} | f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0\}, \quad (2.23)$$

⁴É utilizada a transformação de Legendre, pois assume-se que Ψ seja uma função convexa e diferenciável, caso essas condições não sejam satisfeitas é necessário utilizar a transformação de *Legendre-Fenchel*.

⁵A convexidade do conjunto \mathbb{K} é uma implicação do princípio da máxima dissipação, isto é comentado na Seção 2.5.

⁶ \mathbb{S} é o conjunto contendo todos os tensores de segunda ordem simétricos, $\mathbb{S} = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \mathbf{M} = \mathbf{M}^T\}$.

onde $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ é a chamada *função de escoamento*. O contorno $\partial\mathbb{K}(\mathbf{A})$ de $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ é formado pela superfície

$$\partial\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0\}, \quad (2.24)$$

chamada de *superfície de escoamento*. Aqui, $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ é visto como um conjunto convexo móvel (*moving convex set*) no espaço normado \mathbb{S} de acordo com os valores de \mathbf{A} ⁷. O conjunto $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ é definido de forma que

$$\mathbb{K}(0) = \mathbb{K}_0, \quad (2.25)$$

onde \mathbb{K}_0 é o domínio elástico inicial. Além disso, assume-se que o conjunto $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ contenha a origem, isto é, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \in \mathbb{K}(\mathbf{A})$.

A definição (2.23) é útil para a determinação da chamada *função distância*, Seção 2.5, a qual é empregada na formulação das equações de evolução viscoplásticas.

Para a formulação do modelo de plasticidade, equações de evolução, em um contexto de análise convexa, é útil introduzir uma função $I_{\mathbb{K}} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, dita *função indicatriz* do conjunto $\mathbb{K}(\mathbf{A})$, definida como (Rockafellar, 1997)

$$I_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ +\infty & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases}. \quad (2.26)$$

No contexto particular da plasticidade insensível à taxa de deformação o conjunto $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ representa o espaço admissível de tensões, de modo que não seja permitido nenhum estado de tensão tal que $\boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A})$ (Lubliner, 2008; Simo e Hughes, 1998). Esta é uma das principais diferenças para os modelos viscoplásticos, já que nestes é permitido que $\boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A})$ durante um tempo de relaxação. Isto é, em plasticidade

$$\nexists \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}). \quad (2.27)$$

Em viscoplasticidade

$$\exists \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}), \quad (2.28)$$

enquanto $t < t_{relax}$. Sendo t_{relax} o tempo de relaxação, este que é proporcional à distância de $\boldsymbol{\sigma}$ a $\mathbb{K}(\mathbf{A})$.

2.4 Características Fenomenológicas: modelo unidimensional

Tem sido observado experimentalmente que materiais elastoplásticos podem ser sensíveis à taxa de deformação, de forma que altas taxas podem levar a um aumento do

⁷Em Moreau (1977, 2011) o parâmetro que governa o movimento de \mathbb{K} é o próprio tempo, no entanto, em Shapiro (1988) é utilizado um parâmetro geral $x \in \mathbb{X}$, sendo \mathbb{X} um espaço normado finito. Aqui substitui-se x pelo conjunto de forças termodinâmicas $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_{int}}$.

limite elástico do material. Os modelos viscoplásticos foram propostos para conseguir “capturar” este efeito da taxa de deformação e/ou da escala de tempo sobre a resposta em tensão de materiais ditos plásticos, com o objetivo de fornecer melhores previsões sobre o comportamento destes materiais, quando comparado ao modelo independente da taxa (Lemaitre e Chaboche, 1990).

As leis constitutivas viscoplásticas, considerando uma abordagem fenomenológica, normalmente são desenvolvidas a partir da generalização do modelo reológico unidimensional de *Bingham*. Este é composto por uma mola, com rigidez E , posta em série a um sistema paralelo formado por um elemento de fricção, com resistência ao deslizamento σ_y , e um amortecedor viscoso, com viscosidade η (Cristescu e Suliciu, 1982; Lubliner, 2008), como mostrado na Figura 2.1. As características E , σ_y e η geralmente são dependentes da temperatura, no entanto, como a abordagem apresentada aqui é para problemas isotérmicos, essa dependência será desconsiderada.

Como principal diferença, comparado à plasticidade independente da taxa, o modelo de viscoplasticidade admite que a tensão assuma valores tais que $f(\boldsymbol{\sigma}) > 0^8$, para o caso unidimensional $|\sigma| > \sigma_y$. Se a tensão atuante no elemento de fricção, na ocorrência de deformações viscoplásticas, for σ_y , então a tensão no amortecedor, chamada de *sobre tensão* (*over stress*), fica dada por (Simo e Hughes, 1998)

$$\sigma_{st} \equiv \langle |\sigma| - \sigma_y \rangle \text{sign}(\sigma) \quad (2.29)$$

$$\sigma_{st} = \langle f(\sigma) \rangle \text{sign}(\sigma), \quad (2.30)$$

onde $\text{sign}(\sigma)$ é o sinal de σ e $\langle \cdot \rangle$ denota o *operador de Macauley*, definido de forma geral como

$$\langle x \rangle \equiv \frac{1}{2} (|x| + x). \quad (2.31)$$

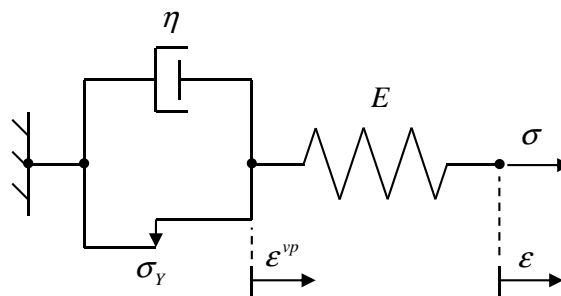


Figura 2.1: Modelo reológico de *Bingham*.

Para este modelo é utilizada a decomposição aditiva da deformação total, Eq.(2.3),

⁸Foi omitida a força termodinâmica \mathbf{A} na função de escoamento f , pois o modelo de *Bingham* apresentado refere-se a materiais sem endurecimento.

porém a deformação inelástica $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ é substituída pela deformação viscoplástica $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$, isto é

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}. \quad (2.32)$$

Considera-se que não há modificação das variáveis internas no domínio elástico, mas para estados de tensão fora deste domínio ocorre evolução destas.

A evolução de $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$, para o modelo unidimensional, pode ser relacionada à sobre tensão por meio do parâmetro de viscosidade η – [MPa \times s], de forma que (Simo e Hughes, 1998)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \sigma_{st} = \frac{\langle f(\sigma) \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma) \quad (2.33)$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\sigma) \rangle}{\eta} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad (2.34)$$

esta que é conhecida como *equação constitutiva viscoplástica de Perzyna* (Perzyna, 1963, 1966, 1971). Assumindo que $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y > 0$, produz

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{\eta} (|\sigma| - \sigma_y) \text{sign}(\sigma)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} [\sigma - \sigma_Y \text{sign}(\sigma)], \quad (2.35)$$

o que de forma geral pode ser reescrito como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{\eta} [\sigma - \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\sigma)], \quad (2.36)$$

onde $\mathbf{P}_{\mathbb{K}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ é um mapeamento definido por

$$\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\sigma) = \sigma_y \text{sign}(\sigma). \quad (2.37)$$

Em que $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}$ é um operador de projeção que mapeia um ponto de tensão σ no ponto mais próximo pertencente a \mathbb{K}^9 . O termo $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\sigma)$ é a projeção ortogonal de σ em \mathbb{K}^{10} . A Eq.(2.36) é conhecida como *equação constitutiva viscoplástica de Duvaut-Lions* (Duvaut e Lions, 1976), que particularmente é útil num contexto de análise numérica, ver Simo e Hughes (1998, p.59).

⁹Aqui \mathbb{K} é unidimensional.

¹⁰A definição de projeção ortogonal é colocada na Eq.(2.40).

2.5 Equações de Evolução

A formulação das equações de evolução para as variáveis inelásticas $\dot{\epsilon}^{vp}$ e α utiliza o chamado *princípio da máxima dissipação*, frequentemente creditado a von Mises (Hill, 1950). Este princípio desempenha um importante papel na formulação de modelos constitutivos (visco)plásticos. No entanto, este não é uma lei física, e sim um conveniente recurso matemático para satisfazer a inequação de dissipação (2.16) (Duvaut e Lions, 1976; Moreau, 1976; Halphen e Son Nguyen, 1975).

A aplicação do princípio da máxima dissipação na formulação do modelo constitutivo leva a equações de evolução associativas (condições de normalidade) e implica na convexidade do domínio elástico $\mathbb{K}(\mathbf{A})$, ver, por exemplo, Duvaut e Lions (1976), Halphen e Son Nguyen (1975), Moreau (1976), Ottosen e Ristinmaa (2005) e Simo e Hughes (1998).

Alguns autores utilizam o princípio da máxima dissipação, aplicado ao caso invíscido, combinado a uma regularização por penalidade para obter regras de evolução viscoplásticas, ver, por exemplo, Angelis (2000), Deseri e Mares (2000), Ibrahimbegović e Chorfi (2000), Perić (1993) e Simo et al. (1988). Este procedimento é fortemente relacionado à regularização de Yosida (Pazy, 1983, p.9). No entanto, como comentado em Simo e Honein (1990), técnicas de penalização são válidas somente quando a viscoplasticidade tende à plasticidade invíscida. Este fato incentiva trabalhos como o de Ristinmaa e Ottosen (2000) e Lin e Brocks (2004) que utilizam o conceito de superfície de escoamento dinâmica. Aqui, utiliza-se uma separação da tensão total σ , ver Figura 2.2(a). A partir desta é obtida uma restrição ao campo de tensões, utilizando a chamada *função distância*. Isto permite empregar, de forma direta, o princípio da máxima dissipação à formulação do modelo constitutivo viscoplástico, sem postular a existência de uma superfície de escoamento dinâmica.

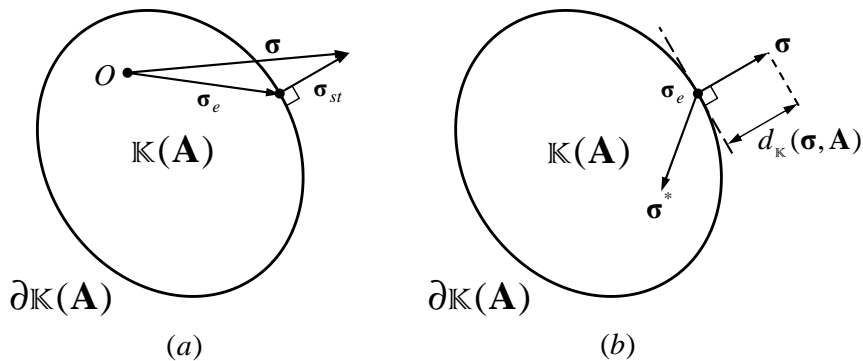


Figura 2.2: (a) Decomposição da tensão total; (c) Esquemática da função distância.

Sabe-se que em viscoplasticidade é possível que seja alcançado um estado de tensão fora do domínio elástico (estático), isto é,

$$\sigma \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}). \quad (2.38)$$

Assim, é conveniente separar a tensão total $\boldsymbol{\sigma}$, tal que,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_{st}, \quad (2.39)$$

onde, $\boldsymbol{\sigma}_e$ é a chamada *tensão de equilíbrio* (*equilibrium stress*) e $\boldsymbol{\sigma}_{st}$ é a generalização da *sobre tensão* σ_{st} da Eq.(2.29)¹¹. O termo $\boldsymbol{\sigma}_e$ é definido como¹²

$$\boldsymbol{\sigma}_e \equiv \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \mid \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\| \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|, \quad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A})\}, \quad (2.40)$$

onde, $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{K}$ expressa a projeção ortogonal de $\boldsymbol{\sigma}$ em $\mathbb{K}(\mathbf{A})$, ver Figura 2.2(a). A projeção $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ será única se e somente se $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ for um conjunto convexo (Niculescu e Persson, 2005, p.106-teorema 3.2.1). O que vale também à distância $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada pela norma

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_e\|, \quad (2.41)$$

que, como mostrado na Figura 2.2(b), é a menor distância entre $\boldsymbol{\sigma}$ e o conjunto convexo $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ (Niculescu e Persson, 2005; Lucchetti, 2006), e deve satisfazer a propriedade

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \iff \boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma} \iff d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0. \quad (2.42)$$

E também será uma função convexa se e somente se $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ for um conjunto convexo (Rockafellar, 1997). A sobre tensão $\boldsymbol{\sigma}_{st}$ pode ser expressa como¹³

$$\boldsymbol{\sigma}_{st} = d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \frac{\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A})}{\|\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A})\|} \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{st} = d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A}), \quad (2.44)$$

onde, $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A})$ é o cone normal¹⁴ a $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ em $\boldsymbol{\sigma}_e$, e $\mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A})$ é o cone “unitário” neste mesmo ponto. Vale lembrar que quando

$$\boldsymbol{\sigma}_e \in \text{int}[\mathbb{K}(\mathbf{A})] \implies \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}. \quad (2.45)$$

¹¹Os termos *tensão de equilíbrio* (*equilibrium stress*) e *sobre tensão* (*over stress*) são utilizados em trabalhos como Deseri e Mares (2000), Gurtin et al. (1980), Krempl e Gleason (1996) e Krempl (1996).

¹² $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$.

¹³Considerando uma superfície de escoamento suave.

¹⁴Seja \mathbb{X} um espaço vetorial normado, com dual topológico \mathbb{X}' , o espaço dos funcionais lineares contínuos em \mathbb{X} . O *cone normal* ao conjunto convexo $\mathbb{K} \subset \mathbb{X}$ em x , denotado por $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x)$, é o conjunto em \mathbb{X}' definido por $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x) = \{x^* \in \mathbb{X}' : \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{K}\}$, de modo que quando $x \in \text{int}(\mathbb{K})$ se tem $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x) = \{0\}$, $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x) = \{\emptyset\}$ se $x \notin \mathbb{K}$. Para $x^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x)$ e algum $\theta > 0$ se tem que $\theta x^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x)$, ver Lucchetti (2006), Niculescu e Persson (2005) e Rockafellar (1997).

As Eqs.(2.42) e (2.45) trazem as informações necessárias para concluir que

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \iff \boldsymbol{\sigma}_{st} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.46)$$

isto é, se o estado de tensão for puramente elástico, então não há sobre tensão $\boldsymbol{\sigma}_{st}$ e a tensão de equilíbrio é a própria tensão total $\boldsymbol{\sigma}$.

Neste contexto, o princípio da máxima dissipação em sua forma local postula que: *Para variáveis inelásticas $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}$ e $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ fixas, as respectivas forças termodinâmicas $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{A} devem ser tais que maximizem o potencial (2.16), isto é,*¹⁵

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \max_{(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{A}^*) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}}} \{ \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} - A_k^* * \dot{\alpha}_k \}, \quad (2.47)$$

dentre todas as forças termodinâmicas $\boldsymbol{\sigma}^*$ e \mathbf{A}^* que satisfaçam

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{A}^*) - g(\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\|) \leq 0. \quad (2.48)$$

No potencial $\bar{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ os termos $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}$ e $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ são dados apenas como parâmetros. Já, a função g , na restrição (2.48), determina o máximo valor que a distância $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{A}^*)$ pode alcançar, em função da norma $\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\|$. Assim, utiliza-se a função distância $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ para obter as equações de evolução, semelhantemente a Perić (1993), não havendo a necessidade de postular a existência de uma função de escoamento dinâmica, como feito em Ristinmaa e Ottosen (2000) e Lin e Brocks (2004), apenas a tradicional superfície de escoamento estática $\partial\mathbb{K}(\mathbf{A})$ definida por $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$. Introduzindo o funcional de *Lagrange* associado ao problema de máximo restrito, o sistema de equações (2.47)-(2.48) pode ser transformado no seguinte problema sem restrições

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \max_{(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{A}^*) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}}} \{ \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} - A_k^* * \dot{\alpha}_k - \dot{\gamma} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{A}^*) - g(\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\|)] \}, \quad (2.49)$$

onde $\dot{\gamma}$ é o multiplicador de Lagrange. Explorando os resultados de análise convexa, ver Luenberger e Ye (2008), são obtidas as seguintes regras de evolução

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \quad (2.50)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})], \quad (2.51)$$

e as condições de Karush-Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) - g(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\gamma} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) - g(\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\|)] = 0, \quad (2.52)$$

¹⁵Considera-se que a função a ser extremizada seja diferenciável.

as quais são condições necessárias para a existência de um ponto de máximo em (2.49).

Lembrando que quando $\boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A})$, se tem $\dot{\gamma} > 0$, a partir da condição (2.52)₃ se tem $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = g(\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\|)$. Então, assumindo que a g seja uma função bijetora, reescreve-se

$$\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\| = g^{-1}(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})), \quad (2.53)$$

ou

$$\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\| = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})), \quad (2.54)$$

onde, $\eta \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ é um parâmetro de viscosidade e $\Theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função convexa que satisfaz a propriedade

$$\Theta(0) = 0. \quad (2.55)$$

Agora, sabendo que a derivada $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})]$ é “unitária”¹⁶, tomando a norma da Eq.(2.50), conclui-se que $\dot{\gamma} = \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}\|$, ou ainda que

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})), \quad (2.56)$$

ou seja, é possível escrever o multiplicador viscoplástico em função da distância $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$.

A equação constitutiva viscoplástica (2.56) substitui as condições de Karush-Kuhn-Tucker (2.52) e de consistência, tradicionalmente empregadas na formulação de modelos independentes da taxa de deformação, ver, por exemplo, Simo e Hughes (1998, p.63).

Esta abordagem, como mencionado em Lin e Brocks (2004), é semelhante àquela utilizada em teorias de plasticidade independente da taxa de deformação, onde explorando a convexidade de $\mathbb{K}(\mathbf{A})$, oriunda ao princípio da máxima dissipação, são obtidas as leis de evolução para as variáveis internas, ver, por exemplo, Simo e Hughes (1998, p.98-103). Modelos plásticos independentes da taxa de deformação podem ser obtidos como casos particulares da formulação aqui descrita substituindo a restrição (2.48) por

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{A}^*) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}), \quad (2.57)$$

e calculando o multiplicador plástico $\dot{\gamma}$ pela condição de consistência: $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$ com $\dot{\gamma} > 0$ (Chen e Han, 1988; Lubliner, 2008; Maugin, 1992).

O resumo do modelo constitutivo viscoplástico para pequenas deformações é mostrado na Tabela 2.1.

¹⁶Seja \mathbb{X} um espaço vetorial normado, o conjunto convexo não vazio $\mathbb{K} \subset \mathbb{X}$, e $x \in \mathbb{X}$, então

$$\frac{\partial}{\partial x} d_{\mathbb{K}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \text{int}(\mathbb{K}), \\ \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x) \cap \mathbf{B} & \text{se } x \in \partial\mathbb{K}, \\ \frac{x - \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(x)}{\|x - \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(x)\|} & \text{se } x \notin \mathbb{K}, \end{cases}$$

onde, $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(x)$ é o cone normal a \mathbb{K} em x , \mathbf{B} é a bola unitária em x e $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(x)$ é a projeção ortogonal de x em \mathbb{K} . Para prova, ver, por exemplo, Lucchetti (2006, p.58).

- Decomposição da deformação total:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(\boldsymbol{\alpha}); \quad (2.58)$$

- Decomposição do potencial de energia livre de *Helmholtz*:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(\boldsymbol{\alpha})) + \psi^{vp}(\boldsymbol{\alpha}); \quad (2.59)$$

- Relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}} \quad \text{e} \quad A_k = \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k}; \quad (2.60)$$

- Domínio elástico:

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0\}; \quad (2.61)$$

- Decomposição da tensão total:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_{st}, \quad (2.62)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_{st} = d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_e, \mathbf{A});$$

- Lei de evolução para as variáveis internas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \quad (2.63)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \quad (2.64)$$

com

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})). \quad (2.65)$$

Tabela 2.1: Resumo do modelo viscoplástico em pequenas deformações.

2.6 Problema Constitutivo Viscoplástico de Valor Inicial

Com base na formulação apresentada na Seção 2.5, é possível definir o problema constitutivo viscoplástico de valor inicial para deformações infinitesimais. Para tanto, considere-se um corpo \mathcal{B} cujo comportamento constitutivo seja descrito pelo modelo viscoplástico da Tabela 2.1 e que, em um determinado instante t_0 , sejam conhecidos o tensor de deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_0)$, o tensor de deformação viscoplástica $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t_0)$ e o conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$. Considere ainda que o movimento de \mathcal{B} do instante t_0 a um instante T seja prescrito, sendo definida a história do tensor de deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ no ponto para o intervalo $(t_0, T] \in \mathbb{R}^+$. Assim, o problema constitutivo viscoplástico de valor inicial para o ponto \mathbf{x} é descrito a seguir.

Problema 2.1. *Dados os valores iniciais $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t_0)$ e $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ e a história do tensor de de-*

formação total $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, para $t \in (t_0, T]$ e conhecendo a função $\Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$, encontre as funções $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ e $\dot{\gamma}(t)$ que satisfaçam o seguinte sistema reduzido de equações não lineares (Alfano et al., 2001; de Souza Neto et al., 2008)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(t) = \dot{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t))] \quad (2.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = -\dot{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t))] \quad (2.67)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t))), \quad (2.68)$$

para cada instante $t \in (t_0, T]$, com

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -\rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}} \Big|_t \quad \text{e} \quad A_k(t) = \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \Big|_t. \quad (2.69)$$

Repare que por construção o multiplicador $\dot{\gamma}$ é uma função não negativa, isto é, $\dot{\gamma} \geq 0$.

O tensor de deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t)$ não aparece no sistema de equações anterior, mas conhecendo a história da deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, as deformações elásticas podem ser calculadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t), \quad (2.70)$$

assim que o sistema (2.66)-(2.68) for resolvido.

Soluções analíticas para o sistema de equações não lineares (2.66)-(2.68) são possíveis apenas para histórias de deformação muito simples. No entanto, para casos de funções $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ não tão simples, o que normalmente ocorre em situações práticas, é preciso recorrer a métodos numéricos para a solução do problema de valor inicial (2.66)-(2.68).

2.7 Discretização Temporal das Equações de Evolução

A solução do problema constitutivo viscoplástico de valor inicial (2.66)-(2.68), para situações complexas, pode ser obtida por meio da discretização do intervalo $(t_0, T] \in \mathbb{R}^+$ em N subintervalos $(t_n, t_{n+1}]$, tal que

$$(t_0, T] = \bigcup_{n=1}^N (t_n, t_{n+1}]. \quad (2.71)$$

Assim, nas Eqs. (2.66)-(2.68) as taxas das quantidades são substituídas por seus respectivos valores incrementais no subintervalo considerado e a função $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t))$ e suas derivadas por seus valores ao final do incremento de tempo, isto é, em t_{n+1} (de Souza Neto et al., 2008; Simo e Hughes, 1998).

Os valores da quantidade (\cdot) dentro intervalo de tempo discreto $(t_n, t_{n+1}]$ são calculados

por (Benallal, 1987; Ortiz e Popov, 1985)

$$(\cdot)_{n+\theta} = (\cdot)_n + \theta [(\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n], \quad \theta \in [0, 1]. \quad (2.72)$$

Em particular, para $\theta = 0$, se tem um esquema de integração explícito (*forward Euler integration scheme*). Para $\theta = \frac{1}{2}$ obtém-se um esquema de integração de ponto central (*mid point integration scheme*). Para $\theta = 1$, um esquema de integração totalmente implícito (*backward Euler integration scheme*) é obtido. O método de ponto central ($\theta = \frac{1}{2}$) fornece precisões de segunda ordem nos resultados da integração, entretanto, apresenta estabilidade somente para pequenos incrementos de deformação (Benallal, 1987; Ortiz e Popov, 1985). Em contrapartida, o método totalmente implícito fornece precisão de primeira ordem, mas com estabilidade também para grandes incrementos de deformação, ver Benallal (1987), Hughes e Taylor (1978), Ortiz e Popov (1985) e Simo (1991). Então, adota-se o método totalmente implícito para a integração das Eqs.(2.66)-(2.68) do modelo constitutivo, de modo que os incrementos de (\cdot) ficam definidos como

$$\Delta(\cdot) \equiv (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n, \quad (2.73)$$

sendo $(\cdot)_{n+1}$ o valor calculado na integração, em t_{n+1} , e $(\cdot)_n$ o valor inicial conhecido (ou convergido do passo de tempo anterior), em t_n . Então, com o método de integração adotado, é definida a versão discreta no tempo do problema (2.66)-(2.68).

Problema 2.2. *Dados os valores (convergidos do passo de tempo anterior) $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}$ e $\boldsymbol{\alpha}_n$, do tensor de deformação viscoplástica e do conjunto de variáveis internas no início do intervalo atual $(t_n, t_{n+1}]$, conhecendo o incremento do tensor de deformação total $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ para esse intervalo e a forma explícita da função $\Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))_{n+1}$, resolver o seguinte sistema de equações algébricas*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n - \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \quad (2.75)$$

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \Big|_{n+1}, \quad (2.76)$$

para as variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ e $\Delta\gamma \geq 0$, com

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\rho \left. \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}} \right|_{n+1} \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1} = \rho \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \right|_{n+1}. \quad (2.77)$$

O termo $\Delta\gamma$ é chamado de *multiplicador viscoplástico incremental*. Nota-se que no momento em que a solução $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$ é obtida, a deformação elástica em t_{n+1} pode ser calculada

por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}, \quad (2.78)$$

de forma que todas as variáveis são conhecidas ao final do intervalo $(t_n, t_{n+1}]$, ver de Souza Neto et al. (2008, p.194).

Conhecendo a propriedade (2.55) de Θ e a relação (2.42), observa-se em (2.76) que quando $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}_{n+1})$ o multiplicador viscoplástico $\Delta\gamma$ é nulo, caso contrário $\Delta\gamma > 0$, isto é

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}_{n+1}) \iff \Delta\gamma = 0 \quad (2.79)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}_{n+1}) \iff \Delta\gamma > 0. \quad (2.80)$$

As condições (2.79)-(2.80) motivam o uso de um algoritmo de duas etapas para a solução das equações algébricas não lineares (2.74)-(2.76), conhecido como algoritmo de predição elástica/correção viscoplástica (Simo e Hughes, 1998; de Souza Neto et al., 2008).

Considerando o caso onde $\Delta\gamma > 0$ e que Θ seja uma função bijetora, é possível escrever a Eq.(2.76) em sua forma inversa, tal que a equação

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \Theta^{-1} \left(\frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma \right) = \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma). \quad (2.81)$$

possa ser utilizada, ao invés de (2.76), na solução do problema constitutivo viscoplástico (Alfano et al., 2001).

2.8 Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplástica

Como mencionado anteriormente, o algoritmo em questão consiste em duas etapas nas quais as duas situações possíveis do modelo adotado, (2.79)-(2.80), são tratadas sequencialmente, de forma que a solução final obtida para (2.74)-(2.76) é tida como a única válida. A estratégia do algoritmo consiste no seguinte:

(a) Etapa de tentativa elástica. Primeiramente assume-se que $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}_{n+1})$, isto é, que a evolução $t_n \rightarrow t_{n+1}$ seja elástica ($\Delta\gamma = 0$), sendo obtidas as seguintes *soluções tentativas elásticas*¹⁷

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} \iff (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.82)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t = \boldsymbol{\alpha}_n, \quad (2.83)$$

e as correspondentes tensões e forças termodinâmicas, chamadas de *tensão tentativa elástica* e *força termodinâmica tentativa elástica*, dadas respectivamente por

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t = -\rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}} \Big|_{n+1}^t \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1}^t = \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \Big|_{n+1}^t. \quad (2.84)$$

¹⁷O sobrescrito t em $(\cdot)^t$ denota o *estado de tentativa elástica*.

Agora, para que o *estado de tentativa elástica* seja a solução atual do problema deve satisfazer $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t \in \mathbb{K}(\mathbf{A}_{n+1}^t)$, o que é verificado por meio da *função de escoamento tentativa*

$$f_{n+1}^t \equiv f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t, \mathbf{A}_{n+1}^t) \leq 0, \quad (2.85)$$

isto é, se o estado de tentativa elástica estiver dentro do domínio elástico ou sobre a superfície de escoamento, este é aceito como solução do problema (2.74)-(2.76), e então atualiza-se

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^t \quad (2.86)$$

e o algoritmo é finalizado, passando para o próximo incremento de tempo. Caso contrário, a tentativa elástica não é solução do problema e o algoritmo passa para a etapa de correção viscoplástica, ou mapeamento de retorno, descrita a seguir.

(b) Etapa de correção viscoplástica. Esta etapa consiste em resolver o sistema de equações algébricas não lineares (2.74)-(2.76), o qual, usando o estado tentativa elástica e substituindo (2.76) por (2.81), se torna

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t + \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \quad (2.87)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t - \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \quad (2.88)$$

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma), \quad (2.89)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\rho \left. \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}} \right|_{n+1} \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1} = \rho \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \right|_{n+1}. \quad (2.90)$$

E assim, a etapa de correção viscoplástica consiste em encontrar a solução $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$ para (2.87)-(2.89) que satisfaça

$$\Delta\gamma > 0. \quad (2.91)$$

2.9 Solução das Equações de Correção Viscoplástica

Nota-se que o sistema algébrico (2.87)-(2.89), como já mencionado, é composto por equações não lineares e ainda está sujeito à restrição (2.91). Normalmente este sistema é resolvido sem considerar a restrição (2.91), por algum método iterativo, se a solução obtida satisfizer (2.91), esta é aceita como solução. Se não existir solução para a qual $\Delta\gamma$ seja estritamente positivo, o problema não possui solução, ver de Souza Neto et al. (2008, p.198).

Para a solução do sistema de equações não lineares (2.87)-(2.89) normalmente adota-se o *método de Newton-Raphson*, por apresentar resultados satisfatórios em problemas de mapeamento de retorno (de Souza Neto et al., 2008; Simo e Hughes, 1998) e também

pela taxa de convergência quadrática que o método fornece, para estimativas próximas à solução (Gilat e Subramaniam, 2008).

2.9.1 Método de *Newton-Raphson*

O método de *Newton-Raphson*, de forma geral, consiste no procedimento descrito a seguir.

Seja \mathbf{q} um vetor contendo n variáveis a serem encontradas de um problema não linear (ou linear)

$$\mathbf{q}^T = \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad , \dots, \quad \alpha_n \right]. \quad (2.92)$$

O método é iniciado atribuindo-se a \mathbf{q} , supondo uma iteração $k = 0$, uma estimativa \mathbf{q}^t , isto é,

$$\mathbf{q}^0 \leftarrow \mathbf{q}^t. \quad (2.93)$$

Então, para uma iteração k , pretende-se determinar $\Delta\mathbf{q}^k$, tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}^{k+1}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}^k + \Delta\mathbf{q}^k) = \mathbf{0}, \quad (2.94)$$

onde, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é um vetor contendo n equações não lineares a serem resolvidas para \mathbf{q} . A fim de determinar o incremento $\Delta\mathbf{q}^k$, é realizada uma expansão em série de *Taylor* em torno de \mathbf{q}^k , de forma que, truncando no termo de primeira ordem, obtém-se

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}^{k+1}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}^k + \Delta\mathbf{q}^k) \approx \mathbf{g}(\mathbf{q}^k) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_k \Delta\mathbf{q}^k = \mathbf{0}, \quad (2.95)$$

onde é definida a matriz tangente

$$\mathbf{M}^k \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_k \implies M_{ij}^k \equiv \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right|_k, \quad (2.96)$$

o que permite reescrever (2.95) como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{q}^k) + \mathbf{M}^k \Delta\mathbf{q}^k &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^k \Delta\mathbf{q}^k &= -\mathbf{g}(\mathbf{q}^k) \\ \Delta\mathbf{q}^k &= -(\mathbf{M}^k)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}^k). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Calculando $\Delta\mathbf{q}^k$, então se faz

$$\mathbf{q}^{k+1} \leftarrow \mathbf{q}^k + \Delta\mathbf{q}^k. \quad (2.98)$$

E assim, com os valores de \mathbf{q}^{k+1} calcula-se $\mathbf{g}(\mathbf{q}^{k+1})$. Então se o resíduo $\|\mathbf{g}(\mathbf{q}^{k+1})\|$ for

menor que a tolerância especificada e_{tol} , isto é, se

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q}^{k+1})\| < e_{tol}, \quad (2.99)$$

o algoritmo é finalizado e atualiza-se

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}^{k+1}. \quad (2.100)$$

Caso contrário se faz

$$\mathbf{q}^k \leftarrow \mathbf{q}^{k+1} \quad (2.101)$$

$$k \leftarrow k + 1, \quad (2.102)$$

e o algoritmo é reiniciado.

2.10 Módulo Tangente Consistente

Em materiais elásticos lineares¹⁸ a relação tensão-deformação é dada na seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2.103)$$

neste caso, nota-se que a energia livre de *Helmholtz* ψ é um potencial quadrático em $\boldsymbol{\varepsilon}$, onde \mathcal{C} é o chamado *tensor constitutivo elástico*. \mathcal{C} é um tensor de quarta ordem constante, simétrico e positivo-definido, dado por (Gurtin, 1981; Ogden, 1997)

$$\mathcal{C} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.104)$$

Este que representa a sensibilidade de $\boldsymbol{\sigma}$ com relação à deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, isto é,

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.105)$$

Para o caso citado, um material elástico linear, o tensor \mathcal{C} é conhecido *a priori* e independe da deformação (\mathcal{C} —constante). Entretanto, para materiais com comportamento não linear isso não ocorre, ou seja, a relação

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.106)$$

não é constante. No caso de *materiais dissipativos*, onde se inserem os elasto-(visco)plásticos, a relação (2.106) depende dos processos irreversíveis que ocorrem no material (Lubliner, 2008; Maugin, 1992, 1999). Para os materiais dissipativos em geral é conveniente definir (2.106) como

$$\mathcal{C}^d \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.107)$$

¹⁸Para materiais elásticos $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e$.

onde, \mathcal{C}^d é o chamado *módulo tangente*, que é a forma contínua da relação constitutiva tensão-deformação no estado atual do material. Normalmente, em materiais elastoplásticos, $\mathcal{C}^d \equiv \mathcal{C}^{ep}$ é obtido a partir da condição de consistência de *Prager*, onde (Alfano e Rosati, 1998; Peirce et al., 1984; Simo e Taylor, 1985)

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \text{ para } \dot{\gamma} > 0. \quad (2.108)$$

Para modelos elasto-viscoplásticos define-se $\mathcal{C}^d \equiv \mathcal{C}^{vp}$. Neste caso, tendo em vista a Eq.(2.56), reescreve-se a condição (2.108) como (Alfano et al., 2001)

$$\dot{d}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \dot{\Theta}^{-1}(\eta\dot{\gamma}). \quad (2.109)$$

Além da versão contínua, Eq.(2.107), há também a versão do algoritmo do módulo tangente, denominado *módulo tangente consistente* $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^d$, que é obtido a partir da linearização das equações de mapeamento de retorno (2.87)-(2.89) (Simo e Hughes, 1998). Esse módulo relaciona as tensões e deformações incrementais, e desempenha um papel importante na estratégia de solução de problemas de valor no contorno (Simo e Hughes, 1998, p.122), o que é mostrado no Capítulo 4.

Em um passo de tempo $(t_n, t_{n+1}]$, considerando que o problema de evolução seja governado pela deformação total (*strain driven problem*), o módulo tangente consistente viscoplástico é definido como (Alfano et al., 2001; de Souza Neto et al., 2008)

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}. \quad (2.110)$$

No entanto, é possível escrever $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ em termos da deformação elástica tentativa $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t$ e do conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}_n$ (de Souza Neto et al., 2008), de forma que

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t, \boldsymbol{\alpha}_n \right). \quad (2.111)$$

Então, aplicando a regra da cadeia a derivada (2.110) se torna

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t} \frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}. \quad (2.112)$$

Com base nas expressões (2.82), para $\boldsymbol{\alpha}_n$ – fixo em $(t_n, t_{n+1}]$, observa-se que

$$\frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{II}. \quad (2.113)$$

E conseqüentemente que

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t}. \quad (2.114)$$

A derivada em relação a $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t$ é útil para problemas de (visco)plasticidade em grandes deformações, com decomposição de deformação multiplicativa, uma vez que nessa abordagem não utiliza-se uma medida análoga a $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ na definição do modelo constitutivo, ver Capítulo 3 e de Souza Neto et al. (1996), Eterovic e Bathe (1990), Simo (1992) e Weber e Anand (1990), por exemplo.

Reescrevendo a Eq.(2.87) em termos de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, sabendo que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ e $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t$, se tem

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t - \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})] \right|_{n+1}. \quad (2.115)$$

O módulo tangente consistente $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp}$, Eq.(2.114), é obtido com a derivação das Eqs.(2.89) e (2.115) com relação a $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t$, o que fornece o seguinte sistema de equações

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + d(\Delta\gamma) \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t \quad (2.116)$$

$$\left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma} d(\Delta\gamma) = 0. \quad (2.117)$$

Da Eq.(2.117), obtém-se

$$d(\Delta\gamma) = \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \quad (2.118)$$

substituindo (2.118) em (2.116), chega-se a

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t,$$

sabendo que $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{G}) : \mathbf{K} = (\mathbf{G} : \mathbf{K}) \mathbf{A}$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \otimes \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \right) : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t, \quad (2.119)$$

conhecendo a relação elástica

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathcal{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1},$$

e rearranjando os termos reescreve-se a expressão (2.119) como

$$\left(\mathcal{C}^{-1} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \right) : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \otimes \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \right) : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^t, \quad (2.120)$$

então, tendo em vista a Eq.(2.114), e definindo

$$\hat{\mathcal{C}}^{-1} \equiv \left(\mathcal{C}^{-1} + \Delta\gamma \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \right), \quad (2.121)$$

e

$$\bar{\mathcal{C}}^{-1} \equiv \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \otimes \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \right), \quad (2.122)$$

conclui-se que

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp} = \left(\bar{\mathcal{C}}^{-1} + \hat{\mathcal{C}}^{-1} \right)^{-1}. \quad (2.123)$$

Nota-se que a influência das propriedades elásticas do material sobre o módulo tangente consistente é dada somente em $\hat{\mathcal{C}}^{-1}$, onde o termo $\Delta\gamma \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}$ desempenha um papel de correção sobre o tensor constitutivo elástico \mathcal{C} . Além disso, $\hat{\mathcal{C}}^{-1}$ é simétrico e positivo-definido visto que é a soma da compliância elástica \mathcal{C}^{-1} e do termo $\Delta\gamma \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}$, que é simétrico e positivo-definido, pois $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ é uma função convexa, para $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ convexo, e $\Delta\gamma$ é não negativo.

O fato de $\boldsymbol{\sigma}$ ser um tensor simétrico, implica na simetria de $\frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}$ e $\frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \otimes \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}$, sabendo que o termo $\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}$ é positivo para $\Delta\gamma > 0$ conclui-se que $\bar{\mathcal{C}}^{-1}$ é simétrico e positivo-definido.

Por consequência das propriedades de $\bar{\mathcal{C}}^{-1}$ e $\hat{\mathcal{C}}^{-1}$ o módulo tangente consistente $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp}$ para o modelo elasto-viscoplástico em deformações infinitesimais também é simétrico e positivo-definido. Estas propriedades surgem a partir da convexidade do conjunto $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ e da função Θ , combinada ao uso de um modelo viscoplástico totalmente associativo, ver também as discussões em de Souza Neto et al. (2008) e Simo e Hughes (1998).

2.11 Aplicação ao Modelo J_2

O modelo de plasticidade J_2 baseia-se no *princípio da máxima energia de distorção* (*critério de von Mises-Huber-Hencky*), que tem como hipótese essencial que o fluxo plástico não é sensível a mudanças de volume, mas sim a mudanças de forma sofridas pelo corpo. Por isso, no modelo de plasticidade J_2 apenas a parte desviadora do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é considerada, sendo construída uma função do escoamento do tipo (considerando apenas endurecimento isotópico)

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{S}\| - a[\sigma_y + A(\alpha)] \leq 0. \quad (2.124)$$

Para o modelo com endurecimento isotrópico se tem

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha\} \quad (2.125)$$

$$\mathbf{A} = \{A\}. \quad (2.126)$$

Em (2.124), \mathbf{S} é a parte desviadora de $\boldsymbol{\sigma}$, dada por

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad (2.127)$$

σ_y é a tensão de escoamento inicial, $A(\alpha)$ é o endurecimento isotrópico, em tensão, dado como função da variável interna associada α , a é um fator de escala sobre a tensão de escoamento atual $[\sigma_y + A(\alpha)]$, o qual depende do tipo de ensaio utilizado para determinar o limite elástico, e o símbolo $\|\cdot\|$ denota a norma *Euclidiana* de (\cdot) , que para o caso de um tensor de segunda ordem, como \mathbf{S} , é expressa como

$$\|\mathbf{S}\| \equiv \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S}^2)} = \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}. \quad (2.128)$$

Como mencionado acima, o valor da constante a depende do ensaio mecânico utilizado para determinar o limite elástico do material. Supondo que este seja determinado a partir de um ensaio uniaxial de tração, de acordo com o critério de *von Mises-Huber-Hencky*, o escoamento ocorrerá quando a energia de distorção equivalente ao estado de tensão

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_y + A(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

for alcançada. Então, para este caso, a tensão desviadora \mathbf{S} se torna

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} [\sigma_y + A(\alpha)] & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} [\sigma_y + A(\alpha)] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} [\sigma_y + A(\alpha)] \end{bmatrix}, \quad (2.130)$$

e a norma $\|\mathbf{S}\|$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}\| &= \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] \\ \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.131)$$

que é a própria função de escoamento, tal que $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$, caracterizando o início do fluxo plástico segundo o critério adotado. Onde verifica-se que

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.132)$$

Substituindo este na função $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$, obtém-se

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] \leq 0, \quad (2.133)$$

a qual define o modelo de plasticidade comumente utilizado J_2 , ver de Souza Neto et al. (2008, p.163) e Simo e Hughes (1998, p.89).

2.11.1 Relações Constitutivas e Potencial de Energia Livre

Na seção anterior foi comentado que será considerado um material com endurecimento isotrópico, com o termo em tensão denotado por $A \in \mathbb{R}$, assim, a tensão generalizada passa a ser o conjunto $(\boldsymbol{\sigma}, A) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$. Como visto anteriormente, o *endurecimento em tensão* A é uma função de $\alpha \in \mathbb{R}$ que é a *deformação viscoplástica acumulada*, sendo assim o dual de $(\boldsymbol{\sigma}, A)$ é a deformação viscoplástica generalizada $(\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}, -\alpha) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Aqui será considerado um material cujo comportamento elástico seja linear, de forma que a relação constitutiva (2.11) se torne

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.134)$$

com

$$\mathcal{C} = \rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}. \quad (2.135)$$

Para um material isotrópico o tensor constitutivo \mathcal{C} se torna

$$\mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{II}, \quad (2.136)$$

onde, $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ é o tensor identidade de segunda ordem, $\mathbf{II} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ é o tensor identidade de quarta ordem simétrico, λ e μ são as constantes de Lamé, ver Ogden (1997) e Spencer (2004).

Para a força termodinâmica $A(\alpha)$, será utilizada a relação não linear proposta por Simo e Armero (1992), de forma que (2.13) fica sendo

$$A = \rho \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha} = (\sigma_\infty - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta \alpha)] + H \alpha, \quad (2.137)$$

onde, σ_∞ , σ_y , δ e H são parâmetros materiais.

Então, considerando as relações constitutivas (2.134) e (2.137), o potencial de energia livre de *Helmholtz* se torna

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + (\sigma_\infty - \sigma_y) \left[\alpha + \frac{1}{\delta} \exp(-\delta \alpha) \right] + \frac{1}{2} H \alpha^2. \quad (2.138)$$

2.11.2 Determinação da Função Distância

Com a definição da função de escoamento para o modelo J_2 , Eq.(2.133), e sabendo que o domínio elástico $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ pode ser definido por (2.23), é possível determinar a distância entre um estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e conjunto convexo $\mathbb{K}(\mathbf{A})$. A expressão geral para $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$

é¹⁹

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \min_{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A})} \|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|.$$

Supondo que $\boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \implies d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) > 0$, se tem

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \min_{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \partial\mathbb{K}(\mathbf{A})} \|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|, \quad (2.139)$$

isto é, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ deve satisfazer

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{A}) = \|\hat{\mathbf{S}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] = 0. \quad (2.140)$$

Mostra-se a partir do problema de minimização (2.139)-(2.140), que os tensores \mathbf{S} e \mathbf{S}_e são “colineares”, tal que

$$\frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} = \frac{\mathbf{S}_e}{\|\mathbf{S}_e\|}, \quad (2.141)$$

e conseqüentemente que a função distância $d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ para o modelo J_2 corresponde à parte não nula da função de escoamento (2.133), isto é,

$$d_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \langle f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \rangle \geq 0. \quad (2.142)$$

Dessa forma, a sobre tensão $\boldsymbol{\sigma}_{st}$, Eq.(2.44), se torna

$$\boldsymbol{\sigma}_{st} = \langle f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \rangle \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}. \quad (2.143)$$

Nota-se que a sobre tensão $\boldsymbol{\sigma}_{st}$ possui apenas a parte desviadora, o que é coerente ao modelo J_2 . Já a projeção de $\boldsymbol{\sigma}$ em $\mathbb{K}(\mathbf{A})$, denotada por $\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$, conforme Eq.(2.40), é reescrita como

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \left[1 - \frac{\langle f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \rangle}{\|\mathbf{S}\|} \right] \mathbf{S} + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}. \quad (2.144)$$

Supondo que $\boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A})$, equação anterior se torna

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{\sigma_y + A(\alpha)}{\|\mathbf{S}\|} \right] \mathbf{S} + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}. \quad (2.145)$$

Sabendo que $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_e)$, reescreve-se

$$\mathbf{S}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{\sigma_y + A(\alpha)}{\|\mathbf{S}\|} \right] \mathbf{S}, \quad (2.146)$$

¹⁹Tendo em vista a Eq.(2.41) e sabendo que $\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_e\| = \min_{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A})} \|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|$.

- Decomposição da deformação total:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}; \quad (2.147)$$

- Potencial de energia livre de *Helmholtz*:

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + (\sigma_\infty - \sigma_y) \left[\alpha + \frac{1}{\delta} \exp(-\delta\alpha) \right] + \frac{1}{2} H \alpha^2; \quad (2.148)$$

- Relações constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{II}, \quad (2.149)$$

e

$$A(\alpha) = (\sigma_\infty - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta\alpha)] + H\alpha; \quad (2.150)$$

- Domínio elástico:

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S} | f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0 \}, \quad (2.151)$$

com

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] \leq 0; \quad (2.152)$$

- Decomposição da tensão total:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_{st}, \quad (2.153)$$

com

$$\mathbf{S}_e = \begin{cases} \mathbf{S} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \frac{\mathbf{S}}{g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases} \quad (2.154)$$

$$\mathbf{S}_{st} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \left[1 - \frac{1}{g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})} \right] \mathbf{S} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases}; \quad (2.155)$$

- Lei de evolução para as variáveis internas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}, \quad (2.156)$$

com

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \rangle. \quad (2.157)$$

Tabela 2.2: Resumo do modelo viscoplástico em pequenas deformações para o critério J_2 .

o termo

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}\|}{\sigma_y + A(\alpha)}$$

é a *função de Minkowski*²⁰ $g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$, função de escoamento canônica. Assim, chega-se às

²⁰Seja \mathbb{X} um espaço vetorial normado. A função de *Minkowski* $g_{\mathbb{K}} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, também chamada de

seguintes expressões para \mathbf{S}_e

$$\mathbf{S}_e = \begin{cases} \mathbf{S} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \frac{\mathbf{S}}{g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases}. \quad (2.158)$$

E para $\boldsymbol{\sigma}_{st} = \mathbf{S}_{st}$

$$\mathbf{S}_{st} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \left[1 - \frac{1}{g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}\right] \mathbf{S} & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases}. \quad (2.159)$$

2.11.3 Equações de Evolução

De acordo com as Eqs.(2.56), (2.133) e (2.142) as leis de evolução (2.50) e (2.51) são particularizadas ao modelo J_2 , respectivamente, como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}, \quad (2.160)$$

e

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}, \quad (2.161)$$

com

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \rangle. \quad (2.162)$$

O resumo do modelo viscoplástico para o critério J_2 é mostrado na Tabela 2.2.

2.11.4 Problema Constitutivo Viscoplástico

Com a determinação das equações de evolução para o modelo de plasticidade J_2 , Eqs.(2.160)-(2.162), e também tendo definido o potencial de energia livre ψ em (2.138), problema de valor inicial para o critério de escoamento J_2 , com base na Seção 2.6, é dado segundo o Problema 2.3 (para um ponto material $\mathbf{x} \in \Omega$ de \mathcal{B} e um intervalo $(t_0, T] \in \mathbb{R}^+$).

Problema 2.3. *Dados os valores iniciais $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t_0)$ e $\alpha(t_0)$ e a história do tensor de deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, para $t \in (t_0, T]$ e conhecendo a função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$, encontre as funções $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t)$, $\alpha(t)$ e $\dot{\gamma}(t) \geq 0$ que satisfaçam o seguinte sistema reduzido de equações não lineares (Alfano et al., 2001; de Souza Neto et al., 2008)*

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(t) = \dot{\gamma}(t) \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (2.163)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}(t) \quad (2.164)$$

função gauge de um conjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{X}$, contendo a origem, é definida como $g_{\mathbb{K}}(x) = \inf \{\mu \geq 0 : x \in \mu\mathbb{K}\}$. Nota-se que quando $x \in \text{int}(\mathbb{K}) \iff g_{\mathbb{K}}(x) < 1$, $x \in \partial\mathbb{K} \iff g_{\mathbb{K}}(x) = 1$ e quando $x \notin \mathbb{K} \iff g_{\mathbb{K}}(x) > 1$. A função gauge $g_{\mathbb{K}}(x)$ é positivamente homogênea de ordem um, tal que $g_{\mathbb{K}}(\theta x) = \theta g_{\mathbb{K}}(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$, com $\theta > 0$ (Lucchetti, 2006; Niculescu e Persson, 2005; Rockafellar, 1997).

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t))) \rangle, \quad (2.165)$$

para cada instante $t \in (t_0, T]$, com

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{C} : [\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t)] \quad \text{e} \quad A(t) = (\sigma_\infty - \sigma_y) \{1 - \exp[-\delta\alpha(t)]\} + H\alpha(t). \quad (2.166)$$

O tensor de deformação elástica é calculado após a solução do problema por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}(t). \quad (2.167)$$

2.11.5 Discretização Temporal das Equações de Evolução

Utilizando a metodologia descrita na Seção 2.7, integração totalmente implícita, para a solução do sistema de equações não lineares (2.163)-(2.165), obtém-se a seguinte versão discreta no tempo para o problema de valor inicial do modelo J_2 .

Problema 2.4. *Dados os valores (convergidos do passo de tempo anterior) $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}$ e α_n , do tensor de deformação viscoplástica e da deformação viscoplástica acumulada no início do intervalo atual $(t_n, t_{n+1}]$, conhecendo o incremento do tensor de deformação total $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ para esse intervalo e a forma explícita da função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))_{n+1}$, resolver o seguinte sistema de equações algébricas*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta\gamma \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \quad (2.168)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \quad (2.169)$$

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\eta} \langle \Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \rangle \Big|_{n+1}, \quad (2.170)$$

para as variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$, α_{n+1} e $\Delta\gamma \geq 0$, com

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathcal{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) \quad \text{e} \quad A_{n+1} = (\sigma_\infty - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta\alpha_{n+1})] + H\alpha_{n+1}. \quad (2.171)$$

Com $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ sendo pós calculado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}. \quad (2.172)$$

2.11.6 Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplástica

Nesta seção, com base no que foi descrito na Seção 2.8, particulariza-se o algoritmo de predição elástica/correção viscoplástica para o modelo J_2 .

(a) Etapa de predição elástica. Dado o incremento de deformação

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (2.173)$$

correspondente a um intervalo discreto $(t_n, t_{n+1}]$, e dadas as variáveis (convergidas do passo anterior) $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp}$ e α_n em t_n , a deformação viscoplástica tentativa e a deformação viscoplástica acumulada tentativa são dadas, respectivamente, por

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} \quad (2.174)$$

$$\alpha_{n+1}^t = \alpha_n, \quad (2.175)$$

e a partir destas são calculadas as tensões e o endurecimento isotrópico (força termodinâmica) do estado de tentativa elástica, como

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t = \mathcal{C} : [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t] \quad \text{e} \quad A_{n+1}^t = (\sigma_\infty - \sigma_y) \{1 - \exp[-\delta\alpha_{n+1}^t]\} + H\alpha_{n+1}^t. \quad (2.176)$$

Agora, verifica-se se o *estado de tentativa elástica* pertence ou não ao regime elástico definido pela função de escoamento tentativa $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t, \mathbf{A}_{n+1}^t)$. Assim, se $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t \in \mathbb{K}(\mathbf{A}_{n+1}^t)$, isto é, se

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t, \mathbf{A}_{n+1}^t) = \|\mathbf{S}_{n+1}^t\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A_{n+1}^t] \leq 0, \quad (2.177)$$

considera-se que o processo em $(t_n, t_{n+1}]$ seja puramente elástico e o estado de tentativa elástica é solução do problema. Assim, são atualizadas as variáveis

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t \quad (2.178)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^t \quad (2.179)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t \quad (2.180)$$

$$A_{n+1} = A_{n+1}^t, \quad (2.181)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}. \quad (2.182)$$

O algoritmo é finalizado, passando para o próximo incremento de tempo. Caso contrário, o processo no intervalo $(t_n, t_{n+1}]$ apresenta um fluxo viscoplástico, assim, necessitando da etapa de correção viscoplástica descrita a seguir.

(b) Etapa de correção viscoplástica. O procedimento de mapeamento de retorno geral para integração totalmente implícita, consiste em resolver o sistema de equações algébricas (2.87)-(2.89), sujeitas a (2.91), as quais, para o critério de escoamento J_2 e para ψ dado por (2.138), são particularizadas como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t + \Delta\gamma \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \quad (2.183)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \quad (2.184)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \|\mathbf{S}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + A_{n+1}) = \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma), \quad (2.185)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathcal{C} : [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}] \quad \text{e} \quad A_{n+1} = (\sigma_\infty - \sigma_y) \{1 - \exp[-\delta\alpha_{n+1}]\} + H\alpha_{n+1}, \quad (2.186)$$

a serem resolvidas para $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$, α_{n+1} e $\Delta\gamma$, de modo a satisfazer

$$\Delta\gamma > 0. \quad (2.187)$$

Após a solução atualiza-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}. \quad (2.188)$$

Correção Viscoplastica Baseada em uma Única Equação

O modelo de plasticidade J_2 é um caso especial no qual é possível reduzir o sistema de equações algébricas não lineares da etapa de mapeamento de retorno, Eqs.(2.183)-(2.185), a uma única equação (de Souza Neto et al., 2008; Simo e Hughes, 1998).

Lembrando que a tensão $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser decomposta em suas partes desviadora e hidrostática (volumétrica),

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} - p\mathbf{I}, \quad (2.189)$$

com

$$\mathbf{S} = 2G(\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp}) \quad (2.190)$$

$$p\mathbf{I} = -3\kappa(\boldsymbol{\varepsilon}_v - \boldsymbol{\varepsilon}_v^{vp}), \quad (2.191)$$

onde, G é o módulo de cisalhamento, κ é o módulo volumétrico (*bulk modulus*), os quais podem ser escritos em função das constantes de Lamé μ e λ da Eq.(2.136), respectivamente, como (Lai et al., 1996, p.230)

$$G = \mu \quad (2.192)$$

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (2.193)$$

Os subscritos d e v representam as partes desviadora e volumétrica da deformação, por exemplo,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}, \quad (2.194)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_v. \quad (2.195)$$

Então, conhecendo-se as relações (2.190) e (2.195), separa-se a Eq.(2.183) em suas partes desviadora e volumétrica, tal que

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_v^{vp})_{n+1} + (\boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp})_{n+1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_v^{vp})_{n+1}^t + (\boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp})_{n+1}^t + \Delta\gamma \frac{2G [(\boldsymbol{\varepsilon}_d)_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp})_{n+1}]}{\|2G [(\boldsymbol{\varepsilon}_d)_{n+1} - (\boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp})_{n+1}]\|}, \quad (2.196)$$

onde nota-se que

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_v^{vp})_{n+1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_v^{vp})_{n+1}^t \quad (2.197)$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp})_{n+1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp})_{n+1}^t + \Delta\gamma \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}. \quad (2.198)$$

Ou em termos de tensão

$$p_{n+1} = p_{n+1}^t \quad (2.199)$$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^t - \Delta\gamma 2G \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|}. \quad (2.200)$$

O que informa que o mapeamento de retorno no modelo J_2 afeta apenas a parte desviadora da tensão (Simo e Hughes, 1998; de Souza Neto et al., 2008).

Partindo da Eq.(2.200) chega-se à relação

$$\|\mathbf{S}_{n+1}\| = \|\mathbf{S}_{n+1}^t\| - \Delta\gamma 2G, \quad (2.201)$$

e à conclusão de que os tensores \mathbf{S}_{n+1} e \mathbf{S}_{n+1}^t são “colineares”, isto é,

$$\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^t}{\|\mathbf{S}_{n+1}^t\|}. \quad (2.202)$$

Substituindo a Eq.(2.201) na função de escoamento (2.185), tendo em vista (2.186)₂ e (2.184), chega-se a

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \|\mathbf{S}_{n+1}^t\| - \Delta\gamma 2G - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_y + A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) \right], \quad (2.203)$$

onde se tem o termo

$$A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) = A(\alpha_{n+1}) = A_{n+1}.$$

Definindo a Eq.(2.203) como uma função F de $\Delta\gamma$ em t_{n+1} , tal que (Alfano et al., 2001)

$$F_{n+1}(\Delta\gamma) \equiv \|\mathbf{S}_{n+1}^t\| - \Delta\gamma 2G - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_y + A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) \right], \quad (2.204)$$

comparando esta com (2.185), escreve-se

$$F_{n+1}(\Delta\gamma) = \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma),$$

ou

$$F_{n+1}(\Delta\gamma) - \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = 0, \quad (2.205)$$

que é a equação a ser resolvida para $\Delta\gamma > 0$ na etapa de correção viscoplástica. E a partir desta solução são atualizadas as demais variáveis, conforme as equações que seguem

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^t - \Delta\gamma 2G \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \quad (2.206)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} - p_{n+1}^t \mathbf{I} \quad (2.207)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp})^t + \Delta\gamma \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \quad (2.208)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma, \quad (2.209)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}. \quad (2.210)$$

O que completa a solução do problema elasto-viscoplástico para o critério de escoamento J_2 . No entanto, para que a solução seja obtida é necessário o conhecimento da função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$, o que vai ser posto a seguir.

2.11.7 Alguns Modelos Viscoplásticos

A seguir são descritos alguns modelos viscoplásticos, onde são descritas diferentes formas explícitas para a função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$ ²¹.

Modelo Linear de Perzyna

No modelo de Perzyna com efeito viscoso linear, também conhecido como modelo de *Bingham* (Cristescu e Suliciu, 1982), a função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$ é dada por (Perzyna, 1963, 1966, 1971)

$$\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \quad (2.211)$$

e assim, a função $\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma)$ se torna

$$\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = \frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma. \quad (2.212)$$

²¹Utiliza-se a escrita empregada por Alfano et al. (2001).

A derivada de $\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma)$ com relação a $\Delta\gamma$, necessária para o método de *Newton-Raphson* na solução de (2.205), é

$$\frac{d}{d\Delta\gamma}\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = \frac{\eta}{\Delta t}. \quad (2.213)$$

Modelo Não Linear de Perzyna

Há também um modelo de Perzyna no qual o fluxo viscoplástico depende de forma não linear da função de escoamento, neste caso a função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$ é definida como (Perzyna, 1966, 1971)

$$\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) = \left[\frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{R(\Delta\gamma)} \right]^m, \quad (2.214)$$

com

$$R(\Delta\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_y + A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) \right]. \quad (2.215)$$

De forma que a função $\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma)$ seja dada por

$$\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = R(\Delta\gamma) \left(\frac{\eta}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} (\Delta\gamma)^{\frac{1}{m}}, \quad (2.216)$$

onde, m é um parâmetro que representa a sensibilidade à taxa de deformação do material. Derivando a equação anterior com relação a $\Delta\gamma$ obtém-se

$$\frac{d}{d\Delta\gamma}\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = \left(\frac{\eta}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} \left[\frac{d}{d\Delta\gamma}R(\Delta\gamma) (\Delta\gamma)^{\frac{1}{m}} + \frac{R(\Delta\gamma)}{m} (\Delta\gamma)^{\frac{1}{m}-1} \right]. \quad (2.217)$$

Os modelos de Perzyna são utilizados para descrever a resposta de metais quando, submetidos a cargas dinâmicas, o efeito da taxa de deformação é considerado para determinar a sobre tensão, ver Perzyna (1966, 1971), ou também Lemaitre e Chaboche (1990) e Ottosen e Ristinmaa (2005).

Observação. Em algoritmos de mapeamento de retorno, no estado de tentativa elástica assume-se que $\Delta\gamma = 0$. Em casos onde hajam deformações inelásticas, a hipótese anterior ($\Delta\gamma = 0$) é utilizada na primeira etapa de correção. Observando a Eq.(2.217), nota-se no termo $(\Delta\gamma)^{\frac{1}{m}-1}$, que quando $m > 1$, $\Delta\gamma$ passa ao denominador, fazendo com que $\frac{d}{d\Delta\gamma}\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) \rightarrow \infty$. O que mal condiciona o algoritmo de mapeamento de retorno.

Modelo de Perić

Os modelos viscoplásticos devem recuperar a característica de independência da taxa de deformação à medida em que a viscosidade $\eta \rightarrow 0^+$, e o parâmetro de sensibilidade a taxa $m \rightarrow \infty$. No entanto, no modelo de Perzyna não linear o comportamento invíscido não é recuperado quando $m \rightarrow \infty$, como mostrado por Perić (1993). Por este motivo,

Perić propôs um modelo viscoplástico que recupera a independência à taxa de deformação para as condições limites mostradas anteriormente. Neste modelo a função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$ é expressa como (Perić, 1993)

$$\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) = \left[\frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) + R(\Delta\gamma)}{R(\Delta\gamma)} \right]^m - 1 = [g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})]^m - 1, \quad (2.218)$$

lembrando que $g_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ é função de escoamento canônica (função de Minkowski) mostrada na Seção 2.11.2.

Agora a função $\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma)$ se torna

$$\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = R(\Delta\gamma) \left[\left(1 + \frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right], \quad (2.219)$$

e a sua derivada

$$\frac{d}{d\Delta\gamma} \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = \frac{d}{d\Delta\gamma} R(\Delta\gamma) \left[\left(1 + \frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] + \frac{R(\Delta\gamma)}{m} \frac{\eta}{\Delta t} \left(1 + \frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma \right)^{\frac{1}{m}-1}. \quad (2.220)$$

Diferentes modelos viscoplásticos podem ser tratados de maneira semelhante. A especialização da função $\Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}))$ permite particularizar a regra de fluxo viscoplástico de acordo com as necessidades físicas e/ou matemáticas a serem empregadas ao modelo. Para maiores detalhes e conhecimento de outros modelos constitutivos refere-se a Chaboche (2008), Lemaitre e Chaboche (1990) e Ottosen e Ristinmaa (2005).

2.11.8 Módulo Tangente Consistente

Voltando à Seção 2.10, a expressão para o módulo tangente consistente $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp}$ do modelo viscoplástico é dada pelas Eqs.(2.123), (2.121) e (2.122). A particularização de $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{vp}$ para o modelo viscoplástico com critério de escoamento J_2 é realizada abaixo.

$$\left(\tilde{\mathcal{C}}_{J_2}^{vp} \right)_{n+1} = \left[\left(\bar{\mathcal{C}}_{J_2} \right)^{-1} + \left(\hat{\mathcal{C}}_{J_2} \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (2.221)$$

com

$$\left(\bar{\mathcal{C}}_{J_2} \right)^{-1} \equiv \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \otimes \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \right), \quad (2.222)$$

e

$$\left(\hat{\mathcal{C}}_{J_2} \right)^{-1} \equiv \mathcal{C}^{-1} + \frac{\Delta\gamma}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \left[\mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \otimes \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \right], \quad (2.223)$$

para um material isotrópico, segundo (2.136), conhecendo (2.192) e (2.193), se tem

$$\left(\hat{\mathcal{C}}_{J_2}\right)^{-1} \equiv \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}G \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2G\mathbf{II} \right]^{-1} + \frac{\Delta\gamma}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \left[\mathbf{II} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \otimes \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \right]. \quad (2.224)$$

Com isto, define-se o módulo tangente consistente para o modelo viscoplástico com critério de escoamento J_2 .

3 VISCOPLASTICIDADE EM GRANDES DEFORMAÇÕES

Neste capítulo a formulação apresentada no Capítulo 2 será estendida a fim de acomodar modelos elasto-(visco)plásticos sob grandes deformações.

A formulação do modelo para deformações finitas seguirá as seguintes considerações:

- uma descrição *Lagrangiana Total*;
- a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação;
- as equações constitutivas serão dadas em termos da *medida logarítmica de deformação* (material de Hencky) que tem como par conjugado o *tensor de tensão de Kirchhoff rotacionado*.

O uso da medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff* e da medida logarítmica de deformação, $\ln(\mathbf{U})$, foi primeiro apresentado em Eterovic e Bathe (1990) e Weber e Anand (1990), onde o emprego destas medidas juntamente a um mapeamento exponencial possibilitou a obtenção de um algoritmo de mapeamento de retorno semelhante ao utilizado em deformações infinitesimais. Esta estratégia também foi investigada em Badrinarayanan e Zabaras (1993), Perić et al. (1992) e Simo (1992). Já em uma descrição *Euleriana*, é possível utilizar a medida de *tensão de Kirchhoff* e a medida *logarítmica de deformação* $\ln(\mathbf{V})$,¹ ver de Souza Neto et al. (1996) e Perić e Owen (1998).

3.1 Decomposição Multiplicativa do Tensor Gradiente de Deformação

A principal hipótese adotada na formulação de (visco)plasticidade em grandes deformações, aqui descrita, é a decomposição do gradiente de deformação \mathbf{F} no seguinte produto²

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i, \quad (3.1)$$

onde, \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^i são, respectivamente, as partes *elástica* e *inelástica* de \mathbf{F} . Esta decomposição foi introduzida em Lee e Liu (1967), Lee (1969) e Mandel (1973). Foi também investigada,

¹O tensor \mathbf{V} é o chamado *tensor de alongamento à esquerda*, advém da decomposição polar $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, tal que $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ (Gurtin, 1981; Spencer, 2004).

²A decomposição multiplicativa de \mathbf{F} possui uma justificativa física consistente junto à teoria de escorregamento de cristais, ver, por exemplo, Asaro (1983), Peirce et al. (1982); Peirce (1983) e Rice (1971).

no contexto do princípio da máxima dissipação e regras de normalidade em Lubliner (1984, 1986).

Esta hipótese supõe a existência de um estado local não tensionado (livre de tensões) definido por \mathbf{F}^i , o que esquematicamente é mostrado na Figura 3.1. Onde, Ω_0 representa a configuração de referência e Ω a configuração corrente. A função φ mapeia um ponto $\mathbf{X} \in \Omega_0$ em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, ver Eqs.(1.1) e (1.2). O ponto ξ representa o estado local não tensionado e O_ξ a sua vizinhança.

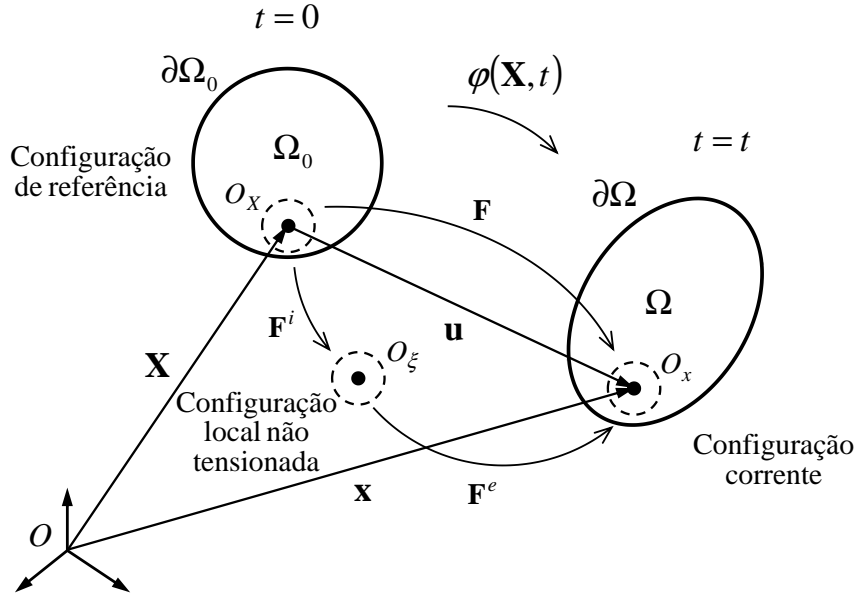


Figura 3.1: Esquema da decomposição multiplicativa de \mathbf{F} .

Observação. Destaca-se que a configuração local não tensionada não é única, uma vez que rotações locais arbitrárias podem ser impostas a O_ξ , mantendo-a não tensionada. No entanto, em aplicações a decomposição (3.1) pode ser feita de forma única por meio de especificações adicionais ditadas pelo modelo do material. Em um caso com isotropia elástica (este que é o material aqui considerado), supondo que a característica se mantenha durante as deformações, a resposta em tensão de O_ξ para O_x não depende da rotação \mathbf{R}^e advinda da decomposição polar $\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e$. Consequentemente, a configuração intermediária O_ξ , nesse caso, é definida unicamente, visto que o descarregamento elástico ocorre sem rotações. Para maiores discussões refere-se a Lee (1969), Green e Naghdi (1971) e Lubarda (1991), por exemplo.

3.1.1 Resultados Cinemáticos da Decomposição Multiplicativa

Retomando as Eqs.(1.2) e (1.3) se tem

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (3.2)$$

O gradiente de deformação, Eq.(1.4), é dado por

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}, t), \quad (3.3)$$

A adoção da decomposição multiplicativa de \mathbf{F} acarreta em alguns resultados importantes sobre a cinemática de deformação de \mathcal{B} , os quais são mostrados a seguir.

O *tensor de gradiente de velocidade* \mathbf{L} é definido como³

$$\mathbf{L} \equiv \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq.(3.1) no termo $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$, chega-se a

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{D}{Dt} (\mathbf{F}^e \mathbf{F}^i) (\mathbf{F}^e \mathbf{F}^i)^{-1} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^i, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde definiu-se

$$\mathbf{L}^e \equiv \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{L}^i \equiv \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i (\mathbf{F}^i)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}, \quad (3.7)$$

sendo \mathbf{L}^e a parte elástica e \mathbf{L}^i a parte de inelástica do gradiente de velocidade \mathbf{L} , ambas com relação à configuração corrente Ω . A taxa de deformação \mathbf{D} , parte simétrica de \mathbf{L} , segue essa mesma decomposição, tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^i, \quad (3.8)$$

com

$$\mathbf{D}^e \equiv \frac{1}{2} \left[\mathbf{L}^e + (\mathbf{L}^e)^T \right] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{D}^i \equiv \frac{1}{2} \left[\mathbf{L}^i + (\mathbf{L}^i)^T \right]. \quad (3.10)$$

O gradiente de deformação \mathbf{F} deve satisfazer (Gurtin, 1981; Lai et al., 1996; Reddy, 2008; Spencer, 2004)

$$J \equiv \det(\mathbf{F}) > 0, \quad (3.11)$$

o que implica em

$$J^e \equiv \det(\mathbf{F}^e) > 0 \quad (3.12)$$

e

$$J^i \equiv \det(\mathbf{F}^i) > 0, \quad (3.13)$$

o que garante que \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^i sejam não singulares. Sendo satisfeitas estas condições é possível

³Vale lembrar que \mathbf{L} é uma medida espacial (*Euleriana*).

aplicar a chamada *decomposição polar* sobre \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^i , respectivamente, tal que (Eterovic e Bathe, 1990; Weber e Anand, 1990)

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \quad (3.14)$$

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{R}^i \mathbf{U}^i, \quad (3.15)$$

onde⁴, \mathbf{R}^e e $\mathbf{R}^i \in \mathbb{O}^+$ são *tensores de rotação elástico e inelástico*, respectivamente. Já⁵ \mathbf{U}^e e $\mathbf{U}^i \in \mathbb{S}^+$ são os *tensores de alongamento à direita elástico e inelástico*, nesta mesma ordem.

Ainda, é possível escrever

$$(\mathbf{U}^e)^2 = \mathbf{C}^e, \quad (3.16)$$

onde, \mathbf{C}^e é o *tensor de deformação de Cauchy-Green à direita elástico* definido como

$$\mathbf{C}^e \equiv (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^e. \quad (3.17)$$

Como já mencionado, é adotada a medida logarítmica de deformação⁶

$$(\mathbf{E}^e)^{(0)} = \ln(\mathbf{U}^e), \quad (3.18)$$

chamada de *medida de deformação de Hencky*. Por conveniência, de forma geral, adota-se a escrita

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}, \quad (3.19)$$

a fim de simplificar a notação.

3.2 Pares Conjugados de Tensão e Deformação

Os pares conjugados de tensão e deformação devem ser tais que a taxa de trabalho por unidade de volume \mathcal{R}_0 seja invariante, isto leva aos seguintes pares (Hill, 1979)

$$\mathcal{R}_0 = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P}^S : \dot{\mathbf{C}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (3.20)$$

onde, \mathbf{P} é o *primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff*⁷, \mathbf{P}^S é o *segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff*⁸, $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ é o *tensor de tensão de Kirchhoff* e $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ é o *tensor de*

⁴O conjunto \mathbb{O}^+ contém todos os tensores de segunda ordem ortogonais próprios, $\mathbb{O}^+ = \{\mathbf{Q} | \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \text{ e } \det \mathbf{Q} = 1\}$.

⁵O conjunto \mathbb{S}^+ contém todos os tensores de segunda ordem simétricos e positivos-definidos, $\mathbb{S}^+ = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \mathbf{M} = \mathbf{M}^T \text{ e } \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} > 0, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \neq \mathbf{0}\}$.

⁶Esta que é a particularização da *família Lagrangiana de deformações* $\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln[\mathbf{U}] & \text{para } m = 0 \end{cases}$, para $m = 0$ (Hill, 1979; Ogden, 1997; Seth, 1964).

⁷Aqui, o *primeiro tensor de Piola-Kirchhoff* é definido como $\mathbf{P} \equiv \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}^{-T}$.

⁸O *segundo tensor de Piola-Kirchhoff* é definido como $\mathbf{P}^S \equiv \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}^{-T}$.

tensão de Kirchhoff rotacionado, dado por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e. \quad (3.21)$$

A simetria dos tensores \mathbf{C}^e , \mathbf{U}^e e \mathbf{E}^e permite realizar as seguintes decomposições espectrais (de Souza Neto et al., 2008; Weber e Anand, 1990)

$$\mathbf{C}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \quad (3.22)$$

$$\mathbf{U}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \quad (3.23)$$

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i, \quad (3.24)$$

onde, λ_i^2 são os autovalores e \mathbf{l}_i são os autovetores de \mathbf{C}^e . Nota-se que \mathbf{C}^e , \mathbf{U}^e e \mathbf{E}^e possuem as mesmas direções principais. A decomposição espectral de \mathbf{E}^e pode ser dada conforme Eq.(3.24) visto que $\ln(\mathbf{U}^e)$ é uma função isotrópica, para detalhes ver de Souza Neto et al. (2008).

3.3 Lei Constitutiva Hiperelástica, Potenciais de Energia Livre e de Dissipação⁹

Agora, o potencial de energia livre ψ assume a seguinte forma (Lubliner, 1984)

$$\psi(\mathbf{E}^e, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\mathbf{E}^e, \theta) + \psi^i(\theta, \boldsymbol{\alpha}). \quad (3.25)$$

Supondo que ψ seja suficientemente suave sua taxa fica dada por

$$\dot{\psi}(\mathbf{E}^e, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (3.26)$$

Empregando à inequação de Clausius-Duhem,

$$\Phi \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left(\dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0, \quad (3.27)$$

a Eq.(3.8) e multiplicando por J , obtém-se

$$\Phi_0 \equiv \boldsymbol{\tau} : (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^i) - \rho_0 \left(\dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0, \quad (3.28)$$

⁹A forma de apresentação que segue é muito próxima daquela descrita em deformações infinitesimais. Entretanto, não foi encontrada uma forma mais resumida para a formulação sem precisar “omitir” certas passagens importantes.

onde, Φ_0 é a dissipação por unidade de volume na configuração de referência Ω_0 . Pela condição de invariância de \mathcal{R}_0 , Eq.(3.20), sabe-se que

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^e = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}^e, \quad (3.29)$$

então a Eq.(3.28) se torna

$$\Phi_0 = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^i - \rho_0 \left(\dot{\psi} + s\dot{\theta} \right) - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0. \quad (3.30)$$

Substituindo em (3.30) a taxa $\dot{\psi}$, Eq.(3.26), obtém-se

$$\Phi_0 = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^i - \rho_0 \left(\frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + s\dot{\theta} \right) - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0,$$

rearranjando os termos

$$\Phi_0 = \left(\bar{\boldsymbol{\tau}} - \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \right) : \dot{\mathbf{E}}^e - \rho_0 \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^i - \rho_0 \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} * \dot{\alpha}_k - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0. \quad (3.31)$$

Novamente, assim como foi feito no caso de pequenas deformações, assumindo que (3.31) deva ser satisfeita para todos o processos termodinâmicos, são obtidas as seguintes relações constitutivas (Coleman e Gurtin, 1967; Lubliner, 1984; Rice, 1971)

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (3.32)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (3.33)$$

Ainda, definindo um conjunto de forças termodinâmicas $\mathbf{A} : O_\xi \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{int}}$, associado ao conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}$, tal que

$$A_k \equiv \rho_0 \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k}, \quad (3.34)$$

o potencial de dissipação Φ_0 assume a forma reduzida

$$\Phi_0 = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^i - A_k * \dot{\alpha}_k - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0. \quad (3.35)$$

Considerando, a partir de agora, processos isotérmicos, reescreve-se

$$\Phi_0 = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0, \quad (3.36)$$

isto é, com esta hipótese o potencial Φ_0 é dado somente pela dissipação intrínseca.

3.3.1 Relação Constitutiva Hiperelástica Linear Isotrópica

Em um modelo hiperelástico linear a Eq.(3.32) assume a forma

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} = \mathcal{C} : \mathbf{E}^e, \quad (3.37)$$

com

$$\mathcal{C} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e \otimes \partial \mathbf{E}^e},$$

onde, \mathcal{C} é o *tensor constitutivo hiperelástico*, quarta ordem e constante. Assume-se que \mathcal{C} seja simétrico e positivo-definido e que seja referente a um material hiperelástico linear isotrópico. Neste caso o tensor \mathcal{C} é dado pela Eq.(2.136). Considera-se que as propriedades hiperelásticas sejam independentes dos processos irreversíveis.

3.3.2 Taxa de Deformação Inelástica Modificada

A modificação da taxa de deformação inelástica \mathbf{D}^i consiste, primeiramente, em transportar o termo \mathbf{L}^i da Eq.(3.5) à configuração local não tensionada, o que é feito pelo seguinte produto

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}^i &= (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{L}^i \mathbf{F}^e \\ \bar{\mathbf{L}}^i &= (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i (\mathbf{F}^i)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{F}^e \\ \bar{\mathbf{L}}^i &= \dot{\mathbf{F}}^i (\mathbf{F}^i)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde, $\bar{\mathbf{L}}^i$ é a parte inelástica do gradiente de velocidade \mathbf{L} escrita com relação à configuração local não tensionada. Decompõe-se $\bar{\mathbf{L}}^i$ em sua parte simétrica $\bar{\mathbf{D}}^i$, associada ao alongamento inelástico, e antissimétrica $\bar{\mathbf{W}}^i$, associada à rotação inelástica, isto é,

$$\bar{\mathbf{L}}^i = \bar{\mathbf{D}}^i + \bar{\mathbf{W}}^i, \quad (3.39)$$

com

$$\bar{\mathbf{D}}^i = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{L}}^i + (\bar{\mathbf{L}}^i)^T] \quad (3.40)$$

$$\bar{\mathbf{W}}^i = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{L}}^i - (\bar{\mathbf{L}}^i)^T]. \quad (3.41)$$

No entanto, a isotropia inelástica aqui empregada faz com que (de Souza Neto et al., 2008; Gurtin et al., 2010; Weber e Anand, 1990)

$$\bar{\mathbf{W}}^i = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

O que permite que o potencial de dissipação Φ_0 , Eq.(3.36), seja reescrito como

$$\Phi_0 = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{D}}^i (\mathbf{F}^e)^{-1} - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0, \quad (3.43)$$

ou ainda, conhecendo a propriedade

$$\mathbf{R} : \mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{R} : \mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{T}^T : \mathbf{S},$$

se tem

$$\Phi_0 = (\mathbf{F}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}^e)^{-T} : \bar{\mathbf{D}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0, \quad (3.44)$$

substituindo nesta a decomposição polar (3.14)

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^{-T} : \bar{\mathbf{D}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0 \\ \Phi_0 &= \mathbf{U}^e (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e)^{-1} : \bar{\mathbf{D}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0 \\ \Phi_0 &= \mathbf{U}^e \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{U}^e)^{-1} : \bar{\mathbf{D}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

ainda, supondo que $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ seja dado por (3.37) e que \mathcal{C} seja isotrópico, o potencial de dissipação Φ_0 se torna (Eterovic e Bathe, 1990)

$$\Phi_0 = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}}^i - A_k * \dot{\alpha}_k \geq 0. \quad (3.46)$$

3.4 Domínio Elástico e Função de Escoamento

Semelhantemente ao que foi mostrado na Seção 2.3, o domínio elástico é representado por um conjunto convexo fechado móvel $\mathbb{K} : \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{S}$, tal que

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{ \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{S} | f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \leq 0 \}, \quad (3.47)$$

onde

$$f = f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}), \quad (3.48)$$

é a *função de escoamento*, em termos da tensão rotacionada de *Kirchhoff* $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ e das forças termodinâmicas \mathbf{A} . O contorno de $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ é formado pela superfície

$$\partial \mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{ \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{S} | f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = 0 \}, \quad (3.49)$$

chamada de *superfície de escoamento*.

Define-se $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ de forma que

$$\mathbb{K}(\mathbf{0}) = \mathbb{K}_0, \quad (3.50)$$

onde \mathbb{K}_0 é o domínio elástico inicial. Também, assume-se que $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ contenha a o origem, isto é, $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \in \mathbb{K}(\mathbf{A})$.

3.5 Equações de Evolução

As equações de evolução para $\bar{\mathbf{D}}^{vp}$ e $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ são formuladas utilizando a mesma abordagem empregada ao caso infinitesimal, isto é, a partir do princípio da máxima dissipação. Dessa forma, a tensão rotacionada de *Kirchhoff* $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ é decomposta, tal que

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_e + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}, \quad (3.51)$$

onde, a tensão de equilíbrio $\bar{\boldsymbol{\tau}}_e$ é definida como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_e \equiv \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = \left\{ \bar{\boldsymbol{\tau}}^* \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \mid \|\bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}^*\| \leq \|\bar{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\boldsymbol{\tau}}\|, \quad \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \right\}, \quad (3.52)$$

e a sobre tensão

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st} = d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \frac{\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_e, \mathbf{A})}{\|\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_e, \mathbf{A})\|} \quad (3.53)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st} = d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_e, \mathbf{A}), \quad (3.54)$$

onde, $\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_e, \mathbf{A})$ é o cone normal¹⁰ a $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ em $\bar{\boldsymbol{\tau}}_e$, e $\mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_e, \mathbf{A})$ é o cone “unitário” neste mesmo ponto. A função distância $d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dada por

$$d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = \|\bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_e\|. \quad (3.55)$$

Semelhantemente ao problema de deformações infinitesimais, o uso das descrições (3.52) e (3.54) fornece as seguintes relações

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \iff \bar{\boldsymbol{\tau}}_{st} = \mathbf{0} \iff \bar{\boldsymbol{\tau}}_e = \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (3.56)$$

isto é, se o estado de tensão for puramente elástico, então não há sobre tensão $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}$ e a tensão de equilíbrio $\bar{\boldsymbol{\tau}}_e$ é a própria tensão total $\bar{\boldsymbol{\tau}}$.

Assim, o princípio da máxima dissipação em sua forma local fica definido como: *Para variáveis inelásticas $\bar{\mathbf{D}}^{vp}$ e $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ fixas, as respectivas forças termodinâmicas $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ e \mathbf{A} devem ser tais que maximizem o potencial (3.46), isto é,*¹¹

$$\bar{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}; \bar{\mathbf{D}}^{vp}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \max_{(\bar{\boldsymbol{\tau}}^*, \mathbf{A}^*) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}}} \left\{ \bar{\boldsymbol{\tau}}^* : \bar{\mathbf{D}}^{vp} - \mathbf{A}_k^* * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \right\}, \quad (3.57)$$

dentre todas as forças termodinâmicas $\bar{\boldsymbol{\tau}}^*$ e \mathbf{A}^* que satisfaçam

$$d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^*, \mathbf{A}^*) - g(\|\bar{\mathbf{D}}^{vp}\|) \leq 0. \quad (3.58)$$

Introduzindo o funcional de Lagrange associado o princípio de máximo restrito (3.57)-

¹⁰Ver Seção 2.5.

¹¹Considera-se que a função a ser extremizada seja diferenciável.

(3.58) pode ser transformado no seguinte problema irrestrito

$$\mathcal{L}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}; \bar{\mathbf{D}}^{vp}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \max_{(\bar{\boldsymbol{\tau}}^*, \mathbf{A}^*) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}}} \left\{ \bar{\boldsymbol{\tau}}^* : \bar{\mathbf{D}}^{vp} - \mathbf{A}_k^* * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \dot{\gamma} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^*, \mathbf{A}^*) - g(\|\bar{\mathbf{D}}^{vp}\|)] \right\}, \quad (3.59)$$

onde $\dot{\gamma} \geq 0$ é o multiplicador de Lagrange. Explorando os resultados de análise convexa, ver Luenberger e Ye (2008), são obtidas as seguintes regras de evolução

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \quad (3.60)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})], \quad (3.61)$$

e as condições de Karush-Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) - g(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\gamma} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) - g(\|\bar{\mathbf{D}}^{vp}\|)] = 0, \quad (3.62)$$

as quais são condições necessárias para a existência de um ponto de máximo em (3.59).

Semelhantemente ao que foi desenvolvido para a Eq.(2.56), defini-se o multiplicador viscoplástico pela seguinte expressão

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})), \quad (3.63)$$

onde, $\eta \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ é um parâmetro de viscosidade e $\Theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função convexa da distância $d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})$, que satisfaz a propriedade

$$\Theta(0) = 0. \quad (3.64)$$

3.6 Problema Constitutivo Viscoplástico de Valor Inicial

A seguir é estabelecido o problema constitutivo de valor inicial para o modelo elasto-viscoplástico sob grandes deformações. Baseia-se no modelo isotrópico dado na Tabela 3.1 e se tem como objetivo determinar o gradiente de deformação viscoplástico \mathbf{F}^{vp} e o conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}$.

Problema 3.1. *Dados os valores iniciais $\mathbf{F}^{vp}(t_0)$ e $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$, a história do gradiente de deformação $\mathbf{F}(t)$ e a função $\Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}))$, para $t \in (t_0, T]$, encontrar as funções $\mathbf{F}^{vp}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ e $\dot{\gamma}(t) \geq 0$ que satisfaçam¹²*

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\mathbf{F}}^{vp}(t) [\mathbf{F}^{vp}(t)]^{-1} = \dot{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}(t), \mathbf{A}(t))] \quad (3.73)$$

¹²Nota-se que, pelas Eqs.(3.38)-(3.42), $\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\mathbf{F}}^{vp}(t) [\mathbf{F}^{vp}(t)]^{-1}$.

- Decomposição da deformação total:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i; \quad (3.65)$$

- Decomposição do potencial de energia livre de *Helmholtz*:

$$\psi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\mathbf{E}^e) + \psi^i(\boldsymbol{\alpha}); \quad (3.66)$$

- Relação constitutiva:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \quad \text{e} \quad A_k = \rho_0 \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k}; \quad (3.67)$$

- Domínio elástico:

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{\bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{S} \mid f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \leq 0\}; \quad (3.68)$$

- Decomposição da tensão total:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_e + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}, \quad (3.69)$$

com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_e = \mathbf{P}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \quad \text{e} \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_{st} = d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \mathbf{n}_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A});$$

- Lei de evolução para as variáveis internas:

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \quad (3.70)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})], \quad (3.71)$$

com

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})). \quad (3.72)$$

Tabela 3.1: Resumo do modelo viscoplástico em grandes deformações.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = -\dot{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}(t), \mathbf{A}(t))] \quad (3.74)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}(t), \mathbf{A}(t))), \quad (3.75)$$

para cada instante $t \in (t_0, T]$, com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \Big|_t \quad \text{e} \quad A_k(t) = \rho_0 \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \Big|_t. \quad (3.76)$$

3.7 Discretização Temporal das Equações de Evolução

Assim como na Seção 2.7, adota-se um esquema de integração implícita. Isto implica na divisão do intervalo $(t_0, T]$ em subintervalos $(t_n, t_{n+1}]$, levando às respectivas versões

incrementais das Eqs.(3.74) e (3.75)

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n - \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \quad (3.77)$$

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}))|_{n+1}. \quad (3.78)$$

No entanto, o uso deste procedimento à Eq.(3.73) trás significantes perdas de precisão na integração numérica das equações constitutivas de modelos (visco)plásticos incompressíveis. Isso porque, utilizando o método implícito padrão, em deformações finitas, não é possível garantir a incompressibilidade do fluxo (visco)plástico em materiais insensíveis à pressão hidrostática (que é o caso do modelo J_2 aqui empregado), ver de Souza Neto et al. (2008, p.592). Este problema é contornado pelo uso de um procedimento de integração implícita exponencial, tal que, a forma discreta da Eq.(3.73) seja (Eterovic e Bathe, 1990; Weber e Anand, 1990)

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left\{ \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \right\} \mathbf{F}_n^{vp}. \quad (3.79)$$

Então, a versão incremental do problema (3.73)-(3.75) é escrita na seguinte forma.

Problema 3.2. *Dados os valores (convergidos do passo de tempo anterior) \mathbf{F}_n^{vp} e $\boldsymbol{\alpha}_n$, conhecendo o incremento do gradiente de deformação*

$$\mathbf{F}_u \equiv \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n)^{-1} \quad (3.80)$$

e a forma explícita da função $\Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}))_{n+1}$, resolver o sistema de equações algébricas

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left\{ \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \right\} \mathbf{F}_n^{vp} \quad (3.81)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n - \Delta\gamma \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \right|_{n+1} \quad (3.82)$$

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\eta} \Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}))|_{n+1}, \quad (3.83)$$

para as variáveis \mathbf{F}_{n+1}^{vp} , $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ e $\Delta\gamma \geq 0$, com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \rho_0 \left. \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \right|_{n+1} \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1} = \rho_0 \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \right|_{n+1}. \quad (3.84)$$

3.8 Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplastica

O algoritmo a ser utilizado, assim como no caso de deformações infinitesimais, também consiste em duas etapas (tentativa elástica e correção viscoplastica), o que é motivado pelo uso da metodologia baseada na decomposição de operadores.

(a) **Etapa de tentativa elástica.** Nesta etapa assume-se que

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = 0 \quad (3.85)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0. \quad (3.86)$$

O que dá origem ao *estado de tentativa elástica*

$$(\mathbf{F}_{n+1}^{vp})^t = \mathbf{F}_n^{vp} \quad (3.87)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t = \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (3.88)$$

O correspondente gradiente de deformação elástica é determinado por

$$(\mathbf{F}_{n+1}^e)^t = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}. \quad (3.89)$$

Visto que a lei elástica é dada em função de \mathbf{E}^e , calcula-se

$$(\mathbf{C}_{n+1}^e)^t = [(\mathbf{F}_{n+1}^e)^t]^T (\mathbf{F}_{n+1}^e)^t, \quad (3.90)$$

a fim de determinar o tensor de deformação logarítmica

$$(\mathbf{E}_{n+1}^e)^t = \frac{1}{2} \ln [(\mathbf{C}_{n+1}^e)^t]. \quad (3.91)$$

E assim, são calculadas as *forças termodinâmicas tentativas*

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^t = \rho_0 \left. \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \right|_{n+1}^t \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1}^t = \rho_0 \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \right|_{n+1}^t. \quad (3.92)$$

De posse de (3.92) verifica-se se o estado tentativa elástica pertence de fato ao domínio elástico atual, isto é, se

$$f_{n+1}^t \equiv f(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^t, \mathbf{A}_{n+1}^t) \leq 0, \quad (3.93)$$

então atualiza-se

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^t \quad (3.94)$$

e o algoritmo é finalizado, passando para o próximo incremento de tempo. Caso contrário, passa-se à etapa de correção viscoplastica, ou mapeamento de retorno.

(a) **Etapa de correção viscoplastica.** Aqui, a alternativa é solucionar o sistema de

equações algébricas (3.81)-(3.83), que, utilizando o estado tentativa elástica e invertendo a função Θ para $\Delta\gamma > 0$, se torna

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left\{ \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \Big|_{n+1} \right\} (\mathbf{F}_{n+1}^{vp})^t. \quad (3.95)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t - \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \Big|_{n+1} \quad (3.96)$$

$$d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma), \quad (3.97)$$

com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} \Big|_{n+1} \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1} = \rho_0 \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha_k} \Big|_{n+1}, \quad (3.98)$$

para \mathbf{F}_{n+1}^{vp} , $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ e $\Delta\gamma > 0$.

A solução das Eqs.(3.95)-(3.97) é feita por meio do método de *Newton-Raphson* descrito na Seção 2.9. Entretanto, o uso da hipótese de decomposição multiplicativa do gradiente de deformação, da medida de deformação logarítmica juntamente ao mapeamento exponencial possibilita modificar o problema (3.95)-(3.97), de modo que este mantenha a forma daqueles vistos em deformações infinitesimais.

Usando (3.1) e (3.89) em (3.95), obtém-se

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = (\mathbf{F}_{n+1}^e)^t \exp \left\{ -\Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \Big|_{n+1} \right\}, \quad (3.99)$$

fazendo a decomposição polar de \mathbf{F}_{n+1}^e e $(\mathbf{F}_{n+1}^e)^t$

$$(\mathbf{R}_{n+1}^e)^t (\mathbf{U}_{n+1}^e)^t \exp \left\{ -\Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \Big|_{n+1} \right\} = \mathbf{R}_{n+1}^e \mathbf{U}_{n+1}^e. \quad (3.100)$$

Ainda, a isotropia da relação constitutiva (3.37) e a unicidade da decomposição polar implica que (Weber e Anand, 1990)

$$\mathbf{R}_{n+1}^e = (\mathbf{R}_{n+1}^e)^t, \quad (3.101)$$

logo

$$\mathbf{U}_{n+1}^e = (\mathbf{U}_{n+1}^e)^t \exp \left\{ -\Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \Big|_{n+1} \right\}. \quad (3.102)$$

O que mostra que \mathbf{U}_{n+1}^e e $(\mathbf{U}_{n+1}^e)^t$ possuem as mesmas direções principais.

Tomando o logaritmo dos dois lados de (3.102), chega-se a

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t - \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} [d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})] \Big|_{n+1}, \quad (3.103)$$

onde,

$$(\mathbf{E}_{n+1}^e)^t = \ln \left[(\mathbf{U}_{n+1}^e)^t \right]. \quad (3.104)$$

Assim, a expressão (3.103) substitui a Eq.(3.95), recuperando o formato do algoritmo de correção viscoplástica visto para o problema de deformações infinitesimais, ver a Seção 2.8.

Com base na formulação incremental, na Figura 3.2 são mostrados os mapeamentos entre as configurações de referência, corrente e não tensionada entre os instantes t_n e t_{n+1} .

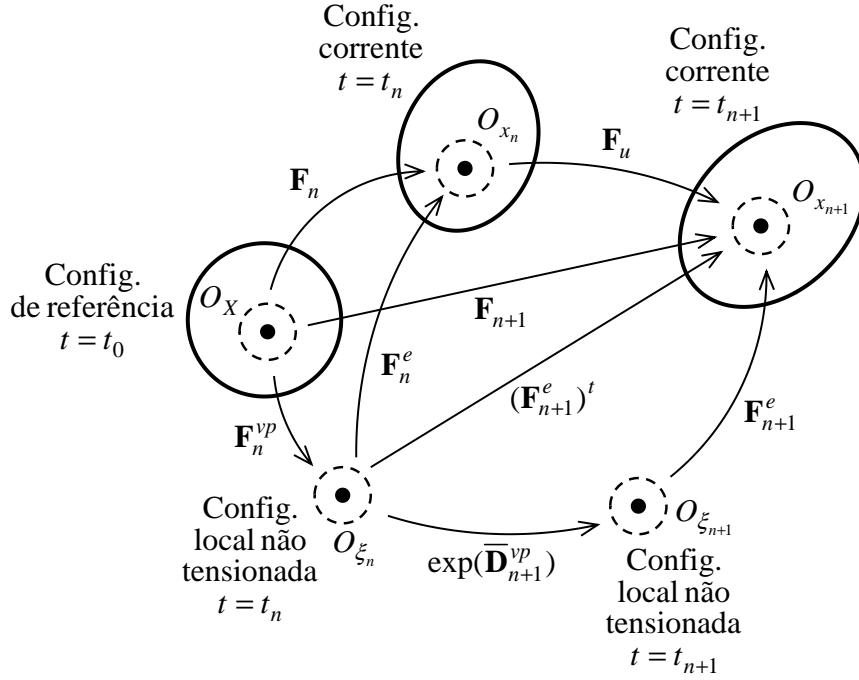


Figura 3.2: Configurações de deformações entre os instantes t_n e t_{n+1} .

3.9 Módulo Tangente Consistente

O *módulo tangente contínuo* para o problema de grandes deformações, utilizando uma formulação *Lagrangiana Total*, é dado por

$$\mathcal{C}^{vp} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.105)$$

Ainda, é possível escrever a Eq.(3.105) em função da tensão de *Kirchhoff*, sabendo que o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é dado por

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.106)$$

então, reescreve-se (3.105) como

$$\mathbf{C}^{vp} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}), \quad (3.107)$$

ou em componentes

$$C_{ijkl}^{vp} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (\tau_{ip} F_{jp}^{-1}),$$

efetuando a derivação, obtém-se

$$C_{ijkl}^{vp} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (3.108)$$

Já a versão do algoritmo do módulo tangente contínuo, Eq.(3.108), é definida como¹³

$$\left(\tilde{C}_{ijkl}^{vp} \right)_{n+1} \equiv \left(\frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1} \right)_{n+1}, \quad (3.109)$$

que é a forma utilizada no Capítulo 4 na solução do problema global em grandes deformações, pelo método de *Newton-Raphson*. \tilde{C}_{n+1}^{vp} é chamado de módulo *tangente consistente viscoplástico*.

Na Eq.(3.109) nota-se que o cálculo de \tilde{C}_{n+1}^{vp} requer a determinação da derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente de deformação. Mas, pela Eq.(3.21), é possível escrever $\boldsymbol{\tau}$ em função da tensão rotacionada de *Kirchhoff* $\bar{\boldsymbol{\tau}}$. Assim, tendo em vista a igualdade (3.101), será necessário determinar a derivada de $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ com relação a \mathbf{F}_{n+1} . Porém, analogamente à Eq.(2.111) e à discussão em torno desta, escreve-se $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ em função da deformação tentativa elástica $(\mathbf{E}_{n+1}^e)^t$ e do conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}_n$ (de Souza Neto et al., 2008)

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \left((\mathbf{E}_{n+1}^e)^t, \boldsymbol{\alpha}_n \right), \quad (3.110)$$

Assim, aplicando a regra da cadeia, define-se

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t} \frac{\partial (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t}{\partial (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t} \frac{\partial (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}, \quad (3.111)$$

denotando

$$\tilde{\mathcal{D}} \equiv \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t}, \quad (3.112)$$

$$\mathcal{G} \equiv \frac{\partial (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t}{\partial (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t}, \quad (3.113)$$

¹³Ver discussão na Seção 2.10.

e

$$\mathcal{H} \equiv \frac{\partial (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}, \quad (3.114)$$

escreve-se (3.111) como

$$\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}\mathcal{G}\mathcal{H}, \quad (3.115)$$

que em componentes é dada por

$$D_{ijkl} = \tilde{D}_{ijrs} G_{rspq} H_{pqkl}. \quad (3.116)$$

Determinação de \mathcal{H} . Da Eq.(3.90), sabe-se que

$$(\mathbf{C}_{n+1}^e)^t = [(\mathbf{F}_{n+1}^e)^t]^T (\mathbf{F}_{n+1}^e)^t,$$

ainda, conforme (3.89) se tem

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t &= (\mathbf{F}_n^{vp})^{-T} \mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1} \\ (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t &= (\mathbf{F}_n^{vp})^{-T} \mathbf{C}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

ou em componentes

$$(C_{ij}^e)_{n+1}^t = [(\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}]_{ri} (C_{rs})_{n+1} [(\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}]_{sj}. \quad (3.118)$$

Logo,

$$\frac{\partial (C_{ij}^e)_{n+1}^t}{\partial (F_{kl})_{n+1}} = [(\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}]_{ri} \frac{\partial (C_{rs})_{n+1}}{\partial (F_{kl})_{n+1}} [(\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}]_{sj}. \quad (3.119)$$

Ainda, é possível escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial (C_{rs})_{n+1}}{\partial (F_{kl})_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial (F_{kl})_{n+1}} [(F_{mr})_{n+1} (F_{ms})_{n+1}] \\ \frac{\partial (C_{rs})_{n+1}}{\partial (F_{kl})_{n+1}} &= \delta_{rl} (F_{mr})_{n+1} (F_{ms})_{n+1} \delta_{sl}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Substituindo (3.120) em (3.119), obtém-se

$$H_{ijkl} = \frac{\partial (C_{ij}^e)_{n+1}^t}{\partial (F_{kl})_{n+1}} = [(\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}]_{li} (F_{kj}^e)_{n+1}^t + (F_{ki}^e)_{n+1}^t [(\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}]_{lj}. \quad (3.121)$$

Determinação de \mathcal{G} . Segundo a Eq.(3.91), o termo \mathcal{G} se torna

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\mathbf{C}_{n+1}^e)^t} \left\{ \ln [(\mathbf{C}_{n+1}^e)^t] \right\}. \quad (3.122)$$

Nota-se que a determinação de \mathcal{G} requer uma derivada do tipo $\frac{\partial \ln(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$, que é a derivada de uma função isotrópica. Esta classe de derivadas foi investigada por alguns autores, sendo que aqui utiliza-se a proposta encontrada em Ortiz et al. (2001).

Determinação de $\tilde{\mathcal{D}}$. A identificação de

$$\tilde{\mathcal{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t}, \quad (3.123)$$

segue a abordagem utilizada na Seção (2.10), para deformações infinitesimais. Isto é, a determinação de $\tilde{\mathcal{D}}$ parte da derivação das Eqs.(3.103) e (3.97) com relação a $(\mathbf{E}_{n+1}^e)^t$, o que fornece

$$d\mathbf{E}_{n+1}^e + d(\Delta\gamma) \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} : d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = d(\mathbf{E}_{n+1}^e)^t \quad (3.124)$$

$$\left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} : d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} - \frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma} d(\Delta\gamma) = 0. \quad (3.125)$$

Mostra-se que

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left(\bar{\mathcal{D}}^{-1} + \hat{\mathcal{D}}^{-1} \right)^{-1}, \quad (3.126)$$

com

$$\hat{\mathcal{D}}^{-1} \equiv \left(c^{-1} + \Delta\gamma \left. \frac{\partial^2 d_{\mathbb{K}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \right), \quad (3.127)$$

e

$$\bar{\mathcal{D}}^{-1} \equiv \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \otimes \left. \frac{\partial d_{\mathbb{K}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \right). \quad (3.128)$$

Nota-se que $\tilde{\mathcal{D}}$, o chamado *operador tangente*, é o único termo de \mathcal{D} , Eq.(3.115), que depende do material empregado, isto é, depende da lei elástica, do critério de escoamento e das propriedades (visco)plásticas. Os demais termos, \mathcal{G} e \mathcal{H} , são relacionados à parte geométrica das deformações finitas. Ainda, $\tilde{\mathcal{D}}$ possui a mesma forma funcional do módulo tangente consistente do problema em pequenas deformações, Eq.(2.123). Além disto, a simetria do tensor de tensão $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, a convexidade de $\mathbb{K}(\mathbf{A})$ e conseqüentemente de $d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})$ permitem concluir que $\tilde{\mathcal{D}}$ é simétrico e positivo-definido, ver também Eq.(2.123) e discussão em torno desta. No entanto, estas propriedades não se estendem ao módulo tangente consistente \mathcal{D} , pois de forma geral os termos geométricos \mathcal{G} e \mathcal{H} não são simétricos e positivos-definidos, ver, por exemplo, de Souza Neto et al. (2008) e Simo e Hughes (1998).

3.10 Aplicação ao Modelo J_2

A particularização das equações constitutivas (3.73)-(3.75) ao modelo de plasticidade J_2 , é feita de forma semelhante ao que foi desenvolvido na Seção 2.11. Assim, a função

de escoamento (3.48) se torna¹⁴

$$f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = \|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_y + A(\alpha)], \quad (3.129)$$

onde, $\bar{\boldsymbol{\tau}}^D$ é a parte desviadora do tensor de *Kirchhoff* rotacionado, dada por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{I}, \quad (3.130)$$

e o termo $\sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_y + A(\alpha)]$ representa o raio da superfície de escoamento.

Aqui, os conjuntos das forças termodinâmicas e das variáveis internas associadas são particularizados, respectivamente, como

$$\mathbf{A} = \{A\} \quad (3.131)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha\}, \quad (3.132)$$

onde, A é a variável de endurecimento isotrópico, dada em função da deformação viscoplástica acumulada α .

3.10.1 Relações Constitutivas e Potencial de Energia Livre

A relação constitutiva para a tensão $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ é dada segundo a lei hiperelástica linear (3.37), isto é,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} = \mathcal{C} : \mathbf{E}^e, \quad (3.133)$$

com \mathcal{C} dado em (2.136) ($\mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{II}$). Já o endurecimento isotrópico $A(\alpha)$ é calculado segundo a regra não linear empregada por Simo e Armero (1992), de forma que¹⁵

$$A(\alpha) = \rho_0 \frac{\partial \psi^i}{\partial \alpha} = (\sigma_\infty - \sigma_y)[1 - \exp(-\delta\alpha)] + H\alpha, \quad (3.134)$$

onde, σ_∞ , σ_y , δ e H são parâmetros materiais.

Dessa forma, considerando as relações constitutivas (3.133) e (3.134), o potencial de energia livre ψ assume a seguinte forma

$$\psi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\mathbf{E}^e) + \psi^i(\boldsymbol{\alpha})$$

$$\psi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}^e : \mathcal{C} : \mathbf{E}^e + (\sigma_\infty - \sigma_y) \left[\alpha + \frac{1}{\delta} \exp(-\delta\alpha) \right] + \frac{1}{2}\alpha H\alpha. \quad (3.135)$$

¹⁴ $\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\| = \sqrt{\bar{\tau}_{ij}^D \bar{\tau}_{ij}^D}$.

¹⁵Esta regra é também utilizada em deformações infinitesimais, ver Eq.(2.137).

3.10.2 Determinação da Função Distância

Assim como na Seção 2.11, mostra-se que a função distância $d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})$ para o modelo viscoplástico em grandes deformações, utilizando o critério de escoamento J_2 , se torna

$$d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = \langle f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \rangle \geq 0. \quad (3.136)$$

E que a sobre tensão $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}$ e a tensão de equilíbrio $\bar{\boldsymbol{\tau}}_e$, Eq.(3.51), assumem as respectivas formas

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st} = \langle f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \rangle \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\|}, \quad (3.137)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_e = [\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\| - \langle f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \rangle] \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\|} + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{I}. \quad (3.138)$$

Nota-se que $\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_e)$, então as partes desviadoras de $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}$ e $\bar{\boldsymbol{\tau}}_e$ são calculadas, respectivamente, como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}^D = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \left[1 - \frac{1}{g_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})}\right] \bar{\boldsymbol{\tau}}^D & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases} \quad (3.139)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_e^D = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\tau}}^D & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{g_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})} & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases}, \quad (3.140)$$

onde, $g_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})$ é a *função de Minkowski*, dada por

$$g_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\|}{\sigma_y + A(\alpha)}, \quad (3.141)$$

ver Seção 2.11.2.

3.10.3 Equações de Evolução

De acordo com as Eqs.(3.63), (3.129) e (3.136) as leis de evolução (3.60) e (3.61) são particularizadas ao modelo J_2 , respectivamente, como

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\|}, \quad (3.142)$$

e

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}, \quad (3.143)$$

com

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})) \rangle. \quad (3.144)$$

O resumo do modelo viscoplástico para o critério J_2 é mostrado na Tabela 3.2.

- Decomposição do gradiente de deformação:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}; \quad (3.145)$$

- Potencial de energia livre de *Helmholtz*:

$$\psi(\mathbf{E}^e, \alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \mathcal{C} : \mathbf{E}^e + (\sigma_\infty - \sigma_y) \left[\alpha + \frac{1}{\delta} \exp(-\delta\alpha) \right] + \frac{1}{2} H \alpha^2; \quad (3.146)$$

- Relações constitutivas:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{C} : \mathbf{E}^e, \quad \mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{II}, \quad (3.147)$$

e

$$A(\alpha) = (\sigma_\infty - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta\alpha)] + H\alpha; \quad (3.148)$$

- Domínio elástico:

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{ \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{S} | f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) \leq 0 \}, \quad (3.149)$$

com

$$f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}) = \|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] \leq 0; \quad (3.150)$$

- Decomposição da tensão total:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}_e^D + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}^D, \quad (3.151)$$

com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_e^D = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\tau}}^D & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{g_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})} & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases} \quad (3.152)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{st}^D = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{K}(\mathbf{A}) \\ \left[1 - \frac{1}{g_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})} \right] \bar{\boldsymbol{\tau}}^D & \text{se } \bar{\boldsymbol{\tau}} \notin \mathbb{K}(\mathbf{A}) \end{cases}; \quad (3.153)$$

- Lei de evolução para as variáveis internas:

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\|} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}, \quad (3.154)$$

com

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})) \rangle. \quad (3.155)$$

Tabela 3.2: Resumo do modelo viscoplástico em grandes deformações para o critério J_2 .

3.10.4 Problema Constitutivo Viscoplástico

Neste estágio, é possível definir o problema constitutivo de valor inicial para o modelo J_2 em grandes deformações. Considera-se um ponto $\boldsymbol{\xi}$ de \mathcal{B} e um intervalo $(t_0, T] \in \mathbb{R}^+$.

Problema 3.3. *Dados os valores iniciais $\mathbf{F}^{vp}(t_0)$ e $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$, a história do gradiente de*

deformação $\mathbf{F}(t)$ e a função $\Theta(d_{\mathbb{K}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}))$, para $t \in (t_0, T]$, encontrar as funções $\mathbf{F}^{vp}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ e $\dot{\gamma}(t) \geq 0$ que satisfaçam

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\mathbf{F}}^{vp}(t) [\mathbf{F}^{vp}(t)]^{-1} = \dot{\gamma}(t) \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}^D\|} \quad (3.156)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}(t) \quad (3.157)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\bar{\boldsymbol{\tau}}(t), \mathbf{A}(t))) \rangle, \quad (3.158)$$

para cada instante $t \in (t_0, T]$, com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \mathcal{C} : \mathbf{E}^e(t) \quad \text{e} \quad A_k(t) = (\sigma_{\infty} - \sigma_y) \{1 - \exp[-\delta \alpha(t)]\} + H \alpha(t). \quad (3.159)$$

3.10.5 Discretização Temporal das Equações de Evolução

Seguindo a metodologia da Seção 3.7, a partir das Eqs.(3.156)-(3.158), chega-se ao seguinte problema de valor inicial discreto.

Problema 3.4. *Dados os valores (convergidos do passo de tempo anterior) \mathbf{F}_n^{vp} e $\boldsymbol{\alpha}_n$, do gradiente de deformação viscoplástico e da deformação viscoplástica acumulada no início do intervalo atual $(t_n, t_{n+1}]$, conhecendo o incremento do gradiente de deformação total*

$$\mathbf{F}_u \equiv \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n)^{-1} \quad (3.160)$$

e a forma explícita da função $\Theta(f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A}))_{n+1}$, resolver o sistema de equações algébricas

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\Delta \gamma \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \right) \mathbf{F}_n^{vp} \quad (3.161)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \gamma \quad (3.162)$$

$$\Delta \gamma = \frac{\Delta t}{\eta} \langle \Theta(f(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{A})) \rangle_{n+1}, \quad (3.163)$$

para as variáveis \mathbf{F}_{n+1}^{vp} , $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ e $\Delta \gamma \geq 0$, com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \mathcal{C} : \mathbf{E}_{n+1}^e \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1} = (\sigma_{\infty} - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta \alpha_{n+1})] + H \alpha_{n+1}. \quad (3.164)$$

3.10.6 Algoritmo de Predição Elástica/Correção Viscoplástica

Com base na abordagem da Seção 3.8, segue o algoritmo de predição elástica/correção viscoplástica para o modelo J_2 em grandes deformações.

(a) **Etapa de tentativa elástica.** Nesta etapa assume-se que

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = 0 \quad (3.165)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0. \quad (3.166)$$

O que dá origem ao *estado de tentativa elástica*

$$(\mathbf{F}_{n+1}^{vp})^t = \mathbf{F}_n^{vp} \quad (3.167)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^t = \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (3.168)$$

O correspondente gradiente de deformação elástica é determinado por

$$(\mathbf{F}_{n+1}^e)^t = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}. \quad (3.169)$$

Visto que a lei elástica é dada em função de \mathbf{E}^e , calcula-se

$$(\mathbf{C}_{n+1}^e)^t = [(\mathbf{F}_{n+1}^e)^t]^T (\mathbf{F}_{n+1}^e)^t, \quad (3.170)$$

a fim de determinar o tensor de deformação logarítmica

$$(\mathbf{E}_{n+1}^e)^t = \frac{1}{2} \ln [(\mathbf{C}_{n+1}^e)^t]. \quad (3.171)$$

Em seguida, são calculadas as *forças termodinâmicas tentativas*

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^t = \mathcal{C} : (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1}^t = (\sigma_\infty - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta \alpha_{n+1}^t)] + H \alpha_{n+1}^t. \quad (3.172)$$

E então, verifica-se se o estado tentativa elástica pertence de fato ao domínio elástico atual, isto é, se

$$f_{n+1}^t = \left\| (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A_{n+1}^t] \leq 0. \quad (3.173)$$

Se isto for verdade, então atualiza-se

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^t \quad (3.174)$$

e o algoritmo é finalizado, passando para o próximo incremento de tempo. Caso contrário, passa-se à etapa de correção viscoplástica, ou mapeamento de retorno.

(a) **Etapa de correção viscoplástica.** Nesta etapa são solucionadas as Eqs.(3.103), (3.96) e (3.97), particularizadas ao modelo J_2 , isto é,

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t - \Delta \gamma \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\left\| \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D \right\|} \quad (3.175)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \quad (3.176)$$

$$f(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A_{n+1}] = \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma), \quad (3.177)$$

com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \mathcal{C} : \mathbf{E}_{n+1}^e \quad \text{e} \quad (A_k)_{n+1} = (\sigma_\infty - \sigma_y) [1 - \exp(-\delta\alpha_{n+1})] + H\alpha_{n+1}. \quad (3.178)$$

para \mathbf{E}_{n+1}^e , α_{n+1} e $\Delta\gamma > 0$. A solução se dá por meio do método de *Newton-Raphson*, mostrado na Seção 2.9.

Correção Viscoplastica com Uma Única Equação

De forma semelhante à Seção 2.11, o problema de mapeamento de retorno (3.175)-(3.177) é reduzido a uma única equação. Primeiramente, divide-se o tensor de deformação elástica \mathbf{E}^e em suas partes volumétrica \mathbf{E}_v^e e desviadora \mathbf{E}_d^e , isto é,

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{E}_v^e + \mathbf{E}_d^e, \quad (3.179)$$

com

$$\mathbf{E}_v^e = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}. \quad (3.180)$$

Os termos \mathbf{E}_v^e e \mathbf{E}_d^e se relacionam, respectivamente à tensão $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D = 2G\mathbf{E}_d^e \quad (3.181)$$

$$\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{I} = 9\kappa\mathbf{E}_v^e \Rightarrow \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = 3\kappa \text{tr}(\mathbf{E}^e), \quad (3.182)$$

onde, G é o módulo de cisalhamento, Eq.(2.192), e κ é o módulo volumétrico (*bulk modulus*), Eq.(2.193).

Agora, dividindo a Eq.(3.175) em suas partes volumétrica e desviadora, mostra-se que (Eterovic e Bathe, 1990; Weber e Anand, 1990)

$$(\mathbf{E}_v^e)_{n+1} = (\mathbf{E}_v^e)_{n+1}^t \quad (3.183)$$

$$(\mathbf{E}_d^e)_{n+1} = (\mathbf{E}_d^e)_{n+1}^t - \Delta\gamma \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|}, \quad (3.184)$$

as quais, ficam expressas em termos de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, respectivamente, como

$$\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) = \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^t) \quad (3.185)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D = (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t - \Delta\gamma 2G \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|}, \quad (3.186)$$

nota-se então, assim como no caso de deformações infinitesimais, que no modelo J_2 em grandes deformações o mapeamento de retorno se dá apenas na parte desviadora de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$.

Manipulando a Eq.(3.186) é possível mostrar que $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D$ e $(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t$ são tensores “colineares”, isto é,

$$\frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} = \frac{(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t}{\|(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t\|}, \quad (3.187)$$

e assim, levando ao seguinte resultado

$$\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\| = \left\| (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t \right\| - \Delta\gamma 2G. \quad (3.188)$$

Empregando as Eqs.(3.176) e (3.188) na função de escoamento (3.177), chega-se a

$$f(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \left\| (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t \right\| - \Delta\gamma 2G - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_y + A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) \right], \quad (3.189)$$

com

$$A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) \equiv A(\alpha_{n+1}) \equiv A_{n+1}. \quad (3.190)$$

Definindo (3.189) como uma função de $\Delta\gamma$ em t_{n+1} , tal que,

$$F_{n+1}(\Delta\gamma) \equiv \left\| (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t \right\| - \Delta\gamma 2G - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_y + A \left(\alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) \right], \quad (3.191)$$

e utilizando a função $\hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma)$ da Eq.(3.177), obtém-se a seguinte equação escalar a ser resolvida para $\Delta\gamma > 0$,

$$F_{n+1}(\Delta\gamma) - \hat{\Theta}^{-1}(\Delta\gamma) = 0. \quad (3.192)$$

Após a solução de (3.192), aqui utilizando o método de *Newton-Raphson*, atualizam-se as quantidades em t_{n+1}

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D = (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t - \Delta\gamma 2G \frac{(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t}{\|(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t\|} \quad (3.193)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^t) \mathbf{I} \quad (3.194)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (\mathbf{R}_{n+1}^e)^t \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} \left[(\mathbf{R}_{n+1}^e)^t \right]^T \quad (3.195)$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \quad (3.196)$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = (\mathbf{E}_{n+1}^e)^t - \Delta\gamma \frac{(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t}{\|(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t\|} \quad (3.197)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \quad (3.198)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\Delta\gamma \frac{(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t}{\|(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D)^t\|} \right) \mathbf{F}_n^{vp}. \quad (3.199)$$

3.10.7 Operador Tangente

A particularização do operador tangente $\tilde{\mathcal{D}}$, Eqs.(3.126), (3.127) e (3.128), para o modelo viscoplástico com critério de escoamento J_2 fornece

$$\tilde{\mathcal{D}}_{J_2} = \left[(\bar{\mathcal{D}}_{J_2})^{-1} + (\hat{\mathcal{D}}_{J_2})^{-1} \right]^{-1}, \quad (3.200)$$

onde

$$(\bar{\mathcal{D}}_{J_2})^{-1} \equiv \frac{1}{\frac{\partial \hat{\Theta}^{-1}}{\partial \Delta\gamma}} \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \otimes \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \right), \quad (3.201)$$

e

$$(\hat{\mathcal{D}}_{J_2})^{-1} \equiv \mathcal{C}^{-1} + \frac{\Delta\gamma}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \left[\mathbf{II} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \otimes \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \right]. \quad (3.202)$$

Considerando um material isotrópico, para o qual \mathcal{C} é dado em (2.136), conhecendo (2.192) e (2.193), o termo $(\hat{\mathcal{D}}_{J_2})^{-1}$ se torna

$$(\hat{\mathcal{D}}_{J_2})^{-1} \equiv \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}G \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2G\mathbf{II} \right]^{-1} + \frac{\Delta\gamma}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \left[\mathbf{II} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \otimes \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \right]. \quad (3.203)$$

Assim, define-se o operador tangente para o modelo viscoplástico com critério de escoamento J_2 .

4 PROBLEMA DE VALOR NO CONTORNO E INICIAL - PNCI E ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Com a definição do problema constitutivo de valor inicial, da estratégia de solução numérica, bem como da atualização das variáveis em t_{n+1} para o *problema local*, nos Capítulos 2 e 3. Agora, define-se o *problema de valor no contorno global*, primeiramente utilizando a chamada *formulação forte* e em seguida sua forma integral, *formulação fraca*, obtida a partir do *princípio dos trabalhos virtuais*. Adota-se uma *formulação Lagrangiana Total*, onde as expressões são dadas na configuração de referência Ω_0 . Para o caso de pequenas deformações é possível atribuir $\mathbf{P} \approx \boldsymbol{\sigma}$, $dV \approx dv$ e $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}}$ (Ogden, 1997; Spencer, 2004).

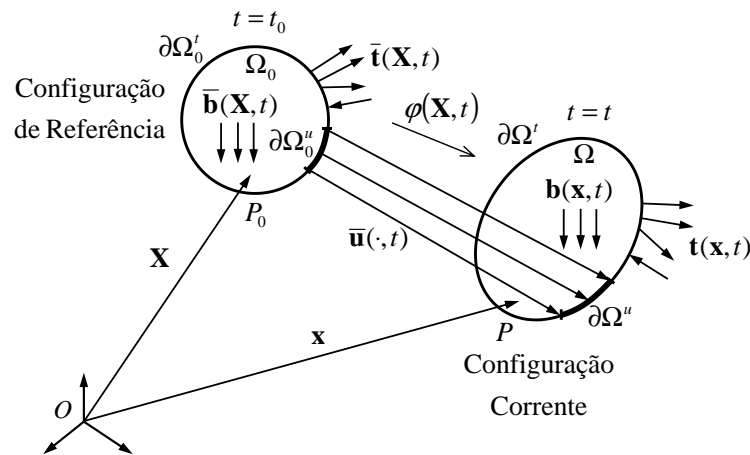


Figura 4.1: Problema de valor no contorno e inicial.

4.1 Descrição do Problema

Seja um corpo \mathcal{B} , mostrado na Figura 4.1, sujeito a um histórico de forças de corpo prescritas

$$\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, t) : \Omega_0 \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (4.1)$$

As seguintes condições de contorno são prescritas em \mathcal{B} :

(i) **Condições de contorno naturais.** A história das trações superficiais

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) : \partial\Omega_0^N \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (4.2)$$

é prescrita sobre a porção natural do contorno de Ω_0 , denotada $\partial\Omega_0^N$.

(ii) **Condições de contorno essenciais.** O movimento é prescrito no contorno essencial de Ω_0 , denotado por $\partial\Omega_0^E$, onde é conhecida a função $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) : \partial\Omega_0^E \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ver Eq.(1.1),

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad (4.3)$$

sendo $\bar{\mathbf{u}}$ o campo de deslocamentos prescritos em $\partial\Omega_0^E$. Assume-se que

$$\partial\Omega_0^E \cup \partial\Omega_0^N = \partial\Omega_0, \quad (4.4)$$

e

$$\partial\Omega_0^E \cap \partial\Omega_0^N = \emptyset. \quad (4.5)$$

O conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathcal{K} é definido como o conjunto de todas as funções deslocamento suficientemente regulares que satisfaçam as condições de contorno essenciais, isto é,

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{u} : \Omega_0 \times (t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), t \in (t_0, T], \mathbf{X} \in \partial\Omega_0^E \}. \quad (4.6)$$

Considera-se que o material de \mathcal{B} possa ser descrito pelo modelo constitutivo da termodinâmica de variáveis internas e que seja conhecido o conjunto $\boldsymbol{\alpha}$ no instante inicial t_0 , tal que

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}, t_0) = \boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{X}). \quad (4.7)$$

Tendo realizado esta descrição, a seguir coloca-se o PVCI, primeiramente em sua forma forte e posteriormente em sua forma fraca.

4.2 Formulação Forte

A forma forte do problema está baseada na equação de equilíbrio obtida a partir do *princípio da conservação do momento linear*¹, sendo enunciada conforme o que segue.

Problema 4.1. *Encontre uma função de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, tal que, para todo $t \in$*

¹O *princípio da conservação do momento linear*, $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} da$, implica nas seguintes equações de equilíbrio (com $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{0}$): $\text{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$ em Ω , sujeita a $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ em $\partial\Omega$, para a configuração corrente, e $\text{div}_X(\mathbf{P}) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ em Ω_0 , sujeita a $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \mathbf{N}$ em $\partial\Omega_0$, para a configuração de referência (Gurtin, 1981; Spencer, 2004).

$(t_0, T]$ a seguinte equação diferencial seja satisfeita

$$\operatorname{div}_X [\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ em } \Omega_0 \times (t_0, T], \quad (4.8)$$

sujeita às condições de contorno

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \partial\Omega_0^N \times (t_0, T] \quad (4.9)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \partial\Omega_0^E \times (t_0, T]. \quad (4.10)$$

Para deformações infinitesimais o Problema 4.1 é reescrito segundo o Problema 4.2.

Problema 4.2. *Encontre uma função de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, tal que, para todo $t \in (t_0, T]$ a seguinte equação diferencial seja satisfeita*

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)] + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ em } \Omega_0 \times (t_0, T] \quad (4.11)$$

sujeita às condições de contorno

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \partial\Omega_0^N \times (t_0, T] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \text{ em } \partial\Omega_0^E \times (t_0, T]. \quad (4.13)$$

4.3 Formulação Fraca

A solução analítica da formulação forte, mostrada na seção anterior, é possível somente em situações onde se tenha geometria, material, história de carregamentos e condições de contorno muito simples, o que geralmente não ocorre. Para casos complexos é necessário recorrer a métodos numéricos para a solução do PVCI (Problema 4.1 ou Problema 4.2). Normalmente, a aplicação de tais métodos requer que o problema seja colocado em uma forma integral, chamada de formulação fraca², que pode ser obtida a partir de um princípio variacional. Aqui emprega-se o *princípio dos trabalhos virtuais* (PTV), geralmente utilizado como ponto de partida para a formulação discreta de métodos numéricos baseados em deslocamentos, para a análise de sólidos elásticos ou inelásticos, por exemplo, o *método dos elementos finitos* (MEF) (Bonet e Wood, 1997; de Souza Neto et al., 2008; Kawahara, 1975; Simo e Hughes, 1998).

A forma fraca do Problema 4.1 é dada no Problema 4.3.

Problema 4.3. *Encontre uma função de deslocamento estaticamente admissível, $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{K}$, tal que, para todo $t \in (t_0, T]$ a equação do trabalho virtual $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ seja*

²O grau de regularidade da solução da forma fraca é menor que o da solução original, da forma forte. Para detalhes ver Hughes (2000), Reddy (1986, 2002) e Zienkiewicz e Taylor (2000a). A prova da equivalência entre as formulações forte e fraca pode ser encontrada em de Souza Neto et al. (2008, p.77) e Simo e Hughes (1998, p.25), por exemplo.

satisfeita³

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (4.14)$$

Sendo⁴

$$\mathcal{V} = \{ \boldsymbol{\eta} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = 0, \mathbf{X} \in \partial\Omega_0^E \}, \quad (4.15)$$

o espaço dos deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis, satisfazendo as condições de contorno essenciais, (4.10) ou (4.13). Ainda, repare que \mathbf{P} é função de $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$.

A versão para deformações infinitesimais do Problema 4.3 é dada no Problema 4.4.

Problema 4.4. *Encontre uma função de deslocamento estaticamente admissível, $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{K}$, tal que, para todo $t \in (t_0, T]$ a equação do trabalho virtual $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ seja satisfeita*

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (4.16)$$

Observa-se que $\boldsymbol{\sigma}$ também é função de $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ ⁵.

Na definição das formas fracas não foi especificado o material utilizado, pois o princípio dos trabalhos virtuais é válido a qualquer relação constitutiva (Dym e Shames, 1973; Reddy, 1986, 2002).

4.4 Problema de Valor no Contorno Incremental

Para a solução de (4.14) ou (4.16) é necessário conhecer o modelo constitutivo que relaciona as tensões, seja \mathbf{P} ou $\boldsymbol{\sigma}$, a \mathbf{u} . Sabe-se que em materiais elasto-(visco)plásticos as tensões não são definidas somente pelo valor instantâneo, mas sim dependem da história das deformações às quais o corpo é submetido. Modelos constitutivos elasto-(visco)plásticos são exemplos de materiais dependentes de caminho (*path-dependent materials*) (Coleman e Gurtin, 1967; Perzyna, 1971).

Os valores para as tensões podem ser calculados a partir da solução de um problema constitutivo de valor inicial colocado localmente, ver Seção 2.6 para pequenas deformações ou Seção 3.6 para grandes deformações. Para a solução do problema de valor inicial adota-se um método de integração implícita, como mostrado na Seção 2.7 para pequenas deformações ou na Seção 3.7 para grandes deformações, onde o intervalo de tempo $(t_0, T]$

³ $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ é o funcional do trabalho virtual e também pode ser visto como resíduo quando a equação de equilíbrio na forma fraca, Eq.(4.14), não for satisfeita.

⁴Para (visco)plasticidade com endurecimento, para t – fixo, se tem $\mathcal{K} \subset \mathbb{H}^1(\Omega_0)$ e $\mathcal{V} \subset \mathbb{H}^1(\Omega_0)$, onde $\mathbb{H}^1(\Omega_0)$ representa o espaço de *Sobolev* de funções que possuem derivadas quadrado-integráveis, ver (Hughes, 2000) e (Simo e Hughes, 1998).

⁵Foram omitidas as dependências de \mathbf{P} , $\boldsymbol{\eta}$, $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ em (4.14), e de $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\eta}$, \mathbf{b} e \mathbf{t} em (4.16) para simplificar a notação.

é discretizado em N subintervalos $(t_n, t_{n+1}]$, isto é,

$$(t_0, T] = \bigcup_{n=1}^N (t_n, t_{n+1}]. \quad (4.17)$$

Considera-se que o conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}_n$ em t_n seja conhecido e que o estado local neste instante satisfaça a forma fraca do equilíbrio, Eq.(4.14) ou Eq.(4.16). Assim, conhecendo-se o incremento $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{X})$ e por sua vez as deformações totais, \mathbf{F}_{n+1} ou $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, o algoritmo de integração local retorna os valores aproximados para \mathbf{P} ou $\boldsymbol{\sigma}$ em t_{n+1} , tal que

$$\mathbf{P}_{n+1} = \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_n) \quad (4.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_n). \quad (4.19)$$

Estes valores de tensão convergem à solução exata à medida em que $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{X})$ é reduzido. Dentro do subintervalo $(t_n, t_{n+1}]$ a lei constitutiva numérica se torna independente de caminho, isto é, as tensões são funções apenas dos valores das deformações totais em t_{n+1} , uma vez que $\boldsymbol{\alpha}_n$ permanece constante em $(t_n, t_{n+1}]$ (de Souza Neto et al., 2008, p.95).

Para Deformações Finitas. Definidas as hipóteses para a versão incremental da lei constitutiva, para deformações finitas, reescreve-se o Problema 4.3 conforme o Problema 4.5.

Problema 4.5. *Dado o conjunto $\boldsymbol{\alpha}_n$ de variáveis internas em t_n , convergido do passo anterior, encontre o campo de deslocamentos, $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{X}) \in \mathcal{K}_{n+1}$, tal que,*

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_{n+1} : \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (4.20)$$

Com

$$\mathcal{K}_{n+1} = \{ \mathbf{u} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \partial\Omega_0^E \}, \quad (4.21)$$

onde, $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ é a condição de contorno essencial no instante t_{n+1} .

Para Deformações Infinitesimais. Agora, para deformações infinitesimais, reescreve-se o Problema 4.4 conforme o Problema 4.6.

Problema 4.6. *Dado o conjunto $\boldsymbol{\alpha}_n$ de variáveis internas em t_n , convergido do passo anterior, encontre o campo de deslocamentos, $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{X}) \in \mathcal{K}_{n+1}$, tal que,*

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (4.22)$$

4.5 Linearização do Trabalho Virtual

As Eqs.(4.14) e (4.16), para relações constitutivas não lineares, apresentam características de não linearidade e assim, a solução do problema de valor no contorno requer a linearização do funcional $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$. Para tal utiliza-se o conceito de *derivada direcional* (*Gateaux*).

Derivada Direcional (*Gateaux*). Assumindo que $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ seja suficientemente regular, em (4.14) ou (4.16), supondo que $\mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})$ em t_0 seja conhecido e que pretende-se encontrar a solução \mathbf{u} , tal que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.23)$$

Expandindo em série de *Taylor* em torno de \mathbf{u}_0 , truncando no termo de primeira ordem se tem

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \\ \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) &\approx \mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}) + D\mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})[\hat{\mathbf{u}}] = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

o que resulta

$$D\mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})[\hat{\mathbf{u}}] = -\mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.25)$$

onde, $D\mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})[\hat{\mathbf{u}}]$ é a derivada direcional (*Gateaux*) de \mathcal{R} em \mathbf{u}_0 na direção de $\hat{\mathbf{u}}$, denotada por (Bonet e Wood, 1997; de Souza Neto et al., 2008; Simo e Hughes, 1998)

$$D\mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})[\hat{\mathbf{u}}] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) \right|_{\epsilon=0}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (4.26)$$

Para deformações finitas. A aplicação de $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ obtido para o problema de deformações finitas, Eq.(4.14), em (4.26) fornece⁶

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega_0} \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0} : \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta} dV, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.27)$$

como $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})$, então⁷

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_0} : \left. \frac{d}{d\epsilon} \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.28)$$

a linearidade do operador $\nabla_{\mathbf{X}}$ permite escrever

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0} = \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.29)$$

⁶O segundo e o terceiro termo em (4.14) não dependem de \mathbf{u} .

⁷Sabe-se que $\frac{d\mathbf{P}}{d(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})} = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{F}}$, uma vez que $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + \mathbf{I}$.

A substituição das duas últimas equações em (4.27) fornece

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega_0} \left. \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_0} : \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{u}} : \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\eta} dV, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.30)$$

onde, $\left. \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_0}$ é o módulo tangente contínuo \mathcal{C}^d , Eq.(3.105), definido em \mathbf{u}_0 .

Para deformações infinitesimais. Aplicando a definição de $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ para o caso infinitesimal, Eq.(4.16), na expressão (4.26), chega-se a⁸

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega_0} \left. \frac{d}{d\epsilon} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.31)$$

como $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\nabla^s \mathbf{u})$, então

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\mathbf{u}_0} : \left. \frac{d}{d\epsilon} \nabla^s(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0}, \quad (4.32)$$

a linearidade do operador ∇^s permite escrever

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \nabla^s(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) \right|_{\epsilon=0} = \nabla^s \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.33)$$

Empregando estas duas últimas equações em (4.31), obtém-se

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}) \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega_0} \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\mathbf{u}_0} : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (4.34)$$

O termo $\left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\mathbf{u}_0}$ é o módulo tangente contínuo \mathcal{C}^d , Eq.(2.106), em \mathbf{u}_0 .

4.6 Método de *Newton-Raphson*

Assim como no problema local, conforme Seção 2.9, para a solução de $\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\eta})$, Eq.(4.20) ou Eq.(4.22), utiliza-se o método de *Newton-Raphson*, esquematizado a seguir.

Seja

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n, \quad k = 0, \quad (4.35)$$

onde, k denota o número da iteração do método de *Newton-Raphson*, \mathbf{u}_n é a solução convergida do subintervalo de tempo anterior. Para uma iteração k , pretende-se determinar $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$, tal que

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}.$$

⁸O segundo e o terceiro termo em (4.16) não dependem de \mathbf{u} .

Utilizando a linearização feita na Seção 4.5, tomando a Eq.(4.25), se tem

$$D\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] = -\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.36)$$

Para deformações finitas. Utilizando a Eq.(4.30) em (4.36), obtém-se

$$D\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] = \int_{\Omega_0} \left. \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k} : \nabla_{\mathbf{x}} (\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta} dV, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.37)$$

onde, o termo

$$\left(\tilde{\mathcal{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k \equiv \left. \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{F}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k}, \quad (4.38)$$

é o módulo tangente consistente viscoplástico definido em \mathbf{u}_{n+1}^k . Para deformações finitas a forma geral de $\left(\tilde{\mathcal{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k$ é dada em (3.109). Sua particularização ao modelo J_2 é feita quando o operador tangente $\tilde{\mathcal{D}}$ é calculado segundo a Eq.(3.202).

Então, a equação incremental do trabalho virtual linearizada, para deformações finitas, considerando uma iteração k , é dada como

$$\int_{\Omega_0} \left(\tilde{\mathcal{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k : \nabla_{\mathbf{x}} (\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta} dV = -\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.39)$$

com

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_{n+1}^k : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dA, \quad (4.40)$$

que deve ser resolvida para $\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k$. Vale lembrar que $\mathbf{u}_{n+1}^k, \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$.

Para deformações infinitesimais. Fazendo uso de (4.34), reescreve-se (4.36) como

$$D\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] = \int_{\Omega_0} \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k} : \nabla^s (\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.41)$$

onde, define-se

$$\left(\tilde{\mathcal{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k \equiv \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k}, \quad (4.42)$$

o módulo tangente consistente viscoplástico dado em \mathbf{u}_{n+1}^k . Para o problema de deformações infinitesimais $\left(\tilde{\mathcal{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k$ é calculado pela Eq.(2.110) e particularizado ao critério de escoamento J_2 em (2.221).

Agora, a equação incremental do trabalho virtual linearizada, para deformação infini-

tesimais na iteração k , é dada como

$$\int_{\Omega_0} \left(\tilde{\mathcal{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k : \nabla^s (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV = -\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (4.43)$$

com

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k : \nabla^s \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} dA \quad (4.44)$$

que deve ser resolvida para $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$.

Uma vez obtida a solução $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$, então se faz

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} \leftarrow \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k. \quad (4.45)$$

E assim, calcula-se o resíduo $\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\eta})$, se este for menor que a tolerância e_{tol} , isto é, se

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\eta}) < e_{tol}, \quad (4.46)$$

o algoritmo é finalizado e atualiza-se

$$\mathbf{u}_{n+1} \leftarrow \mathbf{u}_{n+1}^{k+1}. \quad (4.47)$$

Caso contrário se faz

$$\mathbf{u}_{n+1}^k \leftarrow \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} \quad (4.48)$$

$$k \leftarrow k + 1, \quad (4.49)$$

e o algoritmo é reiniciado.

4.7 Discretização Espacial - Método dos Elementos Finitos

As equações linearizadas (4.39) e (4.43) devem ser solucionadas para $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$. No entanto, soluções exatas para estes problemas são possíveis apenas quando se trata de um corpo com geometria, teoria constitutiva e condições de contorno muito simples. O que na grande maioria das aplicações de engenharia não ocorre. Assim, é necessário recorrer a técnicas numéricas, as quais possibilitam obter soluções aproximadas. Neste trabalho adota-se o método dos elementos finitos (MEF). Sua simplicidade e generalidade o tornam um método atrativo a uma ampla gama de problemas não lineares (Oden, 1972).

Aqui, apresenta-se uma breve descrição da aplicação do MEF à solução de problemas não lineares *quasi*-estáticos de mecânica dos sólidos. Para uma discussão mais detalhada sobre o assunto ver, por exemplo, Belytschko et al. (2000), Bonet e Wood (1997), Hughes (2000), Oden (1972) e Zienkiewicz e Taylor (2000b). Para aspectos referentes à programação e tecnologia de elementos uma referência útil é o livro de Dhatt e Touzot (1984).

Seja uma função vetorial contínua $\mathbf{a} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_d}$, onde n_d é o número de dimensões do campo vetorial \mathbf{a} . O MEF pode ser descrito como um procedimento que aproxima funções contínuas por um modelo discreto, neste caso a função $\mathbf{a}(\mathbf{X})$. Seleciona-se um número finito n_N de pontos (nós) em Ω_0 . Sendo que nestes pontos os valores de $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ são especificados. O domínio da função é representado de forma aproximada por um número finito n_e de subdomínios (elementos) $\Omega_0^{(e)}$ conectados por seus nós de fronteira, tal que,

$$\Omega_0 \approx {}^h\Omega_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_0^{(e)}. \quad (4.50)$$

A função $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ pode ser localmente aproximada em cada subdomínio $\Omega_0^{(e)}$ por meio de seus valores nodais e funções de base associadas a cada nó do elemento, tal que,

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) \approx {}^h\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_n} \mathbf{a}^i N_i^{(e)}(\mathbf{X}), \quad (4.51)$$

onde \mathbf{a}^i é o valor da função $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ para o nó i cuja coordenada é \mathbf{X}^i , isto é,

$$\mathbf{a}^i \equiv \mathbf{a}(\mathbf{X}^i). \quad (4.52)$$

O termo n_n representa o número de nós do elemento, $N_i^{(e)}(\mathbf{X})$ é chamada de *função de interpolação* associada ao nó i do elemento e^9 . Esta função possui suporte compacto, isto é, possui valor não nulo apenas sobre $\Omega_0^{(e)}$. Além disso, $N_i^{(e)}(\mathbf{X})$ é definida de forma a satisfazer a propriedade¹⁰

$$N_i^{(e)}(\mathbf{X}^j) = \delta_{ij}. \quad (4.53)$$

Ainda, a função $N_i^{(e)}(\mathbf{X})$ possui a propriedade de *partição de unidade* (PU), tal que,

$$\sum_{i=1}^{n_n} N_i^{(e)}(\mathbf{X}) = 1, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^{(e)}. \quad (4.54)$$

A aproximação global de $\mathbf{a}(\mathbf{X})$, sobre ${}^h\Omega_0$, é feita por partes (*piecewise approximation*) utilizando n_N *funções de interpolação globais* $N_i^g(\mathbf{X})$, associada a cada nó global i . Esta função é não nula apenas sobre os elementos que compartilham este mesmo nó, ver Figura 4.2. Assim, a forma aproximada de $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ sobre ${}^h\Omega_0$ é dada por

$${}^h\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_N} \mathbf{a}^i N_i^g(\mathbf{X}). \quad (4.55)$$

⁹Considera-se um elemento de classe \mathbb{C}^0 .

¹⁰O termo δ_{ij} é o delta de Kronecker, sendo: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \rightarrow & i \neq j \\ 1 \rightarrow & i = j \end{cases} \quad i, j = \{1, 2, \dots, n_n\}$.

Muitas vezes é conveniente escrever a expressão (4.55) na forma matricial

$${}^h \mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}^g(\mathbf{X}) \vec{a}, \quad (4.56)$$

onde, $\mathbf{N}^g(\mathbf{X})$ é a *matriz de interpolação global*. Para um domínio de n_d dimensões, $\mathbf{N}^g(\mathbf{X})$ é dada por

$$\mathbf{N}^g(\mathbf{X}) = [\text{diag}[N_1^g(\mathbf{X})] \text{diag}[N_2^g(\mathbf{X})] \dots \text{diag}[N_{n_N}^g(\mathbf{X})]], \quad (4.57)$$

onde, $\text{diag}[N_i^g(\mathbf{X})]$ denota uma matriz diagonal $n_d \times n_d$ definida como

$$\text{diag}[N_i^g(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} N_i^g(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_i^g(\mathbf{X}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & N_i^g(\mathbf{X}) \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

O termo \vec{a} é um vetor contendo os valores de $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ em cada nó global, tal que

$$\vec{a}^T = [a_1^1, \dots, a_{n_d}^1, \dots, a_1^{n_N}, \dots, a_{n_d}^{n_N}], \quad (4.59)$$

sendo a_i^j o i -ésimo componente do vetor \mathbf{a} referente ao nó global j .

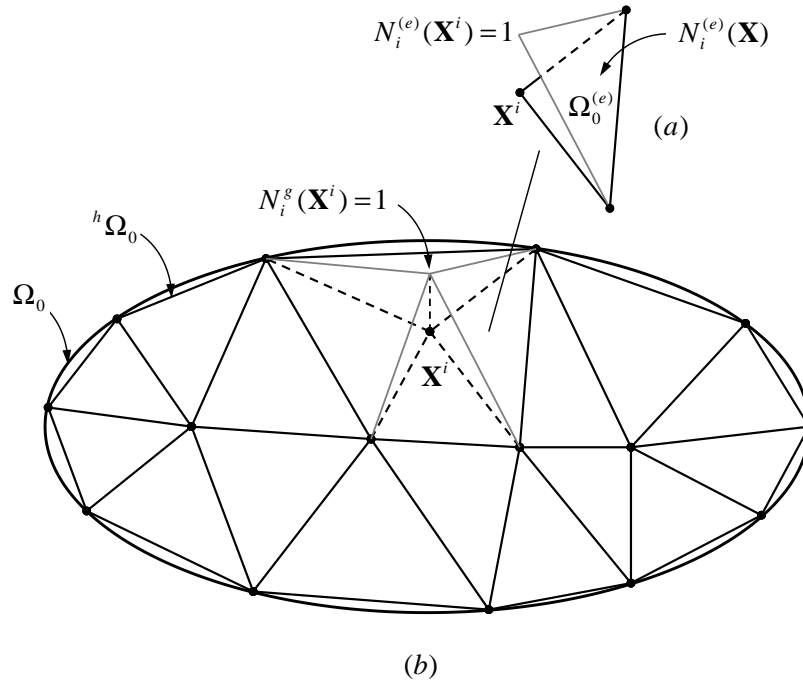


Figura 4.2: Interpolação por elementos finitos. (a) Função de interpolação local; (b) Função de interpolação global.

4.8 Discretização Espacial do Trabalho Virtual

A solução numérica de (4.39) ou (4.43) pelo MEF consiste em substituir os conjuntos funcionais \mathcal{K}_{n+1}^k e \mathcal{V} pelos respectivos conjuntos discretos ${}^h\mathcal{K}_{n+1}^k$ e ${}^h\mathcal{V}$, definidos, nesta mesma ordem, como

$${}^h\mathcal{K}_{n+1}^k \equiv \left\{ {}^h\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_N} \mathbf{u}^i N_i^g(\mathbf{X}) \mid \mathbf{u}^i = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \mathbf{X}^i \in \partial\Omega_0^E \right\}, \quad (4.60)$$

e

$${}^h\mathcal{V} \equiv \left\{ {}^h\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_N} \boldsymbol{\eta}^i N_i^g(\mathbf{X}) \mid \boldsymbol{\eta}^i = \mathbf{0}, \mathbf{X}^i \in \partial\Omega_0^E \right\}. \quad (4.61)$$

Lembrando que \mathcal{K} e \mathcal{V} referem-se aos deslocamentos e aos deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis, respectivamente.

Nota-se que a definição dos conjuntos ${}^h\mathcal{K}_{n+1}^k$ e ${}^h\mathcal{V}$ faz uso do resultado (4.55), isto é, ao substituir \mathcal{K}_{n+1}^k e \mathcal{V} por suas versões discretas em (4.39) e (4.43) assume-se que

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k(\mathbf{X}) \approx \Delta {}^h\mathbf{u}_{n+1}^k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_N} (\Delta \mathbf{u}^i)_{n+1}^k N_i^g(\mathbf{X}), \quad (4.62)$$

e

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) \approx {}^h\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_N} \boldsymbol{\eta}^i N_i^g(\mathbf{X}). \quad (4.63)$$

Ou ainda, analogamente a (4.56), as expressões (4.62) e (4.63) podem ser reescritas na forma matricial, respectivamente, como

$$\Delta {}^h\mathbf{u}_{n+1}^k(\mathbf{X}) = \mathbf{N}^g(\mathbf{X}) \Delta \vec{u}_{n+1}^k, \quad (4.64)$$

e

$${}^h\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}^g(\mathbf{X}) \vec{\eta}, \quad (4.65)$$

onde, $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$ e $\vec{\eta}$ são os *vetores globais* contendo os valores nodais de $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k(\mathbf{X})$ e $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})$, respectivamente.

As expressões matriciais são úteis para facilitar a notação utilizada na formulação e também à implementação computacional dos problemas. No entanto, as formas matriciais mostradas anteriormente referem-se a um problema com um campo de n_d dimensões e n_N pontos nodais, isto é, o problema discreto possui um total de $n_d \cdot n_N$ graus de liberdade. A seguir simplifica-se a notação com a adoção de hipóteses de estado plano de tensões/deformações e de axissimetria. Também são adotadas formas matriciais específicas para $[\nabla_{\mathbf{X}}(\cdot), \mathbf{P}]$ e $[\nabla^s(\cdot), \boldsymbol{\sigma}]$, as quais são necessárias à discretização das Eqs.(4.39) e (4.43), respectivamente.

Estado plano de tensões/deformações. Assumindo $n_d = 2$, o vetor deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ se torna

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{X}) = [u_1(\mathbf{X}), u_2(\mathbf{X})], \quad (4.66)$$

onde, $u_1(\mathbf{X})$ e $u_2(\mathbf{X})$ são os deslocamentos nas direções 1 e 2, respectivamente.

Para um campo vetorial genérico $\mathbf{a} = \mathbf{N}^g \vec{a} : {}^h\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se tem¹¹

$$\nabla^s \mathbf{a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{B}^g(\mathbf{X}) \vec{a} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ a_{1,2} + a_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla^s \mathbf{a})_{11} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{22} \\ 2(\nabla^s \mathbf{a})_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

onde,

$$\mathbf{B}^g(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} N_{1,1}^g & 0 & N_{2,1}^g & 0 & \cdots & N_{n_N,1}^g & 0 \\ 0 & N_{1,2}^g & 0 & N_{2,2}^g & \cdots & 0 & N_{n_N,2}^g \\ N_{1,2}^g & N_{1,1}^g & N_{2,2}^g & N_{2,1}^g & \cdots & N_{n_N,2}^g & N_{n_N,1}^g \end{array} \right], \quad (4.68)$$

é o *operador gradiente simétrico global* na forma discreta, onde emprega-se a notação

$$(\cdot)_{i,j} = \frac{\partial (\cdot)_i}{\partial X_j}. \quad (4.69)$$

Já o gradiente $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$ é mapeado vetorialmente como

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{G}^g(\mathbf{X}) \vec{a} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla^s \mathbf{a})_{11} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{12} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{21} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

onde,

$$\mathbf{G}^g(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} N_{1,1}^g & 0 & N_{2,1}^g & 0 & \cdots & N_{n_N,1}^g & 0 \\ N_{1,2}^g & 0 & N_{2,2}^g & 0 & \cdots & N_{n_N,2}^g & 0 \\ 0 & N_{1,1}^g & 0 & N_{2,1}^g & \cdots & 0 & N_{n_N,1}^g \\ 0 & N_{1,2}^g & 0 & N_{2,2}^g & \cdots & 0 & N_{n_N,2}^g \end{array} \right], \quad (4.71)$$

é o *operador gradiente global* na forma discreta.

Os tensores de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{P} são dados na forma vetorial, respectivamente, por

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

e

$$\mathbf{P} \rightarrow \vec{P}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

¹¹É omitido o sistema de coordenadas no qual é tomado o gradiente $\nabla^s(\cdot)$, pois aqui este é empregado em problemas com deformações infinitesimais e para estes tal distinção não se faz necessária.

Axissimetria. No desenvolvimento do modelo axissimétrico utiliza-se um sistema de coordenadas cilíndricas. A relação entre este e o sistema de coordenadas cartesiano, considerando um campo vetorial $\mathbf{a} = \mathbf{N}^g \vec{a} : {}^h\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é dada por

$$a_1 \leftrightarrow a_r, \quad a_2 \leftrightarrow a_z, \quad a_3 \leftrightarrow a_\theta \quad (4.74)$$

$$X_1 \leftrightarrow r, \quad X_2 \leftrightarrow z, \quad X_3 \leftrightarrow \theta, \quad (4.75)$$

O gradiente $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$ em coordenadas cilíndricas, adotando as hipóteses de axissimetria

$$a_r = a_r(r, z), \quad a_z = a_z(r, z), \quad a_\theta = 0, \quad (4.76)$$

é dado por

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_{r,r} & a_{r,z} & 0 \\ a_{z,r} & a_{z,z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_r}{r} \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Este, seguindo a notação matricial, pode ser expresso como

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{G}^g(\mathbf{X})\vec{a} = \begin{bmatrix} a_{r,r} \\ a_{r,z} \\ a_{z,r} \\ a_{z,z} \\ \frac{a_r}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla^s \mathbf{a})_{11} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{12} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{21} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{22} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

com

$$\mathbf{G}^g(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} N_{1,r}^g & 0 & N_{2,r}^g & 0 & \dots & N_{n_N,r}^g & 0 \\ N_{1,z}^g & 0 & N_{2,z}^g & 0 & \dots & N_{n_N,z}^g & 0 \\ 0 & N_{1,r}^g & 0 & N_{2,r}^g & \dots & 0 & N_{n_N,r}^g \\ 0 & N_{1,z}^g & 0 & N_{2,z}^g & \dots & 0 & N_{n_N,z}^g \\ \hline \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \dots & \frac{N_{n_N}}{r} & 0 \end{array} \right]. \quad (4.79)$$

Seguindo este raciocínio a parte simétrica de $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$ é mapeada da seguinte forma

$$\nabla^s \mathbf{a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{B}^g(\mathbf{X})\vec{a} = \begin{bmatrix} a_{r,r} \\ a_{z,z} \\ a_{r,z} + a_{z,r} \\ \frac{a_r}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla^s \mathbf{a})_{11} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{22} \\ 2(\nabla^s \mathbf{a})_{12} \\ (\nabla^s \mathbf{a})_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

com

$$\mathbf{B}^g(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} N_{1,r}^g & 0 & N_{2,r}^g & 0 & \dots & N_{n_N,r}^g & 0 \\ 0 & N_{1,z}^g & 0 & N_{2,z}^g & \dots & 0 & N_{n_N,z}^g \\ N_{1,z}^g & N_{1,r}^g & N_{2,z}^g & N_{2,r}^g & \dots & N_{n_N,z}^g & N_{n_N,r}^g \\ \hline \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \dots & \frac{N_{n_N}}{r} & 0 \end{array} \right]. \quad (4.81)$$

Os tensores $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{P} , dentro do contexto de axissimetria, são escritos na forma vetorial segundo os respectivos mapeamentos

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma}^T = \left[\begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} & \sigma_{33} \end{array} \right], \quad (4.82)$$

e

$$\mathbf{P} \rightarrow \vec{P}^T = \left[\begin{array}{ccccc} P_{11} & P_{12} & P_{21} & P_{22} & P_{33} \end{array} \right]. \quad (4.83)$$

4.8.1 Discretização Espacial para Deformações Infinitesimais

Utilizando os resultados anteriormente apresentados, particularmente (4.64), (4.65), (4.67) e (4.72) para problemas planos, (4.80) e (4.82) para problemas axissimétricos, a forma discretizada de (4.43), após algumas manipulações, é dada por

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{B}^g)^T \left(\tilde{\mathbf{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k \mathbf{B}^g dV \Delta \vec{u}_{n+1}^k = -\vec{R}(\vec{u}_{n+1}^k), \quad (4.84)$$

com

$$\vec{R}(\vec{u}_{n+1}^k) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}^g)^T \vec{\sigma}_{n+1}^k dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}_{n+1} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t}_{n+1} dA, \quad (4.85)$$

onde, $\tilde{\mathbf{C}}^{vp}$ é a versão matricial adequada do tensor de quarta ordem $\tilde{\mathbf{C}}^{vp}$, dado em (2.123).

Na Eq.(4.84) o termo definido como

$$\left(\vec{f}_{int} \right)_{n+1}^k \equiv \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}^g)^T \vec{\sigma}_{n+1}^k dV, \quad (4.86)$$

é chamado de *força interna global* no instante t_{n+1} na iteração k do método de *Newton-Raphson*, e o termo

$$\left(\vec{f}_{ext} \right)_{n+1} \equiv \int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}_{n+1} dV + \int_{\partial\Omega_0^N} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t}_{n+1} dA, \quad (4.87)$$

é denominado de *força externa global*, em t_{n+1} . Ainda, define-se a chamada matriz de rigidez tangente global

$$(\mathbf{K}_T)_{n+1}^k \equiv \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}^g)^T \left(\tilde{\mathbf{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k \mathbf{B}^g dV, \quad (4.88)$$

para o instante t_{n+1} na iteração k . Com isto, o incremento dos deslocamentos nodais globais $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$ é calculado por

$$\Delta \vec{u}_{n+1}^k = - \left[(\mathbf{K}_T)_{n+1}^k \right]^{-1} \left[\left(\vec{f}_{int} \right)_{n+1}^k - \left(\vec{f}_{ext} \right)_{n+1} \right]. \quad (4.89)$$

Contribuição dos elementos finitos. No contexto do método dos elementos finitos um importante aspecto a ser destacado é que é possível determinar \vec{f}_{int} , \vec{f}_{ext} e \mathbf{K}_T a partir da contribuição de cada elemento, o que é, respectivamente, expresso por

$$\vec{f}_{int} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \left(\vec{f}_{int}^{(e)} \right), \quad (4.90)$$

$$\vec{f}_{ext} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \left(\vec{f}_{ext}^{(e)} \right), \quad (4.91)$$

e

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \left(\mathbf{K}_T^{(e)} \right), \quad (4.92)$$

onde, o operador de montagem de elementos finitos, \mathbf{A} , implica que cada componente de \vec{f}_{int} , \vec{f}_{ext} e \mathbf{K}_T , associado a um nó global particular, seja obtido a partir da soma das contribuições dos elementos que compartilham este mesmo nó. Os termos $\vec{f}_{int}^{(e)}$, $\vec{f}_{ext}^{(e)}$ e $\mathbf{K}_T^{(e)}$ são calculados, respectivamente, por

$$\vec{f}_{int}^{(e)} \equiv \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \vec{\sigma}_{n+1}^k dV, \quad (4.93)$$

$$\vec{f}_{ext}^{(e)} \equiv \int_{\Omega^{(e)}} \rho_0 (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{b} dV - \int_{\partial\Omega^t(e)} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{t} dA, \quad (4.94)$$

e

$$\mathbf{K}_T^{(e)} \equiv \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \tilde{\mathbf{C}}^{vp} \mathbf{B}^{(e)} dV. \quad (4.95)$$

Para um elemento genérico e de n_n nós a *matriz de interpolação local* $\mathbf{N}^{(e)}$ é dada por

$$\mathbf{N}^{(e)}(\mathbf{X}) = \left[\text{diag} \left[N_1^{(e)}(\mathbf{X}) \right] \text{diag} \left[N_2^{(e)}(\mathbf{X}) \right] \dots \text{diag} \left[N_{n_n}^{(e)}(\mathbf{X}) \right] \right], \quad (4.96)$$

e o *operador gradiente simétrico local* $\mathbf{B}^{(e)}$ (em análises de tensões/deformações planas) tem a forma

$$\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} N_{1,1}^{(e)} & 0 & N_{2,1}^{(e)} & 0 & \dots & N_{n_n,1}^{(e)} & 0 \\ 0 & N_{1,2}^{(e)} & 0 & N_{2,2}^{(e)} & \dots & 0 & N_{n_n,2}^{(e)} \\ N_{1,2}^{(e)} & N_{1,1}^{(e)} & N_{2,2}^{(e)} & N_{2,1}^{(e)} & \dots & N_{n_n,2}^{(e)} & N_{n_n,1}^{(e)} \end{array} \right]. \quad (4.97)$$

A versão de $\mathbf{B}^{(e)}$ para problemas de axissimetria segue analogamente à expressão (4.81).

O tamanho da matriz $\mathbf{N}^{(e)}$ e características matemáticas das funções $N_i^{(e)}(\mathbf{X})$ dependem do elemento finito empregado, uma ampla gama de elementos pode ser encontrada em Dhatt e Touzot (1984). Aqui são utilizados os elementos: triangular de 6 nós, quadrilateral de 4 nós e quadrilateral de 8 nós, todos pertencentes à classe \mathbb{C}^0 .

Normalmente, no contexto de elementos finitos as Eqs.(4.93), (4.94) e (4.95) são integradas numericamente utilizando o tradicional método da *quadratura de Gauss*. Esta escolha é motivada pelo fato de que geralmente as funções de interpolação $N_i^{(e)}(\mathbf{X})$ são polinomiais, e com o número adequado de pontos de *Gauss* o método da quadratura é capaz de integrar exatamente este tipo de função, para detalhes sobre a aplicação desta técnica ao MEF ver, por exemplo, Hughes (2000) e Zienkiewicz e Taylor (2000a).

4.8.2 Discretização Espacial para Deformações Finitas

Empregando os resultados (4.64), (4.65), (4.70) e (4.73) para problemas planos, (4.78) e (4.83) para problemas axissimétricos, à Eq.(4.39), após algumas manipulações, é obtida a equação discreta

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{G}^g)^T \left(\tilde{\mathbf{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k \mathbf{G}^g dV \Delta \vec{u}_{n+1}^k = -\vec{R}(\vec{u}_{n+1}^k), \quad (4.98)$$

com

$$\vec{R}(\vec{u}_{n+1}^k) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P}_{n+1}^k dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{b}}_{n+1} dV - \int_{\partial\Omega_0^N} (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dA, \quad (4.99)$$

onde, $\tilde{\mathbf{C}}^{vp}$ é a forma matricial adequada do tensor de quarta ordem $\tilde{\mathbf{C}}^{vp}$, dado em (3.109). Agora, a *força interna global* \vec{f}_{int} , a *força externa global* \vec{f}_{ext} e a *matriz de rigidez tangente global* \mathbf{K}_T , em t_{n+1} na iteração k , são definidas, respectivamente, como

$$\left(\vec{f}_{int} \right)_{n+1}^k \equiv \int_{\Omega_0} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P}_{n+1}^k dV, \quad (4.100)$$

$$\left(\vec{f}_{ext} \right)_{n+1} \equiv \int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{b}}_{n+1} dV + \int_{\partial\Omega_0^N} (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dA, \quad (4.101)$$

e

$$(\mathbf{K}_T)_{n+1}^k \equiv \int_{\Omega_0} (\mathbf{G}^g)^T \left(\tilde{\mathbf{C}}^{vp} \right)_{n+1}^k \mathbf{G}^g dV. \quad (4.102)$$

E então, calcula-se $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$ por

$$\Delta \vec{u}_{n+1}^k = - \left[(\mathbf{K}_T)_{n+1}^k \right]^{-1} \left[\left(\vec{f}_{int} \right)_{n+1}^k - \left(\vec{f}_{ext} \right)_{n+1} \right]. \quad (4.103)$$

Semelhantemente ao que foi feito para o caso de deformações infinitesimais, em deformações finitas os termos globais \vec{f}_{int} , \vec{f}_{ext} e \mathbf{K}_T também são obtidos a partir da con-

tribuição de cada elemento finito. Para um elemento e com n_n nós (em análises de tensões/deformações planas) a matriz local $\mathbf{G}^{(e)}$ é dada por

$$\mathbf{G}^{(e)}(\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} N_{1,1}^{(e)} & 0 & N_{2,1}^{(e)} & 0 & \cdots & N_{n_n,1}^{(e)} & 0 \\ N_{1,2}^{(e)} & 0 & N_{2,2}^{(e)} & 0 & \cdots & N_{n_n,2}^{(e)} & 0 \\ 0 & N_{1,1}^{(e)} & 0 & N_{2,1}^{(e)} & \cdots & 0 & N_{n_n,1}^{(e)} \\ 0 & N_{1,2}^{(e)} & 0 & N_{2,2}^{(e)} & \cdots & 0 & N_{n_n,2}^{(e)} \end{array} \right]. \quad (4.104)$$

5 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA PROBLEMAS SIMPLES SOB DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

A seguir são apresentadas algumas soluções analíticas para problemas simples envolvendo modelos constitutivos viscoplásticos em deformações infinitesimais. Tais soluções serão posteriormente utilizadas para a avaliação da estratégia numérica implementada.

5.1 Soluções Analíticas para Casos Unidimensionais Simples

Neste tópico serão mostradas algumas soluções analíticas simples para problemas constitutivos elasto-viscoplásticos de valor inicial, empregando os modelos linear e não linear de Perzyna e o modelo de Perić, semelhante ao que é exposto em de Souza Neto et al. (2008). São derivadas as soluções para dois casos simples, o primeiro onde verifica-se a dependência da taxa de deformação na resposta em tensão e o segundo onde analisa-se o processo de relaxação de tensão sob deformação constante. Para ambos os fenômenos considera-se um problema unidimensional que, apesar de simples, será útil para analisar se o modelo numérico, implementado no contexto de elementos finitos, é capaz de fornecer uma solução aproximada à exata para o caso unidimensional.

Problema unidimensional. Considera-se uma barra unidimensional submetida a um alongamento, Figura 5.1(a), as histórias do deslocamento prescrito $\bar{u}_1(t)$ são mostradas nas Figuras 5.1(b)-(c), onde a solicitação (b) será utilizada na avaliação da dependência da taxa de deformação sobre a tensão e a solicitação (c) na avaliação da relaxação de tensão sob deformação constante. Supõe-se que a barra seja composta por um material perfeitamente viscoplástico. Utilizando o critério de escoamento J_2 , o problema constitutivo de valor inicial consiste na solução da seguinte equação de evolução, ver Eqs.(2.163) e (2.165),

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}(t) = \dot{\gamma}(t) \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}, \quad (5.1)$$

sendo

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\boldsymbol{\sigma}(t))) \rangle. \quad (5.2)$$

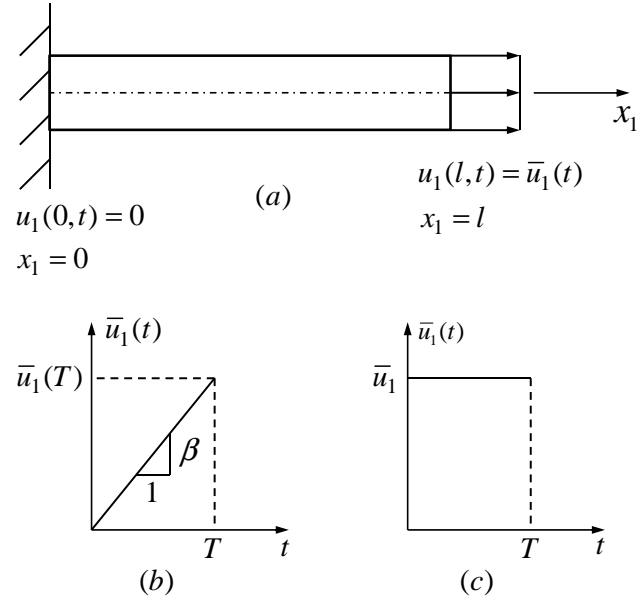


Figura 5.1: (a) Barra unidimensional em alongamento; História de $\bar{u}_1(t)$: (b) Alongamento à taxa constante; (c) Alongamento constante.

Para o problema unidimensional, denotando a tensão axial por σ , a taxa $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ se torna

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\sigma|} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}(t) \begin{bmatrix} \text{sign}(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\text{sign}(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\text{sign}(\sigma) \end{bmatrix},$$

desta última equação nota-se que $\dot{\varepsilon}_{22}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = -\nu^{vp}\dot{\varepsilon}_{11}^{vp}$, onde $\nu^{vp} = \frac{1}{2}$, o que informa que a deformação viscoplástica é isocórica. Definindo

$$\varepsilon_{11}^{vp}(t) \equiv \varepsilon^{vp}(t),$$

a Eq.(5.1), para o caso unidimensional, passa a ser

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}(t) \text{sign}(\sigma), \quad (5.3)$$

com

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\sigma(t))) \rangle. \quad (5.4)$$

5.1.1 Dependência da Taxa de Deformação na Resposta em Tensão

Aqui a barra da Figura 5.1 é submetida a um alongamento monotônico linear, solicitação (b). Considera-se que a barra esteja inicialmente indeformada e que esta seja deformada a uma taxa constante β , de forma a provocar uma tensão axial $\sigma > \sigma_y > 0$. Lembra-se que para $\sigma \leq \sigma_y$ o material apresenta um comportamento puramente elástico, isto é,

$$\sigma = E\varepsilon \text{ para } \sigma \leq \sigma_y. \quad (5.5)$$

Então, como o interesse está na evolução de ε^{vp} , considera-se que o instante inicial do problema, $t = 0$, ocorra quando $\sigma = \sigma_y$. Desse forma, o problema de valor inicial consiste em determinar $\varepsilon^{vp}(t)$, tal que

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\langle \Theta(f(\sigma(t))) \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma) \quad (5.6)$$

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0, \quad (5.7)$$

sejam satisfeitas. A função para a deformação total $\varepsilon(t)$ pode ser expressa como

$$\varepsilon(t) = \beta t + \frac{\sigma_y}{E} = \beta t + \varepsilon_y, \quad (5.8)$$

onde, $\beta \geq 0$ é a taxa de deformação e ε_y é deformação de escoamento.

Modelo Linear de Perzyna. No modelo linear de Perzyna, conforme Eq.(2.211), a função de fluxo viscoplástico, para o caso unidimensional sem endurecimento, é dada por

$$\Theta(f(\sigma(t))) = f(\sigma(t)) = \sqrt{\frac{2}{3}} (|\sigma(t)| - \sigma_y), \quad (5.9)$$

Assim, para $\sigma > 0$ e $f(\sigma(t)) > 0$, a Eq.(5.6) se torna

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{f(\sigma(t))}{\eta} = \frac{2}{3} \frac{\sigma(t) - \sigma_y}{\eta} \quad (5.10)$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \frac{2E}{3\eta} [\varepsilon(t) - \varepsilon^{vp}(t) - \varepsilon_y]. \quad (5.11)$$

Utilizando a expressão (5.8), chega-se ao problema de valor inicial para o modelo linear de Perzyna. O qual consiste em encontrar $\varepsilon^{vp}(t)$, que satisfaça

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \frac{E}{\bar{\eta}} [\beta t - \varepsilon^{vp}(t)], \quad (5.12)$$

com

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0. \quad (5.13)$$

Onde $\bar{\eta} = \frac{3}{2}\eta$. A solução para o problema (5.12)-(5.13) é dada por

$$\varepsilon^{vp}(t) = \beta \left\{ t - \frac{\bar{\eta}}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\bar{\eta}}t\right) \right] \right\}. \quad (5.14)$$

Sabendo que $\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \varepsilon^{vp}(t)]$, a partir de (5.8) e (5.14) encontra-se uma expressão para a tensão

$$\sigma(t) = \sigma_y + \bar{\eta}\beta \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\bar{\eta}}t\right) \right]. \quad (5.15)$$

Rearranjando a Eq.(5.8), se tem o tempo em função de $\varepsilon(t)$

$$t = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_y}{\beta}, \quad (5.16)$$

e com isso, obtém-se a seguinte expressão para a relação $\sigma - \varepsilon$

$$\sigma(t) = \sigma_y + \bar{\eta}\beta \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{E}{\bar{\eta}\beta}(\varepsilon(t) - \varepsilon_y)\right] \right\}, \quad (5.17)$$

onde observa-se explicitamente a dependência da taxa de deformação β sobre a resposta em tensão $\sigma(t)$.

Modelo Não Linear de Perzyna. Para este modelo, segundo Eq.(2.214), a função $\Theta(f(\sigma(t)))$ se torna

$$\Theta(f(\sigma(t))) = \left[\frac{f(\sigma(t))}{\sigma_y} \right]^m = \left[\frac{|\sigma(t)| - \sigma_y}{\sigma_y} \right]^m = \left[\frac{|\sigma(t)|}{\sigma_y} - 1 \right]^m. \quad (5.18)$$

O que permite reescrever a Eq.(5.6) como (com $\sigma > 0$)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{vp}(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\eta} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_y} - 1 \right]^m \\ \dot{\varepsilon}^{vp}(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\eta} \left[\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^{vp}(t) - \varepsilon_y}{\varepsilon_y} \right]^m \end{aligned} \quad (5.19)$$

pela Eq.(5.8) se tem

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\eta} \left[\frac{\beta t - \varepsilon^{vp}(t)}{\varepsilon_y} \right]^m. \quad (5.20)$$

E assim, o problema de valor inicial, para o modelo não linear de Perzyna, consiste em encontrar $\varepsilon^{vp}(t)$, tal que

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \frac{E}{\bar{\eta}} \left[\frac{\beta t - \varepsilon^{vp}(t)}{\varepsilon_y} \right]^m \quad (5.21)$$

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0. \quad (5.22)$$

Onde $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\eta$. Para simplificar adota-se $m = 2$, mantendo a não linearidade na dependência da taxa β . Então, para o problema (5.21)-(5.22), a solução é

$$\varepsilon^{vp}(t) = \beta t - \tanh\left(\frac{\sqrt{\tilde{\eta}\beta}}{\tilde{\eta}\varepsilon_y}t\right)\sqrt{\tilde{\eta}\beta}\varepsilon_y. \quad (5.23)$$

Para a qual, chega-se à seguinte relação $\sigma - \varepsilon$

$$\sigma(t) = \sigma_y \left\{ 1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{\tilde{\eta}\beta}}{\tilde{\eta}\beta\varepsilon_y}(\varepsilon(t) - \varepsilon_y)\right] \sqrt{\tilde{\eta}\beta} \right\}. \quad (5.24)$$

Modelo de Perić. No modelo de Perić, ver Eq.(2.218), a função $\Theta(f(\sigma(t)))$ assume a forma (Perić, 1993)

$$\Theta(f(\sigma(t))) = \left[\frac{f(\sigma(t)) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y} \right]^m - 1 = \left[\frac{|\sigma(t)|}{\sigma_y} \right]^m - 1. \quad (5.25)$$

Empregando esta última em (5.6), chega-se a (com $\sigma > 0$)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{vp}(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\eta} \left\{ \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_y} \right]^m - 1 \right\} \\ \dot{\varepsilon}^{vp}(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\eta} \left\{ \left[\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^{vp}(t)}{\varepsilon_y} \right]^m - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

utilizando (5.8)

$$\varepsilon^{vp}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\eta} \left\{ \left[\frac{\beta t + \varepsilon_y - \varepsilon^{vp}(t)}{\varepsilon_y} \right]^m - 1 \right\}.$$

O que leva ao seguinte problema de valor inicial. Determinar $\varepsilon^{vp}(t)$, de modo a satisfazer

$$\varepsilon^{vp}(t) = \frac{1}{\tilde{\eta}} \left\{ \left[\frac{\beta t + \varepsilon_y - \varepsilon^{vp}(t)}{\varepsilon_y} \right]^m - 1 \right\} \quad (5.27)$$

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0. \quad (5.28)$$

Onde $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\eta$. Assim como no modelo anterior, atribui-se $m = 2$. E então, o problema (5.27)-(5.28) é solucionado por

$$\varepsilon^{vp}(t) = \beta t + \varepsilon_y - \tanh\left\{ \frac{1}{\tilde{\eta}\varepsilon_y} \left[t\sqrt{1 + \tilde{\eta}\beta} + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\eta}\beta}}\right)\tilde{\eta}\varepsilon_y \right] \right\} \varepsilon_y \sqrt{1 + \tilde{\eta}\beta}. \quad (5.29)$$

A partir desta solução, é obtida a seguinte expressão para $\sigma - \varepsilon$

$$\sigma(t) = \tanh \left\{ \frac{1}{\tilde{\eta}\beta\varepsilon_y} \left[\sqrt{1 + \tilde{\eta}\beta} (\varepsilon(t) - \varepsilon_y) + \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\eta}\beta}} \right) \tilde{\eta}\beta\varepsilon_y \right] \right\} \sigma_y \sqrt{1 + \tilde{\eta}\beta}. \quad (5.30)$$

5.1.2 Relaxação de Tensão sob Deformação Constante

Agora, a barra da Figura 5.1 é alongada instantaneamente, solicitação (c), de forma a obter uma deformação total $\varepsilon - \text{cte}$, produzindo uma tensão $\sigma > \sigma_y > 0$. Sob este alongamento instantâneo, utilizando resultados do fenômeno apresentado na Seção 5.1.1, assume-se que a deformação viscoplástica ε^{vp} seja nula em $t = 0$, tal que, nesse mesmo instante

$$\sigma(0) = \sigma_0 = E\varepsilon. \quad (5.31)$$

Isto é, a deformação ε aplicada instantaneamente provoca um comportamento puramente elástico no material, em $t = 0$. Assim, a tensão na barra será governada por

$$\sigma(t) = E[\varepsilon - \varepsilon^{vp}(t)] = \sigma_0 - E\varepsilon^{vp}(t), \quad (5.32)$$

onde, a evolução de $\varepsilon^{vp}(t)$ se dá de acordo com a Eq.5.1, que a seguir é particularizada para os diferentes modelos viscoplásticos.

Modelo Linear de Perzyna. Tendo e vista as Eqs.(5.10) e (5.32), o problema de valor inicial referente ao fenômeno de relaxação de tensão para o modelo linear de Perzyna fica definido pelo que segue. Determinar $\varepsilon^{vp}(t)$ que satisfaça

$$\dot{\varepsilon}^{vp}(t) = \frac{1}{\bar{\eta}} [\sigma_0 - E\varepsilon^{vp}(t) - \sigma_y] \quad (5.33)$$

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0. \quad (5.34)$$

Onde $\bar{\eta} = \frac{3}{2}\eta$. O problema (5.33)-(5.34) é solucionado por

$$\varepsilon^{vp}(t) = \frac{1}{E} (\sigma_0 - \sigma_y) \left[1 - \exp \left(-\frac{E}{\bar{\eta}} t \right) \right]. \quad (5.35)$$

Substituindo essa solução em (5.34), obtém-se a expressão para a evolução de σ

$$\sigma(t) = \sigma_y + (\sigma_0 - \sigma_y) \exp \left(-\frac{E}{\bar{\eta}} t \right). \quad (5.36)$$

Modelo Não Linear de Perzyna. Neste caso, utilizando (5.19) e (5.32) escreve-se o problema. Encontrar $\varepsilon^{vp}(t)$ que satisfaça

$$\varepsilon^{vp}(t) = \frac{1}{\tilde{\eta}} \left[\frac{\sigma_0 - E\varepsilon^{vp}(t)}{\sigma_y} - 1 \right]^m \quad (5.37)$$

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0. \quad (5.38)$$

Onde $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\eta$. Cujas solução, para $m = 2$, é dada por

$$\varepsilon^{vp}(t) = \frac{t(\sigma_0 - \sigma_y)^2}{Et(\sigma_0 - \sigma_y) + \tilde{\eta}\sigma_y^2}. \quad (5.39)$$

E a partir de (5.32)

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \frac{Et(\sigma_0 - \sigma_y)^2}{Et(\sigma_0 - \sigma_y) + \tilde{\eta}\sigma_y^2}. \quad (5.40)$$

Ainda, se $\sigma_0 = \lambda\sigma_y$, com $\lambda > 1$, a evolução de σ se torna

$$\sigma(t) = \left[\lambda - \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1) + \frac{\tilde{\eta}\sigma_y}{Et}} \right] \sigma_y. \quad (5.41)$$

Modelo de Perić. Com base em (5.26) e (5.32), define-se o problema de valor inicial para a relaxação de tensão do modelo de Perić. Determinar $\varepsilon^{vp}(t)$, de modo a satisfazer

$$\varepsilon^{vp}(t) = \frac{1}{\tilde{\eta}} \left[\frac{\sigma_0 - E\varepsilon^{vp}(t)}{\sigma_y} \right]^m - 1 \quad (5.42)$$

$$\varepsilon^{vp}(0) = 0. \quad (5.43)$$

Onde $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\eta$. Uma solução analítica, dita simples, para (5.42) e (5.43) é possível somente para $m = 1$, onde obtém-se

$$\varepsilon^{vp}(t) = \frac{1}{E}(\sigma_0 - \sigma_y) \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\tilde{\eta}\sigma_y}t\right) \right]. \quad (5.44)$$

E a seguinte equação de evolução para σ

$$\sigma(t) = \sigma_y + (\sigma_0 - \sigma_y) \exp\left(-\frac{E}{\tilde{\eta}\sigma_y}t\right). \quad (5.45)$$

Nota-se que para $m = 1$ os modelos de Perić e não linear de Perzyna são iguais e lineares, diferindo do modelo linear de Perzyna quanto ao “tempo adimensional”, que para este último é dado pelo termo $\frac{Et}{\eta}$, enquanto que para os outros dois se tem $\frac{Et}{\eta\sigma_y}$.

5.2 Solução Analítica para Cilindro Espesso Rígido-Viscoplástico¹

Aqui verifica-se a solução para um cilindro espesso feito de um material rígido-viscoplástico. Considera-se que ao diâmetro interno do cilindro, seja prescrito um deslocamento radial $\bar{u}_r(t)$ a uma taxa constante \bar{v}_r , conforme o que é mostrado na Figura 5.2.

Para este problema considera-se estado plano de deformações, o que permite assumir (já em coordenadas cilíndricas)

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (5.46)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \dot{\varepsilon}_{zz} = 0. \quad (5.47)$$

Como o material é rígido-viscoplástico se tem

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = 0 \iff \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.48)$$

então, utilizando o critério de escoamento J_2 , segundo Eq.(2.160), escreve-se

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}, \quad (5.49)$$

com

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \langle \Theta(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})) \rangle. \quad (5.50)$$

Considerando $\dot{\gamma} > 0$, reescreve-se

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \Theta^{-1}(\eta\dot{\gamma}) = \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}). \quad (5.51)$$

As componentes de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ em coordenadas cilíndricas são

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\gamma} \frac{S_{rr}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (5.52)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \dot{\gamma} \frac{S_{\theta\theta}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (5.53)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\gamma} \frac{S_{r\theta}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (5.54)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\gamma} \frac{S_{zz}}{\|\mathbf{S}\|} = 0 \quad (5.55)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\gamma} \frac{S_{rz}}{\|\mathbf{S}\|} = 0 \quad (5.56)$$

¹Esta solução segue a linha proposta por Peirce et al. (1984) para um material viscoso não linear, o que também pode ser visto em Shames e Cozzarelli (1997). A abordagem para um material viscoso não linear com endurecimento isotrópico não linear pode ser encontrada em Leu (2003).

$$\dot{\epsilon}_{\theta z} = \dot{\gamma} \frac{S_{\theta z}}{\|\mathbf{S}\|} = 0. \quad (5.57)$$

O cálculo da tensão desviadora S_{zz} fornece

$$S_{zz} = \sigma_{zz} - \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}), \quad (5.58)$$

tendo em vista a Eq.(5.55) é possível afirmar (para $\dot{\gamma} > 0$)

$$\sigma_{zz} - \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0, \quad (5.59)$$

de onde conclui-se que (Shames e Cozzarelli, 1997, p.554)

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2}. \quad (5.60)$$

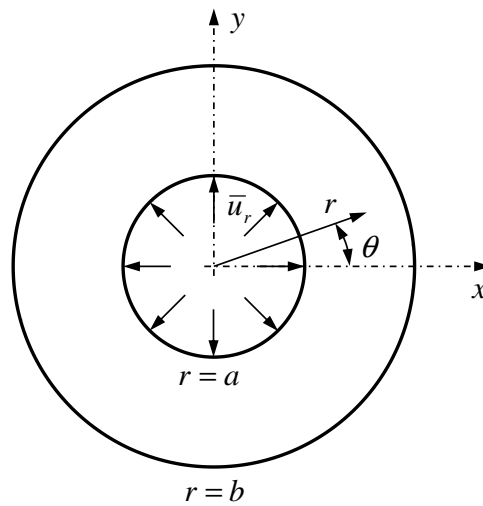


Figura 5.2: Cilindro rígido-viscoplástico com deslocamento prescrito $\bar{u}_r(t)$ em $r = a$.

A Eq.(5.60) mostra que o coeficiente de *Poisson* para deformação viscoplástica ν^{vp} , assim como mostrado para o caso unidimensional, é igual a $\frac{1}{2}$, o que informa que o material rígido-viscoplástico é incompressível.

Das Eqs.(5.56) e (5.57) conclui-se que

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (5.61)$$

Com isso, o tensor desviador de tensão se torna

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \end{bmatrix} - \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Com a condição de axissimetria sabe-se que $\sigma_{r\theta} = 0$, ver Timoshenko e Goodier (1969); Sadd (2009), então

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \end{bmatrix} - \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

e a norma de \mathbf{S}

$$\|\mathbf{S}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|. \quad (5.65)$$

A partir das Eqs.(2.133) e (5.51), se tem

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] = \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma})$$

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] + \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}). \quad (5.66)$$

Pela Eq.(5.64) nota-se que $S_{rr} = -S_{\theta\theta}$, e assim (supondo $S_{rr} \leq 0$)

$$\|\mathbf{S}\| = -\sqrt{2}S_{rr}. \quad (5.67)$$

Substituindo (5.67) em (5.66), chega-se a

$$S_{rr} = -\frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}), \quad (5.68)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}). \quad (5.69)$$

Rearranjando a Eq.(5.63)

$$\sigma_{rr} = S_{rr} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \quad (5.70)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = S_{\theta\theta} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2}. \quad (5.71)$$

Com estas quatro últimas equações substituídas na equação de equilíbrio²

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (5.72)$$

²Esta equação de equilíbrio é a versão em coordenadas polares de $\text{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$, sob as hipóteses de axissimetria e com $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ver, por exemplo, Sadd (2009) e Timoshenko e Goodier (1969).

chega-se à seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}) \right\} = 0. \quad (5.73)$$

Então, o problema consiste em resolver essa equação para σ_r com as condições de contorno adequadas em $r = a$ e/ou $r = b$. Sendo posteriormente calculadas as tensões

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\sigma_y + A(\alpha)] + \sqrt{2} \bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}) + \sigma_{rr}, \quad (5.74)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2}. \quad (5.75)$$

A pressão interna limite p_i^{lim} é calculada por³

$$p_i^{lim} = -\sigma_{rr}(a). \quad (5.76)$$

Em coordenadas cilíndrica, a condição de incompressibilidade⁴ requer que

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5.77)$$

onde, v_r é a velocidade radial em um ponto (r, θ) . Considerando um problema controlado pela velocidade, sendo \bar{v}_r a velocidade de expansão da parede interna do cilindro, então a velocidade radial fica sendo

$$v_r = \frac{\bar{v}_r a}{r}. \quad (5.78)$$

E assim, são obtidas as taxas das deformações

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\bar{v}_r a}{r^2} \quad (5.79)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} = \frac{\bar{v}_r a}{r^2} \quad (5.80)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = 0, \quad (5.81)$$

dessa forma, o multiplicador viscoplástico fica dado por

$$\dot{\gamma} = \|\dot{\epsilon}\| = \frac{\sqrt{2} \bar{v}_r a}{r^2}, \quad (5.82)$$

³Considera-se pressão interna positiva ($p_i > 0$) aquela que tende a expandir o cilindro.

⁴O princípio da conservação de massa, na forma Euleriana, $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv$, para materiais incompressíveis resulta na condição $\text{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = 0$ (Asaro e Lubarda, 2006; Gurtin et al., 2010).

e a deformação viscoplástica acumulada como

$$\alpha = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}\| dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t \frac{\bar{v}_r a}{r^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\bar{v}_r a}{r^2} t. \quad (5.83)$$

Com a determinação $\dot{\gamma}$ e α em função de r , a seguir particulariza-se a função $\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma})$ para os modelos viscoplásticos já apresentados anteriormente, a fim de solucionar a equação diferencial (5.73). Onde será considerado um material perfeitamente viscoplástico ($A = 0$).⁵

Modelo Linear de Perzyna. Com base na Eq.(2.211), para este modelo viscoplástico a função $\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma})$ passa a ser

$$\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}) = \eta \dot{\gamma}. \quad (5.84)$$

Então, a equação diferencial (5.73) para o modelo linear de Perzyna (com $A = 0$), se torna

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \dot{\gamma} \right) = 0,$$

de acordo com (5.82)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}r} + \frac{\sqrt{2}\eta\bar{v}_r a}{r} = 0. \quad (5.85)$$

Resolvendo esta para $\sigma_{rr}(r)$, com $\sigma_{rr}(b) = 0$, obtém-se

$$\sigma_{rr}(r) = \eta\bar{v}_r a \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{r}{b} \right). \quad (5.86)$$

E a partir dessa, conforme Eqs.(5.74) e (5.75), são calculadas as seguintes componentes de tensão

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \eta\bar{v}_r a \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right] \quad (5.87)$$

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{\eta\bar{v}_r a}{b^2} + \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right]. \quad (5.88)$$

E a pressão limite segundo (5.76)

$$p_i^{lim} = \frac{\eta\bar{v}_r}{a} - \frac{\eta\bar{v}_r a}{b^2} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad (5.89)$$

Modelo Não Linear de Perzyna. Para o modelo viscoplástico em questão, a partir

⁵Considera-se aqui um material sem endurecimento a fim de facilitar a solução da equação diferencial e também a interpretação dos resultados obtidos, pois quando $A = 0$ a pressão limite não depende explicitamente do tempo t , apenas da velocidade prescrita \bar{v}_r e dos parâmetros materiais η e m para os modelos não lineares, bem como dos parâmetros geométricos a e b .

da Eq.(2.214), a função $\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma})$ é particularizada como (com $A = 0$)

$$\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\eta\dot{\gamma})^{\frac{1}{m}}. \quad (5.90)$$

Sendo obtida a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}r} \left[1 + (\eta\dot{\gamma})^{\frac{1}{m}} \right] = 0,$$

utilizando (5.82)

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}r} \left[1 + 2^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{\eta\bar{v}_r a}{r^2} \right)^{\frac{1}{m}} \right] = 0, \quad (5.91)$$

com $\sigma_{rr}(b) = 0$. De onde é obtida a solução

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[2^{\frac{1-2m}{2m}} m (\eta\bar{v}_r a)^{\frac{1}{m}} \left(b^{-\frac{2}{m}} - r^{-\frac{2}{m}} \right) + \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right], \quad (5.92)$$

e também, respectivamente, de acordo com (5.74), (5.75) e (5.76)

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[2^{\frac{1}{2m}} (\eta\bar{v}_r a)^{\frac{1}{m}} r^{-\frac{2}{m}} + 2^{\frac{1-2m}{2m}} m (\eta\bar{v}_r a)^{\frac{1}{m}} \left(b^{-\frac{2}{m}} - r^{-\frac{2}{m}} \right) + \ln\left(\frac{r}{b}\right) + 1 \right] \quad (5.93)$$

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left\{ 2^{\frac{1-2m}{2m}} (\eta\bar{v}_r a)^{\frac{1}{m}} \left[mb^{-\frac{2}{m}} + (1-m)r^{-\frac{2}{m}} \right] + \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{1}{2} \right\} \quad (5.94)$$

$$p_i^{lim} = -\frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[2^{\frac{1-2m}{2m}} m (\eta\bar{v}_r)^{\frac{1}{m}} \left(a^{\frac{1}{m}} b^{-\frac{2}{m}} - a^{-\frac{1}{m}} \right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right]. \quad (5.95)$$

Modelo de Perić. No modelo de Perić a função $\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma})$ é obtida a partir de (2.218), o que resulta em (com $A = 0$)

$$\bar{\Theta}^{-1}(\dot{\gamma}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \left[(\eta\dot{\gamma} + 1)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]. \quad (5.96)$$

Substituindo essa equação em (5.85), obtém-se

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}r} (\eta\dot{\gamma} + 1)^{\frac{1}{m}} = 0$$

utilizando (5.82)

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2}\eta\bar{v}_r a + r^2 \right)^{\frac{1}{m}} r^{-\frac{2+m}{m}} = 0$$

com $\sigma_{rr}(b) = 0$. Que é solucionada por

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \int_b^r \left(\sqrt{2}\eta\bar{v}_r a + \xi^2 \right)^{\frac{1}{m}} \xi^{-\frac{2+m}{m}} d\xi. \quad (5.97)$$

A solução da integral (5.97) depende da definição de m . Após o cálculo de $\sigma_{rr}(r)$, com base em (5.74) e (5.75), são calculadas as componentes de tensão $\sigma_{\theta\theta}(r)$ e $\sigma_{zz}(r)$ e também a pressão limite p_i^{lim} segundo (5.76).

Os três modelos viscoplásticos devem recuperar o comportamento independente da taxa de deformação quando tomado o limite $\eta \rightarrow 0$, e assim, a tensão $\sigma_{rr}(r)$ e a pressão limite p_i^{lim} são dadas segundo as respectivas soluções propostas por Hill (1950)

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad (5.98)$$

$$p_i^{lim} = -\frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{a}{b}\right). \quad (5.99)$$

6 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS

No presente capítulo são apresentados alguns resultados, obtidos com o método de elementos finitos aplicado à solução de problemas de valor no contorno e inicial (PVCII), envolvendo materiais elasto-viscoplásticos.

6.1 Deformações Infinitesimais

Para deformações infinitesimais, os resultados numéricos são comparados a soluções analíticas disponíveis para problemas simples, como o caso unidimensional e o cilindro em expansão, ambos descritos no Capítulo 5. Avalia-se também um problema de referência, que consiste na extensão de uma placa com furo, bastante utilizado em análises de (visco)plasticidade, ver, por exemplo, Alfano et al. (2001), Perić (1993) e Simo e Taylor (1985).

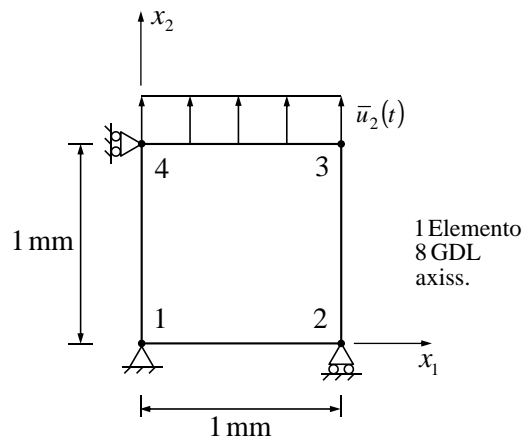


Figura 6.1: Modelo de elementos finitos para o problema unidimensional.

E [GPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	σ_∞ [MPa]	δ [-]	H [GPa]
200	0,3	100	100	0	0

Tabela 6.1: Propriedades elásticas e plásticas para o problema unidimensional.

6.1.1 Comparação dos Resultados Numéricos com as Soluções Exatas Unidimensionais

Na Seção 5.1 foram desenvolvidas algumas soluções analíticas referentes aos modelos elasto-viscoplásticos unidimensionais sob deformações infinitesimais. Foram abordados os

fenômenos de dependência da taxa de deformação na resposta em tensão e de relaxação de tensão sob deformação constante. Nesta seção, estes resultados são utilizados para demonstrar a capacidade da estratégia numérica (MEF e modelo constitutivo) na captura de tais fenômenos.

O modelo de elementos finitos empregado à análise unidimensional é mostrado na Figura 6.1, onde são observadas as condições de contorno e a malha utilizada, sendo esta composta por 1 elemento bilinear¹ (4 nós) sob a hipótese de axissimetria em torno de x_2 .

A história do deslocamento prescrito $\bar{u}_2(t)$ segue analogamente às Figuras 5.1(b)-(c), sendo o caso (b) utilizado na avaliação da dependência da taxa de deformação e o caso (c) na avaliação da relaxação de tensão.

Dependência da Taxa de Deformação na Resposta em Tensão

Avalia-se a dependência da taxa de deformação na resposta em tensão de um material elasto-viscoplástico, empregando a análise incremental com o método de elementos finitos. Verifica-se o comportamento do material segundo os modelos linear e não linear de Perzyna e o modelo de Perić, cujas soluções exatas são dadas respectivamente por (5.17), (5.24) e (5.30). As soluções exatas servem de referência aos resultados numéricos, o que pode ser visto, respectivamente, nas Figuras 6.2-6.4, verifica-se a influência do termo $\eta\beta$ na resposta em tensão dos materiais.

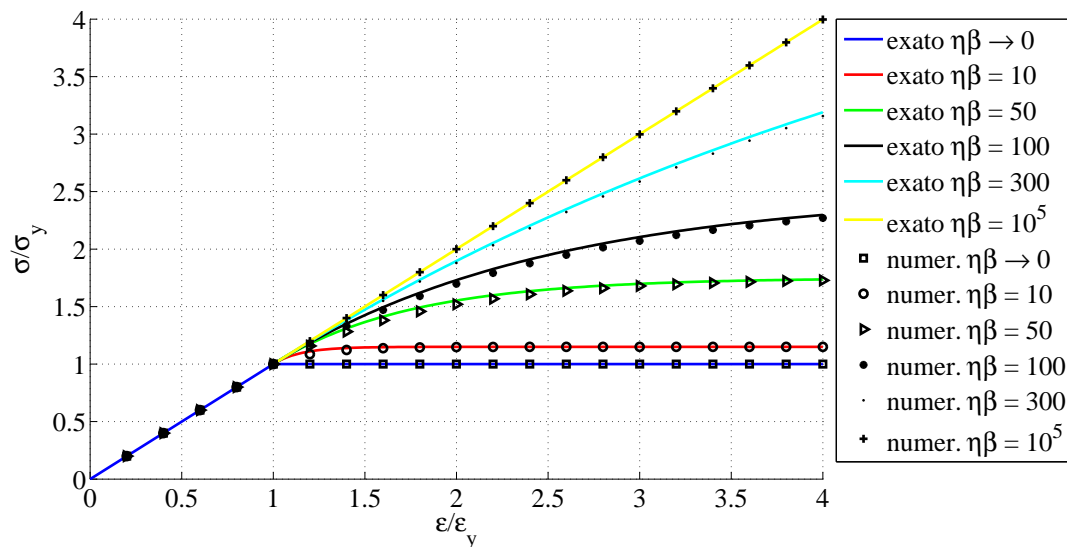


Figura 6.2: Curva tensão-deformação para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\eta\beta$, 20 incrementos.

¹Nesta análise é utilizado apenas 1 elemento finito bilinear, uma vez que este é capaz de representar exatamente um estado de tensão constante (Hughes, 2000; Zienkiewicz e Taylor, 2000a).

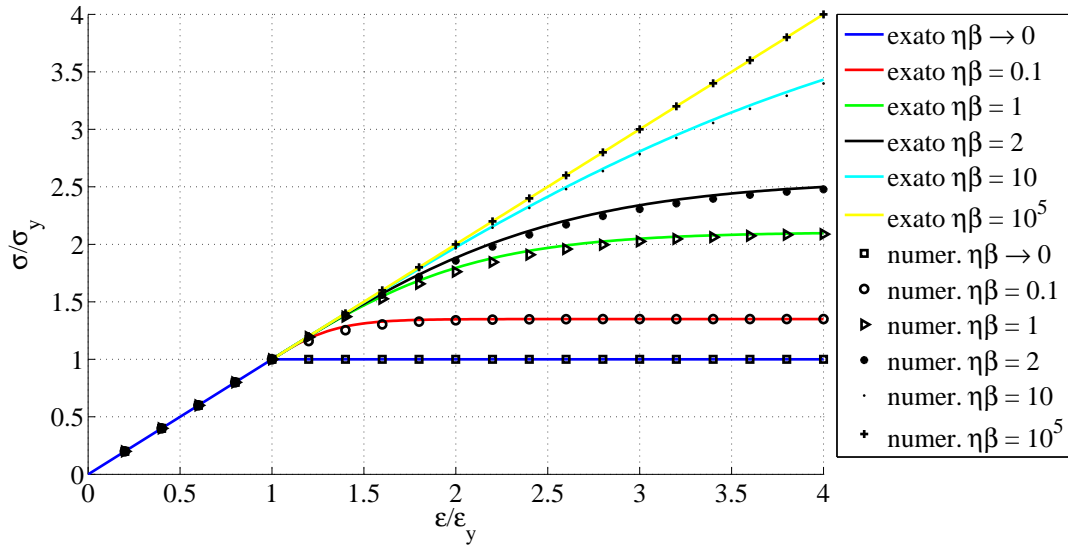


Figura 6.3: Curva tensão-deformação para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\eta\beta$, $m = 2$, 20 incrementos.

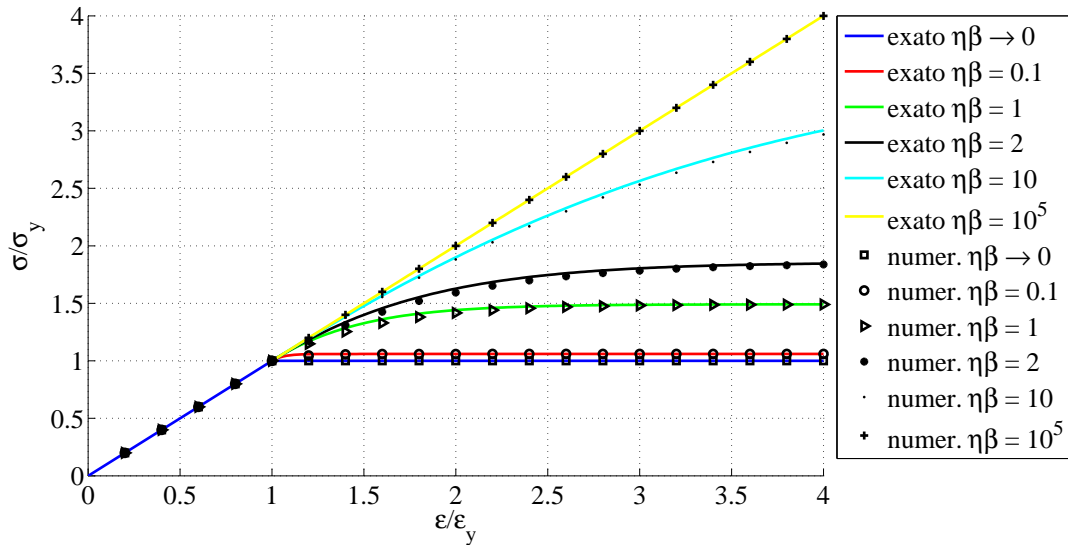


Figura 6.4: Curva tensão-deformação para o modelo de Perić com diferentes valores de $\eta\beta$, $m = 2$, 20 incrementos.

A aplicação da rampa de $\bar{\mathbf{u}}(t)$ é realizada com 20 incrementos de 1×10^{-4} mm, totalizando um alongamento de 2×10^{-3} mm. Considera-se um material perfeitamente viscoplástico, cujas propriedades elásticas e plásticas são dadas na Tabela 6.1. A tolerância utilizada no método de *Newton-Raphson*, local e global, é $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$. Para os modelos não lineares atribui-se $m = 2$.

A partir dos resultados das Figuras 6.2-6.4 é possível observar a dependência da taxa de deformação na resposta em tensão de materiais viscoplásticos, de modo que quanto maior a taxa de deformação e/ou a viscosidade do material, representadas pelo termo $\eta\beta$, maior

é a tensão observada. Nota-se que o limite inferior $\eta\beta \rightarrow 0$ recupera o comportamento de um material independente da taxa de deformação e que para valores elevados de $\eta\beta$ o material tende a apresentar um comportamento puramente elástico.

Ainda, analisando as Figuras 6.2-6.4, as comparações entre os resultados numéricos e analíticos mostram que a estratégia implementada é capaz de reproduzir a solução analítica para este problema, de forma que os resultados numéricos convirjam para a solução exata à medida em que a integração numérica seja melhorada, isto é, à medida em que o número de incrementos aumente. Esse fato fica mais claro nas Figuras 6.5-6.7, onde são avaliados diferentes incrementos no fenômeno de relaxação de tensão.

Relaxação de Tensão sob Deformação Constante

Para a análise do fenômeno de relaxação de tensão, a solução analítica para a evolução da tensão, considerando os modelos linear e não linear de Perzyna e o modelo de Perić, é dada conforme as Eqs.(5.36), (5.41) e (5.45), respectivamente. Utiliza-se uma tensão inicial $\sigma_0 = 2\sigma_y$ aplicada instantaneamente. As propriedades elásticas e plásticas são descritas na Tabela 6.1. Os valores de η são ajustados de acordo com o tempo adimensional de cada modelo viscoplástico². Para o modelo não linear de Perzyna utiliza-se $m = 2$ e para o modelo de Perić $m = 1$. As análises são realizadas para 20 e 100 incrementos. A tolerância utilizada no método de *Newton-Raphson*, local e global, é $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$.

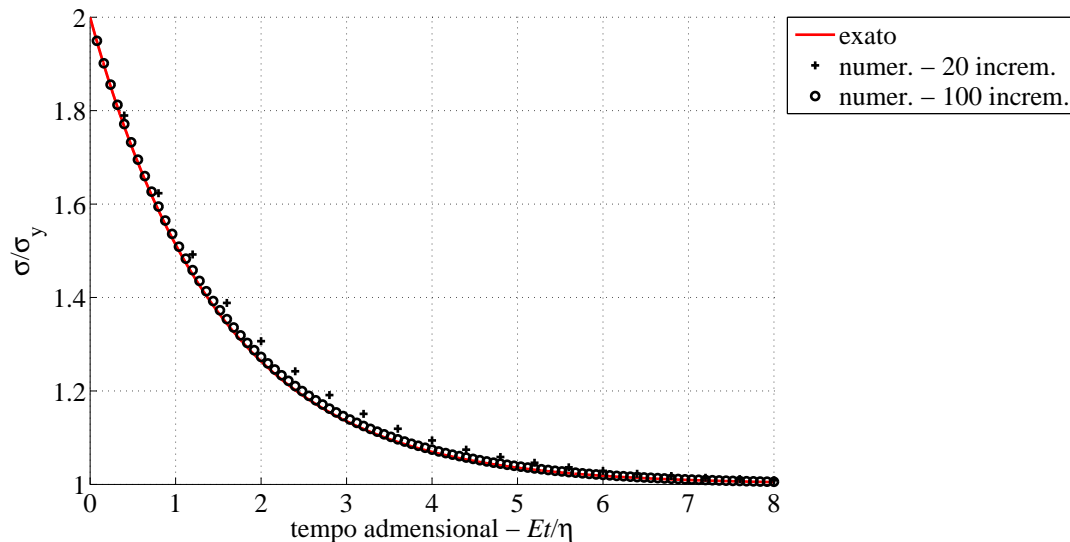


Figura 6.5: Relaxação de tensão para o modelo linear de Perzyna, 20 e 100 incrementos.

Nas Figuras 6.5-6.7 observa-se o comportamento da tensão adimensional $\frac{\sigma}{\sigma_y}$ em função do tempo adimensional, respectivamente para os modelos linear e não linear de Perzyna e para o modelo de Perić.

²Os termos de tempo adimensional são: $\frac{Et}{\eta}$ para o modelo linear de Perzyna e $\frac{Et}{\sigma_y \eta}$ para o não linear de Perzyna e para o de Perić.

Para os três modelos viscoplásticos verifica-se que a tensão adimensional $\frac{\sigma}{\sigma_y}$ aproxima-se assintoticamente de 1. Porém, no modelo não linear de Perzyna, Figura 6.6, como utilizou-se $m = 2$, o intervalo adotado para $\frac{Et}{\sigma_y \eta}$ não foi suficiente para que σ se aproximasse de σ_y , mas ainda é possível observar o comportamento decrescente e assintótico da curva, de forma que $\frac{\sigma}{\sigma_y} \rightarrow 1$ para $\frac{Et}{\sigma_y \eta} \rightarrow \infty$.

Os resultados numéricos das Figuras 6.5-6.7 mostram que o algoritmo de solução (para os três modelos viscoplásticos) é capaz de representar o fenômeno de relaxação de tensão, convergindo à solução exata com o aumento do número de incrementos.

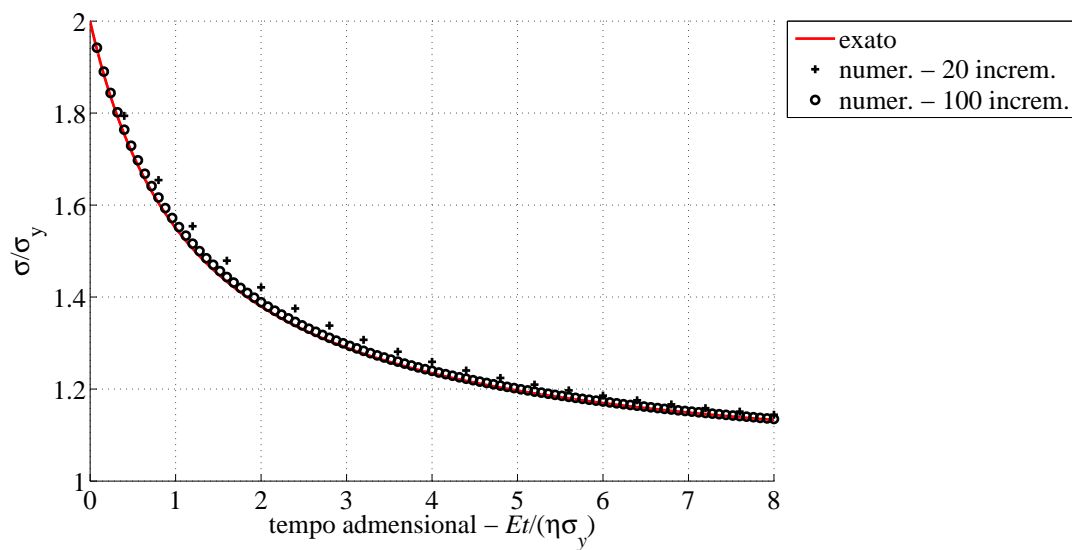


Figura 6.6: Relaxação de tensão para o modelo não linear de Perzyna, $m = 2$, 20 e 100 incrementos.

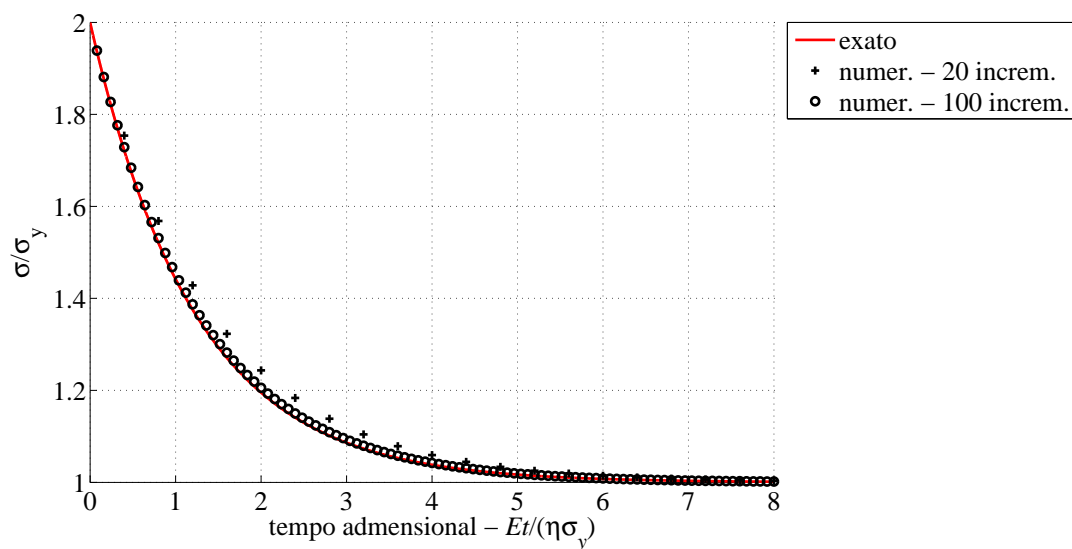


Figura 6.7: Relaxação de tensão para o modelo de Perić, $m = 1$, 20 e 100 incrementos.

6.1.2 Comparação com a Solução Exata para o Cilindro Espesso Rígido-Viscoplástico

Aqui utiliza-se o modelo numérico para a solução do problema exemplificado na Figura 5.2. Para tal, é proposto o modelo de elementos finitos mostrado na Figura 6.8, onde é aplicada a condição de axissimetria. São empregados elementos quadrilaterais de 8 nós, pois são menos suscetíveis a travamento volumétrico, comparados aos de 4 nós. Ver referências como de Souza Neto et al. (1996), de Souza Neto et al. (2008), Simo e Armero (1992) e Simo e Hughes (1998).

O deslocamento prescrito é aplicado de forma a alcançar a pressão limite p_i^{lim} na parede interna do cilindro, isto é, de modo que toda a parede do tubo sofra deformações viscoplásticas (Chen e Han, 1988; Lubliner, 2008; Shames e Cozzarelli, 1997). Utiliza-se um material perfeitamente viscoplástico, cujas propriedades elásticas e plásticas são dadas na Tabela 6.2. Assim, as tensões (e também as deformações elásticas) na seção do tubo não mudam após ser atingida a carga limite, o que permite comparar a solução numérica realizada para um material elasto-viscoplástico com a analítica obtida para um material rígido-viscoplástico, ver Peirce et al. (1984). A aplicação da rampa de $\bar{u}_r(t)$ é realizada com 20 incrementos, totalizando um deslocamento radial de 1mm, a uma velocidade \bar{v}_r de 1mm/s. A tolerância utilizada no método de *Newton-Raphson*, local e global, é $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$.

Para o modelo linear de Perzyna os resultados são obtidos com diferentes valores de η , já para os modelos não lineares, de Perzyna e de Perić, são empregados diferentes valores de m para η fixo, tal que $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$. Considera-se $b = 2a$.

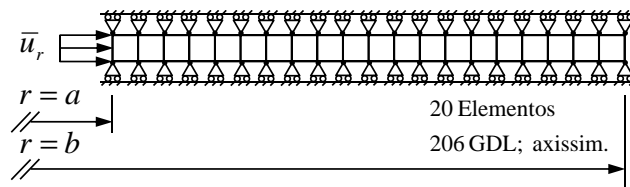


Figura 6.8: Modelo de elementos finitos para o cilindro espesso.

E [GPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	σ_∞ [MPa]	δ [-]	H [GPa]
200	0,3	100	100	0	0

Tabela 6.2: Propriedades elásticas e plásticas para o cilindro elasto-viscoplástico.

Para o modelo linear de Perzyna as soluções exatas de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{zz} são dadas, respectivamente, nas Eqs.(5.86), (5.87) e (5.88), p_i^{lim} é encontrada em (5.89). Estes resultados, juntamente com os numéricos são mostrados nessa mesma ordem nas Figuras 6.9-6.12.

Os valores exatos de p_i^{lim} para o modelo linear de Perzyna com os diferentes valores de η são colocados na Tabela 6.3, e comparados à pressão limite de um material perfeitamente plástico, ver Eq.(5.99). Esta mesma comparação é realizada para os modelos não lineares, de Perzyna e de Perić, o que é mostrado nas Tabelas (6.4) e (6.5), respectivamente.

	$\eta \rightarrow 0$	$\eta = 3000$	$\eta = 7000$	$\eta = 10000$	Eq.(5.99)
p_i^{lim} [MPa]	80,0377	102,5377	132,5377	155,0377	80,0377

Tabela 6.3: Pressões limites p_i^{lim} exatas para o modelo linear de Perzyna.

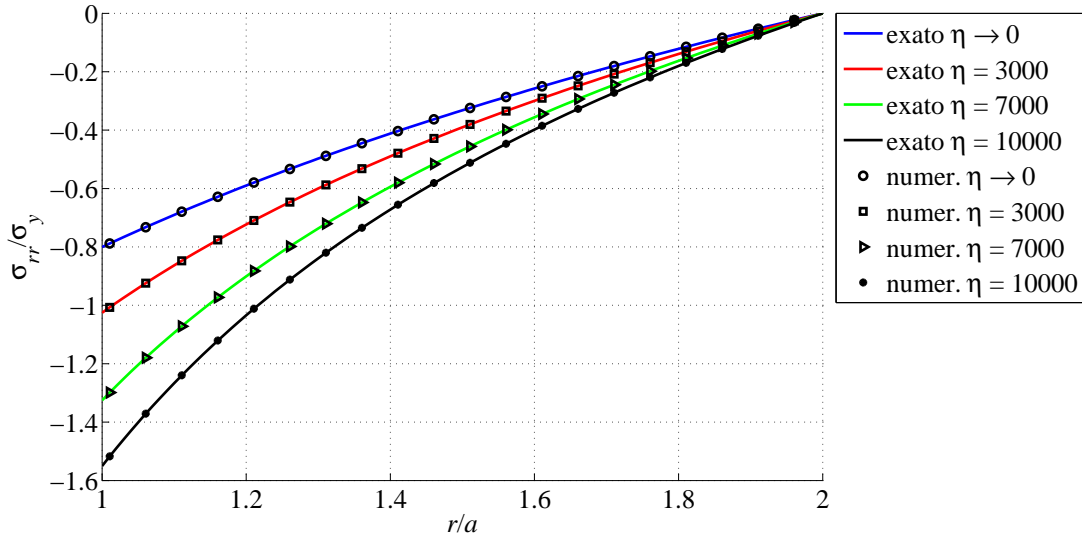


Figura 6.9: Tensão $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo linear de Perzyna.

No modelo linear de Perzyna, ver Figuras 6.9 e 6.12 e Tabela 6.3, é possível verificar claramente a influência de η sobre as respostas de σ_{rr} e de p_i^{lim3} . Com o aumento da viscosidade há também um aumento nos valores destas quantidades. Verifica-se também que para o caso limite $\eta \rightarrow 0$ o comportamento perfeitamente plástico é recuperado.

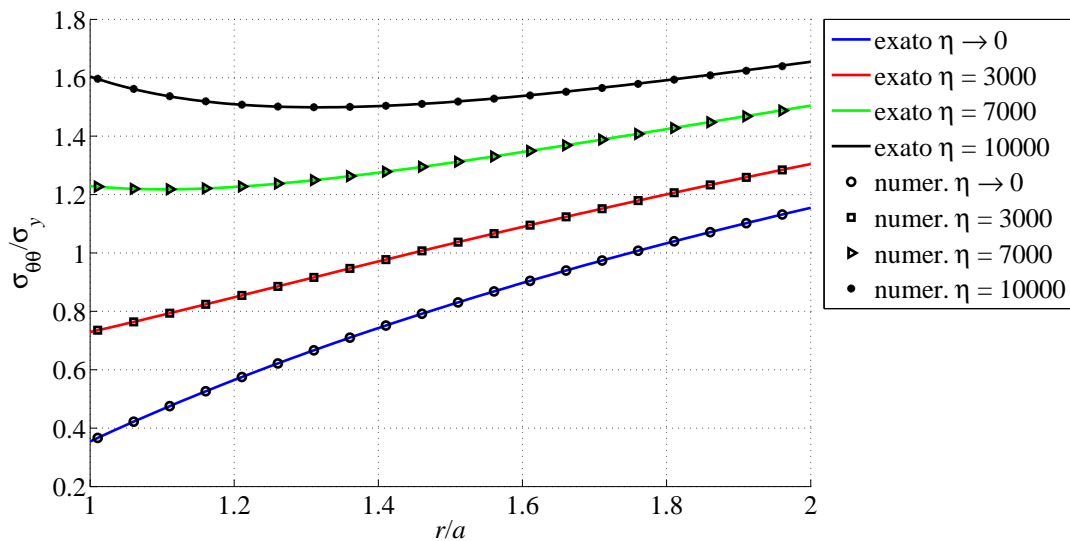


Figura 6.10: Tensão $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo linear de Perzyna.

³Os comentários são feitos somente em torno de σ_{rr} e de p_i^{lim} pois as tensões $\sigma_{\theta\theta}$ e σ_{zz} são calculadas a partir de σ_{rr} .

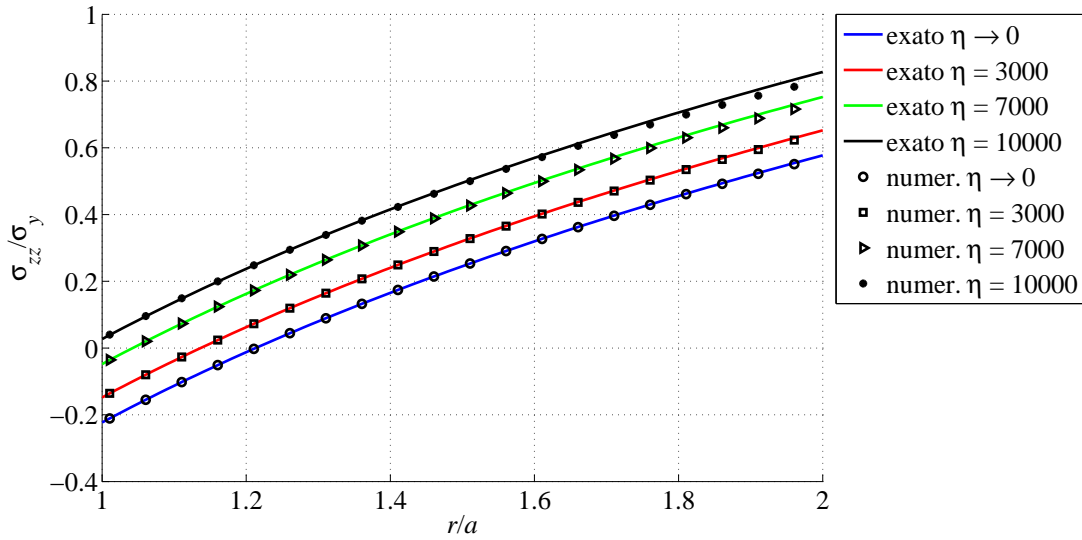


Figura 6.11: Tensão $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo linear de Perzyna.

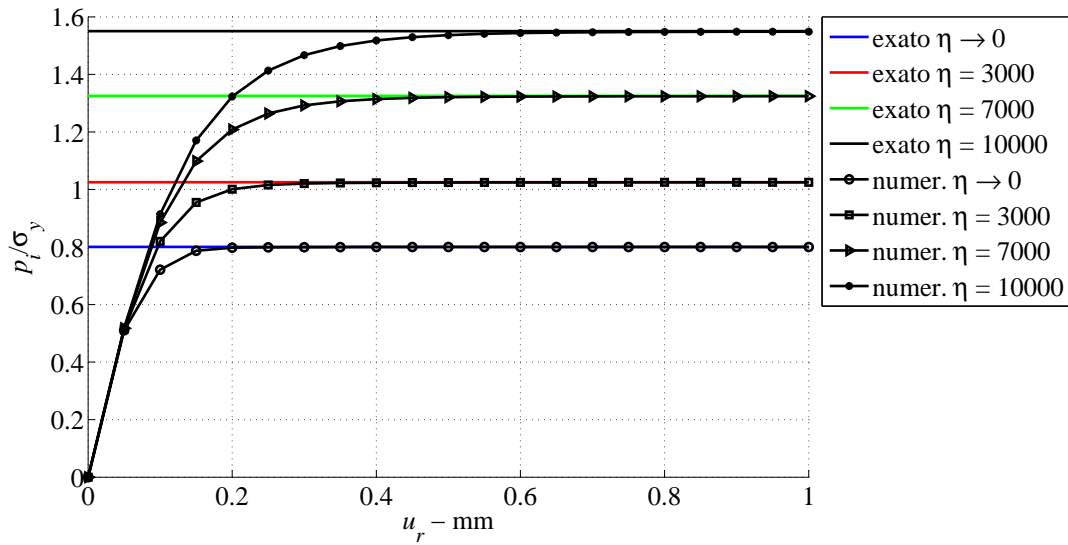


Figura 6.12: Pressão interna p_i numérica comparada à pressão limite p_i^{lim} exata, modelo linear de Perzyna.

Para o modelo não linear de Perzyna as expressões analíticas de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} e p_i^{lim} são dadas, respectivamente, em (5.92), (5.93), (5.94) e (5.95). As quais são tomadas como referência na comparação aos resultados numéricos feita nas Figuras 6.13-6.16, respectivamente.

	$m = 0,6$	$m = 0,8$	$m = 2$	$m = 90$	Eq.(5.99)
p_i^{lim} [MPa]	135,6373	138,6773	148,6966	159,7687	80,0377

Tabela 6.4: Pressões limites p_i^{lim} exatas para o modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

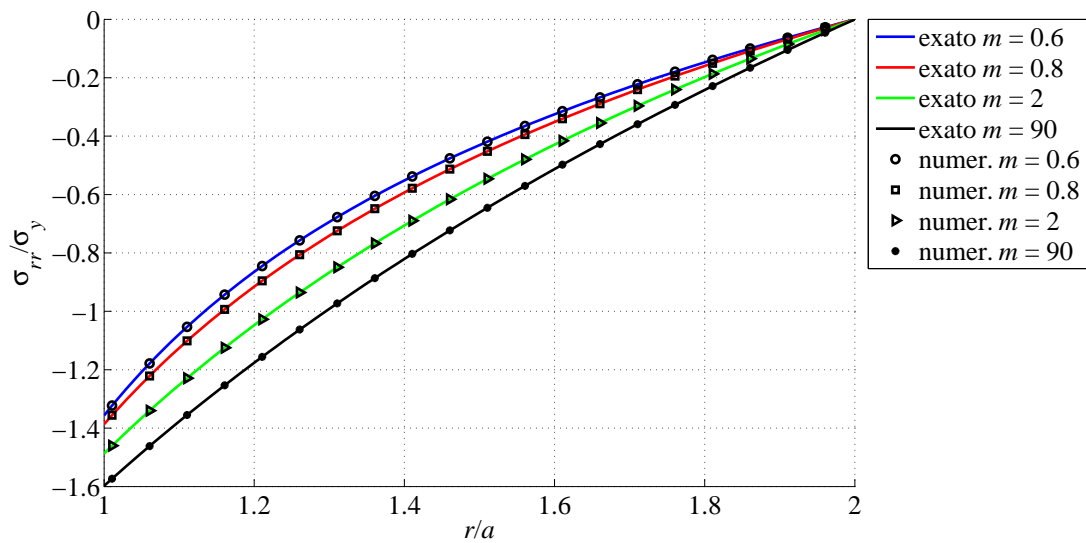


Figura 6.13: Tensão $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

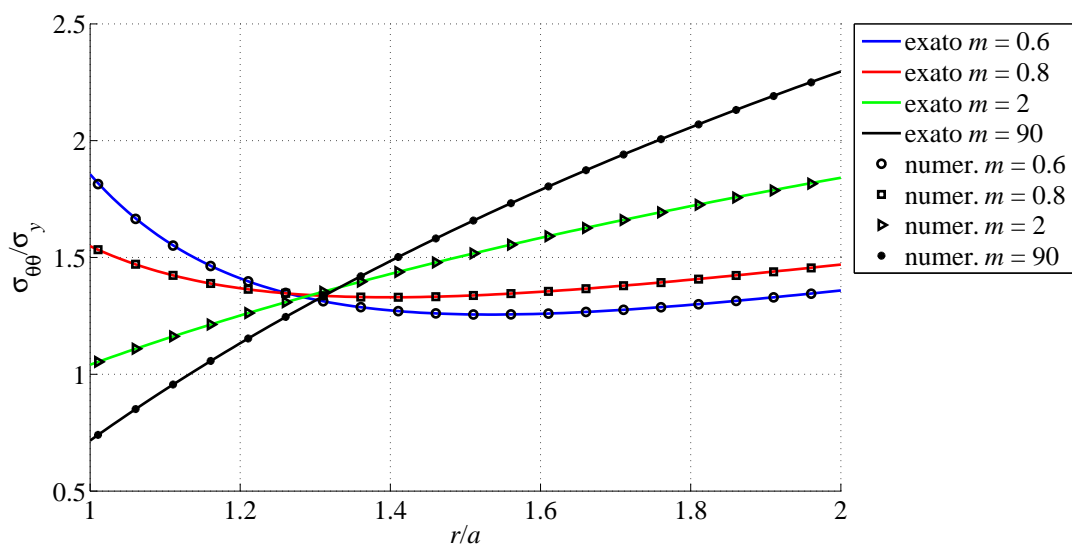


Figura 6.14: Tensão $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

Quanto ao modelo não linear de Perzyna, falando particularmente das Figuras 6.13 e 6.16 e da Tabela 6.4, uma atenção especial é necessária. Observa-se que com o aumento do parâmetro m os valores de σ_{rr} e conseqüentemente de p_i^{lim} tendem ao dobro da solução invíscida.

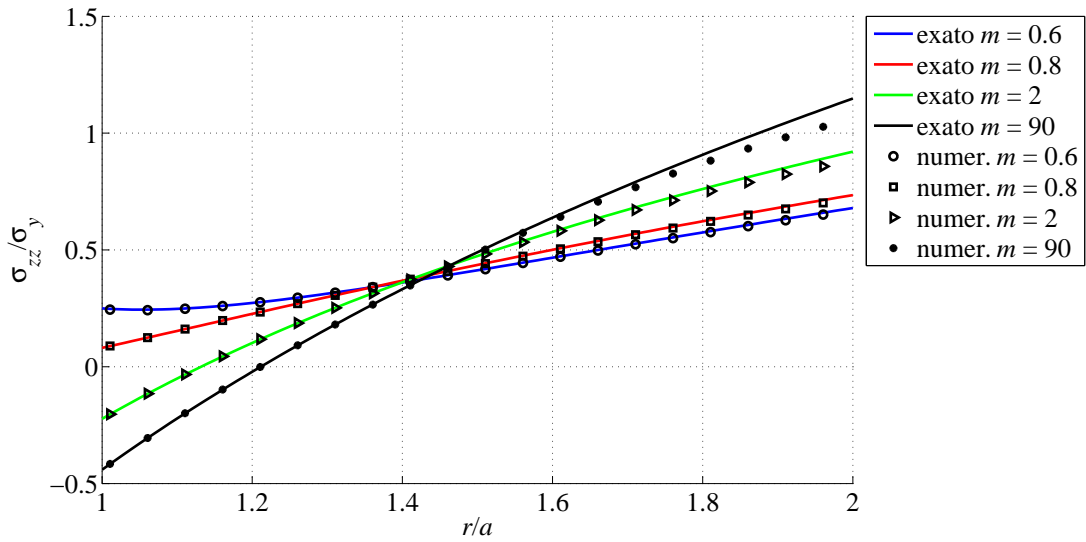


Figura 6.15: Tensão $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

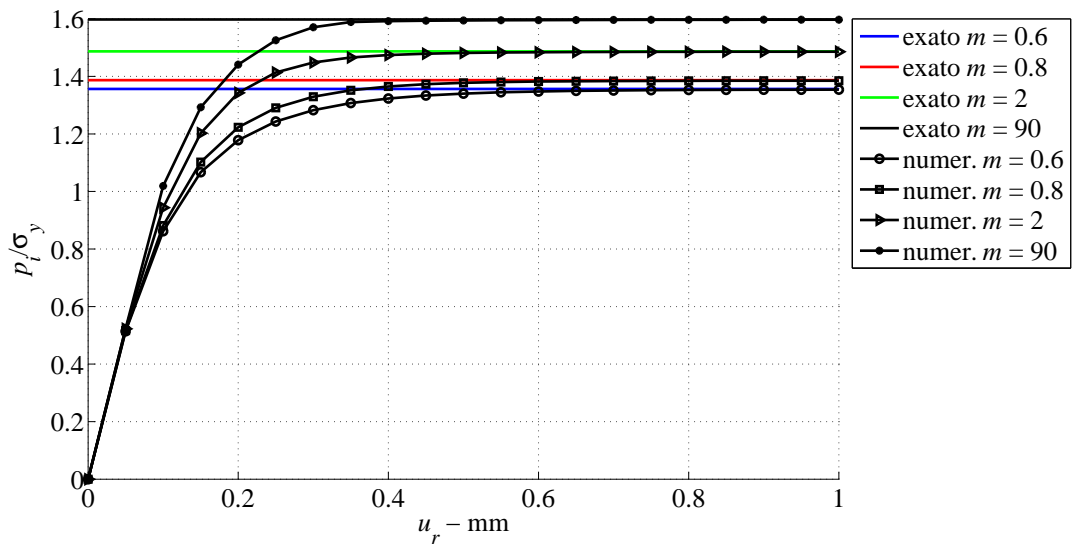


Figura 6.16: Pressão interna p_i numérica comparada à pressão limite p_i^{lim} exata, modelo não linear de Perzyna, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

As soluções exatas para σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} e p_i^{lim} , considerando o modelo de Perić são expressas, respectivamente, nas Eqs.(5.97), (5.74), (5.75) e (5.76). Estas são mostradas, respectivamente, nas Figuras 6.17-6.20, onde são utilizadas para a avaliação dos resultados numéricos.

O problema apresentado pelo modelo não linear de Perzyna é discutido em Perić (1993), onde é proposto um modelo viscoplástico que resolve este problema, isto é, o modelo de Perić recupera o comportamento invíscido no caso limite $m \rightarrow \infty$. Isto pode ser observado nas Figuras 6.17 e 6.20 e na Tabela 6.5.

	$m = 0,6$	$m = 0,8$	$m = 2$	$m = 90$	Eq.(5.99)
p_i^{lim} [MPa]	209,6586	163,5705	105,9571	80,5321	80,0377

Tabela 6.5: Pressões limites p_i^{lim} exatas para o modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

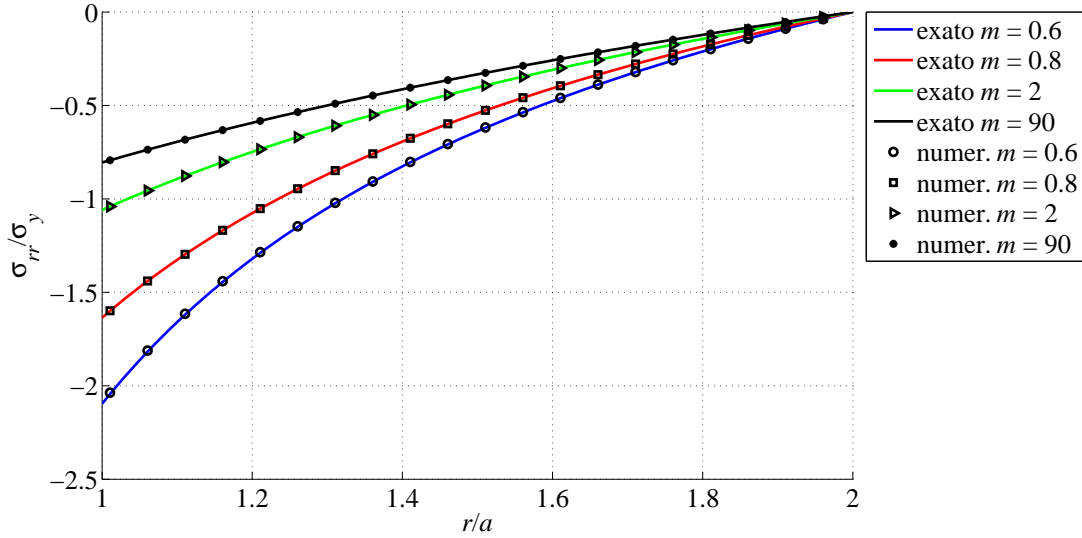


Figura 6.17: Tensão $\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

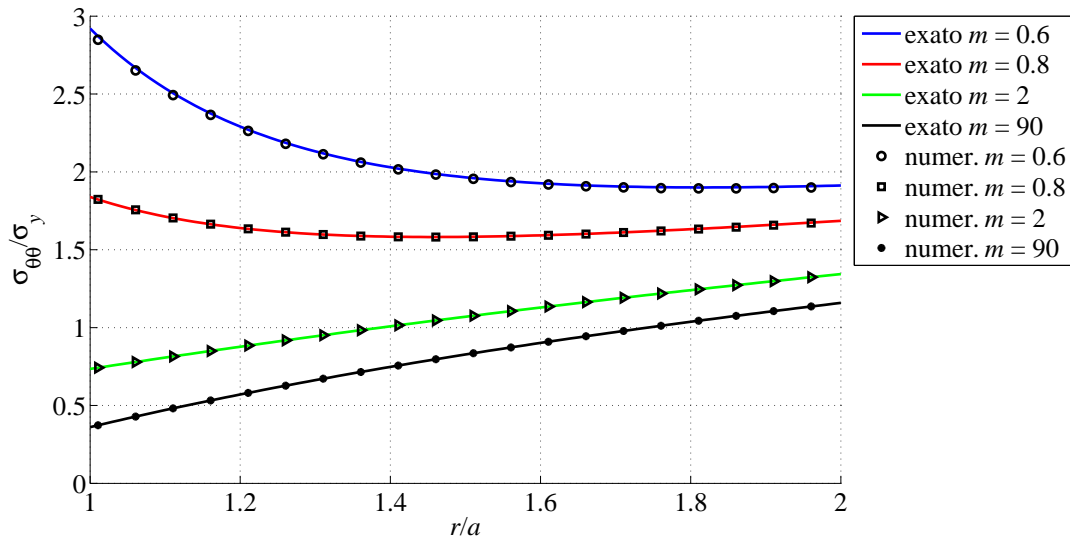


Figura 6.18: Tensão $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

De forma geral, as Figuras 6.9-6.20 mostram que os resultados numéricos obtidos aproximam-se satisfatoriamente das soluções exatas. Embora, maiores diferenças tenham sido observadas para a tensão σ_{zz} , ver Figuras 6.11, 6.15 e 6.19. Isto se deve à condição de compressibilidade empregada à solução exata, Eq.(5.75), que não foi aplicada ao modelo numérico, pois foi atribuído $\nu = 0,3$.

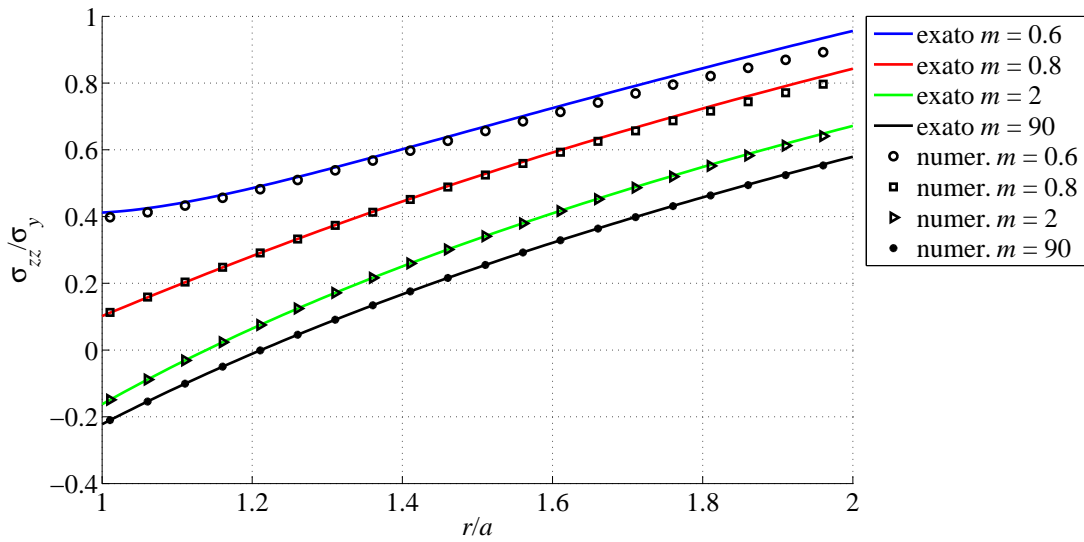


Figura 6.19: Tensão $\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_y}$ em função de $\frac{r}{a}$, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

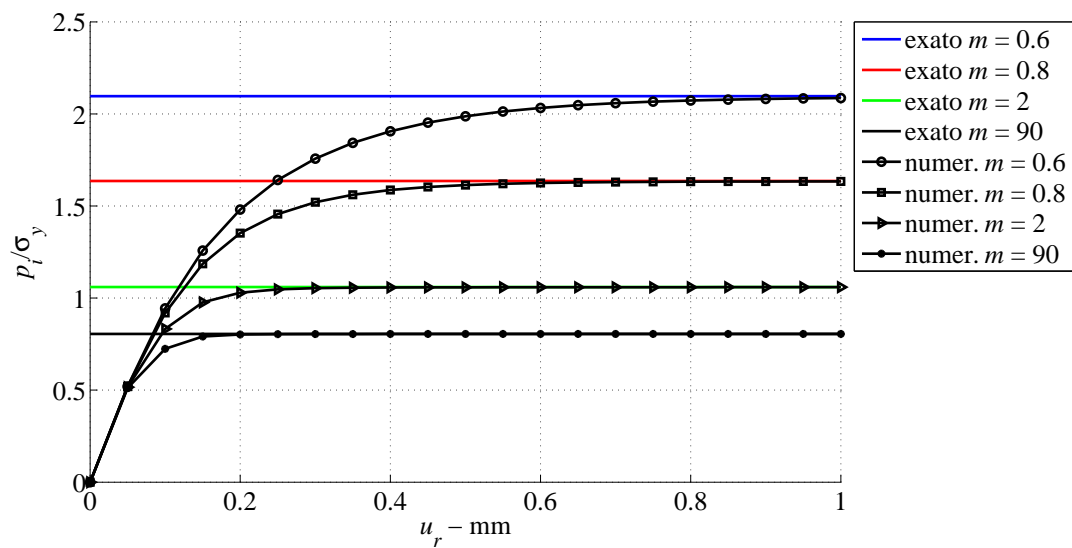


Figura 6.20: Pressão interna p_i numérica comparada à pressão limite p_i^{lim} exata, modelo de Perić, $\frac{\bar{v}_r \eta}{a} = 1$.

6.1.3 Placa com Furo⁴

Analisa-se o modelo da placa com furo sob um alongamento longitudinal em EPD. O problema é mostrado na Figura 6.21, onde são representadas as condições de contorno e a malha de elementos finitos (de 4 nós). A placa é composta por um material elasto-viscoplástico, cujas propriedades elásticas e plásticas são dadas na Tabela 6.6. São

⁴As características do problema foram escolhidas de modo a reproduzir o exemplo apresentado em Alfano et al. (2001).

realizadas análises utilizando os três modelos elasto-viscoplásticos já apresentados (modelos linear e não linear de Perzyna e o modelo de Perić). A aplicação do deslocamento $\bar{u}_2(t)$ é realizada em 25 incrementos de 2mm, o que resulta em um alongamento total de 50mm, aplicado a diferentes taxas. A tolerância utilizada no método de *Newton-Raphson*, local e global, é $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$.

E [GPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	σ_∞ [MPa]	δ [-]	H [GPa]
210	0,3	240	240	0	0

Tabela 6.6: Propriedades elásticas e plásticas para a placa com furo.

	Perzyna linear	Perzyna não linear	Perić
$\frac{\eta}{\Delta t}$	10^2	10^2	10^3
m	—	2	2

Tabela 6.7: Propriedades viscosas para a placa com furo, Figura 6.31.

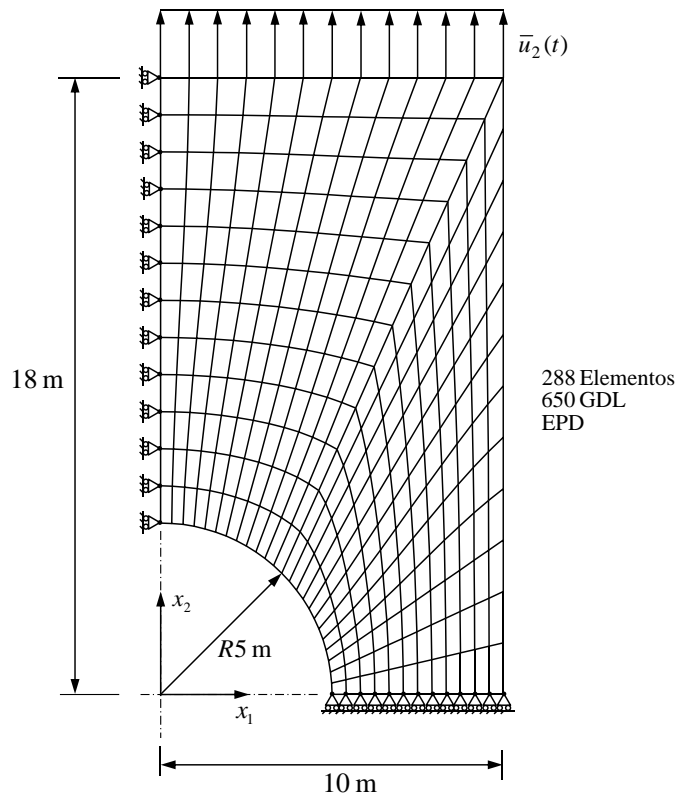
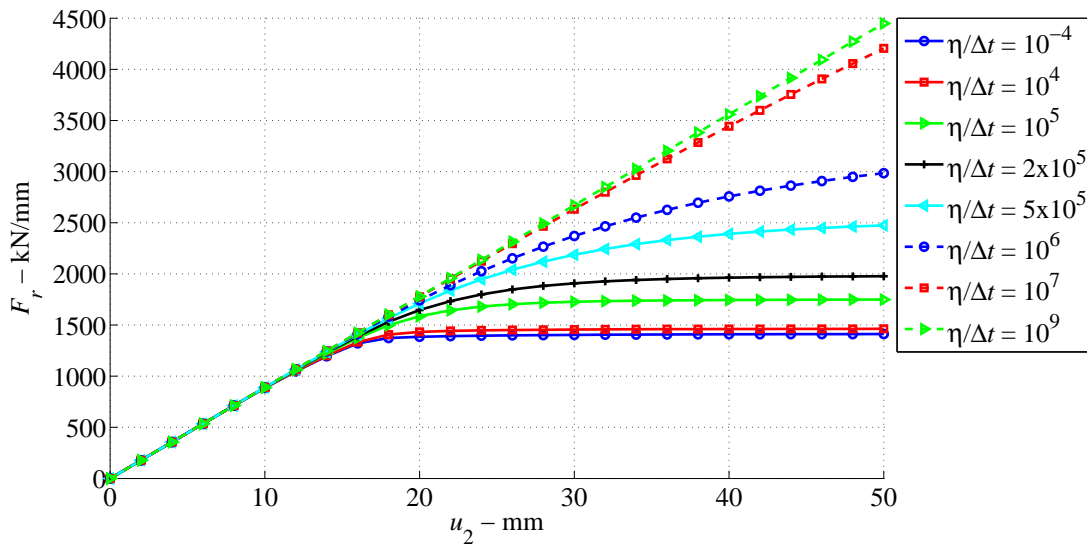


Figura 6.21: Modelo de elementos finitos para a placa perfurada.

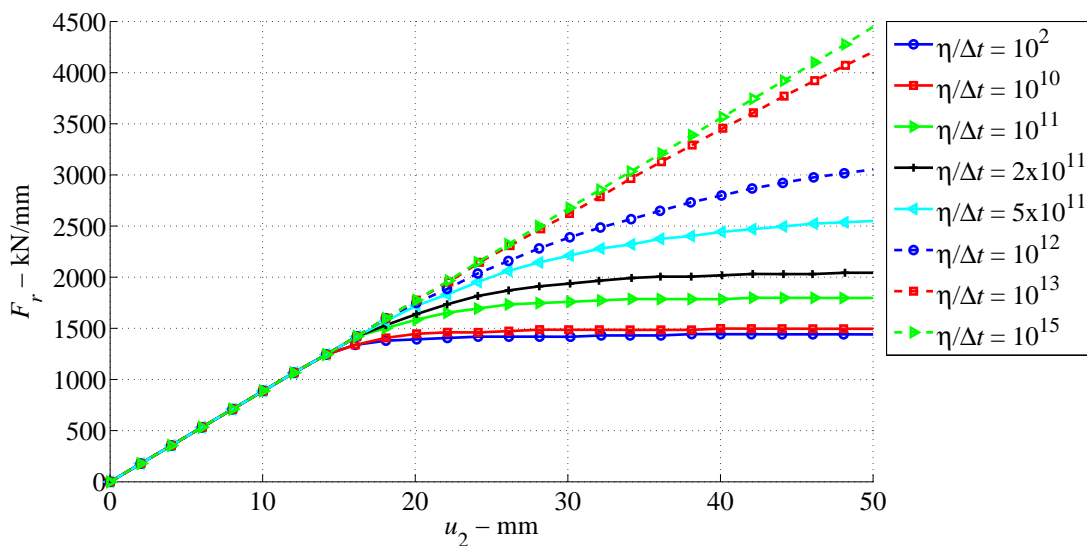
Nas Figuras 6.22⁵-6.26 é analisada a influência do parâmetro η na resposta da reação vertical F_r em função do deslocamento \bar{u}_2 , respectivamente, para os modelos linear e não

⁵Na Figura 6.22 os valores de η colocados em Alfano et al. (2001) são dados em $\text{Pa} \times \text{s}$ enquanto que aqui utilizou-se $\text{MPa} \times \text{s}$, o que explica a diferença na ordem de 10^6 entre os valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$.

linear de Perzyna e para o modelo de Perić. Nas Figuras (a) são mostrados os resultados aqui obtidos e nas Figuras (b) são colocados os resultados de Alfano et al. (2001)⁶. Para os modelos não lineares atribui-se $m = 2$ (Figuras 6.23 e 6.24) e $m = 5$ (Figuras 6.25 e 6.26).



(a)



(b)

Figura 6.22: Curva reação-deslocamento para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

A partir das diferentes curvas reação-deslocamento mostradas na Figura 6.22, para valores distintos do parâmetro $\frac{\eta}{\Delta t}$, é possível perceber que a placa apresenta maior rigidez para maiores taxas de deformação ou viscosidade. Por outro lado, como já constatado nos exemplos anteriores, a solução elasto-plástica é obtida quando $\frac{\eta}{\Delta t} \rightarrow 0$.

⁶Os resultados de Alfano et al. (2001) foram digitalizados utilizando o programa *GetData*.

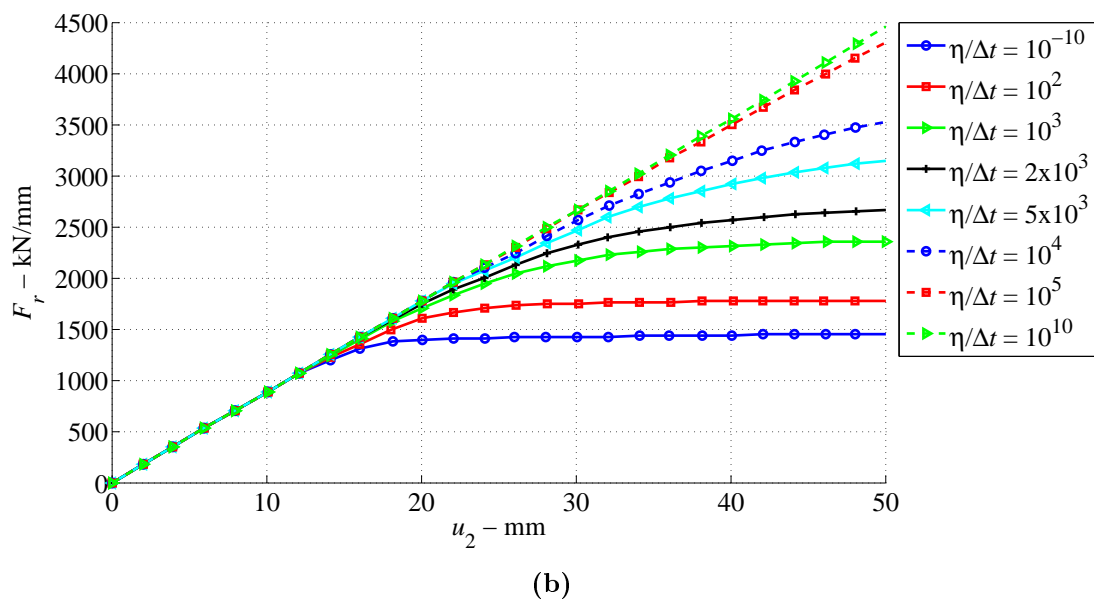
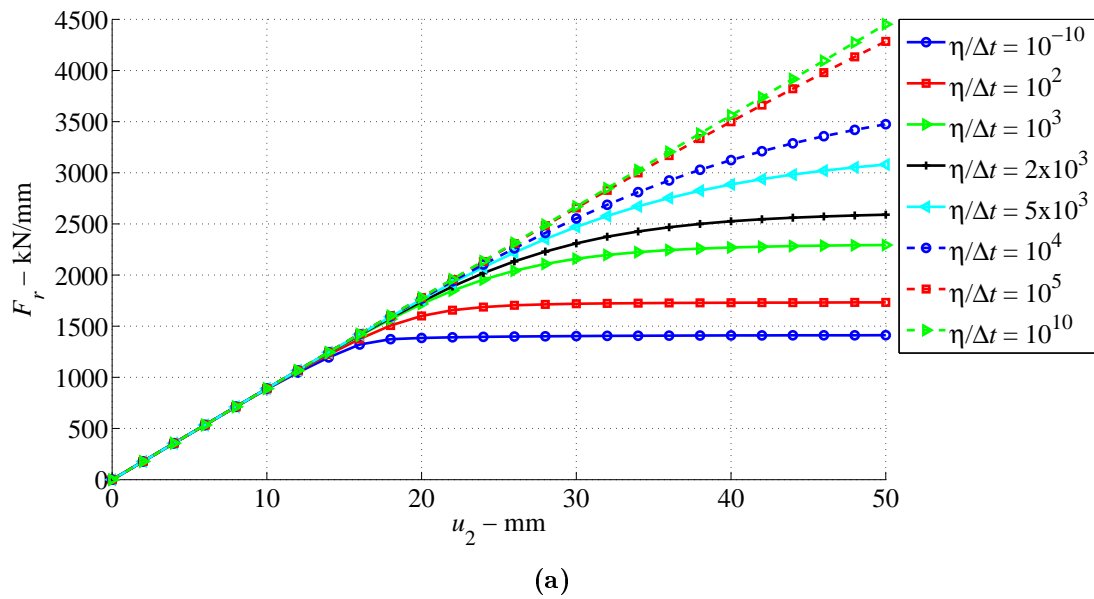


Figura 6.23: Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

O mesmo comportamento observado na Figura 6.22 é verificado nos modelos não lineares, de Perzyna (Figuras 6.23 e 6.25) e de Perić (Figuras 6.24 e 6.26), isto é, o aumento do parâmetro $\frac{\eta}{\Delta t}$ leva a um aumento da força de reação vertical F_r (aumento da rigidez).

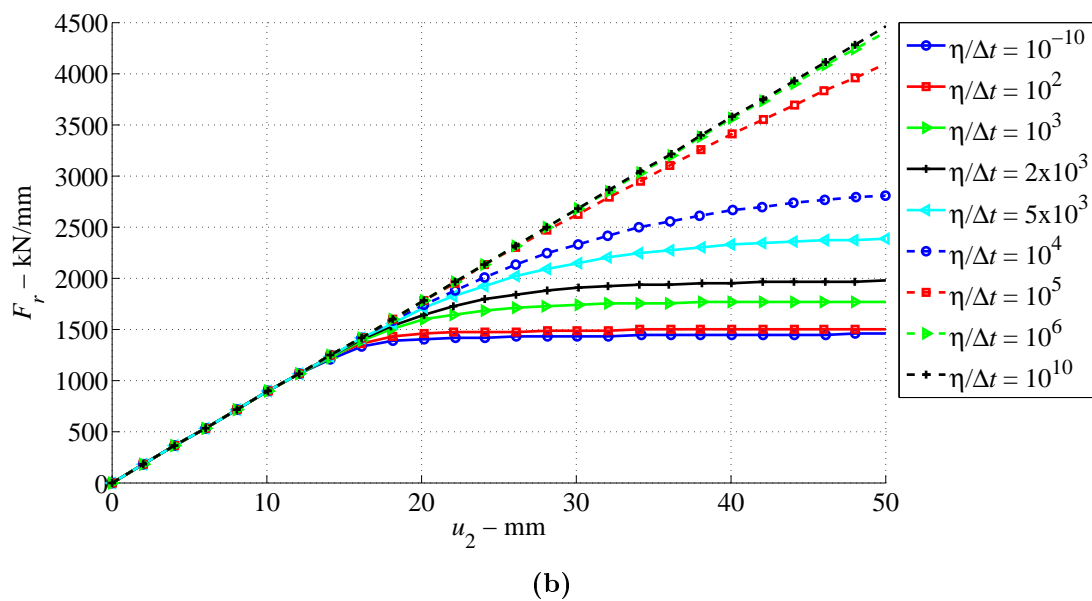
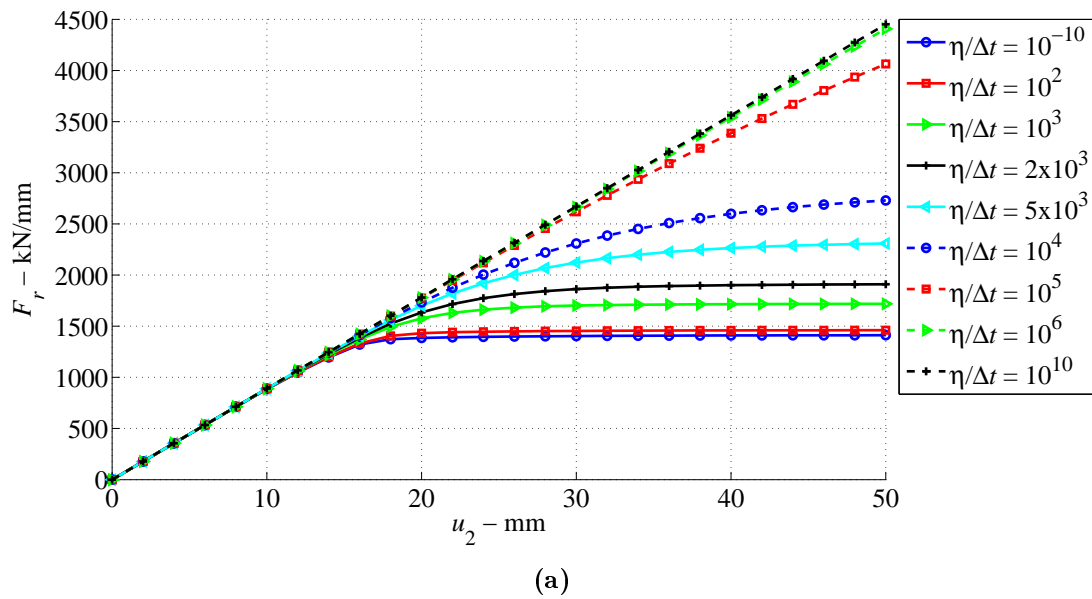
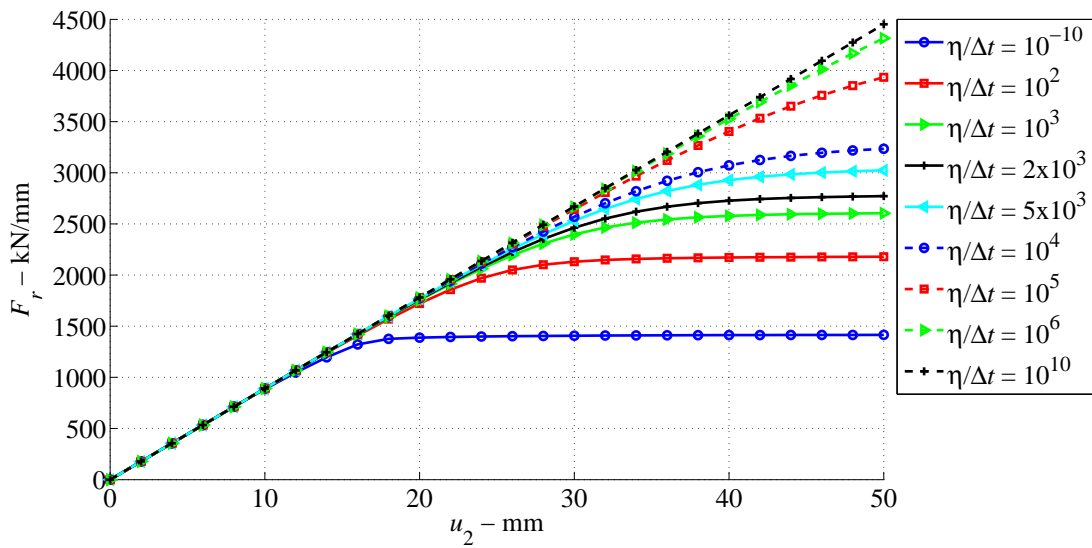
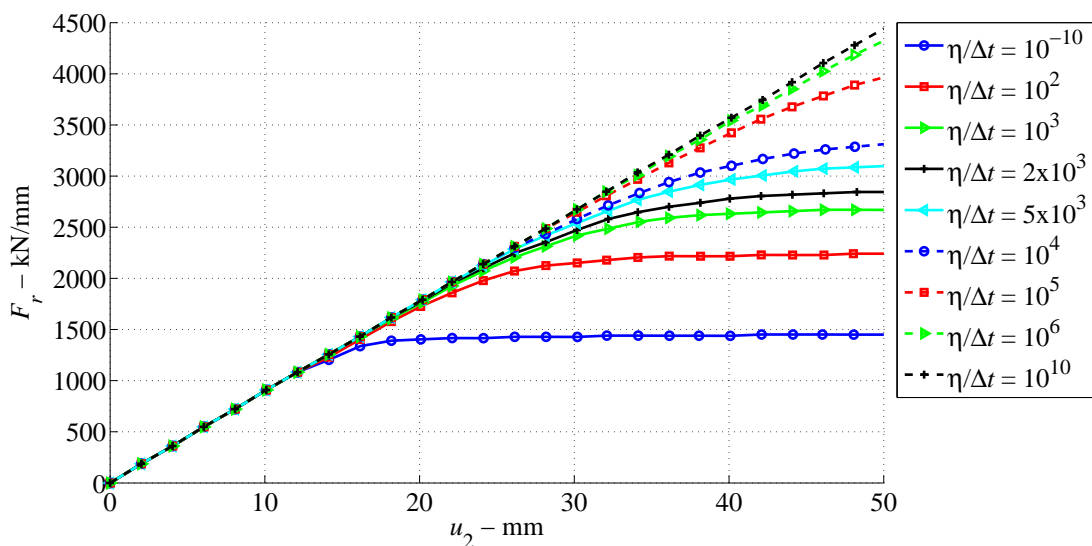


Figura 6.24: Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

Comparando as Figuras 6.23 e 6.24, 6.25 e 6.26, percebe-se que os modelos não lineares, de Perzyna e Perić, são diferentes. Isto é, apresentam diferentes respostas materiais para os mesmos valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e m . Além disso, verifica-se que a sensibilidade ao parâmetro $\frac{\eta}{\Delta t}$ também é distinta nos dois modelos não lineares.



(a)



(b)

Figura 6.25: Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 5$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

Uma importante constatação é feita quando confrontadas as Figuras 6.23 e 6.25, 6.24 e 6.26. Observa-se que com o aumento do fator m há uma redução à sensibilidade ao parâmetro $\frac{\eta}{\Delta t}$. O que faz todo o sentido, uma vez que $\frac{1}{m}$ representa a sensibilidade à taxa de deformação.

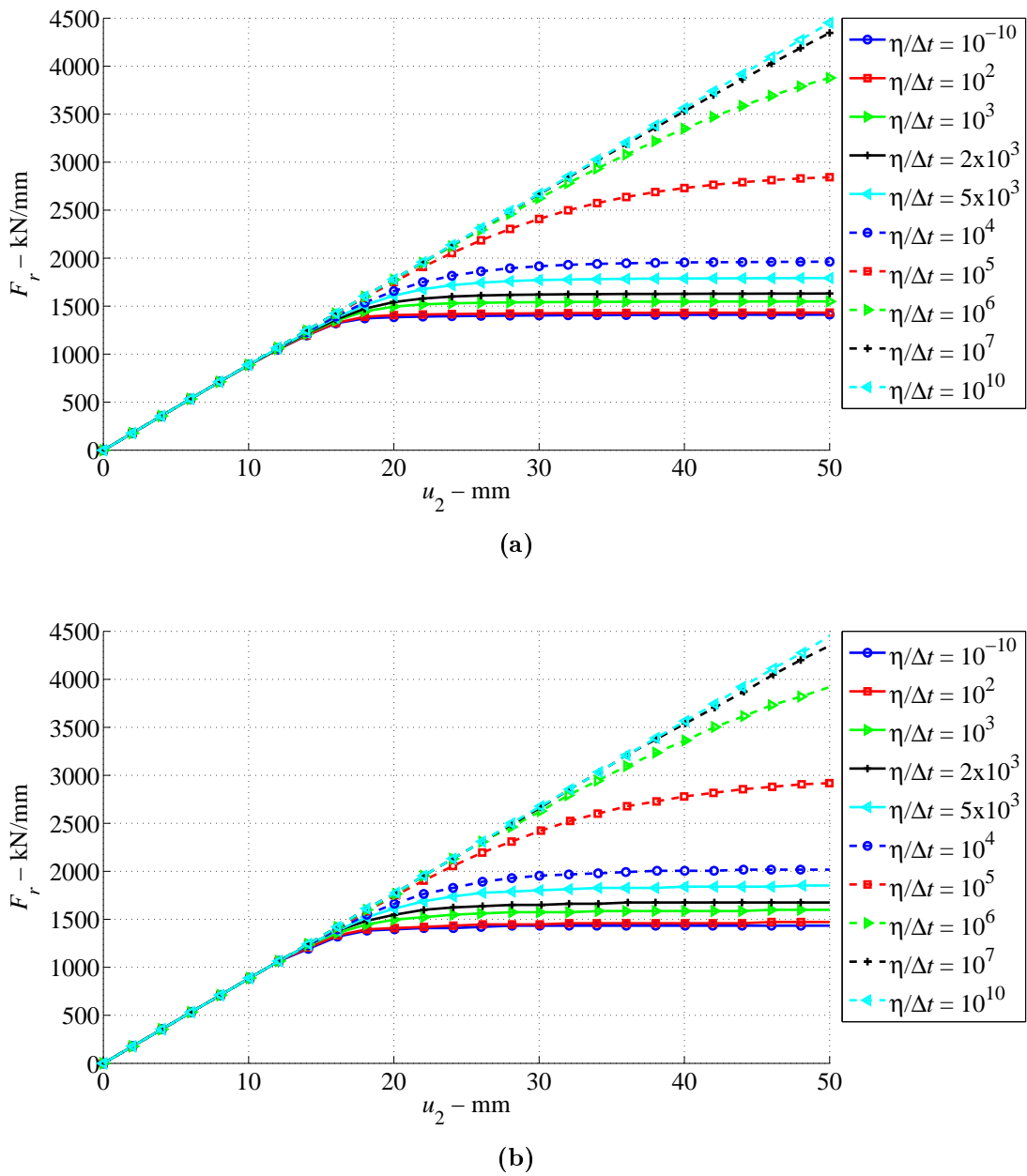
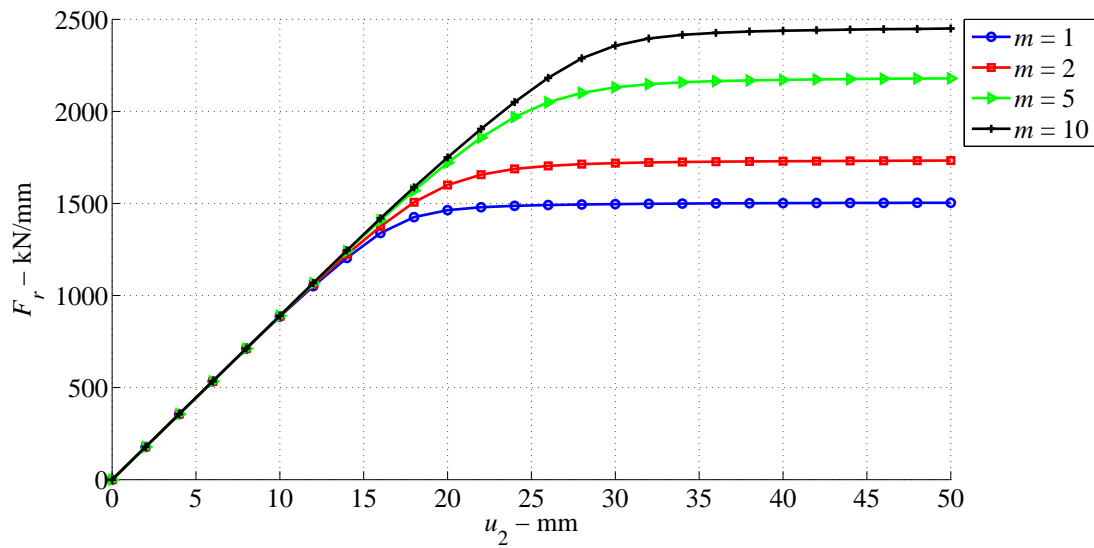
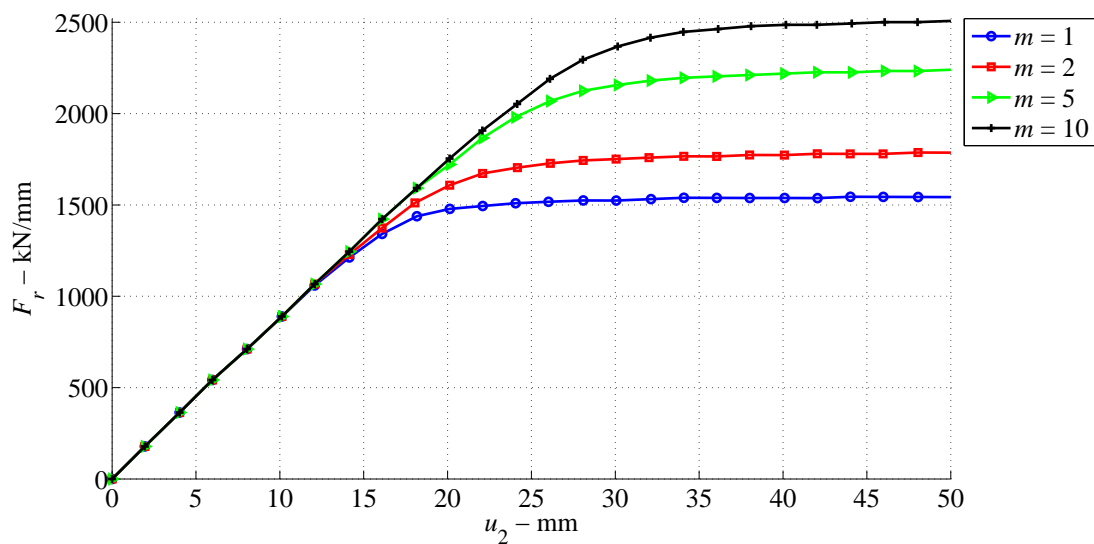


Figura 6.26: Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 5$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

A influência do parâmetro não linear m é avaliada nas Figuras 6.27 e 6.28, atribuindo $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$ aos respectivos modelos não lineares de Perzyna e Perić. Nas Figuras 6.29 e 6.30 realiza-se a mesma avaliação sobre m com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$, na ordem para os modelos não lineares de Perzyna e de Perić.



(a)



(b)

Figura 6.27: Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

No modelo não linear de Perzyna, diferentes sensibilidades ao parâmetro m são verificadas com a mudança de $\frac{\eta}{\Delta t}$. O que é visto nas Figuras 6.27 e 6.29. Para $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$ a carga limite aumenta para maiores valores de m . No entanto, o comportamento inverso é apresentado quando $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$. Esta inconsistência não ocorre no modelo de Perić, ver Figuras 6.28 e 6.30. Segundo Alfano et al. (2001), citando Perić (1993), este problema está relacionado ao fato de que o modelo não linear de Perzyna não recupera o comportamento invíscido (estático), o que acaba resultando em problemas de convergência quando $\frac{\eta}{\Delta t} \rightarrow 0$ ou $m \rightarrow \infty$.

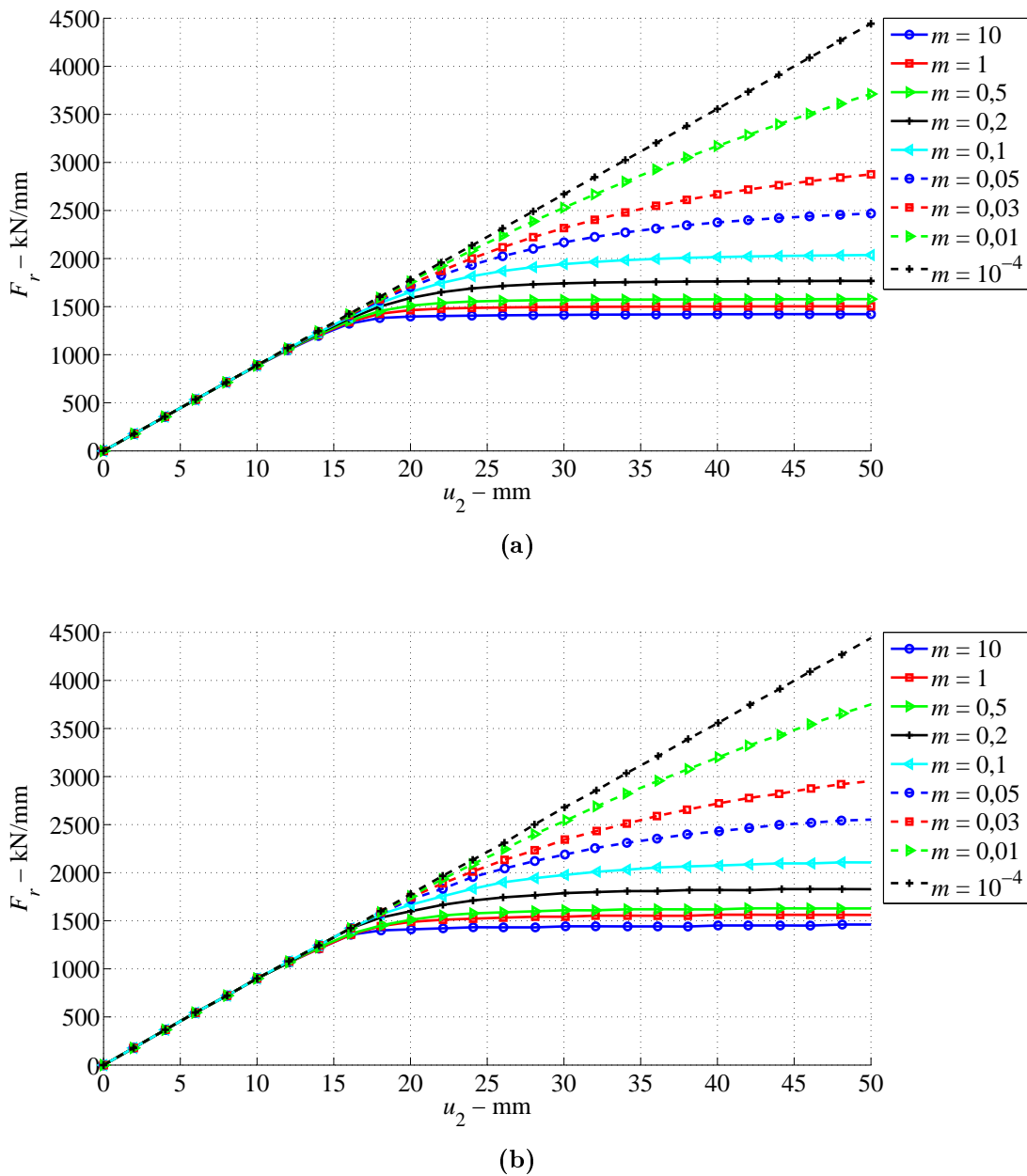


Figura 6.28: Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

Para contornar isto, Perić (1993) propõe um algoritmo que verifica se o problema é *rígido* (*stiff* - baixos valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ ou elevados valores para m) ou não. Para casos rígidos o problema invíscido é solucionado, a partir desta solução, por meio de um método de perturbação, é calculada tensão tentativa elástica para a solução do problema elasto-viscoplástico. Neste caso menores incrementos são necessários à solução do problema. Já, para o caso não rígido, a solução elasto-viscoplástica é diretamente realizada, possivelmente com incrementos maiores.

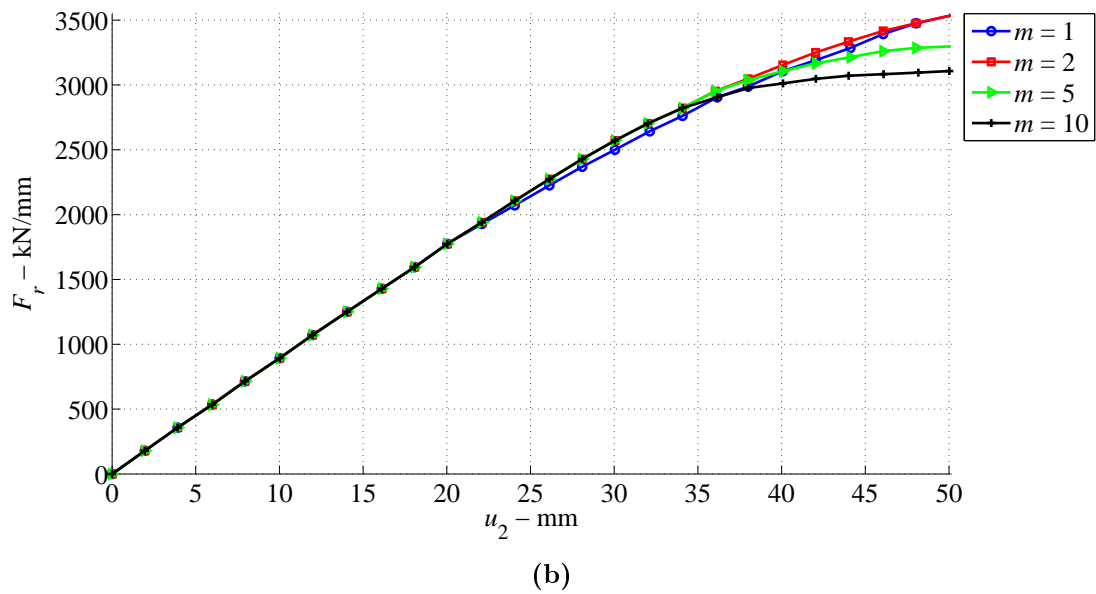
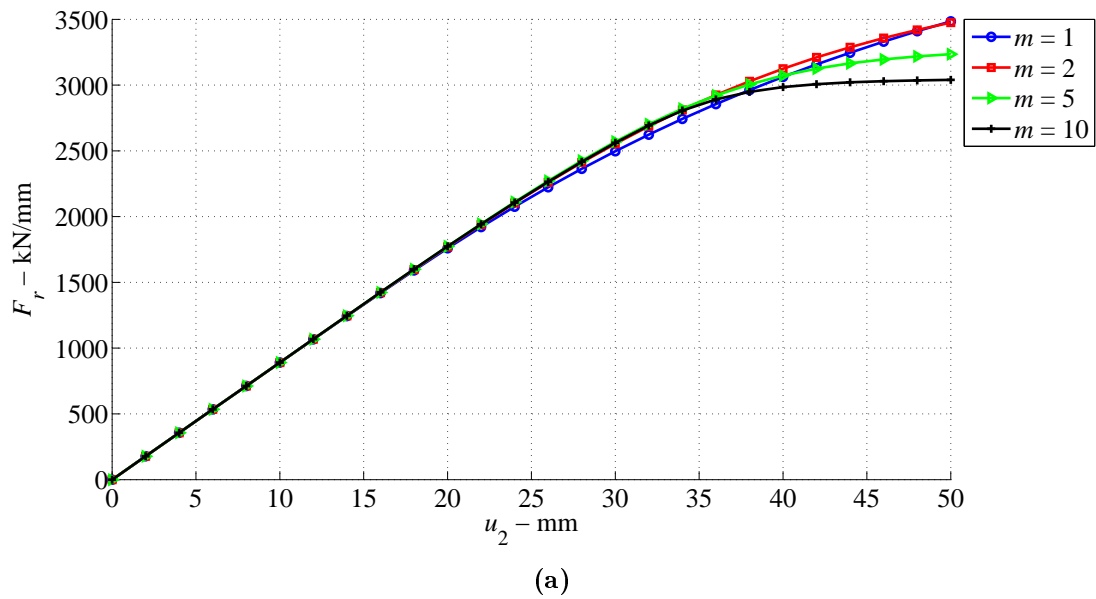
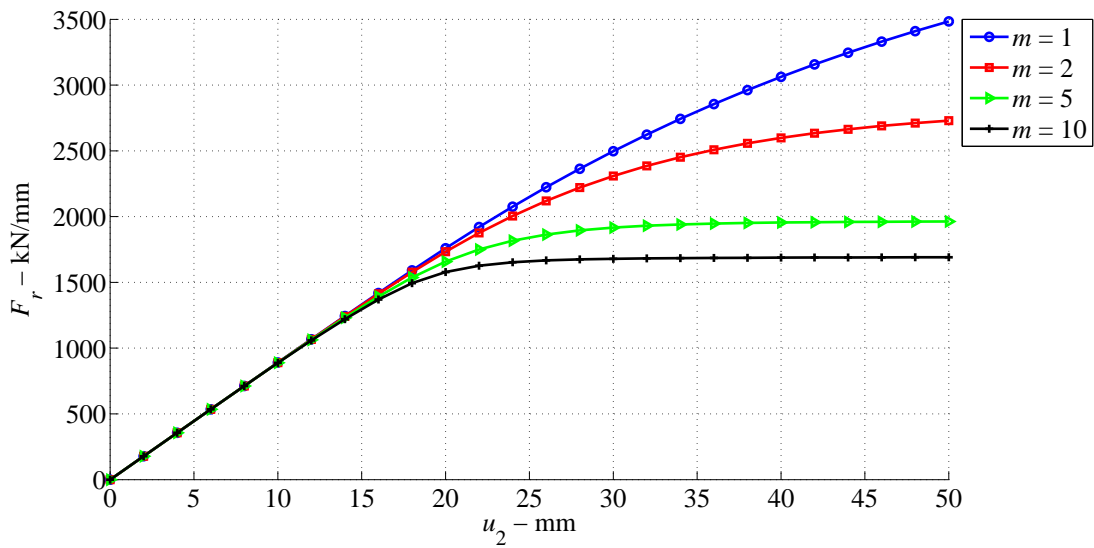
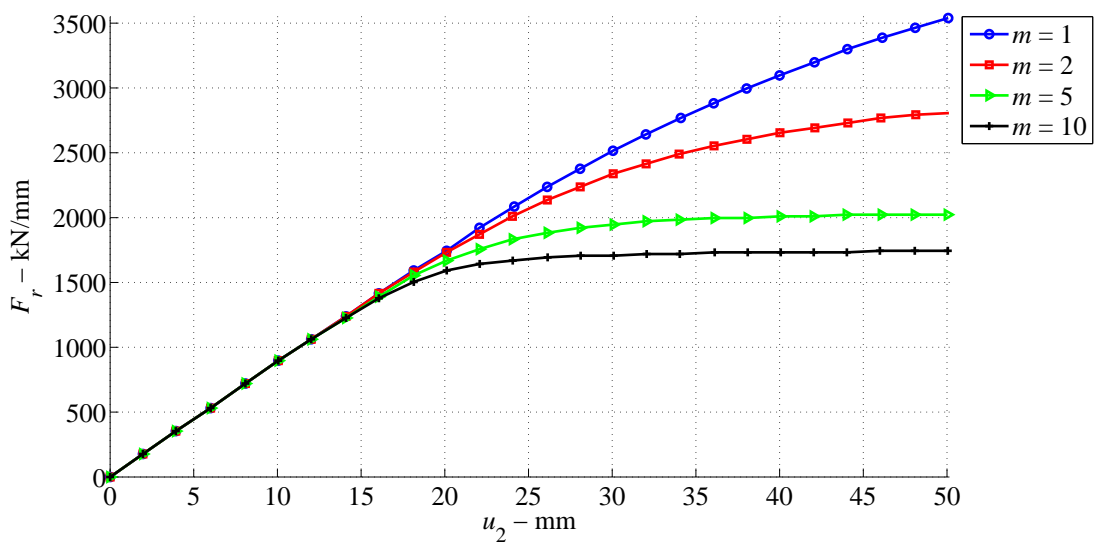


Figura 6.29: Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

O que já havia sido discutido, é agora mais uma vez observado, comparando as Figuras 6.23 e 6.24, 6.25 e 6.26, nota-se que diferentes curvas são obtidas para os modelos não lineares de Perzyna e de Perić com os mesmos valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e m .



(a)



(b)

Figura 6.30: Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$; (a) Presente trabalho; (b) Alfano et al. (2001).

De forma geral, a comparação entre os resultados aqui obtidos com os do trabalho de Alfano et al. (2001) mostra que ambos estão muito próximos (Figuras 6.22-6.30). Isto informa que a estratégia numérica implementada é capaz de simular, com resultados satisfatórios, problemas bidimensionais com campos de tensões mais complexos, como no caso da placa perfurada.

Os contornos da deformação viscoplástica acumulada α , para $\bar{u}_2 = 26\text{mm}$, são mostrados nas Figuras 6.31(a)-(c), respectivamente para os modelos linear e não linear de Perzyna e para o modelo de Perić. As propriedades viscosas utilizadas são dadas na

Tabela 6.9⁷. As Figuras 6.31(a)-(c) mostram resultados típicos obtidos neste tipo de problema (placa perfurada). O escoamento plástico inicia no ponto de intersecção entre a linha de simetria inferior e a parede do furo, e evolui em uma frente oblíqua até que toda a seção transversal seja plastificada (de Souza Neto et al., 2008).

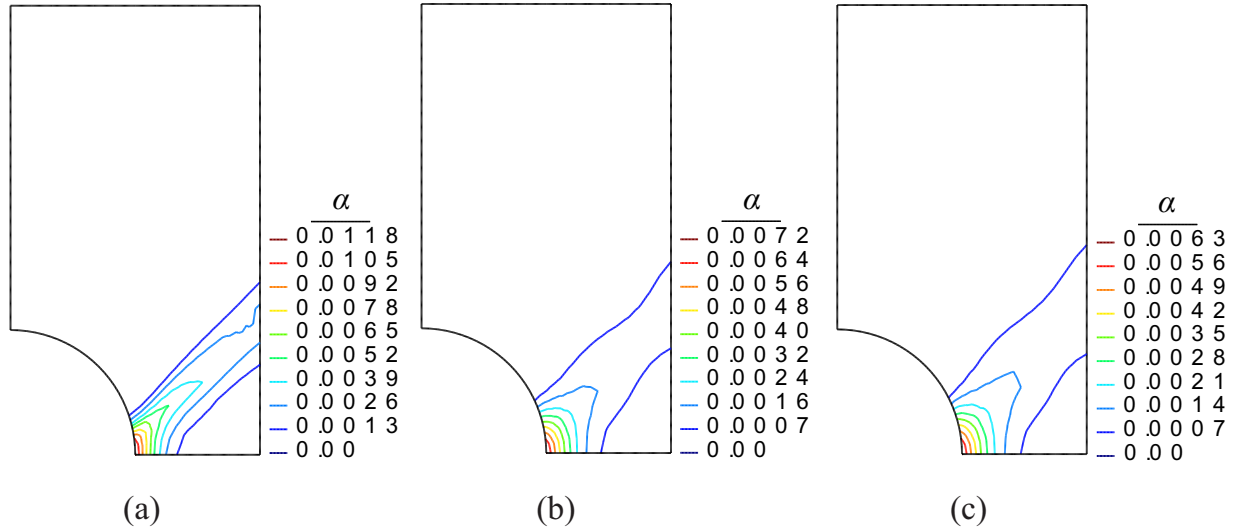


Figura 6.31: Deformação viscoplástica acumulada, para $\bar{u}_2 = 26\text{mm}$. (a) Modelo linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$; (b) Modelo não linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$ e $m = 2$; (c) Modelo de Perić, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^3$ e $m = 2$.

6.2 Deformações Finitas

Para deformações finitas, os resultados computacionais são confrontados a soluções analíticas⁸ obtidas para ensaios hiperelásticos de tração-compressão e cisalhamento puro. Ainda, são colocados os resultados numéricos para o problema de estrição de uma barra cilíndrica (*necking*), normalmente empregado em análises (visco)plásticas em grandes deformações, ver, por exemplo, de Souza Neto et al. (1996), Lin e Brocks (2004) e Simo e Armero (1992).

6.2.1 Ensaios Hiperelásticos: tração-compressão e cisalhamento puro

Aqui são realizadas análises simples, de tração-compressão e cisalhamento puro, de forma a avaliar o desempenho do procedimento de solução implementado e mostrar a relação não linear entre as tensões, $\bar{\tau}$ para tração compressão e σ para cisalhamento, com as respectivas deformações.

⁷No artigo de Alfano et al. (2001) é informado na Figura 8 que utiliza-se $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^3$ para o modelo não linear de Perzyna, no entanto, aqui verificou-se que os resultados apresentados nesta figura, com $m = 2$, são possíveis apenas para valores em torno de $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^2$.

⁸Soluções analíticas para problemas (visco)plásticos em grandes deformações não são facilmente encontradas na literatura.

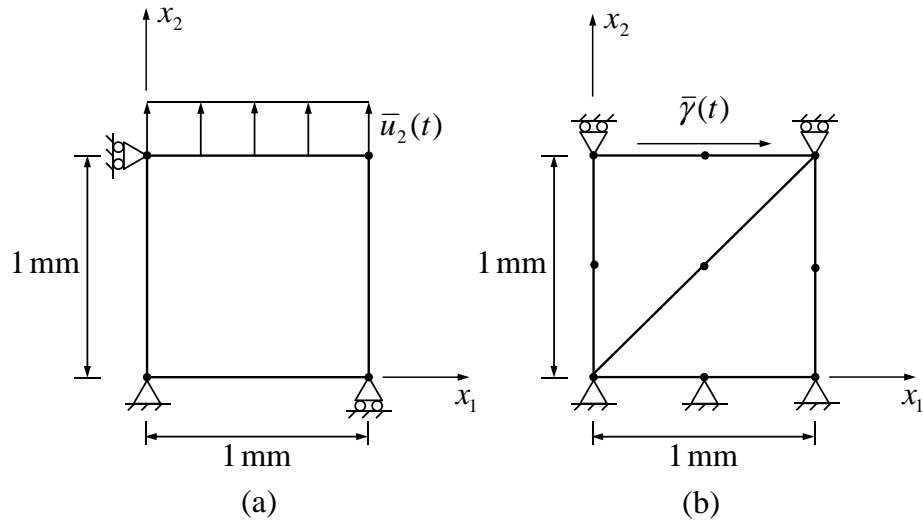


Figura 6.32: Modelos de elementos finitos. (a) Tração-compressão unidimensional sob hipótese de axissimetria; (b) cisalhamento puro sob hipótese de EPD.

Para o ensaio de tração-compressão, considera-se um caso de tensão uniaxial ($\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{22} \neq 0$) de uma barra, cujo modelo de EF sob a hipótese de axissimetria em torno de x_2 é mostrado na Figura 6.32(a), é utilizado 1 elemento quadrilateral bilinear.

Para este problema, considerando a equação constitutiva (3.37) e a medida de deformação (3.18), a solução exata para a componente $\bar{\tau}_{22}$ é simplesmente dada por

$$\bar{\tau}_{22} = E \ln(\lambda_2), \quad (6.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade e λ_2 é o estiramento na direção 2, o qual se relaciona com o deslocamento prescrito \bar{u}_2 da seguinte forma

$$\lambda_2 = \frac{l_0 + \bar{u}_2}{l_0}, \quad (6.2)$$

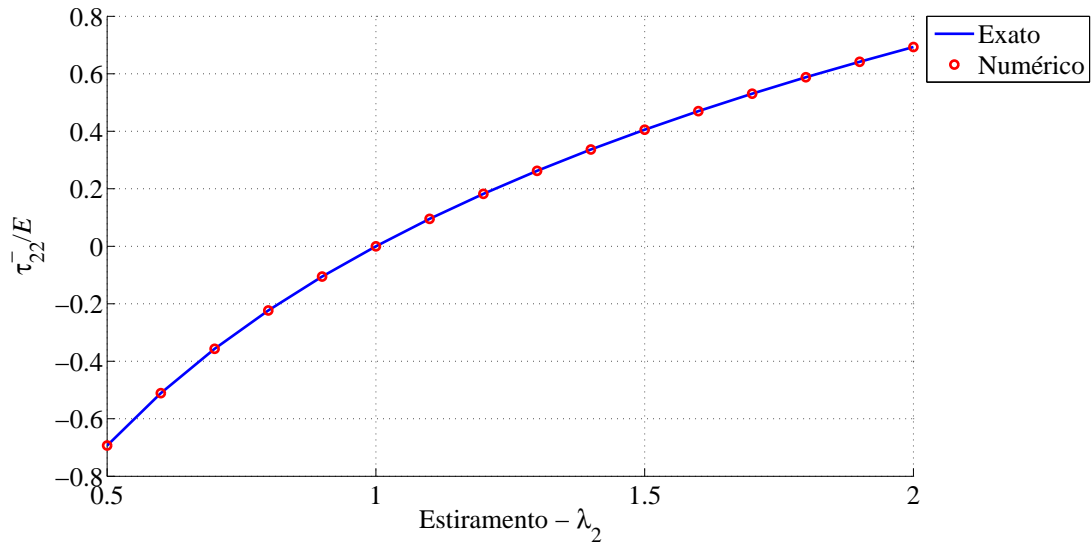
sendo l_0 o comprimento inicial da barra. Na Figura 6.33(a) é mostrada a comparação dos resultados numéricos aos analíticos, onde é mostrada a tensão normalizada $\frac{\bar{\tau}_{33}}{E}$ em função de λ_3 , com $E = 200\text{GPa}$ e $\nu = 0,3$.

O modelo da Figura 6.32(b), de 2 elementos triangulares quadráticos, refere-se à análise de um estado de cisalhamento puro, sob a hipótese de estado plano de deformações. Para este caso a solução analítica encontrada em Weber e Anand (1990) em termos da tensão de *Cauchy* é dada por

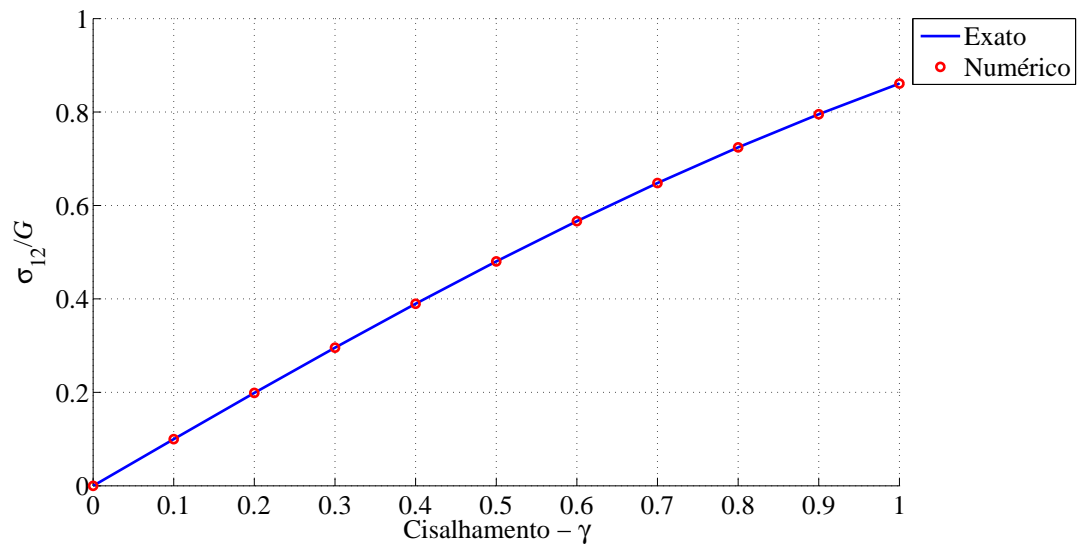
$$\sigma_{12} = G\bar{\gamma} \left[\frac{1}{\bar{\gamma}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\bar{\gamma}^2}} \ln \left(1 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2 + \bar{\gamma}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\bar{\gamma}^2} \right) \right] \quad (6.3)$$

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = \frac{1}{2}\bar{\gamma}\sigma_{12}, \quad (6.4)$$

onde G é o módulo de cisalhamento. Na Figura 6.33(b) são comparados os resultados numéricos e analíticos para o estado de cisalhamento puro, é mostrado o gráfico da tensão normalizada $\frac{\sigma_{12}}{G}$ em função de $\bar{\gamma}$. Nota-se nas Figuras 6.33(a)-(b) que as respostas hiperelásticas numéricas coincidem com as soluções exatas nos dois casos analisados.



(a)



(b)

Figura 6.33: Resultados analíticos e numéricos. (a) Tração-compressão unidimensional; (b) Cisalhamento puro

6.2.2 Estricção de uma Barra Cilíndrica - *Necking*

Outro teste numérico clássico aplicado para verificar a efetividade de teorias elasto-(visco)plástica em deformações finitas é a estricção de uma barra cilíndrica sob tração uniaxial. Ver, por exemplo, de Souza Neto et al. (1996), Lin e Brocks (2004) e Simo e Armero (1992). Para tal, considera-se uma barra com comprimento de 53,334mm. O raio decresce linearmente do valor de 6,413mm nas duas extremidades ao raio de 6,35mm na região central. Isto é feito para que a estricção seja iniciada. Devido à característica de simetria, apenas um quarto da barra é discretizado. A discretização e as condições de contorno são mostradas na Figura 6.34, onde são utilizados 200 elementos quadriláteros biquadráticos. O modelo de elementos finitos é submetido a um carregamento de deslocamento $\bar{u}_2 = 7\text{mm}$, aplicado a uma taxa constante de $7\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ em 250 incrementos. A tolerância utilizada no método de *Newton-Raphson*, local e global, é $e_{tol} = 1 \times 10^{-6}$. As propriedades elasto-plásticas são dadas na Tabela 6.8.

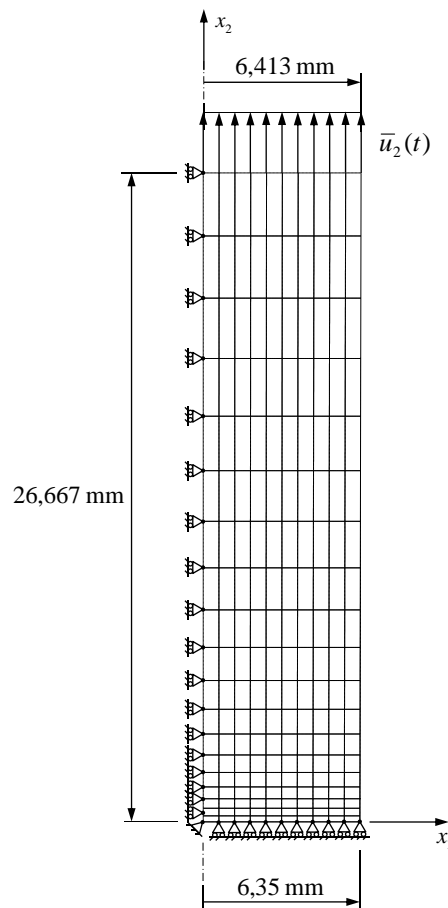


Figura 6.34: Modelo de elementos finitos para a barra cilíndrica, sob hipótese de axissimetria.

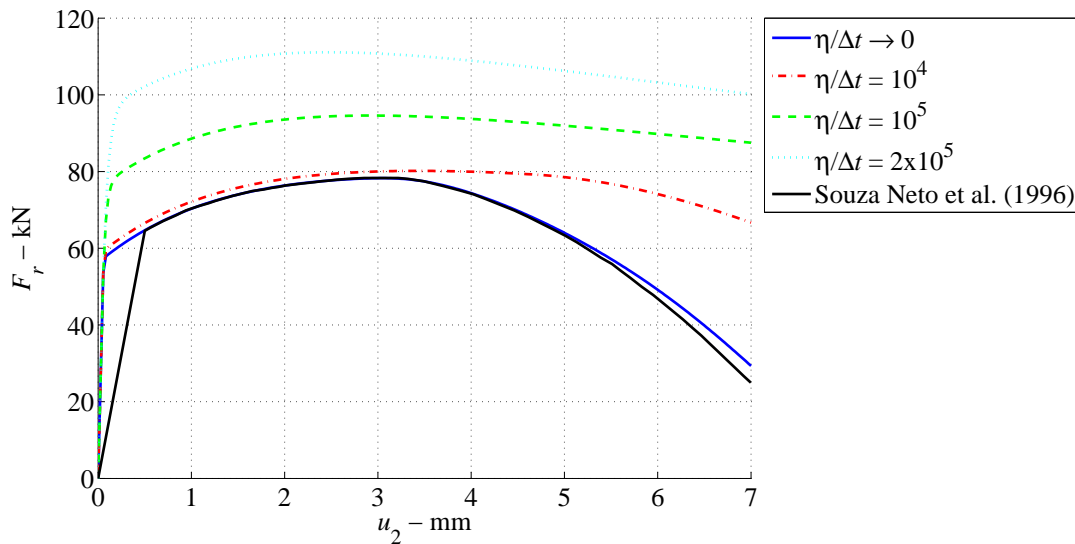
E [GPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	σ_∞ [MPa]	δ [-]	H [GPa]
200	0,3	450	715	16,93	0,12924

Tabela 6.8: Propriedades elásticas e plásticas para a barra.

	Perzyna linear	Perzyna não linear	Perić
$\frac{\eta}{\Delta t}$	10^4	1	10
m	—	2	2

Tabela 6.9: Propriedades viscosas para a barra cilíndrica, Figura 6.45.

Nas Figuras 6.35-6.37 é analisada a influência do parâmetro η na resposta da reação vertical F_r em função do deslocamento \bar{u}_2 , respectivamente, para os modelos linear e não linear de Perzyna e para o modelo de Perić. Para os modelos não lineares atribui-se $m = 2$.

Figura 6.35: Curva reação-deslocamento para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$.

Nos resultados das Figuras 6.35-6.37 são identificadas as mesmas características já discutidas nos casos de deformações infinitesimais. Isto é, com o aumento da taxa de deformação ou da viscosidade, maiores reações são alcançadas. Lembrando que isto se deve ao aumento do limite elástico. Ainda, o caso limite leva à solução elastoplástica. A solução invíscida utilizada como referência é aquela encontrada em de Souza Neto et al. (1996).

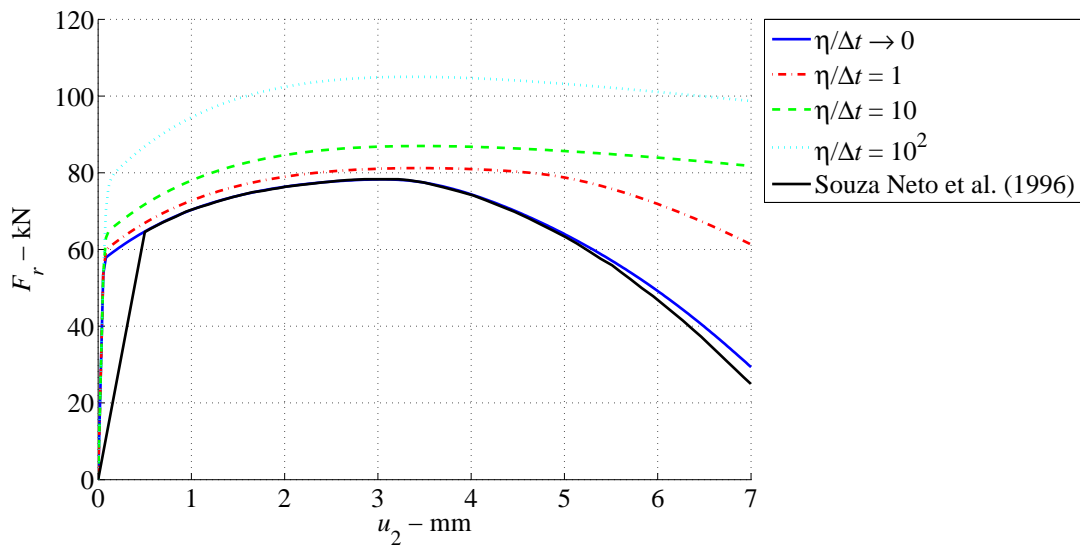


Figura 6.36: Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$.

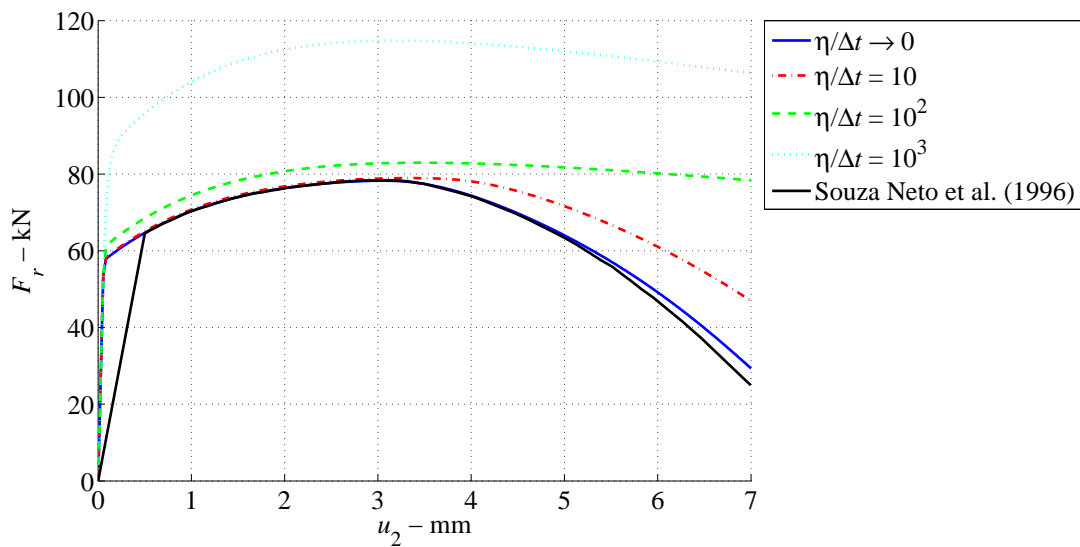


Figura 6.37: Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$.

Nas Figuras 6.38 e 6.39 verifica-se também o comportamento reação-deslocamento, respectivamente, para os modelos não lineares de Perzyna ($\frac{\eta}{\Delta t} = 1$) e Perić ($\frac{\eta}{\Delta t} = 10$), onde avalia-se a influência do parâmetro m . O problema já relatado ao modelo não linear de Perzyna é visto na Figura 6.38. O que não ocorre com o modelo de Perić, o qual obtém-se aproxima-se da solução invíscida com o aumento do parâmetro m .

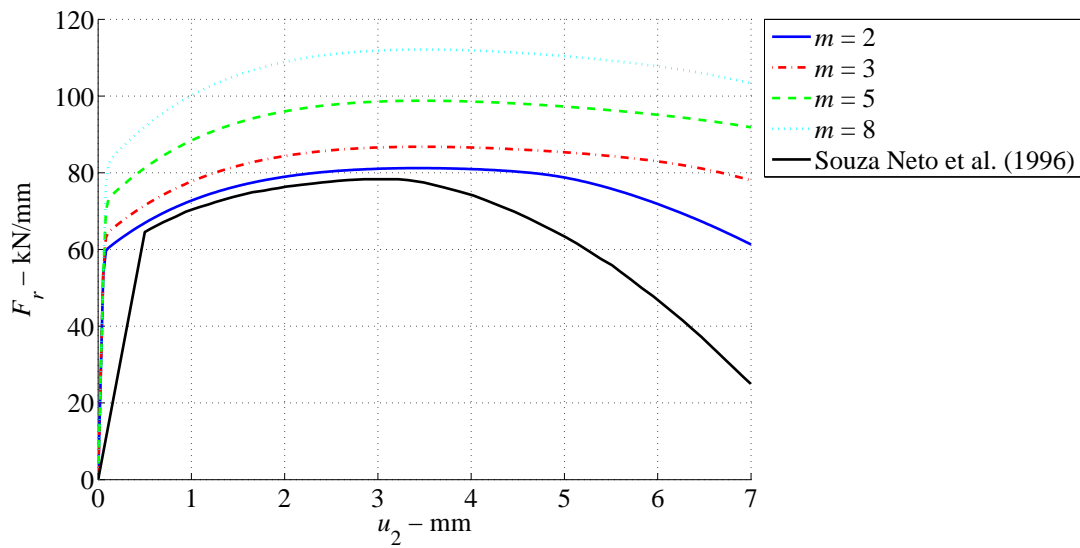


Figura 6.38: Curva reação-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 1$.

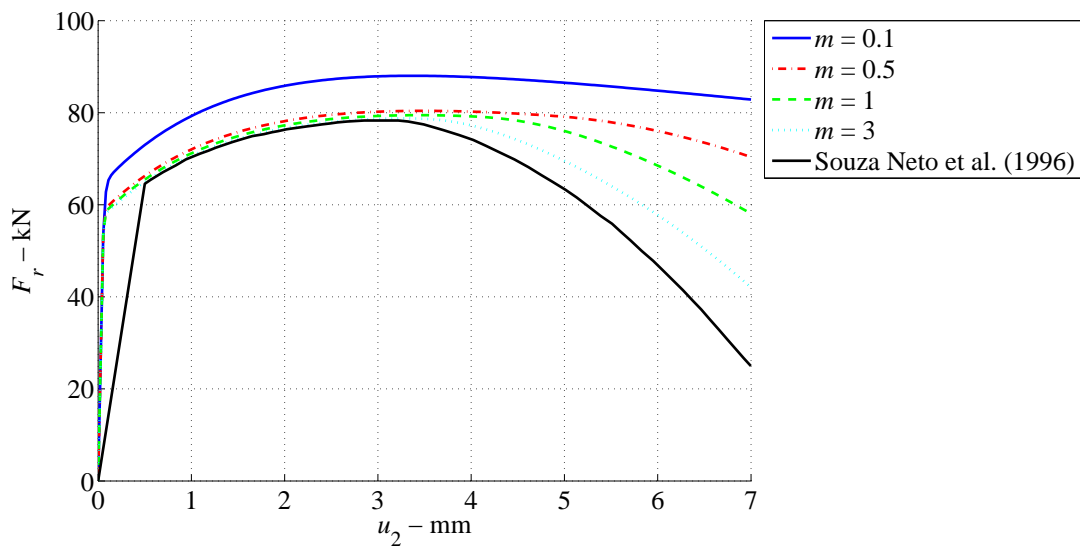


Figura 6.39: Curva reação-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10$.

Nas Figuras 6.40-6.42 verifica-se a influência de η no comportamento do raio central da barra r em função do deslocamento \bar{u}_2 , respectivamente, para os modelos linear e não linear de Perzyna e para o modelo de Perić. Para os modelos não lineares atribui-se $m = 2$.

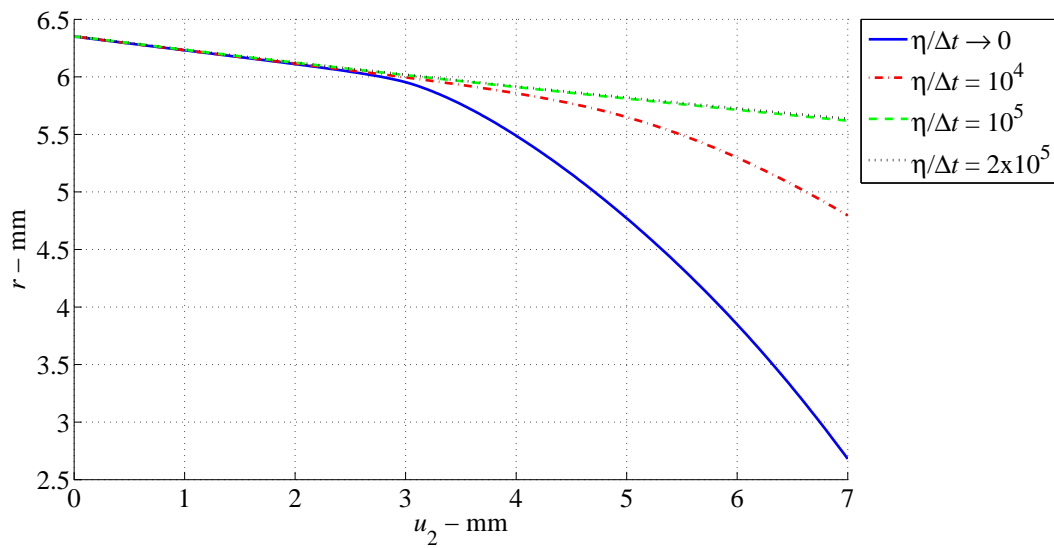


Figura 6.40: Curva raio-deslocamento para o modelo linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$.

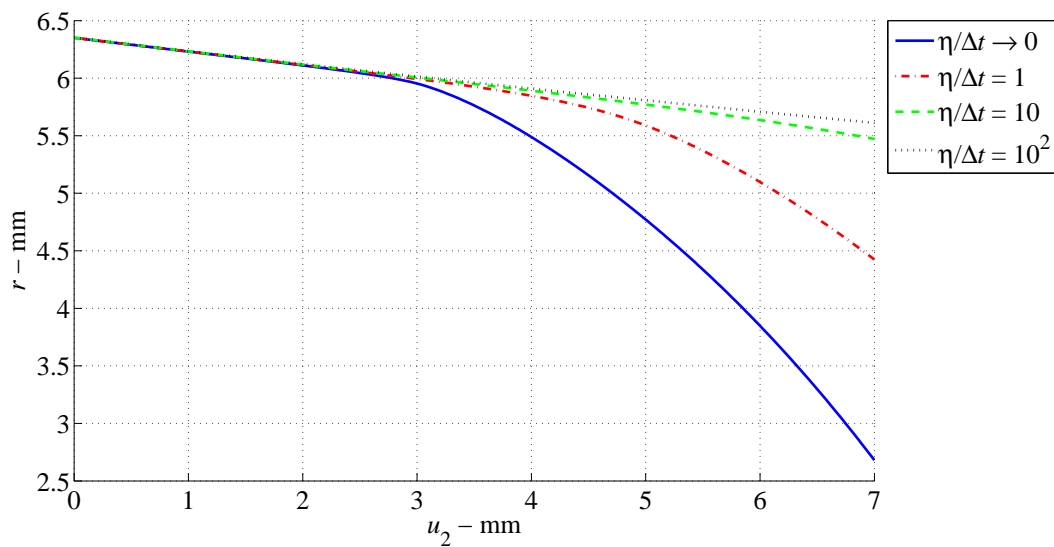


Figura 6.41: Curva raio-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$.

Nestas figuras (6.40-6.42) é possível observar que há uma redução na estricção da barra com o aumento da taxa de deformação ou da viscosidade. Fato que é observado no artigo de Lin e Brocks (2004), por exemplo.

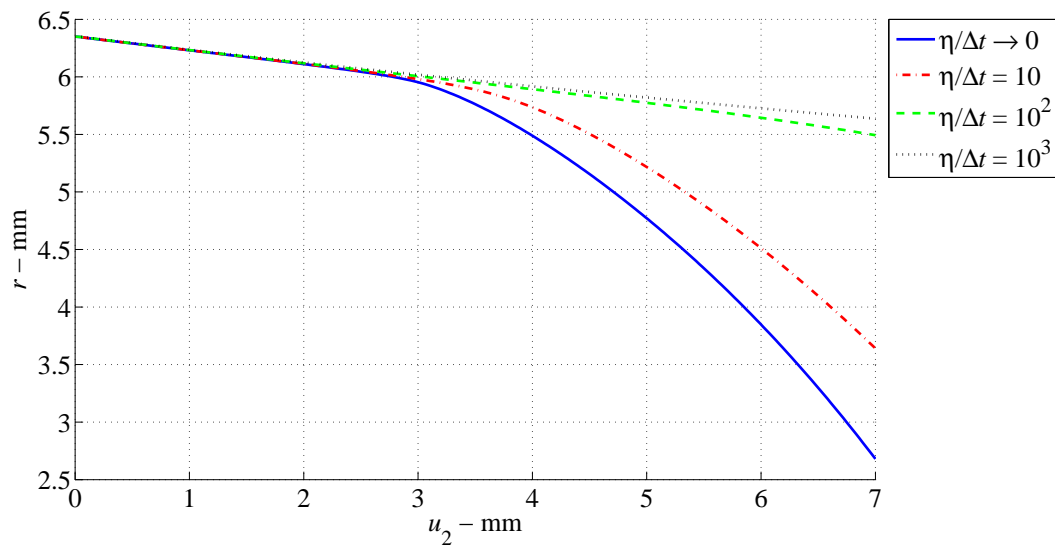


Figura 6.42: Curva raio-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de $\frac{\eta}{\Delta t}$ e $m = 2$.

Nas Figuras 6.43 e 6.44 o comportamento raio-deslocamento é mostrado para diferentes valores de m , respectivamente, para os modelos não lineares de Perzyna ($\frac{\eta}{\Delta t} = 1$) e Perić ($\frac{\eta}{\Delta t} = 10$). O conhecido problema do modelo não linear de Perzyna é novamente verificado na Figura 6.43. E o modelo de Perić, mais uma vez, se mostra adequado à recuperação da solução estática com o aumento do parâmetro m .

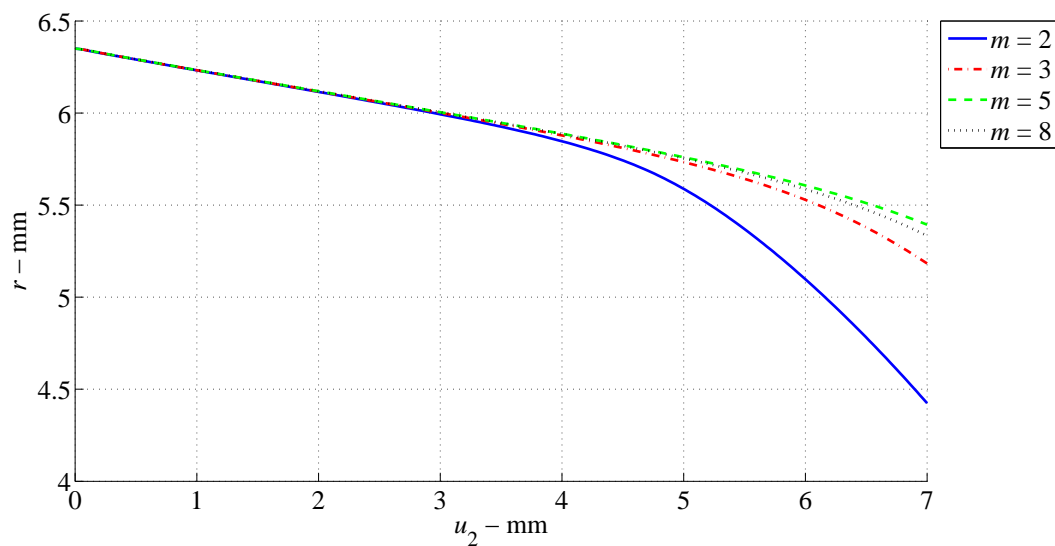


Figura 6.43: Curva raio-deslocamento para o modelo não linear de Perzyna com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 1$.

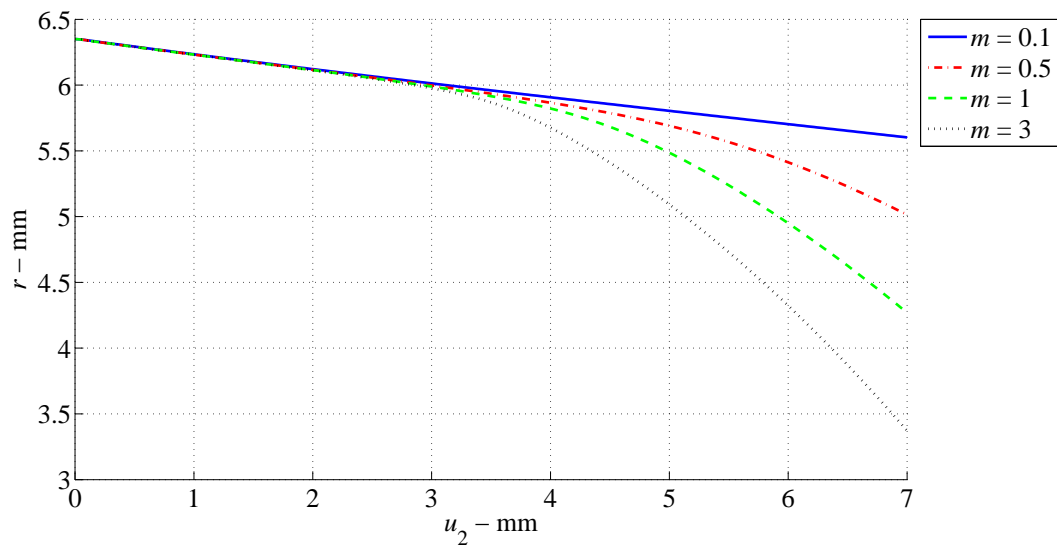


Figura 6.44: Curva raio-deslocamento para o modelo de Perić com diferentes valores de m e $\frac{\eta}{\Delta t} = 10$.

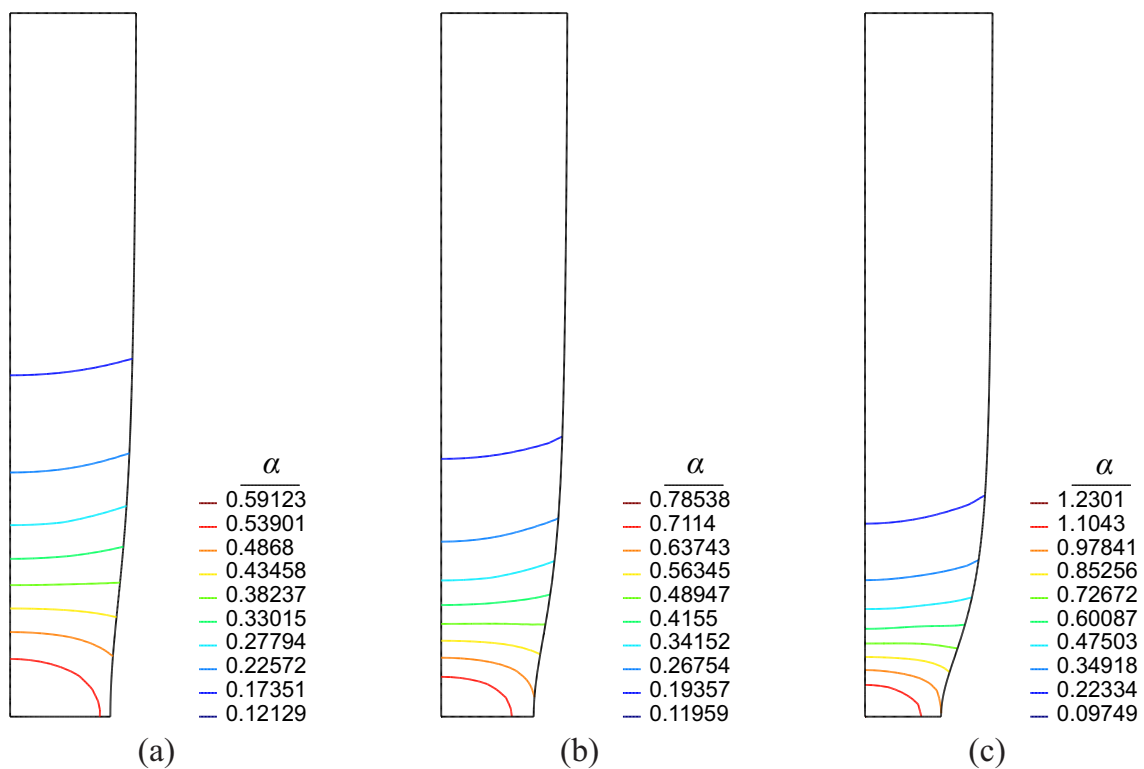


Figura 6.45: Deformação viscoplástica acumulada, para $\bar{u}_2 = 7\text{mm}$. (a) Modelo linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10^4$; (b) Modelo não linear de Perzyna, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 1$ e $m = 2$; (c) Modelo de Perić, com $\frac{\eta}{\Delta t} = 10$ e $m = 2$.

Os contornos da deformação viscoplástica acumulada α , para $\bar{u}_2 = 7\text{mm}$, são mostrados nas Figuras 6.45(a)-(c), respectivamente para os modelos linear e não linear de Perzyna e para o modelo de Perić, as propriedades viscosas utilizadas são dadas na Ta-

bela 6.9. Nestas figuras são visualizadas as principais características do ensaio de estrição da barra (em deformações finitas): a redução acentuada e a plastificação do raio central. Destaca-se que com a total plastificação da seção problemas numéricos, como travamento, podem surgir (de Souza Neto et al., 1996).

7 CONCLUSÕES

De forma geral, o objetivo principal de implementar e avaliar modelos constitutivos viscoplásticos foi alcançado. Antes da implementação foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o assunto, de maneira a entender e descrever uma formulação concisa sobre viscoplasticidade, tanto para pequenas quanto para grandes deformações. Em ambos os casos seguiu-se o formalismo da termodinâmica de variáveis internas, juntamente a um enfoque matemático baseado em resultados de análise convexa, e então foi generalizado o modelo reológico de *Bingham* a problemas multidimensionais. Esta forma de apresentar o problema mantém o rigor tanto do ponto de vista físico como matemático. As equações constitutivas viscoplásticas, obtidas a partir do *princípio da máxima dissipação*, foram particularizadas ao modelo J_2 .

Para o caso específico de deformações finitas, o uso de uma descrição *Lagrangiana Total* combinada ao emprego da energia de *Hencky* e ao mapeamento exponencial levou a algoritmos semelhantes aos obtidos para deformações infinitesimais, os quais são robustos e de fácil implementação.

O módulo tangente consistente, em pequenas e grandes deformações, foi obtido para uma superfície de escoamento suave geral e particularizado ao modelo J_2 . A obtenção do módulo tangente consistente viscoplástico, assim como as equações constitutivas, seguiu uma extensão adequada do procedimento utilizado a materiais elastoplásticos. O módulo tangente consistente desempenha um importante papel em estratégias numéricas de solução de problemas não lineares utilizando o método dos elementos finitos.

A partir dos resultados numéricos obtidos bem como das comparações a soluções de referência, além do que já foi discutido no Capítulo 6, de forma sucinta é possível concluir que o recurso computacional implementado é capaz de capturar os fenômenos viscoplásticos de dependência da taxa de deformação e de relaxação de tensão, para problemas planos e axissimétricos.

Considerando os modelos viscoplásticos linear e não de Perzyna e o modelo de Perić, a implementação destes destacou a importância da análise das características matemáticas (analíticas e numéricas) dos modelos constitutivos na construção de um algoritmo robusto e eficiente.

Na presente dissertação foram considerados apenas problemas *quasi*-estáticos. No entanto, dentro do contexto do projeto de pesquisa de conformação sob altas velocidades,

como trabalho futuro sugere-se a extensão da formulação aqui descrita a problemas dinâmicos, onde sejam considerados os efeitos de inércia, por exemplo. Outra tarefa a ser realizada é a calibração dos modelos constitutivos, a partir de ensaios experimentais empregando materiais que pertençam à classe estudada (elasto-viscoplásticos). Nessa tarefa as avaliações e comparações aqui realizadas (em pequenas e grandes deformações) serão de grande importância.

REFERÊNCIAS

Alfano, G.; Rosati, L. A general approach to the evaluation of consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 167, p. 75–89, 1998.

Alfano, G.; Angelis, F. D.; Rosati, L. General solution procedures in elasto/viscoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 5123–5147, 2001.

Angelis, F. D. An internal variable variational formulation of viscoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 35–54, 2000.

Argyris, J. H.; Kleiber, M. Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity - natural approach. part 1. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 11, p. 215–247, 1977.

Argyris, J. H.; Doltsinis, J. S.; Kleiber, M. Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity - natural approach. part ii. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 14, p. 259–294, 1978.

Asaro, R. J.; Lubarda, V. A. **Mechanics of Solids And Materials**. Cambridge University Press, 2006.

Asaro, R. J. Micromechanics of crystals and polycrystals. v. 23 of **Advances in Applied Mechanics**, p. 1–115. Elsevier, 1983.

Badrinarayanan, S.; Zabarar, N. A two-dimensional FEM code for the analysis of large deformations of hyperelastic viscoplastic solids. 1993.

Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. Wiley, 2000.

Benallal, A. On the stability of some time-integration schemes in quasi-static hardening elasto-viscoplasticity. **Engineering Analysis**, v. 4, p. 95–99, 1987.

Bonet, J.; Wood, R. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge University Press, 1997.

- Chaboche, J. L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. **International Journal of Plasticity**, v. 5, p. 247–302, 1989.
- Chaboche, J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. **International Journal of Plasticity**, v. 24, p. 1642–1693, 2008.
- Chen, W.; Han, D. **Plasticity for structural engineers**. Springer-Verlag, 1988.
- Coleman, B. D.; Gurtin, M. E. Thermodynamics with Internal State Variables. **Reports on Progress in Physics**, v. 47, p. 597–613, 1967.
- Cristescu, N.; Suliciu, I. **Viscoplasticity**. Mechanics of Plastic Solids. Martinus Nijhoff, 1982.
- Dafalias, Y. F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 50, p. 561–565, 1983.
- de Souza Neto, E. A.; Perić, D.; Owen, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. John Wiley & Sons, 2008.
- de Souza Neto, E.; Perić, D.; Dutko, M.; Owen, D. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, p. 3277–3296, 1996.
- Deseri, L.; Mares, R. A class of viscoelastoplastic constitutive models based on the maximum dissipation principle. **Mechanics of Materials**, v. 32, p. 389–403, 2000.
- Dhatt, G.; Touzot, G. **The finite element method displayed**. (A Wiley-Interscience publication). Wiley, 1984.
- Duvaut, G.; Lions, J. **Inequalities in mechanics and physics**. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1976.
- Dym, C.; Shames, I. **Solid mechanics: a variational approach**. Advanced engineering series. McGraw-Hill, 1973.
- Eterovic, A. L.; Bathe, K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 1099–1114, 1990.
- Eve, R. A.; Reddy, B. D.; Rockafellar, R. T. An internal variable theory of elastoplasticity based on the maximum plastic work inequality. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 48, p. 59–83, 1990.

Germain, P. **Cours de mécanique des milieux continus**. Number v. 1 in Cours de mécanique des milieux continus. Masson, 1973.

Germain, P.; Nguyen, Q. S.; Suquet, P. Continuum thermodynamics. **Journal of Applied Mechanics**, v. 50, p. 1010–1020, 1983.

Gilat, A.; Subramaniam, V. **Numerical methods for engineers and scientists: an introduction with applications using Matlab**. Wiley, 2008.

Green, A.; Naghdi, P. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. **International Journal of Engineering Science**, v. 9, p. 1219–1229, 1971.

Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1981.

Gurtin, M.; Fried, E.; Anand, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge University Press, 2010.

Gurtin, M. E.; Williams, W. O.; Suliciu, I. On rate-type constitutive equations and the energy of viscoelastic and viscoplastic materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 16, p. 607–617, 1980.

Halphen, B.; Son Nguyen, Q. Sur les matériaux standard généralisés. **Journal de Mécanique**, v. 14, p. 39–63, 1975.

Hibbitt, H. D.; Marcal, P. V.; Rice, J. R. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. **International Journal of Solids and Structures**, v. 6, p. 1069–1086, 1970.

Hill, R. **The mathematical theory of plasticity**. Oxford engineering science series. Clarendon Press, 1950.

Hill, R. Aspects of invariance in solid mechanics. v. 18 of **Advances in Applied Mechanics**, p. 1–75. Elsevier, 1979.

Hughes, T. J. R.; Winget, J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1862–1867, 1980.

Hughes, T. J.; Taylor, R. L. Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/visco-plastic finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 8, p. 169–173, 1978.

- Hughes, T. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 2000.
- Ibrahimbegović, A.; Chorfi, L. Viscoplasticity model at finite deformations with combined isotropic and kinematic hardening. **Computers & Structures**, v. 77, p. 509–525, 2000.
- Kawahara, M. Large strain, viscoelastic and elasto-viscoplastic numerical analysis by means of the finite element method. **Nuclear Engineering and Design**, v. 34, p. 233–246, 1975.
- Kojić, M.; Bathe, K. J. Studies of finite element procedures-stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated lagrangian jaumann formulation. **Computers & Structures**, v. 26, p. 175–179, 1987.
- Krempl, E.; Gleason, J. M. Isotropic viscoplasticity theory based on overstress (vbo). the influence of the direction of the dynamic recovery term in the growth law of the equilibrium stress. **International Journal of Plasticity**, v. 12, p. 719–735, 1996.
- Krempl, E. 6 - a small-strain viscoplasticity theory based on overstress. In Krausz, A. S.; Krausz, K., editors, **Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation**, p. 281–318. Academic Press, San Diego, 1996.
- Lai, W.; Rubin, D.; Krempl, E. **Introduction to Continuum Mechanics**. Refere Engineering. Butterworth-Heinemann, 1996.
- Lee, E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. **Journal of Applied Mechanics**, v. 36, p. 1–6, 1969.
- Lee, E. H.; Liu, D. T. Finite-Strain Elastic-Plastic Theory with Application to Plane-Wave Analysis. **Journal of Applied Physics**, v. 38, p. 19–27, 1967.
- Lemaitre, J.; Chaboche, J. L. **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge University Press, 1990.
- Leu, S.-Y. Limit analysis of viscoplastic flows using an extended general algorithm sequentially: convergence analysis and validation. **Computational Mechanics**, v. 30, p. 421–427, 2003.
- Lin, R.; Brocks, W. On a finite strain viscoplastic theory based on a new internal dissipation inequality. **International Journal of Plasticity**, v. 20, p. 1281–1311, 2004.
- Lubarda, V. A. Constitutive analysis of large elasto-plastic deformation based on the multiplicative decomposition of deformation gradient. **International Journal of Solids and Structures**, v. 27, p. 885–895, 1991.

- Lubliner, J. On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 7, p. 237–254, 1972.
- Lubliner, J. A maximum-dissipation principle in generalized plasticity. **Acta Mechanica**, v. 52, p. 225–237, 1984.
- Lubliner, J. Normality rules in large-deformation plasticity. **Mechanics of Materials**, v. 5, p. 29–34, 1986.
- Lubliner, J. **Plasticity Theory**. Dover books on engineering. Dover Publications, 2008.
- Lucchetti, R. **Convexity And Well-Posed Problems**. CMS Books in Mathematics. Springer, 2006.
- Luenberger, D.; Ye, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, 2008.
- Mandel, J. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. **International Journal of Solids and Structures**, v. 9, p. 725–740, 1973.
- Maugin, G. A. **The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors: An Introduction**. World Scientific series on nonlinear science: Monographs and treatises. World Scientific, 1999.
- Maugin, G. **The Thermomechanics of Plasticity and Fracture**. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1992.
- McMeeking, R.; Rice, J. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 11, p. 601–616, 1975.
- Moreau, J. Application of convex analysis to the treatment of elastoplastic systems. In Germain, P.; Nayroles, B., editors, **Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics**, v. 503 of **Lecture Notes in Mathematics**, p. 56–89. Springer Berlin / Heidelberg, 1976.
- Moreau, J. J. Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. **J. Differential Equations**, v. p. 347–374, 1977.
- Moreau, J. J. On unilateral constraints, friction and plasticity. In Capriz, G.; Stampacchia, G., editors, **New Variational Techniques in Mathematical Physics**, v. 63 of **C.I.M.E. Summer Schools**, p. 171–322. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- Muschik, W. Internal Variables in Non-Equilibrium Thermodynamics. **Journal of Non Equilibrium Thermodynamics**, v. 15, p. 127–138, 1990.

- Nagtegaal, J. C.; Jong, J. E. D. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 15–41, 1981.
- Niculescu, C.; Persson, L. E. **Convex Functions And Their Applications: A Contemporary Approach**. Number v. 13 in Cms Books in Mathematics. Springer, 2005.
- Oden, J. T. **Finite elements of nonlinear continua**. Advanced engineering series. McGraw-Hill, 1972.
- Ogden, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations**. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 1997.
- Ortiz, M.; Popov, E. P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, p. 1561–1576, 1985.
- Ortiz, M.; Radovitzky, R. A.; Repetto, E. A. The computation of the exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 52, p. 1431–1441, 2001.
- Ottosen, N. S.; Ristinmaa, M. **The Mechanics of Constitutive Modeling**. Elsevier, 2005.
- Pazy, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Number v. 44 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1983.
- Peirce, D. Shear band bifurcations in ductile single crystals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 31, p. 133–153, 1983.
- Peirce, D.; Asaro, R.; Needleman, A. An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals. **Acta Metallurgica**, v. 30, p. 1087–1119, 1982.
- Peirce, D.; Shih, C.; Needleman, A. A tangent modulus method for rate dependent solids. **Computers & Structures**, v. 18, p. 875–887, 1984.
- Perić, D.; Owen, D. R. J. Finite-element applications to the nonlinear mechanics of solids. **Reports on Progress in Physics**, v. 61, p. 1495–1574, 1998.
- Perić, D.; Owen, D. R. J.; Honnor, M. E. A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 94, p. 35 – 61, 1992.

- Perić, D. On a class of constitutive equations in viscoplasticity: Formulation and computational issues. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, p. 1365–1393, 1993.
- Perzyna, P. The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 20, p. 321–332, 1963.
- Perzyna, P. Fundamental problems in viscoplasticity. v. 9 of **Advances in Applied Mechanics**, p. 243–377. Elsevier, 1966.
- Perzyna, P. Thermodynamic theory of viscoplasticity. v. 11 of **Advances in Applied Mechanics**, p. 313–354. Elsevier, 1971.
- Reddy, J. N. **Applied functional analysis and variational methods in engineering**. McGraw-Hill, 1986.
- Reddy, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. Wiley, 2002.
- Reddy, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics: With Applications**. Cambridge University Press, 2008.
- Rice, J. Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity. **Journal of Mechanics Physics of Solids**, v. 19, p. 433–455, 1971.
- Rice, J. R. On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformation in metals. **Journal of Applied Mechanics**, v. 37, p. 728–737, 1970.
- Ristinmaa, M.; Ottosen, N. S. Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, p. 4601–4622, 2000.
- Rockafellar, R. **Convex Analysis**. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1997.
- Romano, G.; Rosati, L.; Sciarra, F. M. D. An internal variable theory of inelastic behaviour derived from the uniaxial rigid-perfectly plastic law. **International Journal of Engineering Science**, v. 31, p. 1105–1120, 1993.
- Rubinstein, R.; Atluri, S. N. Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analyses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 36, p. 277–290, 1983.
- Sadd, M. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. Elsevier/AP, 2009.

Seth, B. R. Generalized strain measure with applications to physical problems. In Reiner, M.; Abir, D., editors, **Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics**, p. 162–172, New-York, 1964. McMillan.

Shames, I.; Cozzarelli, F. **Elastic And Inelastic Stress Analysis**. Materials Science & Engineering Series. Taylor & Francis, 1997.

Shapiro, A. Directional differentiability of metric projections onto moving sets at boundary points. **J. Math. Anal. Appl.**, v. p. 392–403, 1988.

Simo, J. C. On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity. **Mechanics of Materials**, v. 4, p. 439–451, 1985.

Simo, J. C.; Armero, F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1413–1449, 1992.

Simo, J. C.; Honein, T. Variational formulation, discrete conservation laws, and path-domain independent integrals for elasto-viscoplasticity. **Journal of Applied Mechanics**, v. 57, p. 488–497, 1990.

Simo, J. C.; Miehe, C. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 98, p. 41–104, 1992.

Simo, J. C.; Ortiz, M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 49, p. 221–245, 1985.

Simo, J. C.; Pister, K. S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 46, p. 201–215, 1984.

Simo, J. C.; Kennedy, J. G.; Govindjee, S. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. loading/unloading conditions and numerical algorithms. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, p. 2161–2185, 1988.

Simo, J. Nonlinear stability of the time-discrete variational problem of evolution in nonlinear heat conduction, plasticity and viscoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 88, p. 111–131, 1991.

Simo, J. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 99, p. 61–112, 1992.

Simo, J.; Hughes, T. **Computational Inelasticity**. Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials. Springer, 1998.

Simo, J.; Taylor, R. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 48, p. 101–118, 1985.

Spencer, A. **Continuum Mechanics**. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2004.

Temam, R. **Mathematical problems in plasticity**. Gauthier-Villars, 1985.

Timoshenko, S.; Goodier, J. **Theory of elasticity**. McGraw-Hill classic textbook reissue series. McGraw-Hill, 1969.

Weber, G.; Anand, L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 79, p. 173–202, 1990.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. **The Finite Element Method: The Basis**. Number v. 1 in The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, 2000a.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. **The Finite Element Method: Solid mechanics**. Number v. 2 in The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, 2000b.