UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

TEOREMAS DE ENVELOPE DE MILGROM E SEGAL: UMA APLICAÇÃO A DESENHO DE MECANISMO

João Frois Caldeira

Porto Alegre
2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

TEOREMAS DE ENVELOPE DE MILGROM E SEGAL: UMA APLICAÇÃO A DESENHO DE MECANISMO

João Frois Caldeira
Orientador: Jorge Paulo Araújo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do grau de Mestre em Economia.

Porto Alegre
2005

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS

C146t Caldeira, João Frois
Teoremas de envelope de Milgrom e Segal : uma aplicação a desenho de mecanismo / João Frois Caldeira. – Porto Alegre, 2005.
82 f.

Orientador: Prof. Jorge Paulo Araújo.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2005.

1.Economia matemática. 2.Teoria do comportamento econômico. 3. Incentivos. 4. Modelo matemático. I. Araújo, Jorge Paulo. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 519.86

Resumo

Este trabalho estuda a teoria de desenho de mecanismo. Desenho de mecanismo passou a fazer parte da teoria econômica à partir da década de 60. Seu desenvolvimento deve-se, em grande parte aos trabalhos de Vickrey, Clarke e Groves relacionados a problemas de incentivo.

Esta dissertação apresenta os principais desenvolvimentos teóricos na área de desenho de mecanismo, destacando a importância dos conhecidos teoremas de envelope para estes problemas. É apresentada também uma nova versão do teorema de envelope desenvolvida por Milgrom e Segal que pode amplamente ser empregada em problemas de desenho de mecanismos. Essa nova versão do teorema de envelope de Milgron e Segal permite relaxar algumas hipóteses restritivas da teoria de desenho de mecanismos, permitindo obter novos resultados e explorar aqueles já estabelecidos, principalmente em problemas relacionados a desenhos de leilões.

Palavras chave: Desenho de mecanismo, Compatibilidade de Incentivo, Eficiência, Teorema de Envelope de Milgron e Segal.

Abstract

This work studies the mechanism design theory. Mechanism design started to be part of the economic theory since the 60´s. Its development occurred, mainly, because of Vickrey, Clarke and Groves' work, related to incentive problems.

This study presents the major theoretical developments in mechanism design, pointing out the importance of the known envelope theorems for these problems. A new version of the envelope theorem built by Milgrom and Segal, which can be widely used in problems of mechanism design, is also presented. This new version permits to relax some restrictive hypotheses of the mechanism design theory, allowing to get new results and to explore those already established, mostly about problems related to auction designs.

Key words: Mechanism design, Incentive compatible, Efficiency, Milgrom and Segal's Envelope Theorems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os Problemas de Incentivos surgem na teoria econômica sob várias formas. Groves (1973) afirma que esse problema apareceu inicialmente na teoria econômica com o debate conhecido como controvérsia socialista. Mas segundo o próprio Groves os problemas de incentivo podem ser encontrados em qualquer organização, das quais uma economia centralmente planejada é apenas um caso extremo. Alcançar eficiência quando os agentes econômicos buscam seus interesses individuais é um problema econômico fundamental. Portanto criar estruturas de incentivos com o objetivo de fazer com que esses agentes, que visam seu interesse próprio, tomem decisões que levem à eficiência econômica é um problema comum em economia. Muitos trabalhos foram desenvolvidos tratando de problemas de incentivos em modelos de alocação de bens públicos. Também foram amplamente analisados mecanismos ótimos de alocação de recursos gerais e incentivos individuais.

Um teorema provado inicialmente por Hurwicz (1972) para uma economia de trocas puras com bens privados, e posteriormente provado por Ledyard e Roberts (1974) para uma economia com bens públicos afirma o seguinte: em geral não existe mecanismo de alocação de recursos que seja "individualmente racional", ótimo de Pareto o qual é também "individualmente incentivo compatível" para os agentes[1]. Segundo Groves (1977) esse teorema implica que o comportamento competitivo não é um comportamento ótimo.

A primeira formulação de um mecanismo de incentivo foi desenvolvida por Vickrey (1961). Vickrey desenvolveu seu mecanismo como um procedimento para evitar especulação de monopolistas e monopsonistas em licitações públicas. Aproximadamente uma década mais tarde, Clarke (1971) e Groves (1969), independentemente redescobriram tais mecanismos. Clarke (1971) desenvolveu um exemplo particular desses mecanismos em um modelo de equilíbrio parcial. O problema era para determinar a quantidade ótima de um bem público sobre a suposição restritiva de que a elasticidade renda da demanda pelo bem público é identicamente zero. Groves (1971) desenvolveu e formulou analiticamente a classe geral desses mecanismos de incentivos ótimos no contexto de modelos de decisões gerais de times. Os mecanismos de Groves foram desenvolvidos para fornecer um método de avaliação de tomadores de decisões descentralizados. O objetivo era criar uma estrutura de incentivos que levasse esses tomadores de decisões a agirem como um time. Mais tarde Groves e Loeb (1975) e Groves (1976) ampliaram esses mecanismos para problemas de decisões de escolha

[1] Esses conceitos são definidos em Hurwicz (1972).

ótima em modelos de produção com presença de externalidades, e níveis de escolha ótima de insumos públicos na produção.

Todos esses modelos são modelos de equilíbrio parcial nos quais *payoff* para os diferentes participantes (tomadores de decisão) pode ser comparado diretamente e transferido livremente. Na linguagem da teoria dos jogos, esses modelos são jogos não cooperativos com n participantes. E utilidade é transferível livremente. Para esse grupo de modelos Green e Laffont (1977) mostraram que a classe de mecanismos de incentivo formulada por Groves inclui todos os mecanismos determinísticos possíveis para induzir agentes a reportar verdadeiramente e, possibilitando dessa forma, alcançar decisões ótimas.

Groves e Ledyard (1977) desenvolveram um modelo que distinguia dos demais por ser um modelo de equilíbrio geral, no qual o efeito renda é considerado (isto é, utilidade não é livremente transferível). Esse modelo assegurava também que o orçamento do governo estava sempre equilibrado, que era requerido pela lei de Walras para ótimo de Pareto.

Groves e Ledyard criaram um mecanismo para determinar alocações eficientes de bens públicos quando as preferências são desconhecidas e os consumidores são livres para informar errado suas demandas por bens públicos. Eles provaram o teorema básico do bem-estar para este modelo: Se os consumidores são competitivos em mercados para bens privados e seguem um comportamento de Nash nas escolhas das demandas para reportar ao mecanismo, então os equilíbrios são ótimos de Pareto.Posteriormente Groves e Ledyard (1980) mostraram que o resultado obtido por eles não era vazio, mostrando que este equilíbrio existirá para uma grande classe de economias.

Já Laffont e Maskin (1980) mostram como um número de questões sobre mecanismos de estratégias dominantes em modelos com bens públicos, podem ser convenientemente formulados como sistemas de equações diferenciais parciais. A questão da existência de mecanismos com estratégias dominantes com algumas propriedades desejáveis tornam-se equivalentes a integrabilidade destas questões. Essa formulação possibilitou derivar de forma mais simples e tornar mais fortes uma variedade de resultados em incentivos. Permitiu também desenvolver novos teoremas para a estrutura matemática comum a várias questões aparentemente diferentes.

Na mesma linha de trabalhos, Walker (1980) generaliza o resultado de Gibbar (1973) e Satterthwaite (1975) que mostraram que não é possível desenhar instituições satisfatórias (ou mecanismos de decisão social) que sejam imunes a manipulação estratégica. Gibbar e Satterthwaite demonstraram que sob qualquer mecanismo razoável, um participante às vezes, poderia agir como se suas preferências diferentes das verdadeiras e assegurar um resultado que ele prefira sobre o resultado do caso em que ele informa verdadeiramente suas preferências. Walker afirma que o resultado de Gibbar e Satterthwaite se aplica apenas a problemas nos quais existe um número finito de alternativas sociais, e nos quais, nenhuma preferência individual sobre as alternativas sociais pode ser excluída de consideração *a priori*.

Walker generalizou esse resultado e mostrou que a propriedade de estratégia dominante pode geralmente ser obtida. Bastando para isso apenas relaxar a exigência de ótimo de Pareto para alguns resultados. O resultado de Walker inclui modelos padrões de bens públicos, e demonstra que situações econômicas envolvendo bens públicos são inerentemente manipulávies. Não se pode criar um mecanismo que sempre forneça alocações eficientes de Pareto e financiamento de bens públicos, e que ao mesmo tempo seja imune a manipulações estratégicas.

Os resultados citados estão entre aqueles que consolidaram a teoria dos desenhos de mecanismos. Myerson (1981) foi o primeiro a aplicar desenho de mecanismo à teoria dos leilões, desenhando leilões para maximizar receita. A partir daí muitos outros trabalhos foram desenvolvidos na área, e grande parte da teoria dos leilões passou a ser modelada sob a ótica dos desenhos de mecanismos, o que foi de grande importância para o desenvolvimento e fortalecimento da teoria dos leilões.

Em todo o desenvolvimento da teoria de desenho de mecanismo foi usado um vasto instrumental matemático, a se destacar os teoremas de envelope. O uso dos teoremas de envelope trouxe importantes conseqüências, a se destacar o lema de Holmstrom e o lema de Myerson, os quais são análogos da teoria de incentivo aos famosos lema de Hotelling e lema de Sheppard da teoria da demanda. Segundo Milgrom (2004) o uso de teoremas de envelope permite provas curtas de muitos resultados famosos e revela relações próximas entre eles. Entre estes resultados está o teorema de Green-Laffont-Holmstrom, que afirma que os mecanismos *VCG* são os únicos mecanismos eficientes em estratégia dominante. O teorema de Myerson-Satterthwaite sobre a inevitável ineficiência de barganha em informação incompleta, o teorema de Jehiel-Moldanavu sobre a impossibilidade de implementar resultados eficientes com seleção adversa, e os teoremas de *payof*f e receita equivalência. Também o teorema do leilão ótimo de Myerson-Riley-Samuelson e o teorema fraco dos cartéis de McAfee-McMillan.

Neste trabalho apresentamos a teoria dos desenhos de mecanismos. E mostramos como as novas versões para os teoremas de envelope desenvolvido por Milgrom e Segal (2002) podem ser usadas para obter a solução de problemas de desenho de mecanismos de uma forma menos restritiva do que a estabelecida anteriormente. Além dessa introdução essa dissertação é composta por quatro capítulos. No capítulo 1 apresentamos as ferramentas matemáticas básicas empregadas na teoria dos desenhos de mecanismos, e os novos resultados de Milgrom e Segal (2002). No capítulo 2 apresentamos uma versão geral do modelo de desenho de mecanismos e mostramos como os resultados de Milgrom e Segal podem ser usados. No capítulo 3 apresentamos os mecanismos de Vickrey, Clarke e Groves, que é um referencial para a teoria de desenho de mecanismos. Já no capítulo 4 apresentamos algumas das principais aplicações e exemplos de desenhos de mecanismos, com destaque para sua aplicação á teoria dos leilões, onde os novos resultados de Milgrom e Segal podem ser empregados com sucesso.

2 DEFINIÇÕES BÁSICAS E OS TEOREMAS DE MILGROM E SEGAL

Neste capítulo apresentamos os resultados matemáticos básicos empregados na teoria de desenhos de mecanismos exposta posteriormente Mostramos também os novos resultados obtido por Milgrom e Segal (2002) que desenvolveram uma versão para o teorema do envelope na forma integral, que é uma ferramenta indispensável na análise de desenhos de mecanismos. Estes resultados são parte do que genericamente conhecemos como teoremas de envelope.

Estes teoremas estabelecem a derivabilidade da função-valor ótimo em problemas de otimização parametrizada e fornecem uma fórmula para esta derivada.

Inicialmente apresentamos uma definição geral de correspondências e definimos o conceito de hemicontinuidade, posteriormente apresentamos o teorema de Rademacher, de grande importância quando se deseja obter derivadas de funções côncavas. Em seguida mostramos uma forma de se obter as derivadas direcionais de funções côncavas. Na última seção do capítulo apresentamos os novos resultados obtidos por Milgrom e Segal em problemas de otimização e também uma generalização do lema de Scheinkman, concluindo as ferramentas matemáticas básicas para a análise de desenhos de mecanismos.

2.1 Correspondências

Em problemas de otimização, podem existir vários pontos ótimos. Para cada conjunto de valores dos parâmetros podem existir inúmeras soluções e, portanto, a relação que associa os parâmetros aos pontos pode não ser uma função. Correspondências aparecem na literatura matemática e econômica com diversas designações: set-value functions, multivalued functions, multifunctions, point-to-set maps, são algumas das designações empregadas.

Formalmente, uma correspondência $F : X \to Y$, do conjunto X no conjunto Y, é uma parte do plano cartesiano $X \times Y$, isto é, $F \subseteq X \times Y$. Além disso, pode ser definida como: dados os conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^N$, uma correspondência $F : X \to Y$ é uma regra que associa um conjunto $F(x) \subseteq Y$ para cada $x \in X$. Observe que funções do tipo $f : X \to Y$ são um tipo particular de correspondência de X em Y tais que para a cada $x \in X$ associa apenas um $y \in Y$, isto é, $(x, y),\ (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Dada uma correspondência $F: X \to Y$, definimos dois tipos diferentes de imagens inversas de $B \subseteq Y$:

$$F^{-}(B) = \{x \in X \,/\, F(x) \cap B \neq \emptyset;$$
$$F^{+}(b) = \{x \in X \,/\, F(x) \subseteq B\}.$$

Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que F é hemicontínua superior (*uhc*) em $x_0 \in X$ se para toda vizinhança aberta $V \subseteq Y$ de $F(x_0)$, existe uma vizinhança aberta $U \subseteq X$ de x_0 tal que se $x \in U$ então $F(x) \subseteq V$, isto é, as imagens inversas superiores de vizinhanças abertas de $F(x_0)$ são vizinhanças abertas de x_0. De forma similar, define-se que F é hemicontínua inferior (*lhc*) em x_0 se para todo aberto $V \subseteq Y$ tal que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ existe vizinhança aberta $U \subseteq X$ de x_0 tal que se $x \in U$ então $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Dito de outra forma, as imagens inversas inferiores de abertos que interceptam $F(x_0)$ são vizinhanças abertas de x_0. se diz que F é hemicontínua (*hc*) (ou simplesmente contínua) em x_0 se for *uhc* e *lhc* em x_0.

Dizemos que F é hemicontínua superior em X se for hemicontínua superiro em todos os pontos de X. De maneira similar, se diz que F é hemicontínua inferior em X se for hemicontínua inferior em todos os pontos de X. Neste caso, podemos caracterizar a hemicontinuidade superior dizendo que F é hemicontínua superior se a imagem inversa superior $F^{+}(G)$ de todo aberto G de Y é aberto de X, e F é hemicontínua inferior $F^{-}(G)$ de todo G de Y é aberto de X.

Se $F(x)$ for um conjunto fechado ou compacto para todo $x \in X$, dizemos que F é valor-fechado ou valor-compacto. Se Y for um espaço vetorial e $F(x)$ for convexo para todo $x \in X$, dizemos que F é valor-convexo.

Se o gráfico de F,

$$graf(F) = \overline{F} = \{(x, y) \in (X, Y) \,/\, y \in F(x)\}$$

é um subconjunto fechado de $X \times Y$ dizemos que F é fechado. Se X e Y são espaços vetoriais e $\overline{F}$ for convexo dizemos que F é convexa.

Passamos agora a estabelecer a concavidade da função valor-ótimo em um problema de maximização de uma função objetivo côncava sobre uma correspondência convexa. Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 1.1: Dizemos que $g : X \to Y$ é uma correspondência convexa se $x_1, x_2 \in X$ tal que $y_1 \in g(x_1)$ e $y_2 \in g(x_2)$ implica $[(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \in g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2);$ para $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dada esta definição, vamos apresentar um lema que estabelece a concavidade da *V*:

Lema 1.1: Seja o seguinte problema de otimização, assumindo que existe $y^*(x) \in g(x)$ que soluciona:

$$V(x) = \max f(x, y)$$
$$s.a.\ y \in g(x)$$

onde $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função côncava e

$g : X \to Y$ é uma correspondência convexa.

Então, podemos afirmar que *V*(*x*) é uma função côncava.

Prova:

$$V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2);\ y^*((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2);$$

Como $g(\cdot)$ é convexa então:

$$(1-\lambda)y^*(x_1) + \lambda y^*(x_2) \in g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)\text{, e,}$$

$$V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2);\ (1-\lambda)y^*(x_1) + \lambda y^*(x_2)$$

Devido à concavidade da *f*:

$$V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) f(x_1, y_1^*) + \lambda f(x_2, y_2^*)$$

Então: $V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)V(x_1) + \lambda V(x_2)$,

Logo *V* é côncava.

Agora apresentamos um teorema que de grande importância para se obter derivadas de funções-valor ótimo como o apresentado acima. Trata-se do notável teorema de Rademacher, que afirma que uma função Lischitz é diferenciável quase sempre em seu domínio.

Teorema 1.1 – Teorema de Rademacher: Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função localmente Lipschitz[2]. Então *f* é diferenciável no sentido de lebesque, quase sempre em seu domínio.

2.2 Funções Côncavas e suas Derivadas Direcionais

Nesta seção desenvolvemos e mostrar alguns resultados referentes a funções côncavas e o comportamento de suas derivadas direcionais.

Vamos considerar uma função côncava. Sejam três pontos distintos, a saber: $x_1,\ x_2$ e x_3. Façamos então cordas abaixo dessa função ligando os três pontos dois a dois. O objetivo é extrair relações entre as inclinações das referidas cordas. Um resultado conhecido sobre funções côncavas na reta nos diz que:

Lema 1.2: Seja a função $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. φ é côncava $\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}$$

para todo $x_1,\ x_2$ e x_3 tal que $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3;\ \lambda \in (0,1)$.

Este resultado pode ser generalizado para funções côncavas definidas em convexos do $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.3: $f : D^{convexo} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f é côncava $\Leftrightarrow$ é côncava quando restrita aos segmentos de reta que unem os pontos de *D*.

Sejam $x^0,\ x'$ e $x'' \in D$, então temos que:

$$\frac{f(x^0)-f(x')}{\left\|x^0-x'\right\|} \geq \frac{f(x'')-f(x')}{\left\|x''-x'\right\|} \geq \frac{f(x'')-f(x^0)}{\left\|x''-x^0\right\|}.$$

---

[2] Funções convexas ou côncavas são localmente Lipschitz.

Essas relações surgem naturalmente da observação das inclinações das retas que unem os três pontos escolhidos. Juntamente com o Lema 1.3 podemos estabelecer o seguinte resultado:

Lema 1.4: Seja $f : D^{aberto,convexo} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f é côncava $\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x'') - f(x^0)}{\|x'' - x^0\|} \geq \frac{f(x'') - f(x')}{\|x'' - x'\|} \geq \frac{f(x^0) - f(x')}{\|x^0 - x'\|}$$

para todo x^0, x' e $x'' \in D$ tal que $x^0 = (1-\lambda)x' + \lambda x''$; $\lambda \in (0,1)$.

Prova:

$\to$ Se f é côncava então f é côncava quando restrita aos segmentos de reta contidos no seu domínio, isto é, $\psi(t) = f((1-t)x' + tx'')$ é côncava para x', $x'' \in D$.

De modo que:

$$\psi(1) = f(x'');$$

$$\psi(\lambda) = f((1-\lambda)x' + \lambda x'') = f(x^0);$$

$$\psi(0) = f(x').$$

Logo:

$$\frac{\psi(\lambda) - \psi(0)}{\lambda} \geq \frac{\psi(1) - \psi(0)}{1} \geq \frac{\psi(1) - \psi(\lambda)}{1-\lambda} \quad (*).$$

Mas:

$$x^0 = (1-\lambda)x' + \lambda x''$$
$$x^0 = x' + \lambda(x'' - x')$$
$$x^0 - x' = \lambda(x'' - x')$$
$$\|x^0 - x'\| = \lambda \|(x'' - x')\|$$
$$\lambda = \frac{\|x^0 - x'\|}{\|x'' - x'\|}$$

$$x^0 - x'' = (1-\lambda)x' + \lambda x''$$
$$x^0 - x'' = (1-\lambda)(x' - x'')$$
$$\|x^0 - x''\| = (1-\lambda)\|(x'' - x')\|$$
$$(1-\lambda) = \frac{\|x^0 - x''\|}{\|x' - x''\|}$$

Substituindo $\psi(t)$, λ e $(1-\lambda)$ em (*) obtemos:

$$\frac{f(x^0) - f(x')}{\frac{\|x^0 - x'\|}{\|x'' - x'\|}} \geq f(x'') - f(x') \geq \frac{f(x'') - f(x^0)}{\frac{\|x'' - x^0\|}{\|x'' - x'\|}}$$

Multiplicando cada termo por $\frac{1}{\|x'' - x'\|}$, temos:

$$\frac{f(x^0) - f(x')}{\|x^0 - x'\|} \geq \frac{f(x'') - f(x')}{\|x'' - x'\|} \geq \frac{f(x^0) - f(x')}{\|x'' - x^0\|}.$$

$\leftarrow$ De maneira similar, se $\psi(\cdot)$ é côncava sobre cada linha $\Rightarrow$ f é côncava.

Como vimos $\psi(t)$ é côncava sobre cada linha, pois:

$$\frac{\psi(\lambda) - \psi(0)}{\lambda} \geq \frac{\psi(1) - \psi(0)}{1} \geq \frac{\psi(1) - \psi(\lambda)}{1 - \lambda}.$$

Como foi mostrado, isto implica na concavidade da *f*.

Outro conceito importante para os problemas que estamos tratando é o conceito de derivadas direcionais. Em funções côncavas, as derivadas direcionais pela direita não podem ser menores que aquelas pela esquerda. Esse resultado está resumido no lema seguinte:

Lema 1.5: $f : D^{aberto,convexo} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; f côncava. Então:

i) existem as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-)$;

ii) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-)$.

Prova:

Por definição:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{t}$$

onde $\vec{u}$ é um vetor e t um escalar.

Lembre-se da seleção de pontos para a função *f* e podemos escrever esses pontos como segue:

$$x' = x^0 + t\vec{u}$$
$$x^0 = x^0$$
$$x'' = x^0 + t''\vec{u}$$

É importante observar que os vetores *x*’ e *x*’’ têm sentidos opostos e aqui convencionamos, sem perder generalidade, que *t*’< 0 e *t*’’> 0. Podemos então escrever:

$$\left\|(x^0 + t''\vec{u}) - x^0\right\| = \left\|t''\vec{u}\right\| = t''\left\|\vec{u}\right\|$$
$$\left\|(x^0 + t'\vec{u}) - x^0\right\| = \left\|t'\vec{u}\right\| = -t'\left\|\vec{u}\right\|$$

Pela concavidade da *f* e usando o lema 1.4:

$$\frac{f(x^0 + t''\vec{u}) - f(x^0)}{t''\left\|\vec{u}\right\|} \le \frac{f(x^0 + t''\vec{u}) - f(x^0 + t'\vec{u})}{(t'' - t')\left\|\vec{u}\right\|} \le \frac{f(x^0) - f(x^0 + t'\vec{u})}{-t'\left\|\vec{u}\right\|}.$$

Então para *t*’< 0 < *t*’’:

$$\frac{f(x^0 + t''\vec{u}) - f(x^0)}{t''\left\|\vec{u}\right\|} \le \frac{f(x^0 + t'\vec{u}) - f(x^0)}{t'\left\|\vec{u}\right\|}$$
$$\frac{f(x^0 + t''\vec{u}) - f(x^0)}{t''\left\|\vec{u}\right\|} \le \frac{f(x^0 + t'\vec{u}) - f(x^0)}{t'\left\|\vec{u}\right\|}$$

Por outro lado, usando também o lema 1.3:

$$\frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{t\left\|\vec{u}\right\|} \ge \frac{f(x^0 + t''\vec{u}) - f(x^0)}{t''\left\|\vec{u}\right\|}, \text{ para } t < t''.$$

Logo:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{t} \text{ existe}^3 \text{ e é igual a } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) = \sup\left\{\frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{t\left\|\vec{u}\right\|};\ t > 0\right\}.$$

[3] Pode ser $+\infty$ caso estejamos num ponto da fronteira do domínio. No caso aqui tratado o domínio é aberto, logo as derivadas são sempre limitadas.

Já para o caso da derivada direcional à esquerda temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{t}.$$

Usando um raciocínio similar ao anterior, mas escolhendo um *x* qualquer entre *x*' e x^0, podemos escrever:

$$-\frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{-t\|\vec{u}\|} \leq -\frac{f(x^0 + t'\vec{u}) - f(x^0)}{-t'\|\vec{u}\|}; \text{ para } t > t', \text{ então:}$$

$$\frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{-t\|\vec{u}\|} \leq \frac{f(x^0 + t'\vec{u}) - f(x^0)}{-t'\|\vec{u}\|}.$$

Logo:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x^0 + t\vec{u}) - f(x^0)}{t} \text{ existe e é } \frac{\partial f}{\vec{\partial}}(x_0^-).$$

Vamos utilizar o fato de que *f* é côncava e que as derivadas direcionais existem. Seja x^0 fixo e seja o mesmo conjunto de pontos escolhidos anteriormente, usando $t' < 0 < t''$:

$$\frac{f(x^0 + t''\vec{u}) - f(x^0)}{t''} \leq \frac{f(x^0 + t'\vec{u}) - f(x^0)}{t'}.$$

Logo, fazendo $t' \to 0^-$ e $t'' \to 0^+$ então: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-)$.

2.3 O Trabalho de Milgrom e Segal (2002)

O teorema do envelope na forma integral tem um papel central na análise dos desenhos de mecanismos. Em livros textos, geralmente o teorema do envelope é apresentado na forma diferenciável e freqüentemente depende de suposições sobre a convexidade ou estrutura topológica do conjunto de escolhas *X*. Tais suposições não são satisfatórias em aplicações para a teoria dos desenhos de mecanismos, porque o problema de escolha de um participante pode não ter a estrutura necessária. Por exemplo, o participante pode ter que escolher uma mensagem para enviar ao operador do mecanismo de um conjunto de mensagens *X* que não tenha uma estrutura interessante. Entretanto, mesmo quando a estrutura de *X* não é um problema, a função-valor máximo, V, pode não ser diferenciável sempre. Para as aplicações em desenhos de mecanismos o que é necessário é um teorema que verifique uma fórmula como a proposta por Milgrom e Segal e apresentada a seguir, sem suposições restritivas no conjunto de escolhas.

Milgrom derivou uma fórmula estudando uma família de problemas de maximização, parametrizados por $t \in [0,1]$, estudando as funções relacionadas como segue:

$$
\begin{aligned}
&V(t) = \sup_{x \in X} u(x,t),\\
&X^*(t) = \{x \in X \,/\, u(x,t) = V(t)\}\\
&x^*(t) \in X^*(t) \text{ para todo } t \text{ tal que } X^*(t) \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

A função *V* é a função valor. Às vezes ela é também chamada a “função envelope” por causa da sua representação gráfica. Se, para cada *x*, plotamos a função $u(x,\cdot):[0,1] \to \mathbb{R}$, então *V* é o envelope superior dessas funções.

A função $X^*(t)$ é o conjunto de soluções ótimas para o problema (correspondência de escolha ótima). Para alguns valores do parâmetro, este conjunto pode ser vazio. Qualquer função $x^*:[0,1] \to X$ satisfazendo a restrição acima é uma *seleção* de X^*. Teoremas de envelope estabelecem uma relação entre a função-valor, *V*, e qualquer *seleção* x^* de X^*.

O primeiro resultado desenvolvido por Milgrom e Segal relaciona as derivadas da função valor a derivada parcial $u_t(x,t)$ da função objetivo com respeito ao parâmetro.

Teorema 1.2: Suponha que $t \in [0,1]$ e $x^* \in X^*(t)$, e suponha que $u_t(x^*,t)$ existe. Se *t* >0 e *V* é diferenciável à esquerda em *t*, então $V'(t^-) \leq u_t(x^*,t)$. Se *t* < 1 e *V* é diferenciável à direita em *t*, então $V'(t^+) \geq u_t(x^*,t)$. Se $t \in (0,1)$ e *V* é diferenciável em *t*, então $V'(t) = u_t(x^*,t)$.

Prova:

Usando (1) e (2) podemos observar que para qualquer $t' \in [0,1]$,

$$u(x^*,t') - u(x^*,t) \leq V(t') - V(t).$$

Pegando $t' \in (t,1)$, dividindo os dois lados da equação acima por $t' - t > 0$ e tomando os limites quando $t' \to t^+$, tem-se $u_t(x^*,t) \leq V'(t^+)$ se esta derivada existe

Pegando $t' \in (t,1)$, dividindo os dois lados da equação acima por $t - t' > 0$ e tomando os limites quando $t' \to t^-$, tem-se $u_t(x^*,t) \geq V'(t^-)$ se esta derivada existe.

Logo, quando *V* é diferenciável em $t \in (0,1)$, tem-se $V'(t) = V'(t^-) = V'(t^+) = u_t(x^*,t)$.

Através da incorporação de um requerimento de que a função objetivo seja côncava tanto na variável de escolha como no parâmetro, obtém-se o seguinte corolário apresentado no mesmo trabalho por Milgrom e Segal.

Corolário 1.1: “Suponha que X é um conjunto convexo e $u : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função côncava. Também suponha que $t^0 \in (0,1)$ e que há algum $x^* \in X^*(t^0)$, de modo que $u_t(x^*,t)$ exista. Então *V* é diferenciável em $V'(t^0) = u_t(x^*,t^0)$.”

Prova:

Tomemos t', t'', e $\lambda \in [0,1]$. Pela convexidade de *X* e pela concavidade da *f*, para qualquer x', $x'' \in X$ podemos escrever:

$$u(\lambda x' + (1-\lambda)x'',\ \lambda t' + (1-\lambda)t'') \geq \lambda u(x',t') + (1-\lambda)u(x'',t'').$$

Tomando o supremo dos dois lados em x', $x'' \in X$ e usando a convexidade de *X*, obtemos:

$$V(\lambda t' + (1-\lambda)t'') \geq \lambda V(t') + (1-\lambda)V(t'').$$

E, portanto, V é côncava. Isto implica que V é direcionalmente diferenciável em cada $t \in (0,1)$ e $V'(t^-) \geq V'(t^+)$. Por outro lado, pelo teorema 1.2, $V'(t_0^-) \leq u_t(x^*, t^0) \leq V'(t_0^+)$.

O teorema do envelope na forma integral apresentado aqui foi desenvolvido por Milgrom e Segal (2002), e oferece condições suficientes para que a função valor seja absolutamente contínua. Assim, a função valor é diferenciável quase sempre e pode ser representada como a integral de sua derivada. Este resultado especificamente é grande importância na teoria dos desenhos de mecanismos.

Teorema 1.3. (Teorema do envelope na forma integral 1): Suponha que $u(x,\cdot)$ é absolutamente contínua para todo $x \in X$. Suponha também que existe uma função integrável $b:[0,1] \to \mathbb{R}_+$ tal que $|u_t(x,t)| \leq b(t)$ para todo $x \in X$ e quase todo $t \in [0,1]$. Então V é absolutamente contínua. Suponha também que $u(x,\cdot)$ é diferenciável para todo $x \in X$, e que $x^*(t) \neq \varnothing$ quase sempre em $[0,1]$. Então para qualquer seleção $x(t) \in x^*(t)$,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t u_t(x(s), s)\,ds .$$

Prova:

$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ existe quase sempre pelo teorema de Lebesgue[4], pois $u(x,\cdot)$ é absolutamente contínua.

Pelo teorema de Lebesgue podemos fazer:

[4] O teorema de Lebesgue afirma que se $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua, se somente se, u' existe quase sempre e u' é integrável. Neste caso, $\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a)$.

$$
\begin{aligned}
\left|V(t'') - V(t')\right| &\leq \sup_{x \in X} \left|u(x,t'') - u(x,t')\right| \\
&\leq \sup_{x \in X} \left| \int_{t'}^{t''} \frac{\partial u(x,s)}{\partial t} ds \right| \\
&\leq \sup_{x \in X} \int_{t'}^{t''} \left| \frac{\partial u(x,s)}{\partial t} \right| ds \\
\left|V(t'') - V(t')\right| &\leq \int_{t'}^{t''} b(t)dt
\end{aligned}
$$

E para i = 1, ..., n, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|V(t_i'') - V(t_i')\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i'}^{t_i''} b(t)dt .$$

b é integrável então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \left|t_i'' - t_i'\right| < \delta$ implica em $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_i'}^{t_i''} b(t)dt < \varepsilon$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|V(t_i'') - V(t_i')\right| < \varepsilon ;$$

Logo V é absolutamente contínua.

$$
\begin{aligned}
V(t) - V(0) &= \int_0^t V'(s)ds \\
V(t) &= V(0) + \int_0^t V'(s)ds
\end{aligned}
$$

Então V' existe quase sempre, logo $V'(t) = \dfrac{\partial u(x^*(t),t)}{\partial t}$, e podemos reescrever o resultado da seguinte forma:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \frac{\partial u(x^*(s),s)}{\partial t} ds .$$

Uma outra versão do teorema do envelope na forma integral de Milgrom e Segal é apresentada a seguir.

Terma 1.4 (Teorema do envelope na forma integral 2): Suponha que $u(x,\cdot):[0,1]\to\mathbb{R}$ tenha as seguintes propriedades:

i) Existe uma função valor-real $u_2(x,t)$ tal que para todo $x\in X$ e todo $[a,b]\subseteq[0,1]$, $u(x,b)-u(x,a)=\int_a^b u_2(x,s)ds$, e

ii) Existe uma função integrável $b:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ (isto é, $\int_0^1 b(s)ds<\infty$) tal que $|u_2(x,t)|\le b(t)$ para todo $x\in X$ e quase todo $t\in[0,1]$.

Além disso suponha que $X^*(t)\equiv\arg\max_{x\in X}u(x,t)\neq\varnothing$ para quase todo $t\in[0,1]$. Então para qualquer seleção $x^*(t)\in X^*(t)$,

$$V(t)=(x^*(t),t)=u(x^*(0),0)+\int_0^t u_2(x^*(s),s)ds \text{ .(*)}$$

Prova:

Primeiro mostra-se que V é absolutamente contínua. Seja:

$$B(t)=\int_0^t b(s)ds\,.$$

Para qualquer $t',\ t''\in[0,1]$ com $t'<t''$,

$$\begin{aligned}|V(t''-V(t')|&\le\sup_{x\in X}|u(x,t'')-u(x,t')|\\&=\sup_{x\in X}\left|\int_{t'}^{t''}u_2(x,t)dt\right|\\&\le\int_{t'}^{t''}\sup_{x\in X}|u_2(x,t)|\,dt\\&\le\int_{t'}^{t''}b(t)dt=B(t'')-B(t').\end{aligned}$$

Observe que, por construção, *B* é absolutamente contínua. Fixe qualquer $\varepsilon>0$. Desde que *b* é integrável, existe algum número positivo *M* tal que $\int_{\{|b(t)|>M}|b(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$. Seja $\delta<\frac{\varepsilon}{2M}$, escolha qualquer intervalo não sobreposto $\left[a_i, b_i\right]$, e seja $x_i^* \in X^*(b_i)$ e $\tilde{x}_i \in X^*(a_i)$. Se $V(b_i) - V(a_i) \geq 0$, então $\left|V(b_i) - V(a_i)\right| = u(x_i^*, b_i) - u(\tilde{x}_i, a_i) \leq u(x_i^*, b_i) - u(x_i^*, a_i)$. Similarmente, se $V(b_i) - V(a_i) \leq 0$, então $\left|V(b_i) - V(a_i)\right| = -u(x_i^*, b_i) + u(\tilde{x}_i, a_i) \leq -u(\tilde{x}_i, b_i) + u(\tilde{x}_i, a_i)$. Conseqüentemente, se $\sum_{i=1}^{k} \left|b_i - a_i\right| < \delta$, então:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \left|V(b_i) - V(a_i)\right| &= \sum_{i=1}^{k} \left|u(x_i^*, b_i) - u(\tilde{x}_i, a_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \max\left(\left|u(x_i^*, b_i) - u(x_i^*, a_i)\right|, \left|u(\tilde{x}_i, b_i) - u(\tilde{x}_i, a_i)\right| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \max\left(\left|\int_{a_i}^{b_i} u_2(x_i^*, t)dt\right|, \left|\int_{a_i}^{b_i} u_2(\tilde{x}_i, t)dt\right| \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \max\left(\int_{a_i}^{b_i} \left|u_2(x_i^*, t)\right| dt, \int_{a_i}^{b_i} \left|u_2(\tilde{x}_i, t)\right| dt \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} b(t)dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + M \sum_{i=1}^{k} \left|b_i - a_i\right| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Isto estabelece que V é absolutamente contínua, logo diferenciável quase sempre. Seja t um ponto de diferenciabilidade. Como $V(t) = u(x^*(t), t)$ e $V(t') \geq u(x^*(t), t)$, segue que:

$$
\frac{V(t') - V(t)}{\left|t' - t\right|} \geq \frac{u(x^*(t), t') - u(x^*(t), t)}{\left|t' - t\right|}.
$$

Como V é diferenciável em t, fazendo $t' \downarrow t$ conduz a $V'(t) \geq u_2(x^*(t), t)$ e fazendo $t' \uparrow t$ conduz a $V'(t) \leq u_2(x^*(t), t)$. Então $V'(t) = u_2(x^*(t), t)$ em todo ponto de diferenciabilidade da V. E a equação (*) segue então do teorema de Lebesgue.

O teorema do envelope na forma integral se aplica para problemas nos quais a função objetivo $f(x,t)$ é parametrizada mas o conjunto de estratégias factíveis X não é. Em problemas de desenhos de mecanismos, se a ação do agente é reportar informação, então todo tipo t escolhe do mesmo conjunto de estratégias factíveis. Neste caso, se um desenho de mecanismo aumentado especifica um conjunto de estratégias S e um função de resultado $x : S \to \Omega$, então o participante está efetivamente escolhendo um resultado do conjunto factível $X = x(S) \subset \Omega$ para maximizar seu próprio *payoff* – um problema no qual o teorema acima apresentado pode ser aplicado. A equação (*) então restringe as funções *performances* x que podem ser implementadas em um espaço de tipos $[0,1]$.

2.4 Conclusão

Até aqui mostramos alguns resultados relevantes que serão importantes no desenvolvimento dos demais capítulos. Entre esses resultados mostramos a concavidade de uma função valor-ótimo em um problema de otimização em que a função objetivo é côncava e a correspondência sobre a qual otimiza é convexa. Além disso, apresentamos o teorema de Rademacher que assegura que toda função côncava é derivável, mostramos que as derivadas direcionais de uma função côncava existem e que essas derivadas pela direita são menores que aquelas pela esquerda. Além disso, foi apresentada uma nova versão do teorema do envelope na forma integral desenvolvida por Milgrom e Segal, que pode ser amplamente empregada na análise de desenhos de mecanismos.

3 DESENHO DE MECANISMO

Alcançar alocações eficientes de bens públicos é um problema fundamental em economia. Sobre esse assunto Groves e Ledyard (1977) afirmaram que acredita-se amplamente que alcançar uma alocação de recursos ótima de Pareto, via métodos descentralizados, na presença de bens públicos é fundamentalmente incompatível com incentivos individuais. Samuelson (1954) mostrou as dificuldades de estender sistemas de mercados para cobrir alocações de bens públicos.

Trabalhos analisando questões, envolvendo alocações eficientes de bens públicos levaram à consolidação do que hoje é conhecido como teoria dos desenhos de mecanismos. Mais tarde, Myerson (1981), pioneiramente, aplicou desenhos de mecanismos à teoria dos leilões, a partir daí a maior parte dos desenvolvimentos na área de leilões também passaram a ser modelados através de desenhos de mecanismos.

Além desta introdução este capítulo consta de mais quatro seções. Na primeira seção, apresentamos um panorama geral da teoria dos desenhos de mecanismos destacando os trabalhos mais relevantes desenvolvidos nessa área. Na segunda seção definimos algumas formalidades da teoria dos desenhos de mecanismos apresentando a estrutura geral dos modelos e seus componentes, definindo o conjunto de participantes, os resultados e o conjunto de tipos possíveis dos participantes.

Na terceira seção apresentamos um modelo geral de desenho de mecanismo e o princípio da revelação, que pode ser utilizado para limitar o conjunto de mecanismos nos quais o operador deve focar, facilitando o trabalho. O modelo geral de desenho de mecanismo é a apresentado em duas versões: primeiro apresentamos um modelo com um único agente e depois um modelo mais geral com vários agentes. Nessa seção mostramos como o resultado obtido por Milgrom e Segal (2002), para o teorema do envelope na forma integral, pode ser usado para reescrever o resultado do problema.

Este resultado permite unificar as várias formas já utilizadas para se obter a derivabilidade da função-valor ótimo em problemas desse tipo, uma vez que assegura condições para que esta função seja absolutamente contínua sem impor restrições como convexidade ou sobre a estrutura topológica do conjunto de escolhas.

Na quarta seção apresentamos o modelo de desenho de mecanismo com vários agentes, que geralmente é empregado em trabalhos envolvendo bens públicos ou em teoria de leilões. Na quinta seção apresentamos a conclusão do capítulo.

3.1 Desenho de Mecanismo: Uma Visão Geral do problema

Segundo Milgrom (2002) e Fundenberg e Tirole (1990) um mecanismo é essencialmente um conjunto de regras para orientar as interações entre partes. Por exemplo, pode especificar as regras de um leilão.

Quando as regras do mecanismo e o objetivo de quem vão planejá-lo (chamado de principal) foram especificados, o planejador aplica algum critério, ou conceito de solução, para prever o resultado e então avaliar o resultado de acordo com o objetivo. A rigor o que se busca é identificar o mecanismo que maximiza a performance de acordo com o objetivo especificado. Por exemplo, o objetivo pode ser encontrar um leilão que maximiza o preço de venda esperado.

Atualmente, a teoria dos desenhos de mecanismos faz uso de hipóteses muito fortes para alcançar conclusões teóricas que às vezes são frágeis. Entre elas a de que as crenças dos participantes são construídas e descritas em termos de probabilidades; que quaisquer diferenças nas crenças dos participantes refletem diferenças nas suas informações, e que os participantes não apenas maximizam, mas também aderem confiantemente à crença de que todos os demais participantes fazem o mesmo. Estas suposições são extremas, e na prática são geralmente compostas pelo uso de suposições simplificadas. Segundo Milgrom (2004) mecanismos úteis na vida real precisam ser robustos. Para alguns autores, entre os quais Milgrom, mecanismos que são muito frágeis deveriam ser descartados, enquanto que mecanismos robustos podem, às vezes, ser adotados com confiança, mesmo quando eles não são aparentemente ótimos.

O que é conhecido na literatura como jogos de desenho de mecanismo é uma classe de jogos de informação incompleta. Por exemplo, esses jogos podem ser usados para discriminação de preço monopolista, tributação ótima, desenho de leilões, e mecanismos para fornecimento de um bem público.

Nesses jogos há dois tipos de participantes, um participante que é chamado principal, os demais são chamados os participantes Em todos os casos o principal condiciona suas ações a algumas informações que são de conhecimento privado dos participantes. O principal poderia simplesmente pedir aos participantes que lhe passassem essas informações, mas na ausência de um incentivo os participantes poderiam não fazê-lo corretamente.

O incentivo pode ser um pagamento monetário ou algum outro instrumento por ele controlado. Desde que existem custos para dar este incentivo, o principal está diante de um *trade off* que freqüentemente resulta em uma alocação ineficiente.

Uma característica que distingue a abordagem de desenho de mecanismo é que o principal, supostamente, escolhe o mecanismo que maximiza sua utilidade esperada.

Muitas aplicações de desenhos de mecanismos consideram jogos com um único participante, mas podem também ser aplicados para jogos com vários participantes, inclusive temos modelos com um continuum de participantes.

Entre os modelos com vários participantes destacam-se problemas envolvendo bens públicos, onde um governante deve decidir se oferta um bem público, mas ele não tem informação completa sobre o valor que os participantes atribuem a esse bem. Nesse caso o objetivo do governante pode ser desenhar um sistema (ou método) determinando o fornecimento do bem público, e possivelmente uma transferência a ser paga pelos participantes como uma função da disponibilidade a pagar pelo bem que os participantes informam ao governante.

Em desenhos de leilões um vendedor organiza um leilão entre os possíveis compradores (participantes) para a venda de um determinado bem. O vendedor não sabe quanto os participantes estão dispostos a pagar por aquele bem, desenha-se um mecanismo que irá determinar quem compra o bem e o preço de venda.

Em problemas de comércio bilateral um mediador desenha um mecanismo de troca entre um vendedor, que tem informações privadas sobre os custos de produção, e um comprador, que tem informações privadas sobre sua disponibilidade a pagar pelo bem.

Desenhos de mecanismos são geralmente estudados como jogos de informação incompleta de três passos, onde os tipos dos participantes são informações privadas, apenas cada participante conhece seu tipo inicialmente.

No primeiro passo o principal desenha o mecanismo, ou contrato, ou modelo de incentivo.

No segundo passo os participantes simultaneamente aceitam ou rejeitam o mecanismo, nessa etapa do jogo os participantes devem deixar claro se eles se dispõem a participar do mecanismo proposto pelo principal. Em algumas situações (geralmente quando o principal é o governo) essa restrição de participação não é imposta, ou seja, esse segundo passo é omitido.

No terceiro passo os participantes que aceitaram o mecanismo jogam o jogo especificado pelo principal, ou, participam do mecanismo planejado pelo principal.

A teoria dos desenhos de mecanismos distingue claramente os aparatos que ficam sob controle do planejador, os quais chamamos um mecanismo, e o universo de coisas que estão além do controle desse planejador, chamadas de ambiente ou natureza. Um mecanismo consiste de regras que determinam o que é permitido aos participantes e como estas ações permitidas irão determinar o resultado. O ambiente é composto de três partes: 1) uma lista de participantes ou potenciais participantes, 2) um conjunto de resultados possíveis, e 3) e um conjunto de possíveis tipos dos participantes (suas capacidades, preferências, informações e crenças).

A teoria dos desenhos de mecanismos avalia desenhos alternativos baseados em suas *performances* comparativas. Formalmente, *performance* é uma função que mapeia ambientes para resultados.

O objetivo da análise de desenhos de mecanismos é determinar qual performance é possível e como os mecanismos podem ser mais bem designados para atingir as metas dos planejadores. Desenhos de mecanismos destinam-se a três questões comuns: É possível alcançar um certo tipo de *performance*? Qual é o conjunto completo de funções de *performance* que são implementáveis pelo mecanismo? E que mecanismo otimiza a *performanc*e (de acordo com o critério do planejador)?

A teoria dos desenhos de mecanismos é orientada para resultados. Uma das suposições centrais dessa teoria é que os participantes se preocupam apenas com os resultados, e não em como eles podem ser alcançados. Segundo Milgrom, no mundo real, os processos algumas vezes obtêm sucesso ou falham baseados em se eles são percebidos como justos, simples ou abertos, atributos que são difíceis de serem avaliados em um modelo formal. Deixar de lado estas considerações facilita uma análise formal, porém parcial. Uma vez que a análise está completa, as questões omitidas e critérios podem ser examinados.

Duas categorias de problemas importunam os planejadores de mecanismos. A primeira categoria refere-se a problemas de informação que podem ser encontrados em toda parte na economia. O segundo tipo de problema que se deparam os planejadores de mecanismos se referem a comprometimento, os participantes podem não acreditar que o planejador vá manter suas promessas. Ambos os tipos de problemas tem papel importante na teoria dos desenhos de mecanismos e em suas aplicações à teoria econômica dos contratos.

Três importantes contribuições à teoria dos desenhos de mecanismos merecem destaque especial. A primeira delas é o trabalho de Vickrey (1961) sobre desenho de leilões que alocam recursos de forma eficiente para uma grande variedade de circunstâncias. Os trabalhos de Vickrey juntamente com os avanços propostos por Clarke (1971) e Groves (1973) se tornaram um referencial no estudo da teoria de desenhos de mecanismos.

A segunda contribuição importante a se destacar foi dada por Vicrey e Mirrlees (1971), em desenhos de modelos de tributação ótima e sistema de bem estar, dado um objetivo utilitarista. Vickrey construiu o modelo básico, o qual dava estrutura à questão. O modelo incorpora as idéias de que a utilidade individual depende tanto da renda quanto do lazer, e que diferentes pessoas tem diferentes oportunidades de gerar renda sacrificando lazer, e que as autoridades que cobram impostos podem observar apenas a renda, e também que o sistema de tributação afeta a oferta de trabalho. O problema foi criar um sistema que tributa e transfere renda para maximizar a utilidade total de todas as pessoas da sociedade. A solução ótima utilitarista tributaria as pessoas com maior capacidade de ganho e pagaria uma transferência às pessoas com menor capacidade de ganho, mas seria limitado pelo problema de incentivo envolvido. Mais tarde Mirrlees revistou e resolveu o problema de otimização implicado pela formulação de Vickrey. Pesquisadores subseqüentes freqüentemente imitam os métodos de Mirrlees. Pela sua contribuição à teoria dos leilões e tributação ótima, Vickrey e Mirrlees dividiram o Prêmio Nobel de economia em 1996.

O outro trabalho que queremos destacar trata-se da análise de Clarke e Groves (1973) sobre o fornecimento ótimo de bens públicos. Por exemplo, uma associação de condomínio pode ter que decidir se melhora a área comum, instalando um elevador mais rápido no edifício, renovando o exterior ou construindo um playground para as crianças. Essas melhorias geram custos, que devem ser financiados pelos membros da associação de condomínio.

Nessas circunstâncias o síndico pode querer saber como cada melhoria é valorizada pelos membros da associação. Dependendo de como essa informação é usada e de como os custos serão divididos, os membros da associação podem tender a informar erradamente suas preferências. Clarke e Groves analisaram como construir um mecanismo que leve as informações verdadeiras a serem consistentes com os interesses individuais.

Nos anos seguintes, técnicas de desenhos de mecanismos foram aplicadas a problemas do setor público, como em regulação estatal de órgãos públicos para maximizar o bem estar do consumidor, e no setor privado, como em desenhos ótimos de contratos para maximizar o bem estar das partes contratantes. O trabalho de Meyerson (1981) desenhando leilões para maximizar receita foi o primeiro a aplicar desenho de mecanismo à teoria dos leilões. Existem também muitos outros trabalhos de grande relevância para a teoria dos desenhos de mecanismos, como o trabalho de Harsanyi (1967-1968), Urwicz (1973), Green e Laffont (1977), Holmstrom (1979) e Williams (1999), são exemplos de trabalhos destacados na análise de desenhos de mecanimos.

3.2 Formalidades do Modelo de Desenho de Mecanismo[5]

Geralmente os modelos de desenhos de mecanismos estudados consistem de duas partes: um ambiente e um mecanismo. No caso mais simples, um ambiente é um trio $\left(N,\Omega,\Theta\right)$. O primeiro dos três elementos, $N=\{1,\dots,n\}$, é a lista dos participantes, (ou potenciais participantes) do mecanismo. Quando é conveniente incluir o planejador entre os participantes, pode-se escrever $N=\{0,1,\dots n\}$. O segundo elemento, Ω, é o conjunto dos resultados possíveis, no qual os participantes e o planejador do mecanismo tem suas preferências. O terceiro elemento é o mais abstrato: $\Theta=\Theta^1\times\dots\times\Theta^N$ é o conjunto dos perfis de tipos $\vec{t}=(t^1,\dots,t^n)$, o qual inclui um tipo para cada participante. O tipo do participante (t^i) indexa as informações do particpante, crenças e preferências.

O perfil de tipos e o resultado combinados geram o *payoff* individual: $u^i:\Omega\times\Theta\rightarrow\mathbb{R}$. Assim, $u^i(\xi,\vec{t})$ denota o *payoff* ou utilidade que o participante *i* obtém quando o resultado é $\xi\in\Omega$ e o perfil de tipos é $\vec{t}$.

Na maioria dos modelos estudados em economia o *payoff* de um jogador depende apenas do resultado e de seu próprio tipo, mas a formulação geral permite uma dependência mais ampla que esta. Um exemplo no qual os *payoffs* dependem dos tipos dos outros vem de Akerlof (1970), quem ganhou o Prêmio Nobel de economia em 2001. Em seu famoso modelo de limões do mercado de carros usados (Akerlof, 1970), existem dois tipos de participantes: compradores e vendedores. Um tipo de um vendedor descreve a condição do carro, o qual apenas o vendedor conhece. A utilidade do comprador depende das preferências do comprador e das condições do carro. Modelos de mercado nos quais algum participante tem informação de qualidade que afeta o *payoff* dos outros participantes são chamados de modelos de seleção adversa. O nome reflete a idéia que a seleção de carros sendo vendidos neste modelo não é uma *cross section* aleatória de todos os carros, mas ao invés disso, atribui mais peso aos carros que estão em más condições, porque os proprietários desses carros estão mais interessados (mais dispostos e por isso se esforçam mais) em vende-los.

---

[5] O primeiro desenho de mecanismo geral foi formulado por Hurwicz (1973).

Embora o tratamento de seleção adversa em modelos de leilões tenha uma longa história, a maior parte da teoria dos leilões deixa de lado seleção adversa para focar no caso de valores privados, nos quais a utilidade de cada participante depende apenas de seu próprio tipo: $u^i(\xi,\vec{t}) = u^i(\xi,t^i)$. Neste caso, as informações dos outros não pode influenciar o ranking dos participantes para os resultados em Ω.

Grande parte dos modelos de desenhos de mecanismos assume que os participantes não têm certeza sobre o que os demais participantes sabem. Em modelos bayesianos, a distribuição de probabilidade condicional $\pi^i(\vec{t}\setminus t^i)$ descreve as crenças do participante, as quais dependem do próprio tipo do participante. Geralmente emprega-se a doutrina de Harsanyi (1967-1968) de que as crenças são derivadas de uma distribuição a priori comum, π. Embora esta doutrina seja restritiva e exclua certos fenômenos interessantes e realísticos, ela tem uma vantagem importante. Essa doutrina exclui apostas patológicas, que são modelos nos quais os participantes podem fazer eles próprios bem melhor simplesmente apostando contra um outro baseado nas diferenças de suas crenças. A doutrina proposta por Harsanyi é popular em modelos de desenhos de mecanismos porque ela elimina tais apostas e foca atenção em outros aspectos do desenho do problema.

As vezes é conveniente escrever um perfil de tipos como $\vec{t} = \left(t^i, t^{-i}\right)$, onde t^{-i} lista o tipo de todos os outros participantes menos o participante *i*. Um mecanismo (na forma estratégica) é um par $\left(S,\omega\right)$ onde σ_i é o conjunto de perfis de estratégias possíveis (S^j é o conjunto de estratégias possíveis de um típico jogador *j*) e $\omega : S \to \Omega$ mapeia perfis de estratégias para resultados.

Para cada mecanismo e cada realização do vetor de tipos $\vec{t}$, pode-se definir um jogo na forma estratégica correspondente. O jogo ($N, S, U(\cdot\setminus\vec{t})$) é um trio consistindo de um conjunto de jogadores, um conjunto de perfis de estratégias e uma função *payoff*, *U*, mapeando perfis de estratégias para *payoffs*. Os argumentos da função *payoff* são estratégias , mas isto interessa aos participantes apenas no caso de eles determinarem os resultados que interessam a cada participante: $U^i(\sigma^1,...,\sigma^n,\vec{t}) = u^i(\omega(\sigma^1,...,\sigma^n,\vec{t})$. Se os jogadores são bayesianos, adicionando as crenças da forma que foram descritas acima, completa a descrição de um jogo bayesiano.

Dado um mecanismo $\left(S,\omega\right)$, se a solução teórica do jogo prevê que um perfil de estratégias particular $\sigma = \left(\sigma^1(t^1),...,\sigma^n(t^n)\right)$ será jogado, então pode-se usar esta previsão para prever e avaliar a *performance* do mecanismo. O resultado previsto será

$\xi(\vec{t}) = \omega\left(\sigma^1(t^1), ..., \sigma^n(t^n)\right)$. A função $\xi(\cdot)$ mapeando perfis de tipos para resultados é a função *performance* correspondente ao mecanismo $\left(S, \omega\right)$. Muitos conceitos teóricos de soluções de jogos não têm valor único, por exemplo, muitos jogos têm equilíbrios de nash múltiplos. Existem várias formas de acomodar equilíbrios múltiplos, em princípio foca-se no seguinte. Quando um jogo tem múltiplas soluções, define-se um mecanismo aumentado $\left(S, \omega, \sigma\right)$ como sendo o mecanismo adicionado a uma solução selecionada. A idéia é que a solução σ é uma recomendação feita pelo planejador do mecanismo aos participantes. Se a recomendação é consistente com o conceito de solução que adequadamente captura os incentivos dos participantes, então nenhum participante terá nenhuma razão para desviar da recomendação, e σ é portanto uma razoável previsão de como os participantes irão se comportar.

Quando σ é uma solução de acordo com algum conceito de solução, dizemos que o mecanismo $\left(S, \omega\right)$ ou o mecanismo aumentado $\left(S, \omega, \sigma\right)$ implementa a performance $\xi = \omega \circ \sigma$. Em outras palavras, o resultado de equilíbrio do mecanismo é ξ, o qual é obtido da função de resultado ω quando cada participante joga de acordo com σ_i. Algumas vezes, junta-se o nome do conceito de solução, dizendo que um mecanismo é implementável em estratégia dominante ou Bayes-Nash implementa a performance particular.

3.3 Desenhos de Mecanismos e o Principio da revelação

Nesta seção desenvolve-se uma versão geral do problema de desenho de mecanismo e mostra-se como o principio da revelação pode ser usado para simplificar tais problemas.

Supõe-se que exista $N + 1 = \left\{0,1,...,n\right\}$ participantes: Um principal, sem informações privadas e os demais N participantes ($n = 1, ... , N$) com tipos $\vec{t} = (t^1, ..., t^n)$, do conjunto Θ. Em principio permite-se uma distribuição de probabilidade em Θ bastante geral, exigindo-se apenas que a esperança e a esperança condicional das funções de utilidade sejam bem definidas.

O objetivo do mecanismo planejado pelo principal é determinar um resultado $y = \{x, p\}$. Um resultado consiste de um vetor $\vec{x}$ (variável de escolha), chamado uma decisão, que pertence a um conjunto $X \subseteq \Re^n$ não vazio, compacto e convexo, e um vetor de transferências monetárias $\vec{p} = (p^1, ..., p^N)$, do principal para cada participante (o qual pode assumir valores positivos ou negativos). Na maioria das aplicações X é suposto grande o suficiente de forma a assegurar uma solução interior.

O jogador i $(i = 1,...,N)$ tem uma função de utilidade (ou função *payoff*) do tipo von Newmann-Morgestern $u^i(y,\ \vec{t})$. Supõe-se que $u^i(i = 1,...,N)$ é estritamente crescente em p_i e que u^0 é decrescente em cada p^i, e que essas funções sejam duas vezes continuamente diferenciáveis.

Dado uma alocação $\{y(\vec{t})\}_{t \in \Theta}$, o participante i $(i = 1,...N)$ com tipo t^i tem utilidade esperada interin[6]:

$$U^i(t^i) = E^{t-i}[u^i(y(t^i, t^{-i}), t^i, t^{-i}) \setminus t^i].$$

E a utilidade esperada do principal é dada por:

$$E_{\vec{t}}u^0(y(\vec{t}), \vec{t})$$

Um mecanismo ou contrato, *m*, define um espaço de mensagens M_i para cada participante *i* e uma forma de jogo (conforme o passo 3 definido na introdução) para anunciar as mensagens, onde $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$ é o vetor de mensagens enviadas pelos participantes na forma definida pelo jogo. Como o tipo de cada participante é uma informação privada , *y* pode depender de $\vec{t}$ somente através das mensagens dos participantes; esta função é denotada por $y_\mu : \mu \rightarrow Y = X \text{ x } \Re^N$.

Assim pode-se derivar o principio da revelação, o qual afirma que o principal pode observar apenas os mecanismos diretos, nos quais os espaços de mensagens são os espaços de tipos[7], e que todos os participantes aceitam o mecanismo proposto pelo principal no passo 2, independente de seu tipo, além disso, na terceira etapa do jogo (terceiro passo) os participantes informam seu tipo simultaneamente e honestamente. Este princípio foi enunciado por vários pesquisadores, incluindo Gibbard (1973), Green e Laffont (1977), Dasgupta (1979) e Myerson (1979).

[6] No estágio *ex-ante* cada participante conhece apenas a dos tipos de todos os agentes; no estágio i*nterim* cada participante já sabe seu próprio tipo mas conhece apenas a distribuição dos tipos dos demais participantes; no estágio *ex-post* os tipos de todos os participantes são de conhecimento comum.

[7] Dessa forma passa a dar atenção apenas ao espaço de tipos, ou conjunto dos tipos possíveis dos participantes.

Pode-se observar que na terceira etapa a forma do jogo associada com o mecanismo, junto com a decisão de aceitação feita na segunda etapa, define um jogo maior entre os participantes. Sem perda de generalidade pode-se incluir a decisão de aceitação dos participantes em suas mensagens, $\mu^i(\cdot)$. Considere um equilíbrio bayesiano desse jogo maior, supõe-se por simplicidade de notação, que se trate de um equilíbrio em estratégias puras, o qual escreve-se como $\mu_i^*(t^i)$.

Considere o novo espaço de mensagens, Θ^i, para cada participante *i*, assim cada participante t^i anuncia um tipo τ^i (que pode ser seu verdadeiro tipo t^i ou não). Deixando $\tau = (\tau^1,...,\tau^N)$, se define uma nova regra de alocação $\bar{y}:\Theta \to Y$ por $\bar{y}(\tau) = y_m(\mu^*(\vec{t}))$, onde $\mu^*(\vec{\tau}) = (\mu_1^*(\tau^1),...,\mu_I^*(\tau^N))$.

Segue imediatamente que informar seu verdadeiro tipo ao mecanismo $(\tau^i = t^i)$, é um equilíbrio Bayesiano para o novo jogo, dado que $\{\mu_i^*\}$ é um equilíbrio Bayesiano para o jogo original; para todo *i* e t^i,

$$\begin{aligned}
E^{t-i}\left[u^i(\bar{y}(\vec{t}),t^i,t^{-i})\setminus t^i\right] &= E^{t-i}\left[u^i(y_m(\mu^*(\vec{t})),t^i,t^{-i})\setminus t^i\right] \\
&= \sup_{\mu_i \in M_i} E^{t-i}\left[u^i(y_m(\mu_1^*(t^1),...,\mu^i,...,\mu_N^*(t^N)),t^i,t^{-i})\setminus t^i\right] \\
&\geq \sup_{\tau^i \in \Theta_i} E^{t-i}\left[u^i(\bar{y}(t^1,...,\tau^i,...,t^N),t^i,t^{-i})\setminus t^i\right]
\end{aligned}$$

A primeira igualdade segue da definição de mecanismo de revelação direto $\bar{y}$, a segunda igualdade é a condição para equilíbrio Bayesiano no mecanismo original *m*, e a desigualdade fraca expressa o fato de que no mecanismo de revelação direta tudo funciona como se o participante *i* escolhesse um anúncio em um subconjunto de mensagens $\{\mu_i^*(\tau^i)\}_{\tau^i \in \Theta_i}$ de M_i, dessa forma o participante tem, no máximo, tantas possibilidades de desviar quanto no jogo original.

O Princípio da Revelação nos assegura que em um mecanismo com espaço de mensagens M_i e função de alocação $y_m(\cdot)$, tem um equilíbrio Bayesiano $\mu^*(\cdot) = \{\mu_i^*(t^i)\}_{t^i \in \Theta^i}^{i=1,...,N}$. Então ali existe um mecanismo de revelação direta $(\bar{y} = y_m \circ \mu^*)$, que é uma composição (ou função composta), tal que o espaço de mensagens seja o espaço de tipos $(\bar{\mu}_i = \Theta^i)$ e tal que ali existe um equilíbrio Bayesiano no qual todos os participantes aceitam o mecanismo proposto pelo principal na segunda etapa e revelam seu verdadeiro tipo na terceira etapa do jogo.

3.3.1 Desenho de Mecanismo com Participante Único

A metodologia que será apresentada a seguir foi inicialmente desenvolvida por Mirrlees (1971), e foi expandida, e aplicada a vários contextos por Mussa e Rosen (1978), Baron e Myerson (1982), Maskin e Riley (1984), entre outros.Todos os resultados, incluindo as proposições, seguem de Fundenberg e Tirole (1991)[8].

Nesse contexto, como existe apenas um participante, o subscrito na transferência (*p*) e no tipo (t) será omitido. Supõe-se que o tipo do participante esteja distribuído em um intervalo $\left[\underline{t},\overline{t}\right]$. Apenas o participante conhece seu tipo t, o principal tem uma função de distribuição acumulada à priori; F ($F\left(\underline{t}\right)=0,\ F(\overline{t})=1$), com função densidade de probabilidade $f\left(t\right)$ diferenciável tal que $f\left(t\right)>0$ para todo $t\in\left[\underline{t},\overline{t}\right]$. O espaço de tipos é de dimensão única, mas o espaço de decisões pode ser multidimensional. Uma alocação é uma função mapeando tipos dos participantes para uma alocação,:

$$t\rightarrow y\left(t\right)=\left(x\left(t\right),p\left(t\right)\right).$$

3.3.2 Decisões Implementáveis e Alocações

Uma função de decisão $x:t\rightarrow X$ é implementável se existe uma função de transferência $p\left(\cdot\right)$ tal que a alocação $y\left(t\right)=\left(x\left(t\right),p\left(t\right)\right)$ para t $\in\left[\underline{t},\overline{t}\right]$ satisfaça a restrição de Compatibilidade de incentivo:

$$\text{(IC)} \qquad u^1\left(y\left(t\right),t\right)\geq u^1(y(\tau),t) \qquad \text{para todo} \quad (\text{t},\tau)\in\left[\underline{t},\overline{t}\right]\text{x}\left[\underline{t},\overline{t}\right]$$

Assim pode-se dizer que a alocação $y\left(\cdot\right)$ é implementável[9].

---

[8] Também tem como referencia Guesnerie e Laffont (1984) e Laffont (1989).

[9] Nesse caso a restrição de racionalidade individual (IR) é ignorada nesta definição , mas esta restrição, se existe, deve ser introduzida novamente no estágio de otimização.

Mais uma vez seguindo Fundenberg e Tirole (1991), será dedicada atenção apenas aos perfis de decisão $x(\cdot)$ que são continuamente diferenciáveis por partes (com o resultado de Milgrom e Segal essa restrição pode ser relaxada) assim pode-se derivar uma condição necessária para que $x(\cdot)$ seja uma decisão implementável.

Teorema 1: Uma função de decisão $x(\cdot)$ de classe C^1 e diferenciável por partes (continuamente diferenciável por partes) é implementável somente se

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1 / \partial x^k}{\partial u^1 / \partial p} \right) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial t} \geq 0 \tag{1}$$

sempre que $x = x(t)$, $p = p(t)$, e x for diferenciável em t.

Prova:

O participante do tipo t escolhe anunciar τ para maximizar $\varphi(\tau, t) = u^1(x(\tau), p(\tau), t)$. Como u^1 é de classe C^2 (possui derivadas de segunda ordem contínuas) e x é continuamente diferenciável por partes, qualquer função de transferência p que implementa x deve ser também piecewise e de classe C^1 (continuamente diferenciável, ou as primeiras derivadas contínuas). Maximizando em um ponto de diferenciabilidade obtemos uma condição de primeira ordem e uma condição de segunda ordem local no ótimo $\tau = t$.

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi(t,t)}{\partial \tau} = 0 \\ \frac{\partial \varphi(t,t)}{\partial \tau} = \frac{\partial u^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u^1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0 = \frac{\partial u^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \end{gathered} \tag{2}$$

e

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau^2} \leq 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u^1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) \leq 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Diferenciando a equação novamente a equação (2) com respeito a τ:

$$\frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau dt} \qquad (4)$$

Assim, a condição de segunda ordem local pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 \varphi(t,t)}{\partial \tau \partial t} \geq 0 \qquad (5)$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right) \geq 0 \qquad (6)$$

Reescrevendo a equação (2) tem-se que

$\displaystyle \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \Big/ \frac{\partial x}{\partial t} \right)}{\partial u^1 / \partial p}$ e podemos eliminar $\displaystyle \frac{\partial p}{\partial t}$ na equação (6)

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1}{\partial p} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial x^k} \right) \right] \Big/ \frac{\partial u^1}{\partial p} \right\} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial t} \geq 0 \qquad (8)$$

Então obtemos a equação (8) que é equivalente a equação (1).

Com a seguinte suposição pode-se simplificar a interpretação da condição necessária:
A1) Para toda decisão $k \in \{1,...,n\}$ ocorre um ou outro

$$\left(CS^+\right) \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1 / \partial x^k}{\partial u^1 / \partial p} \right) > 0, \text{ ou } \left(\mathrm{CS}^-\right) \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1 / \partial x^k}{\partial u^1 / \partial p} \right) < 0$$

Isto é conhecido como uma condição de escolha (ou sinal constante, ou condição de Spence-Mirrlees).

Mudando x^k para (- x^k), quando for necessário, pode-se restringir atenção ao caso no qual todas as derivadas são positivas se (A1) é válido. A partir de agora vamos supor que CS^+ é válido para todo *k*[10].

Pode-se notar que $\frac{du^1/dx^k}{du^1/dp}$ é a *taxa marginal de substituição* do participante entre a decisão *k* e a transferência *p*. A condição afirma que o tipo do participante afeta a taxa marginal de substituição de uma forma sistemática. O seguinte teorema, conhecido como teorema da monotonicidade, será bastante útil no quê se segue.

Teorema 2 (monotonicidade): Suponha que o espaço de decisão seja de dimensão única e que a condição CS^+ seja válida. Uma condição necessária para que $x(\cdot)$ seja implementável é que ela seja não-decrescente: $t^2 > t^1 \rightarrow x(t^2) \geq x(t^1)$. Certamente no caso de CS^- a condição necessária seria que $x(\cdot)$ fosse não-crescente.

Para obter as condições que asseguram que alocação é implementável, alguns autores, entre eles Guesnerie e Laffont (1984) e Fundenberg e Tirole (1991) fizeram a suposição (A1) e adicionaram as seguintes suposições técnicas, as quais garantem a existência de uma solução para a equação diferencial.

A2) A taxa marginal de substituição entre decisão e transferência não cresce muito rápido quando a transferência tende ao infinito: Para todo *k*, existe k^0 e k^1 tais que $\left|\frac{\partial u^1/\partial x^k}{\partial u^1/\partial t}\right| \leq k^0 + k^1 \cdot |p|$ uniformemente em x, p e t.

Essa suposição (A2) é satisfeita por exemplo quando as preferências são quase-lineares, para as quais $\left(\frac{\partial u^1}{\partial p} = 1\right)$.

Teorema 3: Sob as condições A1 (CS^+) e A2, qualquer função de decisão $x(\cdot)$ que seja de classe C^1 e diferenciável por partes (continuamente diferenciável por partes) satisfazendo $\frac{dx^k}{dt} \geq 0$ para todo k é implementável. Isto é, existe $p(\cdot)$ tal que $(x(\cdot), p(\cdot))$ é Incentivo Compatível.

[10] A1 é uma suposição padrão e é feita praticamente em todas as aplicações da teoria.

Prova:

Das condições de primeira ordem do participante, temos que $p(\cdot)$ deve satisfazer:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u^1 / \partial x^k}{\partial u^1 / \partial p}\right)\cdot\frac{\partial x^k}{\partial t} \tag{9}$$

A suposição A2 assegura a existência de uma solução para a equação acima, queremos mostrar que $\left(x(\cdot), p(\cdot)\right)$ é Incentivo Compatível. Por construção a condição de primeira ordem para a maximização do participante, com respeito a τ, é satisfeita; então a condição de segunda ordem local é a desigualdade dada pelo teorema 1, de CS^+ e $\frac{\partial x_k}{\partial t} > 0$. Mas isto não é suficiente, precisamos ainda provar que a condição de segunda ordem global para maximização é satisfeita. Para isso, suponhamos que dizer a verdade não seja ótimo para o participante do tipo t. Ou seja, existe τ tal que $\varphi(\tau,t) - \varphi(t,t) > 0$, observe que $\varphi(\tau,t) = u^1(x(\tau), p(\tau), t)$. Então $\int_t^\tau \frac{\partial \varphi(a,t)}{\partial a} da > 0$ ou:

$$\int_t^\tau \frac{\partial u^1}{\partial p}(x(a), p(a), t)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u^1/\partial x^k (x(a), p(a), t)}{\partial u^1/\partial p(x(a), p(a), t)}\cdot\frac{\partial x^k(a)}{\partial a} + \frac{\partial p(a)}{\partial a}\right)da > 0$$

se $\tau > t$, da condição de escolha[11], a equação acima implica que:

$$\int_t^\tau \frac{\partial u^1}{\partial p}(x(a), p(a), t)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u^1/\partial x^k (x(a), p(a), a)}{\partial u^1/\partial p(x(a), p(a), a)}\cdot\frac{\partial x^k(a)}{\partial a} + \frac{\partial p(a)}{\partial a}\right)da > 0 .$$

Mas pela equação (9) temos que essa integral deve ser igual a zero pra todo *a*, o que é uma contradição.

---

[11] Isto é, $\dfrac{\frac{\partial u^1(x,p,t)}{\partial x^k}}{\frac{\partial u^1(x,p,t)}{\partial p}} \le \dfrac{\frac{\partial u^1(x,p,a)}{\partial x^k}}{\frac{\partial u^1(x,p,a)}{\partial t}}$, para $t \le a$.

Um corolário importante que podemos extrair desse teorema é que no caso do espaço de decisões ser unidimensional, sob as condições de escolha CS^+ ou CS^-, uma função de decisão é implementável se somente se é monótona (não-decrescente sob CS^+ e não-crescente sob CS^-).

3.3.3 Mecanismos Ótimos

Com o conjunto de alocações implementáveis caracterizado, podemos determinar o ótimo para o principal. Para isso introduziremos novamente a restrição de racionalidade individual para o participante. Uma alocação implementável que satisfaça a restrição de racionalidade individual é chamada factível, o problema do principal é escolher entre as alocações factíveis aquela que tem maior payoff esperado. Por simplicidade vamos supor que a utilidade de reserva do participante (a utilidade esperada quando ele rejeita o mecanismo do principal) seja independente de seu tipo.

A3) A utilidade de reserva $\underline{u}$ é independente do tipo, isto é, a restrição de participação é:

$$\text{(IR)} \quad u^1\left(x(t), p(t), t\right) \geq 0 \text{ para todo } t$$

Com esta suposição, se u^1 é crescente no tipo $\left(\frac{\partial u^1}{\partial t} > 0\right)$, então IR, a restrição de racionalidade, pode estar ativa somente em $t = \underline{t}$: qualquer tipo $t > \underline{t}$ poderá sempre anunciar $\tau = \underline{t}$, o qual dá a ele utilidade maior que a utilidade do tipo $\underline{t}$, que é no mínimo $\underline{u}$. Por simplicidade de notação vamos supor $\underline{u} = 0$.

Precisaremos também das seguintes suposições:

A4) utilidades quase-lineares:

$$u^0(x, p, t) = v^0(x, t) - p$$
$$u^1(x, p, t) = v^1(x, t) - p$$

Fundenberg e Tirole (1991) assumem que v^0 e v^1 são três vezes diferenciáveis e côncavas em *x*.

A5) *n=1*: A decisão é unidimensional, e CS^{+} é válido, isto é, $\frac{\partial^2 v^1}{\partial x \partial t} \geq 0$;

A6) $\frac{\partial v^1}{\partial t} > 0$;

A7) $\frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial t} \geq 0$ (a qual é satisfeita se v^0 não depende de t)

A8) $\frac{\partial^3 v^1}{\partial x \partial t^2} \leq 0$ e $\frac{\partial^3 v^1}{\partial x^2 \partial t} \geq 0$

A9) *X* é um intervalo $\left[0, \bar{x}\right]$, onde $\bar{x} > \arg\max\left(v^0(x, \bar{t}) + v^1(x, \bar{t})\right)$.

O principal maximiza sua utilidade esperada, sujeito às restrições de racionalidade individual do participante, *IR*, e Compatibilidade de incentivo, *IC*:

$$\max_{(x(\cdot), p(\cdot))} E_t u^0\left(x(t), p(t), t\right)$$

sujeito a $x \in X$ e

$$(IC)\ u^1\left(x(t), p(t), t\right) \geq u^1(x(\tau), p(\tau), t) \text{ para todo } (t, \tau)$$

$$\left(IR\right)\ u^1\left(x(t), p(t), t\right) \geq \underline{u} = 0 \text{ para todo } t$$

Porém este problema pode ser reescrito de uma outra forma:

$$U(t) = \sup_{x \in X} u(x(t), p(t), t)$$

$$X^*(t) = \{x \in X \,/\, u(x, p, t) = U(t)\}$$

$$x^*(t) \in X^*(t) \text{ para todo } t \text{ tal que } X^*(t) \neq \varnothing.$$

Por enquanto ignoraremos a restrição $x \in X$, retornaremos a ela no final da análise. Na maioria das aplicações esta restrição não é ativa. Com as suposições (A3) e (A6) temos que *IR* precisa ser satisfeita apenas em $t = \underline{t}$. Além disso, como as transferências tem custo para o principal, é claro que *IR* é ativa em $t = \underline{t}$.

$$\left(IR'\right)\ u^1(x(\underline{t}), p(\underline{t}), t) = \underline{u} = 0$$

Aqui podemos empregar os resultados apresentados no capítulo 1 para obter o resultado do problema de uma outra forma que a proposta por Fudenberg e Tirole, e utilizar o teorema do envelope na forma integral para reescrever o resultado.

Suponha que o parâmetro de interesse t, esteja em um conjunto arbitrário $t \in [0,1]$, a função de utilidade é quase linear $u^1(x,p,t) = v^1(x,t) + p$. Como estamos supondo que $t \in [0,1]$ a restrição (IR`) passa ser $u^1(x(0), p(0), t) = u(0)$. Seja:

$$U^1(t) = \max_{\tau} u^1(x(\tau), p(\tau), t) = u^1(x(t), p(t), t) = v^1(x(t), t) + p \, .$$

Agora, como $v^1(x,t)$ é côncava em x o teorema de Rademacher assegura que sua derivada existe quase sempre. Então o teorema (1.2) nos assegura que:

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \frac{\partial u^1(x(t), p(t), t)}{\partial t} = \frac{\partial v^1(x(t), t)}{\partial t} \, .$$

Ou simplesmente $U_1^{'}(t) = v_t^1(x(t), t)$. O teorema (1.3) por sua vez nos fornece condições para assegurar que a função-valor ótimo é absolutamente contínua, então pode ser escrita como a integral de sua derivada:

$$U^1(t) = u(0) + \int_0^t u_t(x(s), s) ds \, .$$

Com isso, temos uma forma de escrever a solução do problema bastante geral, que permite relaxar várias suposições sobre a estrutura do conjunto de escolhas.

Além disso, $u^0 = v^0 + v^1 - U^1$, isto é, a utilidade do principal é igual ao excedente social menos a utilidade do participante. Assim, a função objetivo do principal é:

$$\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[v^0(x(t), t) + v^1(x(t), t) - \int_{\underline{t}}^{t} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{t}} (x(\tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t} \right] f(t) dt$$

$$= \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[v^0(x(t), t) + v^1(x(t), t) - \frac{1 - F(t)}{f(t)} \frac{\partial v^1}{\partial t} (x(t), t) \right] f(t) dt$$

Após uma integração por partes do segundo termo.

Agora dizemos que *IC* é equivalente a junção da condição $\frac{\partial U^1}{\partial t} = \frac{\partial v^1}{\partial t}$ e a condição de que $x(\cdot)$ é não-decrescente. O teorema (2) mostra que *IC* implica essas duas condições, e o teorema (3) mostra que a volta (inverso) também é válida.

Assim o programa de otimização do principal é,

$$\max_{\{x(\cdot)\}} \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left[v^0(x,t) + v^1(x,t) - \frac{1-F(t)}{f(t)} \cdot \frac{\partial v^1}{\partial t}(x,t) \right] \cdot f(t)dt \qquad \text{(P1)}$$

sujeito a: $x(\cdot)$ é não-decrescente (monotonicidade);

Uma vez obtido $x(\cdot)$ que é a solução do programa *P1*, pode-se calcular a utilidade indireta do participante:

$$U^1(t) = \int_{\underline{t}}^{t} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{t}}(x(\tilde{t}),\tilde{t})d\tilde{t}$$

E a transferência

$$p(t) = U^1(t) - v^1(x(t),t)$$

Por enquanto a restrição de racionalidade será ignorada no programa *P1* e o chamaremos de programa *P2*. Se a solução do programa *P2* é não decrescente, então ela também é solução do programa geral. Caso contrario, introduzimos a restrição de monotonicidade. A solução do programa *P2* é dada por:

$$\frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial x} = \frac{1-F(t)}{f(t)} \frac{\partial^2 v^1}{\partial x \partial t}$$

Seja $x^*(\cdot)$ solução da equação acima (De A4 e A8, o programa *P2* é côncavo em *x*, assim é satisfeita a condição de segunda ordem).

O principal se depara com um *tradeoff* entre a maximização do excedente total $\left(v^0 + v^1\right)$ e a apropriação da renda informacional do participante $\left(u^1\right)$.

Considere um tipo *t*, aumentando *x* no intervalo $[t, t+dt]$ por δx, o excedente total é aumentado por :

$$\left(\frac{\partial(v^0 + v^1)}{\partial x^1}\delta x\right) f(t)dt.$$

Entretanto a renda do tipo *t + dt* é aumentada por:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v^1}{\partial t}\right)\delta x\right]dt,$$

Bem como é a renda dos tipos em $[t, t+dt]$(os quais tem peso *1 – F(t)*).

No ótimo, o aumento no excedente total deve ser igual ao aumento esperado na renda do participante. Observe que em *t* = *t* a extração de renda não interessa, então $\left(v^0 + v^1\right)$ é maximizado; este resultado é conhecido como não distorção no topo.

3.3.4 Mecanismos com Vários Participantes: Alocações Factíveis, Orçamento Equilibrado e Eficiência

Em desenhos de mecanismos com vários participantes pode-se distinguir um caso onde o principal tem interesses próprios e um outro caso onde há um principal benevolente que tem o objetivo de maximizar a soma do bem-estar dos participantes. È claro, esta distinção é relevante apenas quando o principal otimiza sobre alocações factíveis, por exemplo, no caso de leilões. Algumas suposições adicionais são necessárias para se trabalhar com modelos de desenhos de mecanismos com vários participantes:

1 Os tipos são unidimensionais, a distribuição dos tipos é de conhecimento comum. Eles são distribuídos independentemente por uma função de distribuição F^i em $\left[\underline{t}^i, \overline{t}^i\right]$ com densidade diferenciável e estritamente positiva, f^i.

2 As preferências de cada participante *i* dependem apenas da decisão, de seu próprio tipo e de sua própria transferência: $u^i(x, p^i, t^i)$.

3 E que as preferências são quase-lineares:

$u^i(x, p^i, t^i) + p^i$; para todo *i* em *{1, ... , I}* e, acontece um dos dois casos:

$u^0(x, p, t) = v^0(x, t) - \sum_{i=1}^{I} p^i$, quando o principal visa seu próprio interesse, ou

$u^0(x, p, t) = \sum_{i=0}^{I} v^i(x, t)$, no caso de um principal benevolente.

Onde $v^0(x,t) = B^0(x,t) - C^0(x)$, $C^0(x)$ é o custo monetário para o principal da decisão *x*, e $B^0(x,t)$ é não monetário.

Uma alocação $y(\cdot)$ é dita eficiente (ex post) se $x(t) \in X$ para cada *t* e $x(t)$ maximiza $\sum_{i=0}^{I} v^i(x,t)$ sobre *X*, para todo *t*.

Em muitos problemas de desenhos de mecanismos com vários participantes, não é permitido ao principal ser uma fonte líquida de fundos para os participantes, entretanto o principal deve obter receita suficiente das transferências para cobrir seus custos. Assim nos leva a considerar mecanismos que encontram a restrição do adicional do orçamento equilibrado:

$\sum_{i=1}^{I} p^i(t) \le -C^0(x(t))$; para todo *t*.

A alocação $y(x, p)$ é dita factível se *x* é implementável através de *t*, e *y* é individualmente racional.

Os dois conceitos mais populares de mecanismos são os de mecanismos bayesianos e de mecanismos estratégias-dominantes. Os mecanismos estratégias-dominantes são mecanismos nos quais o anúncio (informação) ótimo de cada participante é independente do anúncio (informações reportadas) dos outros participantes[12]. Como o anúncio ótimo a verdade do princípio de revelação, a definição formal de um mecanismo estratégia-dominante é uma função $y(t)$ tal que, para cada participante $i = 1, ..., I$ e para cada t^i, τ^i, t^{-i},

[12] Esses dois conceitos de soluções são equivalentes para mecanismos com um único participante.

$$u^i(y(t^i,t^{-i}),t^i) \geq u^i(y(\tau^i,t^{-i}),t^i)\,.$$

Cada participante é induzido a dizer a verdade qualquer que seja o tipo dos outros participantes. A restrição de compatibilidade de incentivo para implementação de estratégia dominante é muito mais restrita do que a restrição de compatibilidade de incentivo sob implementação bayesiana. Nesse último caso compatibilidade de incentivo é requerida para valer apenas na média dos tipos t^{-i}, onde toma-se a esperança das crenças do participante *i* sobre t^{-i} condicionado ao seu próprio tipo. Compatibilidade de incentivo bayesiano então distribui as restrições de compatibilidade de incentivo da estratégia-dominante. As condições bayesianas para cada participante também supõem que todos os outros participantes dizem a verdade.

Assim a restrição de compatibilidade de incentivo bayesiana é:

$$E^{t-i}[u^i(y(t^i,t^{-i}),t^i)] \geq E^{t-i}[u^i(y(\tau^i,t^{-i}),t^i)]\,.$$

Quando for possível, um principal pode preferir implementação de estratégia-dominante para seu mecanismo, porque ele não é sensível as crenças dos outros participantes sobre cada um dos outros e não requer que os participantes calculem o equilíbrio em estratégias bayesianas, entretanto focando atenção apenas em mecanismos estratégias-dominantes restringe consideravelmente o conjunto dos mecanismos. Implementação em estratégias-dominantes é uma propriedade bastante interessante quando factível, mas não é claro quanta perda de utilidade o principal deveria estar disposto a tolerar para se ter estratégias-dominantes para os participantes.

Um primeiro resultado de implementabilidade, foi descoberto por Groves (1973) e Clarke (1971) esse resultado afirma que qualquer fornecimento eficiente de bens públicos pode ser implementado sempre que não é exigido orçamento equilibrado. E mais, o fornecimento eficiente pode ser implementado em estratégias dominantes.

A idéia é a seguinte: escolhe a transferência do participante *i* de forma que seu payoff seja igual ao excedente total de todas as partes elevado a constante, como o participante *i* internaliza seu próprio excedente, basta fazer com que sua transferência seja igual ao excedente total menos o seu excedente, assim as transferências são pagamentos de externalidades. Esses mecanismos ficaram conhecidos como mecanismos de Vickrey Clarcke e Groves.

3.4 Conclusão

Neste capítulo apresentamos um modelo geral de desenhos de mecanismos e como o principio de revelação pode ser utilizado para restringir o conjunto de mecanismos de interesse do operador.

Apresentamos também um modelo de desenho de mecanismo com um único agente e utilizamos os novos teoremas de Milgrom e Segal para propor uma outra forma de resolver o problema, possibilitando impor o mínimo possível de restrições sobre o conjunto de escolhas, podendo este ser um conjunto arbitrário, não exigindo convexidade nem outras estruturas topológicas desejáveis. Posteriormente apresentamos um modelo com vários agentes, que é geralmente empregado na teoria dos leilões ou em modelos para fornecimento ótimo de bens públicos.

4 MECANISMOS VICKREY-CLARKE-GROVES

Neste capítulo apresentamos os mecanismos de Vickrey Clarke e Groves. Esse nome se deve às importantes contribuições de Vickrey (1961), que analisou uma situação na qual participantes disputam para compra ou venda de uma coleção de bens. Clarke (1971) e Groves (1973) estudaram problemas relativos a fornecimento eficiente de bens públicos. Groves (1973) analisou um problema de incentivo do líder de uma organização com muitos membros. Esses membros tinham diferentes informações e possibilidades de decisões. O problema do líder era criar uma estrutura ótima de incentivos que levasse os membros a agirem como um time.

Clarke e Groves descobriram um primeiro resultado de implementabilidade, o resultado descoberto por eles afirma que o fornecimento eficiente de qualquer bem público pode ser implementado sempre que não é exigido orçamento equilibrado, afirma também que o fornecimento pode ser implementado em estratégias dominantes.

A característica que distingue os mecanismos *VCG* dos demais está relacionada ás transferências, a idéia dos mecanismos de Vicckrey, Clarke e Groves é que se defina a transferência do participante *i* de forma que seu *payoff* seja igual ao excedente total de todos os demais participantes mais uma constante. Como o participante *i* já internaliza seu próprio excedente, basta fazer a transferência igual ao excedente total menos o excedente dele próprio.

Williams (1999) define os mecanismos *VCG* como uma família de mecanismos na qual a escolha eficiente é sustentada como um equilíbrio em estratégia dominante, isto é, é uma classe de mecanismos eficientes e incentivo-compatíveis nos quais a revelação honesta dos tipos é uma estratégia dominante, a qual é uma noção mais forte que simplesmente compatibilidade de incentivo.

Dito de uma outra forma, os mecanismos *VCG* impõem a cada participante os custos de qualquer distorção que ele possa causar.

O modelo de Vickrey, Clarke e Groves estabelece um ponto de referência pelo qual as análises de desenhos de mecanismos de alocação de recursos subseqüentes devem ser comparadas. Uma boa referência teórica para os mecanismos *VCG* pode ser encontrada em Milgrom (2004).

Além desta introdução, na seção 1 apresentamos as definições gerais de um mecanismo *VCG* e mecanismos diretos (ou mecanismos de revelação direta). Na seção 2 mostramos que em um mecanismo *VCG* dizer a verdade é uma estratégia sempre ótima. Já na seção 3 tratamos do problema de orçamento equilibrado, que surge geralmente em aplicações de desenhos de mecanismos a problemas envolvendo bens públicos, impondo assim uma restrição a mais ao problema. Na quarta seção abordamos a questão da unicidade, onde se busca saber se pode algum outro mecanismo implementar alocações eficientes sob as restrições do problema analisado, e apresentamos os resultados obtidos por Holmstron (1979), onde ele verifica que apenas os esquemas de pagamentos propostos pelos mecanismos VCG são consistentes com os resultados por ele obtidos.

4.1 Definição

Começaremos o desenvolvimento teórico nesta seção introduzindo a notação e definindo mecanismos diretos e mecanismos *VCG*.

Como definido anteriormente, seja $N = \{0,...,n\}$ o conjunto de participantes, com o participante 0 sendo o operador do mecanismo (em alguns casos chamado de principal). Denota-se por *X* o conjunto de possíveis decisões com um elemento típico *x*. Assume-se que o conjunto de participantes é determinado exogenamente e será omitida qualquer análise de incentivos para os participantes. Um resultado para esse mecanismo é um par (x, p) descrevendo uma decisão *x* e um vetor de pagamentos (transferências) positivos ou negativos $p = (p^0, p^1,..., p^n)$ pelos participantes. Por exemplo, em um leilão de primeiro preço com ofertas seladas, a decisão *x* é um vetor onde $x^i = 1$ se o participante *i* obtém o objeto e 0 caso contrario. O vetor de pagamentos associado é *p*, onde $p^i = b^i = -p^0$ se *i* oferta b^i e vence, e nesse caso $p^j = 0$ para todos os outros participantes.

Suponhamos também que cada participante *i* avalia o resultado de acordo com $u^i = ((x, p),\vec{t}) \equiv v^i(x,t^i) - p^i$, isto é, o *payoff* de *i* correspondendo ao resultado (x, p) é a avaliação de *i* da decisão *x*, a qual depende apenas do próprio tipo de *i* que é t^i, menos o pagamento que ele deve fazer. Esta especificação quase-linear da função de utilidade tem um papel indispensável na análise formal para esta situação analisada. A suposição de quase-linearidade implica que os participantes são capazes de fazer qualquer transferência monetária descrita pelo mecanismo, que existe uma transferência monetária que compensa exatamente a qualquer participante por qualquer possível mudança nos resultados, e que redistribuindo riqueza entre os participantes não mudaria a transferência compensatória. Estas suposições são mais adequadas a modelagens aproximadas para algumas situações que para outras. Por exemplo, se os participantes são firmas com ampla liquidez a suposição pode ser uma aproximação bem razoável da realidade, mas se são consumidores com significantes restrições de crédito para transações, então esta suposição pode não ser aceitável.

A função que mapeia os perfis de tipos dos participantes para os resultados é chamada função de desempenho (*performance*). Assim pode-se dizer que desempenho significa a função que mapeia ambientes para resultados. Dada a suposição da descrição de duas partes dos resultados, a *performance* de qualquer mecanismo também pode ser descrita em duas partes. A função *performance* que mapeia tipos para decisões *x*, enquanto a *performanc*e de transferência mapeia tipos para pagamentos (transferências). Quando a decisão refere-se a alocar bens, algumas vezes *x* é chamado de função de desempenho de alocação.

A análise *VCG* algumas vezes tenta alcançar desempenhos eficientes sujeito à restrição de que as transferências somem zero[13]. Dadas as suposições descritas anteriormente, a decisão *x* é eficiente se ela maximiza o valor total $\sum_{i \in N} v^i(x, t^i)$. Por exemplo, no leilão de um único bem a alocação final é eficiente se ela confere o bem ao participante que atribui maior valor ao bem. No modelo aqui estudado, por construção, o total dos pagamentos sempre soma zero, porque o vendedor (ou operador do mecanismo) recebe qualquer soma que os compradores (participantes) pagam.

Em alguns leilões realizados publicamente, o objetivo do desenho é eficieência, como definido acima, embora receita (a transferência total para o operador do mecanismo) possa também ser uma meta importante. Em leilões do setor privado, a receita é sempre um objetivo importante e freqüentemente o único.

Algumas vezes o operador do mecanismo quer realizar um leilão no qual $p^0 = 0$, isto é, no qual nunca existe nenhuma transferência líquida ao operador do mecanismo. Esses mecanismos *orçamento-equilibrado* são úteis, por exemplo, em contextos de regulação, onde o regulador não é autorizado a contribuir ou coletar dinheiro das partes reguladas. Freqüentemente existe uma tensão em desenho de mecanismo entre alcançar resultados eficientes e assegurar orçamento equilibrado.

Os mecanismos *VCG* são mecanismos diretos incentivo-compatíveis. Isto significa que: (1) $S = \Theta$, e que (2) o perfil de estratégias $(\sigma^i(t^i) = t^i)_{i \in N}$ é um equilíbrio.

Dito de outra forma, a primeira condição significa que o operador do mecanismo solicita que cada participante informe um possível tipo. Algumas vezes se refere a

[13] Condição que às vezes é chamada de restrição de orçamento equilibrado.

mecanismos diretos como sendo pares (x, p), deixando o conjunto de estratégias implícito. A segunda condição, compatibilidade de incentivo, significa que informar o tipo honestamente é um equilíbrio de acordo com qualquer conceito de solução que for escolhido. Para mecanismos *VCG* o foco é implementação de estratégia dominante, assim o conceito de solução relevante é que cada participante jogue uma estratégia dominante.

Uma apelação dos mecanismos diretos e incentivos compatíveis é que eles poupam os participantes da necessidade de elaborar os cálculos estratégicos: informar verdadeiramente seu tipo atende ao interesse individual de cada participante. Ao escolher o conceito de solução de estratégias dominantes, um mecanismo direto incentivo compatível equivale à situação na qual informar a verdade conduz a um maior *payoff* que qualquer outra estratégia para todos os tipos possíveis dos oponentes e todas as ações possíveis que os oponentes possam executar. Por exemplo, em um leilão de segundo preço de um único bem, com ofertas seladas, é sempre ótimo para um participante dar um lance igual ao seu valor. Entretanto, esta estratégia de oferta verdadeira é a única estratégia que é sempre ótima, assim ela é uma estratégia dominante. Então um leilão de segundo preço é um mecanismo direto e incentivo compatível com estratégia dominante.

O operador de um mecanismo *VCG* usa os tipos informados para calcular o valor máximo total $V(X, N, \vec{t})$ e uma correspondente decisão maximizando o valor total $\hat{x}(X, N, \vec{t})$ como segue:

$$V(X, N, \vec{t}) = \max_{x \in X} \sum_{j \in N} v^j(x, t^j) \qquad (1)$$

$$\hat{x}(X, N, \vec{t}) \in \arg\max_{x \in X} \sum_{j \in N} v^j(x, t^j) \qquad (2)$$

Pode-se pensar que um mecanismo direto estaria condenado a falhar, porque cada participante parece ter um incentivo a representar erradamente suas preferências para influenciar a decisão em seu favor. Entretanto o incentivo dos participantes depende não apenas da decisão, mas também da transferência monetária, e esta é a parte inteligente e surpreendente dos mecanismos *VCG*.

Os mecanismos *VCG* eliminam incentivos a informações erradas impondo a cada participante o custo de qualquer distorção que ele cause. O pagamento do mecanismo *VCG* para o participante *i* é dado, assim a informação do participante *i* não pode afetar o *payoff* total para o conjunto dos outros participantes, N_{-i}. Observe que $0 \in N_{-i}$, isto é, o conjunto inclui o operador do mecanismo cujo *payoff* é o recebimento do mecanismo.

Com este princípio em mente, pode-se derivar uma fórmula para os pagamentos em mecanismos *VCG*. Com o intuito de deixar claro o efeito da informação do participante *i* (tipo reportado) no resultado, será introduzida uma informação nula hipotética (informação falsa) a qual corresponde ao caso onde o participante *i* informa que ele é indiferente entre as possíveis decisões e interessa-se apenas pelas transferências. Quando *i* presta esta informação falsa, o mecanismo *VCG* otimamente escolhe a decisão $\hat{x}(X, N^{-i}, t^{-i})$. O valor total resultante da decisão para o conjunto de participantes N^{i} seria $V(X, N^{-i}, t^{-i})$, e o operador do mecanismo poderia coletar um pagamento $h^{i}(t^{-i})$ do participante *i*. Assim se *i* presta uma informação nula, o *payoff* total para os participantes no conjunto N_{-i} é $V(X, N^{-i}, t^{-i}) + h^{i}(t^{-i})$.

O mecanismo *VCG* é construído de forma que o *payoff* para os demais participantes seja o mesmo independente da informação prestada pelo participante *i*. Assim, suponha que quando o perfil de tipos informado (reportado) é $\vec{t}$, o pagamento de *i* é $\hat{p}(X, N, \vec{t}) + h^{i}(t^{-i})$, então $\hat{p}(X, N, \vec{t})$ é o pagamento adicional cobrado do participante *i*, sobre o que ele pagaria, se ele utiliza a informação falsa. A decisão $\hat{x}(X, N, \vec{t})$ geralmente depende da informação de *i*, e o *payoff* total para os N_{-i} demais participantes é então $\sum_{j \in N^{-i}} v^{j}(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^{j}) + \hat{p}^{i}(X, N, \vec{t}) + h^{i}(t^{-i})$. Agora igualando este valor total ao valor total do caso em que o participante *i* utiliza a informação falsa:

$$\hat{p}^{i}(X, N, \vec{t}) + h^{i}(t^{-i}) + \sum_{j \in N-i} v^{j}(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^{j}) = h^{i}(t^{-i}) + V(X, N^{-i}, t^{-i}) \qquad (3)$$

Usando a equação (1) pode-se obter a solução para o pagamento extra como segue:

$$\hat{p}^{i}(X, N, \vec{t}) = V(X, N^{-i}, t^{-i}) - \sum_{j \in N^{-i}} v^{j}(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^{j})$$

$$= \sum_{j \in N^{-i}} v^{j}(\hat{x}(X, N^{-i}, t^{-i}), t^{j}) - \sum_{j \in N^{-i}} v^{j}(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^{j}) \qquad (4)$$

De acordo com a equação (4) se a informação do participante *i* leva a uma mudança na decisão $\hat{x}$, então o pagamento extra $\hat{p}^i(X, N, \vec{t})$ é especificado de forma a compensar os demais N^{-i} participantes pela perda que eles sofrem no seu *payoff*.

Agora serão introduzidas algumas definições que serão de grande utilidade.

1) Um mecanismo Vickrey-Clarke-Groves (*VCG*) $(\Theta, (\hat{x}, \hat{p} + h))$ é um mecanismo direto no qual $\hat{x}$ satisfaz (2), $\hat{p}$ satisfaz (4), para todo $N, X, \vec{t}$ e $i \in N$ e os pagamentos são determinados por $\hat{p}^i(X, N, \vec{t}) + h^i(t^{-i})$;

2) Um participante de um mecanismo *VCG* é *pivotal* se $\hat{x}(X, N, \vec{t}) \neq \hat{x}(X, N^{-i}, t^{-i})$, isto é, se ele é capaz de influenciar no resultado;

3) Um mecanismo *pivot* é um mecanismo *VCG* no qual $h^i = 0$ para todo $i \in N$.

Em palavras, um participante é pivotal se a consideração de sua informação é capaz de mudar a decisão, quando comparado a excluir o participante ou ao caso em que ele utiliza a informação falsa. De acordo com a equação (4), se o participante *i* não é *pivotal*, então $\hat{p}^i(X, N, \vec{t}) = 0$. Em um mecanismo *pivot*, os únicos participantes que fazem ou recebem pagamentos diferentes de zero são aqueles que são *pivotais*.

Vickrey inicialmente introduziu o mecanismo *pivo*t em um modelo onde a decisão *x* aloca uma quantidade fixa de um único bem indivisível. No contexto de leilões, um participante não é *pivot* se ele adquire quantidade igual a zero. Assim o mecanismo *pivot* no modelo de Vickrey é um leilão no qual os participantes perdedores não fazem nem recebem pagamentos.

4.2 Estratégias Fracamente Dominadas e Sempre Ótimas

Nesta seção verificamos que as regras de um mecanismo *VCG* necessariamente asseguram que é sempre ótimo para os participantes falar a verdade, independente das informações prestadas pelos demais participantes. Será verificado também que dizer a verdade é muitas vezes uma estratégia dominante, isto é, ela é a única estratégia que é sempre ótima.

Existem circunstâncias nas quais informar verdadeiramente, embora seja sempre ótimo em um mecanismo *VCG*, não é uma estratégia dominante. Por exemplo, suponha que duas partes estão considerando dividir o aluguel de um barco, que custa $200. Uma parte avalia o aluguel em $0 ou $300, e os valores que esta parte pode informar esta restrita ao conjunto {$0, $300}. A outra parte pode assumir qualquer valor entre $0 e $150, sendo que esta parte pode informar qualquer valor no intervalo [$0, $150]. Neste exemplo, o mecanismo *pivot* prescreve que o barco é alugado se e somente se o valor da primeira parte é $300, e nesse caso a primeira parte paga $200, a segunda parte sempre paga $0, e seu valor informado não afeta o resultado. Conseqüentemente, qualquer informação dada pela segunda parte é sempre ótima e qualquer informação de $200 ou mais dada pela primeira parte ótima quando seu valor é no mínimo $200.

O exemplo anterior é construído de forma que às vezes os participantes possam prever que certas informações são irrelevantes. Em poucos exemplos construídos espera-se que falar a verdade seja uma estratégia dominante.

Essas afirmações são formalizadas a partir das seguintes definições. Reportar verdadeiramente é uma estratégia sempre ótima se a condição (*i*) abaixo é válida, e é uma estratégia dominante[14] se, além disso, vale também a condição (*ii*):

i) para todo t^{-i}, $t^i \in \arg\max_{\tilde{t}^i}\{v^i(X,N,\tilde{t}^i,t^{-i}),t^i) - \hat{p}^i(X,N,\tilde{t}^i,t^{-i})\}$;

ii) se $\overline{t}^i \neq t^i$, então para algum t^{-i}, $\overline{t}^i \notin \arg\max_{\tilde{t}^i}\{v^i(\hat{x}(X,N,\tilde{t}^i,t^{-i}),t^i) - \hat{p}(X,N,\tilde{t}^i,t^{-i})$.

Para excluir exemplos irreais como o do aluguel do barco, Milgrom utiliza a seguinte condição:

Todas as informações são potencialmente *pivotais*, isto é, para todo $i \in N$ e t^i, $\tilde{t}^i \in \Theta^i$, existe $t^{-i} \in \Theta^{-i}$ tal que $\sum_{j \in N} v^j(\hat{x}(X,N,\tilde{t}^i,t^{-i}),t^j) < V(X,N,\vec{t})$.

Esta condição assegura que para qualquer informação falsa $\tilde{t}^i$ dada pelo participante *i*, existe algum perfil de tipos, t^{-i}, dos demais participantes tal que a informação falsa conduz o mecanismo a escolher um resultado sub ótimo. Quando esta condição é satisfeita nenhum participante pode estar seguro que uma informação falsa não é prejudicial.

Teorema 1: Em qualquer mecanismo *VCG*, reportar verdadeiramente é uma estratégia *sempre ótima*. Se todas as informações são potencialmente *pivotais*, então reportar verdadeiramente é uma estratégia *dominante.*

Prova:

[14] Em um jogo na forma normal uma estratégia é dominante para um jogador se (1) é a melhor resposta a todo perfil de estratégias de todos os demais opositores, (2) não existe nenhuma outra estratégia com esta propriedade.

Para mostrar que falar a verdade é sempre uma estratégia ótima, fixa o perfil de verdadeiros tipos $\vec{t}$. Quando o participante *i* informa o tipo $\tilde{t}^i$, a decisão escolhida é $\hat{x}(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i})$. Assim, devido à fórmula para o pagamento do participante *i*, seu *payoff* é dado por:

$$\Pi^i(\hat{t}^i / \vec{t}) = [v^i(\hat{x}(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}), t^i) - \hat{p}^i(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}) - h^i(t^{-i})]$$

Utilizando a equação (4), o ganho que o participante *i* obtém em decorrência do desvio é, portanto:

$$\begin{aligned}\Pi^i(\tilde{t}^i / \vec{t}) - \Pi^i(t^i / \vec{t}) &= [v^i(\hat{x}(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}), t^i) - \hat{p}^i(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}) - h^i(t^{-i})] \\ &\quad - [v^i(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^i) - \hat{p}^i(X, N, \vec{t}) - h^i(t^{-i})] \\ &= \sum_{j \in N} v^j(\hat{x}(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}), t^j) - \sum_{j \in N} v^j(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^j) \\ &= \sum_{j \in N} v^j(\hat{x}(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}), t^j) - V(X, N, \vec{t}) \leq 0\end{aligned}$$

O que prova que reportar verdadeiramente é sempre ótimo. Pela suposição de que todas as informações são potencialmente p*ivotais*, para todo $\tilde{t}^i \neq t^i$ existe t^{-i} tal que

$$\Pi^i(\tilde{t}^i / \vec{t}) - \Pi^i(t^i / \vec{t}) = \sum_{j \in N} v^j(\hat{x}(X, N, \tilde{t}^i, t^{-i}), t^j) - V(X, N, \vec{t}) < 0$$

Então, pela definição, dizer a verdade é uma estratégia dominante.

A prova formal implementa o seguinte argumento intuitivo: os pagamentos em um mecanismo *VCG* são definidos de forma que a informação reportada pelo participante *i* não pode afetar o *payoff* total dos demais participantes. Se o participante *i* reporta seu tipo verdadeiro o mecanismo maximiza o verdadeiro *payoff* total. Se ele utiliza a informação falsa de forma a alterar a decisão, então a mudança no *payoff* total deve ser negativa e deve ser igual à mudança no seu próprio *payoff*. Logo, informar seu tipo verdadeiramente ao mecanismo é uma estratégia ótima. Entretanto se toda informação falsa utilizada é às vezes *pivotal*, então ela é às vezes sub ótima, e é dominada por reportar verdadeiramente.

O exemplo mais conhecido de um mecanismo *pivot* é o leilão de segundo preço. No modelo de leilão com valores privados, o valor de um participante para qualquer decisão depende apenas dos bens que o participante adquire e não dos bens adquiridos pelos outros participantes: $v^i(x,t^i) = v^i(x^i,t^i)$ onde $x^i = 1$ se o participante adquire o bem e $x^i = 0$ caso contrario. O valor de não adquirir o bem é normalizado para zero: $v^i(0,t^i) = 0$[15].

Desde que os participantes perdedores não são *pivotais* (porque sua presença não afeta a alocação), eles pagam uma quantidade igual a zero no mecanismo *pivot*.

De acordo com a equação (4), que mostramos novamente em seguida, o preço que cada participante vencedor pago ao mecanismo é a diferença entre dois números:

$$\hat{p}^i(X,N,\vec{t}) = \sum_{j \in N^{-i}} v^j(\hat{x}(X,N^{-i},t^{-i}),t^j) - \sum_{j \in N^{-i}} v^j(\hat{x}(X,N,\vec{t}),t^j)$$

Onde o primeiro número é o valor máximo total para os outros participantes, incluindo o vendedor, quando *i* não participa do leilão, o qual é $\max_{j \neq i} v^j$. Já o segundo número é o valor total para os outros participantes quando *i* vence, o qual é zero. Assim quando o participante *i* vence ele paga $\max_{j \neq i} v^j$, o qual é igual ao segundo maior valor oferecido. Por esta razão o mecanismo *pivot* para o caso de um único bem é chamado leilão de segundo preço.

Em grande parte da literatura o termo leilão de Vickrey é utilizado para se referir a mecanismo pivot em ambientes de leilões. Analisando a equação (4) percebe-se que o preço pago por qualquer participante $i \neq 0$ é igual a perda imposta aos outros participantes ajustando a decisão para levar os valores do participante *i*. Esse preço é sempre não-negativo. Em contraste, os preços pagos em mecanismos *VCG* mais gerais podem ser negativos se h^i for algumas vezes negativo. A possibilidade de pagamentos negativos para alguns participantes faz surgir uma questão sobre a soma dos pagamentos para os participantes $i \neq 0$ ser positiva, negativa ou igual a zero.

---

[15] Escrevemos simplesmente v^i para $v^i(1,t^i)$.

4.3 Orçamento Equilibrado

Em muitos problemas de mecanismos com vários agentes, não é permitido ao principal ser uma fonte líquida de recursos para os participantes. Entretanto o principal deve obter receita suficiente das transferências para cobrir seus custos. Isto leva a considerar mecanismos que satisfaçam uma restrição adicional, de orçamento equilibrado.

$$\sum_{i \in N} p^i(t) \leq -C^0(x(t))$$

Onde $C^0(x)$ representa o custo monetário da decisão x para o principal.

Geralmente em aplicações envolvendo bens públicos o operador do mecanismo pode desejar assegurar que os pagamentos totais dos participantes e para os participantes, excluindo o operador do mecanismo, somem zero. Este caso é chamado *orçamento equilibrado*. Se o operador do mecanismo é uma autoridade publica, isto significa que a autoridade não registra nem déficit nem superávit nesse projeto. Em tais casos, o operador do mecanismo tipicamente não tem valor independente para a decisão, assim o modelo é formulado com $N = \{1,\ldots,n\}$, excluindo o operador do mecanismo do conjunto de participantes.

Definição: Um mecanismo direto (x, p) satisfaz o orçamento equilibrado se para todo Θ finito e para todo $\vec{t} \in \Theta$, a soma dos pagamentos (transferências) é zero:

$$\sum_{i \in N} p^i(X, N, \vec{t}) = 0$$

A soma dos pagamentos requeridos revela que a possibilidade de orçamento equilibrado implica uma restrição na função valor máximo como segue:

$$0 = \sum_{i\in N} p^i(X, N, \vec{t}) = \sum_{i\in N} (\hat{p}^i(X, N, \vec{t}) + h^i(t^{-i}))$$

$$= \sum_{i\in N} (V(X, N_{-i}, t^{-i}) + h^i(t^{-i})) - \sum_{i\in N} \sum_{j\in N_{-i}} v^j(\hat{x}(X, N, \vec{t}), t^j)$$

$$= \sum_{i\in N} (V(X, N^{-i}, t^{-i}) + h^i(t^{-i})) - \sum_{i\in N} [V(X, N, \vec{t}) - v^i(\hat{x}(X, N, \vec{t}))]$$

$$= (n-1)(\sum_{i\in N} f^i(t^{-i}) - V(X, N, \vec{t})) \tag{5}$$

Onde $$f^i(t^{-i}) = \frac{V(X, N^{-i}, t^{-i}) + R^i(t^{-i})}{n-1} \tag{6}$$

Assim um condição necessária para orçamento equilibrado é que existam funções f^i tais que para todo $\vec{t}$:

$$V(X, N, \vec{t}) = \sum_{i\in N} f^i(t^{-i}) \tag{7}$$

Holmstrom (1971) observou que a mesma condição é verdadeiramente necessária e suficiente para existência de um mecanismo *VCG* com orçamento equilibrado.

Teorema 2: Existirá um mecanismo *VCG* que satisfaça orçamento equilibrado se e somente se existem funções f^i tais que (7) se verifique para todo $\vec{t}$.

Prova:

A necessidade de (7) foi estabelecida acima. Para suficiência, dadas as funções f^i, façamos $h^i(t^{-i}) = (n-1) f^i(t^{-i}) - V(X, N^{-i}, t^{-i})$ observe que isto implica em (6) ,e então em (5).

Uma alocação $y = (x, p)$ é dita factível se x é implementável por p e y é individualmente racional; y é factível sob orçamento equilibrado se satisfaz também a restrição de orçamento equilibrado.

Segundo Fundenberg e Tirole (1991) o problema é que alocações eficientes são geralmente não factíveis sob a restrição de orçamento equilibrado quando existe informação incompleta, pode ser viável apenas no caso em que a restrição de racionalidade individual é muito fraca. Se não for requerido orçamento equilibrado, a restrição de racionalidade individual é irrelevante, porque o principal pode induzir os agentes a participarem dando a eles grandes transferências positivas, e assim alocações eficientes são geralmente factíveis.

4.4 Unicidade

Pode um outro mecanismo além do *VCG* implementar decisões eficientes com estratégias dominantes? A resposta depende de suposições adicionais sobre o ambiente. Por exemplo, se existe um comprador de quem o valor pertença ao conjunto {0, 10} e um vendedor do qual o custo de ofertar um bem é 5, então o seguinte mecanismo direto implementa um resultado eficiente em estratégias dominantes. No mecanismo, cada participante deve reportar um valor de seu conjunto de possibilidades. O vendedor não tem escolha, a não ser informar que seu custo é 5. Se o comprador reportar 10 a troca ocorre a um preço igual a 8, do contrário não ocorre a troca e não existe transferência.

Pode-se verificar que reportar verdadeiramente seu valor é uma estratégia dominante para ambos os lados e o resultado é sempre eficiente. Um mecanismo *VCG* que não tenha transferências quando não ocorre a troca é um mecanismo *pivot*, e o mecanismo *pivot* nesse caso estabelece um preço igual a 5. Segue que o mecanismo sugerido não é um *VCG*.

O exemplo anterior se deve a natureza discreta do espaço de tipos possíveis. De acordo com o próximo teorema, quando o espaço de tipos é suavemente conectado, apenas mecanismos *VCG* podem implementar resultados eficientes em estratégias dominantes.

Teorema 3: Suponha que para todo i, $\Theta^i = [0,1]$ (ou simplesmente que Θ^i é um caminho suavemente conectado)[16] e que para cada decisão de resultado x, $v^i(x, t^i)$ é

[16] Um conjunto Θ é dito suavemente conectado (*smoothly path conected*) se para todos dois pontos $\theta,\ \theta' \in \Theta$ existe uma função diferenciável $f : [0,1] \to \Theta$ tal que $f(0) = \theta$ e $f(1) = \theta'$.

diferenciável em seu segundo argumento. Então qualquer mecanismo direto, eficiente e incentivo compatível, é um mecanismo *VCG*.

Essa versão do teorema (3) apresentada aqui foi primeiramente provada por Holmstrom (1979), generalizando o trabalho anterior de Green e Laffont (1977), que empregaram suposições mais restritivas sobre o espaço de tipos.

Holmstrom queria saber se qualquer mecanismo além dos mecanismos *VCG* poderia implementar decisões eficientes em estratégias dominantes. Ele também derivou um lema estabelecendo que uma certa fórmula de *payoff* se verifica para todos os mecanismos factíveis em uma solução por estratégia dominante. Holmstrom demonstrou que apenas o esquema de pagamentos proposto pelos mecanismos *VCG* prescreve pagamentos consistentes com esta fórmula.

4.5 Conclusão

Nesta seção foram apresentadas as importantes contribuições de Vickrey, Clarke e Groves (*VCG*) para a teoria dos desenhos de mecanismos. A primeira formulação de um mecanismo de incentivo foi desenvolvida por Vickrey (1961). Vickrey desenvolveu seu mecanismo como um procedimento para evitar especulação de monopolistas e monopsonistas em licitações públicas. Aproximadamente uma década mais tarde, Clarke (1971) e Groves (1969), independentemente redescobriram tais mecanismos. Clarke (1971) desenvolveu um exemplo particular desses mecanismos em um modelo de equilíbrio parcial. O problema era para determinar a quantidade ótima de um bem público sobre a suposição restritiva de que a elasticidade renda da demanda pelo bem público é identicamente zero. Groves (1971) desenvolveu e formulou analiticamente a classe geral desses mecanismos de incentivos ótimos no contexto de modelos de decisões gerais de times. Os mecanismos de Groves foram desenvolvidos para fornecer um método de avaliação de tomadores de decisões descentralizados. O objetivo era criar uma estrutura de incentivos que levasse esses tomadores de decisões a agirem como um time. Mais tarde Groves e Loeb (1975) e Groves (1976) ampliaram esses mecanismos para problemas de decisões de escolha ótima em modelos de produção com presença de externalidades, e níveis de escolha ótima de insumos públicos na produção.

A análise de *VCG* tornou-se um referencial importante. É o trabalho pelo qual a maioria dos outros trabalhos de desenhos de mecanismos é julgada e em termos os quais sua contribuição é avaliada. Existem profundas e surpreendente conexão entre a teoria *VCG* e muitas partes da teoria dos leilões.

5 EXEMPLOS E APLICAÇÕES DE DESENHOS DE MECANISMOS

Neste capítulo são apresentadas algumas das aplicações mais comuns de desenhos de mecanismos. Além desta introdução na segunda seção apresentamos um problema simples de comércio bilateral e mostramos que para essa situação não existe um mecanismo que é incentivo compatível e que satisfaça as restrições de racionalidade individual e orçamento equilibrado. Esse problema foi generalizado para o caso de comércio multilateral, e uma boa exposição pode ser encontrada em Williams (1999).

Na segunda seção mostramos que a maioria dos problemas de leilões podem ser modelados de acordo com a teoria dos desenhos de mecanismos. Nesta seção mostramos que os resultados apresentados no capítulo 1 podem ser utilizados para se obter uma solução menos restritiva para esses problemas. Apresentamos também um exemplo do leilão de Vickrey (ou leilão de segundo preço), que é um típico exemplo de mecanismo *pivot*.

Na terceira seção apresentamos um problema de escolha social, baseado no trabalho de Williams (1999). Este tipo de problema foi inicialmente formulado e analisado por Clarke (1971) e Groves (1973), que analisavam o problema de fornecimento eficiente de bens públicos e mecanismos de incentivo que poderiam ser usados por um líder para levar os membros de uma organização a agirem de acordo com seu interesse. Na última seção concluímos o capítulo.

5.1 Uma Aplicação ao Comércio Bilateral

Suponha que um vendedor tenha uma bem indivisível para vender a um comprador, os custos de produzir o bem $C \in \left[\underline{c}, \overline{c}\right]$ é uma informação privada do vendedor. Suponha também que existe um comprador que atribui valor $V \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$ ao bem e que apenas ele conhece esse valor.

O custo do vendedor, *C*, é distribuído de acordo com a distribuição $F(\cdot)$ e o valor do comprador, *V*, é distribuído de acordo com a distribuição $G(\cdot)$. As distribuições $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ tem densidades contínuas $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$, respectivamente, e tem suporte total em seus intervalos[17]. Então, existe informação incompleta dos dois lados do mercado. Finalmente

[17] Williams (1999) considera o caso em que o suporte das densidades é o intervalo $\left[0,1\right]$.

suponha que $\underline{v} < \overline{c}$ e $\overline{v} \geq \underline{c}$, assim os suportes se sobrepõem e às vezes é eficiente não realizar a troca (venda).

A questão é: Existe alguma forma de assegurar que a troca ocorra sempre que ela deveria ocorrer? Para responder a questão adota-se uma perspectiva de desenho de mecanismo.

Um mecanismo decide quando ocorre a troca, também decide quanto o comprador paga pelo bem, x^b, e a quantia recebida pelo vendedor, x^v. Se o bem é comercializado o comprador obtém um ganho líquido de $V - x^b$, e o vendedor obtém um ganho líquido de $x^v - C$ [18].

Um mecanismo é eficiente se sempre que $V > C$ o bem é produzido e alocado para o comprador, caso o contrário o bem não deve ser produzido.

Em tais problemas de comércio bilateral não existe um mecanismo que é eficiente, incentivo compatível, individualmente racional e que ao mesmo tempo seja orçamento equilibrado.

O mecanismo de Groves nesse cenário é um mecanismo de dois preços no qual o comprador anuncia um valor *V* e o vendedor anuncia um custo *C*. Se $V \leq C$ o objeto não é vendido e nenhum pagamento é feito, se $V > C$ o objeto é vendido e o comprador paga $\max\{C, \underline{v}\}$, e o vendedor recebe $\min\{V, \overline{c}\}$.

Pode-se verificar que é uma estratégia fracamente dominante para o comprador anunciar $V = v$ e o vendedor anunciar $C = c$. Este mecanismo é eficiente desde que, em equilíbrio, o objeto é vendido quando $v > c$.

Um comprador com valor $\underline{v}$ tem *payoff* esperado de 0, e qualquer comprador com um valor $v \geq \underline{v}$ tem *payoff* esperado positivo. Da mesma forma, um vendedor com custo $\overline{c}$ tem *payoff* esperado de 0, e qualquer vendedor com custo $c \leq \overline{c}$ tem *payoff* esperado positivo. Assim, o mecanismo é individualmente racional.

Quando $V > C$ ocorre a troca, o fato de que $\underline{v} < \overline{c}$ implica que a quantidade que o vendedor recebe $x^v = \min\{V, \overline{c}\}$ é maior que a quantidade paga pelo comprador $x^b = \max\{C, \underline{v}\}$. Nesse contexto o mecanismo *VCG* sempre apresenta um déficit. Realmente,

---

[18] Nesse momento não impõe nenhuma restrição de que x^b ou x^v seja positivo ou negativo, nem assume orçamento equilibrado, $x^b = x^v$.

para qualquer realização de V e C tal que $V > C$, o déficit $x^v - x^b = V - C$, o qual é exatamente igual ao ganho *ex post* que resulta do comércio.

Dito de outra forma, a família de mecanismos *VCG*, conforme descrita anteriormente, define a transferência (ou pagamento) tal que inclui uma taxa adicional k^s e k^b para vendedor e comprador que são feitas independente da troca ocorrer ou não. Segue que em um mecanismo *VCG* $E_c\left[U^s(c)\right] = \Gamma - k^s$ e $E_v\left[U^b(v)\right] = \Gamma - k^b$, onde Γ é o ganho esperado *ex-ante* da troca. Note que Γ é igual a $E_t[\sum_i v^i(x(t), t^i)]$ no modelo geral. A restrição orçamentária *ex-ante* é então $-\Gamma + k^b + k^s \geq 0$, o que implica em $k^b + k^s > 0$. O vendedor com custo igual a um e o comprador com valor igual a 0 nunca trocam, logo $U^s(1) = -k^s$ e $U^b(0) = -k^b$. A restrição de racionalidade individual implica $k^b, k^s \leq 0$, o que contradiz $k^b + k^s > 0$.

Suponha que exista algum outro mecanismo que é incentivo compatível e eficiente. Então, existe uma constante *K* tal que o pagamento esperado para qualquer comprador com valor *v* sob este mecanismo difere de seu pagamento esperado sob o mecanismo *VCG* por exatamente *K*. similarmente, existe uma constante *L* tal que a receita esperada de qualquer vendedor com custo *c* sob este mecanismo difere de sua receita esperada sob o mecanismo *VCG* por exatamente *L*.

Suponha que esse outro mecanismo seja também individualmente racional. Desde que no mecanismo *VCG* um comprador com valor $\underline{v}$ obtém um *payoff* esperado de 0, deve-se ter $K \leq 0$. Similarmente, desde que um vendedor com custo $\overline{c}$ obtém um *payoff* esperado de 0, tem-se $L \geq 0$.

O déficit esperado sob este outro mecanismo é o déficit esperado sob o mecanismo *VCG* mais $L - K \geq 0$. Mas desde que o mecanismo *VCG* apresenta um déficit, pode-se dizer que todos os outros mecanismos também terão um déficit.

Assim, não existe um mecanismo eficiente que é incentivo compatível, racional individualmente e orçamento equilibrado.

5.2 Desenho de Mecanismo em Leilões

Um leilão é uma das muitas formas que um vendedor pode usar para um vender um objeto para potenciais participantes com valores desconhecidos. Em um leilão, o objeto é vendido a um preço determinado pela competição entre os participantes de acordo com um conjunto de regras estipuladas pelo vendedor (o formato do leilão).

Consideremos uma situação onde o vendedor tem um objeto indivisível para vender e existem *N* potenciais participantes neutros ao risco (agentes neutros ao risco) do conjunto $N = \{1,...,N\}$. Os participantes têm valores privados que são independentemente distribuídos. O valor que o comprador *i* atribui ao bem que está sendo leiloado, t^i sai de um intervalo $\Theta^i = \left[0, \omega^i\right]$ de acordo com a função de distribuição F^i, com função densidade de probabilidade f_i.

Seja $\Theta = \Theta^1 \times ... \times \Theta^N$ o produto dos conjuntos de valores dos *N* participantes. E para todo *i*, seja $\Theta^{-i} = \Theta^1 \times ... \times \Theta^{i-1} \times \Theta^{i+1} \times ... \Theta^N$ o produto dos valores de todos os outros participantes que não o *i*. Define $f(\vec{t})$ como a densidade conjunta de $\vec{t} = (t^1,...,t^N)$. Como os valores são independentemente distribuídos, pode-se escrever $f(\vec{t}) = f_1(t^1) \times ... \times f_n(t^n)$. Similarmente $f_{-i}(t^{-i})$ é a função de densidade conjunta de $t^{-i} = (t^1,...,t^{i-1},t^{i+1},...,t^N)$.

Um mecanismo de venda (B, π, P) tem os seguintes componentes: Um conjunto de possíveis ofertas[19] (mensagens) para cada participante *i*, uma regra de alocação (função de alocação) $\pi : \mathrm{B} \to \Delta$, onde Δ é o conjunto das distribuições de probabilidades sobre o conjunto dos *N* participantes, e uma regra de pagamento (ou função de transferência) $p : \mathrm{B} \to \Re^N$.

Uma regra de alocação (função de alocação) determina a probabilidade $\pi^i(b)$ que o participante *i* obtenha o objeto como função das *N* mensagens enviadas (*b* denota o vetor de mensagens,ou valores, informados). Uma regra de pagamentos (ou função de transferências) determina o pagamento esperado para o comprador *i*, $p^i(b)$ como função das *N* mensagens.

Note que tanto um leilão de primeiro preço como um leilão de segundo preço, são mecanismos. O conjunto dos lances possíveis , β^i, em ambos os casos pode seguramente supor que seja Θ^i. Supondo que não exista preço de reserva, a regra de alocação nos dois casos é $\pi^i(b) = 1$ se $b^i > \max_{j \neq i} b^j$ e $\pi^i(b) = 0$ para $j \neq i$. A única diferença entre eles é a regra de pagamento. Para o leilão de primeiro preço $p^i(b) = b^i$ se $b^i > \max_{j \neq i} b^j$ e

[19] Essas ofertas são os valores que cada agente atribui ao bem sendo leiloado, em um modelo mais geral é o tipo do agente.

$p^j(b) = 0$ para $i \neq j$. Para um leilão de segundo preço, $p^i(b) = \max_{i \neq j} b^j$ se $b^i > \max_{j \neq i} b^j$ e $p^j(b) = 0$ para $i \neq j$.

Todo mecanismo define um jogo de informação incompleta entre os agentes. Uma *N-upla* de estratégias $\beta^i : \left[0, \omega^i\right] \rightarrow \mathrm{B}^i$ é um equilíbrio do mecanismo se para todo *i* e para todo t^i, dadas as estratégias dos β^{-i} agentes, $\beta^i(t^i)$ maximiza o *payoff* esperado de *i*.

Agora podemos utilizar o princípio da revelação, descrito anteriormente, para obter uma classe menor e mais simples de mecanismos. Essa classe menor consiste dos mecanismos para os quais o conjunto de mensagens é o mesmo conjunto de valores (ou tipos), isto é, para todo *i*, $\beta^i = \Theta^i$. Esses mecanismos são chamados mecanismos diretos (ou mecanismos de revelação direta), já que todo participante é questionado a informar diretamente um valor (ou o seu tipo).

Um mecanismo direto (Q, P) consiste de um par de funções $Q : \Theta \rightarrow \Delta$ e $P : \Theta \rightarrow \Re^N$, onde $Q^i(\vec{t})$ é a probabilidade de que *i* obtenha o objeto (função de alocação), dado $\vec{t}$, e $P^i(\vec{t})$ é o pagamento (transferência) esperado para *i*. Se o equilíbrio é a situação na qual cada agente informa seu verdadeiro valor (tipo), então o mecanismo direto é dito ter um equilíbrio verdadeiro (ou, dizemos que esse mecanismo é incentivo compatível). O par $(Q(\vec{t}), P(\vec{t}))$ será dito o resultado do mecanismo em $\vec{t}$.

O Principio da Revelação mostra que o resultado obtido por qualquer equilíbrio de qualquer mecanismo, pode ser replicado pelo equilíbrio verdadeiro de algum mecanismo direto (equilíbrio onde todos os agentes participam do mecanismo e passam sua informação corretamente). Dessa forma, sem perda de generalidade, podemos restringir atenção aos mecanismos diretos.

Proposição 1: Principio da Revelação:

Dado um mecanismo e um equilíbrio para este mecanismo, existe um mecanismo direto no qual:

i) Revelar seu valor (tipo) honestamente é um equilíbrio para cada participante;

ii) O resultado é o mesmo que é obtido no equilíbrio do mecanismo original.

Prova:

Seja $Q:\Theta \to \Delta$ e $P:\Theta \to \Re^N$. Definidos como $Q(\vec{t}) = \pi(\beta(\vec{t}))$ e $P(\vec{t}) = p(\beta(\vec{t}))$. Em outras palavras, o mecanismo direto (Q, P) é uma composição (função composta) de (π, p) e β. O resultado segue imediatamente.

A idéia básica do princípio da revelação para esse caso é que fixando um mecanismo e um equilíbrio para esse mecanismo, β, ao invés dos agentes enviarem mensagens, $b^i = \beta^i(t^i)$, e então aplicar as regras do mecanismo para ver quem vence – quem vence e quanto paga – o operador do mecanismo poderia solicitar que os participantes informassem diretamente seus valores (tipos) t^i e então assegurar que o resultado seja o mesmo que se ele tivesse submetido o lance $\beta^i(t^i)$. Dito de outra forma, o mecanismo direto faz os cálculos do equilíbrio automaticamente para os participantes.

Agora suponhamos que algum participante considere melhor pra ele não informar seu valor (tipo) verdadeiramente e informe que seu valor (tipo) é z_i enquanto na verdade é t^i. No mecanismo original esse participante deveria preferir informar $\beta^i(z^i)$ em vez de $\beta^i(t^i)$, mas desde que $\beta^i(t^i)$ é um equilíbrio, isto é uma contradição.

Dado um mecanismo direto (Q, P), define:

$$q^i(z^i) = \int_{\Theta^{-i}} Q^i(z^i, \Theta^{-i}) f_{-i}(t^{-i}) dt^i \qquad (1)$$

Como a probabilidade de que o participante *i* vença quando ele informa que seu valor (tipo) é z^i e todos os demais participantes dizem a verdade.

Similarmente define:

$$p^i(z^i) = \int_{\Theta^{-i}} P^i(z^i, t^{-i}) f_{-i}(t^{-i}) dt^{-i} \qquad (2)$$

Como o pagamento (ou transferência) esperado quando ele informa z^i e todos os demais participantes dizem a verdade. É importante notar que como os valores (tipos) são independentemente distribuídos, a probabilidade de vencer e a transferência esperada dependem apenas do valor (tipo) informado z^i e não do valor (tipo) verdadeiro, t^i. O *payoff* esperado do participante i quando ele informa ao mecanismo z^i, mas seu verdadeiro tipo é t^i, novamente supondo que os demais agentes disseram a verdade, pode ser escrito como:

$$q^i(z^i).t^i - p^i(z^i) \qquad (3)$$

O mecanismo direto de revelação é dito ser incentivo compatível (IC) se para todo i, para todo t^i e para todo z^i:

$$U^i(t^i) = q^i(t^i).t^i - p^i(t^i) \geq q^i(z^i).t^i - p^i(z^i) \qquad (4)$$

U^i, é a função *payoff* de equilíbrio, ou função valor máximo do problema.

Compatibilidade de incentivo tem implicações simples, mas muito fortes. Para cada valor (tipo) informado z^i, o *payoff* esperado $q^i(z^i).t^i - p^i(z^i)$ é uma função afim do verdadeiro valor (tipo) t^i. Então compatibilidade de incenitivo implica que:

$$U^i(t^i) = \max_{z^i \in \Theta}\{q^i(z^i).t^i - p^i(z^i)\}$$

Isto é, U_i[20] é um máximo de uma família de funções afim, portanto é uma função convexa. Podemos utilizar o teorema 1.2 para obter a derivada da função de valor máximo[21] (em todo ponto que U_i for diferenciável):

$$U_i^{'}(t^i) = q^i(t^i) \qquad (6)$$

A derivada da função de valor máximo é obtida pela derivação da função objetivo em relação ao parâmetro, e avaliando no ponto de ótimo. Como U_i é convexa:

$$\frac{\partial^2 U^i}{\partial t_i^2} \geq 0 \text{, logo } \frac{\partial q^i(t^i)}{\partial t^i} \geq 0$$

E isto implica que q_i é uma função não-decrescente.

[20] U_i é uma função de valor máximo, a saber, é a função de utilidade indireta do agente i, assim pode-se utilizar o teorema do envelope para obter sua derivada imediatamente.

[21] Krishna (2002) obtém esse resultado de uma outra forma, impondo algumas outras restrições ao problema.

Mas o teorema 1.3 nos assegura condições para que U^i seja absolutamente contínua e toda função absolutamente contínua pode ser escrita como a integral de sua derivada, assim temos que:

$$U^i(t^i) = U^i(0) + \int_0^{t^i} q^i(\tau^i)d\tau^i \qquad (7)$$

O que implica que além de uma constante, o *payoff* esperado para um participante em um mecanismo direto que é incentivo compatível (Q,P) depende somente da regra de alocação *Q*. Se (Q,P) e $(Q,\overline{P})$ são dois mecanismos Incentivo Compatíveis com a mesma regra de alocação *Q*, mas com diferentes regras de regras de pagamentos (funções de transferências), então a função payoff esperado associada aos dois mecanismos, U^i e $\overline{U}^i$, respectivamente, diferem no máximo por uma constante – os dois mecanismos são payoff equivalentes. Dito de outra forma, a forma da função payoff esperado é determinada completamente pela regra de alocação *Q*. Sendo que a regra de pagamento (função de transferência) *P* serve unicamente para determinar as constantes $U^i(0)$. Finalmente, observamos que um mecanismo é Incentivo Compatível se somente se a função q_i associada é não decrescente. Já afirmamos que Incentivo Compatível implica que q_i é não-decrescente. Para ver a volta, basta observar que a equação (5) pode ser reescrita como segue:

$$\int_{t^i}^{z_i} q^i(\tau^i)d\tau^i \geq q^i(t^i)(z_i - t^i)$$

Usando (7), e isto certamente se matem desde que q^i é não decrescente.

Escrever o resultado na forma integral é de grande importância para a teoria dos leilões, foi utilizado inclusive para estabelecer o Teorema da Equivalência de Receitas e o teorema da eficiência de Myerson e Satterthwaite, para esse caso Myerson (1991) usou uma forma linear. Já o uso do teorema do envelope para conjuntos de escolhas arbitrários de Milgrom e Segal (2002) permite estabelecer o resultado na forma integral para mecanismos arbitrários de uma forma bem geral.

Um exemplo clássico de um mecanismo *pivot* é o leilão de Vickrey, ou leilão de segundo preço. Em um modelo de leilão com valores privados, o valor de um participante para qualquer decisão depende apenas dos bens que o participante adquire e não dos bens adquiridos pelos outros participantes: $v^i(x,t^i) = v^i(x^i,t^i)$ onde $x^i = 1$ se o participante adquire o bem e $x^i = 0$ caso contrario. O valor de não adquirir o bem é normalizado para zero: $v^i(0,t^i) = 0$[22].

Desde que os participantes perdedores não são *pivotais* (porque sua presença não afeta a alocação), eles pagam uma quantidade igual a zero no mecanismo *pivot*.

De acordo com a equação (4) do capítulo 3, que mostramos novamente em seguida, o preço que cada participante vencedor pago ao mecanismo é a diferença entre dois números:

$$\hat{p}^i(X,N,\vec{t}) = \sum_{j\in N^{-i}} v^j(\hat{x}(X,N^{-i},t^{-i}),t^j) - \sum_{j\in N^{-i}} v^j(\hat{x}(X,N,\vec{t}),t^j)$$

Onde o primeiro número é o valor máximo total para os outros participantes, incluindo o vendedor, quando *i* não participa do leilão, o qual é $\max_{j\neq i} v^j$. Já o segundo número é o valor total para os outros participantes quando *i* vence, o qual é zero. Assim quando o participante *i* vence ele paga $\max_{j\neq i} v^j$, o qual é igual ao segundo maior valor oferecido. Por esta razão o mecanismo *pivot* para o caso de um único bem é chamado leilão de segundo preço.

Vickrey originalmente introduziu o leilão de segundo preço como um modelo de leilão ascendente, tal como esses leilões comuns nos *sites* de leilão na internet. Para desenvolver a conexão devemos ressaltar o fato de que *sites* de leilão como *eBay* e *Amazon Leilões* incentivam os participantes a utilizarem uma facilidade *proxy bidder*, o participante informa um preço máximo que ele está disposto a pagar para a *proxy bidder* (seu preço máximo). A *proxy bidder* mantém esta informação secreta e dá lances conforme o desejo do participante no leilão ascendente. Sempre que o participante não tem o maior preço a *proxy bidder* eleva seu lance por um acréscimo positivo, não excedendo o máximo especificado. Se todos os participantes usarem a *proxy* então o resultado seria que o participante que especificou o maior preço máximo adquire o item e paga um preço igual (ou aproximadamente igual) ao segundo maior preço máximo. Se a frase preço máximo for substituída por preço de lance então fica equivalente a mesma regra que descreve o resultado de um leilão de Vickrey para um único bem. Na linguagem de teoria dos jogos, o leilão inglês

[22] Escrevemos simplesmente v^i para $v^i(1,t^i)$.

com *proxy bidders* e o leilão de segundo preço são estrategicamente equivalentes: existe um mapeamento um pra um entre os conjuntos de estratégias tal que aquele perfil de estratégias correspondentes conduz a resultados idênticos.

Em grande parte da literatura o termo leilão de Vickrey é utilizado para se referir a mecanismo *pivot* em ambientes de leilões. Analisando a equação (4) percebe-se que o preço pago por qualquer participante $i \neq 0$ é igual a perda imposta aos outros participantes ajustando a decisão para levar os valores do participante *i*. Esse preço é sempre não negativo. Em contraste, os preços pagos em mecanismos *VCG* mais gerais podem ser negativos se h^i for algumas vezes negativo. A possibilidade de pagamentos negativos para alguns participantes faz surgir uma questão sobre a soma dos pagamentos para os participantes $i \neq 0$ ser positiva, negativa ou igual a zero.

5.3 O Problema de Escolha Social

Williams (1999) analisou um problema fundamental na literatura de desenho de mecanismo. Um elemento de um conjunto *X*[23] (conjunto das alternativas sociais) pode ser selecionado por *n* participantes.

A função de utilidade do participante é suposta ser quase-linear na alternativa social e na transferência, e depende do tipo do agente $t \in [0,1]$. Um conjunto de tipos possíveis com esse formato foi proposto por Milgrom e Segal (2002). Assim a função de utilidade assume um formato quase-linear na valoração e no pagamento:

$$u(x, p, t) = v(x, t) - p$$

Onde p é a transferência monetária do agente (pode ser negativa ou positiva).

Conforme Harsany (1967-1968), o uso estratégico de informação privada é modelada como um jogo não cooperativo de informação incompleta.

Um mecanismo de revelação direta especifica uma alternativa social e um vetor de transferências monetárias como função dos tipos dos participantes. Neste cenário se diz que um mecanismo é incentivo compatível se uma alternativa social que maximiza a soma das valorações é escolhida quando os participantes informam os tipos honestamente.

---

[23] Não é imposta nenhuma restrição sobre a cardinalidade de *X*.

Especificamente supõe que existe uma função *x*(*t*) tal que $x(t) \in \arg\max \sum_i v^i(x, t^i)$ para cada *t*.

O resultado ótimo para um participante do tipo t constitui uma correspondência de escolha $x^*(t)$ implementada pelo mecanismo, e pode ser descrita por:

$$x^*(t) = \{x \in X : u(x, p, t) = V(t)$$

E a utilidade de equilíbrio do participante no mecanismo, *V*(*t*), é dada por:

$$V(t) = \sup_{x \in X} u(x, p, t) .$$

Supondo que $x^*(t)$ é um conjunto não vazio. Qualquer seleção $x(t) \in x^*(t)$ é uma regra de escolhas (ou função de alocação) implementada pelo mecanismo.

Da definição de um mecanismo de Groves, temos que a transferência é definida por $p(t) = \sum_{j \neq i} v^j(x(t), t^j)$. Assim podemos assumir que a função de utilidade do participante é diferenciável[24], supondo que ela é também absolutamente contínua para todo *t* e $x \in X$, e que $\sup_{x \in X} |u_t(x, p, t)|$ é integrável em $[0,1]$[25]. Podemos utilizar os resultados apresentados no capítulo 1 para assegurar que a utilidade de equilíbrio do agente, *V*, em qualquer mecanismo que implemente uma dada regra de escolha (ou função de alocação) *x* pode ser representada na forma integral:

[24] *v*(*x*, *t*) é côncava por suposição, pelo teorema de Rademacher, é diferenciável.

[25] Segundo Milgrom e Segal (2002), se a função de utilidade do participante é do tipo quase-linear e a valoração $v(z, t)$, onde *z* é um elemento do conjunto de escolhas, tem diferenças estritamente crescentes em (*z*, *t*), então o teorema da seleção monótona implica que para qualquer seleção $x(t) = (z(t), p(t)) \in x^*(t)$, $z(t)$ é não decrescente em *t*. Além disso, sob diferenças estritamente crescentes, $v_t(z, t)$ é não decrescente em *z*, e portanto $u_t(x(s), p(s), t) = v_t(z(s), t) \in [v_t(z(0), t), v_t(z(1), t)]$ para todo *s*. Fazendo $X^* = \{x(s) : s \in [0,1]\}$, temos que $\sup_{x \in X} |u_t(x, p, t)| \leq \max\{|v_t(z(0), t)|, |v_t(z(1), t)|\}$, que é integrável em $[0,1]$. Isto permite aplicar o teorema 1.3, do capítulo 1, e reduzir o conjunto de escolhas X^* e obter a representação do resultado na forma integral.

$$V(t) = V(0) + \int_0^t u_t(x(s), p(s), s)ds$$

Segundo Milgrom e Segal (2002) escrever o resultado na forma integral é um passo chave em problemas de desenho de mecanismos. Mirrlees (1971), Laffont e Maskin (1980) e Fundenberg e Tirole (1991) derivaram esta condição impondo restrições sob o conjunto de alocações possíveis (conjunto de escolhas).

Milgrom e Segal (2002) afirmam que isto não é satisfatório do ponto de vista de desenho de mecanismo, porque eliminam da análise alguns mecanismos *a priori*. Além disso, quando a função de utilidade do agente não é côncava, regras de escolha que são ótimas para o operador do mecanismo (um planejador central benevolente ou um principal com interesse próprio) podem ser descontínuas.

5.4 Conclusão

Neste capítulo apresentamos algumas das principais aplicações da teoria de desenho de mecanismo. Devemos ressaltar, porém, que existem muitas outras situações às quais a teoria dos desenhos de mecanismos poderia ser aplicada. Por exemplo, Mirrlees (1971) analisa uma situação de tributação ótima sob a ótica dos desenhos de mecanismos. Esse trabalho de Mirrlees inclusive se tornou uma referência para o estudo de problemas relativos a tributação ótima.

Em quase todos os exemplos apresentados foi chamada atenção para importância de se escrever a utilidade de equilíbrio do agente na forma integral. Destacamos também alguns resultados importantes que foram obtidos com esta condição, um deles é o teorema de equivalência de receitas.

Porém, os resultados obtidos por Milgrom e Segal (2002) possibilitam obter essa condição impondo menos restrições ao problema, principalmente no conjunto de escolhas. O fato de não se precisar impor nenhuma restrição no conjunto de escolhas, pode ser tratado como um conjunto arbitrário, permite analisar várias situações que antes eram descartadas devido às fortes restrições impostas ao problema.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos um modelo geral de desenho de mecanismo, apresentamos também alguns exemplos e aplicações de desenhos de mecanismos e as ferramentas matemáticas básicas utilizadas no desenvolvimento desta teoria. Destacamos a importância dos teoremas de envelope na obtenção de resultados relevantes para os desenhos de mecanismos e suas aplicações. O uso dos teoremas de envelope permite explorar conexões próximas entre a teoria da demanda e a teoria de incentivos.

Milgrom (2004) afirma que o teorema do envelope implica no lema de Hotelling quando o parâmetro usado é o preço ao qual os bens são vendidos. Possibilita derivar o lema de Holmstrom quando o parâmetro é o tipo do participante no mecanismo e este participante maximiza seu *payoff* conhecendo o perfil de tipos dos demais participantes. Permite também derivar o lema de Myerson quando o parâmetro é o tipo do participante no mecanismo e o participante maximiza seu *payoff* esperado, sem conhecer o tipo dos demais participantes.

O lema de Holmstron por sua vez leva ao teorema de Green-Laffont-Holmstron, o qual afirma que se o conjunto de valores possíveis é suavemente conectado, então todo mecanismo aumentado que implementa resultados eficientes em estratégias dominantes é um mecanismo *VCG*. Já o lema de Myerson leva ao teorema da equivalência de receitas, o qual afirma que se o conjunto de valores possíveis é suavemente conectado então todo mecanismo aumentado que implementa resultados eficientes em estratégias Bayes-Nash gera a mesma receita esperada que o leilão de Vickrey.

Muitos outros resultados são obtidos via teoremas de envelope. O Teorema de Jehiel-Moldanavu que avalia as possibilidades de implementar performances eficientes em diferentes conjuntos de ambientes. Teorema de Martingale de Weber, que examina uma seqüência de leilões quando os participantes querem adquirir apenas uma unidade. Teorema do Leilão Ótimo de Myerson, Teorema Fraco dos Cartéis de Mc-Afee-McMillan, são todos exemplos de resultados obtidos através dos teoremas de envelope, que além disso possibilita explorar relações próximas entre esses resultados.

A Nova versão para os teoremas de envelope, nas formas diferencial e integral, desenvolvida por Milgrom e Segal permite explorar esses resultados de forma menos restritiva. Pelo fato de não exigir convexidade nem outras estruturas topológicas desejáveis do conjunto de escolhas, esses resultados possibilitam analisar mecanismos que antes eram descartados *a priori*. Isto possibilita novos avanços para a teoria dos desenhos de mecanismos e suas diversas aplicações.

REFERÊNCIAS

AKERLOF, G. The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism. Quartely Journal of Economics, v.84, p.488-500.

AUBIN, J. P.; FRANKOWSKA, H. ***Set-Valued Analysis***. Boston: Birkhauser, 1990.

BANK, B. et al. ***Non-Linear Parametric Optimization***. Brasil: Birkhauser, 1983.

BARON, D.; MYERSON, R. Regulating a Monopolist with Unknown Costs. Econometrica, v.50, p. 911-930.

BARTLE, R. G. ***Elementos de Análise Real***. Rio de Janeiro: Campus , 1976.

BARTLE, R. G. ***The Elements of Integration***. John Willey & Sons: New York, 1966.

BENVENISTE L.; SCHEINKMAN, J. On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics. Econometrica, v.47, n.3, p. 727 – 732, 1979.

BERGE, C. ***Topological Spaces***. New York: Dover, 1997.

BLUME, L.; and SIMON, C. ***Mathematics for Economists***. New York: W. W. Norton, 1994.

BORDER, K. ***Fixed Points Theorems with Aplications to Economics and Game Theory***. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

CAPUTO, M. How to do Comparative Dynamics on the Back of an Envelope in Optimal Control Theory**.** Journal of Economic Dynamics and Control, v.14, p.655 – 683.

CHAIN, S. H. ***Aplicações da Topologia à Análise***.Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada: CNPq, 1976.

CLARKE, E. H. Multipart Pricing of Public Goods. Public Choice. v. 2, p. 19-33, 1971.

DASGUPTA, P.; HAMMOND, P.; MASKIN, E. The Implementation of Social Choice Rules. Review of Economic Studies, v.46, p.185-216, 1979.

DUTTA, P. K.; MITRA, T. Maximum Theorems for Convex Strutures with an Aplication to The Theory of Optimal Intertemporal Allocation. Journal of Mathematical Economics, v.18, p. 77-86, August 1988.

EPSTEIN, L. G. The LeChatelier Principle in Optimal Control Problems**.** Journal of Economic Theory v.19, p.103 – 122, 1978.

FUDENBERG, D. and TIROLE, J. ***Game Theory***. Cambridge: MIT Press, 1991.

FUDENBERG, D. and TIROLE, J. Moral Hazard and Renegotiation in Agency Contracts. Econometrica, v.58, p.1279-1320, 1990.

GIBBARD, A. Manipulating for Voting Schemes. Econometrica, v.41, p.587-601, 1973.

GREEN, J.; LAFFONT, J. Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods. Econometrica, v.45, n. 4, p.427-438, May 1977.

GROVES, T. Incentives in Teams. Econometrica, v. 41, n.4, p. 617-633, July 1973.

GROVES, T. Information, Incentives and the Internalization of Prodution Externalities: Theory and Measurement of Economic Externalities. New York: Academic Press, 1976.

GROVES, T.; LEDYARD, J. Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the "Free Rider" Problem. Econometrica, v. 45, n. 4, p. 783-809, May 1977.

GROVES, T.; LEDYARD, J. The Existence of Efficient and Incentive Compatible Equilibria with Public Goods . Econometrica, v. 48, n. 6, p. 1487-1505, September 1980.

GROVES, T.; LOEB, M. Incentives and public Inputs. Journal of Public Economics. n. 4, p. 211-226, 1975.

GUESNERIE, R.; LAFFON, J. J. A Complete Solution to a Class of Principal-Agent Problems with an Aplication to the Control a Self-Managed Firm. Journal of Public Economics, v.25, p.329-369, 1984.

HARSANYI, J. Games with Incomplete Information Played Bayesian Players. Management Science, v.14, p.159-182, 1967.

HARSANYI, J. Games with Incomplete Information Played Bayesian Players. Management Science, v.14, p.320-334, 1967.

HARSANYI, J. Games with Incomplete Information Played Bayesian Players. Management Science, v.14, p.486-502, 1968.

HOLMSTROM, B. Groves Schemes on Restricted Domains. Econometrica, v.47, p.1137-1144, 1979.

HURWICZ, W. ***On the Informationally Decentralized Systems: In Decision and Organization***. Amsterdan: North-Holland, 1972.

ICHIISHI, T. ***Game Theory for Economic Analysis***. New York: Academic Press, 1983.

KAMIEN M. I.; SCHWARTZ N. L. ***Dynamic Optimization:*** *The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. 2nd. Ed. Amsterdan: North Holland, 1991.

KRISHNA, V. ***Auction Theory***. New York: Academic Press, 2002.

LA FRANCE, J. T.; BARNEY, L.D. The Envelope Theorem in Dynamic Optimization. Journal of Economic Dynamic and Control, v. 15, p. 355 – 385, 1991.

LAFFONT, J. J.; MASKIN, E. A Differencial Approach to Dominant Strattegy Mechanisms. Econometrica, v. 48, n. 6, p. 1507-1520, September 1980.

LAFFONT, J. J. ***The Economics of Uncertainty and Information***. Cambridge: MIT Press, 1989.

LAWRENCE; C. E.; GARIEPY R. F. ***Measure Theory and Fine Properties of Functions***. Boca Raton, Flórida: CRC, 1992.

LIMA, E. L. ***Elementos de Topologia Geral***. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada: CNPq, 1970.

LUCAS, R.; STOKEY, N.; PRESCOTT, E. ***Recursive Methods in Economic Dynamics***. New York: Harvard University Press, 1989.

MANDY, D. Continuity of Optima. Journal of Economic Theory, v. 54, p. 460-467, 1991.

MASKIN, E.; RILEY, J. Optimal Auctions with Risk Averse Buyers. Econometrica, v.52, p.1473-1518.

MAS-COLLEL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. ***Microeconomic Theory***. New York: Oxford University Press, 1995.

MYERSON, R. Optimal Auction design. Mathematics of Operations Research, v.6, p.58-73, 1981.

MYERSON, R. ***Game Theory***. Cambridge, Harvard University Press, 1991.

MYERSON, R. Mechanism design by an Informed Principal. Econometrica, v.51, p.1767-1797.

MILGRON, P. ***Putting Auction Theory to Work***. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

MILGRON P.; ROBERTS J. The Economics of Modern Manufacturing: Technology, Strategy, and Organization. The American Economic Review, v. 80, n. 3, p.418-447 June 1990.

MILGRON, P.; ILYA SEGAL. Envelope Theorems for Arbitraty Choice Sets. Econometrica, v. 70, n. 2, March 2002.

MYERSON, R. Optimal Auction design. Mathematics of Operations Research, v.6, p.58-73, 1981.

MYERSON, R. ***Game Theory***. Cambridge, Harvard University Press, 1991.

MYERSON, R. Mechanism design by an Informed Principal. Econometrica, v.51, p.1767-1797.

MYERSON, R. B. Incentive Compatibility and the Bargaining Problem. Econometrica, v. 47, p. 61-73, 1979.

MYERSON, R. B. Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems. Journal of Mathematical Economics, v. 10, p. 67-81, 1982.

MIRRLEES,J. An Exploration in the Theory of Optimal Taxation. Review of Economic Studies, v.39, p.175-208, 1971.

MUSSA, M.; ROSEN,S. Monopoly and Product Quality. Journal of Economic Theory, v.18, p.301-317.

NGO VAN, L.; LEOBARD, D. ***Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics***. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

ONIKI, H. Comparative Dynamics (Sensitive Analysis) in Optimal Control Theory**.** Journal of Economic Theory, v.6, p.265 – 283, 1973.

ROCKAFELLAR R. ***Convex Analysis***. Princeton: Princeton University Press, 1970.

ROCKAFELLAR R. et alli. ***Variational Analysis***. Berlin. Springer, 1998.

SAH, R.; ZHAO, J. Some Envelope Theorems for Integer and Discrete Choice Variables. International Economic Review, v.39, n. 3, p.623-634, August 1998.

SALANIÉ B. ***The Economics of contracts – A Primer***. London: MIT Press, 1998.

SAMUELSON, P.A. ***Foundations of Economic Analysis***. Boston: Harvard University Press, 1947.

SAMUELSON, P.A. An Extension of the LeChatelier Principle. Econometrica , v.28, p.368 – 379.

SATTERTHWAITE, M.; WILLIAMS, S. Bilateral Trade with the Sealed-bid K-double Auction: Existence and Eficience. Journal of Economic Theory, v.48, p.107-133.

SILBERBERG, E. The LeChatelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem**.** Journal of Economic Theory, v.3, 146 – 155, 1971.

SILBERBERG, E. A Revision of Comparative Static's Methodology, or How to do Economics on the Back of an Envelope**.** Journal of Economic Theory, v7, p.159 – 172, 1974.

SILBERBERG, E. ***The Structure of Economics:*** A Mathematical Analysis**.** New York, N.Y: Mc Graw – Hill, 1978.

SUNDARAM; RANGARAJAM. ***A First Course in Optimization Theory***. Cambridge: Cambridge Press, 1996.

TOPKIS D. M. Comparative Statics of the Firm. Journal of Economic Theory, v.67, p.370 – 401, 1995.

VICKREY, W. Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. Journal of Finace, v.16, p. 8-37, 1961.

WALKER, M. A Generalization of the Maximum Theorem. International Economic Review, v. 20, n.1, p.303-318,1979.

WALKER, M. On the Nonexistence of a Dominant Strategy Mechanism for Making Optimal Public Decisions**.** Econometrica, v. 48, n. 6, p. 1521-1540, September 1980.

WALSH, C. E. ***Monetary Theory and Policy***. Cambridge: MIT Press, 2003.

WEEREN, A. J. T. M.; SCHUMACHER, J. M.; ENGWERDA, J. C. Strategic Behavior and Noncooperative Hierarchical Control. Journal of Economic Dynamics and Control, v.23, p. 641 – 669, 1999.

WILLIAMS, S. R. A Characteization of Efficient, Bayesian Incentive Compatible Mechanisms. Economic Theory, v. 14, p. 155-180, 1999.