

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

JOÃO HENRIQUE REIS MENEGOTTO

ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS:
uma aplicação do modelo Diebold & Li

PORTO ALEGRE

2012

JOÃO HENRIQUE REIS MENEGOTTO

**ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS:
uma aplicação do modelo Diebold & Li**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Tourrucoô

PORTO ALEGRE

2012

JOÃO HENRIQUE REIS MENEGOTTO

**ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS:
uma aplicação do modelo Diebold & Li**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovado em: Porto Alegre, ___ de _____ de 2012.

Prof.Dr. Fabrício Tourrucoô - Orientador
UFRGS

Prof. Dr. Sabino Porto Jr.
UFRGS

Prof. Dr. João Fróis Caldeira
UFRGS

a Jesus Cristo, o Senhor

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Jesus, meu senhor e amigo, pela companhia durante todo esse trabalho. Agradeço aos meus queridos pais, pelo amor recebido em múltiplas formas ao longo dessa caminhada. Ao Prof. Fabrício Tourrucoô, pela atenciosa orientação durante a realização desse trabalho, pela disposição sempre que solicitei e pelo exemplo que foi para mim durante a graduação. Quero registrar, também, um especial agradecimento ao Prof. Eduardo Brietzke, pelo mestre que foi durante toda minha formação acadêmica.

*“Melhor é o longânimo
do que o herói da guerra,
e o que domina o seu espírito
do que o que toma uma cidade”*

Provérbios de Salomão

RESUMO

Este trabalho apresenta os principais modelos desenvolvidos sobre a estrutura a termo da taxa de juros. Os diferentes objetivos da modelagem da estrutura a termo, podendo ser para apuração de títulos ou derivativos de renda-fixa, para estimar variáveis econômicas não diretamente observáveis, como inflação esperada, prêmio de risco e risco de *default*, para previsão do comportamento das taxas de juros, levaram a diferentes abordagens sobre o assunto. Aplicamos o modelo de previsão de Diebold e Li (2006) para dados do Brasil e dos Estados Unidos, mostrando que sua eficácia não é sistemática e que, devido à forte persistência das taxas de juros ao longo do tempo, devem ser utilizados horizontes razoáveis de previsão a fim de superar o desempenho das previsões do modelo de passeio aleatório.

ABSTRACT

The current work presents the main developed models about the term structure of interest rates. The different purposes when modeling the term structure of interest rates, for pricing bonds or fixed-income derivatives, for estimate economic variables not directly observable, like expected inflation, risk premium and default risk, for forecasting the behavior of interest rates, have led to different approaches about this subject. We apply the Diebold e Li (2006) model for data from Brazil and data from the United States, showing that its success is not systematic over time and that, because of the strong interest rates persistence over time, reasonable forecast horizons have to be used to overcome random walk forecasts.

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 9
1.1	Objetivo Geral	p. 10
1.2	Objetivos Específicos	p. 10
2	Teorias da Estrutura a Termo da Taxa de Juros	p. 11
2.1	Definições e Notação	p. 11
2.2	Teoria das Expectativas	p. 14
2.3	Teoria da Preferência pela Liquidez	p. 16
2.4	Teoria de Segmentação do Mercado	p. 16
2.5	Teoria do Habitat Preferido	p. 17
3	Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros	p. 18
3.1	Modelos de Equilíbrio	p. 18
3.1.1	Modelo Vasicek	p. 19
3.1.2	Modelo Cox-Ingersoll-Ross	p. 19
3.1.3	Modelo Duffie-Kan	p. 19
3.2	Modelos de Não-Arbitragem	p. 20
3.2.1	Modelo Hull-White	p. 20
3.2.2	Modelo Heath-Jarrow-Morton	p. 20
3.2.3	Modelo Ho-Lee	p. 20
3.2.4	Modelo Black-Karasinski	p. 21

3.3	Modelos Estatísticos	p. 21
3.3.1	Modelo Nelson-Siegel	p. 21
3.3.2	Modelo Svensson	p. 22
3.3.3	Modelo Diebold & Li	p. 22
4	Estimação e Resultados	p. 23
4.1	Dados	p. 23
4.2	Metodologia Diebold & Li	p. 28
4.3	Série Diária	p. 30
4.4	Série Semanal	p. 32
4.5	Série Mensal	p. 32
4.6	Resultados	p. 33
5	Conclusão	p. 35
	Referências	p. 36
	ANEXO A	p. 39
	ANEXO B	p. 44

1 INTRODUÇÃO

A estrutura a termo da taxa de juros¹ (ETTJ) desperta interesse dentro e fora da academia. Sua complexidade e importância econômica continuam atraindo grandes pesquisadores e participantes do mercado. Tradicionalmente, podemos classificar três tipos de modelos para as taxas de juros. Os primeiros são os modelos (dinâmicos) de equilíbrio, dentre os quais destacamos Vasicek (1977), Cox, Ingersoll e Ross (1985) e Duffie e Kan (1996). Essa classe seria um candidato natural para realizarmos previsões sobre as taxas de juros, mas a literatura mostra que os resultados não são satisfatórios (ver Greer (2003)). Uma segunda classe seriam os modelos de não-arbitragem ou ausência de arbitragem, dentre os quais podemos citar como trabalhos proeminentes Hull e White (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992), além de Ho e Lee (1986) e Black e Karasinski (1991). Eles são particularmente importantes para o apreçamento de derivativos, mas não possuem ambição preditiva. Uma terceira classe são os modelos estatísticos, onde os trabalhos proeminentes são Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994), além desses, há o trabalho de McCulloch (1975). É sobre essa classe de modelos que Diebold e Li (2006) realiza seu trabalho pioneiro, baseando-se na modelagem de Nelson e Siegel (1987). Até então, pouca atenção havia sido dada ao desafio de prever-se taxas de juros tanto no longo como no curto-prazo. Os bons e animadores resultados obtidos por esse trabalho tem fomentado a elaboração e desenvolvimento de pesquisa nos últimos anos. Dentre esses, destacamos Christensen, Diebold e Rudebusch (2008).

Matsumura, Moreira e Vicente (2010) destacam três objetivos para a modelagem da ETTJ: o apreçamento de instrumentos de renda-fixa e administração de risco em títulos e derivativos de renda-fixa; o monitoramento de variáveis econômicas observáveis e não observáveis (a saber, prêmio de risco, inflação e risco de *default*); a previsão das taxas de juros.

É ao último ponto que dedicamos nossa atenção. Diebold e Li (2006) afirmam que nos últimos 20 anos (agora, mais de 26 anos) houve importantes avanços na modelagem da

¹Conforme veremos no capítulo seguinte, a função que leva um vencimento ao rendimento de um título não pagador de cupons de um mesmo emissor (ou, com o mesmo nível de risco).

ETTJ, mas, com respeito ao problema de previsão da curva de juros, pouco instrumental com resultados satisfatórios havia sido desenvolvido. De fato, o trabalho de Diebold e Li (2006) é pioneiro nesse sentido. Dentre os agentes diretamente interessados na matéria, o trabalho de Vicente e Tabak (2008) destaca quatro, a saber: formuladores de política monetária; banqueiros; administradores de portfólios de renda fixa; administradores da dívida pública. Trata-se, também, de uma ferramenta importante na formação de cenários macroeconômicos, portanto, utilizada indiretamente por grandes corporações, instituições financeiras e investidores institucionais. Naturalmente, o Banco Central do Brasil possui diversas publicações tratando de previsão sobre a ETTJ, como Lima, Ludovice e Tabak (2006), Matsumura, Moreira e Vicente (2010), Leite, Filho e Vicente (2009) e Vicente e Tabak (2008).

O presente trabalho divide-se em cinco capítulos, sendo o primeiro capítulo essa introdução. O segundo capítulo revisa as principais teorias a respeito da estrutura a termo da taxa de juros. O terceiro capítulo apresenta os principais modelos para a estrutura a termo da taxa de juros. No quarto capítulo, implementamos o modelo de Diebold e Li (2006) efetuando previsões sobre a curva de juros. O quinto capítulo traz as conclusões do trabalho.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desse trabalho é aplicar um modelo parcimonioso para efetuar previsões sobre a estrutura a termo da taxa de juros.

1.2 Objetivos Específicos

Aplicar a metodologia de Diebold e Li (2006) para modelagem da curva de juros do Brasil e dos Estados Unidos.

2 TEORIAS DA ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

2.1 Definições e Notação

Devido às diferentes abordagens e metodologias adotadas, a notação utilizada nos trabalhos não é uniforme. Por isso, a fim de desenvolvermos com maior precisão e clareza o assunto, escrevemos algumas definições iniciais. As definições abaixo seguem, em linhas gerais, Neftci (2000). Fixamos um intervalo de tempo $[0, T^{max}]$ onde serão definidas as taxas de juros de nossa economia. Onde $T^{max} > 0$ é fixo.

Definição 1 *Dado o intervalo $[0, T^{max}] \subset \mathbb{R}$, $T^{max} \neq 0$, o preço de um título não pagador de cupons na data t com vencimento em T será $B(t, T) \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq t \leq T \leq T^{max}$. Por comodidade, definiremos $B(T, T) = 1$, $\forall T \in [0, T^{max}]$.*

Definição 2 *Na data t , o rendimento (ou yield to maturity) continuamente composto de um título não pagador de cupons com vencimento em T é a taxa de juros $R(t, T)$ tal que*

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

onde

$$R(t, T) = \frac{-\ln B(t, T)}{T - t}.$$

Definição 3 *Vamos definir a taxa forward instantânea em t para a data x , $f(t, x)$, implicitamente:*

$$R(t, t+x) = \frac{1}{x} \int_t^{t+x} f(t, \tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Vamos supor que $\forall t, T \in [0, T^{max}]$, $\exists B(t, T)$ para definirmos a estrutura a termo da taxa de juros e a curva de juros.

Definição 4 *A taxa de juros instantânea $r(t)$ será definida da seguinte forma: $r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} R(t, t+x)$, $\forall t \in [0, T^{max}]$.*

Definição 5 Para títulos de uma mesma classe de risco (do mesmo tipo de emissor), a estrutura a termo da taxa de juros é a função que leva o vencimento ao rendimento de um título não pagador de cupons. Mais precisamente,

$$H : [t, T^{max}] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto R(t, t + x).$$

A curva de juros, por sua vez, será o gráfico dessa função, ou seja, o subconjunto $G(H) = \{(x, y) \in [t, T^{max}] \times \mathbb{R}; y = H(x)\}$ do produto cartesiano $[t, T^{max}] \times \mathbb{R}$.

Dadas essas definições iniciais, cabem alguns comentários. Evidentemente, não existe um título não pagador de cupons para qualquer data de maturação num intervalo contínuo de tempo, nem mesmo existe um título para cada data de maturação. Conseguimos, pois, encher apenas alguns pontos através dos dados do mercado. A razão de não nos concentrarmos em títulos pagadores de cupom é o fato de que esses podem ser considerados como um portfólio de *zero-coupon bonds*. Abaixo, alguns exemplos para o caso brasileiro em diferentes datas.

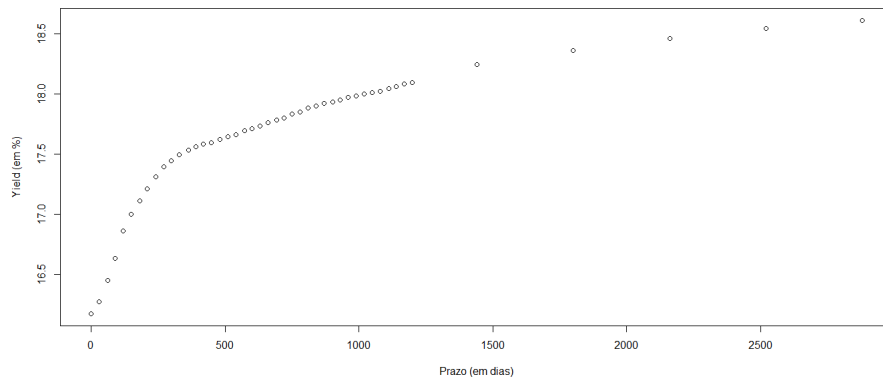


Figura 1: Curva de Juros do Brasil - Taxas de Swap DI x Pre em 28/09/2004

Fonte: BM&FBovespa

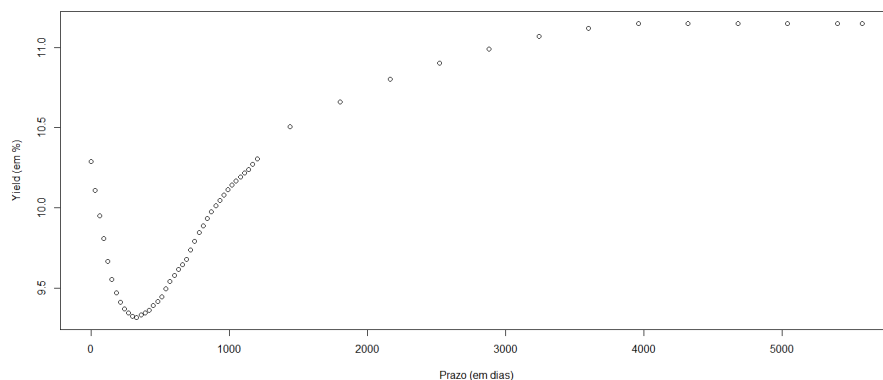


Figura 2: Curva de Juros do Brasil - Taxas de Swap DI x Pre em 14/02/2012

Fonte: BM&FBovespa

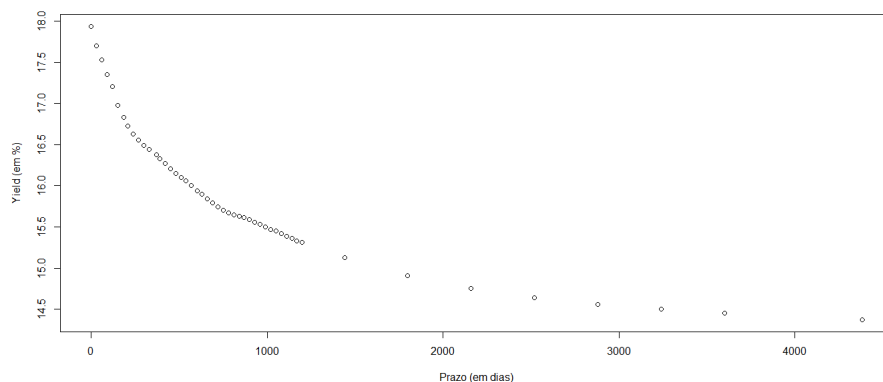


Figura 3: Curva de Juros do Brasil - Taxas de Swap DI x Pre em 02/01/2006

Fonte: BM&FBovespa.

Podemos descrever didaticamente três formas para a curva de juros: curva de juros normal ou positiva; curva de juros invertida e curva de juros *flat*. Diremos que a curva de juros é normal quando a estrutura a termo das taxas de juros for uma função crescente do tempo de maturação. Diremos que a curva de juros é invertida quando a estrutura a termo das taxas de juros for uma função decrescente do tempo de maturação. Diremos que a curva de juros é *flat* quando a estrutura a termo das taxas de juros for uma função constante do tempo de maturação. (FABOZZI, 2004)

Segundo Diebold e Li (2006), a inclinação da curva de juros pode ser definida pela diferença (o *spread*) entre os *yields* de títulos *zero-coupon* de maior vencimento e com menor vencimento. Abaixo, o *spread* entre as taxas de juros de dez e dois anos para dados brasileiros. Notemos que essa diferença ora é positiva, com a curva de juros, em geral, positivamente inclinada e ora é negativa, geralmente, com a curva negativamente inclinada.

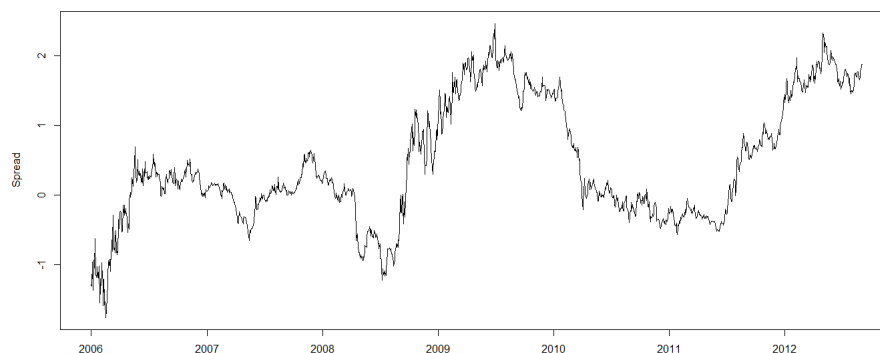


Figura 4: Spread entre as Taxas de Juros para vencimento em 10 e 2 anos

Fonte: BM&FBovespa

Diebold e Li (2006) apresenta os seguintes fatos estilizados sobre a curva de juros:

- A curva de juros, geralmente, é crescente e côncava.
- A curva de juros assume diversas formas, podendo ser positivamente inclinada, negativamente inclinada, côncava ou convexa.
- A dinâmica das taxas de juros são persistentes e a dinâmica dos spreads é menos persistente.
- As taxas de juros de curto prazo apresentam maior volatilidade do que as taxas de longo prazo.
- Taxas de juros de longo-prazo são mais persistentes do que as taxas de juros de curto prazo.

2.2 Teoria das Expectativas

Em uma economia sem incerteza, onde as taxas de juros dos períodos subsequentes são conhecidas para todos os prazos, as relações entre as taxas ficam inteiramente determinadas por arbitragem. Porém, quando incorporamos incerteza ao nosso modelo, essas relações não necessariamente precisam prevalecer. Diversas teorias (ou hipóteses) foram desenvolvidas para lidar com esse problema (INGERSOLL, 1987).

A mais antiga dessas é a Teorias de Expectativas (em inglês, *Expectation Theories*), com suas bases remontando a Fisher (1896). Cabe observar que, na teoria da Preferência pela Liquidez e do Habitat Preferido, as expectativas com relação ao comportamento da

taxa de juros também desempenham um papel fundamental. Segundo Vasicek (1977), tanto a hipótese de expectativas, a hipótese de preferência pela liquidez como a hipótese de segmentação do mercado postulam que

$$R(t, t+x) = E \left[\frac{1}{x} \int_t^{t+x} r(\tau) d\tau \right] + \pi(t, x, r(t)), \quad (2.2)$$

ou seja, que a taxa de juros para um determinado vencimento é uma função das expectativas sobre o comportamento futuro das taxas instantâneas mais um prêmio de risco, com diferentes especificações para a função de prêmio de risco π . A equação (2.2) incorpora a essência das principais teorias sobre as taxas de juros.

Existem, na realidade, diferentes teorias de expectativas e essas não são, necessariamente, compatíveis com a equação acima. Nesse trabalho, não as explicaremos detalhadamente. Para o leitor interessado, ver Cox, Ingersoll Jonathan E. e Ross (1981) e Ingersoll (1987). A *unbiased expectation hypothesis*, em tempo contínuo, postula que o preço de um título hoje é formado com base nas expectativas sobre cada uma das taxas de juros instantâneas subsequentes separadamente, ou seja, $B(t, T) = \exp \left[- \int_t^T E [r(\tau)] d\tau \right]$. A *local expectations hypothesis* e a *return-to-maturity hypothesis* postulam que o preço de um título hoje é formado pela expectativa sobre o comportamento das taxas de juros subsequentes em conjunto, isto é, $B(t, T) = E \left[\exp \left[- \int_t^T r(\tau) d\tau \right] \right]$. Quando o tempo for discreto, porém, as formulações dessas hipóteses serão diferentes. Finalmente, a *yield-to-maturity expectations hypothesis* postula que $\ln B(t, T) = E \left[- \int_t^T r(\tau) d\tau \right]$. Num contexto de equilíbrio, somente a *local expectations theory* não conduz a possibilidades de arbitragem (COX; INGERSOLL JONATHAN E.; ROSS, 1981).

Fabozzi (2004) traz um bom exemplo intuitivo sobre o efeito das expectativas sobre a forma da curva de juros. Suponhamos, inicialmente, que a curva de juros esteja *flat*. Agora, vamos supor que, devido a alguma nova informação, os agentes esperam que as taxas de juros subam no futuro próximo. Especuladores iriam vender seus títulos de longo-prazo (fazendo com que seu *yield* suba) e comprar títulos de curto-prazo. Os emprestadores irão procurar ofertar títulos de longo-prazo e evitarão títulos de curto-prazo porque as taxas de juros do futuro próximo serão maiores. Os tomadores de empréstimo irão procurar emitir títulos de longo-prazo e evitarão títulos de curto-prazo. Todos esses movimentos elevam a oferta e diminuem a procura por títulos de longo-prazo, diminuindo seu preço. Também diminui a oferta por títulos de curto-prazo e aumenta sua demanda, resultando num aumento dos preços. Assim, as taxas de juros dos títulos de curto prazo diminuem e as taxas dos títulos de longo prazo aumentam. A estrutura a termo da taxa de

juros torna-se positivamente inclinada. Um raciocínio análogo para expectativa de queda das taxas concluiria que a ETTJ, se inicialmente *flat*, ficaria negativamente inclinada.

2.3 Teoria da Preferência pela Liquidez

As teorias de expectativas não consideram a incerteza envolvida para formar os preços dos títulos. A obra de Keynes (1936) inspirou Hicks (1939) na formulação de uma teoria em que os indivíduos somente adquirem títulos se a taxa de retorno desses for significativamente maior do que a taxa esperada em qualquer maturidade. Além disso, os agentes são avessos ao risco. Quanto mais distante for o vencimento, isto é, quanto maior a maturidade do título, maior deve ser o prêmio associado. Ou seja, o prêmio π da equação (2.2) é uma função crescente do tempo. Essa teoria também ficou conhecida como *risk premium model*.

2.4 Teoria de Segmentação do Mercado

De acordo com Bailey (2005), a teoria de segmentação de mercado afirma que os preços dos títulos (portanto, suas taxas de juros) são determinados pela oferta e pela demanda em cada maturação, sendo que esses mercados formam grupos onde o preço dos títulos seriam correlacionados. Por exemplo, os mercados dos títulos com vencimento entre um e três anos formam um grupo, os dos títulos entre três e dez anos outro grupo e os títulos de vencimento mais longo outro grupo. Culbertson (1957) é a principal referência nessa corrente. Ele aponta que diferentes teorias para a taxa de juros implicam diferentes perspectivas sobre a efetividade e maneira de conduzir a política monetária. Assim, o formulador de política monetária, ao modificar a taxa de juros de curto prazo, influenciaria somente as taxas do primeiro grupo. Se, porém, o formulador de política monetária deseja influenciar a taxa de juros dos títulos com vencimento na parte longa da curva ele deve atuar diretamente comprando ou vendendo esses títulos naquele mercado, ou num mercado do daquele grupo. A teoria de expectativa, por sua vez, não garante que esse tipo de ação é eficaz. Por tratar-se de uma visão muito extrema e pouco flexível, a teoria de segmentação do mercado conquistou poucos adeptos. Mas trata-se de uma importante crítica que inspirou a teoria do habitat preferido, exposta abaixo.

2.5 Teoria do Habitat Preferido

A teoria do habitat preferido de Modigliani e Sutch (1966) pode ser vista como o caso mais geral da teoria da preferência pela liquidez. Agora, porém, o prêmio não necessariamente é uma função crescente do tempo. Isso porque essa hipótese pressupõe que todos os agentes desejam liquidar suas posições imediatamente. Suponhamos, entretanto, que um agente precise de seus ativos somente após determinado período de tempo. Nesse caso, ao aplicar em um ativo com vencimento diferente desse período é que ele estará se expondo a um risco¹ maior. Um exemplo clássico de agente com esse tipo de característica são os fundos de pensão. Assim, cada agente possui um habitat natural e os prêmios de risco não são, necessariamente, uma função crescente do vencimento. Essa análise conclui que a hipótese de aversão ao risco não impõe que o agente prefere liquidar seus ativos imediatamente.

Nosso primeiro capítulo versou sobre as diferentes teorias sobre a ETTJ. Sua trajetória está ligada ao desenvolvimento da política monetária ao longo do último século. A seguir, apresentamos os modelos da estrutura a termo, onde a teoria das expectativas é utilizada como hipótese.

¹Risco de reinvestimento se o prazo for menor do que sua necessidade e risco de mercado se o prazo do ativo for menor.

3 MODELAGEM DA ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

As teorias da estrutura a termo da taxa de juros pouco conseguem além de embasar as hipóteses sobre o prêmio de risco e as estratégias de política monetária. Nesse capítulo mostramos os principais modelos desenvolvidos nas últimas décadas e que levaram Diebold e Li (2006) a afirmar que os últimos vinte anos haviam sido de grandes avanços em nosso conhecimento sobre a curva de juros. Essa evolução está ligada ao desenvolvimento da teoria de precificação de ativos (em inglês, *Asset Pricing Theory*), uma vez que taxas de juros são uma função do preço de ativos. Existem outros modelos de taxas de juros desenvolvidos para as mais diferentes finalidades que não expomos aqui. Para uma exposição sistemática ver Brigo e Mercurio (2001) e Rebonato (1996). Expomos modelos de equilíbrio, de não-arbitragem e, por último, modelos estatísticos. Para Hull (2009), a diferença entre os dois primeiros consiste em que, em modelos de equilíbrio, a ETTJ de hoje é um resultado enquanto em modelos de não-arbitragem ela é dada. Os modelos estatísticos são elaborados para se adaptar às diferentes formas que a ETTJ pode assumir.

3.1 Modelos de Equilíbrio

Duffie (2008) afirma que os modelos da taxa de juros de curto prazo r na literatura são dados por uma equação diferencial estocástica, dada uma medida equivalente de martingale Q , da forma

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW^Q(t),$$

onde W^Q é um processo de Wiener em \mathbb{R}^d e $\mu : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, satisfazem condições técnicas para a existência de uma solução. Em geral, esses modelos são um caso particular da equação abaixo,

$$dr_t = [K_0(t) + K_1(t)r_t + K_2(t)r_t \log(r_t)]dt + [H_0(t) + H_1(t)r_t]^v dW^Q(t),$$

onde $K_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, 2$, $H_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ são todas funções contínuas e $v \in [0, 5, 1, 5]$.

3.1.1 Modelo Vasicek

Vasicek (1977) propõe um modelo no qual a dinâmica da taxa de juros de curto prazo segue a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr(t) = \kappa[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t),$$

onde κ , θ e σ são constantes positivas e W é um processo Wiener unidimensional. Assim, a taxa de juros instantânea segue um processo de reversão à média (o apelo econômico do modelo). Tem, porém, contra si o fato de admitir taxas de juros negativas. O modelo de Vasicek (1977) ergue-se sob três hipóteses: a taxa de juros instantânea segue um processo de difusão; o preço de um título de desconto depende somente da taxa de juros instantânea sobre o seu termo; o mercado é eficiente.

3.1.2 Modelo Cox-Ingersoll-Ross

Cox, Ingersoll e Ross (1985) propõem um modelo de equilíbrio geral para precificação de ativos que conduz a fórmulas simples para o preço de um *bond*. A hipótese sobre o comportamento da taxa de juros de curto prazo sofre uma pequena modificação (quanto ao modelo de Vasicek) no processo neutro ao risco da taxa de juros:

$$dr(t) = \kappa[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t),$$

onde κ , θ e σ são constantes positivas e W é um processo Wiener unidimensional. Nesse modelo, as taxas de juros são sempre positivas.

3.1.3 Modelo Duffie-Kan

Duffie e Kan (1996) propõem uma classe de modelos multifator num contexto de equilíbrio geral. Assim, outras variáveis (por exemplo, macroeconômicas) podem ser incorporadas ao modelo. Esse modelo é uma generalização da classe de modelos afim da estrutura a termo da taxa de juros, dos quais os modelos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) são um caso particular. Ele impõe as condições técnicas sob as quais a equação abaixo terá uma única solução

$$X(t) = v(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),$$

onde $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e X é um processo de Markov sobre U .

3.2 Modelos de Não-Arbitragem

3.2.1 Modelo Hull-White

Hull e White (1990) propõem uma extensão dos modelos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) a partir do modelo onde a taxa de juros segue um processo estocástico da forma:

$$dr(t) = [\theta(t) + a(t)(b - r(t))]dt + \sigma(t) r^\beta(t)dW(t),$$

onde o *drift* θ , a taxa de convergência a e a volatilidade σ são funções do tempo, β é uma constante e W é um processo Wiener unidimensional. Quando $\beta = 0$, teremos o modelo de Vasicek (1977) estendido:

$$dr(t) = [\theta(t) + a(t)(b - r(t))]dt + \sigma(t)dW(t).$$

Quando $\beta = 0,5$, teremos o modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985) estendido:

$$dr(t) = [\theta(t) + a(t)(b - r(t))]dt + \sigma(t) \sqrt{r(t)}dW(t).$$

3.2.2 Modelo Heath-Jarrow-Morton

Em seu trabalho, Heath, Jarrow e Morton (1992) abordam o problema de forma diferente. Eles partem de uma equação para a taxa forward instantânea

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t),$$

onde α é uma função determinística, σ é um vetor n-dimensional para todo t e todo T e W é um processo de Wiener n-dimensional. A importância desse modelo reside no fato de quase todos os demais poderem ser derivados a partir dele.

3.2.3 Modelo Ho-Lee

Ho e Lee (1986), apresentam um modelo discreto onde, em sua versão contínua, a equação diferencial estocástica para a taxa de curto-prazo é

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t),$$

onde θ é uma função determinística do tempo, σ é uma constante e W é um processo Wiener unidimensional. Esse modelo (contínuo) também foi proposto anteriormente por Merton (1974). Mas essa formulação permite que as taxas de juros assumam valores negativos e os valores das taxas não são limitados superiormente. Além disso, não há um processo de reversão à média.

3.2.4 Modelo Black-Karasinski

Black e Karasinski (1991) propõem um modelo onde a taxa de curto-prazo possui uma distribuição lognormal

$$d[\ln r(t)] = \phi(t) [\ln \mu(t) - \ln r(t)] dt + \sigma(t)dW(t),$$

onde ϕ , μ e σ são funções determinísticas do tempo e W é um processo Wiener unidimensional. Esse modelo permite a modelagem das curvas de volatilidade e *cap*.

3.3 Modelos Estatísticos

3.3.1 Modelo Nelson-Siegel

Buscando apresentar um modelo parcimonioso para a curva de juros, o trabalho de Nelson e Siegel (1987) supõe que a taxa *forward* instantânea seja tal que:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp \{-t/\tau\} + \beta_2 \frac{t}{\tau} \exp \{-t/\tau\},$$

onde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$ são os parâmetros a serem estimados. Utilizando a equação (2.1), equação para a taxa de juros resultante é:

$$R(t) = \beta_0 + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{t/\tau} [1 - \exp \{-t/\tau\}] - \beta_2 \exp \{-t/\tau\}.$$

Notemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \beta_0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} R(t) = \beta_0 + \beta_1$. Assim, β_0, β_1 , e β_2 são os componentes de longo-prazo, de curto-prazo e de médio-prazo da curva, respectivamente. Essa ferramenta foi desenvolvida, principalmente, para auxiliar análises de demanda por moeda, testar as diferentes teorias sobre a curva de juros ou, simplesmente, apresentar um gráfico informativo. Assim, o modelo tornou-se particularmente popular entre os bancos centrais. Ele, teoricamente, não é livre de arbitragem, embora Coroneo, Nyholm e Vidova-Koleva (2008) mostre que o modelo cumpre restrições de arbitragem num sentido estatístico.

3.3.2 Modelo Svensson

Svensson (1994) expande o modelo de Nelson e Siegel (1987) acrescentando um componente (e outras duas variáveis), tornando-o mais flexível:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\{-t/\tau_1\} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} \exp\{-t/\tau_1\} + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} \exp\{-t/\tau_2\},$$

onde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2$ são os parâmetros a serem estimados. A equação para a taxa de juros fica, portanto, assim:

$$R(t) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\{-t/\tau_1\}}{t/\tau_1} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\{-t/\tau_1\}}{t/\tau_1} - \exp\{-t/\tau_1\} \right] + \\ + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\{-t/\tau_2\}}{t/\tau_2} - \exp\{-t/\tau_2\} \right].$$

Assim como o modelo de Nelson e Siegel (1987), ele é muito popular entre bancos centrais.

3.3.3 Modelo Diebold & Li

Diebold e Li (2006) desenvolve um modelo dinâmico da curva de juros utilizando-se da equação de Nelson e Siegel (1987):

$$R_n(t) = \beta_{n0} + \beta_{n1} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n t} \right] + \beta_{n2} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n t} - e^{-\lambda_n t} \right],$$

onde $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ e λ são os parâmetros a serem estimados. Organizado na forma acima, as variáveis são interpretadas de uma nova maneira. Trata-se de um modelo de três fatores, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ (tradicionalmente, conforme já afirmamos anteriormente, interpretados como de longo-prazo, médio-prazo e de curto-prazo, respectivamente), determinando nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo, respectivamente. O modelo, então, adota o seguinte procedimento. Num primeiro momento, escolhe-se um λ de acordo com algum critério (objetivo ou subjetivo). O modelo torna-se linear nos parâmetros restantes, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, que são estimados por mínimos quadrados ordinários num segundo momento. Num terceiro momento, a dinâmica dos parâmetros é estimada. Dessa forma, na data n , a previsão para as taxas da curva de juros p períodos a frente será

$$R_{n+p}(t) = \beta_{0,n+p} + \beta_{1,n+p} \left[\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right] + \beta_{2,n+p} \left[\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t} \right], \quad (3.1)$$

onde os parâmetros são obtidos por regressão linear, estimando-se:

$$\hat{\beta}_{i,n+p} = \hat{c}_i + \hat{a}_i \beta_{i,n}, \quad \forall i = 0, 1, 2. \quad (3.2)$$

4 ESTIMAÇÃO E RESULTADOS

4.1 Dados

O mercado de capitais brasileiro ainda não é maduro quando comparado a países desenvolvidos. Um reflexo disso é a disponibilidade de dados sobre as taxas de juros no país. O processo inflacionário com que conviveu o Brasil até o Plano Real ainda possui repercussões sobre a dívida pública nacional. O Relatório Mensal da Dívida Pública Federal de outubro de 2012 informa que o vencimento médio da Dívida Pública Mobiliária Federal é de 3,99 anos. Enquanto Estados Unidos e países da Europa possuem títulos pré-fixados com vencimentos de até trinta anos, o Brasil ainda não emite títulos pré-fixados com mais de vinte anos¹. O alongamento da dívida é parte do processo de desenvolvimento do mercado de capitais e é um objetivo de política pública. Segundo o Plano Anual de Financiamento da Dívida Pública Federal de 2012, o prazo médio a ser buscado no longo-prazo para a Dívida Pública Federal (DPF) deve situar-se entre 5 e 6 anos. Nesse trabalho, serão utilizados dados das taxas dos contratos de *swap* DI x Pre² entre 2 de janeiro de 2006 e 8 de outubro de 2012 fornecidos pela BM&FBovespa e pelo Banco Central do Brasil como uma *proxy* para as taxas de juros de títulos não pagadores de cupom³. Os valores originais, R , foram transformados para taxas continuamente compostas $r = \ln(1 + R)$. A Figura 5 apresenta esses dados. Também utilizamos dados da estrutura a termo da taxa de juros dos Estados Unidos que são disponibilizados pelo *Board of Governors of the Federal Reserve System*, o Banco Central dos Estados Unidos⁴. O período selecionado vai de 1 de outubro de 1991 até 31 de outubro de 2012. O gráfico dos dados da curva de juros dos Estados Unidos no último dia útil de cada mês para esse período é apresentada

¹Segundo o Relatório Mensal da Dívida Pública Federal do mês de outubro de 2012, o título público pré-fixado de maior prazo de vencimento é a NTN-F, com vencimento em 2023

²Dentre os trabalhos que também se utilizam das taxas desses contratos citamos Laurini e Hotta (2010) e Vicente e Tabak (2008).

³Os prazos de vencimento escolhidos foram de 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 5 anos, 7 anos e 10 anos, totalizando 1665 observações. Os dias onde não haviam dados para todos os prazos foram desconsiderados.

⁴Os prazos de vencimento escolhidos foram os mesmos dos dados brasileiros, a saber, 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 5 anos, 7 anos e 10 anos.

na Figura 6.

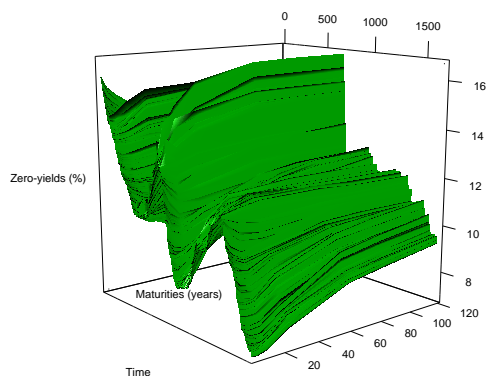


Figura 5: Curva de Juros do Brasil: taxas Swap DI x Pre - 2/1/2006 a 8/10/2012

Fonte: BM&FBovespa

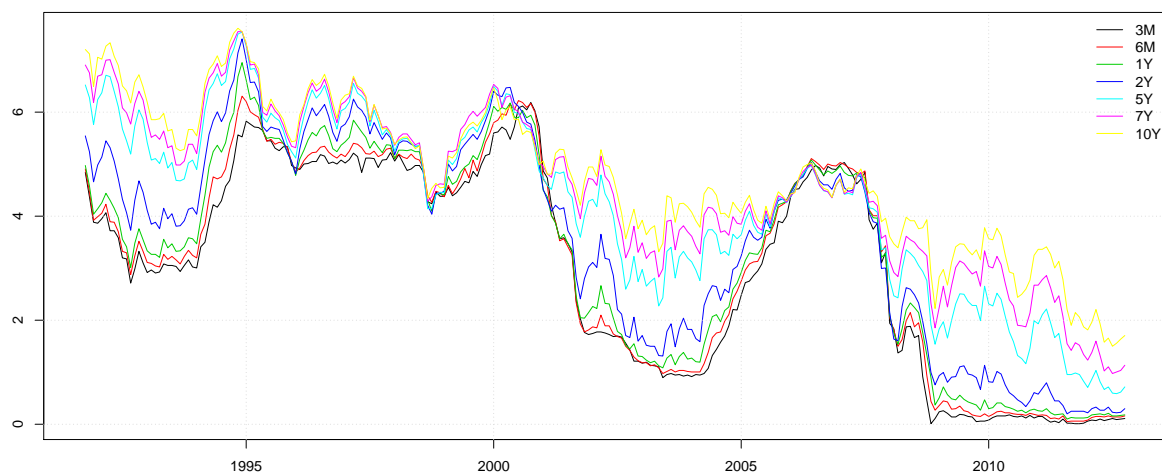


Figura 6: Curva de Juros dos Estados Unidos: - 1/10/1991 a 31/10/2012

Fonte: Board of Governors of the Federal Reserve System

Foram separadas três séries diferentes para verificarmos a capacidade de previsão do modelo de Diebold e Li (2006). A primeira é uma série diária, cobrindo a totalidade dos dados tanto para o Brasil como para os Estados Unidos. No Brasil, a taxa de juros média para vencimentos de três meses foi de 10,97% e de 3,05% nos Estados Unidos. A taxa de

juros para vencimento em dez anos média foi de 11,79% no Brasil e de 4,81% nos Estados Unidos. O *spread*, ou diferença, entre a taxa de juros para vencimento em três meses do Brasil e dos Estados Unidos é apresentada na Figura 7. Ela mostra a diferença em termos de nível das taxas nominais brasileiras para as taxas americanas. Os títulos brasileiros pagam um prêmio de risco diante dos títulos americanos que cresce em momentos de crise, como podemos observar, principalmente, no ano de 2008.

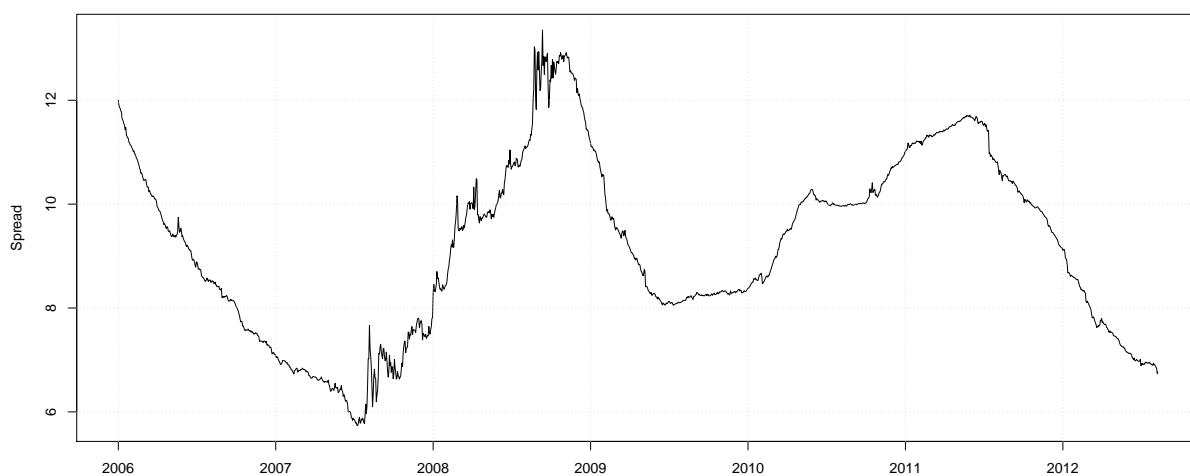


Figura 7: Spread entre as Taxas de Juros de 3 meses de Estados Unidos e Brasil

Fonte: Board of Governors of the Federal Reserve System e BM&FBovespa

Para identificar a persistência dessas taxas, foi calculado o coeficiente de autocorrelação $\rho(h) = \text{corr}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)\text{var}(X_{t-h})}}$. A autocorrelação nessa série possui um decaimento extremamente lento para todos os vértices da curva. Nos Estados Unidos, porém, a persistência é maior, como pode ser visto nas Tabelas 1 e 2.

A segunda série é a semanal. Foram tomados os valores das taxas no último dia útil de cada semana. Constituindo-se de 344 observações nos dados brasileiros e 1100 observações nos dados americanos. Como poderíamos esperar, as autocorrelações, agora, decaem mais rapidamente para Brasil e Estados Unidos. Nos Estados Unidos, para vinte e quatro meses a autocorrelação no vértice de dez anos é de 0,853 enquanto no Brasil essa autocorrelação é de 0,271. As tabelas 3 e 4 apresentam-nos esses dados.

A terceira série que tomamos é a série mensal. Em cada mês, foram tomados os valores das taxas no último dia útil. Para o Brasil, são 81 observações e 253 para os Estados Unidos. Novamente, as autocorrelações decaem mais rapidamente para ambos os países

com persistência maior nos dados norte-americanos.

A seguir, foram feitos os testes de raiz unitária *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Os valores críticos de MacKinnon para rejeitarmos a hipótese de raiz unitária são $-3,4518$, para um nível de 1% de significância, $-2,8704$, para um nível de 5% de significância, e $-2,5714$, para um nível de significância de 10%. Assim, para a série diária dos Estados Unidos, todos os vértices rejeitam a hipótese a um nível de 1% de significância. Para a série semanal, os vértices iniciais (de três, seis e doze meses) devem apresentar raiz unitária e, na série mensal, os vértices de doze, sessenta e oitenta e cinco meses talvez possuam raiz unitária. Para a série de taxas diária do Brasil, todos os vértices devem apresentar raiz unitária com exceção do último, de cento e vinte meses. Na série semanal, somente o primeiro e o último vértice rejeitam a hipótese de raiz unitária a um nível menor do que 10% de significância, os demais vértices devem possuir raiz unitária. Na série mensal, por sua vez, a hipótese de raiz unitária é rejeitada para todos os vértices a um nível de 10% de significância. Dufee (2012. Manuscrito) afirma que, sob uma perspectiva econômica, é mais confortável assumirmos taxas de juros estacionárias e fortemente persistentes do que verdadeiramente não-estacionárias.

Tabela 1: Estat. descritivas, yields Brasil, série diária - 2/2/2006 a 8/10/2012

Prazo (meses)	Média	Desv. Pad	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
3	10.79	1.94	6.85	16.00	0.99	0.95	0.90	-1.65
6	10.82	1.90	6.82	15.55	0.99	0.95	0.90	-1.54
12	11.00	1.85	6.95	15.17	0.99	0.95	0.90	-1.55
24	11.38	1.67	7.53	16.05	0.99	0.95	0.88	-1.82
60	11.70	1.40	8.58	16.64	0.99	0.93	0.84	-2.34
84	11.76	1.35	8.86	16.68	0.99	0.93	0.84	-2.48
120	11.79	1.29	9.18	16.68	0.99	0.92	0.83	-2.59

Fonte: BM&FBovespa.

Tabela 2: Estat. descritivas, yields Estados Unidos, série diária - 1/10/1991 a 31/10/2012

Prazo (meses)	Média	Desv. Pad	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
3	3.05	1.99	0.00	6.22	0.99	0.99	0.98	-3.11
6	3.19	2.02	0.02	6.46	0.99	0.99	0.98	-2.98
12	3.33	2.00	0.08	7.06	0.99	0.99	0.98	-3.04
24	3.65	1.97	0.16	7.46	0.99	0.99	0.98	-3.26
60	4.27	1.71	0.56	7.60	0.99	0.99	0.98	-3.83
84	4.58	1.57	0.91	7.62	0.99	0.99	0.97	-3.97
120	4.81	1.41	1.42	7.74	0.99	0.99	0.97	-4.09

Fonte: Board of Governors of the Federal Reserve System

Tabela 3: Estat. descritivas, yields Brasil, série semanal - 6/1/2006 a 3/8/2012

Prazo (meses)	Média	Desv. Pad	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
3	10.87	1.85	7.20	15.93	0.98	0.74	0.42	-2.60
6	10.90	1.81	7.06	15.50	0.98	0.73	0.39	-2.23
12	11.08	1.76	7.09	15.17	0.98	0.70	0.35	-1.94
24	11.46	1.58	7.67	16.05	0.98	0.66	0.30	-1.97
60	11.76	1.32	8.62	16.55	0.97	0.60	0.29	-2.29
84	11.81	1.28	8.88	16.59	0.97	0.59	0.29	-2.46
120	11.84	1.23	9.20	16.59	0.97	0.58	0.27	-2.61

Fonte: BM&FBovespa.

Tabela 4: Estat. descritivas, yields Estados Unidos, série semanal - 4/10/1991 a 26/10/2012

Prazo (meses)	Média	Desv. Pad	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
3	3.04	1.98	0.00	6.18	0.997	0.958	0.905	-2.299
6	3.18	2.01	0.02	6.40	0.997	0.956	0.902	-2.472
12	3.33	2.00	0.09	7.01	0.997	0.952	0.898	-2.528
24	3.65	1.97	0.17	7.46	0.997	0.945	0.888	-2.896
60	4.27	1.71	0.59	7.58	0.995	0.930	0.863	-3.974
84	4.58	1.57	0.93	7.61	0.995	0.927	0.856	-4.406
120	4.81	1.40	1.46	7.73	0.995	0.925	0.853	-4.786

Fonte: Board of Governors of the Federal Reserve System

Tabela 5: Estat. descritivas, yields Brasil, série mensal - 31/10/2006 a 28/9/2012

Prazo (meses)	Média	Desv. Pad	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
3	10.74	1.91	7.01	15.50	0.92	-0.09	0.15	-3.67
6	10.78	1.87	7.02	15.02	0.92	-0.15	0.18	-3.45
12	10.98	1.83	7.19	14.70	0.91	-0.21	0.21	-3.29
24	11.36	1.66	7.85	15.03	0.90	-0.24	0.23	-3.03
60	11.67	1.41	8.72	16.03	0.85	-0.18	0.18	-2.74
84	11.73	1.36	8.98	16.06	0.84	-0.16	0.16	-2.80
120	11.77	1.30	9.28	16.08	0.83	-0.16	0.15	-2.89

Fonte: BM&FBovespa.

Tabela 6: Estat. descritivas, yields Estados Unidos, série mensal - 30/10/1991 a 31/10/2012

Prazo (meses)	Média	Desv. Pad	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
3	3.04	1.99	0.01	6.18	0.988	0.716	0.340	-2.920
6	3.18	2.02	0.05	6.31	0.988	0.717	0.348	-2.786
12	3.32	2.01	0.10	6.95	0.987	0.728	0.390	-2.389
24	3.63	1.98	0.20	7.41	0.983	0.731	0.459	-2.222
60	4.26	1.72	0.59	7.54	0.975	0.697	0.536	-2.434
84	4.56	1.58	0.98	7.55	0.971	0.679	0.556	-2.772
120	4.79	1.42	1.50	7.61	0.967	0.658	0.567	-3.399

Fonte: Board of Governors of the Federal Reserve System

4.2 Metodologia Diebold & Li

Uma vez fixado o λ , o modelo pode ser estimado por Regressão Linear. Escolhido o conjunto de vértices $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [0, T^{max}]$, com $n \in \mathbb{N}$, para cada data m , estimamos o vetor $\beta = (\beta_{1m}, \beta_{2m}, \beta_{3m})$ por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), de forma a minimizar a norma dos erros $u_m = (u_{1m}, \dots, u_{nm})$:

$$\begin{pmatrix} u_{t_1 m} \\ u_{t_2 m} \\ \vdots \\ u_{t_n m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{t_1 m} \\ y_{t_2 m} \\ \vdots \\ y_{t_n m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda t_1}}{\lambda t_1} & \frac{1-e^{-\lambda t_1}}{\lambda t_1} - e^{-\lambda t_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda t_2}}{\lambda t_2} & \frac{1-e^{-\lambda t_2}}{\lambda t_2} - e^{-\lambda t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda t_n}}{\lambda t_n} & \frac{1-e^{-\lambda t_n}}{\lambda t_n} - e^{-\lambda t_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1m} \\ \beta_{2m} \\ \beta_{3m} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

, onde $y = (y_{t_1 m}, \dots, y_{t_n m})$ é o vetor das taxas de juros em cada maturação $t_1, \dots, t_n \in [0, T^{max}]$ na data m .

A questão crucial, porém, para utilizarmos o modelo de Diebold e Li (2006) é a escolha do parâmetro λ . Esse parâmetro é o que determina quando o *loading* do parâmetro de médio prazo, $\left[\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right]$, atinge seu valor máximo, determinando, então, a curvatura da estrutura a termo. O trabalho original escolheu um λ tal que o *loading* de médio prazo fosse maximizado em 30 meses⁵ por constatar que, geralmente, o λ maximizava o *loading* entre 24 e 36 meses. Almeida et al. (2007), ao aplicar o modelo para dados brasileiros, propõe escolher-se o λ que proporcione os melhores resultados das previsões *in-sample*, ou seja, excluindo-se os dados a partir dos quais serão feitas as previsões *out-of-sample*. Nesse trabalho, escolhemos o λ de forma a minimizar a soma do quadrado dos erros até 30 de dezembro de 2008 para as curvas brasileiras e até 29 de dezembro de 2012 para os dados da curva de juros americana, porque é a partir daí que começamos a efetuar as previsões sobre as curvas. Portanto, escolhemos o λ^* que satisfaz

$$\sum_{i=1}^p \|u_i(\lambda^*)\| = \operatorname{argmin}_{\lambda} \sum_{i=1}^p \|u_i(\lambda)\|$$

, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana, p é o número de observações do subconjunto de dados onde não fazemos previsão e $u_i(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos erros da equação (4.1). Assim, o parâmetro escolhido para os dados das taxas de juros brasileiras foi $\lambda = 0,116418$ e para os dados da curva de juros dos Estados Unidos foi $\lambda = 0,0798762$. A Figura 8 apresenta a série dos parâmetros $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ obtidos para os dados do Brasil e a Figura 9

⁵Bem entendido, estamos diante do seguinte problema: dado um certo $t^* \in \mathbb{R}_+$, precisamos definir um λ tal que $\max_t \left[\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right]$ tenha solução em t^* , ou seja, um $\lambda \neq 0$ que seja raiz da equação $0 = \lambda t^* + 1 + (\lambda t^*)^2 - e^{-\lambda t^*}$.

apresenta a série dos parâmetros obtidos para os dados dos Estados Unidos.

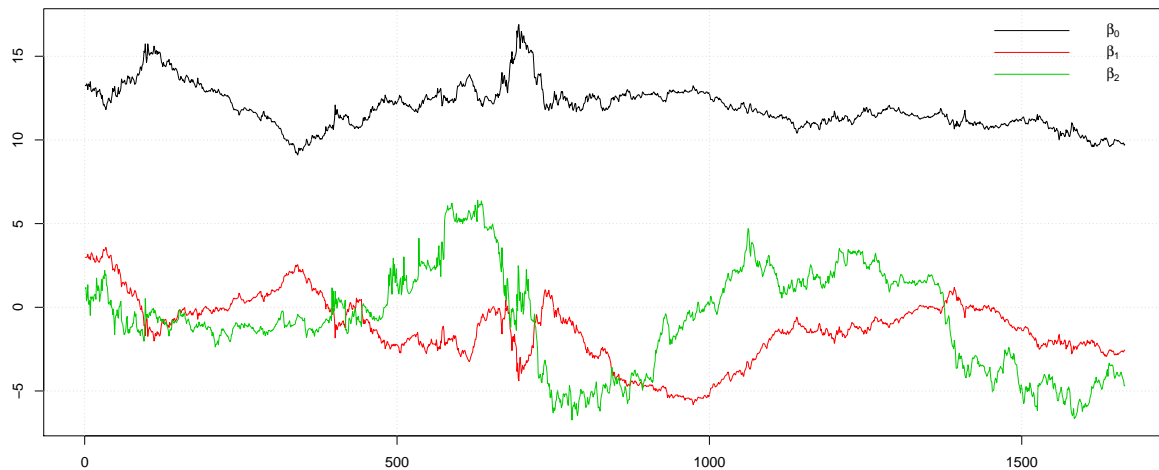


Figura 8: Parâmetros Diebold-Li Brasil - 2/1/2006 a 8/10/2012

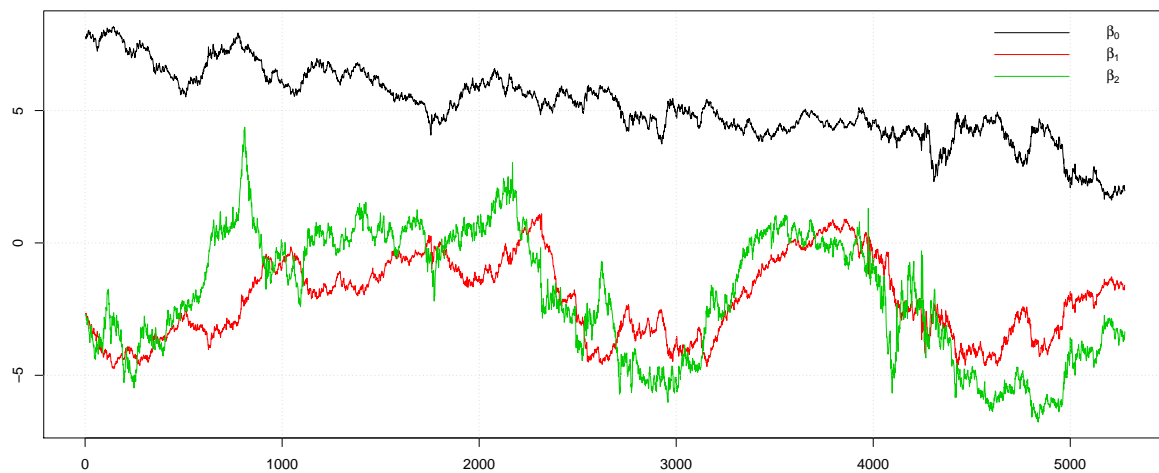


Figura 9: Parâmetros Diebold-Li Estados Unidos - 1/10/1991 a 31/10/2012

De posse desses parâmetros, as previsões sobre as taxas de juros são feitas com base nas equações (3.1) e (3.2). Para efetuarmos, na data n , previsões sobre um parâmetro h passos a frente, estimamos $\beta_{i,t+h} = c_i + \alpha_i \beta_{i,t}$, para $i = 1, 2, 3$, por regressão linear para o subconjunto de dados até aquela data.

Comparamos as previsões do modelo DL com os resultados de um passeio aleatório,

mais conhecido na literatura como *Random Walk* (a partir de agora, RW). Nessa abordagem, a previsão da taxa de juros h períodos a frente é, simplesmente, igual à taxa de hoje. Esse modelo é o mais parcimonioso possível e, embora, em um primeiro momento, contra intuitivo, sua eficácia é teoricamente bem fundamentada sob uma perspectiva de mercados eficientes. Pesando (1979) afirma não existir nada na teoria de mercados eficientes que implique o comportamento das taxas de juros como um RW. Os agentes econômicos, no entanto, seriam capazes de efetuar previsões sobre as taxas de juros de curto prazo mas não seriam aptos a produzir previsões superiores sobre movimentos de curto prazo nas taxas de juros de longo-prazo se o prêmio de risco for constante. Assim, os modelos de previsão não conseguem superar sistematicamente as previsões do RW nas taxas de curto e de longo-prazo.

4.3 Série Diária

A Tabela 7 descreve os parâmetros obtidos para os dados do Brasil na série diária. Todos os parâmetros são altamente persistentes. A média do parâmetro β_0 foi de 11,97, a do parâmetro β_1 foi de -1,33 e a do parâmetro β_2 foi de -0,71. Esse último parâmetro, β_2 , é o de maior variabilidade, com um desvio padrão de 2,97. O teste ADF mostra que os parâmetros β_0 e β_1 não possuem raiz unitária para um nível de significância de 10%. O parâmetro β_2 , porém, deve apresentar raiz unitária.

Tabela 7: Estat. descritivas, parâmetros DL Brasil, série diária

Parâmetro	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
β_0	11.97	1.27	9.10	16.89	0.99	0.91	0.81	-2.73
β_1	-1.33	1.90	-5.81	3.58	0.99	0.93	0.84	-2.79
β_2	-0.71	2.97	-6.74	6.40	0.99	0.94	0.88	-1.84

A Tabela 8 apresenta a série dos parâmetros obtidos para os dados dos Estados Unidos na série diária. Assim como os parâmetros brasileiros, os parâmetros norte-americanos são fortemente persistentes. O parâmetro β_0 obteve média de 5,19, o parâmetro β_1 obteve uma média de -2,12 e o parâmetro β_2 obteve uma média de -1,99. O parâmetro β_2 também é o mais volátil. O teste ADF mostra que os parâmetros β_1 e β_2 devem apresentar raiz unitária. O parâmetro β_0 não possui raiz unitária para um nível de significância menor do que 1%.

Abaixo, o gráfico da curva média para o Brasil e para os Estados Unidos, tomando as médias dos parâmetros obtidos em cada país. Elas tem uma forma parecida e corroboram com o fato estilizado da curva média como crescente e côncava.

Tabela 8: Estat. descritivas, parâmetros DL Estados Unidos, série diária

Parâmetro	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
β_0	5.19	1.36	1.62	8.17	0.998	0.976	0.95	-4.4351
β_1	-2.12	1.51	-4.75	1.10	0.998	0.982	0.964	-1.9889
β_2	-1.99	2.34	-6.77	4.37	0.997	0.975	0.955	-2.3891

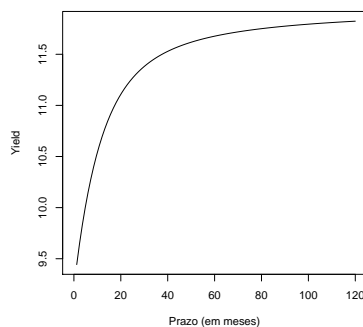


Figura 10: Curva de Juros Média - Brasil

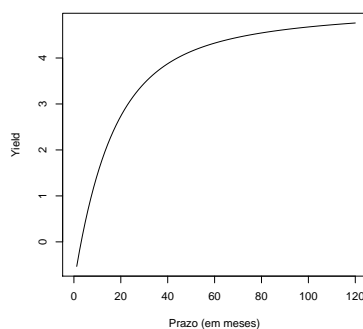


Figura 11: Curva de Juros Média - Estados Unidos

Em anexo, apresentamos os gráficos das funções de autocorrelação para os parâmetros brasileiros na série diária. A função de autocorrelação decai muito lentamente tanto para β_0 , como para β_1 e β_2 . A função de autocorrelação parcial mostra que a primeira defasagem é significativa para todos os parâmetros.

Em anexo, também, apresentamos os gráficos das funções de autocorrelação para os parâmetros americanos na série diária. A função de autocorrelação decai muito lentamente tanto para β_0 , como para β_1 e β_2 . A função de autocorrelação parcial, assim como no caso brasileiro, mostra que a primeira defasagem é significativa para os parâmetros. Essas figuras tornam a modelagem AR(1) da série imposta por Diebold e Li (2006) muito desconfortável, uma vez que as funções de autocorrelação são persistentes.

4.4 *Série Semanal*

A Tabela 9 apresenta os parâmetros de DL da série semanal para a estrutura a termo brasileira. Como poderíamos esperar, a média e o desvio padrão não são muito diferentes da série diária, uma vez tratar-se de um subconjunto da série anterior. O β_0 médio foi 12,01, o β_1 médio foi $-1,3$ e o β_2 médio foi $-0,63$. Novamente, o parâmetro β_2 é o de maior desvio padrão e β_0 é o parâmetro de menor desvio padrão. O teste ADF aponta que β_2 deve possuir raiz unitária e que β_0 e β_1 não possuem raiz unitária para um nível de significância de 10%. As autocorrelações decaindo de forma mais acentuada são, evidentemente, a mudança mais significativa.

Tabela 9: Estat. descritivas, parâmetros DL Brasil, série semanal

Parâmetro	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
β_0	12.01	1.23	9.28	16.76	0.96	0.55	0.29	-2.86
β_1	-1.30	1.93	-5.70	3.58	0.97	0.63	0.40	-2.83
β_2	-0.63	2.97	-6.47	6.35	0.97	0.68	0.27	-1.91

A Tabela 10 apresenta as estatísticas descritivas de cada parâmetro do modelo DL para a série semanal dos dados da curva de juros dos Estados Unidos. As médias dos parâmetros β_0, β_1 e β_2 foram, respectivamente, 5,19, $-2,14$ e $-1,98$. Novamente, β_2 é o de maior volatilidade. Agora, o parâmetro β_2 , juntamente com β_1 rejeitam a hipótese nula de existência de raiz unitária para um nível de significância de 10% e de 1%, respectivamente. O parâmetro β_1 , no entanto, deve ter raiz unitária. Conforme já observado no comportamento das séries das taxas de juros dos Estados Unidos, as autocorrelações da série semanal americana também são mais persistentes do que as autocorrelações dos parâmetros brasileiros.

Tabela 10: Estat. descritivas, parâmetros DL Estados Unidos, série semanal

Parâmetro	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
β_0	5,19	1,35	1,65	8,14	0,99	0,887	0,774	-3,765
β_1	-2,14	1,51	-4,74	1,08	0,993	0,908	0,785	-2,089
β_2	-1,98	2,35	-6,75	4,25	0,988	0,9	0,815	-2,623

4.5 *Série Mensal*

A Tabela 11 apresenta as estatísticas dos parâmetros do modelo DL da curva de juros brasileira tomados em série mensal. A média do parâmetro β_0 foi de 11,94, a do parâmetro β_1 foi de $-1,36$ e a do parâmetro β_2 foi de $-0,65$. Mais uma vez, o parâmetro de médio prazo, ou a curvatura, β_2 foi o de maior desvio-padrão. A autocorrelação serial decai

rapidamente para todos os três parâmetros. O teste ADF indica que β_1 deve apresentar raiz unitária e que β_0 e β_2 não devem apresentar raiz unitária a um nível de 10% de significância.

Tabela 11: Estat. descritivas, parâmetros DL Brasil, série mensal

Parâmetro	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
β_0	11.94	1.29	9.44	16.48	0.80	-0.12	0.04	-2.75
β_1	-1.36	1.90	-5.55	2.93	0.85	0.03	-0.18	-2.08
β_2	-0.65	2.98	-6.01	6.10	0.91	-0.45	-0.07	-2.66

Os parâmetros do modelo DL na série mensal de taxas de juros dos Estados Unidos são descritos na Tabela 12. As médias dos parâmetros β_0, β_1 e β_2 são, respectivamente, 5,17, -2,11 e -2,00. O maior desvio padrão foi apresentado pelo parâmetro β_2 . As funções de autocorrelação decaem rapidamente, mas ainda são mais persistentes do que as dos parâmetros brasileiros.

Tabela 12: Estat. descritivas, parâmetros DL Estados Unidos, série mensal

Parâmetro	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	$\rho(1)$	$\rho(12)$	$\rho(24)$	ADF
β_0	5,17	1,36	1,73	8,13	0,958	0,597	0,535	-4,211
β_1	-2,11	1,51	-4,72	0,98	0,968	0,46	0,031	-2,802
β_2	-2,00	2,36	-6,73	4,11	0,96	0,593	0,198	-2,302

4.6 Resultados

Para avaliarmos os resultados de nossas previsões, precisamos estabelecer algum tipo de critério. Assim, um modelo de previsão A será considerado mais eficiente para um determinado horizonte h quando a raiz da média dos quadrados dos seus erros de previsão (em inglês, *Root Mean Squared Error* - RMSE) for menor do que a do outro modelo. Bem entendido, chamando $Y_{t+h,t}$ a previsão efetuada pelo modelo e Y_{t+h} o valor verdadeiro da variável,

$$RMSE_A = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_{i+h,i} - Y_{i+h}]^2}$$

, onde n é o número de previsões que efetuamos. Como medida auxiliar, calculamos a média do valor absoluto dos erros (em inglês, *Mean Absolute Error* - MAE)

$$MAE_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_{i+h,i} - Y_{i+h}|$$

As Tabelas 13 a 18, em anexo, apresentam os resultados obtidos por nossas previsões para cada horizonte de previsão h . Para a curva de juros brasileira, começamos a efetuar

as previsões a partir de 30 de janeiro de 2009 nas séries diária e mensal e a partir de 4 de janeiro de 2008 para a série semanal. Para a ETTJ americana, começamos a fazer previsões a partir de 2 de janeiro de 2001 na série diária, a partir de 5 de janeiro de 2001 na série semanal e a partir de 31 de janeiro de 2001 na série semanal. Começaremos pela análise dos resultados das séries dos Estados Unidos.

Na série de parâmetros diária, fizemos previsões sobre a curva de juros para um dia e para vinte e um dias. Nas séries semanais e mensal fazemos previsão para um e doze passos a frente. Tanto em termos de RMSE quanto MAE, o modelo DL apresentou desempenho inferior ao RW em todos os vértices nas séries semanal e mensal. A série semanal, porém, é onde o modelo apresentou-se mais competitivo.

No Brasil, por sua vez, as previsões da série diária de DL também são superadas pelo RW. Na série semanal, no entanto, o modelo já começa a mostrar-se competitivo para alguns vértices (os mais longos) quando fizemos previsões doze passos a frente. Na série mensal, o modelo DL é superado pelo RW quando fazemos a previsão um passo a frente. No entanto, ao fazermos a previsão doze passos a frente, em termos de RMSE o RW é totalmente superado pelo modelo DL em todos os vértices e nos quatro primeiros vértices em termos de EAM.

5 CONCLUSÃO

Apesar de amplamente estudada e dos muitos pesquisadores de diferentes origens envolvidos na área, a modelagem da estrutura a termo da taxa de juros ainda é um campo com muito espaço para avanços em termos teóricos e práticos. Até hoje, nenhum modelo mostrou-se sistematicamente melhor do que as previsões de um *Random Walk*. Esse trabalho revisou as principais teorias sobre a curva de juros e as diferentes abordagens de modelos sobre a curva de juros. Recentemente, Diebold e Li (2006) apresentaram uma abordagem que teria se mostrado bem sucedida para previsão em dados da curva de juros dos Estados Unidos. Implementamos esse modelo para bases de dados de países diferentes com extensões diferentes. Alteramos, também, a frequência das observações para dias, semanas e anos. O modelo DL apresentou melhor resultado na série semanal dos Estados Unidos e na série mensal do Brasil, superando o RW. Embora não tenha repetido o desempenho para previsão sobre os juros norte-americanos dos dados do trabalho original, o modelo conseguiu superar o RW em alguns momentos. A falta de alicerces teóricos do modelo não nos permite garantir sua eficácia dedutivamente. Portanto, nada além do desempenho passado (em trabalhos anteriores ou por experiência de quem o utiliza) pode nos dizer tratar-se de uma ferramenta eficaz em termos de previsão. Constatamos que o modelo deve ser utilizado, preferencialmente, para horizontes mais longos e também para dados de baixa frequência.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C. et al. *Does curvature enhance forecasting?* Brasília, dez. 2007. (Banco Central do Brasil Working Paper Series, 155).
- BAILEY, R. *The economics of financial markets*. New York: Cambridge University Press, 2005.
- BLACK, F.; KARASINSKI, P. Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, v. 47, n. 4, p. 52–59, jul. 1991.
- BRIGO, D.; MERCURIO, F. *Interest rate models: theory and practice*. New York: Springer, 2001.
- CHRISTENSEN, J. H.; DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. *An arbitrage-free generalized Nelson-Siegel term structure model*. Cambridge, nov. 2008. (National Bureau of Economic Research Working Paper Series, 14463).
- CORONEO, L.; NYHOLM, K.; VIDOVA-KOLEVA, R. *How arbitrage-free is the Nelson-Siegel model?* [S.l.], fev. 2008. (European Central Bank Working Paper Series, 874).
- COX, J. C.; INGERSOLL, J. E. J.; ROSS, S. A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, v. 53, n. 2, p. 385–407, mar. 1985.
- COX, J. C.; INGERSOLL JONATHAN E., J.; ROSS, S. A. A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. *The Journal of Finance*, v. 36, n. 4, p. 769–799, 1981.
- CULBERTSON, J. M. The term structure of interest rates. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press, v. 71, n. 4, p. 485–517, 1957.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, v. 130, n. 2, p. 337 – 364, 2006.
- DUFEE, G. R. Forecasting interest rates. 2012. Manuscrito.
- DUFFIE, D. *Dynamic asset pricing theory*. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- DUFFIE, D.; KAN, R. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, v. 6, n. 4, p. 379–406, 1996.
- FABOZZI, F. *Bond markets, analysis, and strategies*. New Jersey: Prentice Hall, 2004.

- FISHER, I. *Appreciation and interest: a study of the influence of monetary appreciation and depreciation on the rate of interest with applications to the bimetallic controversy and the theory of interest*. New York: Pub. for the American economic association by the Macmillan company, 1896.
- GREER, M. Directional accuracy tests of long-term interest rate forecasts. *International Journal of Forecasting*, v. 19, n. 2, p. 291–298, 2003.
- HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, v. 60, n. 1, p. 77–105, jan. 1992.
- HICKS, J. *Value and capital: an inquiry into some fundamental principles of economic theory*. Oxford: Clarendon Press, 1939.
- HO, T. S. Y.; LEE, S.-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, v. 41, n. 5, p. 1011–1029, 1986.
- HULL, J. *Options, futures, and other derivatives*. New Jersey: Pearson, 2009.
- HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990.
- INGERSOLL, J. *Theory of financial decision making*. Oxford: Rowman & Littlefield, 1987.
- KEYNES, J. *The general theory of employment, interest and money*. London: Macmillan, 1936.
- LAURINI, M. P.; HOTTA, L. K. Bayesian extensions to diebold-li term structure model. *International Review of Financial Analysis*, v. 19, n. 5, p. 342 – 350, 2010.
- LEITE, A. L.; FILHO, R. B. P. G.; VICENTE, J. V. M. *Previsao da curva de juros: um modelo estatístico com variáveis macroeconômicas*. Brasília, mai. 2009. (Banco Central do Brasil Working Paper Series, 186).
- LIMA, E. J. A.; LUDUVICE, F.; TABAK, B. M. *Forecasting interest rates: an application for Brazil*. Brasília, out. 2006. (Banco Central do Brasil Working Paper Series, 120).
- MATSUMURA, M. S.; MOREIRA, A. R. B.; VICENTE, J. V. M. *Forecasting the yield curve with linear factor models*. Brasília, nov. 2010. (Banco Central do Brasil Working Paper Series, 223).
- MCCULLOCH, J. H. The tax-adjusted yield curve. *The Journal of Finance*, v. 30, n. 3, p. 811–830, 1975.
- MERTON, R. C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, v. 29, n. 2, p. 449–470, 1974.
- MODIGLIANI, F.; SUTCH, R. Innovations in interest rate policy. *The American Economic Review*, v. 56, n. 1/2, p. 178–197, 1966.

- NEFTCI, S. *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. [S.l.]: Elsevier Science, 2000.
- NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, v. 60, n. 4, p. 473–489, 1987.
- PESANDO, J. E. *On forecasting interest rates: an efficient markets perspective*. Cambridge, nov. 1979. (National Bureau of Economic Research Working Paper Series, 410).
- REBONATO, R. *Interest-rate option models: understanding, analysing and using models for exotic interest-rate options*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996.
- SVENSSON, L. E. O. *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992 - 1994*. [S.l.], 1994. (International Monetary Found Working Paper).
- VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, v. 5, n. 2, p. 177–188, November 1977.
- VICENTE, J.; TABAK, B. M. Forecasting bond yields in the brazilian fixed income market. *International Journal of Forecasting*, v. 24, n. 3, p. 490 – 497, 2008.

ANEXO A

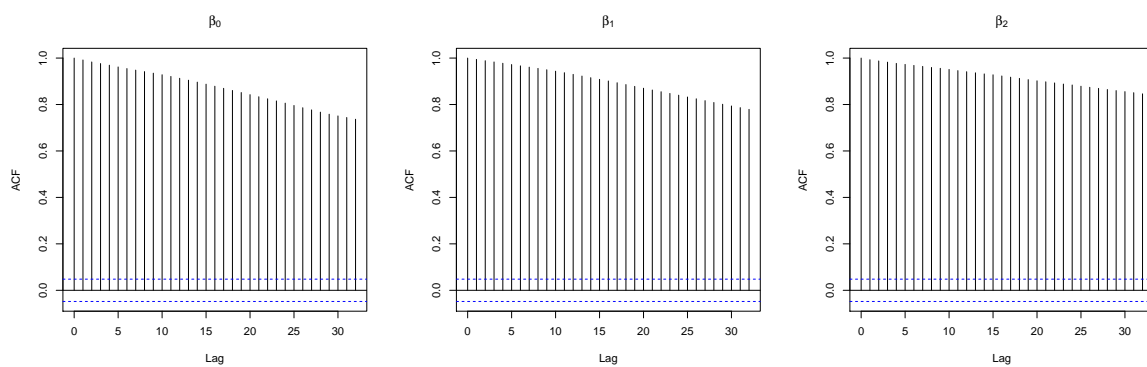


Figura 12: ACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Diária - Brasil

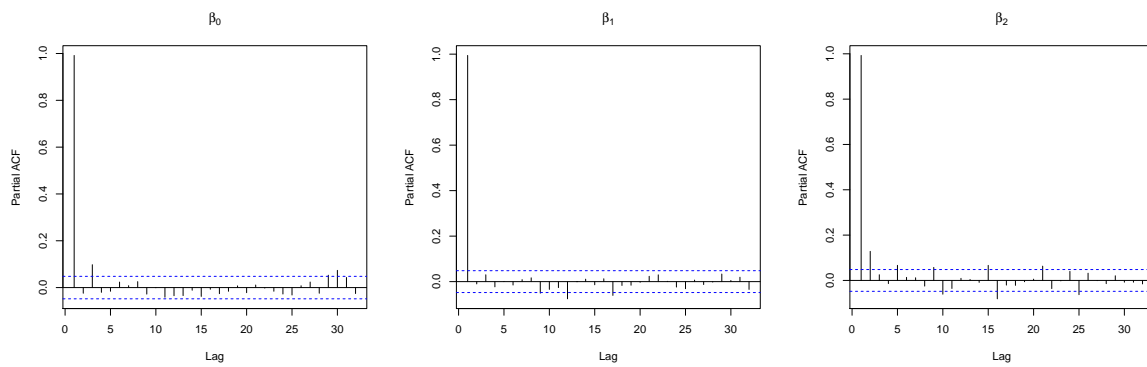


Figura 13: PACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Diária - Brasil

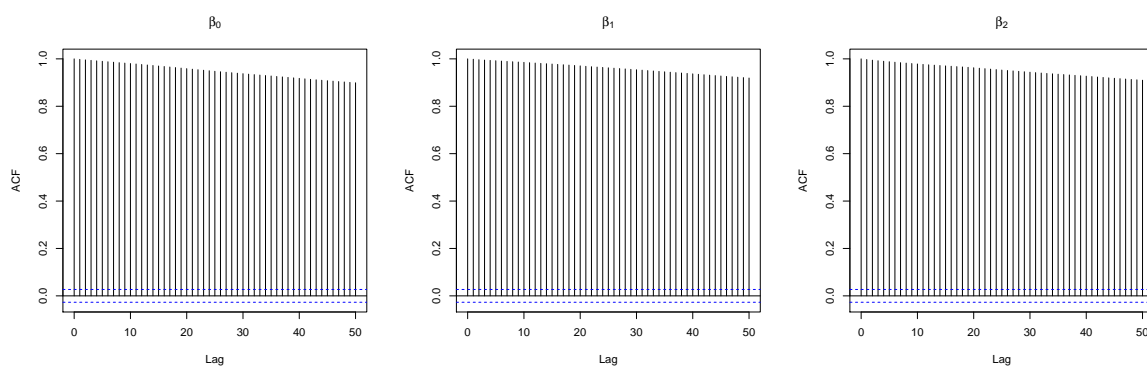


Figura 14: ACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Diária - Estados Unidos

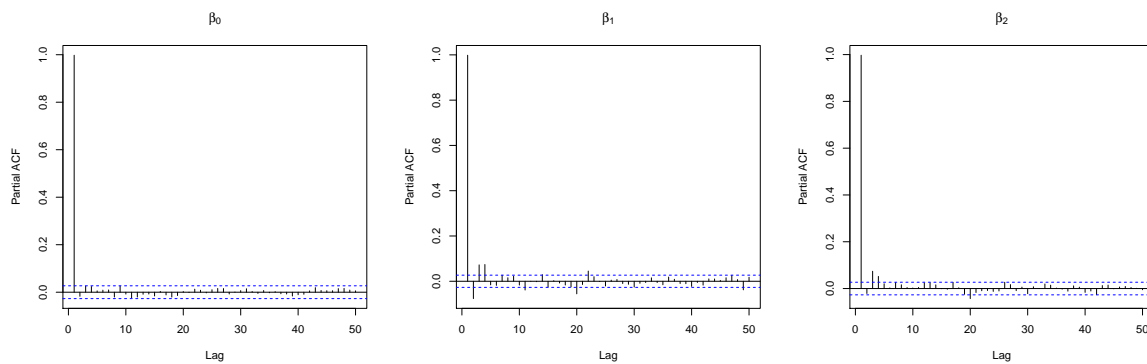


Figura 15: PACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Diária - Estados Unidos

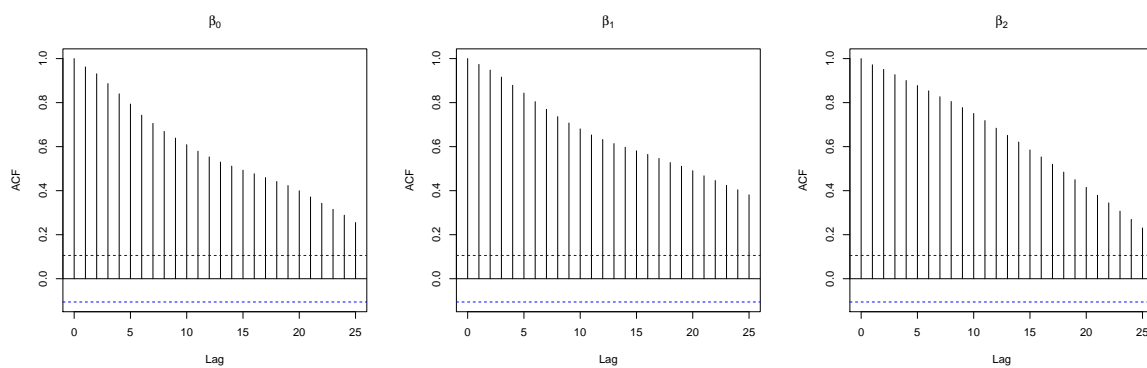
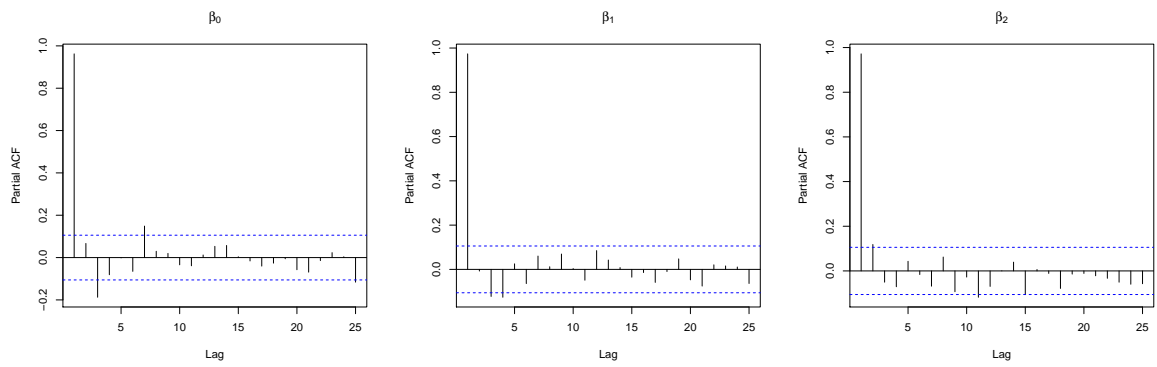
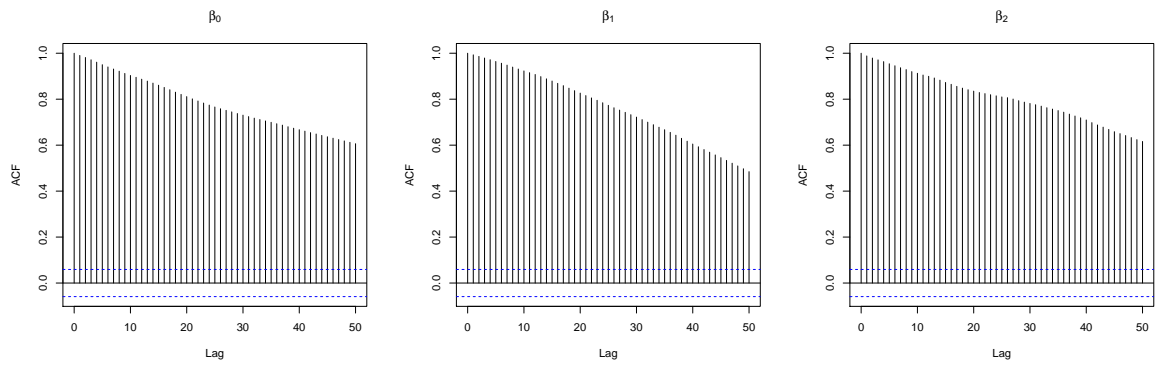
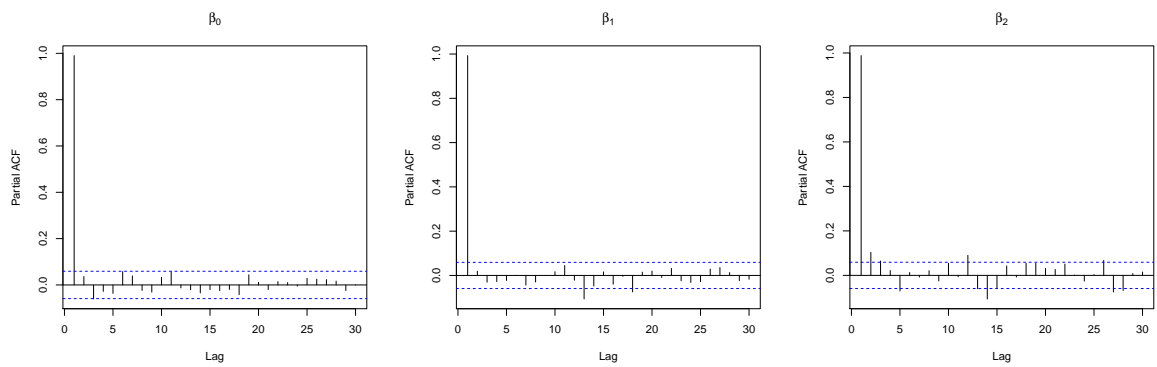


Figura 16: ACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Semanal - Brasil

Figura 17: PACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Semanal - BrasilFigura 18: ACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Semanal - Estados UnidosFigura 19: PACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Semanal - Estados Unidos

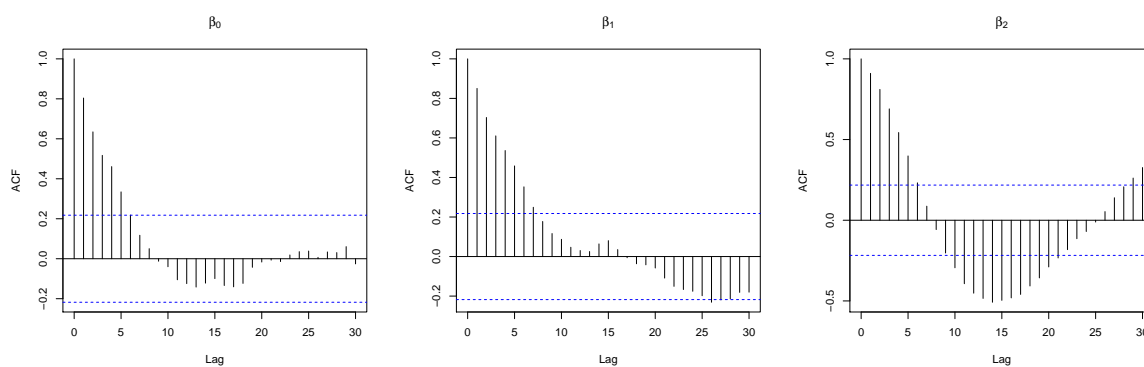


Figura 20: ACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Mensal - Brasil

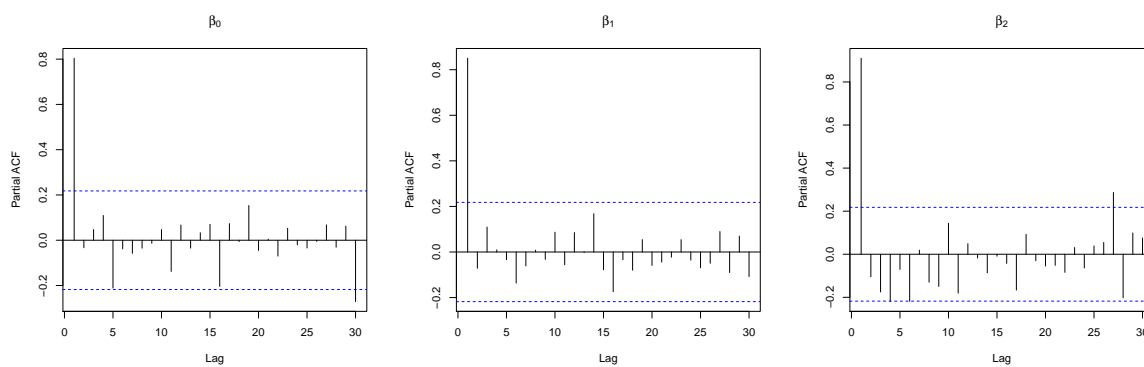


Figura 21: PACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Mensal - Brasil

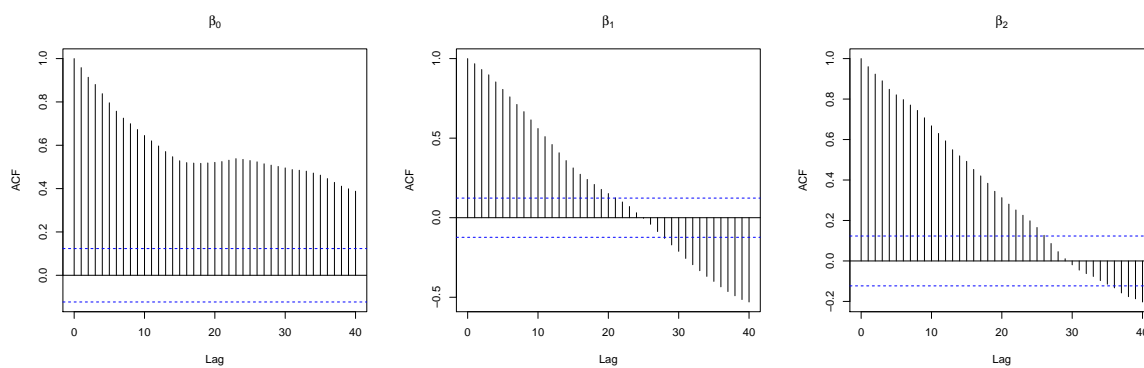


Figura 22: ACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Mensal - Estados Unidos

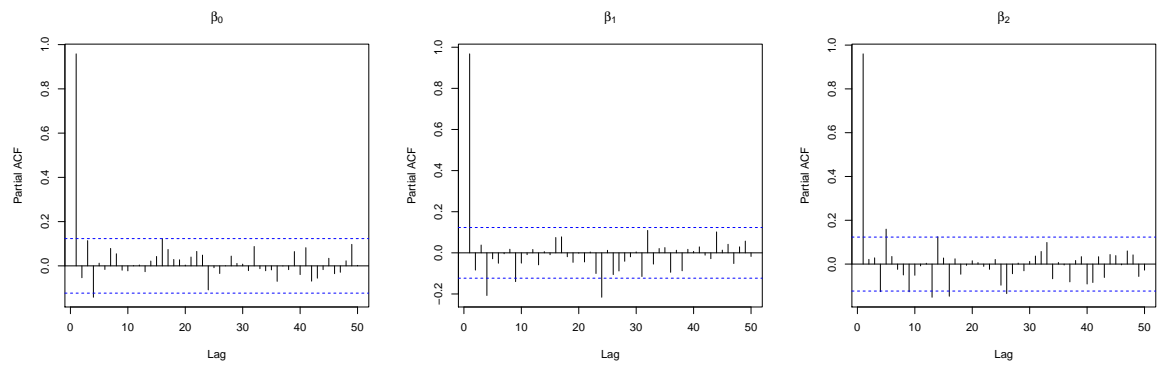


Figura 23: PACF - Parâmetros β_0, β_1 e β_2 da Série Mensal - Estados Unidos

ANEXO B

Tabela 13: Resultado Estados Unidos, série diária

	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	MAE	RMSE	$\rho(1)$	$\rho(12)$
DL (h = 1)								
3	0.07	0.08	-0.60	1.06	0.085	0.109	0.611	0.448
6	-0.05	0.06	-0.85	0.47	0.058	0.080	0.576	0.408
12	-0.08	0.08	-0.87	0.45	0.090	0.108	0.640	0.559
24	-0.03	0.08	-0.38	0.53	0.069	0.088	0.491	0.450
60	0.05	0.10	-0.30	0.59	0.089	0.114	0.593	0.573
84	-0.03	0.08	-0.38	0.41	0.069	0.090	0.414	0.403
120	-0.13	0.11	-0.51	0.34	0.140	0.173	0.676	0.656
RW (h = 1)								
3	-0.002	0.056	-0.806	0.755	0.025	0.056	0.174	-0.003
6	-0.002	0.045	-0.484	0.741	0.023	0.045	0.067	0.008
12	-0.002	0.046	-0.485	0.511	0.028	0.046	0.040	0.009
24	-0.002	0.060	-0.523	0.373	0.041	0.060	-0.018	0.030
60	-0.001	0.067	-0.452	0.331	0.049	0.067	-0.004	0.032
84	-0.001	0.066	-0.518	0.292	0.050	0.066	-0.005	0.029
120	-0.001	0.062	-0.496	0.239	0.047	0.062	-0.002	0.032
DL (h = 21)								
3	3.25	1.44	0.18	5.40	3.251	3.556	0.998	0.500
6	2.82	1.33	0.02	4.87	2.822	3.118	0.998	0.610
12	2.29	1.07	-0.06	4.19	2.292	2.531	0.996	0.597
24	1.67	0.77	-0.07	3.28	1.667	1.836	0.991	0.512
60	0.90	0.47	-0.35	2.43	0.900	1.010	0.977	0.459
84	0.60	0.38	-0.44	2.11	0.607	0.707	0.967	0.455
120	0.32	0.34	-0.58	1.66	0.378	0.468	0.960	0.460
RW (h = 21)								
3	-0.036	0.252	-1.778	1.003	0.138	0.255	0.946	0.500
6	-0.035	0.225	-1.382	0.938	0.131	0.228	0.957	0.610
12	-0.033	0.223	-1.197	0.607	0.143	0.225	0.958	0.597
24	-0.031	0.256	-1.085	0.798	0.188	0.258	0.947	0.512
60	-0.029	0.290	-1.175	0.952	0.226	0.291	0.947	0.459
84	-0.028	0.287	-1.248	0.957	0.224	0.288	0.946	0.455
120	-0.024	0.276	-1.438	0.907	0.213	0.277	0.949	0.460

Tabela 14: Resultado Estados Unidos, série semanal

	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	MAE	RMSE	$\rho(1)$	$\rho(12)$
DL (h = 1)								
3	0.091	0.123	-0.448	0.918	0.109	0.153	0.326	0.199
6	-0.028	0.102	-0.625	0.693	0.070	0.106	0.291	0.247
12	-0.058	0.110	-0.575	0.762	0.099	0.124	0.234	0.236
24	-0.013	0.137	-0.647	0.649	0.097	0.137	0.191	0.041
60	0.069	0.154	-0.638	0.542	0.133	0.169	0.251	0.161
84	-0.016	0.145	-0.702	0.447	0.110	0.146	0.106	0.081
120	-0.117	0.157	-0.645	0.269	0.153	0.196	0.260	0.256
RW (h = 1)								
3	-0.009	0.108	-0.778	0.693	0.055	0.108	0.051	0.131
6	-0.009	0.091	-0.684	0.406	0.050	0.091	0.113	0.062
12	-0.008	0.098	-0.686	0.508	0.061	0.099	0.027	-0.010
24	-0.008	0.124	-0.640	0.633	0.087	0.124	-0.044	-0.039
60	-0.007	0.137	-0.451	0.597	0.104	0.137	-0.028	-0.056
84	-0.006	0.137	-0.399	0.603	0.106	0.137	-0.051	-0.034
120	-0.005	0.130	-0.503	0.545	0.100	0.130	-0.043	0.009
DL (h = 12)								
3	0.326	0.488	-0.873	2.760	0.436	0.586	0.964	0.441
6	0.214	0.482	-1.088	2.114	0.395	0.527	0.971	0.484
12	0.191	0.462	-1.214	1.917	0.359	0.499	0.961	0.389
24	0.235	0.481	-1.187	1.876	0.401	0.535	0.943	0.210
60	0.281	0.474	-0.991	1.867	0.435	0.551	0.927	0.050
84	0.181	0.458	-1.092	1.829	0.386	0.492	0.920	-0.033
120	0.063	0.432	-1.169	1.582	0.340	0.436	0.915	-0.110
RW (h = 12)								
3	-0.096	0.474	-2.502	1.342	0.295	0.483	0.956	0.382
6	-0.093	0.463	-2.199	1.081	0.297	0.471	0.966	0.392
12	-0.087	0.450	-1.964	1.285	0.301	0.458	0.954	0.299
24	-0.085	0.477	-1.738	1.427	0.349	0.484	0.930	0.111
60	-0.080	0.486	-1.663	1.330	0.383	0.492	0.916	-0.048
84	-0.076	0.471	-1.707	1.245	0.376	0.476	0.912	-0.086
120	-0.064	0.439	-1.670	1.176	0.346	0.444	0.914	-0.121

Tabela 15: Resultado Estados Unidos, série mensal

	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	MAE	RMSE	$\rho(1)$	$\rho(12)$
DL (h = 1)								
3	0.17	0.25	-0.33	1.55	0.202	0.301	0.273	0.091
6	0.05	0.24	-0.45	1.29	0.156	0.243	0.369	0.175
12	0.02	0.23	-0.37	1.09	0.155	0.229	0.311	0.121
24	0.07	0.27	-0.69	1.00	0.204	0.279	0.246	0.129
60	0.13	0.29	-0.75	1.02	0.255	0.321	0.158	0.137
84	0.05	0.29	-0.90	1.01	0.222	0.288	0.105	0.098
120	-0.06	0.28	-1.02	0.78	0.223	0.286	0.079	0.101
RW (h = 1)								
3	-0.04	0.24	-1.36	0.45	0.131	0.245	0.196	0.115
6	-0.04	0.23	-1.38	0.36	0.127	0.233	0.287	0.058
12	-0.04	0.23	-1.20	0.44	0.144	0.228	0.279	0.050
24	-0.03	0.26	-0.87	0.70	0.188	0.263	0.150	0.147
60	-0.03	0.29	-0.85	0.89	0.221	0.288	0.067	0.132
84	-0.03	0.29	-0.91	0.92	0.220	0.286	0.048	0.100
120	-0.02	0.28	-1.04	0.91	0.211	0.275	0.044	0.072
DL (h = 12)								
3	1.26	1.44	-1.66	4.37	1.710	1.906	0.984	0.521
6	1.17	1.44	-1.78	4.21	1.660	1.849	0.985	0.557
12	1.18	1.33	-1.57	3.78	1.581	1.775	0.982	0.570
24	1.22	1.16	-1.24	3.08	1.469	1.678	0.970	0.528
60	1.11	0.82	-0.78	2.84	1.175	1.377	0.926	0.332
84	0.94	0.69	-0.68	2.49	0.993	1.168	0.898	0.150
120	0.76	0.60	-0.74	2.17	0.816	0.963	0.865	0.000
RW (h = 12)								
3	-0.33	1.43	-4.00	2.01	1.061	1.465	0.976	0.408
6	-0.31	1.39	-3.73	2.08	1.045	1.420	0.976	0.448
12	-0.31	1.27	-3.25	2.10	0.983	1.302	0.971	0.475
24	-0.32	1.11	-2.91	2.14	0.907	1.148	0.951	0.418
60	-0.34	0.83	-2.05	1.47	0.735	0.891	0.891	0.111
84	-0.32	0.74	-1.86	1.48	0.653	0.803	0.862	-0.052
120	-0.28	0.65	-1.74	1.55	0.568	0.710	0.831	-0.187

Tabela 16: Resultado Brasil, série diária

	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	MAE	RMSE	$\rho(1)$	$\rho(12)$
DL (h = 1)								
3	-0.073	0.190	-0.439	0.583	0.178	0.203	0.969	0.922
6	-0.043	0.235	-0.607	0.796	0.198	0.239	0.970	0.928
12	-0.122	0.257	-0.698	0.807	0.221	0.285	0.956	0.919
24	-0.365	0.290	-1.118	0.481	0.377	0.466	0.946	0.900
60	-0.287	0.296	-1.059	0.293	0.329	0.412	0.923	0.871
84	-0.186	0.235	-0.813	0.273	0.243	0.299	0.868	0.829
120	-0.100	0.170	-0.726	0.302	0.160	0.197	0.731	0.672
RW (h = 1)								
3	-0.006	0.037	-0.438	0.153	0.022	0.037	0.181	0.136
6	-0.005	0.048	-0.539	0.193	0.031	0.049	0.150	0.029
12	-0.005	0.062	-0.523	0.237	0.044	0.062	0.098	-0.009
24	-0.004	0.075	-0.443	0.348	0.056	0.075	0.074	-0.002
60	-0.003	0.090	-0.364	0.337	0.066	0.090	0.005	-0.029
84	-0.003	0.091	-0.420	0.363	0.067	0.092	0.032	-0.038
120	-0.003	0.093	-0.443	0.361	0.068	0.093	0.041	-0.036
DL (h = 21)								
3	0.203	0.534	-0.805	1.426	0.482	0.571	0.997	0.933
6	0.221	0.580	-1.121	1.598	0.528	0.620	0.995	0.909
12	0.125	0.573	-1.291	1.599	0.497	0.586	0.992	0.852
24	-0.140	0.511	-1.306	1.668	0.419	0.529	0.984	0.737
60	-0.090	0.414	-1.274	1.336	0.327	0.424	0.965	0.604
84	0.000	0.393	-1.105	1.357	0.313	0.393	0.959	0.552
120	0.075	0.348	-0.849	1.383	0.281	0.356	0.943	0.400
RW (h = 21)								
3	-0.113	0.358	-1.267	0.730	0.283	0.375	0.992	0.852
6	-0.101	0.374	-1.226	0.924	0.290	0.388	0.986	0.733
12	-0.086	0.388	-1.667	0.898	0.295	0.398	0.977	0.607
24	-0.072	0.387	-1.699	0.822	0.292	0.393	0.963	0.445
60	-0.064	0.343	-1.384	0.857	0.271	0.348	0.929	0.280
84	-0.060	0.342	-1.314	0.918	0.273	0.347	0.928	0.262
120	-0.053	0.345	-1.279	0.945	0.271	0.349	0.927	0.235

Tabela 17: Resultado Brasil, série semanal

	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	MAE	RMSE	$\rho(1)$	$\rho(12)$
DL (h = 1)								
3	-0.065	0.289	-0.889	0.702	0.259	0.296	0.857	0.643
6	-0.044	0.337	-1.055	0.917	0.286	0.339	0.847	0.593
12	-0.118	0.371	-1.725	0.920	0.312	0.389	0.708	0.520
24	-0.293	0.368	-2.229	0.999	0.357	0.471	0.548	0.416
60	-0.184	0.382	-2.152	1.433	0.317	0.424	0.487	0.350
84	-0.103	0.338	-2.020	1.470	0.260	0.354	0.291	0.234
120	-0.033	0.301	-1.896	1.609	0.207	0.303	0.044	0.037
RW (h = 1)								
3	-0.014	0.128	-0.524	0.726	0.085	0.128	0.256	0.247
6	-0.016	0.155	-0.626	0.915	0.102	0.155	0.153	0.153
12	-0.019	0.218	-0.966	1.576	0.142	0.218	-0.021	0.038
24	-0.018	0.252	-1.311	1.992	0.156	0.252	-0.088	0.003
60	-0.015	0.274	-1.698	1.839	0.174	0.274	-0.056	-0.058
84	-0.014	0.280	-1.652	1.864	0.179	0.280	-0.088	-0.038
120	-0.012	0.282	-1.687	1.873	0.177	0.282	-0.101	-0.041
DL (h = 12)								
3	0.495	1.115	-1.659	2.577	1.016	1.218	0.991	0.681
6	0.515	1.161	-1.371	2.580	1.071	1.268	0.988	0.645
12	0.434	1.193	-1.870	3.460	1.037	1.268	0.979	0.553
24	0.205	1.092	-2.421	3.878	0.885	1.109	0.963	0.345
60	0.187	0.892	-2.876	3.582	0.679	0.909	0.933	-0.055
84	0.228	0.896	-3.288	3.467	0.684	0.923	0.931	-0.082
120	0.263	0.899	-3.634	3.424	0.677	0.935	0.929	-0.112
RW (h = 12)								
3	-0.163	0.951	-2.495	1.695	0.788	0.963	0.986	0.592
6	-0.184	1.008	-2.921	1.371	0.835	1.023	0.979	0.513
12	-0.218	1.087	-4.355	1.727	0.845	1.107	0.962	0.331
24	-0.211	1.078	-5.140	2.447	0.773	1.096	0.944	0.079
60	-0.158	1.013	-4.996	3.774	0.665	1.023	0.920	-0.265
84	-0.146	1.001	-4.887	3.949	0.649	1.009	0.916	-0.310
120	-0.128	1.000	-4.842	4.010	0.646	1.006	0.914	-0.318

Tabela 18: Resultado Brasil, série mensal

	Média	Desv. Pad.	Mínimo	Máximo	MAE	RMSE	$\rho(1)$	$\rho(12)$
DL (h = 1)								
3	0.188	0.499	-0.649	1.276	0.444	0.528	0.794	-0.295
6	0.214	0.551	-0.923	1.318	0.503	0.585	0.749	-0.233
12	0.128	0.560	-0.983	1.112	0.479	0.569	0.662	-0.159
24	-0.126	0.551	-1.279	1.255	0.440	0.559	0.548	-0.117
60	-0.064	0.507	-1.095	1.163	0.382	0.506	0.509	-0.284
84	0.034	0.484	-0.991	1.165	0.377	0.480	0.439	-0.245
120	0.105	0.440	-0.776	1.189	0.362	0.447	0.279	-0.170
RW (h = 1)								
3	-0.116	0.361	-1.092	0.675	0.279	0.375	0.674	-0.266
6	-0.110	0.393	-1.044	0.843	0.300	0.404	0.442	-0.146
12	-0.095	0.404	-1.215	0.728	0.308	0.411	0.268	-0.086
24	-0.081	0.401	-1.455	0.590	0.299	0.405	0.018	0.025
60	-0.067	0.360	-1.223	0.774	0.283	0.363	-0.300	0.102
84	-0.064	0.367	-1.116	0.801	0.283	0.368	-0.352	0.082
120	-0.058	0.373	-1.063	0.784	0.283	0.374	-0.370	0.027
DL (h = 12)								
3	0.749	2.148	-2.447	4.142	1.883	1.870	0.970	-0.756
6	0.899	2.196	-2.561	4.423	2.010	1.842	0.966	-0.753
12	1.039	2.153	-2.496	4.633	2.062	1.634	0.962	-0.732
24	1.033	1.873	-2.179	4.382	1.847	1.312	0.950	-0.687
60	1.087	1.209	-0.929	3.648	1.339	0.814	0.922	-0.511
84	1.101	1.013	-0.564	3.395	1.193	0.475	0.901	-0.281
120	1.060	0.885	-0.344	3.104	1.099	0.364	0.886	0.137
RW (h = 12)								
3	-0.300	2.415	-4.493	2.552	2.091	2.398	0.971	-0.526
6	-0.332	2.353	-4.659	2.394	2.035	2.342	0.966	-0.407
12	-0.438	2.210	-4.655	2.379	1.886	2.221	0.961	-0.064
24	-0.587	1.789	-4.138	1.818	1.457	1.858	0.950	0.294
60	-0.669	1.068	-3.254	0.766	0.908	1.247	0.890	-0.164
84	-0.670	0.915	-2.901	0.713	0.875	1.123	0.842	-0.294
120	-0.610	0.818	-2.547	0.682	0.838	1.011	0.789	-0.327