

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
ENGENHARIA ELÉTRICA

FERNANDO AUGUSTO BENDER

**TÉCNICAS DE SÍNTESE DE
COMPENSADORES ANTIWINDUP
PARA SISTEMAS COM ATRASO**

Porto Alegre
2010

FERNANDO AUGUSTO BENDER

**TÉCNICAS DE SÍNTESE DE
COMPENSADORES ANTIWINDUP
PARA SISTEMAS COM ATRASO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr

Porto Alegre
2010

FERNANDO AUGUSTO BENDER

**TÉCNICAS DE SÍNTESE DE
COMPENSADORES ANTIWINDUP
PARA SISTEMAS COM ATRASO**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr, UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse,
França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite, CEFET – MG
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP – Campinas,
Brasil
Docteur de l'INSA – Toulouse, France

Prof. Dr. Romeu Reginatto, CECE – Unioeste
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC – Florianópolis,
Brasil

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, PPGEE – UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC – Florianópolis,
Brasil

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, PPGEE – UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA – São José dos Campos,
Brasil

Prof. Dr. Luis Fernando Alves Pereira, PPGEE – UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Coordenador do Curso: _____

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Porto Alegre, Novembro de 2010.

DEDICATÓRIA

الله
Allah

AGRADECIMENTOS

الله
Allah

RESUMO

Esta tese versa sobre a síntese de compensadores antiwindup para sistemas lineares contínuos invariantes no tempo, com restrições no atuador e atraso no tempo. Baseados em um funcional Liapunov-Krasovskii e uma condição de setor para a função zona-morta já existentes na literatura, são propostas condições suficientes expressas em LMIs para a existência de compensadores antiwindup para duas classes de sistemas: sistemas com atraso nos estados, e sistemas com atraso na entrada. Em ambos os casos, considera-se a síntese de um compensador de ordem plena para um sistema com um controlador dado *a priori* desprezando limites do atuador. A síntese dos compensadores antiwindup considera um atuador restrito em amplitude e o sistema sujeito a perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 . A verificação das condições enunciadas garante a estabilidade da origem em malha fechada, e um conjunto de inicialização dos estados do sistema tolerante à perturbação com norma \mathcal{L}_2 inferior a um máximo, determinado juntamente com a síntese do compensador antiwindup. Na ausência de perturbação a origem é garantida assintoticamente estável.

Para sistemas com atraso no estado, primeiro propõe-se um método para a síntese de compensadores dinâmicos racionais de ordem plena. Este método é baseado no Lema de Projeção. Em seguida, estende-se o resultado, propondo-se um *framework* genérico que permite a síntese de compensadores racionais e não racionais. Este método é baseado em uma transformação de variáveis linearizante. Para sistemas com atraso na entrada, propõe-se três resultados de síntese de compensadores antiwindup: compensadores estáticos, dinâmicos racionais, e dinâmicos não racionais. Estes métodos são novamente baseados no Lema de Projeção.

Em todos os casos, as condições obtidas que garantem a existência de um compensador antiwindup são expressas em forma de LMIs e garantem a estabilidade local da origem. Em seguida, estende-se os resultados para garantir a estabilidade global da origem, nos casos em que a planta é estável em malha aberta. Problemas de otimização são propostos para ambos os métodos para maximizar a tolerância à perturbação e a minimização do ganho \mathcal{L}_2 da perturbação à saída regulada. Exemplos numéricos ilustram cada método na solução dos problemas de máxima tolerância à perturbação, e minimização do ganho \mathcal{L}_2 da perturbação à saída regulada.

Palavras-chave: Antiwindup, Sistemas com Atraso no Tempo, Tempo Contínuo

RESUMO

This thesis verses about antiwindup compensator synthesis for linear time invariant continuous systems, presenting constraints in actuator and time delay. Based on a Liapunov-Krasovskii functional and a sector condition for the dead-zone nonlinearity already castign in literature, it is proposed sufficient conditions expressed in LMI to the existance of an antiwindup compensator for two classes of systems: systems with state delay, and systems with input delay. In both cases it is considered the synthesis of a full order antiwindup compensator for a system with a controller *a priori* given that disregards the actuator bounds. The synthesis of antiwindup compensators considers an actuator constrained in amplitude and a system subjected to norm- \mathcal{L}_2 bounded disturbances. Once the casted conditions are verified, it is assured the closed loop origin stability; a set for the initial states of the system tolerating disturbances up to a maximum \mathcal{L}_2 norm, which is also determined along the antiwindup compensator synthesis procedure. In the absence of disturbance the origin is assuredly asymptotically stable.

For state delay systems, first it is proposed a method for designing full order rational antiwindup compensators. This method is based on the Projection Lemma. Afterwards, results are extended proposing a generic framework allowing the synthesis of rational and nonrational compensators of different topologies. This method is based on a linearizing variable transformation. For input delay systems, it is proposed three synthesis results: static, rational dynamic and nonrational dynamic compensators. These methods are based on the Projection Lemma.

In all cases, the conditions obtained assuring the existance of an antiwindup compensator are expressed by means of LMIs that, once verified, assure the origin local stability. Then, the conditions are extended for the global stability case, when the system is open loop stable. Optimization problems are proposed for both methods to maximize the disturbance tolerance and the minimization of the \mathcal{L}_2 -gain of the disturbance to the regulated output. Numerical examples are presented to illustrate each method in the solution of the problems of maximum disturbance tolerance, and minimization of \mathcal{L}_2 -gain from the disturbance to the regulated output.

Palavras-chave: Antiwindup, Time Delayed Systems, Continuous Time.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	10
LISTA DE SÍMBOLOS	11
1 INTRODUÇÃO	12
2 CONTROLE SOB SATURAÇÃO DE SISTEMAS COM ATRASO: DEFINIÇÕES PRELIMINARES	18
2.1 Lemas	24
2.2 Estabilidade no Sentido de Liapunov-Krasovskii para Sistemas com Atraso	28
3 ANTIWINDUP DINÂMICO RACIONAL PARA SISTEMAS COM ATRASO NO ESTADO: ABORDAGEM PELO LEMA DE PROJEÇÃO	29
3.1 Introdução	29
3.2 Formulação do Problema	29
3.3 Preliminares	31
3.4 Resultados Principais	31
3.4.1 Estabilidade Global	38
3.4.2 Determinação do Compensador	39
3.4.3 Estabilidade do Compensador	39
3.5 Problemas de Otimização	41
3.6 Exemplos Numéricos	43
3.7 Comentários finais do Capítulo	46
4 ANTIWINDUP DINÂMICO PARA SISTEMAS COM ATRASO NO ESTADO: UM FRAMEWORK GENÉRICO	49
4.1 Introdução	49
4.2 Formulação do Problema	49
4.3 Preliminares	51
4.4 Resultados Principais	52
4.4.1 Estabilidade Global	56
4.4.2 Determinação do Compensador	57
4.4.3 Estabilidade do Compensador	58
4.5 Problemas de Otimização	58
4.6 Exemplos Numéricos	59
4.7 Comentários finais do Capítulo	64

5	ANTIWINDUP PARA SISTEMAS COM ATRASO NA ENTRADA	66
5.1	Introdução	66
5.2	Formulação do Problema	68
5.3	Antiwindup estático	70
5.4	Antiwindup dinâmico racional	75
5.5	Antiwindup dinâmico não racional	83
5.5.1	Determinação do Compensador	87
5.5.2	Estabilidade do Compensador	87
5.6	Problema de Otimização: Atenuação à Perturbação	87
5.7	Exemplo Numérico	88
5.8	Comentários finais do Capítulo	92
6	CONCLUSÃO	94
6.1	Trabalhos futuros	95
	REFERÊNCIAS	97

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1:	Sistema nominal	18
Figura 2.2:	Sistema saturante	19
Figura 2.3:	Antiwindup para um sistema saturante	22
Figura 3.1:	Configuração topológica do sistema	31
Figura 3.2:	Sistema sujeito à perturbação tolerável	45
Figura 3.3:	Sistema sujeito à perturbação com norma \mathcal{L}_2 acima da máxima tolerável	46
Figura 3.4:	Atenuação à Perturbação \mathcal{L}_2 . Sistema com e sem injeção antiwindup .	47
Figura 4.1:	Comparação entre diferentes metodologias com o escopo de estabilidade global	64
Figura 5.1:	Topologia do Sistema em Malha Fechada	69
Figura 5.2:	Desempenho dos compensadores antiwindup localmente estabilizantes	91
Figura 5.3:	Desempenho dos compensadores antiwindup globalmente estabilizantes	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1:	Relação entre δ e γ	44
Tabela 4.1:	Resultados do Problema (4.19)	60
Tabela 4.2:	Resultados do Problema (4.20)	62
Tabela 4.3:	Resultados do Problema (4.22)	62

LISTA DE SÍMBOLOS

- ★ bloco simétrico
- bloco não relevante ao desenvolvimento
- $A > B$ significa que $A - B$ é positiva definida, para duas matrizes simétricas, A e B ,
- A' transposta de A
- BMI** *Bilinear Matrix Inequality*
- I matriz identidade de ordem apropriada
- (i) i -ésimo componente de um vetor
- LMI** *Linear Matrix Inequality*
- i i -ésima linha/coluna de uma matriz
- $\text{rank}(A)$ posto da matriz A
- $\text{sym}\{\cdot\}$ soma do argumento com o seu transposto
- $\text{sat}_{(\cdot)}(\bullet)$ saturação com limites simétricos em $\pm(\cdot)$ aplicada ao vetor (\bullet)
- $\psi_{(\cdot)}(\bullet)$ função vetorial equivalente a $(\bullet) - \text{sat}_{(\cdot)}(\bullet)$
- $\mathcal{E}(P, \beta)$ elipsóide definido por $x^T P x < \beta$
- \mathcal{L}_2 espaço de sinais com norma-2 finita
- $|\cdot|$ módulo
- $\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ norma-2 do sinal $x(t)$: $\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int_0^{\infty} x(t)^T x(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$
- \mathfrak{R} conjunto dos números reais
- \mathfrak{R}^n espaço euclidiano de ordem n
- $\underline{\lambda}(P)$ autovalor mínimo da matriz P quadrada.
- $\bar{\lambda}(P)$ autovalor máximos da matriz P quadrada.
- $\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathfrak{R}^n)$ espaço Banach de funções vetoriais contínuas mapeando o intervalo $[-\tau, 0]$ em \mathfrak{R}^n com a norma $\|\phi\|_c = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} \|\phi(t)\|$
- \mathcal{C}_τ^v conjunto definido pelo $\mathcal{C}_\tau^v = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \|\phi\|_c < v, v > 0\}$
- ξ_t restrição de $\xi(\cdot)$, no instante t ao intervalo $[t - \tau, t]$

1 INTRODUÇÃO

A realidade percebida pelos sentidos é uma fração da realidade perceptível. Mas isto não é tudo. Se a experiência do *aqui* é restrita, a sensação do *agora* tem também um quê de ilusória. A correnteza ligeira do tempo nos dá a impressão de que estamos em contato com o mundo em tempo real, ou seja, de forma imediata e no exato instante em que as coisas acontecem. A rigor, contudo, isso jamais é o caso. A sensação de instantaneidade das nossas certezas sensíveis não passa, no fundo, de uma construção dos sentidos - uma ilusão simplificadora. Pois o fato é que existe sempre uma defasagem no tempo, com duração variável mas valor necessariamente positivo, separando *o que é*, de um lado, e *aquilo de que chegamos a nos dar conta*, de outro. Se o instantâneo absoluto de qualquer fenômeno do mundo sensível existe, nós jamais travaremos contato direto e imediato com ele. O presente nomeia o inacessível. Há um sentido preciso - ainda que pouco relevante na vida comum - em que o agora vivido é inescapavelmente passado. (GIANNETTI, 2008)

A ação de controle em um sistema é consequência da realimentação. Mesmo sistemas que operam em malha aberta, em algum momento, em algum nível hierárquico, com maior ou menor formalismo, um ajuste em algum sinal de entrada visando a correção de algum desvio do desempenho desejado, pode ser interpretado como a execução de uma lei de controle. Por exemplo, a potência entregue ao eixo de um servomotor é controlada em função da posição do mesmo em relação a um sinal de referência. Num campo econômico, a escolha da taxa de juros referencial pelo banco central é consequência de fatores econômicos (reservas internacionais, fluxo de capitais, índices de inflação, etc.) e fatores sociais (índice de desemprego, governabilidade, etc.), entre outros. Assim, a existência de um sistema sugere a existência de uma lei de controle.

Não obstante, para fins de abstração, representação e tratamento formal, pode ser conveniente definir que a implementação da lei de controle dá-se através de um controlador. Que a ação do controlador dá-se mediante sensores e atuadores. Talvez, um dos benefícios desta separação entre os elementos seja que limitações naturais impostas ao controle possam ser representadas como limitações em cada um de seus elementos. Exemplos disto podem ser a limitação na amplitude da entrada da planta, como um ângulo máximo que as rodas de um veículo podem percorrer girando para cada um dos lados; limitação na amplitude da saída da planta, como alguma temperatura de ebulição que um processo térmico atinja para em seguida entrar na fase de latência, interrompendo a ascensão da temperatura durante um aquecimento.

Uma das formas de representar limitações em um sistema é associar a seus elementos não-linearidades específicas, que apresentem comportamento semelhante ao observado no sistema quando estas limitações manifestam-se. Neste âmbito a saturação em amplitude apresenta especial interesse, uma vez que existe um limite físico de quanta energia pode ser transmitida para um sistema. Este limite físico pode ser representado por uma não-linearidade saturação, com limites (superior ou inferior, simétricos ou não) em cada uma de suas entradas.

A síntese de leis de controle para sistemas com saturação atraiu grande atenção da comunidade científica. Dentre estas técnicas, a síntese direta mereceu especial atenção pelo número de trabalhos que dela se seguiram. Apesar de suas variações, ela consiste na síntese de um controlador para uma planta, considerando-se o efeito da saturação no atuador. Esta foi a primeira abordagem ao problema de projeto de malha de realimentação quando o atuador da planta é saturante. De acordo com (BERNSTEIN; MICHEL, 1995), o primeiro trabalho abordando este problema foi (KALMAN, 1957).

Estudos propondo procedimentos de projeto de controle para sistemas saturados podem ser encontrados nos trabalhos de (TARBOURIECH; GARCIA, 1997), (HU; LIN, 2001) e (KAPILA; GRIGORIADIS, 2002), e referências lá citadas. Grande parte destes trabalhos considera somente saturação em amplitude e controle por realimentação de estados. A realimentação de estados tem aplicabilidade limitada uma vez que não são todos os sistemas que tem seus estados acessíveis à medição. Quando o sistema não é globalmente estabilizável, ou quando critérios adicionais de robustez ou desempenho são considerados, uma abordagem pela estabilidade local pode ser necessária. Neste contexto o número de trabalhos propondo estabilidade local com realimentação de saída é menor, veja por exemplo (KIYAMA; IWASAKI, 2000), (WU; LIN; ZHENG, 2005), (GOMES DA SILVA JR.; LESCHER, 2005), (GOMES DA SILVA JR.; LIMON; ALAMO, 2005) e (KAPILA; HADDAD., 2000).

Nos anos mais recentes, trabalhos considerando formalmente a estabilização sob saturação em amplitude e taxa de variação foram publicados. Resultados de estabilização global e semi-global usando tanto leis de controle com realimentação de estados como baseadas em observadores foram propostas em (LIN, 1997) e (STOORVOGEL; SABERI, 1999). Considerando um contexto de estabilização local, nós podemos citar os resultados apresentados em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003) e (BATEMAN; LIN, 2002), onde a síntese de leis de controle por realimentação de estados foi proposta, bem como (TARBOURIECH; QUEINNEC; GARCIA, 2006) onde técnicas de antiwindup foi considerada. Em (TYAN; BERNSTEIN, 1997), (NGUYEN; JABBARI, 2000) e (GOMES DA SILVA JR.; LIMON; ALAMO, 2005), considera-se a síntese de controladores dinâmicos de realimentação de saída assegurando a estabilidade local na presença de saturação do atuador tanto em amplitude como em taxa de variação. Em (TYAN; BERNSTEIN, 1997) propõe-se um método para projeto de controladores dinâmicos de saída usando o Positive Real Lemma. O objetivo principal visado por este trabalho é a minimização de um critério LQG. A região de estabilidade é associada com o sistema em malha fechada. O controlador é determinado a partir da solução de equações de Riccati fortemente acoplada. Um controlador variante no tempo é proposto em (NGUYEN; JABBARI, 2000). As condições para estabilização são dadas na forma de desigualdades matriciais. Em (GOMES DA SILVA JR.; LIMON; ALAMO, 2005), uma metodologia diferente para a determinar um controlador dinâmico de realimentação de saída na presença de saturação em amplitude e taxa de variação é proposto para sistemas em tempo discreto. A idéia principal consiste em utilizar um controlador não linear, composto por

um compensador linear dinâmico em cascata com um integrador saturante. Naquele trabalho, somente resultados considerando-se o caso livre de perturbação são considerados. Em (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2007a) propõe-se um método sistemático para a síntese de controladores de realimentação de saída, levando em conta a saturação do atuador em aceleração, taxa de variação e amplitude, simultaneamente. O objetivo é prevenir danos ao atuador, bem como assegurar a estabilidade entrada-estado do sistema com restrições. A metodologia seguida é similar a (GOMES DA SILVA JR.; LIMON; ALAMO, 2005), na limitação ao sinal em saturação. Neste trabalho considera-se a presença perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 agindo sobre a planta. A solução proposta conecta à planta dois integradores saturantes em série com um compensador dinâmico, que gera um sinal em aceleração. As integrações subseqüentes garantem que o sinal de controle entregue à planta respeita seus limites em aceleração, velocidade e amplitude. As condições de estabilidade são dadas em termos de LMIs. Problemas de otimização propostos consideram a rejeição e a tolerância à perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 . Em (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2007b) estes resultados são estendidos para sistemas de tempo discreto. Mais recentemente (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2010a) estende os resultados de (GOMES DA SILVA JR.; LIMON; ALAMO, 2005) para sistemas de tempo contínuo.

É importante notar que todos estes trabalhos não consideram plantas com atraso. O atraso é em muitas vezes devido à distribuição espacial de processos. Em outra perspectiva, uma das possíveis conseqüências da saturação na entrada de controle é a formação de filas, como a fila de pacotes no *buffer* de entrada de um roteador congestionado pelo excesso de tráfego na rede, (RAYNAUD; KULCSIR; HAMMIL, 2004), (LEE; SCHNEEMAN, 1999). Quando o sinal de controle pode ser interpretado como uma mensagem, o enfileiramento destas implica em um atraso na entrada de controle, além da saturação. Da logística de abastecimento ao congestionamento em redes de computadores, o atraso se faz presente, (PADHYE et al., 1998), (SALA; VALLES; DIEZ, 2006). Finalmente é prática, sobretudo na indústria de controle de processos químicos, a modelagem de sistemas de ordem superior por um sistema de ordem inferior com um atraso em série. Importante ressaltar que a desconsideração do atraso na malha de controle pode ser fonte de degradação de desempenho e até mesmo instabilidade (NICULESCU, 2001). Neste sentido, podemos encontrar na literatura muitos trabalhos propondo condições para assegurar a estabilidade bem como requisitos de desempenho e robustez. Resultados cujas condições de garantia da estabilidade e desempenho do sistema não dependam do valor do atraso do sistema, são chamadas de condições independentes do atraso. Leis de controle sintetizadas através de metodologias independente do atraso, atendem os critérios de síntese para qualquer atraso finito. Exemplos de trabalhos com esta abordagem podem ser encontrados em (CHOI; CHUNG, 1997), (LEHMAN; SHUJAEI, 1994), (SHAKED; YAESH; DE SOUZA, 1998).

Em oposição, existem metodologias dependentes do atraso, cujas condições de estabilidade e desempenho resultante dependem do valor do atraso do sistema. Leis de controle obtidas mediante metodologias dependentes do atraso, são solução do problema de síntese enquanto o atraso estiver contido em um intervalo de tempo definido. No caso em que o atraso é pequeno, condições resultantes destas metodologias são potencialmente menos conservativas. Exemplos de trabalhos com metodologias dependentes do atraso são (DE SOUZA; LI, 1999), (PARK, 1999), (MOON et al., 2001) e referências ali citadas. A presença de atrasos em muitas aplicações de controle são fontes de degradação de desempenho e mesmo de instabilidade (veja por exemplo (NICULESCU, 2001), (RICHARD, 2003) e referências lá citadas).

Alguns autores considerando a estabilização de sistemas com atraso, e saturação na entrada de controle, apresentam em um único trabalho resultados de metodologias dependentes e independentes de atraso. Exemplos destes trabalhos são (OUCHERIAH, 1996), (CHEN; WANG; LU, 1988), (NICULESCU; DION; DUGARD, 1996), (TISSIR; HMAMED, 1992), (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002), (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003). Nestes trabalhos, consideram-se abordagens dependentes e independentes do atraso, com o escopo de estabilidade global ou local. Não obstante, deve ser notado que em todos eles somente a realimentação de estados é considerada como lei de controle. Esta é uma limitação prática importante, uma vez que eventualmente sistemas podem não ter acessível para a realimentação todos os seus estados.

Respondendo a este apelo prático, a abordagem pela injeção de um sinal antiwindup considera leis de controle baseadas na realimentação dinâmica de saída. O compensador antiwindup é uma técnica eficiente e bastante difundida para o tratamento de efeitos indesejáveis (no desempenho e na estabilidade) produzidos pela saturação do atuador no laço de controle. A partir de um sistema nominal, composto por uma planta e um controlador que desconsidera a ocorrência da saturação na entrada da planta, projeta-se um compensador que atuará no sistema a partir da ocorrência de uma saturação. A ação deste compensador tem por objetivo minimizar o quanto possível os efeitos indesejáveis da saturação no sistema nominal.

Com relação à técnica de síntese direta levando em conta a saturação da entrada de controle, a técnica de antiwindup justifica-se em sistemas nominais cuja substituição do controlador original é inviável ou indesejada. Isto ocorre especialmente no controle de plantas de alto valor imobilizado.

A literatura científica tem-se interessado bastante por esta abordagem nas últimas décadas. Os primeiros resultados abordando a síntese de compensadores antiwindup foram motivados pela degradação do desempenho em regime transitório induzido pela saturação de sistemas de controle de realimentação contendo ação integral (veja por exemplo (FERTIK; ROSS, 1967), (ÅSTRÖM; RUNDQWIST, 1989)). Mais recentemente, o estudo do problema antiwindup vem sendo considerado em um contexto formal e uma grande quantidade de métodos sistemáticos de síntese foram propostos (veja por exemplo (KAPOOR; TEEL; DAOUTIDIS, 1998), (TEEL, 1999) e a survey (TARBOURIECH; TURNER, 2009) para uma ampla revisão). Em particular, alguns destes trabalhos são baseados em condições LMI (ou *quasi* LMI) (veja entre outros (KOTHARE; MORARI, 1999), (GRIMM et al., 2003), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005), (ROOS; BIANNIC, 2008)). A vantagem de um método baseado em LMI encontra-se no fato de que o projeto de um compensador antiwindup pode ser feito mediante a solução de um problema de otimização convexa. Neste caso, critérios de otimização distintos podem ser utilizados, tal como atenuação do ganho \mathcal{L}_2 , maximização da região de atração das trajetórias em torno da origem, etc.

Entretanto, parece que muitos dos métodos de síntese de antiwindup (como os citados no parágrafo anterior) referem-se somente a sistemas livres de atraso. O problema de síntese de um compensador antiwindup para sistemas com atraso foi abordado, por exemplo, em (PARK; CHOI; CHOO, 2000), (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) e (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004). Em (PARK; CHOI; CHOO, 2000) e (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005) plantas nas quais há atrasos na entrada e/ou saída são considerados. Para este caso considera-se a síntese de compensadores antiwindup dinâmicos para minimizar

uma função custo. Esta função custo mensura a diferença absoluta entre os estados do controlador no caso livre de saturação, e os estados do controlador considerando-se a saturação e a presença do compensador antiwindup na malha de controle. Note-se estes resultados aplicam-se somente ao caso em que o sistema é estável em malha aberta, e a abordagem não considera sistemas com atraso nos estados.

Em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) e (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004), uma abordagem LMI para a síntese de compensadores antiwindup estáticos é apresentada. Diferentemente do objetivo clássico de recuperação de desempenho nominal (ou seja, recuperar através da inserção do bloco antiwindup, o desempenho do sistema livre de saturação), nestes trabalhos, a presença do compensador antiwindup é utilizada para expandir a região de atração do sistema em malha fechada. Em (CAO; WANG; TANG, 2007) um método para a síntese de um compensador antiwindup estático é proposto para sistemas apresentando atraso no estado e na entrada, quando este atraso é idêntico. Em particular, a ação da perturbação e critérios de desempenho em malha fechada não foram considerados nestes trabalhos. A síntese de compensadores antiwindup dinâmicos para sistemas com atraso foi recentemente abordada em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) e (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009). A abordagem seguida em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) foi baseada em transformações de congruência, similar às apresentadas em (SCHERER; GAHINET; CHILALI., 1997), permitindo somente a síntese de compensadores não-rationais (ou seja, apresentando termos de atraso na dinâmica do sistema).

Este trabalho apresenta resultados referentes a sistemas com atraso no estado, e na entrada, onde a entrada de controle é saturante em amplitude. Os resultados referentes a atraso no estado, são apresentados em dois capítulos. No primeiro, Capítulo 3, apresentamos uma metodologia de síntese de antiwindup dinâmico racional. Os resultados deste trabalho foram publicados em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009). Nele, mostramos que a síntese do compensador racional pode ser efetuada com condições de fato LMI, ou seja diretamente obtíveis em forma de LMI. As condições que garantem a existência de uma solução para o problema de síntese do compensador antiwindup proposto são obtidas a partir de um funcional de Liapunov-Krasovskii, fazendo uso de uma condição de setor generalizada, e do Lema de Projeção. As condições resultantes são independentes do atraso. A contribuição deste trabalho é a proposição de um método para a síntese de compensadores antiwindup racionais para sistemas com atraso no estado.

No Capítulo 4, apresentamos outra abordagem para a síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso no estado. Através de uma mudança de variáveis linearizante, similar à proposta originalmente em (SCHERER, 1995), diferentemente da abordagem considerada em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008), condições verdadeiramente LMIs tanto para a síntese de compensadores racionais como não-rationais são propostas. Estas condições são obtidas mediante o mesmo funcional de Liapunov-Krasovskii e a condição de setor generalizada utilizados nos resultados do Capítulo 3. Em ambos os casos, resultados relativos à estabilidade entrada-estado bem como estabilidade assintótica são obtidos em um contexto regional (local). A partir destes resultados, o caso global é derivado como um caso particular. O cálculo do compensador antiwindup com o objetivo de assegurar a estabilidade \mathcal{L}_2 de entrada-estado, bem como a estabilidade interna para o sistema em malha fechada é efetuado mediante a solução de problemas de otimização convexos. Alguns critérios de otimização são considerados na síntese:

- maximização da norma \mathcal{L}_2 admissível para a perturbação para a qual as trajetórias

do sistema em malha fechada permaneçam limitadas.

- minimização do limitante superior ao ganho \mathcal{L}_2 da perturbação para a saída regulada.
- maximização da estimativa do domínio da região de atração da origem.

A principal contribuição deste trabalho com relação a (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) é que aqui unifica-se em um *framework* a síntese de compensadores antiwindup racionais e irracionais. Isto permite diferentes configurações estruturais para o compensador. Note-se que o mesmo não pode ser feito nos trabalhos anteriores.

Dos resultados referentes a atraso na entrada, apresentamos uma metodologia baseada no Lema de Projeção, independente do atraso, utilizando o mesmo funcional de Liapunov-Krasovskii utilizado nos os Capítulos 3 e 4. Esta metodologia é primeiramente aplicada à síntese de compensadores estáticos. Posteriormente aplicamos esta metodologia ao caso dinâmico racional, ao que estendemos o resultado para o caso não racional. Todos os resultados são originalmente desenvolvidos com o escopo de estabilidade local, e estendidos para o escopo da estabilidade global. A principal contribuição deste resultado para sistemas com atraso na entrada consiste na proposição de resultados que visam aumentar o tamanho da estimativa da região de atração da origem do sistema. Este mesmo objetivo de síntese esteve presente em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006), porém para resultados em antiwindup estático, apenas. Métodos de síntese de compensadores antiwindup dinâmicos, como propostos em (PARK; CHOI; CHOO, 2000) e (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005) visam a recuperação do desempenho do sistema.

Este trabalho organiza-se da seguinte forma:

- O Capítulo 2 apresenta as principais definições e lemas necessários para a formulação dos resultados das seções subsequentes.
- O Capítulo 3 apresenta um resultado de síntese de compensador antiwindup dinâmico racional para sistemas com atraso no estado baseados no lema de projeção.
- O Capítulo 4 apresenta um resultado um *framework* versátil para a síntese de compensadores antiwindup de diferentes estruturas para sistemas com atraso no estado. Este resultado é baseado em uma transformação de similaridade.
- O Capítulo 5 apresenta um resultado para a síntese de compensador antiwindup estático, dinâmico racional e não racional, para sistemas com atraso na entrada.
- O Capítulo 6 conclui este trabalho.

2 CONTROLE SOB SATURAÇÃO DE SISTEMAS COM ATRASO: DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo é apresentado os tipos de sistemas estudados, as técnicas de controle empregadas, e as principais definições, lemas e teorias aplicados ao longo deste trabalho.

Inicialmente, seja considerado um sistema de controle composto por uma planta e um controlador. A Figura 2.1 ilustra este sistema.



Figura 2.1: Sistema nominal

Neste sistema, assume-se que o comportamento da planta possa ser representado pelo seguinte modelo genérico

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau_s) + Bu(t - \tau_i) + B_w w(t) \\
 y(t) &= C_y x(t) \\
 z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entradas, perturbações, saídas medidas e saídas reguladas. Matrizes A , A_d , B , B_w , C_y , C_z e D_z são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Assume-se que os pares (A, B) e (C_y, A) sejam respectivamente estabilizáveis e detectáveis. O escalar real positivo τ_s representa o atraso nos estados do sistema, e τ_i , o atraso na entrada de controle. Ambos são supostamente constantes e conhecidos. Assume-se que o vetor perturbação $w(t)$ é limitado em energia, isto é, $w(t) \in \mathcal{L}_2$.

Adicionalmente, assume-se que para esta planta (2.1) foi projetado um controlador, também representado na Figura 2.1, cujo modelo é dado como segue

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau_s) + B_c u_c(t) \\
 y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau_s) + D_c u_c(t)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de estado, entradas e saídas do controlador. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são reais, constantes e de dimensões apropriadas.

Comentário 2.1. Se $A_{c,d}$ e $C_{c,d}$ são não nulos, o controlador é dito não racional (DE OLIVEIRA; GEROMEL, 2004). Como vantagem, estes controladores apresentam graus de liberdade adicionais no processo de síntese. A desvantagem do uso de controladores não racionais consiste na necessidade de mensurar-se o atraso nos estados do sistema para a determinação do controlador. Embora a metodologia de síntese possa ser independente do atraso nos estados da planta (τ_s), o controlador não é.

A interconexão deste sistema dá-se mediante

$$\begin{aligned} u_c(t) &= y(t) \\ u(t - \tau_i) &= y_c(t - \tau_i) \end{aligned}$$

Observe-se que enquanto a saída da planta está imediatamente disponível para realimentação, o sinal de controle $y_c(t)$ é transferido com atraso τ_i para a entrada da planta $u(t)$. Não obstante, inexistem restrições de amplitude para a saída do controlador $y_c(t)$. Ao longo deste trabalho, assume-se que o controlador (2.2) foi projetado para a planta (2.1) desprezando qualquer limitação em amplitude do sinal de controle. A este sistema de controle - planta (2.1) e controlador (2.2), livre de saturação - referir-se-á como sistema nominal.

Limitações na amplitude do sinal de controle podem ser modeladas por uma função saturação entre o controlador e a planta, conforme ilustrado na Figura 2.2



Figura 2.2: Sistema saturante

Nestas circunstâncias, a interconexão deste sistema dá-se mediante

$$\begin{aligned} u_c(t) &= y(t) \\ u(t - \tau_i) &= \text{sat}(y_c(t - \tau_i)) \end{aligned}$$

onde $\text{sat}(y_c(t))$ é definido como $\text{sat}(y_c(t)) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$, onde

$$\begin{aligned} \text{sat}_{(i)}(y_c(t)) &= \text{sat}(y_{c_{(i)}}(t)) \\ &= \text{sign}(y_{c_{(i)}}(t)) \cdot \min\{|y_{c_{(i)}}(t)|, u_{o_{(i)}}\}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

e $u_{o_{(i)}} \in \mathfrak{R}$, sendo que $\text{sign}(y_{c_{(i)}}(t))$ é definido como segue

$$\text{sign}(y_{c_{(i)}}(t)) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad \text{sign}(y_{c_{(i)}}(t)) = \begin{cases} 1, & y_{c_{(i)}}(t) > 0 \\ 0, & y_{c_{(i)}}(t) = 0 \\ -1, & y_{c_{(i)}}(t) < 0 \end{cases}$$

O sistema representado na Figura 2.2, denomina-se sistema saturante. Representando o sistema saturante em malha fechada, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau_s) + B \text{sat}(y_c(t - \tau_i)) + B_w w(t) \\ \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau_s) + B_c C_y x(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z \text{sat}(y_c(t)) \end{aligned}$$

onde

$$y_c(t) = C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau_s) + D_c C_y x(t)$$

Define-se agora a seguinte não-linearidade tipo zona morta $\psi(y_c(t))$ tal qual segue

$$\psi(y_c(t)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \psi(y_c(t)) = \text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)$$

Em seguida, considera-se o seguinte vetor de estados aumentado

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$$

A partir do vetor $\xi(t)$, da não-linearidade $\psi(y_c(t))$ e das seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d,s} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_{c,d} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d,i} = \begin{bmatrix} B D_c C_y & B C_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{d,s+i} &= \begin{bmatrix} 0 & B C_{c,d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_y = [C_y \ 0] \\ \mathbf{C}_z &= [C_z + D_z D_c C_y \ D_z C_c], \mathbf{C}_{z,d} = [0 \ C_{c,d}], \mathbf{D}_z = D_z \\ \mathbf{K} &= [D_c C_y \ C_c], \mathbf{K}_d = [0 \ C_{c,d}] \end{aligned}$$

o sistema em malha fechada pode então ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}\xi(t) + \mathbf{A}_{d,s}\xi(t - \tau_s) + \mathbf{A}_{d,i}\xi(t - \tau_i) + \mathbf{A}_{d,s+i}\xi(t - \tau_s - \tau_i) \\ &\quad + \mathbf{B}\psi(y_c(t - \tau_i)) + \mathbf{B}_w w(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_y \xi(t) \\ z(t) &= \mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{C}_{z,d} \xi(t - \tau_s) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

bem como

$$y_c(t) = \mathbf{K}\xi(t) + \mathbf{K}_d \xi(t - \tau_s)$$

Relembra-se aqui a premissa de que o controlador projetado para este sistema desconsidera a saturação na entrada da planta. Por conta disto, é importante ressaltar, não existem garantias da estabilidade deste sistema em malha fechada. Estas circunstâncias motivam a definição dos seguintes problemas:

Problema 2.1 (análise de estabilidade \mathcal{L}_2). *Dado o sistema em malha fechada (2.3) deve-se determinar a máxima norma \mathcal{L}_2 de $w(t)$ para o qual as trajetórias são garantidamente limitadas, i.e. a estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado deve ser assegurada.*

Problema 2.2 (análise de desempenho \mathcal{L}_2). *Dado o sistema em malha fechada (2.3), para uma perturbação $w(t)$ com norma \mathcal{L}_2 admissível, deve-se determinar um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 de $w(t)$ para a saída regulada $z(t)$, o que corresponde a um problema de atenuação da perturbação.*

Problema 2.3 (análise de estabilidade interna). *Dado o sistema em malha fechada (2.3), quando $w(t) = 0$, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada deverá ser garantida para toda a condição inicial pertencendo a um conjunto \mathcal{D}_o de funções $\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v$, i.e. o conjunto \mathcal{D}_o está incluso na região de atração do sistema em malha fechada.*

De fato, o problema de análise da estabilidade de sistemas com atraso e saturação na entrada, bem como a avaliação do sistema de acordo com algum critério de desempenho tem motivado trabalhos na literatura. Exemplos destes trabalhos são (KOLMANOVSKII;

NICULESCU; RICHARD, 1999), (CAO; LIN; HU, 2002), (HU; LIN; CHEN, 2002a), (HU; LIN; CHEN, 2002b).

Um resultado insatisfatório para o Problema 2.1, motiva a busca de uma lei de controle alternativa à nominal, dada pelo controlador (2.2). Desta forma, duas abordagens emergem. A primeira, consiste na substituição do controlador (2.2), por uma nova lei de controle que leve em consideração a ocorrência de saturação. Esta abordagem é denominada síntese direta, conforme mencionado na Introdução.

Existem situações nas quais a substituição do controlador não é viável, interessante ou permitida. Os efeitos da saturação em amplitude na entrada planta poderiam assim comprometer a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Para estes casos, uma abordagem baseada em técnicas de injeção de sinal antiwindup (compensação antiwindup) torna-se uma alternativa de interesse.

Neste trabalho, considera-se o seguinte problema de compensação antiwindup:

Problema 2.4. (*síntese de compensador antiwindup*) Para o sistema em malha fechada (2.3), deseja-se determinar um compensador antiwindup que adicionado à malha de realimentação:

1. atue sobre o sistema em malha fechada a partir da ocorrência da saturação;
2. garanta que as trajetórias em malha fechada permaneçam limitadas para perturbações com norma \mathcal{L}_2 limitada, e que a limitante de norma das perturbações admissíveis seja tão grande possível;
3. na ausência de perturbações, a origem do sistema é assintoticamente estável, para um conjunto de condições iniciais tão grande quanto possível.

Observe-se que o Problema 2.4 limita a ação do compensador antiwindup somente a partir da ocorrência da saturação. Com efeito, caso a mesma não ocorra, o compensador antiwindup não atua no sistema. Resulta disto que, neste caso, efetivamente o sistema em malha fechada comporta-se como o sistema nominal (expresso na Figura 2.1). Todavia, na ocorrência de saturação, o sistema saturante não apresenta garantias de que as trajetórias do sistema em malha fechada permaneçam limitadas a algum conjunto fechado em torno da origem. É exatamente neste sentido que a ação do compensador contribui para a estabilidade do sistema em malha fechada, injetando um sinal - dito sinal de antiwindup - no controlador. Esta ação deve garantir que as trajetórias permaneçam limitadas sob a ação de perturbações com norma \mathcal{L}_2 toleráveis. Na ausência destas perturbações, garante que exista um conjunto de condições iniciais para as quais a origem é assintoticamente estável.

Comentário 2.2 (fuga da região de atração da origem). *Note-se que para o sistema (2.3), um eventual abandono da região de atração da origem pela trajetória $\xi(t)$ do sistema em malha fechada é irreversível. Uma interpretação possível a este fato é que os estados do sistema, representados pelo vetor $\xi(t)$, necessitam um esforço de controle superior ao permitido por $u(t) = \text{sat}(y_c(t))$ para retornarem a origem $x(t) = 0$. De fato, se não houvesse saturação, ou seja $u(t) = y_c(t)$, a região de atração da origem seria o completo espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+n_c+n_a}$.*

Diferentemente, o abandono da estimativa da região de atração da origem pela trajetória do sistema em malha fechada pode ou não ser irreversível. Apenas não há garantias formais do retorno da trajetória à este conjunto de acordo com a metodologia de síntese empregada. De fato, metodologias mais conservadoras, resultam em estimativas mais conservadoras da região de atração de origem.

Em (TEEL; KAPOOR, 1997), a injeção de sinal antiwindup é definida como tendo por objetivo de síntese a redução da diferença entre entrada e saída do controlador. No presente trabalho, investiga-se métodos de síntese de compensadores antiwindup de acordo com uma outra visão, mencionada nos itens 2. e 3. do Problema 2.4, i.e. associada à garantia da estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado e estabilidade interna do sistema em malha fechada.

A Figura 2.3 ilustra um sistema saturante com um compensador antiwindup na malha de controle. Note que se $u(t) = \text{sat}(u(t))$, ou seja caso o controle não esteja saturado, a entrada do compensador antiwindup é nula, isto é, o mesmo não interfere no comportamento do sistema na ausência de saturação.

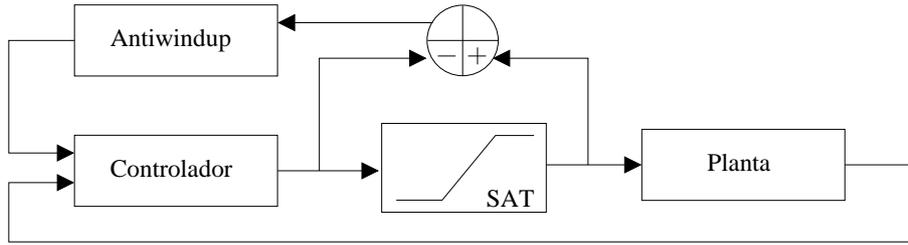


Figura 2.3: Antiwindup para um sistema saturante

Em verdade, são muitas as configurações possíveis de compensadores antiwindup que solucionam o Problema 2.4. Neste trabalho estamos interessados na síntese de compensadores antiwindup lineares, com as seguintes possíveis estruturas:

1. Estático, injeção de sinal nos Estados do Controlador mediante

$$y_a(t) = D_a \psi(y_c(t))$$

onde $y_a(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$ é o vetor de injeção de sinal antiwindup, e $D_a \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ é o parâmetro a ser determinado.

2. Dinâmico de Ordem Plena, Racional, injeção de sinal nos Estados do Controlador mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + D_a \psi(y_c(t)) \end{aligned}$$

onde $x_a(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$ é o vetor de estados do compensador antiwindup, e $A_a \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, $B_a \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times m}$, $C_a \in \mathfrak{R}^{n_c \times (n+n_c)}$, $D_a \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ são os parâmetros a serem determinados.

3. Dinâmico de Ordem Plena, Não Racional, injeção de sinal nos Estados do Controlador mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau) + D_a \psi(y_c(t)) \end{aligned}$$

onde $\tau \in \mathfrak{R} > 0$ é o atraso apenas nos estados da planta, ou apenas na entrada da planta. As matrizes $A_a, A_{a,d} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, $B_a \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times m}$, $C_a, C_{a,d} \in \mathfrak{R}^{n_c \times (n+n_c)}$, $D_a \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ são os parâmetros a serem determinados.

4. Dinâmico de Ordem Plena, Não Racional, injeção de sinal nos Estados e Saída do Controlador:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau_s) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau_s) + D_a \psi(y_c(t)) \\ z_a(t) &= E_a x_a(t) + E_{a,d} x_a(t - \tau_s) + F_a \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $z_a(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o sinal injetado na saída do controlador, e $A_a, A_{a,d} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, $B_a \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times m}$, $C_a, C_{a,d} \in \mathfrak{R}^{n_c \times (n+n_c)}$, $D_a \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$, $E_a, E_{a,d} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$, $F_a \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ são os parâmetros a serem determinados.

Observe-se que as três primeiras estruturas apresentadas podem ser obtidas a partir do compensador (2.4), bastando para isto tomar por nulos os demais parâmetros.

O controlador (2.2) compensado por (2.4) pode ser representado conforme segue

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau) + B_c C_y x(t) + y_a(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau) + D_c C_y x(t) + z_a(t) \end{aligned}$$

Observe-se que tanto nos estados quanto na saída do controlador é injetado um sinal, $y_a(t)$ e $z_a(t)$, respectivamente. A injeção de um sinal antiwindup nos estados do controlador mostra-se em geral suficiente para garantir que as trajetórias do sistema em malha fechada sejam limitadas quando sob ação de perturbações de norma \mathcal{L}_2 finitas. Da mesma forma, esta injeção mostra-se em geral suficiente para garantir que na ausência de perturbações, a origem do sistema é assintoticamente estável para condições iniciais pertencentes a um conjunto fechado incluindo a origem.

Já a injeção de sinal antiwindup na saída do controlador tem um efeito imediato no sistema, em especial pela matriz F_a , que acopla o excedente aos limites de controle diretamente na saída do controlador. Isto permite uma compensação do sinal do controle independentemente da dinâmica do controlador. Controladores lineares com pólo dominante bastante próximo da origem podem apresentar uma ação algo lenta sobre a planta. Assim, a injeção de um sinal antiwindup agindo apenas nos estados do controlador vincularia a ação do compensador antiwindup à dinâmica do controlador. Por outro lado, a injeção de sinal antiwindup à saída do controlador permite uma ação antiwindup desvinculada da dinâmica do controlador. Nos casos em que o controlador apresenta uma dinâmica lenta, esta desvinculação pode permitir resultados melhores, como por exemplo um maior limitante para a norma \mathcal{L}_2 de perturbações às quais o sistema é tolerante, ou um menor limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 de perturbações toleráveis à saída regulada do sistema.

Para representar o sistema saturante compensador por (2.4), redefine-se o vetor $\xi(t)$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$$

também define-se as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{I}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d,s} & 0 \\ 0 & A_{a,d} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d,i} & \mathbf{B}E_a + \check{\mathbf{I}}C_a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{d,s+i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d,s+i} & \mathbf{B}E_{a,d} + \check{\mathbf{I}}C_{a,d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{I}}D_a \\ B_a \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{B}F_a \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_y = [\mathbf{C}_y \ 0], \mathbf{C}_z = [\mathbf{C}_z \ 0], \mathbf{D}_z = \mathbf{D}_z, \mathbf{D}_{z,d} = \mathbf{D}_z + \mathbf{D}_z F_a \\ \mathbf{K} &= [\mathbf{K} \ E_a], \mathbf{K}_d = [\mathbf{K}_d \ E_{a,d}], \mathbf{K}_\psi = F_a \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_{d,s}\xi(t - \tau_s) + \mathbb{A}_{d,i}\xi(t - \tau_i) + \mathbb{A}_{d,s+i}\xi(t - \tau_s - \tau_i) \\ &\quad + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_d\psi(y_c(t - \tau_i)) + \mathbb{B}_w w(t) \\ y(t) &= \mathbb{C}_y \xi(t) \\ z(t) &= \mathbb{C}_z \xi(t) + \mathbb{D}_z \mathbb{K} \xi(t) + \mathbb{D}_z \xi(t - \tau_s) + \mathbb{D}_{z,d} \psi(y_c(t))\end{aligned}\tag{2.5a}$$

bem como

$$y_c(t) = \mathbb{K} \xi(t) + \mathbb{K}_d \xi(t - \tau_s) + \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t))\tag{2.5b}$$

Note-se que esta representação generaliza a consideração de atraso nos estados e na entrada da planta.

É importante ressaltar que a implementação dos compensadores propostos mediante a injeção de sinal antiwindup nos estados do sistema requer acesso à configuração interna do controlador nominal; ou seja, é necessário alterar o controlador nominal para implementar a injeção do sinal antiwindup gerado pelo compensador. Uma alternativa de maior apelo prático seria, por exemplo, efetuar esta injeção de sinal antiwindup à entrada do controlador nominal. Neste caso, ao invés de ser necessário alterar o controlador existente *a priori* para a implementação do compensador antiwindup, apenas adicionar-se-ia à saída da planta $y(t)$, a saída do antiwindup $y_a(t)$. Ambos sinais, somados, alimentariam o controlador nominal, i.e. $u_c(t) = y(t) + y_a(t)$.

Embora as metodologias aqui desenvolvidas não preveem esta alternativa, sua consideração é prontamente factível. Basta modificar a matriz $\check{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ por $\check{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}$, mantendo-se as LMIs inalteradas em sua representação. Apenas, a dimensão da saída do compensador $y_a(t)$ muda de $y_a(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ para $y_a(t) \in \mathbb{R}^p$.

Nos Capítulos 3 e 4, a classe de sistemas estudados apresentará somente atraso nos estados da planta. No Capítulo 5, os sistemas estudados apresentam apenas atraso na entrada da planta. Assim, não há a necessidade de distinguir a representação do atraso nos estados, do atraso na entrada. Neste trabalho, ambos são representados por τ . Ainda, este atraso τ é assumido constante e conhecido *a priori*. Em verdade, estudar-se-á separadamente sistemas com atraso no estado, tão somente; e sistemas com atraso na entrada, tão somente. Assim sendo, nos Capítulos 3 e 4 tem-se $\tau_i = 0$, e no Capítulo 5, $\tau_s = 0$.

A síntese de um compensador antiwindup como apresentada na Definição 2.4 consiste em garantir que:

- as trajetórias de (2.5a) sejam limitadas para toda a perturbação $w(t)$ limitada em norma \mathcal{L}_2 , ou seja, a estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado de (2.5a) deve ser garantida;
- na ausência de perturbações a origem de (2.5a) é assintoticamente estável para as condições iniciais pertencentes a um conjunto fechado incluindo a origem, ou seja, a estabilidade interna de (2.5a) deve ser garantida.

2.1 Lemas

Ao longo deste trabalho obtém-se condições que garantam a estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado e a estabilidade interna de (2.3). Estas condições tem por base importantes lemas, consagrados pelo uso na literatura científica da engenharia de controle. Esta seção apresenta alguns dos principais.

O seguinte lema, trata da pertinência do vetor $\xi(t)$ a um setor generalizado, quando a saída do controlador (2.2) pode ser expressa como $y_c(t) = \mathbb{K} \xi(t) + \mathbb{K}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t))$:

Lema 2.1 (condição de setor generalizada). (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006), (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006)

Considere-se a matriz $G \in \mathfrak{R}^{m \times 2(n+n_c)}$ e o conjunto poliedral $\mathcal{S}(u_o)$:

$$\mathcal{S}(u_o) = \{ \xi \mid | [\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)}] \xi | \leq u_{o_{(i)}}, i = 1, \dots, m \} \quad (2.6a)$$

então, se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ segue que a relação

$$\psi(y_c(t))^T T (\psi(y_c(t)) - G\xi(t) + \mathbb{K}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t))) \leq 0 \quad (2.6b)$$

é verificada para qualquer matriz diagonal definida positiva $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$.

Prova.: Considere $r = G\xi(t) - \mathbb{K}_d \xi(t - \tau) - \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t))$. Segue que (2.6b) pode ser escrito como

$$\psi(y_c(t))^T T (\psi(y_c(t)) - r) \leq 0$$

Tem-se os três casos abaixo.

1. $-u_{o_{(i)}} \leq y_{c_{(i)}}(t) \leq u_{o_{(i)}}$

por conseguinte

$$\psi(y_c(t))_{(i)} = 0$$

logo segue que

$$\psi(y_c(t))_{(i)} T_{(i,i)} (\psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)}) = 0$$

2. $y_{c_{(i)}}(t) \geq u_{o_{(i)}}$

Neste caso tem-se

$$\psi(y_c(t))_{(i)} = u_{o_{(i)}} - y_{c_{(i)}}(t) \leq 0$$

Segue que

$$\begin{aligned} \psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)} &= u_{o_{(i)}} - \mathbb{K}_{(i)} \xi(t) - \mathbb{K}_{d_{(i)}} \xi(t - \tau) - \mathbb{K}_{\psi_{(i)}} \psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)} \\ &= u_{o_{(i)}} - (\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)}) \xi(t) \end{aligned}$$

mas como $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ então

$$|(\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)}) \xi(t)| \leq u_{o_{(i)}}$$

ou seja,

$$u_{o_{(i)}} - (\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)}) \xi(t) \geq 0$$

Segue que $\psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)} \geq 0$, e como $\psi(y_c(t))_{(i)} \leq 0$, tem-se que

$$\psi(y_c(t))_{(i)} T_{(i,i)} (\psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)}) \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0$$

3. $y_{c_{(i)}}(t) \leq -u_{o_{(i)}}$

Neste caso tem-se

$$\psi(y_c(t))_{(i)} = -u_{o_{(i)}} - y_{c_{(i)}}(t) \geq 0$$

Segue que

$$\begin{aligned} \psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)} &= -u_{o_{(i)}} - \mathbb{K}_{(i)} \xi(t) - \mathbb{K}_{d_{(i)}} \xi(t - \tau) - \mathbb{K}_{\psi_{(i)}} \psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)} \\ &= -u_{o_{(i)}} - (\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)}) \xi(t) \end{aligned}$$

mas como $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ então

$$|(\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)})\xi(t)| \leq u_{o(i)}$$

ou seja,

$$-u_{o(i)} - (\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)})\xi(t) \leq 0$$

Segue que $\psi(y_c(t))_{(i)} - r_{(i)} \leq 0$, e como $\psi(y_c(t))_{(i)} \geq 0$, tem-se que

$$\psi(y_c(t))_{(i)} T_{(i,i)} (\psi(y_c(t))_{(i)} - G_{(i)}\xi(t)) \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0$$

fim da prova.

Lema 2.2 (complemento de Schur). *A matriz $\begin{bmatrix} P & M \\ \star & Q \end{bmatrix}$ é negativa definida se e somente se*

- $Q < 0$
- $P - MQ^{-1}M^T < 0$

onde $P - MQ^{-1}M^T$ pode ser chamado de Complemento de Schur de Q .

Lema 2.3 (lema de projeção). (GAHINET; APKARIAN, 1994) *Dado uma matriz simétrica $\Theta \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e duas matrizes P, Q , de dimensões m , considere-se o problema de encontrar alguma matriz Ω de dimensões compatíveis tais que*

$$\Theta + P^T \Omega^T Q + Q^T \Omega P < 0 \quad (2.7)$$

Denota-se por W_P, W_Q quaisquer matrizes cujas colunas formam bases dos espaços nulos de P e Q , respectivamente. Então (2.7) é solucionável para Ω se e somente se

$$\begin{cases} W_P^T \Theta W_P < 0 \\ W_Q^T \Theta W_Q < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Prova.: Necessidade: a necessidade de (2.8) é clara, por exemplo, $PW_P = 0 \rightarrow W_P^T \Theta W_P < 0$ quando pré e pós multiplicando (2.7) por W_P^T e W_P , respectivamente.

Suficiência: seja U_{PQ} uma base para $Ker(P) \cap Ker(Q)$ e introduz-se matrizes U_P, U_Q tais que $W_P := [U_{PQ}, U_P]$ e $W_Q := [U_{PQ}, U_Q]$ sejam bases de $Ker(P)$ e $Ker(Q)$ respectivamente. Seja p e q as dimensões de $Ker(P)$ e $Ker(Q)$, respectivamente. Observando-se que $[U_{PQ}, U_P, U_Q]$ é então uma base de $Ker(P) \oplus Ker(Q)$, completa-se-a em uma base $T = [U_{PQ}, U_P, U_Q, V]$ de \mathfrak{R}^m . A matriz T é não singular e portanto (2.7) é equivalente a

$$T^T \Theta T + (PT)^T \Omega^T (QT) + (QT)^T \Omega (PT) < 0 \quad (2.9)$$

Em seguida, particiona-se em blocos PT, QT e $T^T \Theta T$ de acordo com a partição $[U_{PQ}, U_P, U_Q, V]$ de T . Pela construção, tem-se que

$$PT = [0, 0, P_1, P_2], \quad QT = [0, Q_1, 0, Q_2]$$

Nota-se que $[P_1, P_2] \in \mathfrak{R}^{(k+p_2) \times p}$ com $p \leq k+p_2$ e $[Q_1, Q_2] \in \mathfrak{R}^{(k+m_2) \times q}$ com $q \leq k+m_2$, e que ambas matrizes apresentam posto completo em suas colunas. Com a notação

$$\begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} \Omega [Q_1, Q_2] = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p \times q} \quad (2.10)$$

e a partição

$$T^T \Theta T = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \star & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \star & \star & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \star & \star & \star & \Theta_{44} \end{bmatrix}$$

então (2.9) pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \star & \Theta_{22} & \Theta_{23} + \Omega_{11}^T & \Theta_{24} + \Omega_{21}^T \\ \star & \star & \Theta_{33} & \Theta_{34} + \Omega_{12} \\ \star & \star & \star & \Theta_{44} + \Omega_{22} + \Omega_{22}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.11)$$

Aqui as variáveis Ω_{ij} são arbitrárias uma vez que Ω é arbitrário e $[P_1, P_2]$ e $[Q_1, Q_2]$ tem posto completo em suas colunas. Especificamente, dado quaisquer Ω_{ij} a matriz $\begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} [Q_1, Q_2]^+$ é solução de (2.9). Assim, o problema reduz-se a encontrar condições em Θ_{ij} que assegurem a factibilidade de (2.11) para determinados Ω_{ij} .

Através do complemento de Schur, a desigualdade (2.11) pode ser representada como

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \star & \Theta_{22} & \Theta_{23} + \Omega_{11}^T \\ \star & \star & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12)$$

$$\Theta_{44} + \Omega_{22} + \Omega_{22}^T - \begin{bmatrix} \Theta_{14} \\ \Theta_{24} + \Omega_{21}^T \\ \Theta_{34} + \Omega_{12} \end{bmatrix}^T \Pi^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_{14} \\ \Theta_{24} + \Omega_{21}^T \\ \Theta_{34} + \Omega_{12} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

Dado Ω_{11} , Ω_{12} , e Ω_{21} , sempre é possível encontrar-se Ω_{22} tal que (2.13) é satisfeita. Então, (2.7) é factível se e somente se (2.12) for factível para algum Ω_{11} .

Agora (2.12) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\Theta_{12}^T \Theta_{11}^{-1} & I & 0 \\ -\Theta_{13}^T \Theta_{11}^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I & -\Theta_{11}^{-1} \Theta_{12} & -\Theta_{11}^{-1} \Theta_{13} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{22} - \Theta_{12}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{12} & \Omega_{11}^T + \Lambda_{32}^T \\ 0 & \star & \Theta_{33} - \Theta_{13}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{13} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

onde

$$\Lambda_{32} \triangleq \Theta_{23}^T - \Theta_{13}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{12} \quad (2.15)$$

Uma vez que Ω_{11} é arbitrário, isto é factível se e somente se

$$\begin{cases} \Theta_{11} < 0 \\ \Theta_{22} - \Theta_{12}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{12} < 0 \\ \Theta_{33} - \Theta_{13}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{13} < 0 \end{cases}$$

De forma equivalente, (2.14) é factível se e somente se

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \star & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{13} \\ \star & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0$$

Esta última condição é exatamente (2.8) considerando-se a definição de W_P , W_Q e Θ_{ij} .
fim da prova.

2.2 Estabilidade no Sentido de Liapunov-Krasovskii para Sistemas com Atraso

Seja dado o sistema abaixo (HALE; LUNEL, 1993), (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003)

$$\dot{\xi}(t) = f(t, \xi_t), \quad t \geq t_0 \quad (2.16)$$

onde $\xi(t) \in \mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$ e ξ_t corresponde à restrição de $\xi(\theta)$ para $\theta \in [t - \tau, t]$.

A existência do atraso em (2.16) faz com que sua solução não seja unicamente determinada a partir das variáveis de estado que descrevem (2.16) no instante $t = t_0$. Desta forma, a solução para determinar unicamente a solução $\xi(t)$, para todo $t \geq t_0$, é necessário conhecer-se os valores assumidos por $\xi(t)$ no intervalo de tempo $[t_0 - \tau, t_0]$. Por conta disto, a condição inicial não mais é expressa por um vetor definido em $\mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$, mas por uma função com domínio $[t_0 - \tau, t_0] \times \mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$. Assim, a condição inicial $\xi(t_0) \in \mathcal{C}_\tau$, tal que

$$\xi_{t_0}(\theta) = \xi(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

Teorema 2.1 (Liapunov-Krasovskii). *Sejam $V_1, V_2, V_3 : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$, ou seja, funções tais que $V_1(r) > 0, V_2(r) > 0, V_3(r) > 0, \forall r > 0$. Se existir um funcional contínuo $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que*

1. $V_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq V_2(\|\phi\|_c)$
2. $\dot{V}(t, \xi_t) \leq -V_3(\|\xi(t)\|)$

Então a solução identicamente nula de (2.16) é uniformemente assintoticamente estável.

A demonstração do Teorema 2.1 pode ser encontrada em (HALE; LUNEL, 1993), (IVANESCU; DUGARD; DION, 2000), (NICULESCU, 2001) e (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003).

Ao longo deste trabalho, utiliza-se o seguinte funcional de Liapunov-Krasovskii

$$V(t) = \xi(t)^T P \xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi(\theta)^T R \xi(\theta) d\theta$$

onde $P = P^T > 0, R = R^T > 0 \in \mathfrak{R}^{2(n+n_c) \times 2(n+n_c)}$. Por construção, $V(t)$ satisfaz:

$$\underline{\lambda}(P) \|\xi(t)\|_2^2 \leq V(t) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \|\xi_t\|_c^2$$

o que corresponde ao item 1. do Teorema 2.1. O desenvolvimento conseguinte visa garantir o item 2. do mesmo teorema.

Note-se que o funcional de Liapunov escolhido não é um funcional completo, ou seja, que permite a determinação necessária e suficiente (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003), (FRIDMAN; NICULESCU, 2007). Um dos motivadores da escolha do funcional utilizado nesta tese é a obtenção direta de condições LMI sem a necessidade de efetuar-se majorações ou outros artifícios algébricos conservadores. Não obstante, há espaço para investigar a melhora dos resultados obtidos com outros funcionais de Liapunov-Krasovskii, mais completos.

3 ANTIWINDUP DINÂMICO RACIONAL PARA SISTEMAS COM ATRASO NO ESTADO: ABORDAGEM PELO LEMA DE PROJEÇÃO

3.1 Introdução

Neste capítulo considera-se a síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso no estado e saturação na entrada de controle. Baseado no Lema de Projeção e em uma condição de setor modificada, é mostrado que o problema de síntese de um compensador antiwindup racional de ordem plena é convexo. A solução numérica de um compensador antiwindup que assegure a estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado, bem como a estabilidade interna do sistema em malha fechada é obtida através de condições expressas em desigualdades matriciais lineares (LMIs). Neste contexto, tanto resultados de âmbito local como global são apresentados. Como critério de otimização, considera-se a minimização do limitante superior ao ganho \mathcal{L}_2 da perturbação para a saída regulada do sistema.

3.2 Formulação do Problema

Seja dado o seguinte sistema linear com atraso nos estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entradas, perturbações, saídas medidas e saídas reguladas. Matrizes A , A_d , B , B_w , C_y e C_z são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Assume-se que os pares (A, B) e (C_y, A) sejam respectivamente estabilizáveis e detectáveis.

O escalar real positivo τ representa o atraso nos estados do sistema, que é supostamente constante e conhecido. Note-se que (3.1) pode ser obtido a partir da representação genérica dada em (2.1), tomando-se $\tau_i = 0$. Além disto, optou-se aqui por considerar $D_z = 0$. Neste caso a saída regulada é uma função linear dos estados da planta.

Assume-se que o vetor perturbação $w(t)$ é limitado em energia, i.e., $w(t) \in \mathcal{L}_2$, e para algum escalar δ , $0 \leq \frac{1}{\delta} < \infty$, a perturbação $w(t)$ é limitada como segue:

$$\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq \frac{1}{\delta} \quad (3.2)$$

A condição inicial do sistema (3.1) é descrita conforme segue

$$x(t_0 + \theta) = \phi_x(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], (t_0, \phi_x) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathcal{C}_\tau^v$$

Para controlar o sistema (3.1) considera-se um controlador dinâmico de saída dado *a priori*, representado como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $x_c(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathfrak{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathfrak{R}^m$ são respectivamente os vetores de estado, entradas e saídas do controlador. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são reais, constantes e de dimensões apropriadas.

Assume-se que a entrada da planta é limitada como segue:

$$-u_{o(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{o(i)}, i = 1, \dots, m$$

Como consequência dos limites na entrada da planta, o sinal de controle efetivamente injetado na planta é:

$$u(t) = \text{sat}(y_c(t))$$

Supõe-se que, o controlador (3.3) foi projetado para o sistema nominal, ou seja, não leva em conta a saturação da entrada da planta. Como forma de contornar esta desconsideração, sintetiza-se um compensador antiwindup, que inserido na malha de controle minimiza o efeito da saturação na estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada.

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + D_a \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $x_a(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$ e $\psi(y_c(t)) \triangleq \text{sat}(y_c(t)) - y_c(t) \in \mathfrak{R}^m$ são os vetores de estado e entrada do compensador antiwindup. O vetor $y_a(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$ é o sinal injetado na dinâmica do controlador. As matrizes A_a , B_a , C_a e D_a são reais, constantes e de dimensões apropriadas.

A partir da inserção do compensador antiwindup (3.4) na malha de controle, o modelo do controlador dado *a priori* (3.3) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) + y_a(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A Figura 3.1 ilustra a configuração topológica do sistema.

Neste capítulo está-se interessado na síntese de um compensador antiwindup dinâmico como mostrado em (3.4) (ou seja, na obtenção de uma solução numérica para as matrizes A_a , B_a , C_a , D_a), e que considere os efeitos da saturação da entrada da planta no comportamento do sistema em malha fechada (3.1)-(3.4)-(3.5). A síntese do compensador (3.4) considera os seguintes problemas

Problema 3.1 (estabilidade \mathcal{L}_2). *O compensador deverá assegurar que as trajetórias do sistema em malha fechada permaneçam limitadas para qualquer perturbação satisfazendo (3.2) para um certo δ , i.e. a estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado deve ser assegurada. Adicionalmente, o compensador deverá assegurar um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 entre a perturbação $w(t)$ e a saída do sistema $y(t)$, que corresponde a um problema de rejeição a perturbação, ou estabilidade entrada-saída.*

Problema 3.2 (estabilidade interna). *Na ausência de perturbações, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (3.1)-(3.4)-(3.5) deverá ser garantida para toda a condição inicial pertencendo a um conjunto \mathcal{D}_o de funções $\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v$, i.e. o conjunto \mathcal{D}_o está incluso na região de atração do sistema em malha fechada (3.1)-(3.4)-(3.5).*

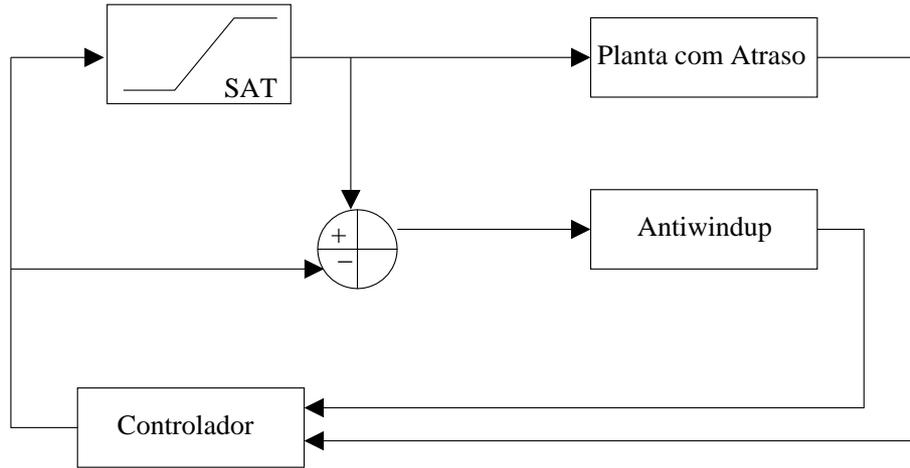


Figura 3.1: Configuração topológica do sistema

3.3 Preliminares

A partir da definição do seguinte vetor de estado aumentado

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e das seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A + BD_cC_y & BC_c \\ B_cC_y & A_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \check{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_y = [C_y \ 0], \mathbf{C}_z = [C_z \ 0], \mathbf{K} = [D_cC_y \ C_c] \\ \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \check{\mathbf{I}}C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \mathbb{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \check{\mathbf{I}}D_a \\ B_a \end{bmatrix}, \mathbb{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{C}_y &= [C_y \ 0], \mathbb{C}_z = [C_z \ 0], \mathbb{K} = [\mathbf{K} \ 0] \end{aligned} \quad (3.7)$$

O sistema em malha fechada (3.1)-(3.4)-(3.5) pode então ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t - \tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_w w(t) \\ z(t) &= \mathbb{C}_z \xi(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

com a seguinte condição inicial

$$\begin{aligned} \phi_\xi(\theta) &= [x(\theta)^T \ x_c(\theta)^T \ x_a(\theta)^T]^T \\ &= [\phi_x(\theta)^T \ \phi_{x_c}(\theta)^T \ \phi_{x_a}(\theta)^T]^T, \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

A saída do controlador $y_c(t)$ pode ser expressa como $y_c(t) = \mathbb{K}\xi(t)$. Na seqüência, o Lema 2.1 será empregado como a forma de considerar-se a presença não linearidade saturação na malha de controle.

3.4 Resultados Principais

Esta seção apresenta resultados teóricos que permitem a síntese do compensador antiwindup (3.4) de modo a assegurar tanto a estabilidade interna, como a estabilidade

entrada-estado do sistema em malha fechada. Posto de outra forma, deseja-se garantir que as trajetórias do sistema permaneçam limitadas para perturbações admissíveis, e que o conjunto atingível por estas trajetórias esteja incluso na região de atração da origem do sistema em malha fechada. Incluso no resultado numérico está um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 entre a perturbação $w(t)$ e a saída regulada $z(t)$.

O seguinte teorema considera a síntese do compensador antiwindup em um contexto regional (local). Neste caso, a estabilidade é assegurada uma vez que as condições iniciais do sistema e a perturbação pertençam a determinados conjuntos admissíveis.

Teorema 3.1. *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $Y, X, H_1, H_3 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, uma matriz positiva definida $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, matrizes $U, V \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$, $H_2 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ e escalares γ, μ tais que as LMIs (3.9a), (3.9b), (3.9c), (3.9d) são verificadas:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}X + X\mathbf{A}^T + H_1 + H_2 + H_2^T + H_3 & * & * & * \\ X\mathbf{A}_d^T & -H_1 - H_2 - H_2^T - H_3 & * & * \\ (X - Y)\mathbf{A}_d^T & -H_2 - H_3 & -H_3 & * \\ \mathbf{B}_w^T & 0 & -I & * \\ \mathbf{C}_z X & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9a)$$

$$\begin{bmatrix} N_a^T [\mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + H_1] N_a & * & * & * & * \\ X\mathbf{A}_d^T N_a & -H_1 - H_2 - H_2^T - H_3 & * & * & * \\ (X - Y)\mathbf{A}_d^T N_a & -H_2 - H_3 & -H_3 & * & * \\ (S\mathbf{B}^T + V)N_a & 0 & -2S & * & * \\ \mathbf{B}_w^T N_a & 0 & 0 & -I & * \\ \mathbf{C}_z Y N_a & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9b)$$

$$\begin{bmatrix} X & * & * \\ 0 & Y - X & * \\ \mathbf{K}_{(i)}X + V_{(i)} + U_{(i)} & \mathbf{K}_{(i)}(X - Y) + U_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.9c)$$

$$\mu - \delta < 0 \quad (3.9d)$$

onde $N_a = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Então existe um compensador antiwindup dinâmico conforme definido em (3.4), que assegura que

1. as trajetórias do sistema (3.8) são limitadas para todas as condições iniciais contidas na bola

$$\mathcal{B}(\beta) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi\|_c^2 \leq \beta / (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R))\}$$

e com as matrizes

$$P = P^T = \begin{bmatrix} X^{-1} & * \\ M & F \end{bmatrix} > 0, \quad R = R^T = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R^2 & R_3 \end{bmatrix} > 0$$

que são obtidas da seguinte forma

- As matrizes N, M são obtidas a partir de

$$M^T N = I - X^{-1} Y$$

- A matriz F é obtida mediante

$$F = (MX)^{-T} (Y - X) (MX)^{-1}$$

- A matriz R é obtida segundo

$$R = P \begin{bmatrix} I & XM^T \\ 0 & XM^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & \star \\ H_2 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ MX & MX \end{bmatrix}^{-1} P$$

com qualquer β tal que

$$0 \leq \beta \leq \mu^{-1} - \frac{1}{\delta}$$

2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \gamma V(0)$;
3. quando $w(t) = 0$, a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável, e

$$\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}/(\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$$

é uma região de estabilidade assintótica, i.e. $\forall \phi_\xi \in \mathcal{B}(\mu^{-1}), \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = 0$

Prova: A prova deste Teorema consiste em definir-se convenientemente uma função auxiliar $\mathcal{J}(t)$. Uma vez que $\mathcal{J}(t) < 0$, os itens 1 a 3 do Teorema 3.1 são verificados. As condições que garantem $\mathcal{J}(t) < 0$ são obtidas da seguinte forma

1. obtenção de uma inequação matricial que implique $\mathcal{J}(t) < 0$, através do Lema 2.1 (condição de setor generalizada);
2. aplicação do Lema 2.3 (lema de projeção);
3. representação das duas desigualdades resultantes da aplicação do Lema 2.3 em LMI;
4. obtenção de LMI que garanta a validade das condições do Lema 2.1, dita inclusão elipsoidal.

A seguir apresenta-se a prova detalhada do teorema.

Considere-se o seguinte funcional de Liapunov-Krasovskii

$$V(t) = \xi(t)^T P \xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi(\theta)^T R \xi(\theta) d\theta$$

Em particular, ele satisfaz:

$$\underline{\lambda}(P) \|\xi(t)\|_2^2 \leq V(t) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R)) \|\xi_t\|_c^2 \quad (3.10)$$

onde ξ_t corresponde à restrição de $\xi(\cdot)$, no instante t ao intervalo $[t - \tau, t]$. Então, se a condição inicial $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$, segue que $V(0) \leq \beta$.

Considere-se a seguinte função auxiliar $\mathcal{J}(t)$

$$\mathcal{J}(t) \triangleq \dot{V}(t) - w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t)$$

Se $\mathcal{J}(t) < 0$, tem-se que

$$\int_0^T \mathcal{J}(t) dt = V(T) - V(0) - \int_0^T w(t)^T w(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_0^T z(t)^T z(t) dt < 0, \forall T > 0$$

Então, segue que

- $\xi(T)^T P \xi(T) \leq V(T) < V(0) + \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \beta + \delta^{-1}, \forall T > 0$, ou seja, as trajetórias do sistema não abandonam o conjunto $\mathcal{E}(P, \mu^{-1})$ para $w(t)$ satisfazendo (3.2);
- para $T \rightarrow \infty, \|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \gamma V(0)$;
- para $w(t) = 0$, por definição, tem-se $V(t) < 0$.

Desta forma o desenvolvimento subsequente visa obter condições que uma vez verificadas garantam $\mathcal{J} < 0$. Assim sendo, avalia-se $\mathcal{J}(t)$ ao longo das trajetórias do sistema (3.8), e obtém-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) = & \xi(t)^T (\mathbb{A}^T P + P \mathbb{A} + R) \xi(t) + 2\xi(t - \tau)^T \mathbb{A}_d^T P \xi(t) + 2\psi(y_c(t))^T \mathbb{B}^T P \xi(t) \\ & + 2w(t)^T \mathbb{B}_w^T P \xi(t) - \xi(t - \tau)^T R \xi(t - \tau) - w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) \end{aligned}$$

Considere-se a matriz $G \in \mathfrak{R}^{m \times 2(n+n_c)}$ e o conjunto $\mathcal{S}(u_0)$ definido em (2.6a). Então, pelo Lema 2.1, dado que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_0)$, segue que para qualquer matriz diagonal $T > 0$ tem-se:

$$\psi(y_c(t))^T T (\psi(y_c(t)) - G \xi(t)) \leq 0$$

Como consequência, $\forall \xi \in \mathcal{S}(u_0)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) \leq & \xi(t)^T (\mathbb{A}^T P + P \mathbb{A} + R) \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbb{A}_d \xi(t - \tau) + \xi(t - \tau)^T \mathbb{A}_d^T P \xi(t) \\ & - \xi(t - \tau)^T R \xi(t - \tau) + \xi(t)^T (P \mathbb{B} + G^T T) \psi(y_c(t)) \\ & + \psi(y_c(t))^T (\mathbb{B}^T P + T G) \xi(t) - \psi(y_c(t))^T 2T \psi(y_c(t)) + \xi(t)^T P \mathbb{B}_w w(t) \\ & + w(t)^T \mathbb{B}_w^T P \xi(t) - w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} \xi(t)^T \mathbb{C}_z^T \mathbb{C}_z \xi(t) \end{aligned}$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - \tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^T M_0 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - \tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} < 0 \\ M_0 = & \begin{bmatrix} P \mathbb{A} + \mathbb{A}^T P + R & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_d^T P & -R & \star & \star & \star \\ \mathbb{B}^T P + T G & 0 & -2T & \star & \star \\ \mathbb{B}_w^T P & 0 & 0 & -I & \star \\ \mathbb{C}_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, $M_0 < 0$ é condição suficiente para ter-se $\mathcal{J}(t) < 0$, quando $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_0)$.

Pré e pós multiplicando M_0 pelo bloco diagonal

$$\text{blockdiag} \{Q, Q, S, I_m, I_q\}$$

onde $Q = P^{-1}, S = T^{-1}$, obtém-se a seguinte condição

$$\begin{bmatrix} Q \mathbb{A}^T + \mathbb{A} Q + \Gamma & \star & \star & \star & \star \\ Q \mathbb{A}_d^T & -\Gamma & \star & \star & \star \\ S \mathbb{B}^T + Z & 0 & -2S & \star & \star \\ \mathbb{B}_w^T & 0 & 0 & -I & \star \\ \mathbb{C}_z Q & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

onde $Z = GQ$ e $\Gamma = QRQ$.

Observe-se que (3.11) é equivalente a $M_0 < 0$, ou seja, a verificação de (3.11) é suficiente para garantir $\mathcal{J}(t) < 0$, para todo $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$.

Considerando-se a seguinte estrutura para as variáveis Q , Γ e Z

$$Q = \begin{bmatrix} Y & \star \\ N & F \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \star \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}, Z = [V \quad \tilde{U}]$$

além das matrizes definidas em (3.7), segue que a desigualdade (3.11) pode ser reescrita na forma

$$\Theta + \mathcal{U}^T \Omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^T \Omega^T \mathcal{U} < 0 \quad (3.12)$$

onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + \Gamma_1 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ NA^T + \Gamma_2 & \Gamma_3 & \star & \star & \star & \star & \star \\ YA_d^T & 0 & -\Gamma_1 & \star & \star & \star & \star \\ NA_d^T & 0 & -\Gamma_2 & -\Gamma_3 & \star & \star & \star \\ SB^T + V & \tilde{U} & 0 & 0 & -2S & \star & \star \\ \mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & \star \\ C_z Y & C_z N^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{\mathbf{I}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} N & F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que os parâmetros do compensador antiwindup estão todos na matriz Ω .

Pelo Lema 2.3, segue que

$$\Theta + \mathcal{U}^T \Omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^T \Omega^T \mathcal{U} < 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_U^T \Theta \mathcal{N}_U < 0, \mathcal{N}_V^T \Theta \mathcal{N}_V < 0$$

onde $\mathcal{N}_U \in \text{Ker}\{U\}$, e $\mathcal{N}_V \in \text{Ker}\{V\}$. As bases para o kernel de U e V podem ser escolhidas respectivamente como:

$$\mathcal{N}_U = \begin{bmatrix} N_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{N}_V = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

onde $N_a = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim sendo, a verificação simultânea de:

$$\mathcal{N}_U^T \Theta \mathcal{N}_U < 0, \quad \mathcal{N}_V^T \Theta \mathcal{N}_V < 0$$

é suficiente para garantir $\mathcal{J}(t) < 0, \forall \xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$.

Busca-se agora uma representação de cada uma destas condições $\mathcal{N}_U^T \Theta \mathcal{N}_U < 0$, e $\mathcal{N}_V^T \Theta \mathcal{N}_V < 0$ na forma de LMI.

Finalmente, considerando-se a mudança de variáveis

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ H_2 & H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & XM^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & MX \end{bmatrix}$$

em (3.14) e (3.15), obtém-se as LMIs (3.9a), (3.9b).

Por outro lado, se

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m$$

segue que $\mathcal{E}(P, \mu^{-1}) \subset \mathcal{S}(u_0)$. Como em (ROOS; BIANNIC, 2008), pré e pós multiplicando-se esta condição pelo bloco diagonal

$$\text{blockdiag} \{Q, 1\}$$

obtém-se a seguinte LMI

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ \mathbb{K}_{(i)}Q + Z_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16)$$

em seguida, pré e pós multiplica-se (3.16) pelo bloco diagonal

$$\text{blockdiag} \left\{ \begin{bmatrix} I & XM^T \\ 0 & XM \end{bmatrix}, 1 \right\}$$

e sua transposta, respectivamente. Sendo posto que

$$NX^{-1} + FM = 0$$

e definindo-se

$$U = \tilde{U}MX$$

obtém-se a LMI (3.9c). Assim, a LMI (3.9c) assegura que $\mathcal{E}(P, \mu^{-1}) \subset \mathcal{S}(u_0)$. Este fato implica na validade da condição de setor expressa em (2.6b). Desta forma, se (3.9a), (3.9b) e (3.9c) são satisfeitas, segue que $\mathcal{J}(t) < 0$ efetivamente verifica-se, uma vez que $\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \delta^{-1}$ e $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$. Finalmente, a LMI (3.9d) garante que $\exists \beta > 0$, o que conclui a prova dos itens 1) e 2) do Teorema 3.1.

Considere-se agora que $w(t) = 0$. Neste caso $\mathcal{J}(t) < 0$ assegura que $\dot{V}(t) < 0$, dado que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$. Então, se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\mu^{-1})$, segue que (veja (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006))

$$\xi(t)^T P \xi(t) \leq V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}$$

o que significa que, para qualquer condição inicial pertencente à bola $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, tem-se $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \mu^{-1})$, $\forall t \geq t_0$. Uma vez que a LMI (3.9c) é satisfeita, tem-se que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_0)$, $\forall t \geq t_0$. Então, para qualquer condição inicial pertencente a $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, efetivamente tem-se que $\dot{V}(t) < 0$, o que conclui a prova do item 3. *fim da prova.*

Note-se que o Teorema 3.1 não determina o compensador antiwindup (3.4). Apenas garante a existência de um compensador conforme (3.4) que seja solução para os Problemas 3.1 e 3.2, ou seja: garanta a estabilidade entrada-estado do sistema em malha fechada e a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada. Por conseguinte, a determinação do compensador é tratada *a posteriori*, ou seja, uma vez que as condições expressas em LMIs do Teorema 3.1 foram verificadas e as matrizes $Y, X, H_1, H_2, H_3, S, U, V$, e escalares γ, μ são conhecidos. A determinação do compensador antiwindup será abordada na Seção 3.4.2.

3.4.2 Determinação do Compensador

A partir do Teorema 3.1, as matrizes do compensador antiwindup A_a , B_a , C_a e D_a podem então ser obtidas numericamente pela resolução sequencial de dois problemas LMI, como descrito no seguinte algoritmo.

Algoritmo 3.1 (obtenção dos parâmetros do compensador antiwindup).

- **Passo 1:**

Resolva as LMIs (3.9a)-(3.9d) para Y , X , H_1 , H_3 , S , U , V , H_2 , γ e μ . Para estas matrizes calcule:

- a partir de X e Y obtidas, encontre matrizes N e M tais que a relação $N^T M = I - YX^{-1}$ seja mantida.

Uma vez que a LMI (3.9c) assegura que $Y - X > 0$, é sempre possível computar-se matrizes não singulares M e N , satisfazendo $N^T M = I - YX^{-1}$. Note-se, entretanto, que dado X e Y a escolha de N e M não é única. Por exemplo, pode-se determinar $N = \alpha I$ e segue que $M = (I - YX^{-1})\alpha^{-1}$, para qualquer escalar α ; ou pode-se computar M e N mediante uma decomposição LU ou QR, por exemplo. Isto significa, de fato, que a realização do compensador não é única (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997).

- $F = (MX)^{-T}(Y - X)(MX)^{-1}$

- $\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (MX)^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & \star \\ H_2 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (MX)^{-1} \end{bmatrix}$

- **Passo 2:** Calcule as matrizes Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V} , a partir das matrizes obtidas no Passo 1 e resolva a LMI (3.12) para: $\Omega = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix}$.

Similarmente ao caso local, as matrizes do compensador antiwindup A_a , B_a , C_a , D_a podem ser computadas usando-se uma versão modificada do Algoritmo 3.1 de acordo com o Corolário 3.1.

Note-se a partir de (3.9c) tem-se $Y - X > 0$. Segue que, $I_{n+m} - YX^{-1}$ é não singular. Então, é sempre possível obter-se matrizes M , N quadradas e não singulares verificando a equação $NM^T = I_{n+m} - YX^{-1}$. Da não singularidade de M infere-se que a transformação de similaridade de Γ para H é reversível.

3.4.3 Estabilidade do Compensador

As condições do Teorema 3.1, e Corolário 3.1, implicam na satisfação da relação (3.11): a validade desta relação significa que é verificado que: $Q\mathbb{A}^T + \mathbb{A}Q + \Gamma < 0$. Isto garante a estabilidade assintótica da matriz A_a do compensador antiwindup, contrariamente a abordagem utilizada em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008). Mais ainda, no espírito de (ROOS; BIANNIC, 2008), seria também possível modificar as condições do Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 de modo a posicionar os pólos do compensador antiwindup em regiões de interesse do plano s .

Para tanto sugerimos adicionar a seguinte LMI

$$H_3 > 2\lambda(Y - X) \quad (3.19)$$

expandindo-se os termos $QA^T + AQ + \Gamma$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + \check{\mathbf{I}}C_a N + N^T C_a^T \check{\mathbf{I}}^T + \Gamma_1 & \star \\ A_a N + N\mathbf{A}^T + FC_a^T \check{\mathbf{I}}^T + \Gamma_2 & A_a F + FA_a^T + \Gamma_3 \end{bmatrix} < 0$$

ou seja, tem-se

$$A_a F + FA_a^T + \Gamma_3 < 0$$

Como $\Gamma_3 = \Gamma_3^T > 0$, $F = F^T > 0$, naturalmente a existência de uma solução implica que A_a apresenta autovalores negativos. Não obstante, seria interessante se houvesse controle sobre a posição destes autovalores, a exemplo de (ROOS; BIANNIC, 2008). Naquele trabalho, os autores adicionam a $QA^T + AQ + \Gamma < 0$, um termo dependente de λ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + \check{\mathbf{I}}C_a N + N^T C_a^T \check{\mathbf{I}}^T + \Gamma_1 & \star \\ A_a N + N\mathbf{A}^T + FC_a^T \check{\mathbf{I}}^T + \Gamma_2 & A_a F + FA_a^T + \Gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda F \end{bmatrix} < 0$$

obtendo a condição

$$A_a F + FA_a^T + \Gamma_3 + 2\lambda F < 0$$

onde λ é o limitante do máximo autovalor de A_a , definido *a priori*. Em (ROOS; BIANNIC, 2008) a introdução de λ junto às condições LMIs que garantem a existência de um compensador antiwindup torna obrigatória a definição de algum $\lambda > 0$, caso contrário estas condições LMIs são ineficazes. Todavia, nem sempre há de ser significativo a restrição dos autovalores de A_a como proposto pelos autores, uma vez que $\underline{\lambda}(\Gamma_3)$ pode ser muito maior do que λ . Por conta disto, sugere-se um procedimento distinto, baseado na exploração de Γ_3 . Neste caso, é suficiente restringir em uma LMI à parte

$$\Gamma_3 > 2\lambda F$$

Pré e pós multiplicando-se esta condição por XM^T e MX , respectivamente, obtém-se

$$XM^T \Gamma_3 MX > 2\lambda XM^T FM$$

lembrando que

$$XM^T FMX = Y - X$$

temos a condição (3.19).

A vantagem desta restrição em relação a (ROOS; BIANNIC, 2008) é que ela é independente das demais condições, podendo ou não ser considerada no processo de síntese. Já em (ROOS; BIANNIC, 2008) é sempre necessário definir algum λ que restrinja a dinâmica de A_a para então averiguar a existência de uma solução. Assim, (3.19) pode ser adicionada ao conjunto de LMIs do Teorema 3.1 ou Corolário 3.1 quando esta restrição fizer sentido no contexto da aplicação destes resultados.

Pelos mesmos argumentos, adicionando-se à (3.19) a condição:

$$H_3 < 2(\lambda + \Delta_\lambda)(Y - X)$$

onde $\Delta_\lambda > 0$, limita-se os pólos do antiwindup a uma *strip* $(-\lambda - \Delta_\lambda, \lambda)$.

Outras restrições aos pólos do compensador antiwindup podem ser adicionadas sob a forma de LMI (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997).

3.5 Problemas de Otimização

A satisfação das condições dadas no Teorema 3.1 e no Corolário 3.1 asseguram que o sistema em malha fechada (3.8) apresenta trajetórias limitadas para qualquer perturbação admissível, posto que as condições iniciais pertençam ao conjunto $\mathcal{B}(\beta)$. Como as condições propostas são em forma de LMI, elas podem facilmente ser incorporadas em problemas de otimização convexa. Apresenta-se na seqüência três problemas de interesse. Primeiro, considera-se a maximização da norma $1/\delta$ na perturbação admissível, para a qual as trajetórias permanecem limitadas. O segundo problema considera a minimização de um limitante para o ganho \mathcal{L}_2 da perturbação para a saída regulada. Finalmente, considera-se a maximização da projeção da estimativa da região de atração da origem sobre os estados da planta. Por simplicidade, para os dois primeiros problemas, assumem-se nulas as condições iniciais, ou seja, $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$, enquanto que no último problema assume-se $w(t) = 0$. Otimizações com critérios mistos podem ser obtidos diretamente (veja alguns exemplos em (CASTELAN et al., 2006)).

- **Maximização da tolerância à perturbação:** A idéia é maximizar a norma \mathcal{L}_2 da perturbação para a qual pode ser assegurado que as trajetórias do sistema em malha fechada permaneçam limitadas. Fazemos isto igualando $\frac{1}{\delta} = \mu^{-1}$. Resulta disto que $\beta = 0$. Assim, as condições iniciais do sistema são nulas ($\phi_\xi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$), de modo que qualquer trajetória além da trivial (identicamente nula) será devido ao efeito da perturbação. Embora o limitante da norma \mathcal{L}_2 da perturbação $w(t)$ não apareça explicitamente nas LMIs obtidas no Teorema 3.1 e Corolário 3.1, a igualdade $\frac{1}{\delta} = \mu^{-1}$ permite maximizar $\frac{1}{\delta}$ através do seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (3.9a), (3.9b), (3.9c), (3.9d)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note-se que neste caso não se está interessado no valor de γ . De fato, γ assumirá um valor finito que assegure que ambas LMIs (3.9a), (3.9b) sejam válidas.

- **Maximização da atenuação da perturbação:** Para um limite não nulo admissível da norma \mathcal{L}_2 da perturbação (dado por $\frac{1}{\delta}$), a idéia é minimizar o limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 de $w(t)$ para $z(t)$. Considerando-se que a condição inicial seja nula (ou seja, $\phi_\xi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$), isto pode ser obtido a partir da solução do seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (3.9a), (3.9b), (3.9c), (3.9d)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Neste caso considera-se $\frac{1}{\delta} = \mu^{-1}$ é determinado *a priori* nas LMIs.

- **Maximização da região das condições iniciais admissíveis:**(GOMES DA SILVA JR.; GHIGGI; TARBOURIECH, 2008) Considera-se aqui o caso livre de perturbação, ou seja $w(t) = 0$. O objetivo da síntese consiste na determinação de um compensador antiwindup que resulte em uma projeção da bola de condições iniciais admissíveis $\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi\|_c^2 \leq \mu^{-1}/(\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$ nos estados da planta tão grande quanto possível. Em outras palavras, está-se interessado em maximizar a estimativa da região de atração do sistema nos estados da planta.

Neste contexto livre de perturbação, o Teorema 3.1 é utilizado em uma versão modificada: nas condições (3.9a) e (3.9b) as duas últimas colunas e linhas são removi-

das; a relação (3.9d) é removida. Por simplicidade, e sem perda de generalidade, pode-se considerar $\mu = 1$.

Então, a maximização da projeção da bola de condições iniciais admissíveis nos estados da planta pode ser obtida pela seguinte condição:

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{sujeito a } (N_a X^{-1} N_a < \lambda I), (3.9a), (3.9b), (3.9c), (3.9d), \end{aligned}$$

$$\text{uma vez que } P = \begin{bmatrix} X^{-1} & \star \\ M & E \end{bmatrix} \text{ e } N_a = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Todavia, X^{-1} não é uma variável de busca, ou seja, não consta no conjunto das LMIs (3.9a)-(3.9d). Não obstante, aparece multiplicada em ambos os lados pelo parâmetro N_a e seu transposto. É portanto inacessível para alguma manipulação algébrica. Nestas circunstâncias, mediante a aplicação do complemento de Schur, obtém-se uma representação tal que

$$N_a X^{-1} N_a < \lambda I$$

equivale a:

$$\lambda I - N_a X^{-1} N_a > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda I & \star \\ N_a & X \end{bmatrix} > 0$$

Assim, pode-se utilizar a condição

$$\begin{bmatrix} \lambda I & \star \\ N_a & X \end{bmatrix} \geq 0$$

para verificar-se que o primeiro bloco de dimensão $n \times n$ de P é menor que λI_n . Segundo o mesmo raciocínio, a matriz R_1 também não é uma variável de busca, porém, pode ser acessada indiretamente através da matriz H . Note-se que:

$$\Gamma = QRQ, \quad \begin{bmatrix} H_1 & H_2^T \\ H_2 & H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & XM^T \end{bmatrix} \Gamma \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & MX \end{bmatrix}$$

A exemplo de $N_a^T X^{-1} N_a$ em P , apenas $N_a^T R_1 N_a$ projeta-se sobre o sub-espço dos estados da planta.

Efetuando os produtos temos que $H_1 + H_2 + H_2^T + H_3$ equivale a:

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 + H_2^T + H_3 &= YR_1Y + YR_2^T N + N^T R_2 Y + N^T R_3 N + XM^T N R_1 Y \\ &+ XM^T R_2^T N + XM^T F R_2 Y + XM^T F R_3 N \\ &+ YR_1 N^T M X + N^T R_2 N^T M X + YR_2^T F M X \\ &+ N^T R_3 F M X + XM^T N R_1 N^T M X \\ &+ XM^T N R_2^T F M X + XM^T F R_2 N^T M X \\ &+ XM^T F R_3 F M X \\ H_1 + H_2 + H_2^T + H_3 &= X R_1 X \end{aligned}$$

Então, o seguinte problema de otimização convexa pode ser considerado para indiretamente minimizar $\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)$

$$\begin{aligned} & \min \eta_1 \lambda + \eta_2 \text{traço}(N_a(H_1 + H_2 + H_2^T + H_3)N_a) \\ & \text{sujeito a } (3.9a), (3.9b), (3.9c), (3.9d), (3.5) \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde η_1, η_2 são parâmetros de ajuste de peso, de livre escolha. Um exemplo de escolha é: $\eta_1 \in [0, 1], \eta_2 = 1 - \eta_1$.

3.6 Exemplos Numéricos

Exemplo 3.1. [exemplo de estabilização local] Considere-se o sistema (3.1) dado pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_y = C_z = [0 \quad 1]$$

O controlador dinâmico de saída (3.3) é um PI descrito pelo seguinte modelo:

$$A_c = 0, B_c = -1, C_c = 0.15, D_c = -3$$

O limite da amplitude do controle é dado por $u_o = 10$. Como o sistema em malha aberta é instável, aplica-se o resultado proposto no Teorema 3.1 para obter-se o compensador antiwindup dinâmico. Com este objetivo, resolvemos o problema de otimização (3.20). Obteve-se o valor ótimo $\mu = 0.1397$. O compensador antiwindup é então obtido seguindo-se os passos descritos no Algoritmo 3.1.

- A partir da solução numérica das LMIs, determinou-se N , M mediante decomposição QR de $I - YX^{-1}$, encontrando-se

$$N = \begin{bmatrix} 0.1327 & 0.0807 & 0.9879 \\ 0.4837 & 0.8647 & 0.1356 \\ 0.8651 & 0.4958 & 0.0757 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 4.2851 & 2.0486 & -3.2336 \\ 0 & 0.1561 & -0.0243 \\ 0 & 0 & -0.0038 \end{bmatrix}$$

- Como a solução numérica das LMIs determinou os valores das matrizes X e Y , com a escolha de N e M , a matriz F é univocamente determinada pela relação

$$F = (XM^T)^{-1}(Y - X)(MX)^{-1}$$

obtendo-se

$$F = \begin{bmatrix} 0.0221 & -0.0062 & -0.1018 \\ -0.0062 & 2.5964 & -1.4031 \\ -0.1018 & -1.4031 & 75.5340 \end{bmatrix}$$

- A partir das matrizes H_1 , H_2 e H_3 , e da relação

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & XM^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & H_2^T \\ H_2 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & XM^T \end{bmatrix}^{-1}$$

obtem-se

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4.4804 & -0.9826 & -3.4117 & -0.1426 & 0.4500 & 5.4463 \\ * & 0.9823 & 1.8388 & 0.0416 & -0.3946 & -1.2357 \\ * & * & 11.5120 & 0.2131 & 1.1957 & 37.1142 \\ * & * & * & 0.0062 & 0.0021 & 0.0907 \\ * & * & * & * & 0.8897 & 12.3983 \\ * & * & * & * & * & 489.2586 \end{bmatrix}$$

- Finalmente, reconstrói-se Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V} , e chega-se a Ω resolvendo-se $\Theta + \mathcal{U}\Omega\mathcal{V} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U}^T < 0$, o que leva a

$$A_a = \begin{bmatrix} -0.2735 & -0.1463 & -0.0070 \\ 12.0690 & -2.0094 & -0.1511 \\ -12.4998 & -3.2826 & -3.6294 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} -0.0069 \\ -0.9258 \\ 0.2113 \end{bmatrix} \\ C_a = \begin{bmatrix} -3.9941 & -7.5678 & -0.5543 \end{bmatrix}, D_a = 0.03$$

De modo a ilustrar o desempenho do compensador antiwindup, considera-se a seguinte perturbação \mathcal{L}_2 :

$$w(t) = \begin{cases} \bar{w}, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 0, & t \geq \bar{t} \end{cases}$$

Os resultados da simulação para $\bar{w} = 2.6757$ e $\bar{t} = 1$ e um atraso no tempo $\tau = 1$ encontra-se ilustrado na Figura 3.2. No gráfico superior desta figura, a linha contínua representa a saída regulada $z(t)$ do sistema em malha fechada (3.8), com o compensador antiwindup (3.4) atuando no laço de controle. No gráfico inferior, ilustra-se o sinal de controle injetado na planta em um tracejado contínuo, e a perturbação à qual a planta está sujeita é ilustrada em um tracejado descontínuo. Note-se que para $\mu = 0.1397$ obtido, que corresponde a $\frac{1}{\delta} = 7.1595$, a entrada de controle não atinge os limites da saturação. Neste caso, não existe diferença entre a saída do sistema saturante e o sistema com compensação antiwindup. Porém, quando $\bar{w} = 12.2281$ e $\bar{t} = 1$, o sistema saturante torna-se instável. Já no sistema com compensação antiwindup, a injeção de sinal antiwindup na malha de controle mantém a estabilidade da origem, conforme pode ser observado na Figura 3.3.

De forma a ilustrar a relação entre $\frac{1}{\delta}$ e γ , resolve-se para o sistema deste exemplo, o Problema de Otimização 3.21 para diversos valores de δ . Neste caso, $\mu = \delta$. A Tabela 3.1 mostra que quanto menor o limitante para a máxima norma \mathcal{L}_2 tolerável para $w(t)$ (o limite é dado por $\frac{1}{\delta}$, definido a priori), menor o ganho máximo desta perturbação para a saída regulada do sistema $z(t)$. Ou seja, para valores crescentes de δ (ou decrescentes de $\frac{1}{\delta}$), menor γ .

Tabela 3.1: Relação entre δ e γ

δ	$\min \gamma$
0.14	47.2928
0.15	38.7279
0.16	34.5244
0.17	31.8690
0.18	29.4087
0.19	28.4874
0.20	27.3843
0.30	25.3067

Exemplo 3.2. [exemplo de estabilização global] Considere o sistema (3.1) dado por

$$A = -0.1, A_d = 0.08, B = 1, B_w = 0.1, C_y = 1, C_z = 1, D_z = 0$$

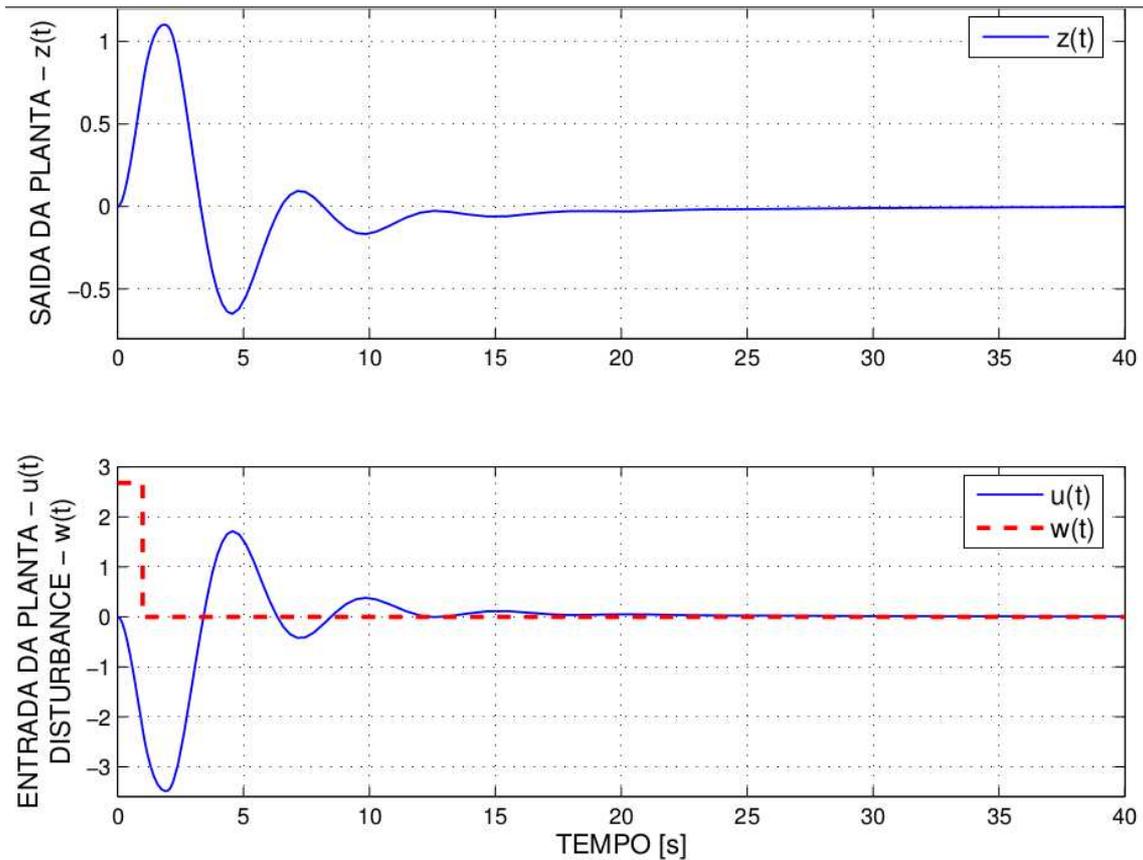


Figura 3.2: Sistema sujeito à perturbação tolerável

para o qual um controlador PI é definido conforme segue

$$A_c = 0, B_c = -0.4, C_c = 1, D_c = -2$$

Note-se que o sistema malha em aberta é assintoticamente estável. O resultado do Corolário 3.1 pode ser utilizado para se tentar encontrar uma solução globalmente estável na síntese do compensador antiwindup. Uma vez encontrada esta solução, a estabilidade é assegurada para qualquer $w(t) \in \mathcal{L}_2$. Assim sendo, resolve-se o problema de otimização (3.21). O compensador é então obtido seguindo-se os passos descritos no Algoritmo 3.1:

- conforme exposto no Exemplo 3.1, inicialmente obteve-se as matrizes N , M mediante decomposição QR

$$N = \begin{bmatrix} -0.0256 & 0.9997 \\ 0.9997 & 0.0256 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 77.1671 & -82.7657 \\ 0 & -0.1894 \end{bmatrix}$$

- a seguir computou-se a matriz F

$$F = \begin{bmatrix} 0.02141 & -0.0489 \\ -0.0489 & 13.4208 \end{bmatrix}$$

- e a matriz Γ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0409 & -0.0530 & -0.0021 & 0.0809 \\ * & 34.2180 & 0.6870 & 9.9483 \\ * & * & 0.0154 & -0.2027 \\ * & * & * & 112.0697 \end{bmatrix}$$

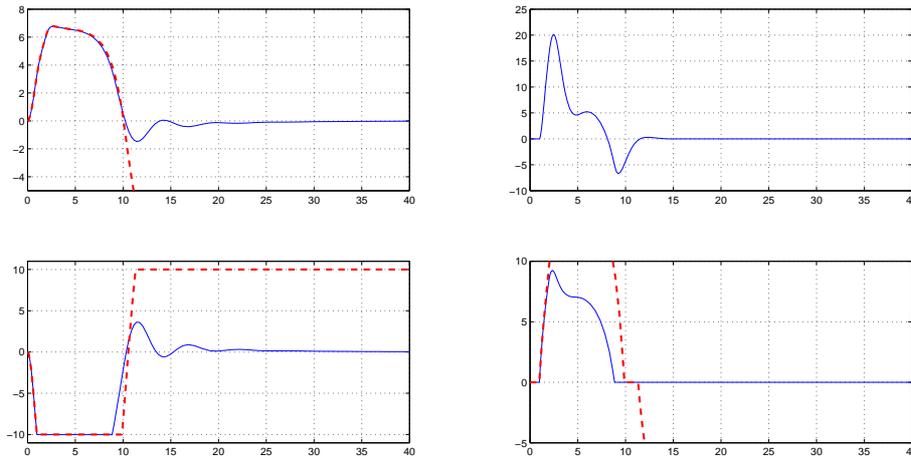


Figura 3.3: Sistema sujeito à perturbação com norma \mathcal{L}_2 acima da máxima tolerável

- ao final, reconstruiu-se as matrizes Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V}
- e computou-se Ω resolvendo-se $\Theta + \mathcal{U}\Omega\mathcal{C} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U}^T < 0$

o que leva às seguintes matrizes

$$A_a = \begin{bmatrix} -3.3519 & -0.7237 \\ 664.1017 & -22.6235 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 0.2243 \\ 13.9456 \end{bmatrix} \\ C_a = \begin{bmatrix} -42.9117 & -38.0761 \end{bmatrix}, D_a = 13.0740$$

e $\gamma=25.1005$.

Para este exemplo, considere-se $u_o = 1$ e $\tau = 1$. A Figura 3.4 mostra os resultados da simulação com uma perturbação $w(t)$ definida como $\bar{w} = 100$ e $\bar{t} = 1$. Nestes gráficos, a linha contínua azul representa o sistema em malha fechada (3.8), com o compensador antiwindup (3.4). A linha tracejada descontínua vermelha representa o sistema nominal em malha fechada, ou seja, sem injeção de sinal antiwindup. Como no exemplo anterior, observa-se uma melhora significativa do desempenho do sistema em malha fechada quando da inclusão do compensador antiwindup na malha de controle.

3.7 Comentários finais do Capítulo

Neste capítulo apresentamos um método baseado no Lema de Projeção para sintetizar um compensador antiwindup dinâmico racional para um sistema com atraso no estado. Condições suficientes para a existência de uma solução foram apresentadas e diretamente obtidas em forma de LMI. A solução proposta garante que as trajetórias do sistema não divergem quando sujeito a perturbações admissíveis. Problemas de otimização para a determinação numérica dos parâmetros deste compensador antiwindup foram apresentados. Exemplos numéricos ilustram a metodologia proposta e os resultados obtidos.

A principal contribuição deste capítulo é a obtenção de condições LMI que garantam a existência de um compensador antiwindup racional para sistemas com atraso no estado. Uma das principais vantagens no uso de um compensador antiwindup racional em sistemas com atraso no estado, está no fato de que o atraso nos estados da planta não

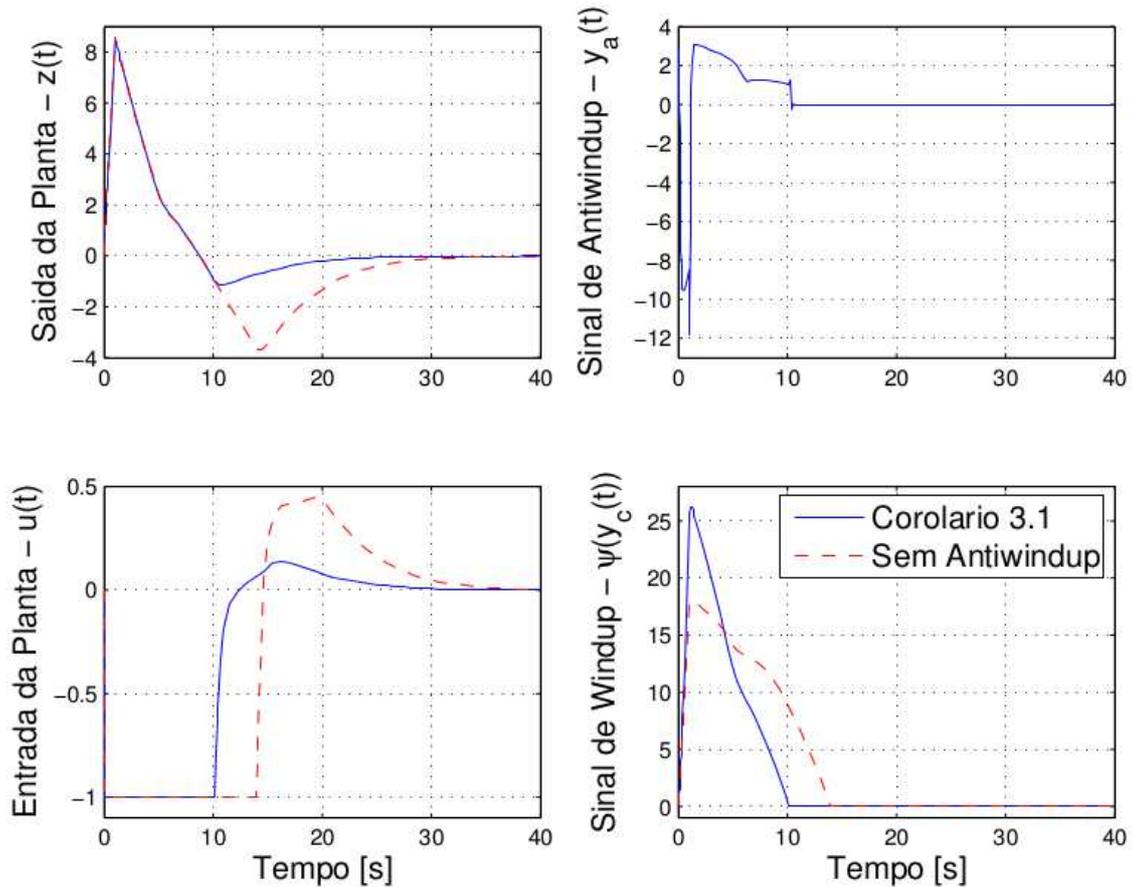


Figura 3.4: Atenuação à Perturbação \mathcal{L}_2 . Sistema com e sem injeção antiwindup

necessita ser determinado para a implementação do compensador antiwindup. Até então, a literatura dispunha de resultados contemplando métodos de síntese de compensadores não racionais, e estáticos. A implementação de compensadores não racionais em malha de controle de sistemas com atraso no estado, requerem a determinação exata do atraso a que os estados da planta estão sujeitos. Embora compensadores estáticos não requeiram esta determinação, os graus de liberdade disponíveis na síntese dos compensadores são bastante reduzidos, em comparação com uma implementação dinâmica. Cabe ressaltar que embora ao longo deste capítulo, o método de síntese obtido para compensadores antiwindup racionais resulte em compensadores de ordem plena (a ordem do compensador é a ordem do sistema nominal), compensadores de ordem reduzida podem ser diretamente obtidos, aplicando-se os resultados obtidos em (WU; LIN; ZHENG, 2005).

Outra contribuição dos resultados deste capítulo é a garantia de estabilidade em malha aberta do compensador antiwindup sintetizado. A ausência desta garantia pode inviabilizar a implementação, uma vez que ruídos na entrada do compensador podem causar a divergência da trajetória dos estados do compensador antiwindup, e como consequência, causar a divergência das trajetórias do sistema em malha fechada. Todavia, para sistemas com pequenos atrasos, o uso de condições independentes do atraso pode levar a um resultado excessivamente conservador. Por fim, funcionais de Liapunov-Krasovskii com termos completos, também contribuem para resultados menos conservadores.

É importante ressaltar que embora as condições que garantem a existência do compensador sejam independentes do atraso, o conjunto de condições iniciais é dependente do

atraso. Lembra-se que as trajetórias do sistema (3.8) são limitadas para todas as condições iniciais contidas na bola

$$\mathcal{B}(\beta) = \{ \phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^\nu \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \beta / (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \}$$

a qual depende do valor do atraso τ . Desta forma a independência do atraso é referente às condições LMI que garantem a existência de um compensador antiwindup. Os resultados deste capítulo encontram-se publicados em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009).

No capítulo seguinte apresentaremos resultados referentes a síntese de compensadores antiwindup em uma estrutura mais abrangente que a considerada neste capítulo. Estudaremos compensadores que além dos parâmetros A_a, B_a, C_a, D_a , podem apresentar termos não racionais, além da possibilidade de injetar um sinal antiwindup não só na dinâmica do controlador $\dot{x}_c(t)$, mas também na saída $y_c(t)$.

4 ANTIWINDUP DINÂMICO PARA SISTEMAS COM ATRASO NO ESTADO: UM *FRAMEWORK* GENÉRICO

4.1 Introdução

O Capítulo 3 tratou do problema de síntese de compensadores antiwindup dinâmicos racionais para sistemas com atraso no estado. Conforme apontado em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009), o uso de um compensador antiwindup racional é interessante quando o atraso não é precisamente conhecido ou variante no tempo. Embora a metodologia de síntese requeira atraso constante e conhecido, pode ser possível determinar um valor τ que seja representativo do atraso nos estados do sistema. A parte esta questão, graus de liberdade adicionais podem viabilizar uma solução que melhore o desempenho do sistema em malha fechada. Assim sendo, no caso em que o atraso nos estados de um sistema pode ser representado por um escalar constante e conhecido, um compensador antiwindup não racional torna-se um alternativa de interesse.

Neste capítulo será apresentado um *framework* genérico para a síntese de compensadores antiwindup lineares. Este *framework* permite a síntese de compensadores antiwindup não racionais e racionais, com a injeção de sinal antiwindup tanto nos estados do controlador, como em sua saída. Baseado no uso de um funcional Liapunov-Krasovskii, uma condição de setor generalizada já existente na literatura (a mesma utilizada no Capítulo 3 e algumas transformações de congruências, propõe-se um *framework* de síntese de compensadores antiwindup, baseado em LMIs. Este *framework* proposto unifica o processo de síntese de compensadores antiwindup lineares.

4.2 Formulação do Problema

Seja considerado o seguinte modelo de uma planta

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde os vetores $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ representam os estados da planta, a entrada, a perturbação, e as saídas medidas e regulada, respectivamente. O atraso τ é assumido conhecido e constante. As matrizes A , A_d , B , B_w , C_y , C_z , D_z possuem dimensões apropriadas.

Aqui, assim como em (3.1), tem-se um caso especial do modelo genérico apresentado em (2.1) onde $\tau_i = 0$. Observe-se que em relação a $z(t)$ em (3.1), aqui, a saída regulada $z(t)$ apresenta um termo adicional, dependente de $u(t)$, i.e. $D_z u(t)$. A saída regulada

não necessariamente depende apenas dos estados da planta - como $z(t)$ em (3.1). Quando está-se, por exemplo, interessado em ponderar, junto com outros critérios, a norma \mathcal{L}_2 do sinal de controle, inclui-se - por exemplo - um termo dependente de $u(t)$ em $z(t)$.

A entrada da planta (4.1) é supostamente limitada conforme segue

$$-u_{o(i)} \leq u(i) \leq u_{o(i)}, \quad u_{o(i)} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

O vetor perturbação $w(t)$ é tal qual definido em (3.2).

De modo a controlar a planta (4.1), assume-se que o seguinte controlador foi projetado para estabilizar o sistema sem levar em consideração os limites da amplitude do controle da planta, (4.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau) + B_c y(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$. Matrizes A_c , $A_{c,d}$, B_c , C_c , $C_{c,d}$, D_c , são matrizes de dimensões apropriadas. Note-se que devido aos termos com atraso em (4.3), a função de transferência deste controlador é não racional. Por isso a este controlador é referido como tal, conforme apontado em (DE OLIVEIRA; GEROMEL, 2004) e em (VELASCO-VILLA; MAZA-CASAS, 2005). Naturalmente, controladores racionais podem ser considerados. Neste caso é suficiente definir $A_{c,d} = 0$ e $C_{c,d} = 0$.

A conexão nominal do controlador (4.3) com a planta (4.1) é $u(t) = y_c(t)$. Todavia, assumindo-se este um sistema saturante, tem-se

$$u(t) = \text{sat}(y_c(t))$$

Por conta disto, propõe-se a síntese de um compensador que injete um sinal antiwindup nos estados e saída do controlador (4.3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau) + D_a \psi(y_c(t)) \\ z_a(t) &= E_a x_a(t) + E_{a,d} x_a(t - \tau) + F_a \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde os vetores $\psi(y_c(t)) = \text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)$, $x_a(t) \in \mathbb{R}^{n+n_c}$, $y_a(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $z_a(t) \in \mathbb{R}^m$ são a entrada, o estado, e a saída do compensador, respectivamente. Em particular, $y_a(t)$ é injetado na dinâmica do controlador, e $z_a(t)$ na saída do controlador, (GRIMM et al., 2003), (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005). Como o controlador (4.3), o compensador antiwindup (4.4) apresenta uma estrutura não racional. A presença de termos com atraso em (4.4) oferece graus adicionais de liberdade no processo de síntese através de matrizes $A_{a,d}$, $C_{a,d}$, $E_{a,d}$, como será visto na seqüência. É interessante notar que a implementação deste compensador *pari modus* pode ser inviável em função da necessidade de armazenar-se o vetor de estados continuamente, além da necessidade de extrair-se o vetor atrasado em τ instantes de tempo a cada instante. Uma forma de viabilizar tal implementação seria a discretização do modelo para que a armazenagem simplifique-se a, pro exemplo, uma coleção de amostras do vetor de estados $x_a(t)$

Com o controlador (4.4) incluso na malha de realimentação, o controlador (4.3) é modificado para

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau) + B_c u_c(t) + y_a(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau) + D_c u_c(t) + z_a(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Neste trabalho está-se interessado na síntese do compensador dinâmico (4.4), ou seja, determinar-se numericamente as matrizes A_a , $A_{a,d}$, B_a , C_a , $C_{a,d}$, D_a , E_a , $E_{a,d}$, F_a para tratar dos Problemas 3.1 e 3.2, definidos no Capítulo 3.

Comentário 4.1. *Observe-se a diferença entre a estrutura dos compensadores antiwindup em (4.4) e em (3.4) no Capítulo 3. Em (4.4), além do compensador assumir uma estrutura não racional, apresenta uma segunda saída, $z_a(t)$ que injeta sinal antiwindup na saída do controlador, adicionalmente. Enquanto o compensador (3.4) é racional e desprovido da saída adicional $z_a(t)$, a metodologia de síntese empregada no Capítulo 3 - lema de Projeção - suporta a estrutura do compensador (4.4). Todavia, as inequações do Teorema 4.1 e do Corolário 4.1 mudariam ao considerar-se o compensador (4.4). A razão desta mudança está no aumento de parâmetros do compensador e, por conseguinte, na eventual redução da dimensão da base do kernel de \mathcal{U} e \mathcal{V} . Outrossim, uma vez encontrada a solução para LMIs do Teorema 4.1 e Corolário 4.1, não existe garantia de que haverá uma solução para*

$$\Theta + \mathcal{U}^T \Omega \mathcal{V} + \mathcal{V}^T \Omega^T \mathcal{U} < 0 \quad (4.6)$$

para algum Ω outro que o não estruturado, ou seja, com alguma estrutura pré-definida.

Assim sendo, ao sintetizar-se um compensador como em (4.4) através do Lema de Projeção, pode não ser possível encontrar-se uma matriz $\Omega = \begin{bmatrix} A_a & 0 & B_a \\ C_a & 0 & D_a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que satisfaça (4.6).

4.3 Preliminares

A partir do vetor $\xi(t)$ definido em (3.6) na Seção 3.3,

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$$

define-se as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C_y & BC_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & BC_{c,d} \\ 0 & A_{c,d} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \check{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_y = [C_y \ 0], \mathbf{C}_z = [C_z + D_z D_c C_y \ D_z C_c] \\ \mathbf{C}_{z,d} &= [0 \ D_z C_{c,d}], \mathbf{D}_z = D_z, \mathbf{K} = [D_c C_y \ C_c], \mathbf{K}_d = [0 \ C_{c,d}] \\ \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}E_a + \check{\mathbf{I}}C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \mathbb{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}E_{a,d} + \check{\mathbf{I}}C_{a,d} \\ 0 & A_{a,d} \end{bmatrix} \\ \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{B}F_a + \check{\mathbf{I}}D_a \\ B_a \end{bmatrix}, \mathbb{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{C}_y = [C_y \ 0] \\ \mathbb{C}_z &= [C_z \ D_z E_a], \mathbb{C}_{z,d} = [C_{z,d} \ D_z E_{a,d}], \mathbb{D}_z = D_z + D_z F_a \\ \mathbb{K} &= [\mathbf{K} \ E_a], \mathbb{K}_d = [\mathbf{K}_d \ E_{a,d}], \mathbb{K}_\psi = F_a \end{aligned} \quad (4.7)$$

Representa-se então o sistema em malha fechada (4.1)-(4.4)-(4.5) pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t - \tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_w w(t) \\ z(t) &= \mathbb{C}_z\xi(t) + \mathbb{C}_{z,d}\xi(t - \tau) + \mathbb{D}_z\psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

sendo

$$y_c(t) = \mathbb{K}\xi(t) + \mathbb{K}_d\xi(t - \tau) + \mathbb{K}_\psi\psi(y_c(t))$$

2. $\|z(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \gamma V(0)$
3. quando $w(t) = 0$, a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável, e para todas as condições iniciais pertencendo a

$$\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \left\{ \phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^\nu \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}/(\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \right\}$$

as trajetórias correspondentes convergem para a origem.

De forma semelhante à prova do Teorema 3.1, propõe-se na presente prova a mesma função auxiliar $\mathcal{J}(t)$ e busca-se condições que assegurem $\mathcal{J}(t) < 0$. Diferentemente à referida prova, aqui, ao invés de aplicar-se o Lema 2.3 (lema de projeção), utilizar-se-á uma transformação de variáveis linearizante. Como consequência, apenas uma condição LMI assegura $\mathcal{J}(t) < 0$. A outra condição assegura a validade da condição de setor utilizada (Lema 2.1) - inclusão elipsoidal. A seguir é apresentada a prova detalhadamente.

Prova.: Seja dado o candidato a funcional Liapunov-Krasovskii (NICULESCU, 2001), (RICHARD, 2003)

$$V(t) = \xi(t)^T P \xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi(\theta)^T R \xi(\theta) d\theta \quad (4.10)$$

Então, se a condição inicial $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$, segue que $V(0) \leq \beta$.¹

Considere-se a função auxiliar

$$\mathcal{J}(t) = \dot{V}(t) - w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t)$$

Se $\mathcal{J}(t) < 0$, tem-se que

- $\xi(T)^T P \xi(T) \leq V(T) < V(0) + \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \beta + \delta^{-1}, \forall T > 0$, ou seja, as trajetórias do sistema não abandonam o conjunto $\mathcal{E}(P, \mu^{-1})$ para $w(t)$ satisfazendo (3.2);
- para $T \rightarrow \infty$, $\|z(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \gamma V(0)$.

Na seqüência, mostrar-se-á que (4.9a), (4.9b) e (4.9c) implicam que $\mathcal{J}(t) < 0$, dado que $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$ e $w(t)$ satisfaz (3.2).

A expansão da expressão para $\mathcal{J}(t)$ resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) = & (\mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t-\tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_w w(t))^T P \xi(t) \\ & + \xi(t)^T P (\mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t-\tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_w w(t)) \\ & + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t-\tau)^T R \xi(t-\tau) - w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t) \end{aligned}$$

Considerando-se o Lema 2.1, para todo $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) \leq & (\mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t-\tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_w w(t))^T P \xi(t) \\ & + \xi(t)^T P (\mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t-\tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_w w(t)) \\ & + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t-\tau)^T R \xi(t-\tau) - w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t) \quad (4.11) \\ & + 2\psi(y_c(t))^T T G \xi(t) - \psi(y_c(t))^T 2T \psi(y_c(t)) \\ & - \psi(y_c(t))^T 2T \mathbb{K}_d \xi(t-\tau) - \psi(y_c(t))^T T \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t)) \end{aligned}$$

¹para detalhes desta implicação, vide início da prova do Teorema 3.1 no Capítulo 3.

A partir de (4.11) e do complemento de Schur, se

$$\begin{bmatrix} P\mathbb{A} + \mathbb{A}^T P + R & \star & \star & \star & \star \\ \mathbb{A}_d^T P & -R & \star & \star & \star \\ \mathbb{B}^T P + TG & -T\mathbb{K}_d & -2T - T\mathbb{K}_\psi - \mathbb{K}_\psi^T T & \star & \star \\ \mathbb{B}_w^T P & 0 & 0 & -I & \star \\ \mathbb{C}_z & \mathbb{C}_{z,d} & \mathbb{D}_z & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.12)$$

garante-se $\mathcal{J}(t) < 0$ para todo $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$.

Definindo-se agora matrizes $Q = P^{-1}$ e $S = T^{-1}$, e pré e pós multiplicando-se (4.12) por $\text{blockdiag}(Q, Q, S, I, I)$, respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}Q + Q\mathbb{A}^T + \Gamma & \star & \star & \star & \star \\ Q\mathbb{A}_d^T & -\Gamma & \star & \star & \star \\ S\mathbb{B}^T + Z & -\mathbb{K}_d Q & -2S - \mathbb{K}_\psi S - S\mathbb{K}_\psi^T & \star & \star \\ \mathbb{B}_w^T & 0 & 0 & -I & \star \\ \mathbb{C}_z Q & \mathbb{C}_{z,d} Q & \mathbb{D}_z S & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.13)$$

onde $Z = GQ = \begin{bmatrix} V & \tilde{U} \end{bmatrix}$, e $\Gamma = QRQ$, com $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \star \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$.

Similarmente como (SCHERER; GAHINET; CHILALI., 1997), pré e pós multiplica-se (4.13) pela seguinte matriz bloco diagonal

$$\text{blockdiag} \left\{ \begin{bmatrix} I & XM^T \\ I & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & XM^T \\ I & 0 \end{bmatrix}, I_m, I_q, I_l \right\}$$

e sua transposta, respectivamente. Em seguida, considerando-se as matrizes definidas em (4.7), bem como assumindo-se a seguinte mudança de variável

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{A}_d & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{C}_d & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{E}_d & \hat{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XM^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a & A_{a,d} & B_a \\ C_a & C_{a,d} & D_a \\ E_a & E_{a,d} & F_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & \star \\ H_2 & H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & XM^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \star \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ MX & 0 \end{bmatrix}$$

segue que (4.13) é equivalente à LMI (4.9a).

A partir de (4.13) conclui-se que a trajetória de $\xi(t)$ nunca abandona o elipsóide

$$\mathcal{E}(P, \mu^{-1}) = \{\xi(t) \in \mathfrak{R}^{2(n+n_c)} \mid \xi(t)^T P \xi(t) \leq \mu^{-1}\}$$

para todo $t > 0$, se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$. Neste caso, a inclusão de $\mathcal{E}(P, \mu^{-1})$ em $\mathcal{S}(u_o)$ assegura que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, ou seja, reforça a validade de (2.6b). Isto é assegurado pela verificação das seguintes condições

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m$$

que são equivalentes a:

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ \mathbb{K}_{(i)} Q + Z_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.15)$$

Pré e pós multiplicando (4.15) pelo seguinte bloco diagonal:

$$\text{blockdiag} \left\{ \begin{bmatrix} I & XM^T \\ I & 0 \end{bmatrix}, 1 \right\}$$

e sua transposta, respectivamente, e considerando-se a mudança de variáveis indicada em (4.14), obtém-se a LMI (4.9b). Já a LMI (4.9c) assegura a existência do conjunto de estados iniciais ϕ_ξ tais que $V(0) \leq \beta$, com $\beta > 0$.

Conforme apontado na prova do Teorema 3.1 no capítulo anterior, a partir de (4.9b) tem-se, via complemento de Schur, $Y - X > 0$. Segue que, $I_{n+m} - YX^{-1}$ é não singular. Então, é sempre possível obter matrizes M , N quadradas e não singulares verificando a equação $NM^T = I_{n+m} - YX^{-1}$. Da não singularidade de M infere-se que todas as transformações de similaridade efetuadas são reversíveis.

Como a verificação das condições (4.9b) assegura a validade de (2.6b), ou seja

$$\psi(y_c(t))^T T (\psi(y_c(t)) - G\xi(t) + \mathbb{K}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t))) \leq 0$$

então, a verificação simultânea de (4.9a), (4.9b), (4.9c) assegura que $\mathcal{J}(t) < 0$ para todo $w(t)$ verificando (3.2), ou seja, $\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \frac{1}{\delta}$, e $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$. Isto conclui a prova do primeiro e segundo itens do Teorema 4.1. Assim como na prova do item 3 do Teorema 3.1, considere-se agora $w(t) = 0$. Então, $\mathcal{J}(t) < 0$ implica que $\dot{V}(t) < -\frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t) < 0$, se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$. Então, se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\mu^{-1})$, segue que

$$\xi(t)^T P \xi(t) \leq V(t) \leq V(0) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}$$

o que significa que para uma condição na bola $\mathcal{B}(\mu^{-1})$ tem-se $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \mu^{-1})$, para todo $t \geq 0$. Devido à verificação da condição (4.9b), segue que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, para todo $t \geq 0$. Então, para qualquer condição inicial pertencendo à bola $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, segue que efetivamente tem-se $\dot{V}(t) < 0$, o que conclui a prova do terceiro ítem do Teorema 4.1. fim da prova.

Comentário 4.2 (well-posedness). *Observa-se que quando o compensador antiwindup injeta o sinal $z_a(t)$ na saída do controlador, o qual apresenta um termo dependente de $\psi(y_c(t))$, forma-se o seguinte laço algébrico*

$$y_c(t) = \mathbb{K} \xi(t) + \mathbb{K}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{K}_\psi (\text{sat}(y_c(t)) - y_c(t))$$

Por definição, na região de linearidade $\text{sat}(y_c(t)) = y_c(t)$, portanto tem-se $\psi(y_c(t)) = 0$ e não existe laço algébrico. Porém, fora da região de linearidade, é necessário garantir que cada valor $\xi(t)$ é mapeado para um único valor de $y_c(t)$. Isto equivale a garantir que o sistema é well-posed. Quando o sistema não é well-posed, pode haver descontinuidade na saída do controlador, o que pode causar perda de performance e levar o sistema à instabilidade (HANUS; KINNAERT; HENROTTE, 1987), (CAMPO; MORARI; NETT, 1989), (ZACCARIAN; TEEL, 2002).

Agora note-se que a verificação da LMI (4.9a) implica que

$$-2S + F + F^T < 0$$

De acordo com (GRIMM et al., 2003) esta condição garante que o sistema em malha fechada é well-posed.

Comentário 4.3 (diferenças em relação à literatura). *Observe-se que a transformação de variáveis proposta em (4.14) distingue-se da utilizada em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) e (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997). Esta diferença deve-se à transformação de similaridade, que transforma (4.12) em (4.13). A condução do desenvolvimento sem esta transformação, leva a uma mudança de variáveis similar às obtidas nos trabalhos citados. Neste caso, como visto em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008), não é possível considerar o caso racional. A disposição dos termos que estruturam a matriz $P = P^T = \begin{bmatrix} X^{-1} & \star \\ M & E \end{bmatrix} > 0$ naquele trabalho, obriga a inclusão de termos não racionais $A_{a,d}$, $C_{a,d}$ no compensador antiwindup para que as condições que garantem a existência do compensador antiwindup sejam exprimíveis na forma de LMIs.*

4.4.1 Estabilidade Global

Como visto no capítulo anterior, quando a origem da planta em malha aberta é assintoticamente estável, é possível tratar o problema de síntese de compensador antiwindup considerando-se a estabilidade dentro de um contexto global. Ou seja, procurar assegurar-se que as trajetórias do sistema em malha fechada sejam limitadas para qualquer perturbação com norma \mathcal{L}_2 finita. Em outras palavras, que o sistema em malha fechada seja \mathcal{L}_2 estável para qualquer $\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \in \mathfrak{R}$. Além disto, para $w(t) = 0$ a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável. O seguinte corolário estende os resultados do Teorema 4.1 para o caso global.

Corolário 4.1 (estabilidade global). *Se existem matrizes simétricas positivas definidas Y , X , H_1 , $H_3 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, matrizes H_2 , \hat{A} , $\hat{A}_d \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times m}$, \hat{C} , $\hat{C}_d \in \mathfrak{R}^{n_c \times (n+n_c)}$, $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$, \hat{E} , $\hat{E}_d \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$, $\hat{F} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e um escalar positivo γ tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{A}X + X\mathbf{A}^T + H_1 & & & & & \star \\ \mathbf{A}X + Y\mathbf{A}^T + \hat{E}^T\mathbf{B}^T + \hat{C}^T\hat{\mathbf{I}}^T + \hat{A}^T + H_2 & \text{sym}\{\mathbf{A}Y + \mathbf{B}\hat{E} + \hat{\mathbf{I}}\hat{C}\} + H_3 & & & & \star \\ & X\mathbf{A}_d^T & & & & X\mathbf{A}_d^T \\ Y\mathbf{A}_d^T + \hat{E}_d^T\mathbf{B}^T + \hat{C}_d^T\hat{\mathbf{I}}^T + \hat{A}_d^T & Y\mathbf{A}_d^T + \hat{E}_d^T\mathbf{B}^T + \hat{C}_d^T\hat{\mathbf{I}}^T & & & & \dots \\ \mathbf{S}\mathbf{B}^T + \hat{F}^T\mathbf{B}^T + \hat{D}^T\hat{\mathbf{I}}^T + \hat{B}^T - \mathbf{K}X & \mathbf{S}\mathbf{B}^T + \hat{F}^T\mathbf{B}^T + \hat{D}^T\hat{\mathbf{I}}^T - \mathbf{K}Y - \hat{E} & & & & \\ & \mathbf{B}_w^T & & & & \mathbf{B}_w^T \\ & \mathbf{C}_zX & & & & \mathbf{C}_zY + \mathbf{D}_z\hat{E} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \\ \star & \star & \star & \star & \star & \\ -H_1 & \star & \star & \star & \star & \\ \dots & -H_2 & -H_3 & \star & \star & \\ -\mathbf{K}_dX & -\mathbf{K}_dY - \hat{E}_d & -2S - \hat{F} - \hat{F}^T & \star & \star & \\ 0 & 0 & 0 & -I & \star & \\ \mathbf{C}_{z,d}X & \mathbf{C}_{z,d}Y + \mathbf{D}_z\hat{E}_d & \mathbf{D}_zS + \mathbf{D}_z\hat{F} & 0 & -\gamma I & \end{array} \right] < 0 \quad (4.16a)$$

$$Y - X > 0 \quad (4.16b)$$

então existe um compensador antiwindup dinâmico como definido em (4.4), que assegura que

1. as trajetórias do sistema (4.8) são limitadas para qualquer condição inicial $\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^\nu$ e qualquer $w(t)$ com $\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \in \mathcal{L}_2$;

2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 < \gamma \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \gamma V(0)$;
3. quando $w(t) = 0$, a origem do sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável.

Prova.: Em (2.6a) considere $G = -\mathbb{K}$. Segue que a condição de setor (2.6b) do Lema 2.1 é verificada para todo $\xi(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c+n_a}$. Neste caso, variáveis V e U das condições LMI (4.9a) e (4.9b), tornam-se $V = -\mathbf{K}Y - \hat{E}$ e $U = -\mathbf{K}X$. A condição (4.16b) garante $I - YX^{-1}$ não singular, portanto existem N, M quadradas, não singulares, satisfazendo $NM^T = I - YX^{-1}$. Como consequência, as transformações de similaridades efetuadas são reversíveis. *fim da prova.*

4.4.2 Determinação do Compensador

A verificação das LMIs (4.9a)-(4.9b)-(4.9c) assegura a estabilidade local do sistema em malha fechada. Já a verificação das LMIs (4.16a)-(4.16b) asseguram a estabilidade global do sistema em malha fechada. Uma vez que algum destes dois conjuntos de LMIs seja verdadeiro, a partir de (4.14) pode-se determinar o correspondente compensador antiwindup dinâmico (4.4) através da seguinte relação

$$\begin{bmatrix} A_a & A_{a,d} & B_a \\ C_a & C_{a,d} & D_a \\ E_a & E_{a,d} & F_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XM^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{A}_d & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{C}_d & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{E}_d & \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.17)$$

com $N^T M = I - YX^{-1}$.

Observe-se que conforme mencionado anteriormente, de (4.9b) tem-se $Y - X > 0$, o que implica que $I - YX^{-1} > 0$. Segue que existem N, M quadradas, não singulares satisfazendo $NM^T = I - YX^{-1}$. Além disto, por definição $S = T^{-1}$. Pelo Lema 2.1, T é uma matriz diagonal positiva definida. Por conseguinte, S é não singular. Finalmente, X é não singular por definição. Sendo assim, as matrizes

$$\begin{bmatrix} XM^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1}, \text{ e } \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}^{-1}$$

são garantidamente não singulares.

Como visto na capítulo anterior, a escolha de N, M não é unívoca. Escolhas distintas para estas matrizes resultam em matrizes $A_a, A_{a,d}, C_a, C_{a,d}, E_a, E_{a,d}$ distintas. Isto motiva a investigação dos efeitos da escolha de N, M sobre os parâmetros do compensador antiwindup. Este tópico não tem sido abordado na literatura. Neste trabalho escolheu-se a decomposição QR de $I - YX^{-1}$ para a obtenção de N, M , visando um melhor condicionamento das matrizes e a consequente menor propagação de erros de arredondamento.

Comentário 4.4 (Comparação com resultados da literatura). *Deve-se ressaltar que a abordagem proposta em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) permite somente a síntese de compensadores antiwindup não racionais ($A_{a,d} = 0, C_{a,d} = 0$), enquanto que com a abordagem proposta no capítulo anterior, somente compensadores antiwindup racionais são obtíveis (i.e. $A_{a,d} = 0, C_{a,d} = 0$). No capítulo anterior, os resultados são obtidos através da aplicação do Lema de Projeção. Por outro lado, em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) uma abordagem por transformação de congruência como proposta em (DE OLIVEIRA; GEROMEL, 2004) para a síntese de controladores, é considerada.*

4.4.3 Estabilidade do Compensador

A LMI (4.9a) é equivalente a (3.11). Se a condição (3.11) é satisfeita, isto implica que

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}Q + Q\mathbb{A}^T + \Gamma & \star \\ Q\mathbb{A}_d^T & -\Gamma \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

Considerando-se a definição de Q , \mathbb{A} , \mathbb{A}_d e Γ , pode ser mostrado que (4.18) implica que

$$A_a F + F A_a^T + \Gamma_3 + A_{a,d} F \Gamma_3^{-1} F A_{a,d}^T < 0$$

o que garante a estabilidade assintótica interna do compensador antiwindup (4.4). De fato, esta última desigualdade garante que o funcional de Liapunov-Krasovskii

$$V_a(t) = x_a^T F^{-1} x_a + \int_{t-\tau}^t x_a(\theta)^T F^{-1} \Gamma_3 F^{-1} x_a(\theta) d\theta$$

é estritamente decrescente ao longo das trajetórias do sistema $\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t-\tau)$. Além disto, explorando este fato, é possível restringir-se a dinâmica do compensador antiwindup como feito em (ROOS; BIANNIC, 2008) mediante o posicionamento de pólos do compensador antiwindup em alguma região pré-definida do plano complexo. Deve-se salientar que a abordagem previamente proposta em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) não permite assegurar, *a priori*, a estabilidade do compensador antiwindup ou restrições na sua dinâmica.

4.5 Problemas de Otimização

Conforme tratado no Capítulo 3, aborda-se-á os seguintes problemas de otimização complexa

- **Maximização da tolerância à perturbação.** A idéia é maximizar o limite da norma \mathcal{L}_2 da perturbação para a qual pode ser assegurado que as trajetórias do sistema permaneçam limitadas. Considerando-se que a condição é nula (ou seja, $\phi_\xi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$), isto pode ser feito através do seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (4.9a) - (4.9c)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Note-se que como a condição inicial é nula tem-se $\beta = 0$, então $\mu^{-1} = \frac{1}{\delta}$.

- **Maximização da atenuação da perturbação.** Para um limitante não nulo da máxima norma \mathcal{L}_2 admissível para a perturbação, dado por $\mu^{-1} = \frac{1}{\delta}$, a idéia é minimizar o limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 de $w(t)$ em $z(t)$. Considerando-se nula condição inicial (ou seja, $\phi_\xi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$), isto pode ser obtido mediante a solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.9a) - (4.9c)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

- **Maximização da região admissível para as condições iniciais.** Considera-se aqui o caso livre de perturbação, ou seja, $w(t) = 0$. O objetivo da síntese é a determinação de um compensador que aumente tanto quanto possível a bola das condições iniciais admissíveis

$$\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^\nu \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}/(\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$$

Neste contexto, como feito no Capítulo 3, o Teorema 4.1 é utilizado em uma versão levemente modificada: na condição (4.9a), as duas últimas linhas e colunas são removidas. Ainda, a relação (4.9c) é removida.

Assim, a maximização da bola de condições iniciais admissíveis pode ser obtida pela minimização da soma $\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R)$. Em particular, há interesse na maximização da bola de condições iniciais admissíveis ao longo da direção dos estados da planta (x). Por definição, o bloco correspondente de dimensões $n + n_c$ da matriz P é $X^{-1}c$. Todavia os estados da planta pertencem ao espaço $\mathfrak{R}^{n \times n}$. Assim, pode-se usar a condição

$$\begin{bmatrix} \lambda I & \star \\ N_a & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.21)$$

onde $N_a = [I_n \ 0_{n \times n_c}]^T$, para verificar que o primeiro bloco de dimensão $n \times n$ de P é menor que λI_n . Já a matriz R não é uma variável de decisão explícita nas LMIs, mas pode-se acessá-las indiretamente através da matriz H_1 . De acordo com (4.14), $H_1 = X R_1 X$, onde $R_1 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ deriva de $R = \begin{bmatrix} R_1 & \star \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix}$.

Então, o seguinte problema de otimização maximiza a bola de condições iniciais admissíveis ao longo das direções dos estados da planta (x)

$$\begin{aligned} \min \quad & \eta_1 \lambda + \eta_2 \text{traço}(N_a^T H_1 N_a) \\ \text{sujeito a} \quad & (4.9a), (4.9b), (4.9c), (4.21) \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde η_1, η_2 são parâmetros de ponderação.

4.6 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentamos exemplos numéricos ilustrativos para os resultados do Teorema 3.1 e do Corolário 4.1.

Exemplo 4.1. *[exemplo de estabilização local] Considere-se novamente o Exemplo 3.1. Aplica-se, então, os resultados de estabilidade local propostos no Teorema 3.1, sintetizando-se tanto um compensador não racional, como um racional, com injeção de sinal antiwindup apenas nos estados do controlador. O caso racional corresponde a forçar as matrizes $A_{a,d}, C_{a,d}, E_a, E_{a,d}, F_a$ a serem nulas. Estes resultados são comparados com os obtidos com o compensador antiwindup estático, a partir de adaptações na técnica proposta em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) para que esta metodologia suporte perturbações com norma \mathcal{L}_2 finita. Considerando-se o problema de otimização (4.19) na Tabela 4.1 compara-se o valor ótimo obtido nos 3 casos supracitados. Note-se que o valor obtido com o compensador não racional é menor, o que significa que a norma \mathcal{L}_2 máxima da perturbação tolerável é maior com este compensador.*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_y &= C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ao qual foi conectado um controlador PI descrito pelas seguintes matrizes:

$$A_c = 0, B_c = -1, C_c = 0.15, D_c = -3$$

A norma do controle é dada por $u_o = 1$. Uma vez que o sistema em malha aberta é instável, aplicamos os resultados de estabilidade local propostos no Teorema 4.1. Nós consideramos tanto o caso não-racional como o racional. O caso racional corresponde a forçar as matrizes A_{ad} , C_{ad} , E_a , E_{ad} , F_a a serem nulas. Estes resultados são comparados com os obtidos com o compensador antiwindup estático, obtível a partir de adaptações na técnica proposta em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006).

Considerando o problema de otimização (4.19) na Tabela 4.1 comparamos o valor ótimo obtido nos 3 casos supracitados. Note que o valor obtido com o compensador não-racional é menor, o que significa que a norma \mathcal{L}_2 máxima da perturbação tolerável é maior com este compensador.

Tabela 4.1: Resultados do Problema (4.19)

$\min \mu$	valor ótimo
AW não-racional	0.086
AW racional	0.138
AW estático	0.156

A seguir são descritos os passos para a resolução do Problema de Otimização (4.19). Note-se que o mesmo procedimento é válido e diretamente aplicável a qualquer outro problema de otimização linear sobre as LMIs do Teorema 3.1 ou do Corolário 4.1.

- Após encontrar-se uma solução numérica² para o problema (4.19), obtém-se as seguintes matrizes associadas à solução ótima

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} 8.7896 & -4.9503 & -0.1206 \\ -4.9503 & 5.2660 & 2.9937 \\ -0.1206 & 2.9937 & 29.8737 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 3.0903 & -0.8725 & 1.5770 \\ -0.8725 & 2.3123 & 1.7770 \\ 1.5770 & 1.7770 & 19.7811 \end{bmatrix} \\
 \hat{A} &= \begin{bmatrix} 12.2331 & -2.7726 & 0.2096 \\ -5.5096 & 4.4958 & 2.0544 \\ -3.1926 & 0.7502 & 16.1010 \end{bmatrix}, \hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0.3320 & -0.3818 & -0.2466 \\ -0.6403 & 0.7934 & 0.4022 \\ -0.0843 & 0.1296 & 0.0408 \end{bmatrix} \\
 \hat{B} &= \begin{bmatrix} -6.2458 \\ -3.3182 \\ 1.5245 \end{bmatrix}, \hat{C} = [-4.1969 \quad 5.1889 \quad -12.9097] \\
 \hat{C}_d &= [0.0826 \quad -0.1320 \quad -0.0470], \hat{D} = 1.0566 \\
 \hat{E} &= [-15.9930 \quad 5.4081 \quad -0.6272], \hat{E}_d = [0.8089 \quad -1.0476 \quad -0.4737] \\
 \hat{F} &= 5.4048, S = 5.4048
 \end{aligned}$$

- Em seguida determina-se as matrizes N , M , de acordo com a relação

$$NM^T = I - YX^{-1} \quad (4.23)$$

²Utilizou-se a função *mincx* do LMI Toolbox do Matlab, versão 7.0.4.352 (R14) Service Pack 2, com o seguinte vetor de opções [0.1 100 400 40 0].

através de decomposição QR. Conforme supra comentado, embora qualquer escolha satisfazendo (4.23) seja válida, a decomposição QR resultou em matrizes melhor condicionadas. Assim, obtém-se as seguintes matrizes

$$N = \begin{bmatrix} -0.7341 & 0.5222 & 0.4340 \\ 0.3400 & -0.2706 & 0.9006 \\ 0.5877 & 0.8088 & 0.0211 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2.1830 & -1.0627 & -0.3951 \\ 0 & 0.8478 & -0.4899 \\ 0 & 0 & -0.0101 \end{bmatrix}$$

- Por fim, reconstrói-se os parâmetros do compensador antiwindup

$$A_a = \begin{bmatrix} -1.4907 & 0.5345 & 0.9714 \\ -0.1644 & -0.0111 & 2.6835 \\ 4.7989 & -82.5926 & -135.9754 \end{bmatrix}, A_{a,d} = \begin{bmatrix} -0.0128 & -0.0066 & 0.0006 \\ 0.5415 & -0.0533 & 0.1488 \\ -22.5598 & 2.5309 & -6.4054 \end{bmatrix}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} -0.2725 \\ -1.0224 \\ 49.1018 \end{bmatrix}, C_a = [0.1874 \quad -14.4583 \quad 1.4573]$$

$$C_{a,d} = [-0.1500 \quad 0.0215 \quad -0.0592], D_a = 0.1955$$

$$E_a = [14.2927 \quad -7.4661 \quad -5.0392], E_{a,d} = [-1.3464 \quad 0.1319 \quad -0.3818], F_a = 1$$

Note-se que os autovalores de A_a são -1.4369 , -1.6807 e -134.3596 enquanto os autovalores de $(A_a + A_{a,d})$ são -1.6398 , -1.6623 e -140.6466 , e os autovalores de $(A_a - A_{a,d})$ são -1.2295 , -1.6863 e -128.0899 . Assim, o compensador não racional obtido é assintoticamente estável, de forma independente do atraso, conforme discutido na Seção 4.4.3.

Para a síntese de um compensador antiwindup racional, com injeção de sinal apenas nos estados do controlador, ressalta-se a necessidade de forçar $A_{a,d} = 0$, $C_{a,d} = 0$, $E_a = 0$, $E_{a,d} = 0$, $F_a = 0$. Isto foi feito suprimindo-se da LMI (4.9a) as respectivas variáveis A_d , C_d , E , E_d , F . A solução numérica das LMIs do Teorema ?? resultou nas seguintes matrizes

$$Y = \begin{bmatrix} 4.0167 & -1.4871 & -4.1519 \\ -1.4871 & 2.8588 & 4.9756 \\ -4.1519 & 4.9756 & 61.8604 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 3.1173 & -0.8446 & 1.7911 \\ -0.8446 & 2.2694 & 1.3789 \\ 1.7911 & 1.3789 & 16.6428 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.2473 & 0.1476 & -3.6008 \\ -0.7228 & 0.4889 & 4.9693 \\ 2.2265 & -3.8862 & 15.8170 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.7246 \\ -1.7264 \\ -0.0435 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [-3.3191 \quad 4.7903 \quad -8.7785], \hat{D} = 3.2282, S = 2.5492$$

A seguir, determina-se N , M através da decomposição QR

$$N = \begin{bmatrix} -0.1335 & 0.0813 & 0.9877 \\ 0.4754 & -0.8692 & 0.1358 \\ 0.8696 & 0.4877 & 0.0774 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 4.4643 & 2.1053 & -3.4037 \\ 0 & 0.1600 & -0.0245 \\ 0 & 0 & -0.0050 \end{bmatrix}$$

Por fim, obtém-se os parâmetros do compensador

$$A_a = \begin{bmatrix} -0.3125 & -0.1364 & -0.0162 \\ 11.1144 & -1.8127 & -0.3155 \\ -33.3456 & -0.0211 & -5.5247 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} -0.0023 \\ -1.9587 \\ 5.8332 \end{bmatrix}$$

$$C_a = [-7.8383 \quad -6.9337 \quad -1.2294], D_a = 1.2664$$

Note-se que os autovalores de A_a são $-0.9828 \pm j1.0667$ e -5.6843 , o que mostra que o compensador obtido é estável em malha aberta.

Na tabela 4.2, é mostrado que o valor de γ obtido a partir da solução do problema (4.20) para os mesmos 3 casos, considerando diferentes valores de μ . Note que menores valores de μ implicam em maiores valores para a norma \mathcal{L}_2 da perturbação máxima admissível e, conseqüentemente, maior é o limitante superior do ganho \mathcal{L}_2 da perturbação $w(t)$ para a saída regulada $z(t)$. N/A significa que a solução numérica foi infactível.

Tabela 4.2: Resultados do Problema (4.20)

$\min \gamma$	$\mu = 0.10$	$\mu = 0.14$	$\mu = 0.18$
AW não-racional	36.2	26.3	25.4
AW racional	N/A	46.8	29.4
AW estático	N/A	N/A	51.4

Finalmente, a Tabela 4.3 exibe os resultados obtidos com a solução do problema (4.22). Novamente os mesmos casos são comparados. Considerando-se diferentes valores de ponderação η_1 e η_2 obtém-se uma aproximação para o tamanho da projeção da bola de condições iniciais admissíveis $\mathcal{B}(\mu^{-1})$ sobre os estados da planta. Note-se que quanto maior o valor, maior o tamanho da projeção da bola de condições iniciais admissíveis sobre os estados da planta. Pode-se notar que quanto mais enfatiza-se a restrição nos autovalores de X^{-1} , melhores são os resultados.

Tabela 4.3: Resultados do Problema (4.22)

(η_1, η_2)	(0.1, 0.9)	(0.5, 0.5)	(0.9, 0.1)
AW não-racional	0.2139	0.6077	1.8437
AW racional	0.1596	0.4726	1.4717
AW estático	0.0371	0.2566	1.4063

Exemplo 4.2 (exemplo de estabilização global). Considere-se novamente o Exemplo 3.2. Como o sistema em malha aberta é estável, pode-se aplicar os resultados de estabilidade global apresentados no Corolário 4.1. Resolve-se aqui o problema de otimização (4.20).

Após resolver-se numericamente as condições do Corolário 4.1, tem-se as seguintes matrizes

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} 2.4188 & 1.9920 \\ 1.9920 & 22.8933 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2.0301 & 1.8801 \\ 1.8801 & 4.7964 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 13.4993 & -3.6131 \\ 1.1007 & 23.2962 \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_d &= \begin{bmatrix} -0.0618 & -0.0444 \\ -0.0027 & 0.0006 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -13.4218 \\ -1.0981 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} -1.0501 & -22.5162 \end{bmatrix} \\
 \hat{C}_d &= \begin{bmatrix} 0.0119 & 0.0054 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = 1.9866, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} -9.5914 & -13.8790 \end{bmatrix} \\
 \hat{E}_d &= \begin{bmatrix} -0.1001 & -0.0595 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = 6.2699, \quad S = 6.2699
 \end{aligned}$$

A seguir, determina-se N , M , de acordo com a relação

$$NM^T = I - YX^{-1}$$

através da decomposição QR

$$N = \begin{bmatrix} -0.0493 & 0.9988 \\ 0.9988 & 0.0493 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 5.4062 & -5.8865 \\ 0 & -0.2095 \end{bmatrix}$$

Por fim, reconstrói-se os parâmetros do compensador

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} -1.9132 & 1.7771 \\ 11.3039 & -34.1996 \end{bmatrix}, A_{a,d} = \begin{bmatrix} -0.0059 & -0.0090 \\ 0.1062 & 0.1645 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} -0.2964 \\ 5.5050 \end{bmatrix} \\ C_a &= \begin{bmatrix} -22.4369 & -2.1599 \end{bmatrix}, C_{a,d} = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0122 \end{bmatrix}, D_a = 0.3168 \\ E_a &= \begin{bmatrix} -13.3888 & -10.2645 \end{bmatrix}, E_{a,d} = \begin{bmatrix} -0.0545 & -0.1029 \end{bmatrix}, F_a = 1 \end{aligned}$$

Os autovalores de A_a são -1.3026 e -34.8102 , os autovalores de $(A_a + A_{a,d})$ são -1.3028 e -34.6514 , e os autovalores de $(A_a - A_{a,d})$ são -1.3023 e -34.9690 . Logo, o compensador antiwindup obtido é assintoticamente estável, de forma independente do atraso.

Forçando-se $A_{a,d} = 0$, $C_{a,d} = 0$, $E_a = 0$, $E_{a,d} = 0$, $F_a = 0$, mediante a supressão de \hat{A}_d , \hat{C}_d , \hat{E} , \hat{E}_d , F nas LMIs do Corolário 4.1, obtém-se um compensador antiwindup racional, com injeção de sinal apenas nos estados do controlador. A solução numérica das LMIs do Teorema 4.1 resulta nas seguintes matrizes

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} 2.7507 & 1.6960 \\ 1.6960 & 14.7476 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 2.2844 & 1.8950 \\ 1.8950 & 5.0750 \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} 6.2041 & -9.2209 \\ 5.7159 & 22.2893 \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} -6.1899 \\ -5.7172 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} -5.8960 & -21.6056 \end{bmatrix}, \hat{D} = 6.9760, S = 3.8139 \end{aligned}$$

A seguir, determina-se as matrizes N , M via decomposição QR

$$N = \begin{bmatrix} -0.1405 & 0.9901 \\ 0.9901 & 0.1405 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2.4411 & -2.8041 \\ 0 & -0.2289 \end{bmatrix}$$

Finalmente, obtém-se os parâmetros do compensador

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} -4.6613 & 0.4066 \\ 20.2353 & -10.9294 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} -0.2762 \\ 3.5745 \end{bmatrix}, C_a = \begin{bmatrix} -20.5632 & -8.8723 \end{bmatrix} \\ D_a &= 1.8291 \end{aligned}$$

Note-se que os autovalores de A_a são -3.5468 e -12.0439 , o que mostra que o compensador obtido é assintoticamente estável em malha aberta.

Para fins de simulação considera-se a seguinte perturbação \mathcal{L}_2

$$w(t) = \begin{cases} \bar{w}; & 0 \leq t < 1 \\ 0; & t \geq 1 \end{cases}$$

com $\bar{w} = 100$ e $\tau = 5$.

Na Figura 4.1, é representado a resposta do sistema em malha fechada considerando-se

- um compensador antiwindup não racional obtido pelo Corolário 4.1;
- um compensador antiwindup estático, obtido de acordo com uma adaptação da metodologia proposta em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) de forma a poder tratar com sistemas sujeitos à perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 ;
- nenhuma injeção antiwindup ao sistema saturante.

Conforme esperado, a resposta da saída regulada do sistema em malha fechada contendo o compensador antiwindup dinâmico racional é mais atenuada e apresenta menor tempo de acomodação.

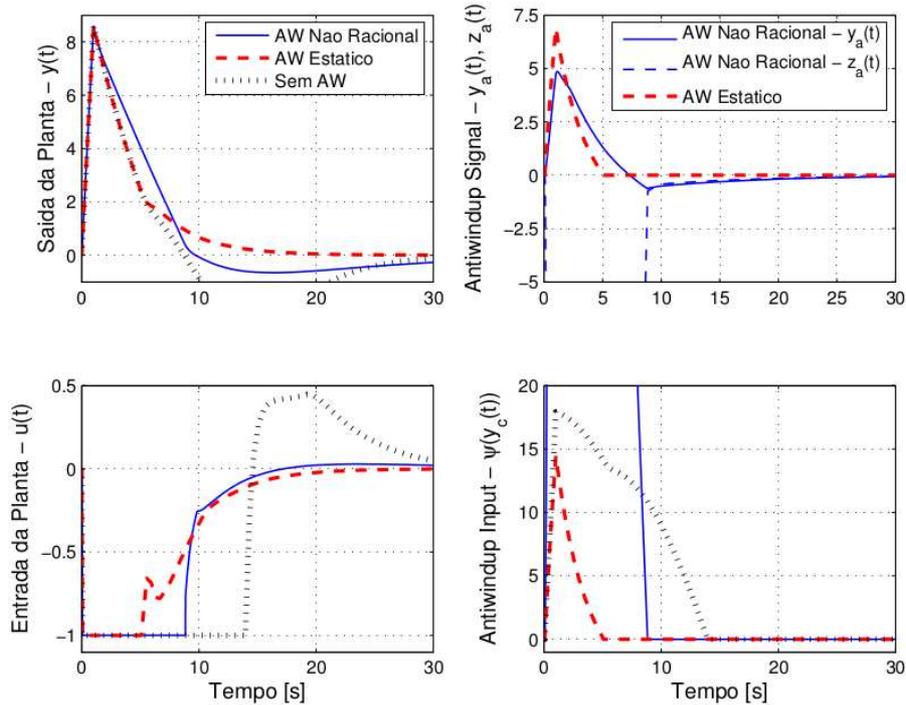


Figura 4.1: Comparação entre diferentes metodologias com o escopo de estabilidade global

4.7 Comentários finais do Capítulo

Neste capítulo apresentou-se uma metodologia para a síntese de compensadores antiwindup dinâmicos para sistemas com atraso nos estados e saturação na entrada de controle. As condições que asseguram a existência de uma solução foram obtidas na forma de LMI. O *framework* proposto é mais geral que os resultados anteriormente obtidos neste tema, os quais podem ser considerados casos especiais do presente trabalho, pois os resultados aqui apresentados permitem a síntese de compensadores racionais, não racionais, e a garantia da estabilidade do compensador. Por exemplo, os resultados obtidos em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009) são um caso especial do presente trabalho. Adicionalmente, restrições na dinâmica do compensador antiwindup podem ser incluídas com pequenas modificações nas LMIs. Por último, exemplos numéricos ilustraram a proposição deste capítulo e compararam-na com resultados anteriormente obtidos.

Uma diferença entre os métodos de síntese utilizados neste capítulo (mudança de variáveis), e no anterior (lema de projeção) é o vínculo entre garantia de existência de solução, minimização de algum critério linear, e determinação numérica do compensador antiwindup correspondente. No método utilizado neste capítulo, os parâmetros do compensador antiwindup que minimizam um critério de otimização são determinados em um único problema; problema este que concomitantemente garante a existência de uma solução.

Já no método de síntese baseado no lema de projeção, aplicado no capítulo anterior, a garantia de existência de uma solução não determina o compensador antiwindup. Todavia, a garantia de existência de uma solução pode ser vinculada a um problema de otimização. Como consequência, a determinação numérica do compensador antiwindup correspondente, pode vir associada ao mesmo, outro ou nenhum critério de minimização.

O compensador antiwindup obtido é de ordem plena, i.e. $n_a = n + n_c$. De fato a opção por uma metodologia de síntese de ordem plena leva a um método mais simples para a obtenção de condições LMI, uma vez que neste caso, as assim chamadas condições de posto são diretamente satisfeitas, (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997).

Entretanto, um compensador de ordem reduzida pode ser obtido, a partir do *framework* proposto. Basicamente, neste caso, a matriz $\begin{bmatrix} I & XM^T \\ I & 0 \end{bmatrix}$ deveria ser redefinida como $\begin{bmatrix} \Theta & XM^T \\ \Theta & 0 \end{bmatrix}$, onde $\Theta = \begin{bmatrix} I_{n_r} & \\ & 0_{(n+m-n_r) \times n_r} \end{bmatrix}$, sendo n_r a ordem reduzida do compensador antiwindup. Além disto, uma condição de posto deve ser considerada. O procedimento segue as mesmas linhas do proposto em (WU; LIN; ZHENG, 2005).

A metodologia de síntese apresentada neste capítulo permite em um único *framework* a síntese tanto de compensadores racionais, como não racionais. Em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) considera-se apenas a síntese de compensadores não racionais, sendo que compensadores racionais não são obtíveis, Já nos resultados apresentados no capítulo anterior, apenas a síntese de compensadores racionais é considerada, sendo que compensadores não racionais não são obtíveis por aquela metodologia.

Outra contribuição dos resultados deste capítulo estão na garantia da estabilidade assintótica do compensador antiwindup sintetizado, seja ele racional ou não racional. Os resultados deste capítulo encontram-se publicados em (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2010b).

5 ANTIWINDUP PARA SISTEMAS COM ATRASO NA ENTRADA

Nos Capítulos 3 e 4 tratou-se o problema de síntese de compensadores antiwindup dinâmicos racionais e não racionais para sistemas com atraso no estado. Tais sistemas não apresentam atraso na entrada; ou seja, o sinal de controle $u(t)$ exerce seu efeito imediato sobre a derivada do estado $\dot{x}(t)$, conforme as plantas consideradas no Capítulo 3 (3.1), e no Capítulo 4 (4.1). Porém, alguns sistemas podem ser modelados com um atraso de tempo entre a geração do sinal de controle $u(t)$ e seu efeito sobre o sistema, que neste caso deixa de ser imediato. Neste caso, a ação de controle que age sobre a derivada do estado $\dot{x}(t)$ é $u(t - \tau)$. Neste capítulo será abordado o problema de síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso na entrada com uma metodologia independente do atraso. Ou seja, as condições obtidas para a existência de um compensador antiwindup são válidas para qualquer $\tau > 0 \in \mathfrak{R}$. Por conseguinte, esta metodologia é aplicável apenas a sistemas assintoticamente estáveis em malha aberta.

5.1 Introdução

A presença de atraso na entrada de controle pode ser interpretado como um comando de efeito retardado. Exemplo disto é o descarte de pacotes TCP em uma fila de um roteador. O protocolo TCP responde ao descarte seletivo de pacotes com uma redução na taxa de emissão de pacotes, (FLOYD; JACOBSON, 1993), (PADHYE et al., 1998). O ajuste da taxa de emissão dá-se no terminal da rede a partir do qual é enviado o fluxo de dados (TANENBAUM, 2002). Assim, o efeito do descarte seletivo de pacotes na própria fila dá-se com atraso, uma vez que os novos pacotes emitidos a uma taxa menor sofrem um atraso em seu transporte pela rede até atingirem a fila do roteador intermediário. Se, neste exemplo, considerar-se um controlador implementado juntamente ao roteador para regular o tamanho da fila em torno de um valor pré-determinado, é possível considerar-se a variável de estados da planta (fila de pacotes) imediatamente disponível para realimentação. Enquanto a ação de controle sobre os estados da planta (descarte seletivo de pacotes na fila) está sujeita ao atraso. É interessante verificar que este exemplo difere do controle através da rede (*networked control*, (GARONE; SINOPOLI; CASAVOLA, 2007), (SALA; VALLES; DIEZ, 2006), por exemplo), em que o controlador está espacialmente distante da planta. Nesta situação, tanto a entrada de controle quanto a saída estão sujeitas a atraso devido a restrições na rede de comunicações.

Neste capítulo está-se interessado na síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso na entrada. A literatura científica tem mantido interesse nesta problemática. Em (PARK; CHOI; CHOO, 2000), propõe-se um compensador antiwindup

para sistemas cuja planta em malha aberta seja caracterizada por uma matriz Hurwitz. A arquitetura proposta generaliza técnicas de controle por modelo interno, replicando no compensador antiwindup o modelo da planta. Neste trabalho o objetivo de síntese é recuperar no sistema saturado o desempenho do sistema nominal (livre de saturação). Para tanto busca-se minimizar uma função custo consistindo na diferença entre os estados do controlador do sistema nominal, e os estados do controlador do sistema saturante (sujeito à saturação na entrada da planta) compensado pelo antiwindup proposto. Os autores mostram que o compensador proposto é ótimo em relação a este critério. Em (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005), estes resultados são estendidos, relaxando-se as condições de existência de uma solução, e agregando graus de liberdade para melhora do desempenho. Além disto, os resultados são estendidos para o caso em que a planta não é exponencialmente instável, podendo apresentar atrasos na entrada e na saída. O compensador proposto atua nos estados do controlador e na saída do controlador. É importante ressaltar que estes resultados não são expressos por condições LMI. Uma das vantagens no uso de condições LMI é a flexibilidade na inserção de problemas de otimização, e sobretudo no tratamento de incertezas do modelo. Além disto, devido à convexidade da representação das condições, um ótimo global é sempre obtível para algum critério linear de otimização. Em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005) um compensador antiwindup estático é proposto, a partir de uma condição de setor generalizada, para sistemas sem atraso. No mesmo trabalho o resultado principal é estendido para sistemas apresentando atraso na entrada. A metodologia de síntese, neste caso, é dependente do atraso. A metodologia de síntese é baseada no uso da condição de setor generalizada (proposta neste trabalho). O funcional de Liapunov-Krasovskii utilizado apresenta um termo dependente de uma não-linearidade tipo zona-morta. Esta termo adicional deve ser utilizado quando o sistema apresenta atraso na entrada e é utilizada a condição de setor generalizada proposta pelos autores naquele trabalho. Para que a metodologia possa considerar também plantas exponencialmente instáveis, obtém-se a convexidade da representação em LMI mediante o uso de uma desigualdade triangular. Ressalta-se que os trabalhos mencionados não consideram a ocorrência de perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 na planta.

Em comparação, apresenta-se neste capítulo em um primeiro momento uma metodologia para a síntese de compensadores antiwindup estáticos para sistemas com atraso na entrada e restrição em amplitude no controle (saturação na entrada da planta). Em seguida são obtidos resultados para um compensador dinâmico racional, e dinâmico não racional, ambos de ordem plena (a ordem do compensador equivale à ordem do modelo da planta mais a ordem do modelo do controlador). A metodologia de síntese empregada é independente do atraso, ou seja, as condições que garantem a síntese de um compensador antiwindup não explicitam o valor do atraso. Segue que uma vez satisfeitas, estas condições são válidas para qualquer atraso. No entanto, ressalta-se que o conjunto de estados iniciais admissíveis, conforme tratado nos dois capítulos anteriores, depende do valor do atraso.

Note-se que em (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005) os atrasos de entrada e saída da planta devem ser conhecidos para que sejam implementados no compensador antiwindup proposto. Embora as condições de existência do compensador sejam independentes do atraso, a implementação do mesmo não o é. Já no presente trabalho, propõe-se uma injeção de um sinal antiwindup independente do atraso tanto nas garantias de existência, como na respectiva implementação (válido para os resultados de síntese de compensadores antiwindup estático e dinâmico racional). Além disto, assume-se que o sistema está sujeito a perturbações com norma- \mathcal{L}_2 finita. Explora-se esta suposição propondo-se

resultados que garantam a estabilidade global do sistema, ou seja, as trajetórias seguem sendo limitadas para qualquer perturbação com norma \mathcal{L}_2 finita. Finalmente, propõe-se um problema de otimização que, para uma perturbação admissível, minimiza o ganho \mathcal{L}_2 da perturbação para a saída regulada do sistema. Isto corresponde ao problema de atenuação da perturbação.

5.2 Formulação do Problema

Considere-se o seguinte sistema linear com atraso na entrada de controle

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entrada, perturbação, saída medida e saída regulada deste sistema. Matrizes A , B , B_w e C_y , C_z , D_z são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Assume-se que os pares (A, B) e (C_y, A) sejam respectivamente estabilizáveis e detectáveis. O escalar real positivo τ representa o atraso nos estados do sistema, que é supostamente constante e conhecido. Assume-se que o vetor perturbação $w(t)$ é limitado em energia, i.e., $w(t) \in \mathcal{L}_2$, e para algum escalar δ , $0 \leq \frac{1}{\delta} < \infty$, a perturbação $w(t)$ é limitada como em (3.2)

$$\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \frac{1}{\delta}$$

A condição inicial do sistema (5.1) é descrita conforme segue

$$x(t_0 + \theta) = \phi_x(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], (t_0, \phi_x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_\tau^v$$

Para controlar o sistema (5.1) existe um controlador dinâmico de saída dado *a priori*, representado como segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t)\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de estado, entrada e saída do controlador. Matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são reais, constantes e de dimensões apropriadas.

Comentário 5.1. *Observe que o controlador (5.2) é racional. A consideração de um controlador não-racional é possível e aplicável com sutis modificações nas matrizes e condições obtidas. Em particular, a consideração de um preditor de Smith no laço de controle pode ser representada pela adição de um termo $A_{c,d}x_c(t - \tau)$ à expressão de $\dot{x}_c(t)$ em (5.2). Neste caso, considera-se o controlador (5.2) como o modelo de ordem aumentada de um controlador nominal com um preditor de Smith. Já a consideração de uma contraparte $C_{c,d}x_c(t - \tau)$ implica na existência de um termo $\mathbb{A}_{d,2}\xi(t - 2\tau)$ na representação do sistema em malha fechada - a exemplo da representação do sistema em malha fechada (3.8) e (4.8) dos capítulos anteriores - uma vez que os estados do controlador sofrem duplo atraso: primeiramente à saída do próprio controlador, e posteriormente à entrada da planta.*

Assume-se que a entrada da planta é limitada como segue

$$-u_{o(i)} \leq u(i) \leq u_{o(i)}, \quad i = 1, \dots, m$$

Como consequência dos limites na entrada da planta, o sinal de controle efetivamente injetado na planta é

$$u(t - \tau) = \text{sat}(y_c(t - \tau)) \quad (5.3)$$

De fato, o controlador (5.2) foi projetado para o sistema nominal, ou seja, não leva em conta a saturação da entrada da planta. Como forma de contornar esta desconsideração, sintetiza-se um compensador antiwindup, que inserido na malha de controle minimiza o efeito da saturação na estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada.

Este compensador gera um sinal $y_a(t)$ que é injetado na malha de controle, alterando a dinâmica do controlador linear sintetizado *a priori* (5.2), (GRIMM et al., 2003), (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005)

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) + y_a(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

A Figura 5.1 ilustra a topologia do sistema em malha fechada.

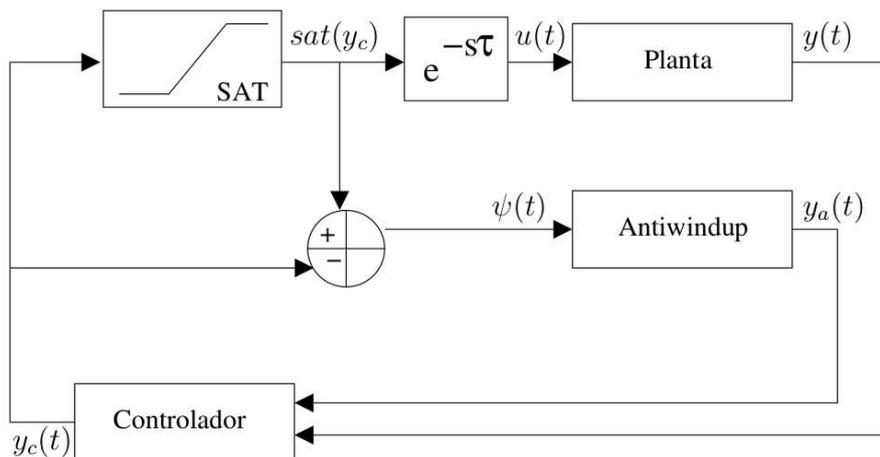


Figura 5.1: Topologia do Sistema em Malha Fechada

O sinal $y_a(t)$ injetado nos estados do controlador corresponde a saída de um compensador antiwindup. Os resultados deste capítulo consideram as seguintes possíveis estruturas para estes compensadores

1. estático, $y_a(t) = D_a \psi(y_c(t))$
2. dinâmico racional, $\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) + D_a \psi(y_c(t)) \end{cases}$
3. dinâmico não racional, $\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau) + D_a \psi(y_c(t)) \end{cases}$

Para tanto, é preciso determinar numericamente as matrizes D_a (caso estático); A_a , B_a , C_a e D_a (caso dinâmico racional); e A_a , $A_{a,d}$, B_a , C_a , $C_{a,d}$, D_a (caso dinâmico não racional), considerando-se sempre os Problemas 3.1 e 3.2.

A obtenção de uma metodologia para síntese destes compensadores (ou a determinação das matrizes supracitadas) serão apresentados a seguir, iniciando-se pela síntese de um compensador antiwindup estático, seguindo-se a síntese de um compensador dinâmico racional, e finalmente a síntese de um compensador antiwindup dinâmico não racional. A abordagem utilizada é sempre independente do atraso. Ou seja, uma vez que existe uma solução, ela é válida qualquer que seja o valor do atraso τ na entrada de controle. Conforme mencionado, isto implica que a planta seja estável em malha aberta.

5.3 Antiwindup estático

Considere o sistema nominal (5.1)-(5.2), onde $u(t-\tau)$ é dado por (5.3). Para suprimir tanto quanto possível os efeitos da saturação sobre a estabilidade do sistema em malha fechada, adiciona-se à dinâmica do controlador o sinal

$$y_a(t) = D_a \psi(y_c(t)) \quad (5.5)$$

onde $y_a(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$ é o sinal de injeção de um sinal antiwindup. Assim sendo, o modelo do controlador torna-se (5.4).

Para representar o sistema (5.1)-(5.4)-(5.5) em malha fechada, define-se o vetor $\xi(t)$ como

$$\xi(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$$

Através das seguintes matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} B D_c C & B C_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \check{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_y = [C_y \quad 0], \mathbf{C}_z = [C_z + D_z D_c C_y \quad D_z D_c] \\ \mathbf{D}_z &= D_z, \mathbf{K} = [D_c C \quad C_c] \end{aligned} \quad (5.6)$$

o sistema (5.1)-(5.4)-(5.5) em malha fechada pode ser representado conforme segue

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}\xi(t) + \mathbf{A}_d \xi(t-\tau) + \check{\mathbf{I}} D_a \psi(y_c(t)) + \mathbf{B} \psi(y_c(t-\tau)) + \mathbf{B}_w w(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_y \xi(t) \\ z(t) &= \mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

com a seguinte condição inicial

$$\begin{aligned} \phi_\xi(\theta) &= \begin{bmatrix} x(\theta)^T & x_c(\theta)^T \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \phi_x(\theta)^T & \phi_{x_c}(\theta)^T \end{bmatrix}^T, \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

O teorema a seguir apresenta um método para a determinação numérica do compensador (5.5), ou seja a determinação de D_a , que é solução dos Problemas 3.1 e 3.2 para o sistema em malha fechada (5.7).

Teorema 5.1 (antiwindup estático, escopo de estabilidade local). *Se existem matrizes simétricas positivas definidas Q , $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n+n_c \times n+n_c}$, matrizes diagonais positivas definidas S , $S_\tau \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, e matrizes $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$, e Y , $Y_\tau \in \mathfrak{R}^{m \times n+n_c}$, e escalares α , μ , γ tais que*

as LMIs seguintes (5.8a), (5.8a), (5.8b), (5.8c), são verificadas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}Q + Q\mathbf{A}^T + \Gamma & \mathbf{A}_d Q & Y^T + \check{\mathbf{I}}Z & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & Q\mathbf{C}_z^T \\ Q\mathbf{A}_d^T & -\Gamma & 0 & Y_\tau^T & 0 & 0 \\ Y + Z^T\check{\mathbf{I}}^T & 0 & -2S & 0 & 0 & S\mathbf{D}_z^T \\ S_\tau\mathbf{B}^T & Y_\tau & 0 & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_z Q & 0 & \mathbf{D}_z S & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}Q + Y_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.8b)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}Q + Y_{\tau(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.8c)$$

$$\mu - \alpha\delta < 0 \quad (5.8d)$$

então existe $D_a = ZS^{-1}$, tal que $y_a(t) = D_a\psi(y_c(t))$ é um compensador antiwindup estático conforme definido em (5.5), que assegura que

1. as trajetórias do sistema (5.7) são limitadas para todas as condições iniciais contidas na bola

$$\mathcal{B}(\beta) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi\|_c^2 \leq \beta / (\bar{\lambda}(Q^{-1}) + \tau\bar{\lambda}(Q^{-1}\Gamma Q^{-1}))\}$$

com qualquer β tal que

$$0 \leq \beta \leq \mu^{-1} - \frac{1}{\delta\alpha};$$

2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma V(0) + \gamma\frac{1}{\alpha}\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$;
3. quando $w(t) = 0$, a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável, e

$$\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1} / (\bar{\lambda}(Q^{-1}) + \tau\bar{\lambda}(Q^{-1}\Gamma Q^{-1}))\}$$

esta contida na região de atração da origem.

Prova.: A partir do mesmo funcional de Liapunov-Krasovskii utilizado nos capítulos anteriores, e da seguinte função auxiliar $\mathcal{J}(t)$

$$V(t) = \xi(t)^T P \xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi(\theta)^T R \xi(\theta) d\theta, \quad \mathcal{J}(t) \triangleq \dot{V}(t) - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t)$$

tem-se que $V(t)$ satisfaz (3.10), a saber

$$\underline{\lambda}(P)\|\xi(t)\|_2^2 \leq V(t) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\|\xi_t\|_c^2, \quad P = P^T > 0, \quad R = R^T > 0$$

Logo, se a condição inicial $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$, segue que $V(0) \leq \beta$.

Observe-se que a função auxiliar $\mathcal{J}(t)$ difere da utilizada nos Capítulos 3 e 4. No caso especial em que $\alpha = 1$, as funções auxiliares coincidem. Assim, α é de fato um grau de liberdade adicional na síntese de um compensador antiwindup.

Se $\mathcal{J}(t) < 0$, tem-se que

$$\int_0^T \mathcal{J}(t) dt = V(T) - V(0) - \frac{1}{\alpha} \int_0^T w(t)^T w(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_0^T z(t)^T z(t) dt < 0, \quad \forall T > 0$$

Então, segue que

- $\xi(T)^T P \xi(T) \leq V(T) < V(0) + \frac{1}{\alpha} \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \beta + \frac{1}{\alpha \delta} \leq \mu^{-1}, \forall T > 0$, ou seja, as trajetórias do sistema não abandonam o conjunto $\mathcal{E}(P, \mu^{-1})$ para $w(t)$ satisfazendo (3.2);
- para $T \rightarrow +\infty$, $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 < \gamma V(0) + \gamma \frac{1}{\alpha} \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$.

Expandindo-se $\dot{V}(t)$ em $\mathcal{J}(t)$, tem-se

$$\mathcal{J}(t) = \dot{\xi}(t)^T P \xi(t) + \xi(t)^T P \dot{\xi}(t) + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t-\tau)^T R \xi(t-\tau) - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} z(t)^T z(t)$$

Expandindo-se $\dot{\xi}(t)$ em $\mathcal{J}(t)$, de acordo com (5.7) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) = & [\mathbf{A}\xi(t) + \mathbf{A}_d\xi(t-\tau) + \check{\mathbf{I}}D_a\psi(y_c(t)) + \mathbf{B}\psi(y_c(t-\tau)) + \mathbf{B}_w w(t)]^T P \xi(t) \\ & + \xi(t)^T P [\mathbf{A}\xi(t) + \mathbf{A}_d\xi(t-\tau) + \check{\mathbf{I}}D_a\psi(y_c(t)) + \mathbf{B}\psi(y_c(t-\tau)) + \mathbf{B}_w w(t)] \\ & + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t-\tau)^T R \xi(t-\tau) - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) \\ & + \frac{1}{\gamma} (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t)))^T (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t))) \\ \\ \mathcal{J}(t) = & \xi(t)^T \mathbf{A}^T P \xi(t) + \xi(t-\tau)^T \mathbf{A}_d^T P^T \xi(t) + \psi(y_c(t))^T D_a^T \check{\mathbf{I}}^T P \xi(t) \\ & + \psi(y_c(t-\tau))^T \mathbf{B}^T P \xi(t) + w(t)^T \mathbf{B}_w^T P \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbf{A} \xi(t) \\ & + \xi(t)^T P \mathbf{A}_d \xi(t-\tau) + \xi(t)^T P \check{\mathbf{I}} D_a \psi(y_c(t)) + \xi(t)^T P \mathbf{B} \psi(y_c(t-\tau)) \quad (5.9) \\ & + \xi(t)^T P \mathbf{B}_w w(t) + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t-\tau)^T R \xi(t-\tau) - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) \\ & + \frac{1}{\gamma} (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t)))^T (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t))) \end{aligned}$$

Por outro lado, a saída do controlador $y_c(t) = C_c x_c(t) + D_c C x(t)$ pode ser representada como $y_c(t) = \mathbf{K} \xi(t)$. Então, se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t-\tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$, com

$$\mathcal{S}_\tau(u_o) = \{\xi \mid |[\mathbf{K}_{(i)} + G_{\tau(i)}] \xi| \leq u_{o(i)}, i = 1, \dots, m\}$$

pelo Lema 2.1 segue que

$$\begin{aligned} \psi(y_c(t))^T T (\psi(y_c(t)) - G \xi(t)) &\leq 0 \\ \psi(y_c(t-\tau))^T T_\tau (\psi(t-\tau) - G_\tau \xi(t-\tau)) &\leq 0 \end{aligned}$$

Assim, a seguinte desigualdade pode ser estabelecida

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) \leq & \xi(t)^T \mathbf{A}^T P \xi(t) + \xi(t-\tau)^T \mathbf{A}_d^T P^T \xi(t) + \psi(y_c(t))^T D_a^T \check{\mathbf{I}}^T P \xi(t) \\ & + \psi(y_c(t-\tau))^T \mathbf{B}^T P \xi(t) + w(t)^T \mathbf{B}_w^T P \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbf{A} \xi(t) \\ & + \xi(t)^T P \mathbf{A}_d \xi(t-\tau) + \xi(t)^T P \check{\mathbf{I}} D_a \psi(y_c(t)) + \xi(t)^T P \mathbf{B} \psi(y_c(t-\tau)) \\ & + \xi(t)^T P \mathbf{B}_w w(t) + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t-\tau)^T R \xi(t-\tau) - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) \\ & + \frac{1}{\gamma} (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t)))^T (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbf{D}_z \psi(y_c(t))) \\ & - \psi(y_c(t))^T 2T \psi(y_c(t)) + \psi(y_c(t))^T T G \xi(t) + \xi(t)^T G^T T \psi(y_c(t)) \\ & - \psi(y_c(t-\tau))^T 2T_\tau \psi(y_c(t-\tau)) + \psi(y_c(t-\tau))^T T_\tau G_\tau \xi(t-\tau) \\ & + \xi(t-\tau)^T G_\tau^T T_\tau \psi(y_c(t-\tau)) \end{aligned}$$

ou, de forma matricial

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t-\tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ \psi(y_c(t-\tau)) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^T M_1 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t-\tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ \psi(y_c(t-\tau)) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} < 0 \\
 & M_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T P + P\mathbf{A} + R & P\mathbf{A}_d & P\check{\mathbf{I}}D_a + G^T T & P\mathbf{B} & P\mathbf{B}_w & \mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{A}_d^T P & -R & 0 & G_\tau^T T_\tau & 0 & 0 \\ D_a^T \check{\mathbf{I}}^T P + TG & 0 & -2T & 0 & 0 & \mathbf{D}_z^T \\ \mathbf{B}^T P & T_\tau G_\tau & 0 & -2T_\tau & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_w^T P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} I_q & 0 \\ \mathbf{C}_z & 0 & \mathbf{D}_z & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Assim, é suficiente $M_1 < 0$ para que tenha-se $\mathcal{J}(t) < 0$, desde que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t-\tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$, $\forall t \geq 0$.

Note-se agora que se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$, então $(\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\|\phi\|_c^2 \leq \beta$. Segue que $\bar{\lambda}(P)\|\phi_\xi\|_c^2 \leq \beta$, e portanto

$$\sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \xi(\theta)^T P \xi(\theta) \leq \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \bar{\lambda}(P) \xi(\theta)^T \xi(\theta) \leq \beta$$

Logo, se $\mathcal{E}(P, \beta) \subset \mathcal{S}(u_o) \cap \mathcal{S}_\tau(u_o)$ e $M_1 < 0$, tem-se efetivamente que $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \beta)$, $\forall t \geq -\tau$, desde que $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$.

Pré e pós multiplicando-se M_1 em (5.10) por $\text{blockdiag}\{Q, Q, S, S_\tau, \alpha I_q, I_l\}$, e aplicando a seguinte substituição de variáveis

$$Q = P^{-1}, \Gamma = QRQ, S = T^{-1}, S_\tau = T_\tau^{-1}, Y = GQ, Y_\tau = G_\tau Q, Z = D_a S$$

obtem-se a LMI (5.8a) do Teorema 5.1.

Por outro lado, se

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{K}_{(i)} + G_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{K}_{(i)} + G_{\tau(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.11)$$

segue que $\mathcal{E}(P, \mu^{-1}) \subset (\mathcal{S}(u_o) \cap \mathcal{S}_\tau(u_o))$. De forma semelhante ao feito em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH., 2005), pré e pós multiplica-se as LMIs em (5.11) por $\text{blockdiag}\{Q, 1\}$, o que leva diretamente às LMIs (5.8b) e (5.8c), respectivamente.

Assim, a validade de (5.8b) e (5.8c), garante que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, $\xi(t-\tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$. Este fato implica na validade da condição de setor expressas em (2.6b). Desta forma, se as LMIs (5.8a), (5.8b), (5.8c) do Teorema 5.1 são satisfeitas, tem-se efetivamente $\mathcal{J}(t) < 0$, uma vez que $\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \delta^{-1}$ e $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$. Finalmente, a LMI (5.8d) garante que $\exists \beta > 0$; do funcional de Liapunov-Krasovskii, segue que

$$\mu^{-1} \geq \frac{1}{\alpha\delta} + \beta$$

Assim, para que exista $\beta > 0$ precisa-se que

$$\mu^{-1} - \frac{1}{\alpha\delta} > 0$$

ou seja: $\mu^{-1} > \frac{1}{\alpha\delta}$, que equivale a $\mu < \alpha\delta$, ou $\mu - \alpha\delta < 0$. Isto conclui a prova do ítem 1) do Teorema 5.1.

Considere-se agora que $w(t) = 0$. Neste caso $\mathcal{J}(t) < 0$ assegura que $\dot{V}(t) < 0$, dado que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$. Então, se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\mu^{-1})$, segue que (veja (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006))

$$\xi(t)^T P \xi(t) \leq V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}$$

o que significa que, para qualquer condição inicial pertencente à bola $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, tem-se $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \mu^{-1})$, $\forall t \geq t_0$. Uma vez que as LMIs (5.8b), (5.8c) são satisfeitas, tem-se que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$, $\forall t \geq t_0$. Então, para qualquer condição inicial pertencente a $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, efetivamente tem-se que $\dot{V}(t) < 0$, o que conclui a prova do ítem 3. Da transformação $Z = D_a S$ segue que $D_a = Z S^{-1}$. fim da prova.

O seguinte corolário trata em um contexto global o problema da estabilização enforcado no Teorema 5.1. Neste caso, pode ser assegurado que as trajetórias do sistema em malha fechada (5.7) são limitadas para qualquer $w(t) \in \mathcal{L}_2$ independente das condições iniciais.

Corolário 5.1 (antiwindup estático, estabilidade global). *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $Q, \Gamma \in \mathfrak{R}^{n+n_c \times n+n_c}$, matrizes diagonais positivas definidas $S, S_\tau \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, matriz $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$, e escalares α, μ, γ tais que a LMI*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}Q + Q\mathbf{A}^T + \Gamma & \mathbf{A}_d Q & \check{\mathbf{I}}Z - Q\mathbf{K}^T & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & Q\mathbf{C}_z^T \\ Q\mathbf{A}_d^T & -\Gamma & 0 & -Q\mathbf{K}^T & 0 & 0 \\ Z^T \check{\mathbf{I}}^T - \mathbf{K}Q & 0 & -2S & 0 & 0 & S\mathbf{D}_z^T \\ S_\tau \mathbf{B}^T & -\mathbf{K}Q & 0 & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_z Q & 0 & \mathbf{D}_z S & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0 \quad (5.12)$$

seja verificada, então existe um compensador estático como definido em (5.5), $D_a = Z S^{-1}$, tal que

1. quando $w(t) \neq 0$, as trajetórias em malha fechada permanecem limitadas para qualquer $\phi_\xi(\theta) \in \mathcal{C}_\tau^v$ e qualquer condição inicial;
2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma V(0) + \gamma \frac{1}{\alpha} \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$;
3. se $w(t) = 0$, $\forall t \geq t_1 \geq 0$, $\xi(t)$ converge assintoticamente para a origem.

Prova.: Seja $G = -\mathbf{K}$, $G_\tau = -\mathbf{K}$. Segue que a condição de setor (2.6a) é verificada para todo $\xi(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$. Neste caso, tem-se $Y = -\mathbf{K}Q$, $Y_\tau = -\mathbf{K}Q$. Assim, é suficiente verificar $\mathcal{J}(t) < 0$ e $Q > 0$, o que replica a prova do Teorema 5.1 para as condições que garantam $\mathcal{J}(t) < 0$. Já a condição $Q > 0$, implica em, $P > 0$, o que juntamente com $R > 0$ - assegurado uma vez que $\mathcal{J}(t) < 0$ - faz de $V(t)$ um funcional de Liapunov-Krasovskii. fim da prova.

A seção a seguir considera a síntese de um compensador antiwindup dinâmico racional.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}X + X\mathbf{A}^T + H_1 & \mathbf{A}_d X & \mathbf{A}_d(X - Y) & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & X\mathbf{C}_z^T \\ X\mathbf{A}_d^T & -H_1 & -H_2 & U_{\tau_1}^T + U_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ (X - Y)\mathbf{A}_d^T & -H_2^T & -H_3 & U_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ S_\tau\mathbf{B}^T & U_{\tau_1} + U_{\tau_2} & U_{\tau_2} & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_z X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0 \quad (5.17b)$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ 0 & Y - X & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}X + U_{1(i)} + U_{2(i)} & \mathbf{K}_{(i)}(X - Y) + U_{2(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, m \quad (5.17c)$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ 0 & Y - X & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}X + U_{\tau_1(i)} + U_{\tau_2(i)} & \mathbf{K}_{(i)}(X - Y) + U_{\tau_2(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, m \quad (5.17d)$$

$$\mu - \alpha\delta < 0 \quad (5.17e)$$

onde $N_a = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Então existe um compensador (5.13) que assegura que

1. as trajetórias do sistema (5.15) são limitadas para todas as condições iniciais contidas na bola

$$\mathcal{B}(\beta) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi\|_c^2 \leq \beta / (\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$$

onde

$$P = P^T = \begin{bmatrix} X^{-1} & \star \\ M & E \end{bmatrix} > 0, \quad R = R^T = \begin{bmatrix} R_1 & \star \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0$$

com qualquer β tal que

$$0 \leq \beta \leq \mu^{-1} - \frac{1}{\alpha\delta};$$

2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma V(0) + \gamma \frac{1}{\alpha} \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$;
3. quando $w(t) = 0$, a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável, e

$$\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1} / (\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$$

está contida na região de atração da origem.

Prova.: Utiliza-se o mesmo funcional de Liapunov-Krasovskii $V(t)$ e função auxiliar $\mathcal{J}(t)$ do Teorema 5.1. Expandindo-se os termos desta expressão, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) = & \xi(t)^T \mathbf{A}^T P \xi(t) + \xi(t - \tau)^T \mathbf{A}_d^T P \xi(t) + \psi(y_c(t))^T \mathbf{B}^T P \xi(t) + \psi(y_c(t - \tau))^T \mathbf{B}_d^T P \xi(t) \\ & + w(t)^T \mathbf{B}_w^T P \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbf{A} \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbf{A}_d \xi(t - \tau) + \xi(t)^T P \mathbf{B} \psi(y_c(t)) \\ & + \xi(t)^T P \mathbf{B}_d \psi(y_c(t - \tau)) + \xi(t)^T P \mathbf{B}_w w(t) + \xi(t)^T R \xi(t) - \xi(t - \tau)^T R \xi(t - \tau) \\ & - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) + \frac{1}{\gamma} (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbb{D}_z \psi(y_c(t)))^T (\mathbf{C}_z \xi(t) + \mathbb{D}_z \psi(y_c(t))) \end{aligned}$$

Da definição de matrizes em (5.14) tem-se $y_c(t) = \mathbb{K}\xi(t)$. De forma similar ao mostrado na seção anterior, do Lema 2.1 segue que se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, então $\psi(y_c(t))^T T (\psi(y_c(t) - G\xi(t)) \leq 0$. Também, $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$, implica que $\bar{\lambda}(P)\|\phi_\xi\|_c^2 \leq \beta$, ou seja, $\sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \xi(\theta)^T P \xi(\theta) \leq \beta$.

β .

Logo, se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$ então $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \beta), \forall t \in [-\tau, 0)$

Agora suponha-se que

$$\xi(t + \theta) \in \mathcal{S}_\tau(u_o) = \left\{ \xi \mid |(\mathbf{K}_{(i)} + G_{\tau(i)})\xi| \leq u_{o(i)}, i = 1, \dots, m \right\}, \theta \in [-\tau, 0)$$

então

$$\psi(y_c(t + \theta))^T T_\tau (\psi(t + \theta) - G_\tau \xi(t + \theta)) \leq 0, \quad \forall t \in [-\tau, 0)$$

logo se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\beta)$ e $\mathcal{S}_\tau(u_o) \subset \mathcal{E}(P, \beta)$, tem-se que

$$\psi(y_c(t - \tau))^T T_\tau (\psi(y_c(t - \tau) - G_\tau \xi(t - \tau)) \leq 0, \quad \forall t > 0$$

ou seja, $\forall t > -\tau$, $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \beta)$. Assim, do Lema 2.1 segue que se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$ então

$$\begin{aligned} \psi(y_c(t))^T T [\psi(y_c(t)) - G\xi(t)] &\leq 0 \\ \psi(y_c(t - \tau))^T T_\tau [\psi(y_c(t - \tau)) - G_\tau \xi(t - \tau)] &\leq 0 \end{aligned}$$

Como consequência tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) \leq & \xi(t)^T \mathbb{A}^T P \xi(t) + \xi(t - \tau)^T \mathbb{A}_d^T P \xi(t) + \psi(y_c(t))^T \mathbb{B}^T P \xi(t) \\ & + \psi(y_c(t - \tau))^T \mathbb{B}_d^T P \xi(t) + w(t)^T \mathbb{B}_w^T P \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbb{A} \xi(t) + \xi(t)^T P \mathbb{A}_d \xi(t - \tau) \\ & + \xi(t)^T P \mathbb{B} \psi(y_c(t)) + \xi(t)^T P \mathbb{B}_d \psi(y_c(t - \tau)) + \xi(t)^T P \mathbb{B}_w w(t) + \xi(t)^T R \xi(t) \\ & - \xi(t - \tau)^T R \xi(t - \tau) - \frac{1}{\alpha} w(t)^T w(t) - \psi(y_c(t))^T 2T \psi(y_c(t)) \\ & + \psi(y_c(t))^T T G \xi(t) + \xi(t)^T \tilde{G}^T T \psi(y_c(t)) - \psi(y_c(t - \tau))^T 2T_\tau \psi(y_c(t - \tau)) \\ & + \psi(y_c(t - \tau))^T T_\tau G_\tau \xi(t - \tau) + \xi(t - \tau)^T G_\tau^T T_\tau \psi(y_c(t - \tau)) \\ & + \frac{1}{\gamma} (\mathbb{C}_z \xi(t) + \mathbb{D}_z \psi(y_c(t)))^T (\mathbb{C}_z \xi(t) + \mathbb{D}_z \psi(y_c(t))) \end{aligned}$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - \tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ \psi(y_c(t - \tau)) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^T M_2 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - \tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ \psi(y_c(t - \tau)) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} < 0 \\ & \tag{5.18} \\ M_2 = & \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P + P \mathbb{A} + R & P \mathbb{A}_d & P \mathbb{B} + G^T T & P \mathbb{B}_d & P \mathbb{B}_w & \mathbb{C}_z \\ \mathbb{A}_d^T P & -R & 0 & G_\tau^T T_\tau & 0 & 0 \\ \mathbb{B}^T P + T G & 0 & -2T & 0 & 0 & S \mathbb{D}_z \\ \mathbb{B}_d^T P & T_\tau G_\tau & 0 & -2T_\tau & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_w^T P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} I_q & 0 \\ \mathbb{C}_z & 0 & \mathbb{D}_z & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo que $M_2 < 0$ é condição suficiente para termos $\mathcal{J}(t) < 0$, para todo $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$.

Considere-se as seguintes matrizes

$$P = \begin{bmatrix} X^{-1} & \star \\ M & E \end{bmatrix}, \quad Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & \star \\ N & F \end{bmatrix}, \quad S = T^{-1}, \quad S_\tau = T_\tau^{-1}$$

Pré e pós multiplicando-se M_2 pelo bloco diagonal

$$\text{blockdiag}\{Q, Q, S, S_\tau, \alpha I_q, I_l\}$$

obtem-se a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}Q + Q\mathbb{A}^T + \Gamma & \mathbb{A}_dQ & \mathbb{B}S + Y^T & \mathbb{B}_dS_\tau & \alpha\mathbb{B}_w & Q\mathbb{C}_z^T \\ Q\mathbb{A}_d^T & -\Gamma & 0 & Y_\tau^T & 0 & 0 \\ S\mathbb{B}^T + Y & 0 & -2S & 0 & 0 & S\mathbb{D}_z^T \\ S_\tau\mathbb{B}_d^T & Y_\tau & 0 & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbb{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbb{C}_zQ & 0 & \mathbb{D}_zS & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{A}Q &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \check{\mathbf{I}}C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y & \star \\ N & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}Y + \check{\mathbf{I}}C_aN & \mathbf{A}N^T + \check{\mathbf{I}}C_aF \\ A_aN & A_aF \end{bmatrix} \\ \mathbb{A}_dQ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_dY & \mathbf{A}_dN^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{B}S = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{I}}D_aS \\ B_aS \end{bmatrix}, \mathbb{B}_dS_\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_dS_\tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \star & \Gamma_3 \end{bmatrix}, Y = GQ = [Y_1 \ Y_2], Y_\tau = G_\tau Q = [Y_{\tau_1} \ Y_{\tau_2}] \\ \mathbb{C}_zQ &= [\mathbf{C}_z \ 0] \cdot \begin{bmatrix} Y & \star \\ N & F \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_zY \ \mathbf{C}_zN^T], \mathbb{D}_zS = \mathbf{D}_zS \end{aligned}$$

segue que (5.19) equivale a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}Y + \check{\mathbf{I}}C_aN + \frac{1}{2}\Gamma_1 & \mathbf{A}N^T + \check{\mathbf{I}}C_aF + \Gamma_2 & \mathbf{A}_dY & \mathbf{A}_dN^T \\ A_aN & A_aF + \frac{1}{2}\Gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Gamma_1 & -\Gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Gamma_3 & \dots \\ Y_1 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{\tau_1} & Y_{\tau_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_zY & \mathbf{C}_zN^T & 0 & 0 \\ \check{\mathbf{I}}D_aS & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & 0 \\ B_aS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ -S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2}I_q & 0 \\ \mathbf{D}_zS & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2}I_l \end{bmatrix} + (\star) < 0 \quad (5.20)$$

Note-se que (5.20) pode ser representada como

$$\Theta + \mathcal{U}^T\Omega\mathcal{V} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U} < 0$$

onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + \Gamma_1 & \mathbf{A}N^T + \Gamma_2 & \mathbf{A}_dY & \mathbf{A}_dN^T & Y_1^T & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & Y\mathbf{C}_z^T \\ NA^T + \Gamma_2^T & \Gamma_3 & 0 & 0 & Y_2^T & 0 & 0 & N\mathbf{C}_z^T \\ Y\mathbf{A}_d^T & 0 & -\Gamma_1 & -\Gamma_2 & 0 & Y_{\tau_1}^T & 0 & 0 \\ NA_d^T & 0 & -\Gamma_2^T & -\Gamma_3 & 0 & Y_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 & 0 & 0 & -2S & 0 & 0 & S\mathbf{D}_z^T \\ S_\tau\mathbf{B}^T & 0 & Y_{\tau_1} & Y_{\tau_2} & 0 & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_zY & \mathbf{C}_zN^T & 0 & 0 & \mathbf{D}_zS & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{I}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} N & F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do Lema 2.3 segue que $\Theta + \mathcal{U}^T\Omega\mathcal{V} + (\star) < 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_U^T\Theta\mathcal{N}_U < 0$ e $\mathcal{N}_V^T\Theta\mathcal{N}_V < 0$, onde

$$\mathcal{N}_U = \begin{bmatrix} N_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_V = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

onde, $\mathcal{N}_U \in \text{Ker}\{\mathcal{U}\}$ e $\mathcal{N}_V \in \text{Ker}\{\mathcal{V}\}$, $N_a = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Relembra-se que

$$\mathcal{N}_U^T\Theta\mathcal{N}_U < 0, \mathcal{N}_V^T\Theta\mathcal{N}_V < 0 \Rightarrow M_2 < 0 \Rightarrow \mathcal{J}(t) < 0$$

A expressão $\mathcal{N}_U^T\Theta\mathcal{N}_U < 0$ é equivalente a

$$\begin{bmatrix} N_a^T [\mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + \Gamma_1] N_a & N_a^T \mathbf{A}_dY & N_a^T \mathbf{A}_dN^T & N_a^T Y_1^T & N_a^T \mathbf{B}S_\tau & N_a^T \alpha\mathbf{B}_w & N_a^T Y\mathbf{C}_z^T \\ Y\mathbf{A}_d^T N_a & -\Gamma_1 & -\Gamma_2 & 0 & Y_{\tau_1}^T & 0 & 0 \\ NA_d^T N_a & -\Gamma_2^T & -\Gamma_3 & 0 & Y_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ Y_1 N_a & 0 & 0 & -2S & 0 & 0 & S\mathbf{D}_z^T \\ S_\tau\mathbf{B}^T N_a & Y_{\tau_1} & Y_{\tau_2} & 0 & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbf{B}_w^T N_a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_zY N_a & 0 & 0 & \mathbf{D}_zS & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0$$

Observe-se que nesta condição LMI está explícita a variável N . Sua presença na LMI torna o problema de síntese não convexo. Não é possível determinar uma solução para matrizes Y , X^{-1} e N livres, que ao mesmo tempo satisfaçam $X^{-1}Y + M^T N = I$. Portanto pré e pós multiplica-se esta LMI pelo seguinte bloco diagonal, e seu transposto

$$\text{blockdiag} \left\{ I_n, \begin{bmatrix} I & XM^T \\ 0 & XM^T \end{bmatrix}, I_m, I_m, I_q, I_l \right\}$$

O que resulta em

$$\begin{bmatrix} N_a^T [\mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + \Gamma_1] N_a & N_a^T \mathbf{A}_d (Y + N^T M X) \\ (Y + X M^T N) \mathbf{A}_d^T N_a & -\Gamma_1 - \Gamma_2 M X - X M^T \Gamma_2^T - X M^T \Gamma_3 M X \\ X M^T \mathbf{A}_d^T N_a & -X M^T \Gamma_2^T - X M^T \Gamma_3 M X \\ Y_1 N_a & 0 & \dots \\ S_\tau \mathbf{B}^T N_a & Y_{\tau_1} + Y_{\tau_2} M X \\ \alpha \mathbf{B}_w^T N_a & 0 \\ \mathbf{C}_z Y N_a & 0 \\ N_a^T \mathbf{A}_d N^T M X & N_a^T Y_1^T & N_a^T \mathbf{B} S_\tau & N_a^T \alpha \mathbf{B}_w & N_a^T Y \mathbf{C}_z^T \\ -\Gamma_2 M X - X M^T \Gamma_3 M X & 0 & Y_{\tau_1}^T + X M^T Y_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ -X M^T \Gamma_3 M X & 0 & X M^T Y_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -2S & 0 & 0 & S \mathbf{D}_z^T \\ Y_{\tau_2} M X & 0 & -2S_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_z S & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0$$

Observe-se que da estrutura de P e Q , tem-se a relação $X^{-1}Y + M^T N = I$. Como conseqüência, ao multiplicar-se ambos os lados por X , tem-se $X = Y + X M^T N$. Da mesma forma, tem-se que $X M^T N = X - Y$. Em seguida, faz-se a seguinte substituição de variáveis

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & U_2 \\ 0 & 0 & U_{\tau_1} & U_{\tau_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & X M^T & 0 & 0 \\ 0 & X M^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 & Y_{\tau_1} & Y_{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ M X & M X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M X \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

e obtém-se a condição expressa na LMI (5.17a) do Teorema 5.2.

Simultaneamente, a condição $\mathcal{N}_V^T \Theta \mathcal{N}_V < 0$ deve ser verificada

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T X^{-1} \\ + X^{-1} \Gamma_1 X^{-1} + M^T \Gamma_2^T X^{-1} \\ + X^{-1} \Gamma_2 M + M^T \Gamma_3 M \end{bmatrix} & X^{-1} \mathbf{A}_d Y & X^{-1} \mathbf{A}_d N^T \\ Y \mathbf{A}_d^T X^{-1} & -\Gamma_1 & -\Gamma_2 & \dots \\ N \mathbf{A}_d^T X^{-1} & -\Gamma_2^T & -\Gamma_3 & \dots \\ S_\tau \mathbf{B}^T X^{-1} & Y_{\tau_1} & Y_{\tau_2} & \\ \alpha \mathbf{B}_w^T X^{-1} & 0 & 0 & \\ \mathbf{C}_z (Y X^{-1} + N^T M) & 0 & 0 & \\ X^{-1} \mathbf{B} S_\tau & X^{-1} \alpha \mathbf{B}_w & (X^{-1} Y + M^T N) \mathbf{C}_z^T \\ Y_{\tau_1}^T & 0 & 0 & \\ \dots & Y_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ -2S_\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I_l & \end{bmatrix} < 0 \quad (5.22)$$

Note-se que aqui explicita-se a variável X^{-1} , ao passo que na condição (5.17a), equivalente a $\mathcal{N}_U^T \Theta \mathcal{N}_U < 0$, a representação dá-se em função de X . Adicionalmente, tem-se

aqui o bloco Γ e suas respectivas linhas iniciando com $\begin{bmatrix} Y \\ N \end{bmatrix}$. De fato a mesma circunstância deu-se na condição $\mathcal{N}_U^T \Theta \mathcal{N}_U < 0$. Assim sendo, pré e pós multiplica-se (5.22) pelo seguinte bloco diagonal, e seu transposto

$$\text{blockdiag} \left\{ X, \begin{bmatrix} I & XM^T \\ 0 & XM^T \end{bmatrix}, I_m, I_q, I_l \right\}$$

e obtém-se

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}X + X\mathbf{A}^T + \Gamma_1 + \Gamma_2MX \\ +XM^T\Gamma_2^T + XM^T\Gamma_3MX \end{bmatrix} & \mathbf{A}_dX \\ (Y + XM^TN)\mathbf{A}_d^T & \begin{bmatrix} -\Gamma_1 - \Gamma_2MX \\ -XM^T\Gamma_2^T - XM^T\Gamma_3MX \end{bmatrix} \\ XM^TN\mathbf{A}_d^T & \begin{bmatrix} -XM^T\Gamma_2^T - XM^T\Gamma_3MX \\ Y_{\tau_1} \end{bmatrix} \cdots \\ S_\tau\mathbf{B}^T & Y_{\tau_1} \\ \alpha\mathbf{B}_w & 0 \\ \mathbf{C}_zX & 0 \\ \mathbf{A}_d(X - Y) & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & X\mathbf{C}_z^T \\ -\Gamma_2MX - XM^T\Gamma_3MX & Y_{\tau_1}^T & 0 & 0 \\ -XM^T\Gamma_3MX & Y_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ \cdots & Y_{\tau_2} & -2S_\tau & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0$$

Efetuando-se a substituição de variáveis proposta em (5.21), tem-se a condição LMI (5.17b) do Teorema 5.2.

Note-se que a validade das condições $\mathcal{N}_U^T \Theta \mathcal{N}_U < 0$ e $\mathcal{N}_V^T \Theta \mathcal{N}_V < 0$ pressupõe $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$. Assim sendo, de forma similar ao caso estático, tem-se que se $\xi(t)^T P \xi(t) < \mu^{-1} \subset \mathcal{S}(u_o)$, então $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$. Ao passo que $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$ é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Q & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}Q + Y_{(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, m$$

ou

$$\begin{bmatrix} Y & \star & \star \\ N & F & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}Y + Y_{1(i)} & \mathbf{K}_{(i)}N^T + Y_{2(i)} & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, m \quad (5.23)$$

Pré e pós multiplicando-se (5.23) pelo seguinte bloco diagonal, e seu transposto

$$\text{blockdiag} \left\{ \begin{bmatrix} I & XM^T \\ 0 & XM^T \end{bmatrix}, 1 \right\}$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y + XM^TN + N^T MX \\ +XM^T F MX \\ XM^TN + XM^T F MX \end{bmatrix} & \star & \star \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(i)}(Y + XM^TN) \\ +Y_{1(i)} + Y_{2(i)} MX \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{(i)}N^T MX + Y_{2(i)} MX & \mu u_{o(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, m$$

A partir das relações, $YX^{-1} + N^T M = I$, $NX^{-1} + FM = 0$, e da substituição de variáveis proposta em (5.21), chega-se à LMI (5.17c) do Teorema 5.2.

A pertinência de $\xi(t-\tau)$ a $\mathcal{S}_\tau(u_o)$ pode ser verificada replicando-se o desenvolvimento a partir de (5.23) substituindo-se $[Y_1 \ Y_2 \ U_1 \ U_2]$ por $[Y_{\tau_1} \ Y_{\tau_2} \ U_{\tau_1} \ U_{\tau_2}]$. Tem-se então a LMI (5.17d) do Teorema 5.2. Finalmente, conforme mostrado na seção anterior, a LMI (5.17e) garante $\beta > 0$, o que conclui a prova do ítem 1) do Teorema 5.2.

Considere-se agora $w(t) = 0$. Neste caso $\mathcal{J}(t) < 0$ assegura que $\dot{V}(t) < 0$, dado que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t-\tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$. Então, se $\phi_\xi \in \mathcal{B}(\mu^{-1})$, segue que (veja (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006)):

$$\xi(t)^T P \xi(t) \leq V(\xi(t)) \leq V(\xi(0)) \leq (\bar{\lambda}(P) + \tau \bar{\lambda}(R)) \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}$$

o que significa que, para qualquer condição inicial pertencente à bola $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, tem-se $\xi(t) \in \mathcal{E}(P, \mu^{-1})$, $\forall t \geq t_0$. Uma vez que as LMIs (5.17c), (5.17d) são satisfeitas, tem-se que $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$, $\xi(t-\tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$, $\forall t \geq t_0$. Então, para qualquer condição inicial pertencente a $\mathcal{B}(\mu^{-1})$, efetivamente tem-se que $\dot{V}(t) < 0$, o que conclui a prova do ítem 2). fim da prova.

O seguinte corolário trata em um contexto global o problema da estabilização enforcado no Teorema 5.2. Neste caso, pode ser assegurado que as trajetórias do sistema em malha fechada (5.15) são limitadas para qualquer $w(t) \in \mathcal{L}_2$ independente das condições iniciais.

Corolário 5.2 (antiwindup dinâmico racional, estabilidade global). *Se existem matrizes simétricas positivas definidas $X, Y, H_1, H_3 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, matrizes diagonais positivas definidas $S, S_\tau \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, e matrizes $H_2 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, e escalares α, μ, γ tais que as LMIs*

$$\left[\begin{array}{cccc} N_a^T \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}Y + Y\mathbf{A}^T + H_1 \\ -H_2 - H_2^T + H_3 \end{array} \right] N_a & N_a^T \mathbf{A}_d X & N_a^T \mathbf{A}_d (X - Y) & \\ & X \mathbf{A}_d^T N_a & -H_1 & -H_2 \\ & (X - Y) \mathbf{A}_d^T N_a & -H_2^T & -H_3 \\ & -\mathbf{K}Y N_a & 0 & 0 \\ & S_\tau \mathbf{B}^T N_a & -\mathbf{K}X & \mathbf{K}(Y - X) \\ & \alpha \mathbf{B}_w^T N_a & 0 & 0 \\ & \mathbf{C}_z N_a & 0 & 0 \\ & & \star & N_a^T \mathbf{B} S_\tau \quad N_a^T \alpha \mathbf{B}_w \quad N_a^T \mathbf{C}_z^T \\ & & 0 & \star \quad 0 \quad 0 \\ & & 0 & \star \quad 0 \quad 0 \\ \dots & -2S & 0 & 0 \quad 0 \quad S \mathbf{D}_z^T \\ & 0 & -2S_\tau & 0 \quad 0 \\ & 0 & 0 & -\alpha I_q \quad 0 \\ & 0 & \mathbf{D}_z S & 0 \quad -\gamma I_l \end{array} \right] < 0 \quad (5.24a)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{A}X + X\mathbf{A}^T + H_1 & \mathbf{A}_d X & \mathbf{A}_d (X - Y) & \mathbf{B} S_\tau & \alpha \mathbf{B}_w & X \mathbf{C}_z^T \\ X \mathbf{A}_d^T & -H_1 & -H_2 & \star & 0 & 0 \\ (X - Y) \mathbf{A}_d^T & -H_2^T & -H_3 & \star & 0 & 0 \\ S_\tau \mathbf{B}^T & -\mathbf{K}X & \mathbf{K}(Y - X) & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha \mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_z X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{array} \right] < 0 \quad (5.24b)$$

$$Y - X > 0 \quad (5.24c)$$

sejam verificadas, então existe um compensador dinâmico como definido em (5.13), tal que

1. quando $w(t) \neq 0$, as trajetórias em malha fechada permanecem limitadas para qualquer $\phi_\xi(\theta) \in \mathcal{C}_\tau^v$ e qualquer condição inicial.
2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma V(0) + \gamma \frac{1}{\alpha} \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$
3. se $w(t) = 0$, $\forall t \geq t_1 \geq 0$, $\xi(t)$ converge assintoticamente para a origem.

Prova.: A exemplo da prova do Corolário 5.1, considere-se $G = -\mathbb{K}$, $G_\tau = -\mathbb{K}$. Segue que a condição de setor (2.6a) é verificada para todo $\xi(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$. Neste caso, tem-se $U_1 = U_{\tau_1} = -\mathbf{K}Y$, $U_2 = U_{\tau_2} = \mathbf{K}(Y - X)$. Assim, é suficiente verificar $\mathcal{J}(t) < 0$ e $Y - X > 0$, o que replica a prova do Teorema 5.2 para as condições que garantam $\mathcal{J}(t) < 0$. Já a condição $Y - X > 0$, implica em, $P > 0$, o que juntamente com $R > 0$ - assegurado uma vez que $\mathcal{J}(t) < 0$ - faz de $V(t)$ um funcional de Liapunov-Krasovskii. fim da prova.

A seção a seguir considera a síntese de um compensador antiwindup não racional.

5.5 Antiwindup dinâmico não racional

Considere-se $y_a(t)$ obtido a partir do seguinte compensador antiwindup

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau) + D_a \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Considera-se o mesmo vetor $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$ do caso racional para representar o sistema de ordem aumentada $(x(t), x_c(t), x_a(t))$. Bem como, a partir das matrizes definidas em (5.6) e (5.14), redefine-se a seguinte matriz

$$\mathbb{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \check{\mathbf{I}}C_{a,d} \\ 0 & A_{a,d} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

As demais matrizes \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{B}_d , \mathbb{B}_w , permanecem inalteradas.

A representação do sistema (5.1)-(5.4)-(5.25) em malha fechada pode ser feita conforme segue

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{B}\psi(y_c(t)) + \mathbb{B}_d \psi(y_c(t - \tau)) + \mathbb{B}_w w(t) \\ y(t) &= \mathbb{C}_y \xi(t) \\ z(t) &= \mathbb{C}_z \xi(t) + \mathbb{D}_z \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (5.27)$$

com a condição inicial dada por ϕ_ξ definida em (5.16).

O teorema a seguir apresenta um método também baseado no Lema de Projeção para síntese de um compensador antiwindup como (5.25) que solucione os Problemas 3.1 e 3.2 para o sistema (5.27), ou seja, esta-se interessados na determinação de A_a , $A_{a,d}$, B_a , C_a , $C_{a,d}$, D_a .

Teorema 5.3 (antiwindup dinâmico não racional, escopo de estabilidade local). *Se existem matrizes simétricas positivas definidas X , Y , H_1 , $H_3 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, matrizes diagonais positivas definidas S , $S_\tau \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, e matrizes $H_2 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, U_1 , U_2 , U_{τ_1} , $U_{\tau_2} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$, e escalares α , μ , γ tais que as LMIs seguintes (5.17a), (5.28),*

(5.17c), (5.17d), (5.17e) são verificadas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}X + X\mathbf{A}^T + H_1 & \mathbf{A}_d X & \mathbf{B}S_\tau & \alpha\mathbf{B}_w & X\mathbf{C}_z^T \\ X\mathbf{A}_d^T & -H_1 & U_{\tau_1}^T + U_{\tau_2}^T & 0 & 0 \\ S_\tau\mathbf{B}^T & U_{\tau_1} + U_{\tau_2} & -2S_\tau & 0 & 0 \\ \alpha\mathbf{B}_w^T & 0 & 0 & -\alpha I_q & 0 \\ \mathbf{C}_z X & 0 & 0 & 0 & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0 \quad (5.28)$$

então existe um compensador (5.13) que assegura que

1. as trajetórias do sistema (5.15) são limitadas para todas as condições iniciais contidas na bola

$$\mathcal{B}(\beta) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi\|_c^2 \leq \beta/(\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$$

onde

$$P = P^T = \begin{bmatrix} X^{-1} & \star \\ M & E \end{bmatrix} > 0, \quad R = R^T = \begin{bmatrix} R_1 & \star \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$0 \leq \beta \leq \mu^{-1} - \frac{1}{\alpha\delta};$$

2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma V(0) + \gamma\frac{1}{\alpha}\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$;
3. quando $w(t) = 0$, a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável, e

$$\mathcal{B}(\mu^{-1}) = \{\phi_\xi \in \mathcal{C}_\tau^v \mid \|\phi_\xi\|_c^2 \leq \mu^{-1}/(\bar{\lambda}(P) + \tau\bar{\lambda}(R))\}$$

está contida na região de atração da origem.

Prova.: Considere-se os mesmos funcional de Liapunov-Krasovskii $V(t)$ e função auxiliar $\mathcal{J}(t)$ utilizados nos Teoremas 5.1 e 5.2. Observe-se que a expressão para o sistema em malha fechada (5.27) é idêntica a (5.15). Segue que a prova corrente imita a do Teorema 5.2 até a inequação (5.19), ou seja, para as matrizes (5.6), (5.14) e (5.26) e o sistema em malha fechada (5.27), se $\xi(t) \in \mathcal{S}(u_o)$ e $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}_\tau(u_o)$, a verificação de (5.19) é suficiente para garantir $\mathcal{J}(t) < 0$.

O produto $\mathbb{A}_d Q$ para o caso não racional, pode ser representado conforme segue

$$\mathbb{A}_d Q = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d Y + \check{\mathbf{I}}C_{a,d}N & \mathbf{A}_d N^T + \check{\mathbf{I}}C_{a,d}F \\ A_{a,d}N & A_{a,d}F \end{bmatrix}$$

sejam verificadas, então existe um compensador dinâmico como definido em (5.25), tal que

1. quando $w(t) \neq 0$, as trajetórias em malha fechada permanecem limitadas para qualquer $\phi_\xi(\theta) \in \mathcal{C}_\tau^v$ e qualquer condição inicial;
2. $\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma V(0) + \gamma \frac{1}{\alpha} \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2$;
3. se $w(t) = 0, \forall t \geq t_1 \geq 0$, $\xi(t)$ converge assintoticamente para a origem.

Prova.: A prova do Corolário 5.3 imita a prova do Corolário 5.2. fim da prova.

5.5.1 Determinação do Compensador

O procedimento para a determinação do compensador antiwindup estático, tanto para o Teorema 5.1 como para o Corolário 5.1, já está indicado no enunciado dos respectivos teorema e corolário. Já os procedimentos para a determinação dos compensadores antiwindup dinâmico e não racional seguem os passos do Algoritmo 3.1, uma vez que a metodologia utilizada no Capítulo 3 é a mesma utilizada no presente capítulo; ou seja, ambos são baseados no Lema 2.3 (Lema de Projeção).

5.5.2 Estabilidade do Compensador

A determinação da estabilidade do compensador antiwindup racional pode ser obtida mediante os mesmos passos dispostos na seção 3.4.3. Já a determinação da estabilidade do compensador antiwindup racional pode ser obtida mediante os mesmos passos dispostos na seção 4.4.3.

5.6 Problema de Otimização: Atenuação à Perturbação

A satisfação das condições dadas nos teoremas e corolários apresentados neste capítulo asseguram que o sistema em malha fechada, considerado nos respectivos teoremas e corolários, apresenta trajetórias limitadas para qualquer perturbação admissível, posto que as condições iniciais pertençam ao conjunto $\mathcal{B}(\beta)$ (escopo local de estabilidade), ou ao conjunto \mathfrak{R}^{n+n_c} (antiwindup estático, escopo global de estabilidade), ou $\mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$ (antiwindup dinâmico, escopo global de estabilidade). Como as condições propostas são expressas na forma de LMIs, elas podem facilmente ser incorporadas em problemas de otimização convexa, a exemplo do que foi efetuado nos Capítulos 3 e 4. A seguir é apresentado um problema de interesse. Considera-se a minimização do ganho \mathcal{L}_2 da perturbação $w(t)$ para a saída regulada $z(t)$. Por simplicidade, assume-se nulas as condições iniciais, ou seja, $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$.

- **Maximização da Atenuação da Perturbação:** Para um limite não nulo admissível da norma \mathcal{L}_2 da perturbação (dado por $\frac{1}{\delta}$), a idéia é minimizar o limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 de $w(t)$ para $z(t)$. Considerando que a condição inicial seja nula (ou seja, $\phi_\xi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$), isto pode ser obtido a partir da solução dos

seguintes problemas de otimização convexa:

$$\begin{aligned}
 & \underline{\gamma} = \min \gamma \\
 & \text{sujeito a (5.8a), (5.8b), (5.8c) p/ Teorema 5.1 ou} \\
 & \text{sujeito a (5.17a), (5.17b), (5.17c) p/ Teorema 5.2 ou} \\
 & \text{sujeito a (5.17a), (5.28), (5.17c) p/ Teorema 5.3 ou} \\
 & \text{sujeito a (5.12) p/ Corolário 5.1 ou} \\
 & \text{sujeito a (5.24a), (5.24b), (5.24c) p/ Corolário 5.2 ou} \\
 & \text{sujeito a (5.24a), (5.31), (5.24c) p/ Corolário 5.3}
 \end{aligned} \tag{5.32a}$$

$$\begin{aligned}
 & \max \alpha \\
 & \gamma < 1.20 \cdot \underline{\gamma}, \text{ e mesmo conjunto de LMIs de (5.32a)}
 \end{aligned} \tag{5.32b}$$

Neste caso, o limitante superior ao ganho \mathcal{L}_2^2 é dado por $\gamma \cdot \frac{1}{\alpha}$. Observa-se que nos capítulos anteriores, este limitante era o próprio γ . O escalar $\frac{1}{\alpha}$ foi inserido no funcional de Liapunov-Krasovskii para constituir-se um grau de liberdade adicional quando o desenvolvimento algébrico para a obtenção de condições LMIs é feito a partir de (5.19). Quando o desenvolvimento algébrico é feito a partir de $M_2 < 0$, onde M_2 é dado em (5.18), $\frac{1}{\alpha}$ é um grau de liberdade redundante, passível de normalização. Em outras palavras, quando o desenvolvimento algébrico é feito a partir da representação com a matriz P ao invés de Q , pode-se a partir de (5.18), encontrar $\alpha \cdot M_2 < 0$. Uma substituição de variáveis conseguinte do tipo $P^T = \alpha P$, lineariza a representação e suprime a variável α das LMIs. Nota-se que o mesmo procedimento, quando feito a partir de (5.19), ou seja, com a matriz $Q = P^{-1}$, a variável α permanece nas LMIs. Ressalte-se, todavia, que é o desenvolvimento algébrico através da mudança de variável $Q = P^{-1}$ que permite a obtenção direta de condições LMIs na síntese de um compensador antiwindup racional. Também é esta mudança de variável que viabiliza o recurso ao Lema de Projeção.

Assim sendo, primeiramente minimiza-se γ , sujeito às LMIs que compõem o teorema ou corolário de interesse. Armazena-se este mínimo global na variável $\underline{\gamma}$. Em seguida, minimiza-se $\frac{1}{\alpha}$, ou seja, maximiza-se α , o que completa a minimização do limitante superior ao ganho \mathcal{L}_2^2 . Esta minimização também é feita sujeita ao mesmo conjunto de LMIs do teorema ou corolário utilizado na síntese do compensador antiwindup de interesse.

A LMI adicional que permite um γ até 20% maior do que $\underline{\gamma}$, busca evitar problemas numéricos, os quais poderiam tornar infactível esta segunda minimização.

5.7 Exemplo Numérico

Nesta seção é ilustrado os métodos de síntese propostos nos Teoremas 5.1, 5.2 e 5.3, bem como nos Corolários 5.1, 5.2 e 5.3.

Exemplo 5.1. Considere-se o sistema (3.1) dado pelas seguintes matrizes

$$A = -0.5, B = 1, B_w = 1, C_y = 1, C_z = 1, D_z = 1$$

O controlador dinâmico de saída (3.3) é um PI descrito pelo seguinte modelo

$$A_c = -0.2, B_c = 0.2, C_c = 0.2, D_c = 0.2$$

O limite da amplitude do controle é dado por $u_o = 1$. Aplica-se os resultados propostos nos Teoremas 3.1, 5.1, 5.2 e 5.3, bem como nos Corolários 5.1, 5.2 e 5.3 para obter um

compensador antiwindup, resolvendo-se o problema de otimização apresentado na Seção 5.6, para $\frac{1}{\delta} = 120^2$. A seguir é descrito o processo de obtenção dos compensadores sintetizados nos teoremas e corolários deste capítulo.

1. estabilidade local

(a) *estático*: Uma vez obtidas as matrizes $S = 0.1029$ e $Z = -0.0056$, obtém-se diretamente o compensador antiwindup $D_a = ZS^{-1}$

$$D_a = -0.0548$$

(b) *dinâmico racional*: A partir da solução numérica do problema (5.32), obteve-se as matrizes X e Y como segue

$$X = \begin{bmatrix} 0.0074 & -0.0038 \\ -0.0038 & 0.0066 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.0096 & -0.0120 \\ -0.0120 & 0.5418 \end{bmatrix}$$

Em seguida, determinou-se as matrizes N , M conforme $N^T M = I - YX^{-1}$. Aqui utilizou-se a decomposição QR .

$$N = \begin{bmatrix} -0.0086 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0086 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -58.2185 & -114.3324 \\ 0 & 0.5458 \end{bmatrix}$$

A escolha de N e M define univocamente a matriz $F = (XM^T)^{-1}(Y-X)(MX)^{-1}$, resultando

$$F = \begin{bmatrix} 1.84818 & -0.75690 \\ -0.75690 & 503.05921 \end{bmatrix}$$

A partir da reconstrução de Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V} , chega-se a Ω . Assim, resolve-se $\Theta + \mathcal{U}\Omega\mathcal{V} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U}^T < 0$, o que leva às seguintes matrizes A_a , B_a , C_a , D_a

$$A_a = \begin{bmatrix} -53.4209 & 0.1991 \\ -147.9343 & -1.6595 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} -171.2308 \\ -111.8097 \end{bmatrix} \\ C_a = \begin{bmatrix} -27.9340 & 0.1078 \end{bmatrix}, D_a = -90.6793$$

(c) *dinâmico não racional*: De forma semelhante ao caso anterior, a partir da solução numérica do problema (5.32), obteve-se as matrizes X e Y como segue

$$X = \begin{bmatrix} 0.0078 & -0.0042 \\ -0.0042 & 0.0070 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.0101 & -0.0134 \\ -0.0134 & 1.1991 \end{bmatrix}$$

Em seguida, determinou-se as matrizes N , M conforme $N^T M = I - YX^{-1}$. Aqui utilizou-se a decomposição QR .

$$N = \begin{bmatrix} -0.0046 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0046 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -133.4065 & -249.5784 \\ 0 & 0.5285 \end{bmatrix}$$

A escolha de N e M define univocamente a matriz $F = (XM^T)^{-1}(Y-X)(MX)^{-1}$, resultando

$$F = \begin{bmatrix} 0.84734 & 0.86411 \\ 0.86411 & 462.68481 \end{bmatrix}$$

A partir da reconstrução de Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V} , chega-se a Ω . Resolve-se $\Theta + \mathcal{U}\Omega\mathcal{V} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U}^T < 0$, o que leva às seguintes matrizes A_a , $A_{a,d}$, B_a , C_a , $C_{a,d}$, D_a

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} -73.3683 & 0.2980 \\ -201.7586 & -1.3250 \end{bmatrix}, A_{a,d} = \begin{bmatrix} -5.5118 & -0.0177 \\ 3.1953 & 0.0068 \end{bmatrix} \\ B_a &= \begin{bmatrix} -152.8140 \\ -81.1274 \end{bmatrix}, C_a = \begin{bmatrix} -86.4445 & 0.3443 \end{bmatrix} \\ C_{a,d} &= \begin{bmatrix} -6.5823 & -0.0140 \end{bmatrix}, D_a = -181.2545 \end{aligned}$$

2. estabilidade global

(a) *estático*: Uma vez obtidas as matrizes $S = 0.1036$ e $Z = -0.0056$, obtém-se $D_a = ZS^{-1}$

$$D_a = -0.0544$$

(b) *dinâmico racional*: A partir da solução numérica do problema (5.32), obteve-se as matrizes X e Y como segue

$$X = \begin{bmatrix} 0.0069 & -0.0034 \\ -0.0034 & 0.0063 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.0088 & -0.0108 \\ -0.0108 & 0.5368 \end{bmatrix}$$

Em seguida, determinou-se as matrizes N , M conforme $N^T M = I - YX^{-1}$. Aqui utilizou-se a decomposição QR .

$$N = \begin{bmatrix} -0.0077 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0077 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -55.0285 & -114.6119 \\ 0 & 0.5298 \end{bmatrix}$$

A escolha de N e M define univocamente a matriz $F = (XM^T)^{-1}(Y-X)(MX)^{-1}$, resultando

$$F = \begin{bmatrix} 1.9071 & 3.5785 \\ 3.5785 & 570.0659 \end{bmatrix}$$

A partir da reconstrução de Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V} , chega-se a Ω . Assim, resolve-se $\Theta + \mathcal{U}\Omega\mathcal{V} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U}^T < 0$, o que leva às seguintes matrizes A_a , B_a , C_a , D_a

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} -40.6711 & -0.0916 \\ -116.2858 & -1.9605 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} -176.3342 \\ -119.2295 \end{bmatrix} \\ C_a &= \begin{bmatrix} -11.2050 & 0.0291 \end{bmatrix}, D_a = -50.2464 \end{aligned}$$

(c) *dinâmico não racional*: Da solução numérica do problema (5.32), obteve-se as matrizes X e Y como segue

$$X = \begin{bmatrix} 6.7629 & -1.7010 \\ -1.7010 & 6.1923 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 12.5378 & -2.2890 \\ -2.2890 & 10.0943 \end{bmatrix}$$

Em seguida, determinou-se as matrizes N , M conforme $N^T M = I - YX^{-1}$. Aqui utilizou-se a decomposição QR .

$$N = \begin{bmatrix} -0.9963 & -0.0859 \\ -0.0859 & 0.9963 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0.8949 & 0.2054 \\ 0 & -0.6360 \end{bmatrix}$$

A escolha de N e M define univocamente a matriz $F = (XM^T)^{-1}(Y-X)(MX)^{-1}$, resultando

$$F = \begin{bmatrix} 0.1810 & -0.0333 \\ -0.0333 & 0.2551 \end{bmatrix}$$

A partir da reconstrução de Θ , \mathcal{U} e \mathcal{V} , chega-se a Ω . Resolve-se $\Theta + \mathcal{U}\Omega\mathcal{V} + \mathcal{V}^T\Omega^T\mathcal{U}^T < 0$, o que leva às seguintes matrizes A_a , $A_{a,d}$, B_a , C_a , $C_{a,d}$, D_a

$$A_a = \begin{bmatrix} -1.0338 & -0.1134 \\ 0.3289 & -1.3258 \end{bmatrix}, A_{a,d} = \begin{bmatrix} -0.1490 & -0.0318 \\ 0.0072 & 0.0015 \end{bmatrix}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0039 \end{bmatrix}, C_a = [5.0716 \quad -3.1717]$$

$$C_{a,d} = [0.0091 \quad -0.0019], D_a = 0.0377$$

De modo a ilustrar o desempenho do compensador antiwindup, considera-se a seguinte perturbação \mathcal{L}_2

$$w(t) = \begin{cases} \bar{w}, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 0, & t \geq \bar{t} \end{cases}$$

Os resultados da simulação para $\bar{w} = 120$ e $\bar{t} = 1$ e um atraso no tempo $\tau = 1$ são ilustrados nas Figuras 5.2 e 5.3.

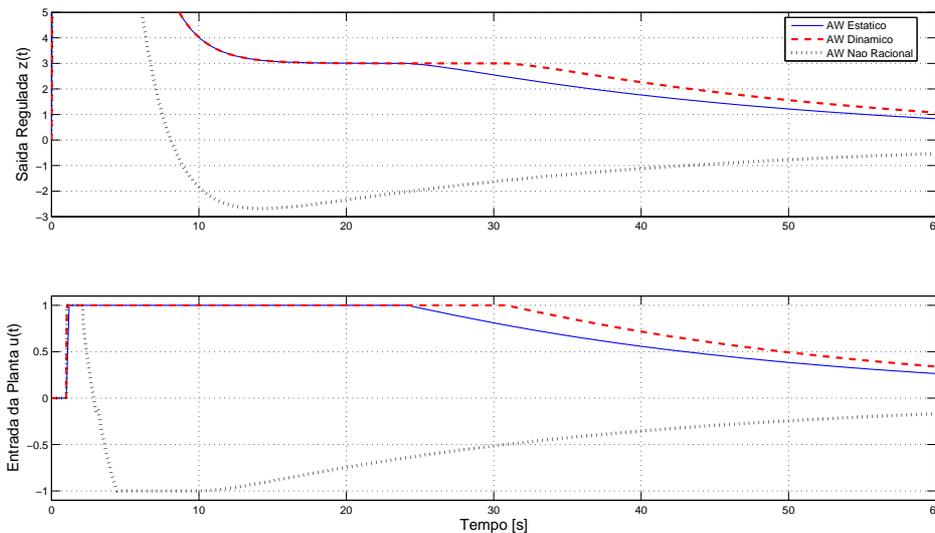


Figura 5.2: Desempenho dos compensadores antiwindup localmente estabilizantes

A Figura 5.2 mostra a saída regulada do sistema em malha fechada $z(t)$ e a respectiva entrada de controle $u(t)$, quando o compensador antiwindup é obtido aplicando-se os Teoremas 5.1, 5.2 e 5.3, através do problema de otimização (5.32). Em outras palavras, sintetiza-se um compensador antiwindup que maximiza a atenuação do efeito da perturbação na saída regulada da planta. Na figura, a linha contínua azul corresponde às curvas do sistema em malha fechada contendo o compensador estático (5.5). A linha descontínua vermelha, o sistema em malha fechada com o compensador dinâmico racional (5.13). O pontilhado preto, com o compensador (5.25).

A Figura 5.3 mostra a saída regulada do sistema em malha fechada $z(t)$ e a respectiva entrada de controle $u(t)$, quando o compensador antiwindup é obtido a partir das

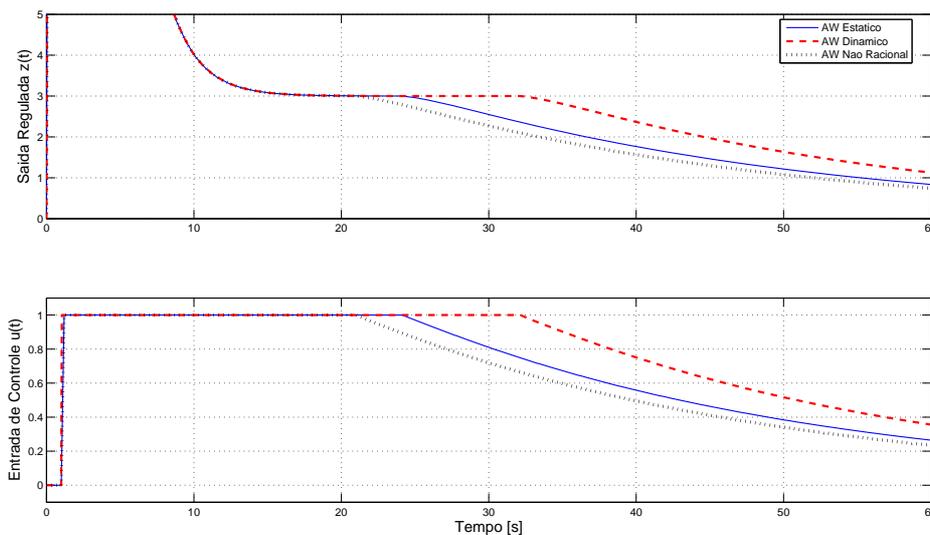


Figura 5.3: Desempenho dos compensadores antiwindup globalmente estabilizantes

condições dos Corolários 5.1, 5.2 e 5.3, mediante a solução do problema de otimização (5.32). Semelhantemente ao ilustrado na Figura 5.2, compara-se o desempenho dos compensadores antiwindup que minimizam o ganho \mathcal{L}_2 da perturbação $w(t)$ para a saída regulada $z(t)$. Na Figura 5.3, a linha contínua azul corresponde às curvas do sistema em malha fechada contendo o compensador estático (5.5). A linha descontínua vermelha, o sistema em malha fechada com o compensador dinâmico racional (5.13). O pontilhado preto, com o compensador (5.25).

5.8 Comentários finais do Capítulo

Observe-se que a problemática é a mesma tratada nos capítulos anteriores: um controlador linear é *a priori* projetado para garantir estabilidade e algum nível de performance a uma planta, supostamente linear. *A posteriori* os efeitos da saturação na operação do sistema em malha fechada motivam a síntese de um novo elemento a ser incluso na malha de controle. Este elemento é um compensador antiwindup. Sua finalidade é corrigir a ação de controle, quando esta dá-se sob efeito da saturação. A diferença está que na classe de sistemas considerados neste capítulo, apenas a ação de controle está sujeita a atraso. Assim sendo a estabilidade entrada-estado do sistema em malha fechada independente do atraso implica de certa forma na estabilidade entrada-estado do sistema independente do controle. Por esta razão, ilustra-se a metodologia de síntese de compensadores antiwindup desenvolvida neste capítulo com sistemas estáveis em malha aberta. Apresenta-se os resultados principais na forma de teoremas - síntese de antiwindup estático, dinâmico racional e não racional, localmente estabilizantes. Estes resultados foram estendidos ao escopo global da estabilidade, e enunciados na forma de corolários. Um problema de otimização de interesse foi proposto, consistindo na minimização de um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2^2 de $w(t)$ para $z(t)$, para perturbações admissíveis. Exemplos numéricos ilustraram os resultados deste capítulo, em especial o desempenho da saída regulada do sistema $z(t)$, em função da entrada de controle $u(t)$, sob ação de uma perturbação admissível $w(t)$.

Os resultados deste capítulo foram desenvolvidos mediante um método baseado no Lema de Projeção para sintetizar um compensador antiwindup dinâmico racional e um não racional para um sistema com atraso na entrada. O método de síntese do compensador antiwindup estático foi baseado em uma transformação de similaridade proposta em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH., 2005). Em todos os casos, condições suficientes para a existência de uma solução foram apresentadas e diretamente obtidas em forma de LMI. A solução proposta garante que as trajetórias do sistema não divergem quando sujeito a perturbações admissíveis. Problemas de otimização para a determinação numérica dos parâmetros deste compensador antiwindup foram apresentados. Exemplos numéricos ilustraram a metodologia proposta e os resultados obtidos.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho considerou-se métodos de síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso no estado e entrada, saturação na entrada de controle e sujeitos à perturbação limitada em norma \mathcal{L}_2 . Todas as condições propostas são independentes do atraso e expressas em LMIs. Todos os resultados foram obtidos para o escopo local da estabilidade, e depois estendidos para o caso global. Como problema de otimização, propôs-se a maximização da tolerância à perturbações \mathcal{L}_2 , atenuação do ganho \mathcal{L}_2 da perturbação para a saída regulada do sistema, e a maximização da projeção da região de atração da origem nos estados da planta. Exemplos numéricos ilustraram os métodos propostos.

No Capítulo 3, considerou-se o problema de síntese de compensadores antiwindup dinâmicos racionais para sistemas com atraso nos estados sujeitos a perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 . Poucos são os trabalhos que consideram a síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso no estado e saturação na entrada de controle. Em especial, (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) considera a síntese de um antiwindup estático. Em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008) havia sido proposto para este problema, um método de síntese de compensador antiwindup dinâmico não racional, sendo que a síntese de um compensador dinâmico racional através daquela metodologia requereria a solução de BMIs. Isto torna o problema não convexo, e portanto a otimização de algum critério linear de desempenho pode encontrar um mínimo local. A proposição de um método de síntese de um compensador antiwindup racional para este problema é inédita. Os resultados deste capítulo foram publicados em (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009). A contribuição apresentada neste capítulo foi a proposta de um método para a síntese de um compensador antiwindup dinâmico racional, que apresenta condições suficientes expressas diretamente em LMI. Uma vez satisfeitas, estas condições garantem a existência de um compensador antiwindup, bem como a estabilidade entrada-estado do sistema em malha fechada, sujeito a perturbações admissíveis e condições iniciais contidas em um conjunto tão grande quanto possível. Também, na ausência de perturbações, a origem do sistema é garantidamente assintoticamente estável. Estas garantias são independentes do atraso.

No Capítulo 4, apresentou-se um *framework* genérico que possibilita a síntese dos resultados de (GOMES DA SILVA JR. et al., 2009), bem como o caso não racional abordado em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008), a partir de uma única configuração geral, contendo amplos graus de liberdade. A partir deste *framework*, é possível a síntese de compensadores dinâmicos não racionais, racionais, estáticos, com injeção de um sinal antiwindup nos estados do controlador, bem como na saída de controle. Estes resultados foram apresentados em (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2010b). As condições apresentadas para a existência de uma solução, são suficientes, e independentes

do atraso.

Poucos são os trabalhos que consideram a síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso e saturação na entrada. Em especial, poucos consideram a síntese mediante condições expressas em LMIs. Em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH., 2005) considera-se a síntese de um compensador antiwindup estático, porém para um sistema livre de perturbações. Em (CAO; WANG; TANG, 2007) considera-se a síntese de um compensador antiwindup estático para um sistema sujeito a atraso na entrada e no estado, porém, novamente, em um sistema livre de perturbações. Nestes casos, a ocorrência de perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 em tais sistemas anula garantias de que a origem do sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Em (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005) considera-se a síntese de antiwindup dinâmico que replica a estrutura da planta, para sistemas com atraso na entrada e saída, sujeito a perturbações e incertezas no modelo. Todavia, a metodologia de síntese do compensador não é baseada em LMIs, portanto critérios adicionais de desempenho e robustez, não podem ser facilmente adicionados. No Capítulo 5, considerou-se o problema de síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso e saturação na entrada, sujeitos a perturbações limitadas em norma \mathcal{L}_2 . Apresentamos resultados para a síntese de compensadores estáticos, dinâmicos racionais e dinâmicos não racionais. O método de síntese apresentou condições suficientes expressas em LMI que uma vez satisfeitas garantem a existência do compensador antiwindup, bem como a estabilidade entrada-estado do sistema em malha fechada, independente do atraso.

6.1 Trabalhos futuros

Este trabalho é parte integrante de uma linha de pesquisa na síntese de compensadores antiwindup. Por exemplo, com relação a (BENDER, 2006) ele representa uma extensão dos resultados de síntese de antiwindup para sistemas com atraso. A continuidade destes trabalhos possibilita caminhos distintos. Os especialmente interessantes são apresentados a seguir:

- *framework* genérico para sistemas com atraso na entrada, com o antiwindup dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau) + D_a \psi(y_c(t)) \\ z_a(t) &= E_a x_a(t) + E_{a,d} x_a(t - \tau) + F_a \psi(y_c(t)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Neste caso a idéia é propor uma metodologia de síntese de um compensador antiwindup como em (6.1) aplicável também a sistemas instáveis em malha aberta. Neste caso, a metodologia é dependente do atraso. Por conseguinte, as condições que garantem a existência de um compensador antiwindup (6.1) que resolve os Problemas 3.1 (estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado) e 3.2 (estabilidade interna) apresentam dependência explícita do valor do atraso, τ . Desta forma, pode-se considerar outro funcional de Liapunov-Krasovskii, ao invés do funcional utilizado ao longo deste trabalho.

- extensão para o caso dependente do atraso dos resultados dos Capítulo 4 e 5, utilizando funcionais como em (FRIDMAN; NICULESCU, 2007).
- consideração da compensação estática com atraso: $y_a(t) = D_a \psi(y_c(t - \tau))$.

- extensão para o caso com atraso na entrada e nos estados idênticos - caso TCP (ARIBA; LABIT; GOUAISBAUT, 2008), dos resultados do Capítulo 3.
- extensão para o caso discreto dos resultados do Capítulo 3, a exemplo de (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2007b), que estende (BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2007a) para o caso discreto.

REFERÊNCIAS

ARIBA, Y.; LABIT, Y.; GOUAISBAUT, F. Design and Performance Evaluation of a State-Space Based AQM. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATION THEORY, RELIABILITY AND QUALITY OF SERVICE, 2008. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2008. p.89–94.

ÅSTRÖM, K. J.; RUNDQWIST, L. Integrator windup and how to avoid it. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1989, Pittsburgh, PA. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1989. p.1693–1698.

BATEMAN, A.; LIN, Z. An analysis and design method for linear system under nested saturation. **System and Control Letters**, [S.l.], v.48, p.41–52, 2002.

BENDER, F. A. **Técnicas de Compensação Dinâmica para Sistemas Lineares com Saturação de Controle**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Acceleration-Bounded Control Design for Actuator Fault Prevention. In: IEEE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 37., 2007, Baltimore, USA. **Proceedings...** New York, 2007.

BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Acceleration-Bounded Control for Discrete Time Systems. In: IEEE SSSC'07, 37., 2007, Foz do Iguaçu, BR. **Proceedings...** New York, 2007.

BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA JR., J. M. **Output feedback controller design for continuous time linear systems with amplitude and rate control constraints**. to appear in Asian Journal Control.

BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA JR., J. M. A convex framework for the design of dynamic anti-windup for state-delayed systems. In: ACC'2010, 2010, Baltimore. **Proceedings...** New York, 2010.

BERNSTEIN, D. S.; MICHEL, A. N. A chronological bibliography on saturating actuator. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.5, p.375–380, 1995.

CAMPO, P. J.; MORARI, M.; NETT, C. N. Multivariable anti-windup and bumpless transfer: a general theory. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1989, Pittsburgh. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1989. p.1706–1711.

CAO, Y.; LIN, Z.; HU, T. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation. **IEEE Trans. on Circ. and Syst. I**, [S.l.], v.49, p.233–240, 2002.

CAO, Y.; WANG, Z.; TANG, J. Analisis and Anti-Windup Design for Time-Delay Systems Subject to Input Saturation. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHATRONICS AND AUTOMATION, 2007., 2007, Harbin, CN. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2007.

CASTELAN, E.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; QUEINNEC, I. \mathcal{L}_2 -Stabilization of continuous-time systems with saturating actuators. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], v.16, p.935–944, 2006.

CHEN, B. S.; WANG, S. S.; LU, H. C. Stabilization of time-delay systems containing saturating actuators. **Int. J. of Contr.**, [S.l.], v.47, p.867–881, 1988.

CHOI, H. H.; CHUNG, M. J. An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems. **Automatica**, Kidlington, v.33, p.737–739, 4 1997.

DE OLIVEIRA, M.; GEROMEL, J. Synthesis of Non-rational Controllers for Linear Delay Systems. **Automatica**, [S.l.], v.40, n.2, p.171–188, 2004.

DE SOUZA, C. E.; LI, X. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems. **Automatica**, New York, v.35, p.1313–1321, 7 1999.

FERTIK, H. A.; ROSS, C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. **ISA Transactions**, [S.l.], v.6, p.317–328, 1967.

FLOYD, S.; JACOBSON, V. Random Early Detection gateways for Congestion Avoidance. **IEEE/ACM Transactions on Networking**, [S.l.], v.1, n.4, p.397–413, 1993.

FRIDMAN, E.; NICULESCU, S.-I. On Complete Lyapunov-Krasovskii functional techniques for uncertain systems with fast-varying delays. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], 2007.

FRIDMAN, E.; PILA, A.; SHAKED, U. Regional stabilization and H_∞ control of time-delay systems with saturating actuators. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], v.13, p.885–907, 2003.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], p.1–20, 1994.

GARONE, E.; SINOPOLI, B.; CASAVOLA, A. LQG control for distributed systems over TCP-like erasure channels. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2007, New Orleans. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2007. p.44–49.

GHIGGI, I.; BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Dynamic Non-rational Anti-windup for Time-delay Systems with Saturating Inputs. In: IFAC 2008, 2008, Seoul. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2008.

GIANNETTI, E. **O valor do amanhã**. 1st.ed. São Paulo, SP: Companhia das Letras, 2008. p.143.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; BENDER, F. A.; TARBOURIECH, S.; J.-M. Biannic. Dynamic Antiwindup for State Delay Systems: an lmi approach. In: IEEE CDC, 2009. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2009.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; GHIGGI, I.; TARBOURIECH, S. Non-rational dynamic output feedback for time-delay system with saturating inputs. **Int. J. of Contr.**, [S.l.], p.557–570, Apr. 2008.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; LESCHER, F. Time-varying dynamic controllers for discrete-time linear systems with input saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 16., 2005, Prague, Czech Republic. **Proceedings...** Kidlington: Oxford, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; LIMON, D.; ALAMO, T. Dynamic Output Feedback for Discrete-Time Systems under Amplitude and Rate Actuator Constraints. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 44., 2005, Sevilla, Spain. **Proceedings...** New York, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup Design with Guaranteed Regions of Stability: an LMI-based approach. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, [S.l.], v.50, n.1, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH., S. Anti-Windup design with guaranted regions of stability: an lmi-based approach. **IEEE Trans. on Automatic Control**, [S.l.], v.50, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Local Stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, New York, v.48, n.5, p.842–847, 2003.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Anti-windup Design for Time-delay Systems Subject to Input Saturation. An LMI-based Approach. **European Journal of Control**, [S.l.], v.12, p.622–634, Dec. 2006.

GRIMM, G.; HATFIELD, J.; POSTLETHWAITE, I.; TEEL, A.; TURNER, M.; ZACCARIAN, L. Anti-windup for stable systems with input saturation: an LMI-based synthesis. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, [S.l.], v.48, n.9, p.1500–1525, 2003.

GU, K.; CHEN, J.; KHARITONOV, V. **Stability of time-delay systems**. 1.ed. Boston: Birkhauser, 2003. v.1.

HALE, J.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to functional differential equations**. 1.ed. New York: Springer-Verlag, 1993. v.1.

HANUS, R.; KINNAERT, M.; HENROTTE, J. L. Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method. **Automatica**, [S.l.], v.23, p.729–739, 1987.

HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation: analysis and design**. Boston: Birkhauser, 2001.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Kidlington, v.38, p.351–359, 2002.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. **Syst. & Contr. Lett.**, New York, v.45, p.97–112, 2 2002.

IVANESCU, D.; DUGARD, L.; DION, J. **Stability of linear time-delay systems. a time domain approach. theory and examples**. 1.ed. Grenoble, France: Laboratoire D'Automatique de Genoble, 2000. v.1.

KALMAN, R. E. Optimal control of saturating systems by intermittent action. In: IRE WESCON CONVENTION RECORD, 1957, San Francisco, USA. **Anais...** IEEE, 1957. v.1, p.130–135.

KAPILA, V.; GRIGORIADIS, K. **Actuator Saturation Control**. [S.l.]: Marcel Dekker, Inc., 2002.

KAPILA, V.; HADDAD., W. M. Fixed-structure controller design for systems with actuator amplitude and rate nonlinearities. **Int. J. of Contr.**, Kidlington, v.73, p.520–530, Jun 2000.

KAPOOR, N.; TEEL, A. R.; DAOUTIDIS, P. An anti-windup design for linear systems with input saturation. **Automatica**, [S.l.], v.34, n.5, p.559–574, 1998.

KIYAMA, T.; IWASAKI, T. On the use of multi-loop circle criterion for saturating control synthesis. **System and Control Letters**, North-Holland, v.41, p.105–114, 2000.

KOLMANOVSKII, V.; NICULESCU, S. I.; RICHARD, J. P. On the Liapunov Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems. **Int. J. of Contr.**, New York, v.72, p.374–384, 4 1999.

KOTHARE, M. V.; MORARI, M. Multiplier Theory for stability analysis of Anti-windup control systems. **Automatica**, [S.l.], v.35, p.917–928, 1999.

LEE, K. B.; SCHNEEMAN, R. D. Internet-based distributed measurement and control applications. **IEEE Instrumentation et Measurement Magazine**, [S.l.], v.2, n.2, p.23–27, 1999.

LEHMAN, B.; SHUJAEI, K. Delay independent stability conditions and decay-estimates for time-varying functional-differential equations. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, New York, v.39, p.1673–1676, 8 1994.

LIN, Z. Semi-global stabilization of linear systems with position and rate-limited actuators. **Systems and Control Letters**, North-Holland, v.30, p.1–11, 1997.

MOON, Y.; PARK, P.; KWON, W.; LEE, Y. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state delayed systems. **Int. J. of Contr.**, [S.l.], v.74, p.1447–1455, 2001.

NGUYEN, T.; JABBARI, F. Output Feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. **Automatica**, Kidlington, v.36, p.1339–1346, 2000.

NICULESCU, S.-I. **Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach**. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2001.

NICULESCU, S.-I.; DION, J. M.; DUGARD, L. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, [S.l.], v.41, n.5, p.742–747, 1996.

OUCHERIAH, S. Global stabilization of a class of linear continuous time delay systems with saturating controls. **IEEE Trans. on Circ. and Syst. I**, [S.l.], v.43, n.12, p.1012–1015, 1996.

PADHYE, J.; FIROIU, V.; TOWSLEY, D.; KUROSE, J. Modeling TCP Throughput: a simple model and its empirical validation. In: ACM SIGCOMM'98, 1998. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1998.

PARK, J.-K.; CHOI, C.-H.; CHOO, H. Dynamic anti-windup method for a class of time-delay control systems with input saturation. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], v.10, p.457–488, 2000.

PARK, P. A Delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invarying delays. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, [S.l.], v.44, n.4, p.876–877, 1999.

RAYNAUD, H.-F.; KULCSIR, C.; HAMMIL, R. **State-Space Models for Control and Identification**. Advances in Communication Control Networks.ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2004. p.177–197.

RICHARD, J. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, [S.l.], v.39, p.1667–1604, 2003.

ROOS, C.; BIANNIC, J.-M. A convex characterization of dynamically-constrained anti-windup controllers. **Automatica**, [S.l.], p.2449–2452, Jan 2008.

SALA, A.; VALLES, M.; DIEZ, J. L. Remote TCP/IP-based process control with time-varying sampling period. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2006. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2006. p.2081–2086.

SCHERER, C. **Trends in Control, A European Perspective**. [S.l.]: Springer Verlag., 1995. p.173–216.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, [S.l.], v.42, n.7, p.896–911, 1997.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output feedback control via LMI optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.42, p.896–911, July 1997.

SHAKED, U.; YAESH, I.; DE SOUZA, C. E. Bounded real criteria for linear time-delay systems. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, New York, v.43, p.1016–1022, 7 1998.

STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A. Output regulation for linear systems to amplitude plus rate saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.9, p.631–657, Oct. 1999.

TANENBAUM, A. S. **Computer Networks**. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 2002.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. **Control of uncertain systems with bounded inputs**. [S.l.]: Springer Verlag., 1997.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMIs. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, Phoenix, USA, v.45, n.1, p.105–111, 2000.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; GARCIA, G. Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], v.14, p.665–682, 2004.

TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. **IEEE Trans. Autom. Contr.**, [S.l.], v.51, p.1364–1371, 2006.

TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I.; GARCIA, G. Stability region enlargement through anti-windup strategy for linear systems with dynamics restricted actuator. **Int. J. of Systems and Science**, [S.l.], v.37, n.2, p.79–90, 2006.

TARBURIECH, S.; TURNER, M. C. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, [S.l.], p.1–19, 2009.

TEEL, A. R. Anti-windup for exponentially unstable linear systems. **Int. J. of Rob. and Nonlin. Contr.**, [S.l.], v.9, n.10, p.701–716, 1999.

TEEL, A. R.; KAPOOR, N. Uniting Local and Global Controllers. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Brussels, Belgium. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1997.

TISSIR, E.; HMAMED, A. Further results on the stabilization of time delay systems containing saturating actuators. **Int. J. of Syst. Sci.**, [S.l.], v.23, p.615–622, 1992.

TYAN, F.; BERNSTEIN, D. S. Dynamic output feedback compensation for linear systems with independent amplitude and rate saturation. **International Journal of Control**, Abingdon, v.67, p.89–116, Jan. 1997.

VELASCO-VILLA, M.; MAZA-CASAS, L. State prediction for a class of time-delay unstable linear systems. In: IEEE CDC, 2005, Seville, ES. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2005.

WU, F.; LIN, Z.; ZHENG, Q. Output Feedback Stabilization of LTI and LFT Systems with Actuator Saturation. In: IEEE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 24., 2005, Oregon, USA. **Proceedings...** New York, 2005. v.5, p.3385–3390.

ZACCARIAN, L.; NESIC, D.; TEEL, A. \mathcal{L}_2 anti-windup for linear dead-time systems. **Syst. & Contr. Lett.**, [S.l.], v.54, n.12, p.1205–1217, 2005.

ZACCARIAN, L.; TEEL, A. R. A common framework for antiwindup, bumpless transfer and reliable designs. **Automatica**, New York, v.38, 10 2002.