

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

MARNES AUGUSTO HOFF

**Grafos Internos e Multirrelações
como “Spans”
— Propriedades e
Composicionalidade**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Paulo F. Blauth Menezes
Orientador

Porto Alegre, setembro de 2005

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Hoff, Marnes Augusto

Grafos Internos e Multirrelações como “Spans”
— Propriedades e Composicionalidade / Marnes Augusto Hoff. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2005.

138 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 2005. Orientador: Paulo F. Blauth Menezes.

1. Spans. 2. Grafos Internos. 3. Multirrelações. 4. Propriedades. 5. Composição. I. Menezes, Paulo F. Blauth. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Vice-Reitor: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca

Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof^a. Valquíria Linck Bassani

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Philippe Olivier Alexandre Navaux

Coordenador do PPGC: Prof. Flávio Rech Wagner

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

“Relação de equivalência não é uma suruba.”

— PROF^A. MARIA MEDIANEIRA SIECZKOWSKI GONZALEZ

04 DE MAIO DE 2000

AGRADECIMENTOS

- Aos meus grandes pais, Isolde Darne Hoff e Romeu Antônio Hoff, por incentivarem em mim o espírito crítico e científico; pela paciência e compreensão; por me darem aquela calculadora que eu tanto queria no meu aniversário de, quanto mesmo, sete anos? e aquela outra no de quinze! pelo amor e carinho; pela vida.
- Aos meus dindos Helvêcia Sidônia Genz e Cláudio Roberto Genz pelo grande apoio, antes de se irem de forma trágica.
- Ao Guilherme Peretti Pezzi, meu grande amigo, pela companhia, pelas aventuras, por me lembrar de curtir a vida e pelas várias vezes que me ajudou nas configurações do linux e do latex durante a escrita deste.
- Aos amigos Fausto Bottin Piovesan, Lucas Casagrande, Karen Fiuza, Rafael Peretti Pezzi, Tomás Rihl Bettoni, Isadora Henrichs, Mateus Vinícius Wachter, Lara Taís Casagrande, Daniel Monteiro Basso, Karina Girardi Roggia, Rodrigo Machado, Rodrigo Virotte Kassick e, novamente, Guilherme Peretti Pezzi, entre outros, bem como aos meus pais, pelos momentos de descontração durante a realização deste trabalho.
- Aos grandes colegas Karina Girardi Roggia e Rodrigo Machado pelo apoio e por ajudarem a tornar o desenvolvimento deste trabalho divertido.
- Ao meu orientador Paulo F. Blauth Menezes, pela confiança, incentivo, amizade e também pela incrível calma quando surgiam problemas.
- Aos professores dos quais lembro com muita satisfação: Sislaine (matemática 1985-1986, Col. Nossa Senhora Auxiliadora, Rio Pardo), Edenir (matemática 1989, Col. Nossa Senhora Auxiliadora, Rio Pardo), Pedrão (matemática 1992-1993, Col. Mauá, Santa Cruz do Sul), Clarisse (história 1991-1993, Col. Mauá, Santa Cruz do Sul), Dulce (inglês 1990-1993, Col. Mauá, Santa Cruz do Sul), Rodolfina, (álgebra 1995, PUC-RS, Porto Alegre), Neda (cálculo 1996, PUC-RS, Porto Alegre) e Vilmar (matemática 1996, UFRGS, Porto Alegre).
- À UFRGS e ao R.U.
- Ao CNPq.
- “À farofa, à cachaça, às baleias.”

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	11
LISTA DE SÍMBOLOS	13
LISTA DE FIGURAS	15
RESUMO	19
ABSTRACT	21
1 INTRODUÇÃO	23
1.1 <i>Spans</i>	23
1.2 Composição de <i>Spans</i>	24
1.3 Objetivos	25
1.4 Como ler este trabalho	26
1.4.1 Por Assunto	26
1.4.2 Por Aplicação	27
2 CONCEITOS BÁSICOS	29
2.1 Relações e Multirrelações Binárias	29
2.1.1 Relação	30
2.1.2 Relação Identidade	31
2.1.3 Composição de Relações	31
2.1.4 Função Característica de uma Relação	32
2.1.5 Multirrelação	32
2.1.6 Multirrelação Identidade	34
2.1.7 Composição de Multirrelações	34
2.1.8 Relação \times Multirrelação	35
2.2 Par Mono e Família Mono	36
2.2.1 Par Mono	36
2.2.2 Família Mono	37
2.2.3 Equalizador de par mono	38
2.3 Categorias	39
2.3.1 Principais Categorias Grandes	39
2.3.2 $Rel \times MRel$	40

3	SPANS	41
3.1	<i>Span</i>	41
3.2	<i>Span</i> Dual	42
3.3	Paralelismo de <i>Spans</i>	42
3.4	Equivalência de <i>Spans</i>	43
3.5	Exemplos em Diversas Categorias	43
4	RELAÇÕES E MULTIRRELAÇÕES COMO SPANS	49
4.1	Relação Binária	49
4.2	Exemplos	50
4.3	Multirrelação Binária	54
4.4	Exemplos	55
5	GRAFOS INTERNOS COMO SPANS	57
5.1	Grafo Interno	57
5.2	Exemplos e Propostas de Diagramação	58
6	MODELOS DE SISTEMAS COMO SPANS	63
6.1	LTS	63
6.2	Autômatos Finitos	65
6.3	Redes de Petri	65
6.3.1	Rede de Petri como um grafo interno a \mathcal{MRel}	65
6.3.2	Rede de Petri como dois <i>spans</i> paralelos em \mathcal{Set}	66
7	PROPRIEDADES DE ENDORRELAÇÕES	69
7.1	Definições Algébricas	69
7.2	Caracterização Categorial	70
7.2.1	Reflexividade, Correflexividade e Irreflexividade	70
7.2.2	Simetria	71
7.2.3	Anti-simetria e Assimetria	72
7.2.4	Conexividade	73
7.2.5	Transitividade, Monotransitividade e Densidade	75
7.2.6	Euclideanidade	76
7.3	Monotransitividade — Definição Algébrica	77
7.4	Dependência	77
8	PROPRIEDADES DE GRAFOS INTERNOS	79
8.1	Caracterização Categorial	79
8.1.1	Reflexividade, Monorreflexividade, Isorreflexividade, Correflexividade e Irreflexividade	79
8.1.2	Simetria e Pseudo-simetria	81
8.1.3	Anti-simetria, Anti-simetria Forte e Assimetria	81
8.1.4	Conexividade ³	83
8.1.5	Transitividade, Monotransitividade e Densidade	84
8.1.6	Euclideanidade	85
8.2	Resumo das Propriedades — Interpretações	86
8.3	Definições Algébricas — Multirrelações	87
8.4	Dependência	88

9	COMPOSIÇÃO DE SPANS	91
9.1	Identidade	91
9.2	Composição	91
9.3	Propriedades da Composição de <i>Spans</i>	93
9.3.1	Não Fechada	93
9.3.2	Associativa	93
9.3.3	Identidade — Elemento Neutro	95
9.3.4	Nao Idempotente	96
9.4	Autocomposição de <i>Spans</i>	96
9.5	Produto de <i>Spans</i>	96
9.6	Propriedades Envolvendo a Composição de <i>Spans</i> e o Produto de <i>Spans</i>	97
9.6.1	Não Distributivo	97
9.6.2	Lei do Intercâmbio	97
10	COMPOSIÇÃO DE MULTIRRELAÇÕES COMO COMPOSIÇÃO DE SPANS	103
10.1	A Composição de <i>Spans</i> expressa a Composição de Multirrelações	103
10.2	A Composição de <i>Spans</i> não expressa a Composição de Relações	105
10.3	Composição de Multirrelações Estendidas	106
11	COMPOSIÇÃO DE ARESTAS DE GRAFOS INTERNOS	107
11.1	Identidade	107
11.2	Composição	107
11.3	Propriedades	108
11.3.1	Identidade — Elemento Neutro	108
11.3.2	Associatividade	108
11.4	Autocomposição	109
11.5	Exemplos em outras categorias	110
11.5.1	$\mathcal{P}fn$	110
11.5.2	$\mathcal{M}Rel$	111
11.5.3	Uma categoria pequena qualquer	111
12	COMPOSIÇÃO DE TRANSIÇÕES DE LTS	113
12.1	Identidade	113
12.2	Composição	113
12.3	Propriedades	114
12.3.1	Composição de Transições de LTS é Fechada	114
12.3.2	Composição de Transições de LTS Determinísticos é Fechada	115
12.3.3	Identidade — Elemento Neutro	115
12.3.4	Associatividade	116
12.4	Autocomposição	119
12.5	Combinação Síncrona de LTS	120
12.6	Propriedades Envolvendo a Composição de Transições de LTS e a Combinação Síncrona de LTS	121
12.6.1	Lei do Intercâmbio	121

13 COMPOSIÇÃO DE REDES DE PETRI	125
13.1 Transições Dois Tempos	125
14 CONCLUSÃO	133
14.1 Principais Resultados	133
14.2 Publicações	133
14.3 Trabalhos Futuros	134
REFERÊNCIAS	137

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

mono	monomorfismo (abreviatura usada somente quando adjetivo)
P.F.	produto fibrado
LTS	sistema(s) de transições etiquetadas (<i>labeled transition systems</i>)
AFD	Autômato Finito Determinístico
AFN	Autômato Finito Não-Determinístico
AFDs	Autômatos Finitos Determinísticos
AFNs	Autômatos Finitos Não-Determinísticos

LISTA DE SÍMBOLOS

\neg	conectivo lógico negação
\wedge	conectivo lógico conjunção
\vee	conectivo lógico disjunção fraca
\longrightarrow	conectivo lógico condição
\longleftrightarrow	conectivo lógico bicondição
\implies	relação de implicação lógica
\forall	quantificador lógico universal
\exists	quantificador lógico existencial
$\exists!$	quantificador lógico existencial único
\square	“como se quis demonstrar”
$ $	“tal que” ou “tais que”
\in	relação “pertence a”
\notin	relação “não pertence a”
\subseteq	relação “está contido em”
$=$	relação “é igual a (a menos de isomorfismo)”
\neq	relação “é diferente de”
$<$	relação “é menor que”
$>$	relação “é maior que”
\leq	relação “é menor que ou igual a”
\geq	relação “é maior que ou igual a”
\emptyset	conjunto vazio
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais, sendo que $0 \in \mathbb{N}$
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
\mathbb{Q}	conjunto dos números racionais
\mathbb{I}	conjunto dos números irracionais
\mathbb{R}	conjunto dos números reais

2^X	conjunto das partes de um conjunto X
X^*	fecho de Kleene de um conjunto X
$\#X$	cardinalidade de um conjunto X
\times	operação produto cartesiano
\cap	operação intersecção
\cup	operação união
$-$	operação diferença (entre conjuntos)
\uplus	operação união disjunta
\aleph_0	$\#\mathbb{N}$
2^{\aleph_0}	$\#2^{\mathbb{N}}$
$+$	operação adição
\cdot	operação multiplicação
\sum	somatório (adição)
id_X	identidade de um objeto X
\circ	operação de composição
$inc_{X \hookrightarrow Y}$	inclusão de um objeto X em um objeto Y
f^{op}	dual de um morfismo f
\hookrightarrow	monomorfismo
mod_n	função resto da divisão inteira por n , com $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$
sin	função seno $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
cos	função co-seno $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
tan	função parcial tangente $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\{ \quad \}$	notação de conjunto
$\{ \quad \}_{i \in I}$	notação de conjunto indexado por um conjunto I
$\langle \quad \rangle$	notação de seqüência ordenada
$: \quad \rightarrow$	notação para origem e destino
$\{ \quad \}$	notação para função com alternativas
$/$	notação de fração
\times	<i>versus</i>
$ \quad $	função tamanho de palavra
\triangleright	operação composição de arestas de grafos internos ou composição de transições de LTS

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Relação.	30
Figura 2.2: Relação identidade e Multirrelação identidade.	31
Figura 2.3: Composição de relações.	32
Figura 2.4: Multirrelação.	34
Figura 2.5: Composição de multirrelações.	35
Figura 2.6: Composição de multirrelações como multiplicação de matrizes.	35
Figura 2.7: Diagramas comutativos para definição 2.16.	36
Figura 2.8: Produto fibrado é um par mono.	37
Figura 2.9: Diagrama comutativo para definição 2.17.	38
Figura 2.10: Equalizador de par mono.	38
Figura 2.11: Composição de relações.	40
Figura 2.12: Composição de multirrelações.	40
Figura 3.1: <i>Span</i>	41
Figura 3.2: Pré-produto e pré-equalizador são <i>spans</i>	42
Figura 3.3: <i>Spans</i> paralelos.	42
Figura 3.4: <i>Spans</i> equilaventes.	43
Figura 3.5: Dois diagramas distintos para <i>endospan</i>	43
Figura 3.6: Categoria 2.	44
Figura 3.7: Todos os <i>spans</i> na categoria 2.	44
Figura 3.8: Cada um dos <i>spans</i> na categoria 2.	44
Figura 3.9: Categoria <i>Or</i>	44
Figura 3.10: Todos os <i>spans</i> na categoria <i>Or</i>	44
Figura 3.11: Categoria <i>Xor</i>	45
Figura 3.12: Todos os <i>spans</i> na categoria <i>Xor</i>	45
Figura 3.13: <i>Spans</i> equivalentes em <i>Set</i>	45
Figura 3.14: Outros <i>spans</i> em <i>Set</i>	45
Figura 3.15: <i>Endospan</i> em <i>Set</i>	46
Figura 3.16: <i>Spans</i> em <i>Pfn</i>	46
Figura 3.17: <i>Spans</i> em <i>Rel</i>	46
Figura 3.18: <i>Spans</i> em <i>MRel</i>	47
Figura 3.19: <i>Span</i> em <i>Poset</i>	47
Figura 3.20: <i>Endospan</i> em <i>Gr</i>	47
Figura 4.1: Relação Binária.	49
Figura 4.2: <i>Spans</i> equivalentes que expressam uma relação em <i>Set</i>	51
Figura 4.3: Relação em <i>Set</i>	51
Figura 4.4: <i>Spans</i> equivalentes que expressam uma relação em <i>Pfn</i>	51

Figura 4.5:	Proposta de representação de uma relação binária em \mathcal{Pfn} .	52
Figura 4.6:	Representação proposta para todas as oito diferentes relações binárias possíveis $\{1\} \rightarrow \{3\}$ em \mathcal{Pfn} .	52
Figura 4.7:	$Span$ que expressa uma relação em Set_{\perp} .	52
Figura 4.8:	Relação em Set_{\perp} .	53
Figura 4.9:	$Span$ que expressa uma relação em \mathcal{Poset} .	53
Figura 4.10:	Relação em \mathcal{Poset} .	53
Figura 4.11:	Todas relações binárias na categoria \mathcal{Or} .	54
Figura 4.12:	$Spans$ equivalentes em Set que expressam uma multirrelação.	55
Figura 4.13:	Multirrelação em Set .	55
Figura 4.14:	Proposta de representação de uma multirrelação estendida em Set .	56
Figura 4.15:	$Span$ que representa uma multirrelação em \mathcal{Pfn} e a proposta de representação da respectiva multirrelação.	56
Figura 4.16:	Multirrelação em \mathcal{Pfn} .	56
Figura 5.1:	Diagramas de um Grafo.	57
Figura 5.2:	Grafo interno a Set .	58
Figura 5.3:	Grafo interno a \mathcal{Pfn} .	59
Figura 5.4:	Grafo interno a Set_{\perp} .	59
Figura 5.5:	Grafo interno a \mathcal{Rel} .	60
Figura 5.6:	Grafo interno a \mathcal{MRel} .	61
Figura 5.7:	Grafo interno a \mathcal{Poset} .	61
Figura 6.1:	Diagramas para um LTS.	64
Figura 6.2:	Um LTS determinístico (também um AFD).	64
Figura 6.3:	Diagramas para redes de Petri em \mathcal{MRel} (esquerda) e em Set (direita).	65
Figura 6.4:	Rede de Petri como dois $spans$ paralelos em Set .	67
Figura 7.1:	Diagrama comutativo para a definição 7.1.	70
Figura 7.2:	Cálculo para reflexividade, correflexividade e irreflexividade.	71
Figura 7.3:	Diagrama comutativo para as definições 7.5 e 7.6.	72
Figura 7.4:	Cálculo para anti-simetria e assimetria.	73
Figura 7.5:	Cálculo para conexividade.	74
Figura 7.6:	Morfismos induzidos para a verificação da conexividade.	74
Figura 7.7:	Diagrama comutativo para a definição 7.9.	74
Figura 7.8:	Cálculo para transitividade, monotransitividade e densidade.	75
Figura 7.9:	Diagrama comutativo para as definições 7.10 e 7.11.	75
Figura 7.10:	Diagrama comutativo para a definição 7.12.	76
Figura 7.11:	Cálculo para Euclideanidade.	76
Figura 7.12:	Diagrama comutativo para a definição 7.13.	77
Figura 7.13:	Relação de Dependência.	78
Figura 8.1:	Cálculo para reflexividade, monorreflexividade, isorreflexividade, correflexividade e irreflexividade.	79
Figura 8.2:	Diagrama comutativo para a definição 8.6.	81
Figura 8.3:	Diagrama comutativo para as definições 8.7 e 8.8.	81
Figura 8.4:	Cálculo para anti-simetria, anti-simetria forte e assimetria.	82
Figura 8.5:	Cálculo para conexividade ³ .	83

Figura 8.6: Morfismos induzidos para a verificação da conexividade ³	83
Figura 8.7: Diagrama comutativo para a definição 8.12.	84
Figura 8.8: Cálculo para transitividade, monotransitividade e densidade.	84
Figura 8.9: Diagrama comutativo para a definição 8.13.	85
Figura 8.10: Diagrama comutativo para a definição 8.15.	85
Figura 8.11: Cálculo para Euclideanidade.	85
Figura 8.12: Diagrama comutativo para a definição 8.16.	86
Figura 8.13: Relação de Dependência.	90
Figura 9.1: Composição de <i>Spans</i>	92
Figura 9.2: Categoria.	92
Figura 9.3: Todos os <i>spans</i> na categoria acima e a táboa de composições de <i>spans</i>	93
Figura 9.4: Táboa de composições dos <i>spans</i> da categoria $\mathcal{X}or$	93
Figura 9.5: Associatividade do produto fibrado e da composição de <i>spans</i>	94
Figura 9.6: Identidade na composição de <i>spans</i>	95
Figura 9.7: Composição de <i>spans</i> não é idempotente.	96
Figura 9.8: Produto binário de <i>spans</i>	97
Figura 9.9: <i>Spans</i> em <i>Set</i>	97
Figura 9.10: Não distributividade.	97
Figura 9.11: Lei do intercâmbio para produto fibrado e produto de morfismos e para composição de <i>spans</i> e produto de <i>spans</i>	98
Figura 10.1: Composição de <i>spans</i> que expressam multirrelações.	103
Figura 10.2: <i>Spans</i> que expressam multirrelações em <i>Set</i>	105
Figura 10.3: <i>Spans</i> resultante da composição.	105
Figura 10.4: Composição de multirrelações.	105
Figura 11.1: Composição de arestas de grafos em <i>Set</i>	108
Figura 11.2: Composição de arestas de grafos em <i>Set</i>	109
Figura 11.3: Significado das arestas.	109
Figura 11.4: Autocomposição de arestas de grafos.	110
Figura 11.5: Autocomposição de arestas de grafos.	110
Figura 11.6: Composição de arestas de grafos internos a $\mathcal{P}fn$	111
Figura 11.7: Composição de arestas de grafos internos a $\mathcal{M}Rel$	111
Figura 12.1: Diagrama para Composição de Transições de LTS.	114
Figura 12.2: Composição de transições de LTS.	114
Figura 12.3: Composição de transições de LTS diferentes.	115
Figura 12.4: LTS Identidade atua como elemento neutro.	116
Figura 12.5: Associatividade do produto de objetos.	117
Figura 12.6: Autocomposição de LTS.	120
Figura 12.7: Diagrama para Combinação Síncrona de LTS.	120
Figura 12.8: Lei do Intercâmbio para LTS.	121
Figura 12.9: Diagrama para a prova da Lei do Intercâmbio para LTS.	121
Figura 13.1: Transação dois tempos.	126
Figura 13.2: Redes R (esquerda) e S (direita).	127
Figura 13.3: Redes $R \triangleright S$ (esquerda) e $S \triangleright R$ (direita).	127
Figura 13.4: Rede $S \triangleright R$	127

Figura 13.5: Redes T (esquerda) e U (direita).	128
Figura 13.6: Rede $T \triangleright U$.	128
Figura 13.7: Redes V (esquerda) e W (direita).	128
Figura 13.8: Redes R_1 (esquerda) e R_2 (direita).	129
Figura 13.9: Rede $R_1 \triangleright R_2$.	129
Figura 13.10: Redes R_3 (esquerda) e R_4 (direita).	129
Figura 13.11: Rede $R_3 \triangleright R_4$.	129
Figura 13.12: Redes R_5 (esquerda) e R_6 (direita).	129
Figura 13.13: Rede $R_5 \triangleright R_6$.	130
Figura 13.14: Redes R_7 (esquerda) e R_8 (direita).	130
Figura 13.15: Rede $R_7 \triangleright R_8$.	130
Figura 13.16: Redes T (esquerda), T^2 (centro) e T^3 (direita).	131
Figura 13.17: Redes P (esquerda) e P^2 (direita).	131

RESUMO

Um *span* em uma categoria é um par ordenado de morfismos dessa categoria, ambos com origem num mesmo objeto. O destino do primeiro morfismo é a origem do *span* e o destino do segundo morfismo é o destino do *span*. *Spans*, embora sejam uma estrutura bastante simples numa categoria e tenham uma definição também bastante simples, são versáteis, pois, com especializações sutis apresentadas aqui, são capazes de representar outras estruturas, tais como as tratadas nesse trabalho: relações binárias, multirrelações binárias, grafos e, em conjunto com um morfismo adicional, sistemas de transições etiquetadas (LTS). Permitem ainda, como proposto nesse trabalho, definir de forma também simples, redes de Petri como sendo um *endospan* em uma categoria. Mostra-se que a composição de *spans* aplicada a essas estruturas é capaz de expressar a composição de multirrelações — mas não de relações —, uma composição de grafos cujo grafo resultante indica caminhos em que cada parte é uma aresta de um dos grafos operados, uma composição de LTS cujo LTS resultante apresenta transações que podem ser compostas por transições de diferentes LTS e uma composição de redes de Petri cujo resultado também apresenta transações compostas por transições que podem ser realizadas em redes de Petri distintas. Mostra-se algumas propriedades dessas composições, bem como suas provas. Como verificar propriedades de relações e de grafos através de *spans* também é proposto.

Palavras-chave: Spans, Grafos Internos, Multirrelações, Propriedades, Composição.

Internal Graphs and Multirrelations as Spans — Properties and Composition

ABSTRACT

A span is a ordered pair of morphisms in a category, both with common source. The target of the first is the source of the span and the target of the second is the target of the span. Spans, a very simple structure with a very simple definition, are powerful. They may, as we show, represent structures as the ones in this work: binary relation, binary extended multirrelations, graphs and, with one more morphism, labeled transition systems (LTS). May also, as we propose here, represent Petri nets as an internal graph. We show the span composition applied to these structures may represent composition of multirrelations, but not of relations. May represent too a composition of graphs where each arc in the resulting graph represents a path composed by arcs of the operated graphs, a composition of LTS where each transition of the resulting LTS is a transaction assembled with transitions of the operated LTS and a composition of Petri nets where each transition in the resulting Petri net represents a transaction of the transitions in the operated Petri net. We also show some properties of these compositions, all with proofs. Here we also propose how to verify properties of relations and graphs by spans.

Keywords: Spans, Internal Graphs, Multirrelations, Properties, Composition.

1 INTRODUÇÃO

1.1 *Spans*

Um *span* em uma categoria é um par ordenado de morfismos dessa categoria, ambos com origem num mesmo objeto. O destino do primeiro morfismo é a origem do *span* e o destino do segundo morfismo é o destino do *span*.

Spans, embora sejam uma estrutura bastante simples numa categoria e tenham uma definição também bastante simples, são versáteis, pois, com especializações sutis, são capazes de representar estruturas algébricas comuns em Computação, tais como as tratadas nesses trabalhos: relações binárias, multirrelações binárias, grafos e, em conjunto com um morfismo adicional, sistemas de transições etiquetadas (LTS) e autômatos finitos. Permite ainda, como proposto nesse trabalho, definir de forma também simples, redes de Petri como sendo um grafo interno a uma categoria.

Definições de *span* são encontradas em (BÉNABOU, 1967), (BRUNI; GADDUCCI, 2001), (MILIUS, 2000), (STREET; CARBONI; KASANGIAN, 1984), entre outros. Neste trabalho, segue-se aquela presente em (BÉNABOU, 1967) e em (BRUNI; GADDUCCI, 2001). Um dos primeiros capítulos deste trabalho, apresenta tal definição, bem como algumas definições referentes a *spans*, como a equivalência de *spans*. No mesmo capítulo, apresenta-se exemplos de *spans* em algumas categorias.

Na categoria \mathcal{Set} , se os morfismos de um *span* respeitam a característica chamada “par mono” encontrada em (FREYD; SCEDROV, 1990), esse *span* passa a expressar uma relação binária da teoria dos conjuntos, como é mostrado em (VIGNA, 2002). Tirando-se essa restrição de par mono, um *span* em \mathcal{Set} expressa uma multirrelação binária que é uma generalização de relação.

Generalizando-se essa maneira de se expressar relações e multirrelações em \mathcal{Set} , define-se, através de *spans*, relações e multirrelações binárias em qualquer categoria. Também são propostas maneiras de se representar diagramaticamente relações e multirrelações em algumas categorias.

Tendo-se isso, propõe-se neste trabalho maneiras de se verificar propriedades de endorrelações e de endomultirrelações nos *spans* que as expressam. As verificações propostas são para *spans* em categorias genéricas, não apenas para \mathcal{Set} . Algumas dessas propriedades — reflexividade, simetria e transitividade — aparecem em (BARR; WELLS, 1985), (LAWVERE; ROSEBRUGH, 2003) e em (ADÁMEK; ROSICKÝ, 2001), mas a maioria das propriedades cuja verificação é proposta aqui não foram encontradas na literatura. Um exemplo é a anti-simetria com a qual, juntamente com a reflexividade e com a transitividade, permite se testar se um *span* expressa uma relação de ordem parcial. Além da anti-simetria, outras propriedades cujas verificações são propostas aqui são irreflexividade, correflexividade,

assimetria, conexividade, densidade e Euclideanidade. Além da verificação de propriedades, uma nova propriedade é proposta — a monotransitividade — bem como sua verificação.

Um tipo de relação binária importante na computação são as funções parciais que são dadas por um *span* em \mathcal{Set} cuja primeira projeção seja um monomorfismo. A generalização desse conceito para qualquer categoria são os morfismos parciais, um dos principais assuntos de estudo do grupo no qual estou inserido, principalmente através da Mestre em Ciência da Computação Karina Girardi Roggia, com a qual se desenvolveu um trabalho correlato. Como aparece em (BARBOSA, 2003), um morfismo parcial é uma classe de equivalência de *span* equivalentes cuja primeira projeção de cada *span* é mono. Como um dos morfismos é mono, os dois morfismos do *span* formam um par mono e, portanto, expressam uma relação — uma relação funcional.

Um grafo¹ é definido como uma álgebra composta por dois conjuntos e duas funções. Também pode ser definido por um *endospan* em \mathcal{Set} . Grafo interno, como em (MAC LANE, 1998) (chamado apenas de grafo) e em (MENEZES, 1997), é a generalização de grafo para qualquer categoria. Pode portanto ser definido como um *endospan* na respectiva categoria.

A similaridade de grafos internos com endorrelações e endomultirrelações leva à proposta de propriedades similares às propriedades de relações para grafos internos. Todas as propriedades mencionadas para endorrelações são propostas também para grafos internos. Adicionalmente, devido a situações que não ocorrem com endorrelações, são propostas também novas propriedades: monorreflexividade, isorreflexividade, pseudo-simetria e anti-simetria forte.

Tendo definido grafos através de *span*, aproveita-se esse fato para se definir LTS (como em (HENNESSY, 1988) e em (MILNER, 1989)) o que exige um morfismo adicional ao *span*. Aqui, a característica de par mono aparece novamente para se verificar se um LTS é determinístico. Essa definição é na categoria \mathcal{Set} . Uma simples transposição para a categoria \mathcal{Finset} leva aos autômatos finitos, como em (MENEZES, 2001), embora sem estados inicial nem finais.

Duas formas alternativas de se definir redes de Petri são propostas neste trabalho, ambas usando *spans*. Uma delas define simplesmente como um grafo interno (um *endospan*) à categoria \mathcal{MRel} , sendo \mathcal{MRel} a categoria de todos os conjuntos e todas as multirrelações entre conjuntos. A outra define como dois *spans* paralelos em \mathcal{Set} , sendo que esta generaliza as redes de Petri, pois permite tratar quantidade de *tokens* dadas por diferentes cardinais infinitos.

1.2 Composição de *Spans*

Na literatura, praticamente todos os locais que falam de *spans*, falam também de composição de *spans* que é dada por um produto fibrado, e que, a menos de equivalência de *spans*, é uma operação binária parcial. Algumas propriedades dessa composição são demonstradas.

Neste trabalho, também se mostra como a composição de *spans* pode ser interpretada nas diversas estruturas modeladas como *spans*.

¹Neste trabalho, por “grafo” se entende o que, geralmente, em teoria dos grafos, é chamado de “multigrafo dirigido (ou orientado) com *loops*” ou “multidígrafo com *loops*”.

Sobre relações e multirrelações, a composição de *spans* expressa a composição de multirrelações, mas não a de relações.

Já com a composição de *spans* aplicada a grafos, define-se um tipo de composição — Composição de Arestas de Grafos Internos — em que as arestas do grafo resultante representam caminhos em que cada pedaço é uma aresta de um dos grafos operados. Sobre essa composição, publicou-se o artigo (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004) que também trata de composição de sistemas.

Quando aplicada a sistemas, essa composição é capaz de representar transações em que cada transição é realizada em um dos sistemas operados. Sobre essa composição de sistemas, demonstra-se algumas propriedades como a associatividade e a preservação de determinismo, entre outras.

A composição de arestas de grafos internos, quando aplicada às redes de Petri (grafos internos a \mathcal{MRel}), também é capaz de indicar um tipo de trasação realizada com as transições das redes operadas.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é explorar *spans* em algumas categorias e estabelecer como eles podem representar estruturas como relações binárias, multirrelações binárias estendidas, grafos, LTS, LTS determinísticos e redes de Petri. Também, explorar a composição de *spans* e sua aplicação a *spans* que representam as estruturas mencionadas.

Mais especificamente, os objetivos são:

- definir relação binária e multirrelação binária estendida em qualquer categoria através de *spans*;
- apresentar a definição de grafo interno como *span*;
- apresentar como LTS e LTS determinísticos podem ser definidos usando-se *spans* em \mathcal{Set} e como AF são vistos como LTS na categoria \mathcal{Finset} ;
- propor a definição de rede de Petri como um *endospan* na categoria \mathcal{MRel} ;
- propor outra definição de rede de Petri através de *spans* em \mathcal{Set} — sendo que esta generaliza redes de Petri;
- estabelecer maneiras de se verificar diversas propriedades de endorrelações expressas por *spans*;
- propor propriedades de grafos internos e maneiras de as verificar;
- provar algumas propriedades da composição de *spans*;
- mostrar que a composição de *spans* expressa a composição de multirrelações, mas não de relações;
- definir uma composição de grafos internos que calcule caminhos de tamanhos pré-estabelecidos, podendo esses terem pedaços em grafos diferentes, desde que com mesmos vértices;

- definir uma composição de LTS que calcule transações de tamanhos pré-estabelecidos, podendo ser realizadas em LTS diferentes, desde que com mesmos estados, e provar algumas propriedades a respeito dessa composição;
- definir um tipo de transação capaz de ser calculado em redes de Petri através da composição de grafos internos.

1.4 Como ler este trabalho

Há aqui duas sugestões de seqüências de capítulos a serem seguidas para se ler este trabalho.

1.4.1 Por Assunto

Esta é a seqüência em que o trabalho foi escrito. Separa os capítulos em três grupos principais: inicialmente aqueles referentes a *spans* e como estruturas podem ser representadas por *spans*; após, propriedades de estruturas vistas como *spans*; finalmente, composição de *spans* e aplicação dessa composição às outras estruturas.

A seqüência é:

[1] Introdução

[2] Conceitos Básicos

- *Spans* e estruturas vistas como *spans*

[3] *Span*

[4] Relações e Multirrelações como *Spans*

[5] Grafos Internos como *Spans*

[6] Modelos de Sistemas como *Spans*

- Propriedades

[7] Propriedades de Endorrelações

[8] Propriedades de Grafos Internos

- Composição

[9] Composição de *Spans*

[10] Composição de Multirrelações como Composição de *Spans*

[11] Composição de Arestas de Grafos Internos

[12] Composição de Sistemas

[13] Composição de Redes de Petri

[14] Conclusão

1.4.2 Por Aplicação

Agrupa os capítulos de acordo com seus temas: *spans* e composição; relações e multirrelações, suas propriedades e composição; grafos internos, suas propriedades e composição; finalmente, sistemas e composição de sistemas.

A seqüência é:

[1] Introdução

[2] Conceitos Básicos

- *Spans*

- [3] *Span*

- [9] Composição de *Spans*

- Relações e Multirrelações

- [4] Relações e Multirrelações como *Spans*

- [7] Propriedades de Endorrelações

- [10] Composição de Multirrelações como Composição de *Spans*

- Grafos Internos

- [5] Grafos Internos como *Spans*

- [8] Propriedades de Grafos Internos

- [11] Composição de Arestas de Grafos Internos

- Sistemas

- [6] Modelos de Sistemas como *Spans*

- [12] Composição de Sistemas

- [13] Composição de Redes de Petri

[14] Conclusão

2 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo apresenta e padroniza conceitos básicos necessários ao longo deste trabalho.

A seção 2.1 trata relações e multirrelações binárias, identidades e composições.

A seção 2.2 apresenta a definição de par mono e de família mono numa categoria. Também enuncia e prova um teorema que não foi encontrado na literatura.

A seção 2.3 apresenta as definições informais das principais categorias utilizadas neste trabalho, sendo uma delas proposta aqui. Também compara essa categoria proposta com outra.

2.1 Relações e Multirrelações Binárias

Na teoria dos conjuntos, uma forma usual de se associar elementos de dois conjuntos é através de relações binárias. Para dois conjuntos A e B , uma relação binária $R: A \rightarrow B$ associa elementos de A a elementos de B . Quaisquer dois elementos, um $a \in A$ e um $b \in B$, podem ou não estar associados através de uma relação.

Diversas especializações podem ser feitas sobre relações binárias a fim de se representar outras estruturas. Por exemplo, uma relação binária como acima, que restrinja que cada elemento de A pode estar associado a, no máximo, um elemento de B é uma função parcial. Restringindo-se ainda mais, se cada elemento de A está associado a exatamente um elemento de B , essa relação é uma função (total).

Mesmo sendo um conceito bastante genérico, relações binárias possuem uma restrição: elas não permitem multiplicidade na associação de elementos. Isto é, dois elementos, um $a \in A$ e um $b \in B$, podem ou não estar associados através de uma relação, mas, se estão, estão associados apenas uma vez nessa relação.

Uma generalização de relação binária que admite multiplicidade nas associações de elementos é o que se chama de multirrelação binária.

Esta seção faz uma breve introdução às relações binárias e às multirrelações binárias.

Inicialmente, trata sobre relações:

- a própria definição;
- relação identidade;
- composição de relações;
- função característica de uma relação.

Após, mostra que a função característica de uma relação pode ser interpretada de uma forma que permite a generalização para multirrelações e, então, trata sobre multirrelações:

- a própria definição;
- multirrelação identidade;
- composição de multirrelações;
- comparação com relações.

2.1.1 Relação

Definição 2.1 (Relação Binária) Sejam A e B conjuntos e $R \subseteq A \times B$. Então $R: A \rightarrow B$ é uma relação binária com origem em A e destino em B , a qual se lê “relação R de A em B ”.

Para uma relação¹ $R: A \rightarrow B$ e para elementos $a \in A$ e $b \in B$, o elemento a está relacionado (ou associado) ao elemento b se e somente se $\langle a, b \rangle \in R$ e isso também pode ser denotado da forma infixada aRb .

Se $R: A \rightarrow B$ é uma relação e A e B são conjuntos finitos e não vazios com cardinalidades c_A e c_B respectivamente, a relação $R: A \rightarrow B$ pode ser vista como uma matriz R de tipo $c_A \times c_B$ com valores no conjunto $\{0, 1\}$ onde 0 significa *falso* e 1 significa *verdadeiro*. As linhas da matriz são indexadas pelo conjunto A e as colunas são indexadas pelo conjunto B . Cada posição r_{ij} da matriz R é preenchida com o valor 1 (*verdadeiro*) se iRj e com o valor 0 (*falso*) se $\neg iRj$.

O diagrama interno de uma relação $R: A \rightarrow B$ é representado com os diagramas de Venn dos conjuntos A e B e, para elementos $a \in A$ e $b \in B$, representa-se uma seta de a para b se e somente se aRb .

Exemplo 2.2 (Relação) A Figura 2.1 apresenta o diagrama interno de uma relação $R: A \rightarrow B$ entre os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Essa relação é $R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$. A mesma Figura apresenta também a matriz da relação.

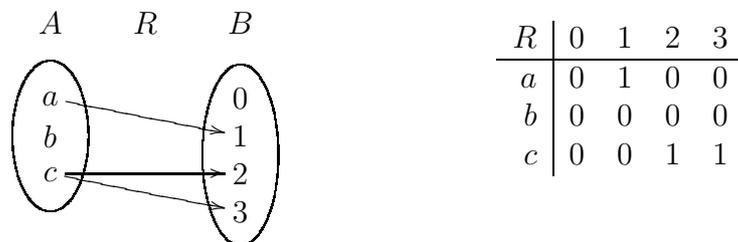


Figura 2.1: Relação.

Definição 2.3 (Endorrelação) Seja $R: A \rightarrow B$ uma relação. Essa relação é uma endorrelação se e somente se $A = B$.

¹Uma relação binária também pode ser chamada apenas relação.

2.1.2 Relação Identidade

Definição 2.4 (Relação Identidade) Seja A um conjunto. A relação identidade de A é $id_A: A \rightarrow A$, onde $id_A = \{\langle x, x \rangle \in A \times A \mid x \in A\}$.

Para qualquer conjunto, a relação identidade desse conjunto sempre existe e é única.

Vista como uma matriz e considerando-se que a indexação das linhas pelo conjunto A é a mesma indexação das colunas, a relação identidade é a matriz identidade contendo 1 na diagonal principal e 0 no restante.

Exemplo 2.5 (Relação Identidade) A Figura 2.2 apresenta a relação identidade do conjunto $A = \{a, b, c\}$ bem como sua matriz.

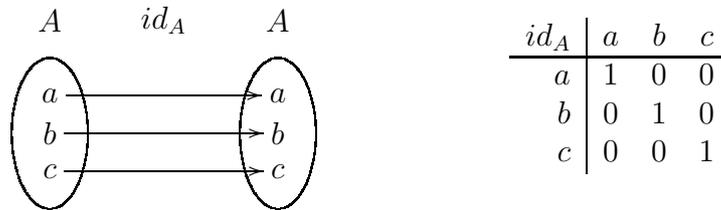


Figura 2.2: Relação identidade e Multirrelação identidade.

2.1.3 Composição de Relações

Definição 2.6 (Composição de relações) Sejam $R: A \rightarrow B$ e $S: B \rightarrow C$ relações. A composição de $R: A \rightarrow B$ com $S: B \rightarrow C$ é a relação composta $S \circ R: A \rightarrow C$, onde $S \circ R = \{\langle a, c \rangle \in A \times C \mid (\exists b \in B)(aRb \wedge bSc)\}$.

A composição $S \circ R: A \rightarrow C$ é definida se e somente se o destino de $R: A \rightarrow B$ coincide com a origem de $S: B \rightarrow C$. Neste caso, a relação composta sempre existe e é única.

As relações identidade atuam similarmente a elementos neutros na composição, da seguinte forma: seja $R: A \rightarrow B$ uma relação qualquer, $R \circ id_A = R$ e $R = id_B \circ R$. Observa-se que não existe um elemento neutro para todas as relações, mas para cada relação existe um “elemento neutro” à esquerda e um à direita.

A composição de relações é associativa, isto é, $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ para quaisquer três relações $R: A \rightarrow B$, $S: B \rightarrow C$ e $T: C \rightarrow D$, podendo ser representada sem a necessidade de parênteses: $T \circ S \circ R$.

Exemplo 2.7 (Composição de Relações) A Figura 2.3 apresenta (esquerda) os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e $C = \{p, q, r\}$ e as duas relações $R: A \rightarrow B$ e $S: B \rightarrow C$. Na mesma Figura (direita) estão novamente os conjuntos A e C e a relação composta $S \circ R: A \rightarrow C$.

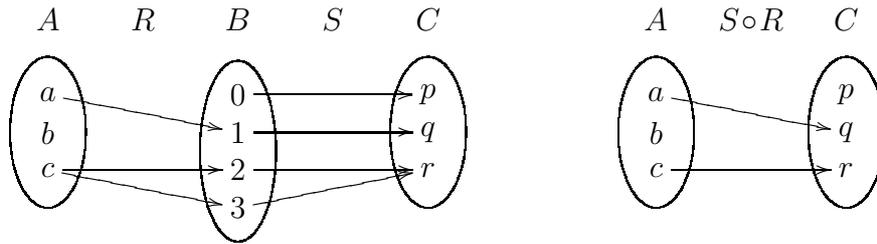


Figura 2.3: Composição de relações.

2.1.4 Função Característica de uma Relação

Toda relação $R: A \rightarrow B$ tem associada a si uma função a qual se chama função característica da relação R e que se denota $\chi_R: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$, onde 0 e 1 são considerados os valores lógicos *falso* e *verdadeiro*, respectivamente. Essa função indica, para cada par do produto cartesiano $A \times B$, se ele está ou não presente na relação.

Definição 2.8 (Função Característica) A função característica de uma relação $R: A \rightarrow B$ é a função total $\chi_R: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ definida, para todo $a \in A$ e $b \in B$, como

$$\chi_R(\langle a, b \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{se } aRb \\ 0 & \text{se } \neg aRb \end{cases}$$

A representação de uma relação $R: A \rightarrow B$ como matriz, por exemplo, é simplesmente uma maneira de se apresentar a função característica $\chi_R: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ dispondo-se a imagem de cada elemento de $A \times B$ em um retângulo, indexando-se linhas por A e colunas por B .

A função característica $\chi_R: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ de uma relação $R: A \rightarrow B$ é uma função e, portanto, também é uma relação, mas, no geral, são relações diferentes.

Para se trabalhar com identidade e composição de relações, prefere-se a notação $A \rightarrow B$ à notação de função característica $A \times B \rightarrow \{0, 1\}$. Cita-se dois motivos para esta preferência:

- a relação identidade de um conjunto A , que dá uma idéia de permanência nesse conjunto, é do tipo $A \rightarrow A$ o que preserva essa idéia de permanência, diferente de $A \times A \rightarrow \{0, 1\}$;
- a composição de uma relação $A \rightarrow B$ com uma relação $B \rightarrow C$, que dá uma idéia de seqüência, é do tipo $A \rightarrow C$ que preserva a idéia de seqüência, diferente da outra notação em que a composição de uma relação $A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ com uma relação $B \times C \rightarrow \{0, 1\}$ resulta numa relação $A \times C \rightarrow \{0, 1\}$.

2.1.5 Multirrelação

Embora seja uma construção poderosa, uma relação não admite multiplicidade nas associações de elementos, isto é, um elemento $a \in A$ pode estar relacionado a um elemento $b \in B$ no máximo uma vez.

Multirrelações são uma espécie de generalização de relações que permitem que um elemento $a \in A$ esteja associado a um elemento $b \in B$ qualquer quantidade finita $n \in \mathbb{N}$ de vezes.

A idéia é inspirada nas funções características de relações. Se $R: A \rightarrow B$ é uma relação, a sua função característica é $\chi_R: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$. Pode-se considerar agora, que 0 e 1 são os valores naturais 0 (zero) e 1 (um) e que eles indicam “quantas vezes” cada par está presente na relação.

Para multirrelações, pode-se imaginar uma função similar, mas com destino em algum conjunto que admita que um par esteja na multirrelação mais de uma vez, como $\hat{m}: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ que admite qualquer quantidade de vezes, desde que finita.

A seguinte definição de multirrelação é inspirada na literatura².

Definição 2.9 (Multirrelação Binária) Sejam A e B conjuntos. Uma multirrelação binária $m: A \rightarrow B$, a qual se lê “multirrelação m de A em B ”, é uma função $\hat{m}: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$. A origem e o destino de $m: A \rightarrow B$ são A e B , respectivamente.

Neste trabalho, adota-se a convenção que, se um símbolo α representa uma multirrelação binária $A \rightarrow B$, então o mesmo símbolo com uma espécie de acento circunflexo $\hat{\alpha}$ refere-se à função $A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ associada à mesma multirrelação³. Assume-se também o converso.

Uma multirrelação $m: A \rightarrow B$ trata-se de um multiconjunto de elementos de $A \times B$. Trata-se também de uma operação binária $\hat{m}: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$.

Uma multirrelação é uma função e portanto, também é uma relação. Assim como para relações, para multirrelações prefere-se a notação $A \rightarrow B$ à notação $A \times B \rightarrow \mathbb{N}$. Os motivos são os mesmos.

Para uma multirrelação $m: A \rightarrow B$ e para elementos $a \in A$ e $b \in B$, a quantidade de vezes que a está relacionado a b através da multirrelação m é a imagem da função \hat{m} aplicada ao par $\langle a, b \rangle$, ou seja, é $\hat{m}(\langle a, b \rangle)$ (usando-se a notação de função pré-fixada) ou $a\hat{m}b$ (usando-se a notação de operação binária infixada).

Se $m: A \rightarrow B$ é uma multirrelação e A e B são conjuntos finitos e não vazios com cardinalidades c_A e c_B respectivamente, a multirrelação $m: A \rightarrow B$ pode ser vista como uma matriz M de tipo $c_A \times c_B$ com valores no conjunto \mathbb{N} . As linhas da matriz são indexadas pelo conjunto A e as colunas são indexadas pelo conjunto B . Cada posição m_{ij} da matriz M é preenchida com o valor $i\hat{m}j$.

O diagrama interno de uma multirrelação $m: A \rightarrow B$ é representado de forma similar ao de uma relação. Representa-se os diagramas de Venn dos conjuntos A e B e, para elementos $a \in A$ e $b \in B$, representa-se $a\hat{m}b$ setas de a para b , o que indica que a quantidade de vezes que a está associado a b é $a\hat{m}b$. Uma alternativa a essa é, se $a\hat{m}b > 1$, representar-se apenas uma seta, mas etiquetada com o valor $a\hat{m}b$. Setas repetidas são preferidas em casos de valores pequenos por serem mais ilustrativas. Setas etiquetadas são preferidas para não gerarem um diagrama muito poluído visualmente. Neste trabalho, usa-se as duas alternativas, inclusive podendo aparecer juntas no mesmo diagrama.

Exemplo 2.10 (Multirrelação) A Figura 2.4 apresenta as duas alternativas para o diagrama interno de uma multirrelação $m: A \rightarrow B$ entre os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. O elemento $a \in A$ está relacionado duas vezes com o elemento $1 \in B$, portanto, $a\hat{m}1 = 2$. O elemento $c \in A$ está relacionado uma vez com o

²Como aparece em (BRUNI; GADDUCCI, 2001), mas com duas diferenças: 1^a) define-se multirrelação entre conjuntos quaisquer, não necessariamente contáveis; 2^a) a quantidade de vezes que dois elementos se relacionam numa multirrelação é sempre finita.

³Uma multirrelação binária também pode ser chamada apenas multirrelação.

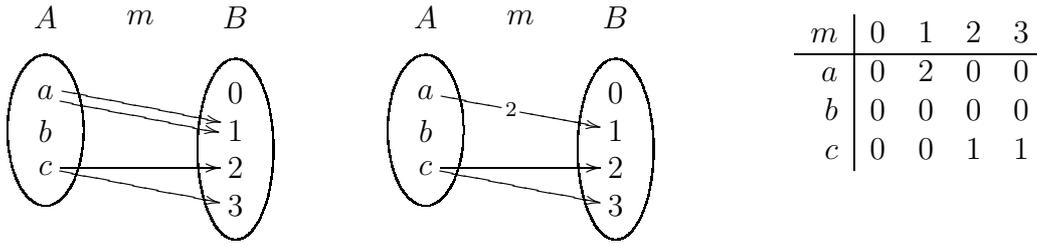


Figura 2.4: Multirrelação.

elemento $2 \in B$ e uma vez com o elemento $3 \in B$, portanto, $\widehat{cm}2 = 1$ e $\widehat{cm}3 = 1$. Todos os outros pares de elementos não estão relacionados — ou estão relacionados zero vezes —, portanto, por exemplo, $\widehat{bm}2 = 0$. A mesma Figura apresenta também a matriz da multirrelação.

Definição 2.11 (Endomultirrelação) Seja $m: A \rightarrow B$ uma multirrelação. Essa multirrelação é uma endomultirrelação se e somente se $A = B$.

2.1.6 Multirrelação Identidade

A multirrelação identidade definida aqui atua como identidade para a composição de multirrelações definida logo adiante.

Definição 2.12 (Multirrelação Identidade) Seja A um conjunto. A multirrelação identidade de A é $id_A: A \rightarrow A$, onde a função $\widehat{id}_A: A \times A \rightarrow \mathbb{N}$ é definida, para quaisquer $x, y \in A$, como

$$\widehat{id}_A(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Para qualquer conjunto, a multirrelação identidade desse conjunto sempre existe e é única.

Vista como uma matriz e considerando-se que a indexação das linhas pelo conjunto A é a mesma indexação das colunas, a multirrelação identidade é a matriz identidade contendo 1 na diagonal principal e 0 no restante.

Exemplo 2.13 (Multirrelação Identidade) A Figura 2.2 apresenta a multirrelação identidade do conjunto $A = \{a, b, c\}$ bem como sua matriz. Nota-se que, tanto o diagrama interno quanto a matriz, são iguais aos da relação identidade.

2.1.7 Composição de Multirrelações

Definição 2.14 (Composição de Multirrelações) Sejam $m: A \rightarrow B$ e $n: B \rightarrow C$ multirrelações. A composição de $m: A \rightarrow B$ com $n: B \rightarrow C$ é a multirrelação composta $n \circ m: A \rightarrow C$, onde $\widehat{n \circ m}: A \times C \rightarrow \mathbb{N}$ é definida, para quaisquer $a \in A$ e $c \in C$, como

$$\widehat{an \circ mc} = \sum_{b \in B} ((\widehat{amb}) \cdot (\widehat{bnc}))$$

A composição $n \circ m: A \rightarrow C$ é definida se e somente se o destino de $m: A \rightarrow B$ coincide com a origem de $n: B \rightarrow C$. Neste caso, a multirrelação composta sempre existe e é única.

As multirrelações identidade atuam similarmente a elementos neutros na composição, da seguinte forma: seja $m: A \rightarrow B$ uma multirrelação qualquer, $m \circ id_A = m$ e $m = id_B \circ m$. Observa-se que não existe um elemento neutro para todas as multirrelações, mas para cada multirrelação existe um “elemento neutro” à esquerda e um à direita.

A composição de multirrelações é associativa, isto é, $(p \circ n) \circ m = p \circ (n \circ m)$ para quaisquer três multirrelações $m: A \rightarrow B$, $n: B \rightarrow C$ e $p: C \rightarrow D$, podendo ser representada sem a necessidade de parênteses: $p \circ n \circ m$.

Para multirrelações $m: A \rightarrow B$ e $n: B \rightarrow C$ vistas como matrizes M e N , respectivamente, considerando-se que a indexação das colunas de M pelo conjunto B é a mesma indexação das linhas de N , a definição da composição $n \circ m$ das multirrelações equivale à multiplicação usual $M \times N$ das respectivas matrizes.

Exemplo 2.15 (Composição de Multirrelações) A Figura 2.5 apresenta (esquerda) os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e $C = \{p, q, r\}$ e as duas multirrelações $m: A \rightarrow B$ e $n: B \rightarrow C$. Na mesma Figura (direita) estão novamente os conjuntos A e C e a multirrelação composta $n \circ m: A \rightarrow C$. A Figura 2.6 apresenta as matrizes das três multirrelações, respectivamente, e mostra a terceira como produto das duas primeiras (a indexação das respectivas linhas e colunas é dada pela ordem em que os elementos aparecem na denotação por extensão dos conjuntos A , B e C na primeira sentença deste exemplo).

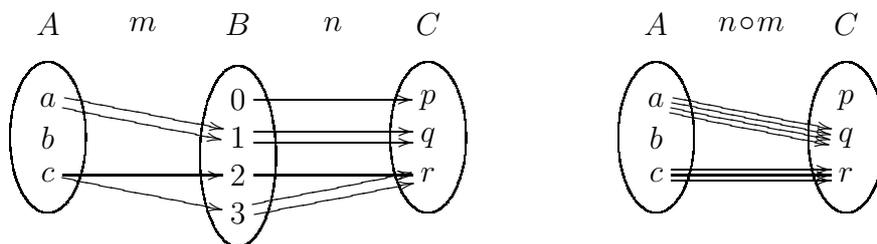


Figura 2.5: Composição de multirrelações.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 2.6: Composição de multirrelações como multiplicação de matrizes.

2.1.8 Relação \times Multirrelação

Toda relação $R: A \rightarrow B$ pode ser vista como uma multirrelação $m: A \rightarrow B$. Basta tomar $\hat{m}: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ definida, para todo $a \in A$ e $b \in B$, como

$$a\hat{m}b = \begin{cases} 1 & \text{se } aRb \\ 0 & \text{se } \neg aRb \end{cases}$$

No geral, uma multirrelação $m: A \rightarrow B$ pode ser vista como relação $R: A \rightarrow B$ se e somente se $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a\hat{m}b \leq 1)$. Nesse caso, $R = \{\langle a, b \rangle \in A \times B \mid a\hat{m}b = 1\}$.

2.2 Par Mono e Família Mono

Em Teoria das Categorias, caracteriza-se morfismos ou coleções de morfismos por algumas propriedades que eles apresentam quando comparados a outros morfismos ou a outras entidades da categoria — objetos, coleções de morfismos, resultados de cálculos, etc.

Uma dessas características é chamada monomorfismo. Diz-se que um morfismo é um monomorfismo (substantivo) ou é mono (adjetivo) se ele apresenta a característica de ser cancelável⁴ à esquerda na notação de composição. Para quaisquer morfismos m , x e y , se $m \circ x = m \circ y$ nem sempre se pode cancelar m à esquerda e se obter $x = y$, mas se m for um monomorfismo⁵, então sim, ou seja, $m \circ x = m \circ y \implies x = y$.

Nesta seção, apresenta-se o conceito de par mono — uma generalização de monomorfismo — e o conceito de família mono — uma generalização de par mono⁶.

Logo após, enuncia-se e prova-se um teorema sobre o equalizador dos morfismos de um par mono. Esse teorema não foi encontrado na literatura.

2.2.1 Par Mono

Definição 2.16 (Par Mono) (Ver Figura 2.7, esquerda ou direita) Um par de morfismos $\langle f_1, f_2 \rangle$ onde $f_1 : X \rightarrow A_1$ e $f_2 : X \rightarrow A_2$ é um par mono se e somente se para qualquer par de morfismos $\langle h_1, h_2 \rangle$ onde $h_1 : Y \rightarrow A_1$ e $h_2 : Y \rightarrow A_2$ existe no máximo um morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $f_1 \circ g = h_1$ e $f_2 \circ g = h_2$.



Figura 2.7: Diagramas comutativos para definição 2.16.

A característica de ser um par mono só é aplicada a pares de morfismos que tenham a mesma origem.

A definição de um par mono é bastante similar à definição de produto de dois objetos. A única diferença é a existência de *no máximo um* morfismo que comute o diagrama, enquanto que no produto é exigida a existência de *exatamente um* morfismo.

Um par mono de morfismos não é o mesmo que um par de monomorfismos. Em um par mono, nenhum dos dois morfismos precisa ser mono. Entretanto, dado um par de morfismos com mesma origem, se um deles for um monomorfismo, então o par é mono. Isso é consequência imediata da definição de monomorfismo.

Um morfismo só pode ser cancelado (isoladamente) se ele for monomorfismo. Entretanto, dados quaisquer morfismos m_0 , m_1 , x e y , se $m_0 \circ x = m_0 \circ y$ e $m_1 \circ x = m_1 \circ y$, se m_0 e m_1 formarem um par mono, mesmo que nenhum deles seja

⁴Nesse contexto, um morfismo cancelável à esquerda também é chamado regular à esquerda.

⁵A noção dual, de ser cancelável à direita (ou regular à direita), é dada pelo epimorfismo.

⁶Ambos conceitos encontrados em (FREYD; SCEDROV, 1990).

mono, pode-se cancelar os dois em conjunto e se obter $x = y$, ou seja, $m_0 \circ x = m_0 \circ y \wedge m_1 \circ x = m_1 \circ y \implies x = y$. Por esse motivo também se diz que os morfismos m_0 e m_1 são “juntamente mono” ou “mono em conjunto” e podem ser “cancelados em conjunto” à esquerda. Mas para isso, os morfismos compostos com m_0 e com m_1 devem ser os mesmos. Por exemplo, em $m_0 \circ x = m_0 \circ y \wedge m_1 \circ x = m_1 \circ z$, mesmo m_0 e m_1 formando um par mono, não se pode concluir que $x = y$ nem que $x = z$.

Esse cancelamento de morfismos que formam pares mono é freqüentemente usado em provas ao longo deste trabalho. O seguinte, sobre cálculos usuais numa categoria⁷, também:

- os dois morfismos de um equalizador formam um par mono, pois um deles sempre é mono;
- as duas projeções de um produto binário formam um par mono; a demonstração é imediata, pela própria definição de produto binário;
- os dois morfismos que caracterizam um produto fibrado formam um par mono.
PROVA: OS DOIS MORFISMOS QUE CARACTERIZAM UM PRODUTO FIBRADO FORMAM UM PAR MONO.

Sejam, como no diagrama da Figura 2.8, x e y o P.F. de f e g tais que $f \circ x = g \circ y$.

Considera-se um objeto qualquer T e dois morfismos quaisquer $a : T \rightarrow S$ e $b : T \rightarrow S$, tais que $x \circ a = x \circ b$ e $y \circ a = y \circ b$. Compondo-se com f e com g , quando possível, obtém-se $f \circ x \circ a = f \circ x \circ b$ e $g \circ y \circ a = g \circ y \circ b$. Como, pelo P.F., $f \circ x = g \circ y$, obtém-se $f \circ x \circ a = g \circ y \circ b$ e, portanto, $x \circ a$ e $y \circ b$ são um pré-P.F. de f e g . Portanto, $(\exists! h : T \rightarrow S)(f \circ x \circ h = f \circ x \circ a \wedge g \circ y \circ h = g \circ y \circ b)$. Pelos fatos acima, tanto a quanto b se enquadram como um possível h . Pela unicidade de h , $a = b$. Conseqüentemente, x e y formam um par mono.

□

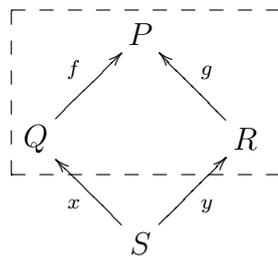


Figura 2.8: Produto fibrado é um par mono.

2.2.2 Família Mono

A definição de par mono pode ser generalizada para qualquer quantidade de morfismos, como abaixo.

⁷Fatos apenas mencionados em (FREYD; SCEDROV, 1990). A demonstração para o P.F. foi desenvolvida aqui.

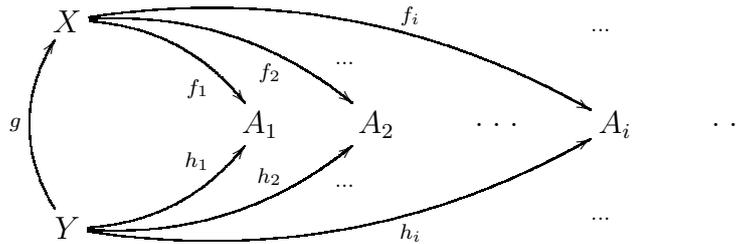


Figura 2.9: Diagrama comutativo para definição 2.17.

Definição 2.17 (Família Mono) Seja I um conjunto de índices. (Ver Figura 2.9) Sejam X um objeto e $\{f_i : X \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ uma família de morfismos indexados por I , todos com origem em X e cada um com destino num objeto A_i . Essa é uma família mono se e somente se para qualquer objeto Y e para qualquer família de morfismos $\{h_i : Y \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ indexados por I existe no máximo um morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $(\forall i \in I)(f_i \circ g = h_i)$.

O caso $\#I = 2$ é um par mono. Quando $\#I = 3$, diz-se tripla mono. Quando $\#I = 1$, essa definição equivale à definição de monomorfismo. O caso $\#I = 0$ — em que não há morfismos; apenas um objeto X — o objeto X , se houver, é um subobjeto do objeto terminal da categoria.

Sejam X um objeto e $\{f_i : X \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ uma família mono de morfismos indexados por I , então uma família $\{f_j : X \rightarrow A_j\}_{j \in J}$ de morfismos indexados por J , tal que $I \subseteq J$, também é uma família mono. Isso é consequência imediata da própria definição.

2.2.3 Equalizador de par mono

Sabe-se que o morfismo que caracteriza um equalizador — como x no diagrama da Figura 2.10 — sempre é mono. No geral, o segundo morfismo — como y na mesma Figura — não é mono. A seguir, enuncia-se e prova-se um teorema sobre esse segundo morfismo.

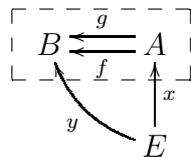


Figura 2.10: Equalizador de par mono.

Teorema 2.18 (Equalizador de Par Mono) Sejam, como na Figura 2.10, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) formado por dois morfismos paralelos f e g e seu limite — um equalizador — constituído pelo objeto E e pelos morfismos x e y , onde $f \circ x = y$ e $g \circ x = y$. Se os morfismos f e g formam um par mono, então o morfismo y é um monomorfismo.

PROVA. Considera-se um objeto qualquer K e dois morfismos paralelos quaisquer $p : K \rightarrow E$ e $q : K \rightarrow E$. A seguir, linha a linha, desenvolve-se a demonstração e, à direita de cada implicação, há uma breve justificativa.

$y \circ p = y \circ q$	\implies	como $y = f \circ x$ e $y = g \circ x$
$(f \circ x) \circ p = (f \circ x) \circ q$ e $(g \circ x) \circ p = (g \circ x) \circ q$	\implies	associatividade
$f \circ (x \circ p) = f \circ (x \circ q)$ e $g \circ (x \circ p) = g \circ (x \circ q)$	\implies	$\langle f, g \rangle$ é par mono
$x \circ p = x \circ q$	\implies	x é mono
$p = q$		

Portanto, y é um monomorfismo.

□

2.3 Categorias

Nesta seção, apresenta-se a definição informal das principais categorias (grandes) que aparecem neste trabalho⁸. A única entre essas categoria proposta aqui é a categoria \mathcal{MRel} . Ao longo do texto aparecem quatro categorias (pequenas), cuja importância é meramente didática. Três delas têm nomes usuais: $\mathcal{2}$, \mathcal{Or} e \mathcal{Xor} .

Após, mostra-se que \mathcal{Rel} não é subcategoria de \mathcal{MRel} como a intuição pode fazer parecer.

2.3.1 Principais Categorias Grandes

- \mathcal{Set} é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos como objetos e a coleção de todas as funções totais entre conjuntos como morfismos. A identidade é dada pela função identidade de cada conjunto e a composição é dada pela composição usual de funções totais.
- \mathcal{Finset} é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos finitos como objetos e a coleção de todas as funções totais entre conjuntos finitos como morfismos. A identidade é dada pela função identidade de cada conjunto e a composição é dada pela composição usual de funções totais.
- \mathcal{Set}_\perp é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos apontados como objetos e a coleção de todas as funções apontadas entre conjuntos apontados como morfismos. A identidade é dada pela função apontada identidade de cada conjunto e a composição é dada pela composição de funções apontadas.
- \mathcal{Pfn} é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos como objetos e a coleção de todas as funções parciais como morfismos. A identidade é dada pela função identidade de cada conjunto e a composição é dada pela composição usual de funções parciais.
- \mathcal{Rel} é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos como objetos e a coleção de todas as relações binárias como morfismos. A identidade é dada pela relação identidade de cada conjunto e a composição é dada pela composição usual de relações.
- \mathcal{MRel} é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos como objetos e a coleção de todas as multirrelações⁹ binárias como morfismos.

⁸Todas, exceto \mathcal{MRel} , podem ser encontradas em (BARR; WELLS, 1995) ou em (MENEZES; HAEUSLER, 2001).

⁹Como nas definições 2.9, 2.12 e 2.14, respectivamente.

mos. A identidade é dada pela multirrelação identidade⁹ de cada conjunto e a composição é dada pela composição de multirrelações⁹.

- *Poset* é uma categoria grande que possui a coleção de todos os conjuntos parcialmente ordenados como objetos e a coleção de todas as funções monotônicas entre conjuntos parcialmente ordenados como morfismos. A identidade é dada pela função (monotônica) identidade de cada conjunto e a composição é dada pela composição de funções (monotônicas).
- *Gr* é uma categoria grande que possui a coleção de todos os grafos¹⁰ como objetos e a coleção de todos os homomorfismos de grafos¹⁰ como morfismos. A identidade é dada pelo homomorfismo identidade de cada grafo¹⁰ e a composição é dada pela composição de homomorfismos de grafos¹⁰.

2.3.2 $\mathcal{R}el \times \mathcal{M}Rel$

Embora toda relação possa ser vista como uma multirrelação, a categoria $\mathcal{R}el$ não é subcategoria da categoria $\mathcal{M}Rel$, pois a “inclusão” não preserva composição, como pode-se ver no exemplo 2.19.

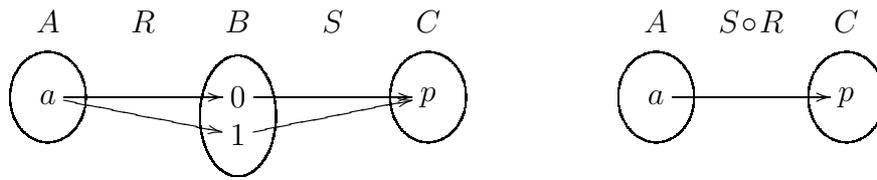


Figura 2.11: Composição de relações.

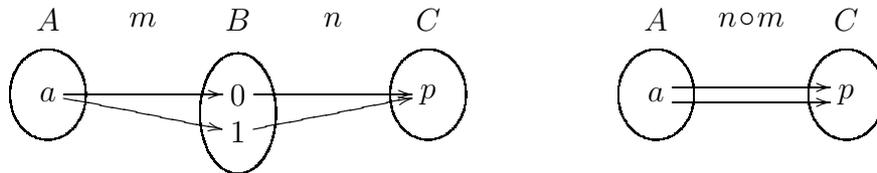


Figura 2.12: Composição de multirrelações.

Exemplo 2.19 (*Rel não é subcategoria de MRel*) A Figura 2.11 apresenta (esquerda) os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{0, 1\}$ e $C = \{p\}$ e as duas relações $R: A \rightarrow B$ e $S: B \rightarrow C$. Na mesma Figura (direita) estão novamente os conjuntos A e C e a relação composta $S \circ R: A \rightarrow C$. Já a Figura 2.12 apresenta (esquerda) os mesmos conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{0, 1\}$ e $C = \{p\}$ e as mesmas duas relações, mas agora consideradas como multirrelações $m: A \rightarrow B$ e $n: B \rightarrow C$. Na mesma Figura (direita) estão novamente os conjuntos A e C e a multirrelação composta $n \circ m: A \rightarrow C$. Considerando-se como uma multirrelação o resultado da composição $S \circ R: A \rightarrow C$ e comparando-se com o resultado $n \circ m: A \rightarrow C$, fica óbvio que são multirrelações diferentes.

¹⁰Neste trabalho, por “grafo” se entende o que, geralmente, em teoria dos grafos, é chamado de “multigrafo dirigido (ou orientado) com loops” ou “multidígrafo com loops”.

3 SPANS

Este capítulo trata sobre *spans*¹. Primeiramente, apresenta-se as definições de *span*, *span* dual, *spans* paralelos, equivalência de *spans* e *endospan*, sempre com exemplos. Também mostra-se que algumas construções usuais em categorias são *spans*. Após, existe uma seção de exemplos que abrange diversas categorias.

3.1 *Span*

Definição 3.1 (*Span*) Sejam \mathcal{C} uma categoria e A e B objetos de \mathcal{C} . (Ver o diagrama da Figura 3.1.) Um *span* $d: A \rightarrow B$ em \mathcal{C} é uma tripla $\langle d_0: D \rightarrow A, D, d_1: D \rightarrow B \rangle$, onde D é um objeto de \mathcal{C} e d_0 e d_1 são morfismos de \mathcal{C} , ambos com a mesma origem D . Os destinos dos morfismos d_0 e d_1 são, respectivamente, a origem e o destino do *span* d . O objeto D é o suporte do *span* e os morfismos d_0 e d_1 são as projeções do *span*.

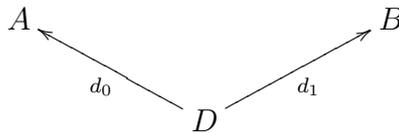


Figura 3.1: *Span*.

Seja um *span* $d = \langle d_0: D \rightarrow A, D, d_1: D \rightarrow B \rangle: A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} , as seguintes simplificações podem ser assumidas na sua notação se não causarem prejuízo ao entendimento:

- suprimir a indicação de origem e destino das projeções
 $d = \langle d_0, D, d_1 \rangle: A \rightarrow B$;
- suprimir o suporte do *span*, denotando-se o mesmo por um par
 $d = \langle d_0: D \rightarrow A, d_1: D \rightarrow B \rangle: A \rightarrow B$;
- suprimir a indicação de origem e destino do *span*
 $d = \langle d_0: D \rightarrow A, D, d_1: D \rightarrow B \rangle$;
- quaisquer dos três acima simultaneamente
 $d = \langle d_0, d_1 \rangle: A \rightarrow B$ ou $d = \langle d_0, d_1 \rangle$.

¹Como aparecem em (BÉNABOU, 1967).

Neste trabalho, convencionou-se que, para *spans* desenhados horizontalmente, a origem é à esquerda e o destino, à direita. Sempre que origem e destino não puderem ser identificados pelo contexto, essa convenção deve ser considerada.

Algumas construções usuais em uma categoria são *spans*. A Figura 3.2 apresenta dois diagramas (regiões internas às linhas tracejadas) e um pré-limite para cada, como explicado abaixo:

- (esquerda) qualquer pré-produto de dois objetos quaisquer é um *span*;
- (direita) qualquer pré-equalizador de dois morfismos quaisquer é um *span*.

De fato, qualquer pré-limite de um diagrama com exatamente dois objetos e qualquer quantidade de morfismos é um *span*.



Figura 3.2: Pré-produto e pré-equalizador são *spans*.

3.2 *Span* Dual

Definição 3.2 (*Span* dual) O dual de um *span* $d = \langle d_0, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} sempre existe também em \mathcal{C} e é o *span* $d^{op} = \langle d_1, d_0 \rangle : B \rightarrow A$.

Exemplo 3.3 (Dois *spans* duais) No diagrama da Figura 3.1 estão os *spans* $d = \langle d_0, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ (da esquerda para a direita) e $d^{op} = \langle d_1, d_0 \rangle : B \rightarrow A$ (da direita para esquerda).

3.3 Paralelismo de *Spans*

Definição 3.4 (*Spans* paralelos) Dois *spans* em uma categoria \mathcal{C} são paralelos se e somente se ambos têm a mesma origem e ambos têm o mesmo destino.

Exemplo 3.5 (*Spans* paralelos) No diagrama da Figura 3.3 estão os *spans* paralelos $\langle d_0, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ e $\langle e_0, e_1 \rangle : A \rightarrow B$.

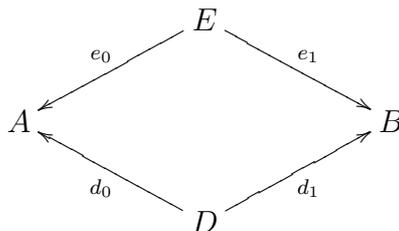


Figura 3.3: *Spans* paralelos.

A relação de paralelismo entre *spans* definida entre todos os *spans* em uma categoria é uma relação de equivalência.

3.4 Equivalência de *Spans*

Definição 3.6 (Equivalência de *spans*) (Ver o diagrama da Figura 3.4.) Dois *spans* paralelos $d = \langle d_0, D, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ e $e = \langle e_0, E, e_1 \rangle : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} são equivalentes se e somente se existe um isomorfismo $h : E \rightarrow D$ em \mathcal{C} tal que $d_0 \circ h = e_0$ e $d_1 \circ h = e_1$. Diz-se que e é equivalente a d via h . Diz-se, também, que d e e são iguais a menos de equivalência de *spans*.

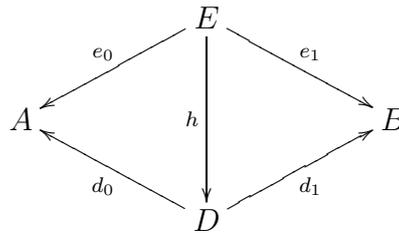


Figura 3.4: *Spans* equivalentes.

A relação de equivalência de *spans*² definida entre *spans* paralelos em uma categoria é, de fato, uma relação de equivalência. Tal demonstração é omitida. Apenas indicam-se fatos que justificam a afirmação:

- como toda identidade é um isomorfismo, essa relação é reflexiva;
- como todo isomorfismo é inversível, essa relação é simétrica;
- como toda composição de isomorfismos resulta em isomorfismo, essa relação é transitiva.

Definição 3.7 (Endospan) Seja $s : A \rightarrow B$ um *span*. Esse *span* é um *endospan* se e somente se $A = B$.

Exemplo 3.8 (Endospan) A Figura 3.5 apresenta dois diagramas distintos para o *endospan* $\langle d_0, d_1 \rangle : A \rightarrow A$.

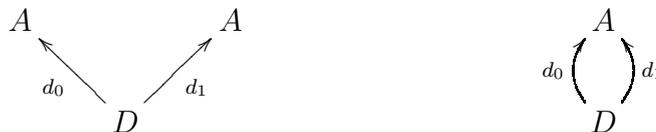


Figura 3.5: Dois diagramas distintos para *endospan*.

3.5 Exemplos em Diversas Categorias

A seguir, são apresentados exemplos de algumas categorias pequenas genéricas e todos os *spans* em cada uma delas. Após, exemplos de alguns *spans* nas categorias Set , Pfn , Rel , MRel , Poset e Gr .

²No contexto de bicategorias, como em (BÉNABOU, 1967), a equivalência de dois *spans* $A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} é dada por uma *2-cell* entre esses dois *spans* que seja um isomorfismo na bicategoria $\mathit{Sp}\mathcal{C}$.

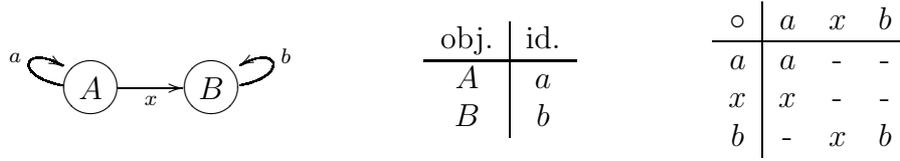


Figura 3.6: Categoria 2.

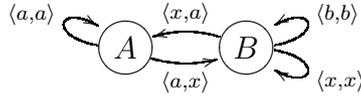


Figura 3.7: Todos os spans na categoria 2.

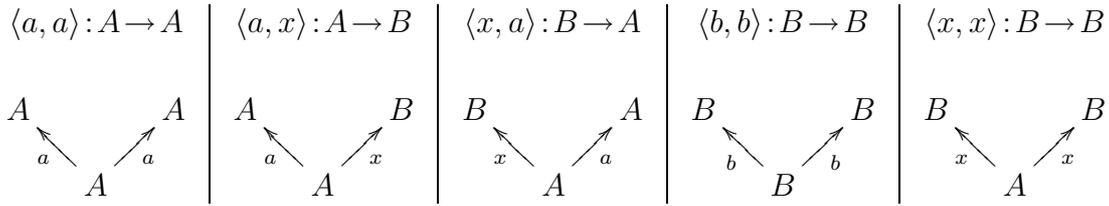


Figura 3.8: Cada um dos spans na categoria 2.

Exemplo 3.9 (Spans na categoria 2) A Figura 3.6 apresenta a categoria 2 que representa a relação de ordem parcial (total) $\{\langle A, A \rangle, \langle A, B \rangle, \langle B, B \rangle\}$ no conjunto $\{A, B\}$. A Figura 3.7 apresenta todos os cinco spans na categoria 2. Os spans $\langle a, a \rangle$, $\langle b, b \rangle$ e $\langle x, x \rangle$ são endospans. Além disso, os spans $\langle b, b \rangle$ e $\langle x, x \rangle$ são paralelos. Nesse exemplo, qualquer span é equivalente somente a si próprio. A figura 3.8 detalha cada um desses cinco spans. Observa-se que o dual do span $\langle a, x \rangle$ é o span $\langle x, a \rangle$ e vice-versa. Entretanto, o dual do span $\langle a, a \rangle$ é ele próprio, o dual do span $\langle b, b \rangle$ é ele próprio e o dual do span $\langle x, x \rangle$ também é ele próprio.

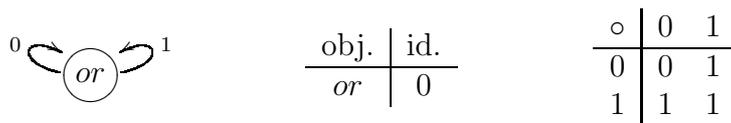


Figura 3.9: Categoria Or.

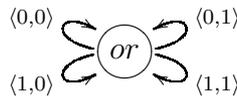


Figura 3.10: Todos os spans na categoria Or.

Exemplo 3.10 (Spans na categoria Or) A Figura 3.9 apresenta a categoria Or que representa o monóide da operação binária interna “ou” (disjunção fraca) no conjunto $\{0, 1\}$ e onde 0 significa falso e 1 significa verdadeiro. A Figura 3.10 apresenta todos os quatro spans na categoria Or. Nesse exemplo, assim como no anterior, qualquer span é equivalente somente a si próprio.

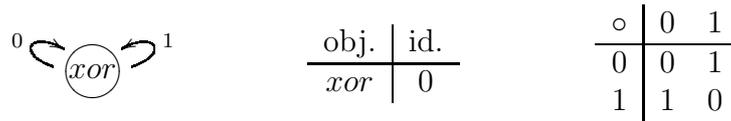


Figura 3.11: Categoria \mathcal{Xor} .

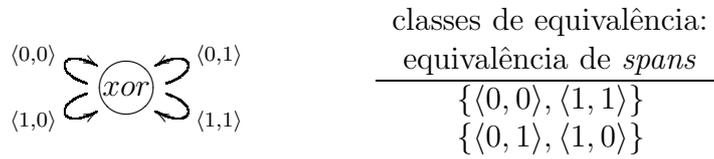


Figura 3.12: Todos os *spans* na categoria \mathcal{Xor} .

Exemplo 3.11 (*Spans* na categoria \mathcal{Xor}) A Figura 3.11 apresenta a categoria \mathcal{Xor} que representa o monóide — aqui, um grupo — da operação binária interna “ou exclusivo” (disjunção forte) no conjunto $\{0, 1\}$ e onde 0 significa *falso* e 1 significa *verdadeiro*. A Figura 3.12 apresenta todos os quatro *spans* na categoria \mathcal{Xor} . Nesse exemplo, os dois *spans* $\langle 0, 0 \rangle$ e $\langle 1, 1 \rangle$ são equivalentes, via morfismo 1, estando, portanto, na mesma classe de equivalência. Outra classe possui os *spans* $\langle 0, 1 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$ que também são equivalentes via morfismo 1. Aqui, existem apenas essas duas classes de equivalência.

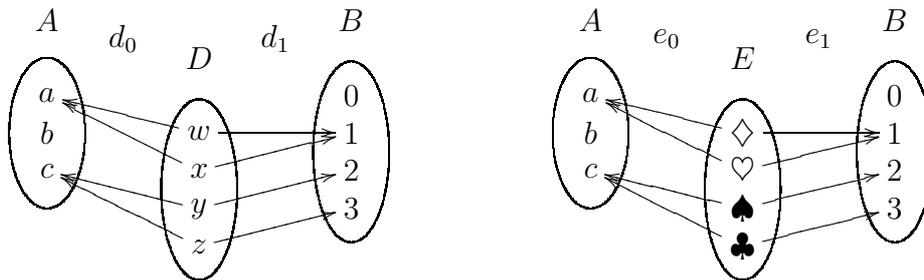


Figura 3.13: *Spans* equivalentes em \mathcal{Set} .

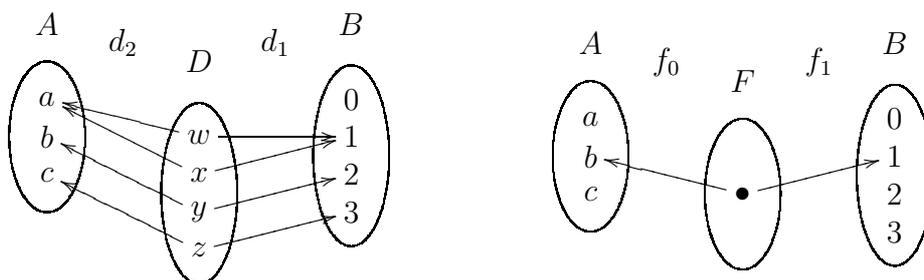


Figura 3.14: Outros *spans* em \mathcal{Set} .

Exemplo 3.12 (*Spans* em \mathcal{Set}) Sejam os objetos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$ de \mathcal{Set} . A Figura 3.13 apresenta os *spans* em \mathcal{Set} $\langle d_0, D, d_1 \rangle: A \rightarrow B$ e $\langle e_0, E, e_1 \rangle: A \rightarrow B$ que são equivalentes. A Figura 3.14 apresenta os *spans* em \mathcal{Set} $\langle d_2, D, d_1 \rangle: A \rightarrow B$ e $\langle f_0, F, f_1 \rangle: A \rightarrow B$ que não são equivalentes entre si e nenhum é equivalente aos da Figura 3.13. Já a Figura 3.15 apresenta o *endospan* em \mathcal{Set} $\langle f_2, F, f_0 \rangle: A \rightarrow A$. Na categoria \mathcal{Set} , o *span* $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle: X \rightarrow Y$ sempre existe para quaisquer objetos X e Y e, à exceção desses, qualquer *span* possui infinitos *spans* equivalentes a si.

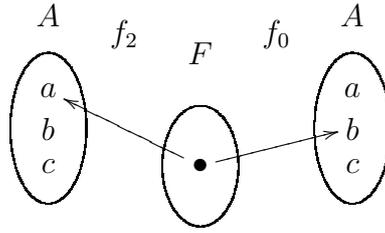


Figura 3.15: Endospan em *Set*.

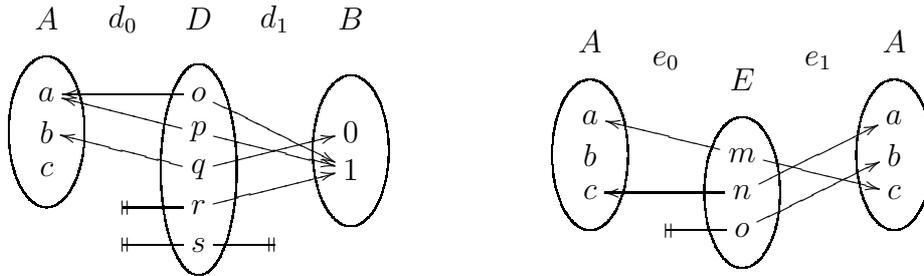


Figura 3.16: *Spans* em *Pfn*.

Exemplo 3.13 (*Spans* em *Pfn*) Sejam os objetos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$ de *Pfn*. A Figura 3.16 apresenta os *spans* em *Pfn* $\langle d_0, D, d_1 \rangle: A \rightarrow B$ e $\langle e_0, E, e_1 \rangle: A \rightarrow A$, este último, um endospan. Na categoria *Pfn*, assim como em *Set*, o *span* $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle: X \rightarrow Y$ sempre existe para quaisquer objetos X e Y e, à exceção desses, qualquer *span* possui infinitos *spans* equivalentes a si.

Exemplo 3.14 (Outros *spans* em *Set* e *Pfn*) Todos os seguintes *spans* são em *Pfn*. Desses, somente os do lado esquerdo são em *Set*.

- | | |
|---|---|
| $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle: \emptyset \rightarrow \emptyset$ | $\langle \emptyset, \{1\}, \emptyset \rangle: \emptyset \rightarrow \emptyset$ |
| $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle: \{1, 2\} \rightarrow \{a\}$ | $\langle \emptyset, \{x\}, \emptyset \rangle: \{1, 2\} \rightarrow \{a\}$ |
| $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ | $\langle \emptyset, \mathbb{Z}, \emptyset \rangle: \emptyset \rightarrow \emptyset$ |
| $\langle inc_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}}, \mathbb{N}, id_{\mathbb{N}} \rangle: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ | $\langle id_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}, \{(x, x) x \in \mathbb{N}\} \rangle: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ |
| $\langle mod_2, \mathbb{N}, mod_5 \rangle: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ | $\langle mod_2, \mathbb{N}, mod_5 \rangle: \{1\} \rightarrow \{2, 3\}$ |
| $\langle sin, \mathbb{R}, cos \rangle: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | $\langle sin, \mathbb{R}, tan \rangle: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |

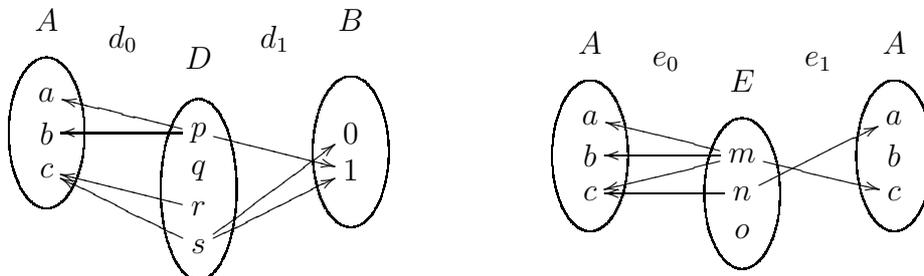


Figura 3.17: *Spans* em *Rel*.

Exemplo 3.15 (*Spans* em *Rel*) Sejam os objetos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$ de *Rel*. A Figura 3.17 apresenta os *spans* em *Rel* $\langle d_0, D, d_1 \rangle: A \rightarrow B$ e $\langle e_0, E, e_1 \rangle: A \rightarrow A$, este último, um endospan. Na categoria *Rel*, assim como em *Set* e em *Pfn*, o *span* $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle: X \rightarrow Y$ sempre existe para quaisquer objetos X e Y e, à exceção desses, qualquer *span* possui infinitos *spans* equivalentes a si.

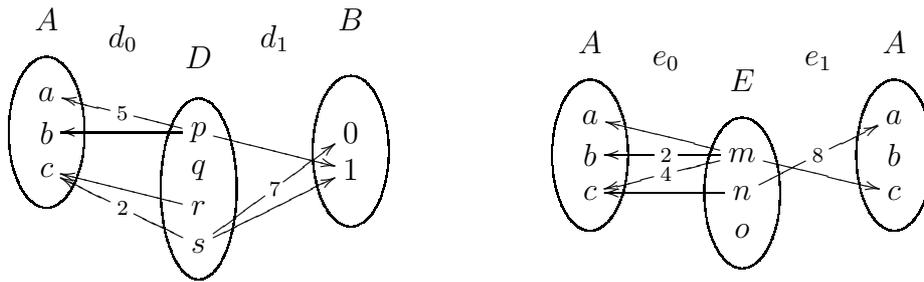


Figura 3.18: *Spans* em \mathcal{MRel} .

Exemplo 3.16 (*Spans* em \mathcal{MRel}) Sejam os objetos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$ de \mathcal{MRel} . A Figura 3.18 apresenta os *spans* em \mathcal{MRel} $\langle d_0, D, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ e $\langle e_0, E, e_1 \rangle : A \rightarrow A$, este último, um endospan. Na categoria \mathcal{MRel} , assim como em \mathcal{Set} , em \mathcal{Pfn} e em \mathcal{Rel} , o *span* $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle : X \rightarrow Y$ sempre existe para quaisquer objetos X e Y e, à exceção desses, qualquer *span* possui infinitos *spans* equivalentes a si.

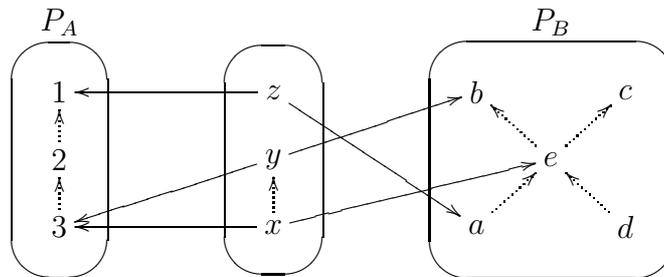


Figura 3.19: *Span* em \mathcal{Poset} .

Exemplo 3.17 (*Span* em \mathcal{Poset}) Sejam os objetos $P_A = \langle \{1, 2, 3\}, R_A \rangle$ e $P_B = \langle \{a, b, c, d, e\}, R_B \rangle$ de \mathcal{Poset} , onde os diagramas de Hasse das relações R_A e R_B estão na Figura 3.19. A mesma Figura apresenta um *span* $P_A \rightarrow P_B$ em \mathcal{Poset} . Na categoria \mathcal{Poset} , o *span* $\langle \emptyset, \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \emptyset \rangle : P_X \rightarrow P_Y$ sempre existe para quaisquer objetos P_X e P_Y e, à exceção desses, qualquer *span* possui infinitos *spans* equivalentes a si.

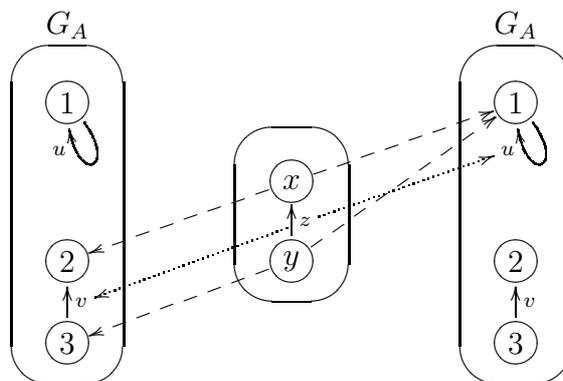


Figura 3.20: Endospan em \mathcal{Gr} .

Exemplo 3.18 (*Span* em \mathcal{Gr}) Seja o objeto $G_A = \langle V_A, T_A, \delta_{0A}, \delta_{1A} \rangle$ de \mathcal{Gr} representado duas vezes na Figura 3.20. A mesma Figura apresenta um endospan $G_A \rightarrow G_A$ em \mathcal{Gr} . Na categoria \mathcal{Gr} , o span $\langle \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rangle : G_X \rightarrow G_Y$ sempre existe para quaisquer objetos G_X e G_Y e, à exceção desses, qualquer span possui infinitos spans equivalentes a si.

4 RELAÇÕES E MULTIRRELAÇÕES COMO SPANS

Neste capítulo, mostra-se como *spans* em *Set* podem expressar relações e multirrelações. Define-se então relações e multirrelações em categorias quaisquer. Juntamente aos exemplos em *Pfn* e *Poset*, são propostas maneiras de se representar essas estruturas de forma diagramática nessas categorias.

4.1 Relação Binária

Na teoria dos conjuntos, dados dois conjuntos A e B , uma relação binária $R: A \rightarrow B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Categorialmente, uma relação binária em *Set* pode ser expressa por um subobjeto¹ $R \hookrightarrow A \times B$ do produto de A e B como na Figura 4.1. A composição do monomorfismo r com as projeções π_A e π_B do produto define o *span* $\langle r_0, r_1 \rangle$. Afirma-se² que o morfismo r é um monomorfismo se e somente se os morfismos desse *span* formam um par mono.

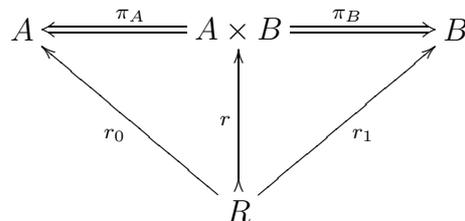


Figura 4.1: Relação Binária.

Se o objeto R é o próprio subconjunto $R \subseteq A \times B$ da relação e o monomorfismo r é a função inclusão de R em $A \times B$, então os morfismos r_0 e r_1 do *span* representam as projeções π_A e π_B do produto $A \times B$ restritas, na origem, ao subconjunto R . Ou seja, para cada elemento $\langle x, y \rangle \in R$, $r_0(\langle x, y \rangle) = x$ e $r_1(\langle x, y \rangle) = y$. Por esse motivo, os morfismos r_0 e r_1 são chamados projeções da relação R .

Entretanto, para cada *span* que expressa uma relação, podem existir vários — até infinitos — *spans* equivalentes. Categorialmente, em *Set*, não apenas conjuntos de pares expressam relações, mas quaisquer objetos isomorfos aos conjuntos de pares em questão com suas respectivas projeções. Os elementos pertencentes ao conjunto podem ser quaisquer. Os morfismos r_0 e r_1 é que realmente indicam quais elementos estão-se relacionando. Assim, independentemente do objeto R ser um subconjunto

¹Categorialmente, subobjeto é dado por um monomorfismo.

²Em (FREYD; SCEDROV, 1990).

de $A \times B$ e independentemente do monomorfismo r ser uma função inclusão, os morfismos r_0 e r_1 são chamados de projeções da relação.

Dessa forma, um conjunto qualquer R_2 e duas funções $r_0: R_2 \rightarrow A$ e $r_1: R_2 \rightarrow B$ que formem um par mono expressam uma relação $R: A \rightarrow B$ sendo que, para quaisquer elementos $a \in A$ e $b \in B$, $aRb \iff (\exists x \in R_2)(r_0(x) = a \wedge r_1(x) = b)$. Por r_0 e r_1 formarem um par mono, se esse x existe, ele é único.

Isso motiva a seguinte definição categorial de relação binária entre objetos de qualquer categoria³, não apenas entre objetos de \mathcal{Set} .

Definição 4.1 (Relação Binária) Sejam \mathcal{C} uma categoria e A e B objetos de \mathcal{C} . Um *span* $R = \langle r_0, r_1 \rangle: A \rightarrow B$ em \mathcal{C} expressa uma relação binária $A \rightarrow B$ em \mathcal{C} se e somente se os morfismos r_0 e r_1 formam um par mono.

A partir de agora, se as projeções de um *span* formam um par mono, toma-se a liberdade de se dizer que o *span* é um par mono. Entretanto, se um *span* é um par mono, ele não é uma relação, mas ele expressa⁴ uma relação.

4.2 Exemplos

A seguir, são apresentados exemplos de *spans* que expressam relações em \mathcal{Set} , \mathcal{Pfn} , \mathcal{Set}_\perp e \mathcal{Poset} . Uma relação em \mathcal{Set} é representada de forma usual. Maneiras de se representar relações em \mathcal{Pfn} , \mathcal{Set}_\perp e \mathcal{Poset} são propostas nos próprios exemplos a seguir. Logo após, apresenta-se exemplos com todas as relações binárias nas categorias $\mathbf{2}$, \mathcal{Or} e \mathcal{Xor} .

Em \mathcal{Set} , verifica-se facilmente que um *span* $\langle r_0, R, r_1 \rangle$ é um par mono se e somente se não existe em R elementos distintos x e y tais que $r_0(x) = r_0(y)$ e $r_1(x) = r_1(y)$.

Exemplo 4.2 (Relação Binária em \mathcal{Set}) A Figura 4.2 apresenta dois *spans* que são pares mono em \mathcal{Set} . Os dois são equivalentes e expressam a relação binária $R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$ em \mathcal{Set} apresentada na Figura 4.3. No *span* da esquerda da Figura 4.2, o suporte R_1 é o próprio subconjunto $R \subseteq A \times B$ e as projeções são as próprias funções de projeção da relação. Já no *span* da direita da mesma Figura, o suporte R_2 é um conjunto cujos elementos, a princípio, parecem não representar coisa alguma referente à relação. Entretanto, não há qualquer perda, pois as informações da relação podem ser totalmente recuperadas através das projeções. O elemento $x \in R_2$, por exemplo, indica que o elemento $a \in A$ está relacionado ao elemento $1 \in B$, pois $r_0(x) = a$ e $r_1(x) = 1$.

Em \mathcal{Set} , dois contra-exemplos de relações binárias estão nos dois *spans* da Figura 3.13. Embora sejam *spans* em \mathcal{Set} , não são pares mono⁵, portanto, não expressam relações.

³Inspirada na definição encontrada em (FREYD; SCEDROV, 1990) onde também se afirma que, dessa forma, pode-se definir relações entre dois objetos mesmo que a categoria em questão não possua produto desses dois objetos.

⁴Neste trabalho, o verbo “expressar” sempre é usado nessa situação. Em (FREYD; SCEDROV, 1990), uma relação é uma classe de equivalência de *spans* equivalentes, ou seja, que expressam a mesma relação.

⁵Pois, por exemplo, no suporte do *span* do lado direito, os elementos \diamond e \heartsuit são distintos, mas $e_0(\diamond) = e_0(\heartsuit)$ e $e_1(\diamond) = e_1(\heartsuit)$.

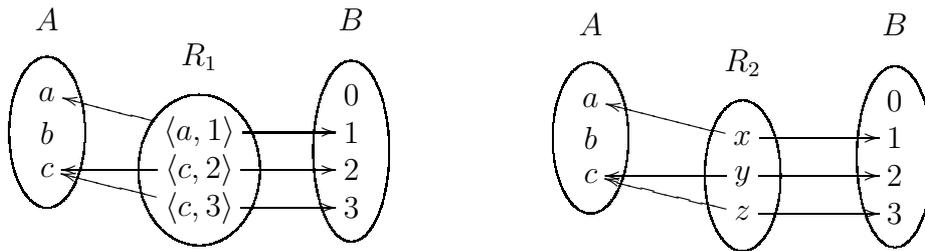


Figura 4.2: *Spans* equivalentes que expressam uma relação em $\mathcal{S}et$.

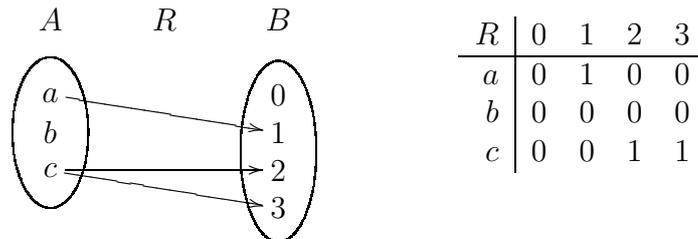


Figura 4.3: Relação em $\mathcal{S}et$.

Em $\mathcal{P}fn$, verifica-se facilmente que um *span* $\langle r_0, R, r_1 \rangle$ é um par mono se e somente se não existe em R elementos distintos x e y tais que $r_0(x) = r_0(y)$ e $r_1(x) = r_1(y)$ e, adicionalmente, não existe em R um elemento w tal que $r_0(w)$ é indefinido e $r_1(w)$ é indefinido.

Exemplo 4.3 (Relação Binária em $\mathcal{P}fn$) A Figura 4.4 apresenta dois *spans* equivalentes que são pares mono em $\mathcal{P}fn$, expressando, portanto, uma relação binária em $\mathcal{P}fn$. A Figura 4.5 apresenta uma proposta de como essa relação binária em $\mathcal{P}fn$ pode ser representada. Nesta proposta, uma relação binária em $\mathcal{P}fn$, assim como em $\mathcal{S}et$, é representada por setas com origem em elementos de A e destino em elementos de B . Entretanto, diferentemente de $\mathcal{S}et$, pode-se ter também “setas” que tenham somente origem ou “setas” que tenham somente destino. Apenas não é possível ter-se “setas” simultaneamente sem origem e sem destino. É importante ressaltar que “setas” somente com origem ou somente com destino são relevantes na representação usada na Figura 4.5. Um elemento que é origem de uma “seta” sem destino não significa o mesmo que um elemento que não é origem de seta alguma. O mesmo vale para o destino. Para exemplificar melhor, a Figura 4.6 apresenta essa representação das oito possíveis relações binárias $C \rightarrow D$ em $\mathcal{P}fn$, onde $C = \{1\}$ e $D = \{3\}$. Todas essas relações são diferentes entre si.

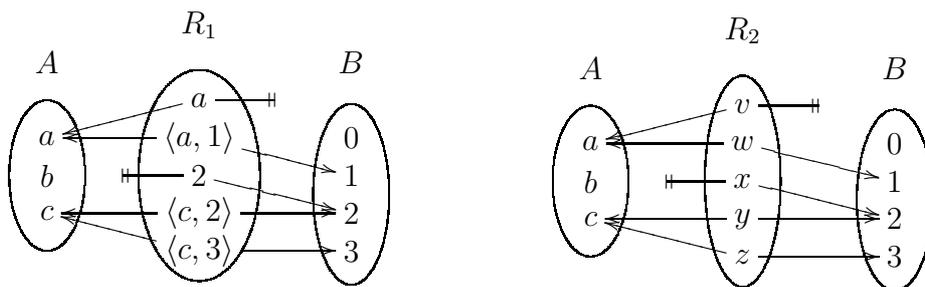


Figura 4.4: *Spans* equivalentes que expressam uma relação em $\mathcal{P}fn$.

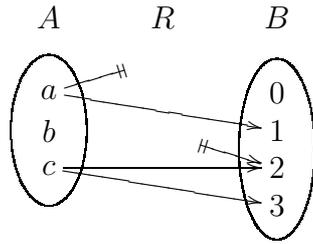


Figura 4.5: Proposta de representação de uma relação binária em \mathcal{Pfn} .

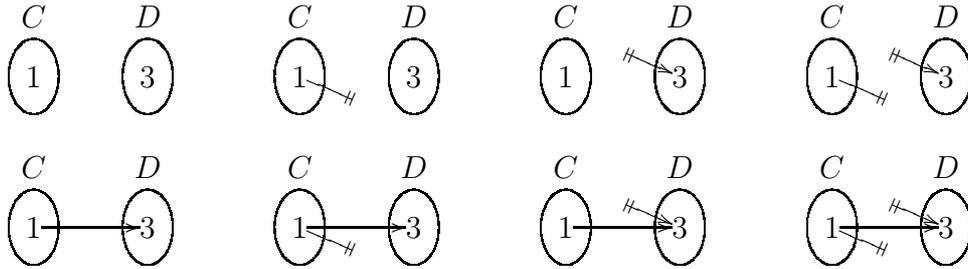


Figura 4.6: Representação proposta para todas as oito diferentes relações binárias possíveis $\{1\} \rightarrow \{3\}$ em \mathcal{Pfn} .

Em \mathcal{Pfn} , um contra-exemplo de relação binária é o *span* da esquerda na Figura 3.16 pois não é um par mono⁶.

Exemplo 4.4 (Relação Binária em Set_{\perp}) A Figura 4.7 apresenta um *span* que é um par mono em Set_{\perp} , expressando, portanto, uma relação binária em Set_{\perp} . A Figura 4.8 apresenta uma possível interpretação para essa relação binária. A representação de uma relação em Set_{\perp} é tal qual a de uma relação em Set . A única restrição é que o elemento diferenciado $\perp \in A$ deve, obrigatoriamente, estar relacionado ao elemento diferenciado $\perp \in B$. As categorias Set_{\perp} e \mathcal{Pfn} são isomorfas e este exemplo foi construído com a relação e o *span* correspondentes, via isomorfismo de categorias, à primeira relação e aos dois primeiros *spans* equivalentes, respectivamente, do Exemplo 4.3.

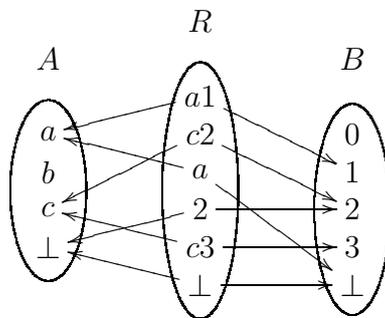


Figura 4.7: *Span* que expressa uma relação em Set_{\perp} .

⁶Há duas justificativas. A primeira é que, no suporte do *span*, os elementos o e p são distintos, mas $d_0(o) = d_0(p)$ e $d_1(o) = d_1(p)$. A segunda é que há, no suporte, um elemento s para o qual ambas projeções são indefinidas.

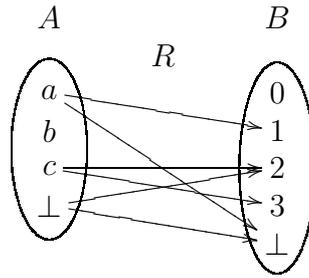


Figura 4.8: Relação em \mathcal{Set}_\perp .

Exemplo 4.5 (Relação Binária em \mathcal{Poset}) O *span* da Figura 4.9 é um par mono em \mathcal{Poset} , expressando, portanto, uma relação binária em \mathcal{Poset} . A Figura 4.10 apresenta uma proposta de representação para essa relação binária. Uma relação binária $P_A \rightarrow P_B$ em \mathcal{Poset} , onde $P_A = \langle A, R_A \rangle$ e $P_B = \langle B, R_B \rangle$, é um par $\langle S, R_S \rangle$, onde $S: A \rightarrow B$ é uma relação qualquer (em \mathcal{Set}) e $R_S: S \rightarrow S$ é uma relação de ordem parcial (em \mathcal{Set}). Observa-se que $S: A \rightarrow B$ é uma relação — não necessariamente uma endorrelação — entre os conjuntos A e B e não precisa preservar as ordens R_A e R_B . Na proposta de representação, a relação S é denotada pelas setas (contínuas) que vão de P_A para P_B . Entretanto, $R_S: S \rightarrow S$ é uma relação de ordem parcial definida entre os elementos da relação S e que precisa preservar as ordens, tanto na origem, quanto no destino, isto é, sejam $\langle p, r \rangle, \langle q, s \rangle \in S$, se $\langle \langle p, r \rangle, \langle q, s \rangle \rangle \in R_S$, então $\langle p, q \rangle \in R_A$ (origem) e $\langle r, s \rangle \in R_B$ (destino). Na proposta de representação, a relação R_S é denotada, nesse caso, pela única seta (pontilhada) entre as setas da relação S . Nessa representação, segue-se a idéia de diagramas de Hasse, ou seja, representa-se apenas a redução reflexiva e transitiva da relação de ordem parcial R_S .

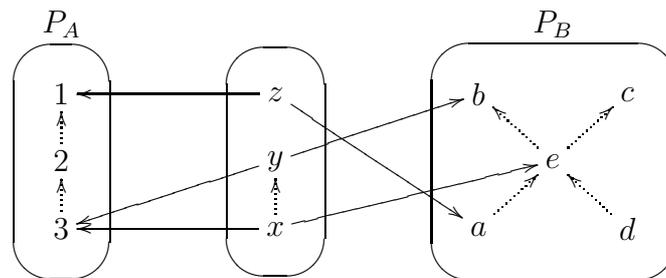


Figura 4.9: *Span* que expressa uma relação em \mathcal{Poset} .

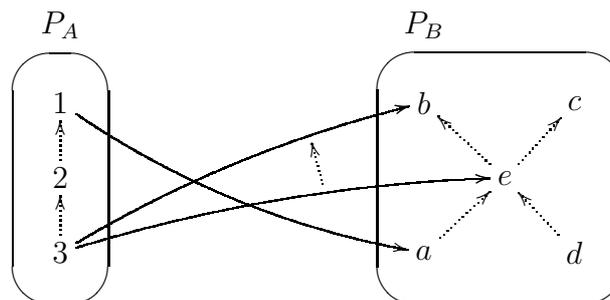


Figura 4.10: Relação em \mathcal{Poset} .

Exemplo 4.6 (Relações Binárias na Categoria 2) Todos os *spans* da categoria 2 são pares mono, portanto, todos expressam relações binárias em 2. Ver exemplo 3.9.

Exemplo 4.7 (Relações Binárias na Categoria $\mathcal{X}or$) Todos os *spans* da categoria $\mathcal{X}or$ são pares mono, portanto, todos expressam relações binárias em $\mathcal{X}or$. Ver exemplo 3.11. Entretanto, existem apenas duas relações binárias na categoria $\mathcal{X}or$: uma expressa pelos *spans* equivalentes $\langle 0, 0 \rangle$ e $\langle 1, 1 \rangle$; outra expressa pelos *spans* equivalentes $\langle 0, 1 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$.

Exemplo 4.8 (Relações Binárias na Categoria $\mathcal{O}r$) A Figura 4.11 apresenta todas as relações binárias em $\mathcal{O}r$. Apenas três dos quatro *spans* da categoria $\mathcal{O}r$ são pares mono, portanto, somente esses três expressam relações binárias em $\mathcal{O}r$. Comparar com exemplo 3.10.

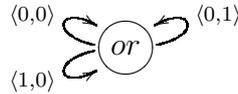


Figura 4.11: Todas relações binárias na categoria $\mathcal{O}r$.

4.3 Multirrelação Binária

Em Set , um *span* $\langle r_0, R_2, r_1 \rangle : A \rightarrow B$ que é um par mono é capaz de expressar uma relação $R : A \rightarrow B$ sendo que para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, $aRb \iff (\exists x \in R_2)(r_0(x) = a \wedge r_1(x) = b)$.

Numa relação $R : A \rightarrow B$, um elemento $a \in A$ está relacionado a um elemento $b \in B$ no máximo uma vez. Multirrelações generalizam relações no sentido que permitem relacionar os mesmos elementos mais de uma vez.

Dados dois objetos A e B de Set , uma multirrelação binária $m : A \rightarrow B$ é um multiconjunto do produto cartesiano $A \times B$, ou seja, uma função $\widehat{m} : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$. Dessa forma, um par do conjunto $A \times B$ pode estar presente na multirrelação tantas vezes quanto desejado, desde que uma quantidade finita de vezes.

Spans em Set são capazes de expressar multirrelações binárias. Entretanto, *spans* são ainda mais poderosos pois permitem expressar uma generalização de multirrelação onde os pares podem aparecer em quantidades finitas ou infinitas (contáveis ou não) de vezes. Neste trabalho, para essa generalização de multirrelação é proposto o nome “multirrelação estendida”⁷.

Para expressar uma dessas multirrelações estendidas, basta retirar a restrição de par mono da definição de relação binária. Dessa forma, um *span* $\langle s_0, S, r_s \rangle : A \rightarrow B$ qualquer é capaz de expressar uma multirrelação estendida $m : A \rightarrow B$ sendo que para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, $a\widehat{m}b = \#\{x \in S \mid s_0(x) = a \wedge r_s(x) = b\}$.

⁷Na categoria Set — e posteriormente em outras —, pretende-se futuramente estudar maneiras de se identificar se um *span* expressa uma multirrelação que não é uma multirrelação estendida. Uma provável maneira pode ser uma correlação entre a definição de *span* e a definição de um “objeto dos números naturais” presente em (LAWVERE; ROSEBRUGH, 2003) e em (BARR; WELLS, 1995). Outra pode ser com a definição de um “conjunto (objeto) Dedekind-infinito” também presente em (LAWVERE; ROSEBRUGH, 2003).

Isso motiva a seguinte definição de multirrelação estendida em qualquer categoria.

Definição 4.9 (Multirrelação Binária Estendida) Sejam \mathcal{C} uma categoria e A e B objetos de \mathcal{C} . Um *span* $M = \langle m_0, m_1 \rangle : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} expressa uma multirrelação binária estendida $m : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} .

Essa definição permite definir-se multirrelações entre dois objetos, mesmo que na categoria em questão não exista produto dos dois objetos e mesmo que não exista um objeto similar a \mathbb{N} ou de todos os cardinais⁸.

Na categoria $\mathcal{F}inset$, uma multirrelação estendida expressa por um *span* qualquer é simplesmente uma multirrelação, pois o suporte é sempre um conjunto finito.

4.4 Exemplos

Exemplo 4.10 (Multirrelação Binária (Estendida) em $\mathcal{S}et$) Os dois *spans* da Figura 4.12 expressam a multirrelação da Figura 4.13. Este é um caso de multirrelação que não precisa ser uma multirrelação estendida pois para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, $a\hat{m}b$ é um valor finito.

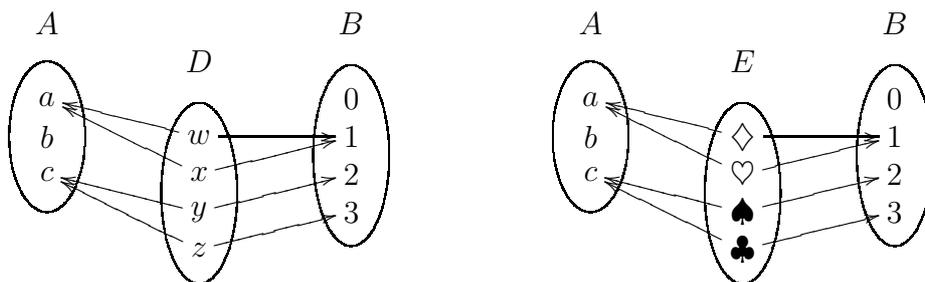


Figura 4.12: *Spans* equivalentes em $\mathcal{S}et$ que expressam uma multirrelação.

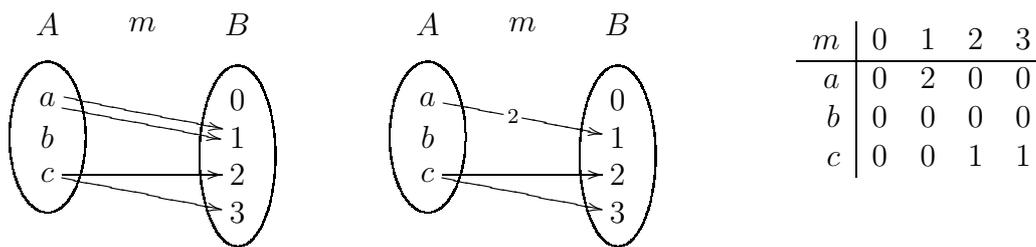


Figura 4.13: Multirrelação em $\mathcal{S}et$.

Exemplo 4.11 (Multirrelação Binária Estendida em $\mathcal{S}et$) Sejam as funções $r : \mathbb{R} \rightarrow \{q, i\}$ e $s : \mathbb{R} \rightarrow \{n, z, p\}$ definidas, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, como

$$r(x) = \begin{cases} q & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ i & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases} \quad s(x) = \begin{cases} n & \text{se } x < 0 \\ z & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O *span* $\langle r, \mathbb{R}, s \rangle : \{q, i\} \rightarrow \{n, z, p\}$, expressa a multirrelação estendida cuja representação proposta está na Figura 4.14, bem como a proposta de representação da sua matriz. Etiquetação de setas é a única alternativa para quantidades infinitas.

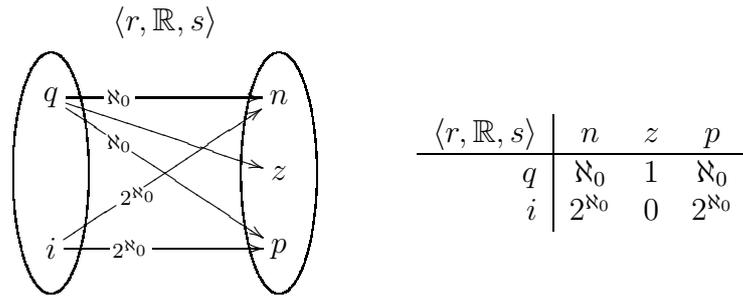


Figura 4.14: Proposta de representação de uma multirrelação estendida em *Set*.

Exemplo 4.12 (Multirrelação Binária (Estendida) em $\mathcal{P}fn$) O *span* da esquerda da Figura 4.15 expressa a multirrelação cuja representação proposta está à direita na mesma Figura. Uma multirrelação estendida em $\mathcal{P}fn$ admite, assim como uma relação em $\mathcal{P}fn$, setas com origem e destino, “setas” somente com origem e “setas” somente com destino. Entretanto, diferentemente de uma relação, admite também “setas” simultaneamente sem origem e sem destino. Além disso, assim como uma multirrelação estendida em *Set*, uma multirrelação estendida em $\mathcal{P}fn$ admite multiplicidade. Essa multiplicidade pode ser em qualquer tipo de seta, como na representação proposta na Figura 4.16.

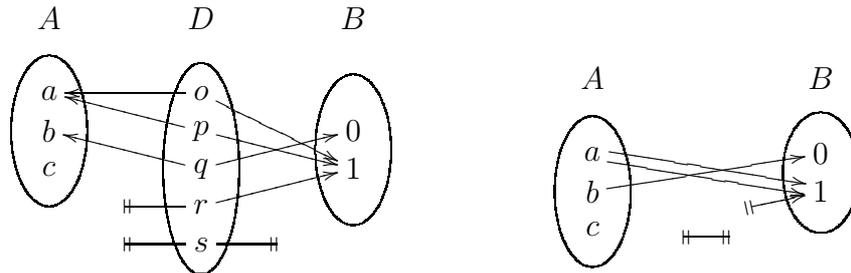


Figura 4.15: *Span* que representa uma multirrelação em $\mathcal{P}fn$ e a proposta de representação da respectiva multirrelação.

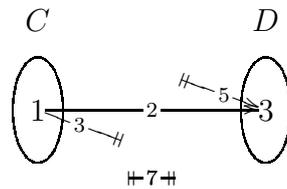


Figura 4.16: Multirrelação em $\mathcal{P}fn$.

⁸O objeto de todos os cardinais não existe sequer em *Set* pois não é um conjunto.

5 GRAFOS INTERNOS COMO SPANS

Neste trabalho, “grafo” significa o que, geralmente, em teoria dos grafos, se conhece por “multigrafo dirigido (ou orientado) com *loops*” ou “multidígrafo com *loops*”. Basicamente, é um conjunto de vértices (também chamados nodos) e um conjunto de arestas unidirecionais (também chamadas arestas dirigidas, arcos dirigidos ou arcos unidirecionais) entre vértices. Admite-se que uma aresta seja uma endoaresta (também chamada endoarco ou *loop*), ou seja, com origem e destino no mesmo vértice. Admite-se também que duas ou mais arestas sejam paralelas, ou seja, com mesmas origens e com mesmos destinos.

Um grafo é definido como uma álgebra sendo composto por quatro componentes: um conjunto V de vértices, um conjunto T de arestas, uma função $\delta_0 : T \rightarrow V$ que, para cada aresta, indica o vértice origem e outra função $\delta_1 : T \rightarrow V$ que, para cada aresta, indica o vértice destino. Essa álgebra costuma ser denotada por uma 4-upla $\langle V, T, \delta_0, \delta_1 \rangle$ e representada por qualquer um dos diagramas na Figura 5.1.



Figura 5.1: Diagramas de um Grafo.

As componentes T , δ_0 e δ_1 de um grafo são um endospan $V \rightarrow V$ em \mathbf{Set} . Grafos definidos por diagramas iguais aos da Figura 5.1, mas generalizados para quaisquer categorias, são chamados de grafos internos à categoria em que estão definidos¹. Isso incentiva a seguinte definição de grafo interno através de *spans* em qualquer categoria.

5.1 Grafo Interno

Definição 5.1 (Grafo Interno) Sejam \mathcal{C} uma categoria e V um objeto de \mathcal{C} . Um grafo em V interno a \mathcal{C} é um endospan $\langle \delta_0, T, \delta_1 \rangle : V \rightarrow V$ em \mathcal{C} .

De fato, pode-se dizer que um grafo interno expressa uma endomultirrelação estendida. Nesse caso, a matriz de adjacência do grafo² é a própria matriz da endomultirrelação.

¹Em (MAC LANE, 1998) onde são chamados apenas de grafos e em (MENEZES, 1997).

²Lembra-se que é um multidígrafo com *loops* e, portanto, a matriz de adjacência não é necessariamente simétrica.

Para grafos internos³, a relação de equivalência de *spans* denota isomorfismo de grafos internos com mesmos vértices.

Pode-se omitir a categoria à qual o grafo é interno e o objeto que representa os vértices, quando essa omissão não causar prejuízo ao entendimento.

5.2 Exemplos e Propostas de Diagramação

Exemplo 5.2 (Grafo interno a \mathcal{Xor}) O exemplo 3.11 mostra todos os *spans* na categoria \mathcal{Xor} . Todos eles são *endospans*, portanto, todos eles são grafos internos a \mathcal{Xor} . Devido à equivalência de *spans*, os grafos internos $\langle 0, 0 \rangle$ e $\langle 1, 1 \rangle$ são grafos isomorfos. O mesmo vale para $\langle 0, 1 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$.

O segundo exemplo apresenta um *endospan* que é um grafo (interno a \mathcal{Set}) e a representação diagramática usual.

Exemplo 5.3 (Grafo interno a \mathcal{Set}) A Figura 5.2 apresenta um *endospan* em \mathcal{Set} (direita) e a representação diagramática deste grafo interno (esquerda). Um grafo interno a \mathcal{Set} pode possuir qualquer quantidade (finita ou infinita; contável ou não) de vértices e, para quaisquer dois vértices, pode possuir qualquer quantidade (finita ou infinita; contável ou não) de arestas com origem em um desses vértices e destino no outro, inclusive se forem o mesmo vértice. Usualmente, na representação diagramática, vértices são representados por circunferências ou por pontos e arestas são representadas por setas entre vértices. Qualquer aresta de um grafo interno a \mathcal{Set} possui exatamente um vértice origem e exatamente um vértice destino.

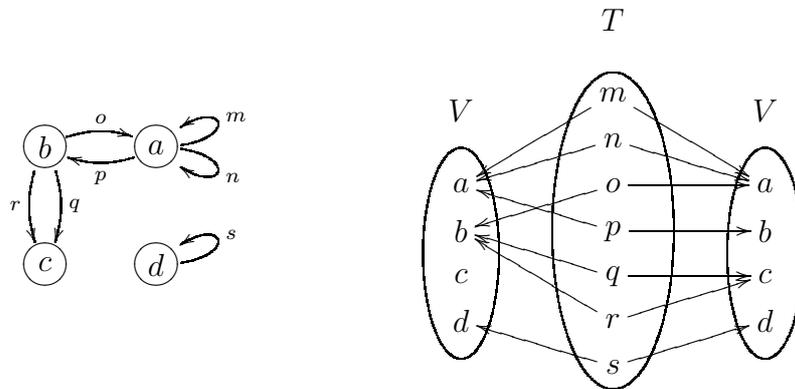


Figura 5.2: Grafo interno a \mathcal{Set} .

Os próximos exemplos mostram grafos internos a outras categorias e propostas de representações diagramáticas para esses grafos. No próprio texto de cada exemplo está a explicação da representação diagramática proposta.

Exemplo 5.4 (Grafo interno a \mathcal{Pfn}) A Figura 5.3 apresenta um *endospan* em \mathcal{Pfn} (direita) e uma proposta de representação diagramática desse grafo interno (esquerda). Um grafo interno a \mathcal{Pfn} , assim como a \mathcal{Set} , pode possuir qualquer quantidade de vértices e de arestas. Entretanto, cada aresta possui no máximo

³A partir de agora, toma-se a liberdade de se referir a um *endospan* diretamente por grafo (interno) e vice-versa, sem a necessidade de se mencionar isso.

um vértice origem e no máximo um vértice destino. Há, portanto, quatro tipos de arestas: origem e destino definidos; somente origem definida; somente destino definido e origem e destino indefinidos. Na Figura, as arestas desses quatro tipos são agrupadas em $\{n, o, p, s\}$, $\{r\}$, $\{m, q\}$ e $\{t, u\}$, respectivamente⁴.

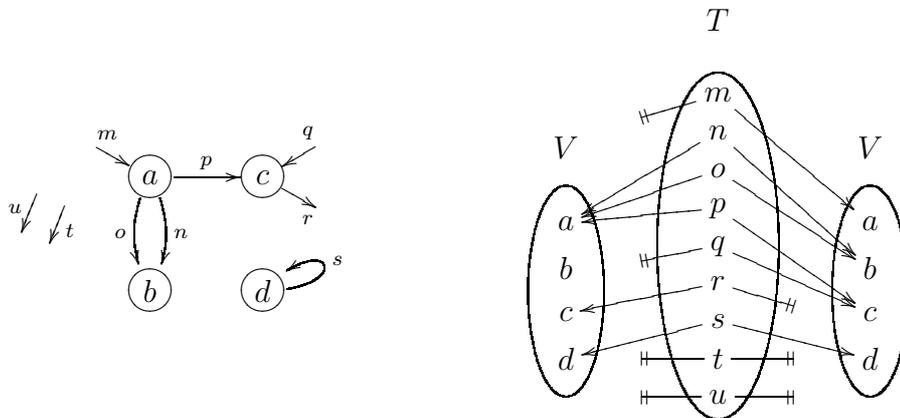


Figura 5.3: Grafo interno a \mathcal{Pfn} .

Exemplo 5.5 (Grafo interno a \mathcal{Set}_\perp) A Figura 5.4 apresenta um *endospan* em \mathcal{Set}_\perp (direita) e a representação diagramática desse grafo interno (esquerda). Esse exemplo apresenta o *endospan* e o grafo interno correspondentes, via isomorfismo de categorias, aos do Exemplo 5.4. A representação diagramática de um grafo interno a \mathcal{Set}_\perp é tal qual a de um grafo interno a \mathcal{Set} , mas precisa ter um vértice diferenciado \perp e uma aresta diferenciada \perp com origem e destino no vértice \perp .

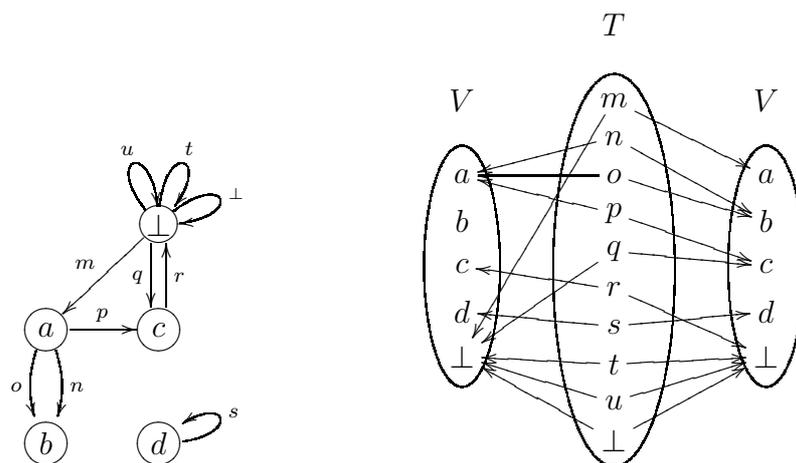


Figura 5.4: Grafo interno a \mathcal{Set}_\perp .

Exemplo 5.6 (Grafo interno a \mathcal{Rel}) A Figura 5.5 apresenta um *endospan* em \mathcal{Rel} (direita) e uma proposta de representação diagramática para esse grafo interno (esquerda). Um grafo interno a \mathcal{Rel} também pode possuir qualquer quantidade de vértices e de arestas. Mas aqui não há restrições para as quantidades de origens ou de

⁴Chama-se a atenção que, geralmente, isso não é uma partição do conjunto de arestas.

destinos das arestas, ou seja, cada aresta pode possuir zero ou mais vértices origem e zero ou mais vértices destino. Por esse motivo, uma aresta é representada por um retângulo. Os vértices origem de uma aresta são indicados pela origem de cada uma das setas com destino no retângulo dessa aresta. De forma similar, os vértices destino de uma aresta são indicados pelo destino de cada uma das setas com origem no retângulo dessa aresta. Uma restrição é que, para cada circunferência (vértice) e para cada retângulo (aresta), há no máximo uma seta em cada sentido entre eles. Outra restrição é que não pode haver setas entre duas circunferências (vértices) nem entre dois retângulos (arestas). Na Figura, a aresta t tem origem nos vértices a e c e destino nos vértices b e d ; a aresta v não tem origem nem destino; a aresta r tem origem no vértice c e não tem destino.

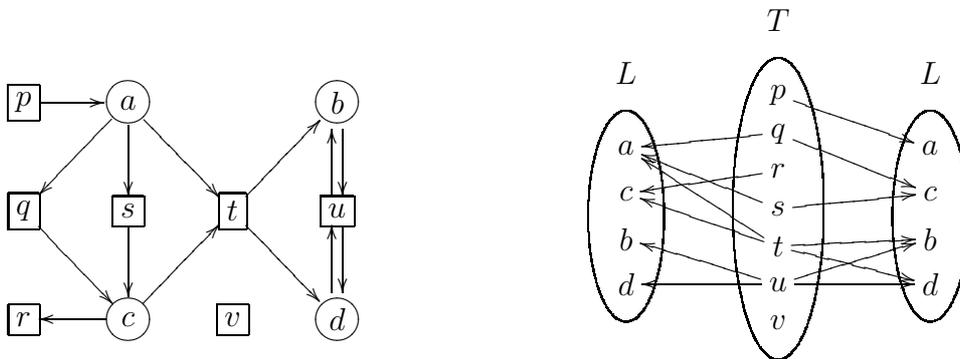


Figura 5.5: Grafo interno a $\mathcal{R}el$.

Exemplo 5.7 (Grafo interno a $\mathcal{M}Rel$) A Figura 5.6 apresenta um *endospan* em $\mathcal{M}Rel$ (direita) e uma proposta de representação diagramática para esse grafo interno (esquerda). Um grafo interno a $\mathcal{M}Rel$, assim como a $\mathcal{R}el$, pode possuir qualquer quantidade de vértices e de arestas e cada aresta pode possuir qualquer quantidade de origens e de destinos. Adicionalmente, um vértice pode ser origem de uma aresta mais de uma vez. O mesmo vale para destino. A representação diagramática é similar à de grafos internos a $\mathcal{R}el$. A diferença é que aqui pode haver mais de uma seta no mesmo sentido entre uma circunferência (vértice) e um retângulo (aresta), ou vice-versa. Isso é devido à multiplicidade permitida pelas multirrelações. Essa multiplicidade pode ser denotada por setas repetidas ou por etiquetagem de setas, tal qual na representação de multirrelações. Na Figura, há cinco setas da aresta p para o vértice a , o que significa que a aresta p tem destino no vértice a e este destino tem multiplicidade cinco. A única restrição que continua é que não pode haver setas entre duas circunferências (vértices) nem entre dois retângulos (arestas).

Exemplo 5.8 (Grafo interno a $\mathcal{P}oset$) A Figura 5.7 apresenta um *endospan* em $\mathcal{P}oset$ (direita) e uma proposta de representação diagramática para esse grafo interno (esquerda). Neste grafo, setas contínuas representam arestas, enquanto setas pontilhadas representam a relação de ordem parcial, seja entre vértices, seja entre arestas. A representação diagramática de um grafo interno a $\mathcal{P}oset$ é como a de um grafo interno a $\mathcal{S}et$, entretanto representa-se uma ordem parcial entre seus

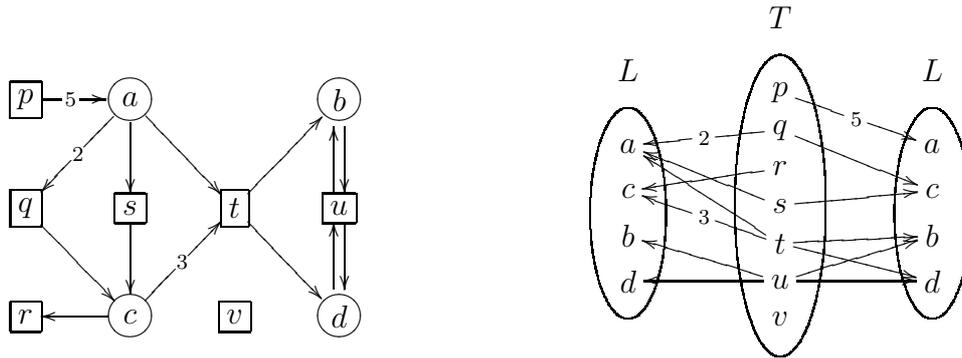


Figura 5.6: Grafo interno a $MRel$.

vértices e outra ordem parcial entre suas arestas. As arestas podem ser entre quaisquer vértices, mesmo que elas não preservem a ordem existente entre esses vértices, como é o caso da aresta r . Já a ordem entre as arestas deve respeitar a ordem entre os vértices, tanto na origem, quanto no destino. Neste exemplo, nenhum dos pares $\langle q, r \rangle$ e $\langle r, q \rangle$ poderia fazer parte da relação de ordem entre arestas pois não respeitaria a ordem dos vértices, fosse na origem, fosse no destino.

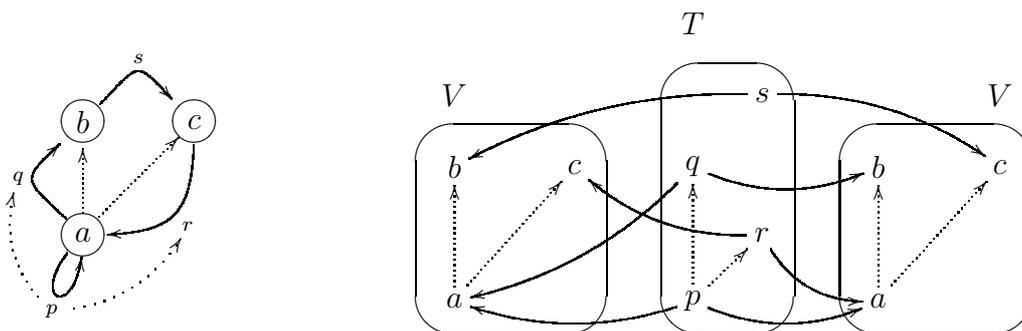


Figura 5.7: Grafo interno a $Poset$.

Exemplo 5.9 (Grafos internos a 2) O exemplo 3.9 mostra todos os *spans* na categoria 2 . O endospan $\langle a, a \rangle$ é um grafo interno a 2 com vértices em A . Os endospans $\langle b, b \rangle$ e $\langle x, x \rangle$ são grafos internos a 2 com vértices em B . Como esses dois últimos não são *spans* equivalentes, são dois grafos internos não-isomorfos.

Exemplo 5.10 (Grafos internos a $\mathcal{X}or$) O exemplo 3.11 mostra todos os *spans* na categoria $\mathcal{X}or$ sendo que todos eles são grafos internos a essa categoria. Os grafos internos $\langle 0, 0 \rangle$ e $\langle 1, 1 \rangle$ são isomorfos entre si, pois são *spans* equivalentes. Da mesma forma, os grafos internos $\langle 0, 1 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$ são isomorfos entre si.

Exemplo 5.11 (Grafos internos a $\mathcal{O}r$) O exemplo 3.10 mostra todos os *spans* na categoria $\mathcal{O}r$ sendo que todos eles são grafos internos a essa categoria, dois a dois não-isomorfos.

6 MODELOS DE SISTEMAS COMO SPANS

Há diversas formas de se representar modelos de sistemas através de grafos.

Os sistemas de transições etiquetadas (*labeled transition systems* — LTS)¹ por exemplo, são representados por grafos (interno a \mathcal{Set}) com etiquetação nas arestas, onde os vértices são os estados e as arestas são as transições.

Já um grafo (também interno a \mathcal{Set}) bipartido, pode representar uma rede de Petri. Como o grafo é bipartido, há duas classes de vértices sendo que os vértices de uma classe representam os lugares e os vértices da outra classe representam as transições. As arestas deste grafo representam o consumo e a produção das transições.

Neste capítulo, propõe-se duas formas alternativas de se definir redes de Petri. Na primeira dessas novas propostas, uma rede de Petri é simplesmente um grafo interno a \mathcal{MRel} , definição esta que é usada no capítulo 13 onde se define uma composição de redes de Petri que envolve transações. Na segunda proposta, uma rede de Petri são dois *spans* paralelos em \mathcal{Set} .

Antes disso, mostra-se como se pode definir LTS com *spans*. Exemplifica-se também como se definir autômatos finitos.

6.1 LTS

Em (HENNESSY, 1988), um LTS é $\langle P, A, \rightarrow \rangle$ onde P é um conjunto de processos, A é um conjunto de ações e $\rightarrow \subseteq P \times A \times P$ é a relação ternária de transição. Denota-se $\langle p, a, q \rangle \in \rightarrow$ por $p \xrightarrow{a} q$, o que significa que p evolui para q através da ação a .

Em (MILNER, 1989), um LTS é $\langle S, T, \{ \xrightarrow{t} \mid t \in T \} \rangle$ onde S é um conjunto de estados, T é um conjunto de etiquetas de transições e, para cada $t \in T$, $\xrightarrow{t} \subseteq S \times S$ é uma relação de transição. Denota-se $\langle p, q \rangle \in \xrightarrow{t}$ por $p \xrightarrow{t} q$, o que significa que existe uma transição etiquetada por t do estado p para o estado q .

Essas duas definições são equivalentes, considerando-se processos como estados e ações como etiquetas.

Ambas podem ser representadas por três morfismos em \mathcal{Set} , como em qualquer um dos diagramas da Figura 6.1, onde Q é um conjunto de estados e Σ é um conjunto de etiquetas. O conjunto T passa a ser um conjunto de transições. A única restrição é que esses três morfismos formem uma tripla mono. Isso se deve a, em qualquer das duas definições, as relações de transição serem definidas como subconjuntos.

A parte superior de qualquer um dos diagramas da Figura 6.1 é um grafo e a parte inferior simplesmente etiqueta cada aresta do grafo. Como os morfismos

¹Como em (HENNESSY, 1988) e em (MILNER, 1989).

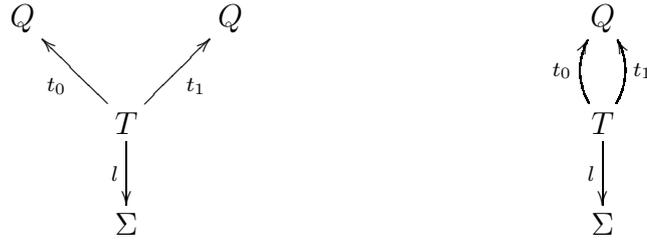


Figura 6.1: Diagramas para um LTS.

formam uma tripla mono, não é permitido que haja arestas paralelas distintas com a mesma etiqueta.

Entretanto, há situações² em que arestas paralelas distintas com mesma etiqueta são desejadas ou, pelo menos, não são proibidas e, portanto, neste trabalho, relaxa-se a definição a fim de se permitir isso. Assim, a seguinte definição de LTS não restringe os três morfismos a uma tripla mono. Se arestas paralelas com mesma etiqueta não forem desejadas, basta adicionar a restrição de tripla mono a esta definição³.

Definição 6.1 (Sistema de Transições Etiquetadas) (Ver Figura 6.1) Um sistema de transições etiquetadas (LTS — *labeled transition system*) é uma 4-upla $\langle \Sigma, Q, G, l \rangle$, onde Σ é um conjunto de etiquetas, Q é um conjunto de estados, G é um *endospan* $\langle t_0, T, t_1 \rangle: Q \rightarrow Q$ e $l: T \rightarrow \Sigma$ é uma função.

Um LTS é dito determinístico se e somente se não possui arestas distintas com mesma etiqueta e com origem no mesmo vértice. Isso acontece se e somente se os morfismos t_0 e l formam um par mono.

Definição 6.2 (LTS Determinístico) (Ver Figura 6.1) Um LTS $\langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$ é determinístico se e somente se t_0 e l formam um par mono.

Exemplo 6.3 (LTS) A Figura 6.2 mostra um LTS determinístico $\langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$ com $\Sigma = \{a, b\}$ e $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$. O conjunto T possui seis arestas e, na Figura, elas aparecem sem seus nomes, apenas com suas respectivas etiquetas.

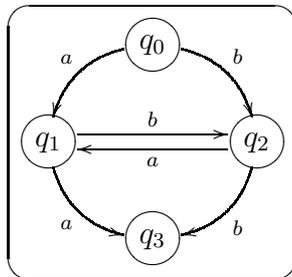


Figura 6.2: Um LTS determinístico (também um AFD).

²Arestas paralelas com mesma etiqueta podem surgir de transações diferentes e, no caso de reificação usando homomorfismos, como em (MENEZES, 1997), elas seriam necessárias.

³Entretanto, se essa restrição for considerada, deve-se observar que a composição de transições de LTS definida no capítulo 12 não necessariamente será fechada, como mostra o exemplo 12.3.

6.2 Autômatos Finitos

Autômatos finitos (AF) determinísticos (AFD) ou não (AFN)⁴ são LTS onde todos os conjuntos envolvidos são finitos e, adicionalmente, são enriquecidos com estados inicial e finais, devido à sua importância no contexto de linguagens formais e autômatos. Neste trabalho, não se usa estados inicial nem finais.

Um autômato finito não-determinístico é como um LTS na definição 6.1 onde os três conjuntos Σ , Q e T são finitos⁵. O conjunto finito de etiquetas Σ é chamado alfabeto.

Já um autômato finito determinístico é um LTS determinístico como na definição 6.2 onde, novamente, os três conjuntos envolvidos são finitos.

Embora as definições 6.1 e 6.2 não sejam categoriais, pode-se considerá-las internas à categoria \mathcal{Set} . Nesse caso, pode-se considerar que um AFN e um AFD são, respectivamente, um LTS e um LTS determinístico internos à categoria \mathcal{Finset} .

Exemplo 6.4 (AFD) O LTS determinístico da Figura 6.2 também é um AFD.

6.3 Redes de Petri

Tradicionalmente⁶, uma rede de Petri é uma função $P: (L \times T) \uplus (T \times L) \rightarrow \mathbb{N}$, onde L e T são conjuntos quaisquer que representam os lugares e as transições, respectivamente. Para $l \in L$ e $t \in T$, $P(\langle l, t \rangle)$ indica o fluxo de entrada do lugar l para a transição t , enquanto $P(\langle t, l \rangle)$ indica o fluxo de saída da transição t para o lugar l .

Essa função P pode ser equivalentemente representada por duas funções $\hat{e}: T \times L \rightarrow \mathbb{N}$ e $\hat{s}: T \times L \rightarrow \mathbb{N}$. Para quaisquer $l \in L$ e $t \in T$, $\hat{e}(\langle t, l \rangle) = P(\langle l, t \rangle)$ e $\hat{s}(\langle t, l \rangle) = P(\langle t, l \rangle)$. Ou seja, \hat{e} representa o fluxo de entrada e \hat{s} representa o fluxo de saída.

Propõe-se, agora, duas formas alternativas de se definir uma rede de Petri, ambas através de *spans*.

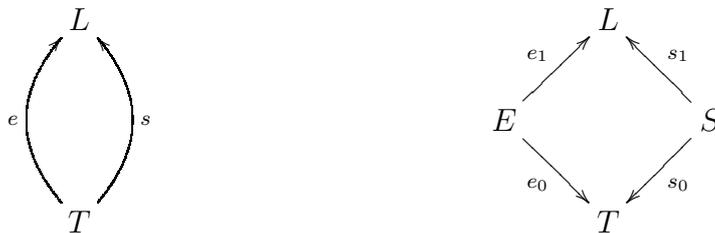


Figura 6.3: Diagramas para redes de Petri em \mathcal{MRel} (esquerda) e em \mathcal{Set} (direita).

6.3.1 Rede de Petri como um grafo interno a \mathcal{MRel}

As funções $\hat{e}: T \times L \rightarrow \mathbb{N}$ e $\hat{s}: T \times L \rightarrow \mathbb{N}$ descritas acima são multirrelações⁷ $e: T \rightarrow L$ e $s: T \rightarrow L$, respectivamente, o que incentiva a definição 6.5.

⁴Como definidos em (MENEZES, 2001).

⁵Novamente relaxa-se a definição para se permitir arestas paralelas com mesma etiqueta.

⁶Em (MESEGUER; MONTANARI, 1988).

⁷Como observado em (BEDNARCZYK; BORZYSZKOWSKI, 1999).

Definição 6.5 (Rede de Petri) (Ver Figura 6.3 (esquerda)) Uma rede de Petri é um grafo $\langle e, T, s \rangle : L \rightarrow L$ interno a \mathcal{MRel} .

Exemplo 6.6 (Rede de Petri como grafo interno em \mathcal{MRel}) O grafo interno a \mathcal{MRel} no exemplo 5.7 pode ser interpretado como uma rede de Petri. Os vértices do grafo (círculos) são os lugares da rede e as arestas do grafo (retângulos) são as transições da rede.

Em uma rede de Petri definida dessa forma, as seguintes considerações se aplicam:

- permite infinitos lugares;
- permite infinitas transições;
- uma transição pode consumir infinitos *tokens*, mas apenas uma quantidade finita de cada lugar;
- uma transição pode produzir infinitos *tokens*, mas apenas uma quantidade finita em cada lugar.

A definição 6.5 é usada no capítulo 13 onde se propõe um tipo de composição de redes de Petri que é capaz de identificar um tipo de transação.

6.3.2 Rede de Petri como dois *spans* paralelos em \mathcal{Set}

Como multirrelações são expressas por *spans* em \mathcal{Set} , uma rede de Petri também pode ser representada por um diagrama como o da Figura 6.3 (direita) na categoria \mathcal{Set} . Ou seja, uma rede de Petri são dois *spans* paralelos. Entretanto, dessa forma, os fluxos de entrada e saída podem, eventualmente, ser multirrelações estendidas.

Definição 6.7 (Rede de Petri) (Ver Figura 6.3 (direita)) Uma rede de Petri é $\langle L, T, e, s \rangle$, onde $e = \langle e_0, E, e_1 \rangle : T \rightarrow L$ e $s = \langle s_0, S, s_1 \rangle : T \rightarrow L$ são *spans* paralelos em \mathcal{Set} .

Exemplo 6.8 (Rede de Petri como *spans* paralelos em \mathcal{Set}) A Figura 6.4 (direita) apresenta dois *spans* paralelos $\langle e_0, E, e_1 \rangle : T \rightarrow L$ e $\langle s_0, S, s_1 \rangle : T \rightarrow L$ em \mathcal{Set} que representam a rede de Petri da mesma Figura (esquerda). Uma possível interpretação para os elementos dos conjuntos E e S é o de canais pelos quais os *tokens* passam quando vão de um lugar para uma transição (elementos de E) ou de uma transição para um lugar (elementos de S).

Em uma rede de Petri definida dessa forma, as seguintes considerações se aplicam:

- permite infinitos lugares;
- permite infinitas transições;
- uma transição pode consumir infinitos *tokens*, inclusive infinitos de um mesmo lugar;
- uma transição pode produzir infinitos *tokens*, inclusive infinitos em um mesmo lugar.

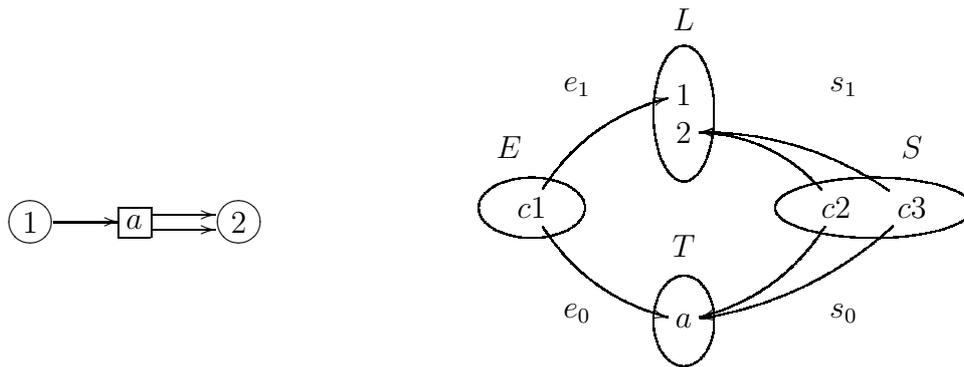


Figura 6.4: Rede de Petri como dois *spans* paralelos em \mathcal{Set} .

Entretanto, se nessa mesma definição, substituir-se \mathcal{Set} por \mathcal{Finset} :

- permite quantidade finita de lugares;
- permite quantidade finita de transições;
- uma transição pode consumir apenas quantidades finitas de *tokens*;
- uma transição pode produzir apenas quantidades finitas de *tokens*.

A definição 6.7 (com a categoria \mathcal{Set}), por e e s se tratarem de multirrelações estendidas, generaliza redes de Petri, pois permite consumo e produção de infinitos *tokens* de ou em um mesmo lugar.

7 PROPRIEDADES DE ENDORRELAÇÕES

Este capítulo apresenta caracterizações categoriais para se verificar propriedades de endorrelações nos endospans que as expressam. Algumas dessas caracterizações são encontradas na literatura — reflexividade, simetria e transitividade — e outras são propostas — correflexividade, irreflexividade, anti-simetria, assimetria, conexividade, densidade e Euclideanidade — pois não foram encontradas na literatura¹.

Inicialmente, apresenta-se quais propriedades de endorrelações são consideradas e relembra-se suas definições algébricas.

Logo após, para cada propriedade, faz-se um desenvolvimento categorial com explicações centradas na categoria \mathcal{Set} e apresenta-se a definição categorial formal da propriedade em questão. Embora o raciocínio seja apresentado para a teoria dos conjuntos, as definições independem da categoria em que se trabalha. Há, também, a proposta de uma nova propriedade para endorrelações — a monotransitividade.

7.1 Definições Algébricas

As propriedades a seguir são consideradas sobre uma endorrelação $R : A \rightarrow A$. Para algumas propriedades, apresenta-se mais de uma definição, uma por linha. Entretanto, todas as definições de cada propriedade são equivalentes.

- reflexividade
 $(\forall a \in A)(aRa)$
 $(\forall a, b \in A)(a = b \rightarrow aRb)$
- correflexividade
 $(\forall a, b \in A)(aRb \rightarrow a = b)$
- irreflexividade
 $(\forall a \in A)(\neg aRa)$
 $(\forall a, b \in A)(a = b \rightarrow \neg aRb)$
- simetria
 $(\forall a, b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$
- anti-simetria
 $(\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$

¹Incluindo (MAC LANE, 1998), (PIERCE, 1991), (LAWVERE; SCHANUEL, 1991), (BORCEUX, 1994), (BARR; WELLS, 1995), entre outros.

- assimetria
 $(\forall a, b \in A)(aRb \longrightarrow \neg bRa)$
- transitividade
 $(\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc)$
- conexividade
 $(\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa \vee a = b)$
 $(\forall a, b \in A)(a \neq b \longrightarrow aRb \vee bRa)$
 $(\forall a, b \in A)(\neg aRb \wedge \neg bRa \longrightarrow a = b)$
- densidade
 $(\forall a, b \in A)(aRb \longrightarrow (\exists z \in A)(aRz \wedge zRb))$
- Euclideanidade
 $(\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge aRc \longrightarrow bRc)$

7.2 Caracterização Categorical

Essas propriedades são, agora, tratadas de forma categorial. Para todas elas, considera-se o endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ como sendo um par mono que expressa a endorrelação $R : A \rightarrow A$.

7.2.1 Reflexividade, Correflexividade e Irreflexividade

Encontra-se² a definição 7.1 de reflexividade. A Figura 7.1 apresenta um diagrama comutativo para esta definição.

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 id_A \swarrow & & \searrow id_A \\
 & d \downarrow & \\
 A & \xleftarrow{r_0} R \xrightarrow{r_1} & A
 \end{array}$$

Figura 7.1: Diagrama comutativo para a definição 7.1.

Definição 7.1 (Reflexividade) A endorrelação $R : A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ é reflexiva se e somente se existe um morfismo $d : A \rightarrow R$ tal que $r_0 \circ d = id_A$ e $r_1 \circ d = id_A$.

Como r_0 e r_1 formam um par mono, se esse morfismo d existe, então ele é único.

Considerando-se A um conjunto e R um conjunto de pares de elementos de A , significa que cada elemento de A é mapeado, via d , para um par em que ambas projeções são o próprio elemento original em A .

Propõe-se aqui uma forma alternativa³ de se verificar a reflexividade. Trata-se do cálculo 7.1 em conjunto com a definição 7.2. O cálculo 7.1 também permite verificar a correflexividade e a irreflexividade. O cálculo em si necessita da existência de equalizador. A verificação da irreflexividade necessita da existência de objeto inicial.

²Em (BARR; WELLS, 1985), (LAWVERE; ROSEBRUGH, 2003) e em (ADÁMEK; ROSICKÝ, 2001).

³Se existirem equalizadores, a verificação proposta é equivalente à verificação apresentada.

Cálculo 7.1 Sejam, como na Figura 7.2, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um equalizador — constituído pelo objeto E e pelos morfismos e_0 e e_1 , onde $e_1 = r_0 \circ e_0$ e $e_1 = r_1 \circ e_0$.

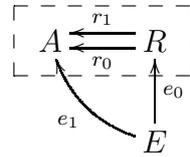


Figura 7.2: Cálculo para reflexividade, correflexividade e irreflexividade.

Sabe-se que e_0 é um monomorfismo pois é o morfismo que caracteriza o equalizador. No geral, o segundo morfismo de um equalizador — nesse caso, o e_1 — não é mono. Entretanto, como r_0 e r_1 formam um par mono, pelo teorema 2.18, sabe-se que e_1 também é um monomorfismo.

Considerando-se E e e_1 como subobjeto de A , então o objeto E pode ser interpretado como um subconjunto de A . Este subconjunto E possui cada elemento de A que está relacionado a si próprio. Se todos os elementos de A estiverem em E , então a relação R é reflexiva. O fato de todos os elementos de A estarem em E é expresso pela existência de uma função $f: A \rightarrow E$ tal que $e_1 \circ f = id_A$. Categoricalmente, isso significa que e_1 é uma retração.

Por outro lado, considerando-se E e e_0 como um subobjeto de R , então o objeto E pode ser interpretado como um subconjunto de R . Este subconjunto possui todos e somente aqueles pares de R que sejam da forma $\langle x, x \rangle$. Se todos os pares de R estiverem em E , então a relação R é correflexiva. Como no caso anterior, se todos os pares de R estão em E , existe uma função $g: R \rightarrow E$ tal que $e_0 \circ g = id_R$. Categoricalmente, isso significa que e_0 é uma retração.

Em qualquer uma das duas considerações acima se $E = \emptyset$, o significado é o mesmo: nenhum elemento de A relaciona-se consigo mesmo e, portanto, a relação R é irreflexiva. Categoricalmente, E é o objeto inicial da categoria.

Assim, propõe-se as definições dessas três propriedades de forma categorial.

Definição 7.2 (Reflexividade) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é reflexiva se e somente se e_1 é uma retração, onde e_1 é como no cálculo 7.1.

Definição 7.3 (Correflexividade) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é correflexiva se e somente se e_0 é uma retração, onde e_0 é como no cálculo 7.1.

Definição 7.4 (Irreflexividade) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é irreflexiva se e somente se E é um objeto inicial, onde E é como no cálculo 7.1.

7.2.2 Simetria

Encontra-se⁴ as definições 7.5 e 7.6 de simetria. A Figura 7.3 apresenta um diagrama comutativo para ambas definições.

⁴Em (ADÁMEK; ROSICKÝ, 2001) e em (BARR; WELLS, 1985), respectivamente.

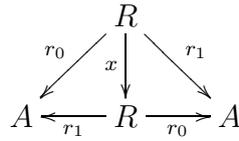


Figura 7.3: Diagrama comutativo para as definições 7.5 e 7.6.

Definição 7.5 (Simetria) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é simétrica se e somente se $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ e $\langle r_1, R, r_0 \rangle: A \rightarrow A$ expressam a mesma endorrelação.

Isso significa que a endorrelação $R: A \rightarrow A$ é igual à sua dual $R^{op}: A \rightarrow A$. Embora os spans $\langle r_0, r_1 \rangle$ e $\langle r_1, r_0 \rangle$ expressem a mesma endorrelação, os morfismos r_0 e r_1 não precisam ser necessariamente iguais. Mas os spans são equivalentes.

Definição 7.6 (Simetria) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é simétrica se e somente se existe um morfismo $x: R \rightarrow R$ tal que $r_1 \circ x = r_0$ e $r_0 \circ x = r_1$.

Aqui, se R for considerado um conjunto de pares, a existência de um morfismo $x: R \rightarrow R$ que inverta as componentes de cada par, também inverte as projeções e indica que a endorrelação é simétrica. Como r_0 e r_1 formam um par mono, se esse morfismo x existe, necessariamente ele é um isomorfismo.

PROVA. A demonstração é feita linha a linha, e, à direita de cada implicação, há uma breve justificativa.

$r_1 \circ x = r_0$ e $r_0 \circ x = r_1$	\implies	substituindo r_0 e r_1
$(r_0 \circ x) \circ x = r_0$ e $(r_1 \circ x) \circ x = r_1$	\implies	associatividade
$r_0 \circ (x \circ x) = r_0$ e $r_1 \circ (x \circ x) = r_1$	\implies	$\langle r_0, r_1 \rangle$ é par mono
$x \circ x = id_R$	\implies	x é retração e x é seção
x é isomorfismo		

□

Além disso, pelo mesmo motivo (par mono), se esse morfismo x existe, ele é único.

7.2.3 Anti-simetria e Assimetria

Aqui, é proposto um cálculo que permite a verificação da anti-simetria e da assimetria. O cálculo em si necessita da existência de limite para um diagrama específico apresentado na Figura 7.4. A verificação da assimetria necessita da existência de objeto inicial.

Cálculo 7.2 Sejam, como na Figura 7.4, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite constituído pelo objeto P e pelos morfismos p_0, p_1, p_2 e p_3 , onde $r_0 \circ p_0 = p_2$, $r_1 \circ p_1 = p_2$, $r_1 \circ p_0 = p_3$ e $r_0 \circ p_1 = p_3$.

Para este limite, propõe-se o nome “produto fibrado duplo”. Ele é o melhor cone — no sentido da propriedade universal — simultaneamente para dois diagramas de produtos fibrados.

O objeto P pode ser interpretado como um conjunto de pares $\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle$ onde p_0 e p_1 são as projeções tais que $p_0(\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle) = \langle w, x \rangle$ e $p_1(\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle) =$

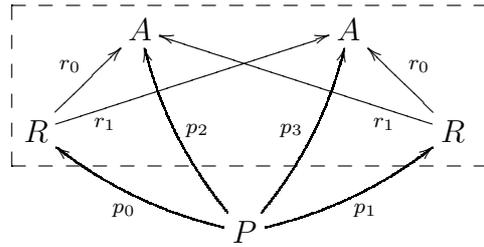


Figura 7.4: Cálculo para anti-simetria e assimetria.

$\langle y, z \rangle$. Os pares de P respeitam $w = z$, pois $r_0 \circ p_0 = r_1 \circ p_1$, e respeitam $x = y$, pois $r_1 \circ p_0 = r_0 \circ p_1$. Assim, P tem somente pares do tipo $\langle \langle w, x \rangle, \langle x, w \rangle \rangle$ e, para cada elemento de P , p_0 e p_1 representam pares da endorrelação R simétricos um em relação ao outro, enquanto p_2 e p_3 representam os elementos w e x que constituem os pares $\langle w, x \rangle$ e $\langle x, w \rangle$.

Se p_2 e p_3 forem iguais, significa que $w = x$ e então os únicos pares que aparecem em P são do tipo $\langle \langle w, w \rangle, \langle w, w \rangle \rangle$ e a endorrelação R é anti-simétrica.

Já se $P = \emptyset$, significa que não há pares simétricos na endorrelação R e, portanto, a endorrelação é assimétrica.

Definição 7.7 (Anti-simetria) A endorrelação $R : A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ é anti-simétrica se e somente se $p_2 = p_3$, onde p_2 e p_3 são como no cálculo 7.2.

Como r_0 e r_1 formam um par mono, $p_2 = p_3 \iff p_0 = p_1$.

PROVA. Que $p_0 = p_1 \implies p_2 = p_3$ é imediato, pela definição de p_2 e p_3 .

A demonstração que $p_2 = p_3 \implies p_0 = p_1$ é feita a seguir, linha a linha, e, à direita de cada implicação, há uma breve justificativa.

$p_2 = p_3 \implies$	como $p_2 = r_0 \circ p_0$, $p_3 = r_0 \circ p_1$, $p_2 = r_1 \circ p_1$ e $p_3 = r_1 \circ p_0$
$r_0 \circ p_0 = r_0 \circ p_1$ e $r_1 \circ p_0 = r_1 \circ p_1 \implies$	como $\langle r_0, r_1 \rangle$ é par mono
$p_0 = p_1$	

□

E, portanto, na definição 7.7, o teste $p_2 = p_3$ pode ser substituído, sem qualquer perda, por $p_0 = p_1$.

Definição 7.8 (Assimetria) A endorrelação $R : A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ é assimétrica se e somente se P é um objeto inicial, onde P é como no cálculo 7.2.

7.2.4 Conexividade

Propõe-se aqui um cálculo que permite a verificação da conexividade. Este cálculo é construído sobre o cálculo 7.2 e necessita, adicionalmente, da existência de soma amalgamada. A verificação da conexividade necessita da existência de todas as endorrelações irreflexivas no mesmo objeto da endorrelação sendo testada.

Cálculo 7.3 Sejam p_0 e p_1 como no cálculo 7.2. Sejam ainda, como na Figura 7.5, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu colimite — uma soma

amalgamada — constituído pelo objeto S e pelos morfismos c_0, c_1 e c_2 , onde $c_0 \circ p_0 = c_2$ e $c_1 \circ p_1 = c_2$. A Figura 7.6 repete o diagrama e o colimite anteriores (omitindo o morfismo c_2) e apresenta duas pré-somas amalgamadas⁵. Para cada uma, considere-se o morfismo induzido pela soma amalgamada. Esses dois morfismos induzidos são s_0 e s_1 e estão representados por setas pontilhadas.

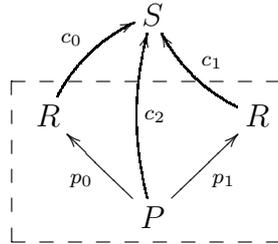


Figura 7.5: Cálculo para conexividade.

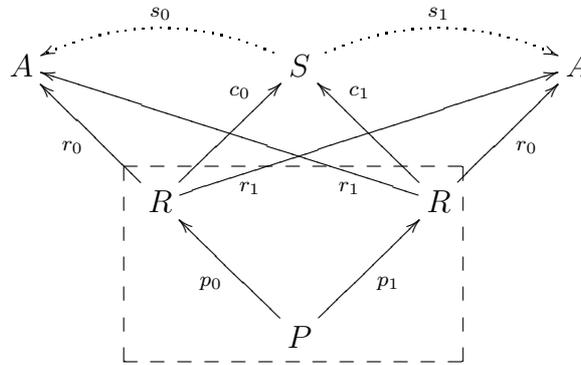


Figura 7.6: Morfismos induzidos para a verificação da conexividade.

O objeto S pode ser interpretado como um conjunto que, para cada par da endorrelação R , possui um elemento com as mesmas projeções desse par e também possui um elemento (possivelmente o mesmo) com as projeções invertidas. Os morfismos s_0 e s_1 indicam as projeções. Cabe ressaltar que s_0 e s_1 não formam necessariamente um par mono.

A Figura 7.7 apresenta um diagrama comutativo para a definição 7.9.

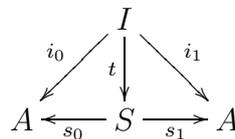


Figura 7.7: Diagrama comutativo para a definição 7.9.

Definição 7.9 (Conexividade) A endorrelação $R : A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ é conexa se e somente se para qualquer endorrelação irreflexiva — expressa por algum endospan $\langle i_0, I, i_1 \rangle : A \rightarrow A$ — existe um morfismo $t : I \rightarrow S$ tal que $s_0 \circ t = i_0$ e $s_1 \circ t = i_1$, onde s_0 e s_1 são como no cálculo 7.3.

⁵Que são realmente pré-somas amalgamadas pode ser verificado por p_0 e p_1 fazerem parte do limite no cálculo 7.2.

Se a endorrelação $R: A \rightarrow A$ não é conexa, existem pelo menos dois elementos distintos $a, b \in A$ tais que $\neg aRb$ e $\neg bRa$. Se isso acontecer, existe pelo menos uma endorrelação irreflexiva $I: A \rightarrow A$ que não pode ser mapeada para o conjunto S de forma que o diagrama da Figura 7.7 comute. Basta para isso que $\langle a, b \rangle \in I$.

7.2.5 Transitividade, Monotransitividade e Densidade

Aqui, apresenta-se a verificação da transitividade presente na literatura⁶. O cálculo utilizado necessita da existência de produto fibrado. Apresenta-se também a verificação de uma nova propriedade a qual se propõe chamar “monotransitividade”. Após, aproveitando-se o cálculo, propõe-se a verificação da densidade.

Cálculo 7.4 Sejam, como na Figura 7.8, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um produto fibrado — constituído pelo objeto P e pelos morfismos p_0, p_1 e p_2 onde $r_1 \circ p_0 = p_2$ e $r_0 \circ p_1 = p_2$.

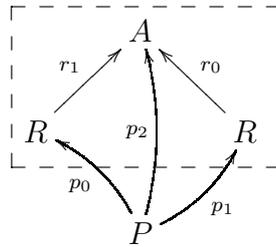


Figura 7.8: Cálculo para transitividade, monotransitividade e densidade.

A Figura 7.9 apresenta um diagrama comutativo para a definição 7.10.

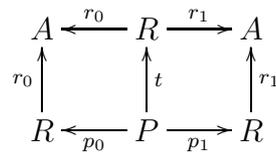


Figura 7.9: Diagrama comutativo para as definições 7.10 e 7.11.

Definição 7.10 (Transitividade) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é transitiva se e somente se existe um morfismo $t: P \rightarrow R$ tal que $r_0 \circ p_0 = r_0 \circ t$ e $r_1 \circ p_1 = r_1 \circ t$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 7.4.

O objeto P pode ser interpretado como um conjunto de pares $\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle$ onde p_0 e p_1 são as projeções tais que $p_0(\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle) = \langle w, x \rangle$ e $p_1(\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle) = \langle y, z \rangle$. Os pares de P respeitam $x = y$, pois $r_1 \circ p_0 = r_0 \circ p_1$. Assim, P tem somente pares do tipo $\langle \langle w, x \rangle, \langle x, z \rangle \rangle$.

Para a endorrelação R ser transitiva, é necessário que para cada par $\langle \langle w, x \rangle, \langle x, z \rangle \rangle$ de P , haja um par $\langle w, z \rangle$ em R ou seja, exista um morfismo $t: P \rightarrow R$ que mapeie $\langle \langle w, x \rangle, \langle x, z \rangle \rangle$ em $\langle w, z \rangle$. Se esse morfismo t existe, ele é único, pois r_0 e r_1 formam um par mono.

⁶Definição 7.10 presente em (BARR; WELLS, 1985) e em (ADÁMEK; ROSICKÝ, 2001).

Se esse morfismo t for um monomorfismo, significa que se um par da endorrelação é imagem de algum elemento de P , então ele é imagem de um único elemento de P . A idéia aqui é que, numa endorrelação transitiva, se um par da endorrelação representa alguma transitividade, então representa uma única transitividade. Propõe-se que essa propriedade seja chamada “monotransitividade”.

Adicionalmente, se cada par $\langle a, b \rangle$ de R puder ser mapeado, através de um morfismo $u: R \rightarrow P$, para algum elemento $\langle \langle a, z \rangle, \langle z, b \rangle \rangle$ de P , significa que a endorrelação é densa.

Com isso, propõe-se as definições 7.11 de monotransitividade e 7.12 de densidade.

O diagrama da Figura 7.9 também serve para a definição 7.11.

Definição 7.11 (Monotransitividade) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é monotransitiva se e somente se existe um monomorfismo $t: P \rightarrow R$ tal que $r_0 \circ p_0 = r_0 \circ t$ e $r_1 \circ p_1 = r_1 \circ t$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 7.4.

A Figura 7.10 apresenta um diagrama comutativo para a definição 7.12.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{r_0} & R & \xrightarrow{r_1} & A \\
 \uparrow r_0 & & \downarrow u & & \uparrow r_1 \\
 R & \xleftarrow{p_0} & P & \xrightarrow{p_1} & R
 \end{array}$$

Figura 7.10: Diagrama comutativo para a definição 7.12.

Definição 7.12 (Densidade) A endorrelação $R: A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle: A \rightarrow A$ é densa se e somente se existe um morfismo $u: R \rightarrow P$ tal que $r_0 \circ p_0 \circ u = r_0$ e $r_1 \circ p_1 \circ u = r_1$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 7.4.

7.2.6 Euclideanidade

Finalmente, propõe-se um cálculo que permite a verificação da Euclideanidade. O cálculo necessita da existência de produto fibrado.

Cálculo 7.5 Sejam, como na Figura 7.11, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um produto fibrado — constituído pelo objeto P e pelos morfismos p_0, p_1 e p_2 onde $r_0 \circ p_0 = p_2$ e $r_0 \circ p_1 = p_2$.

Figura 7.11: Cálculo para Euclideanidade.

Nesse caso, novamente, o objeto P pode ser interpretado como um conjunto de pares $\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle$ onde p_0 e p_1 são as projeções tais que $p_0(\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle) =$

$\langle w, x \rangle$ e $p_1(\langle \langle w, x \rangle, \langle y, z \rangle \rangle) = \langle y, z \rangle$. Os pares de P respeitam $w = y$, pois $r_0 \circ p_0 = r_0 \circ p_1$. Assim, P tem somente pares do tipo $\langle \langle w, x \rangle, \langle w, z \rangle \rangle$ e, para cada elemento de P , p_0 e p_1 representam pares da relação R com origens coincidentes.

Para a relação R ser Euclideana, é necessário que, para cada par $\langle \langle w, x \rangle, \langle w, z \rangle \rangle$ de P , haja em R um par $\langle x, z \rangle$, ou seja, exista um morfismo $v : P \rightarrow R$ que mapeie $\langle \langle w, x \rangle, \langle w, z \rangle \rangle$ em $\langle x, z \rangle$.

Assim, tem-se a proposta da definição 7.13 de Euclideanidade. A Figura 7.12 apresenta um diagrama comutativo para essa definição.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{r_0} & R & \xrightarrow{r_1} & A \\
 \uparrow r_1 & & \uparrow v & & \uparrow r_1 \\
 R & \xleftarrow{p_0} & P & \xrightarrow{p_1} & R
 \end{array}$$

Figura 7.12: Diagrama comutativo para a definição 7.13.

Definição 7.13 (Euclideanidade) A endorrelação $R : A \rightarrow A$ expressa por um endospan $\langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ é Euclidean se e somente se existe um morfismo $v : P \rightarrow R$ tal que $r_1 \circ p_0 = r_0 \circ v$ e $r_1 \circ p_1 = r_1 \circ v$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 7.5.

7.3 Monotransitividade — Definição Algébrica

No início deste capítulo, apresenta-se as definições algébricas das propriedades tratadas categorialmente na seção anterior.

Como, categorialmente, uma nova propriedade é proposta — a monotransitividade, definição 7.11 —, apresenta-se aqui duas definições algébricas⁷ que são equivalentes.

- monotransitividade

$$(\forall a, b_1, b_2, c \in A)(aRb_1 \wedge b_1Rc \longrightarrow aRc \wedge (aRb_2 \wedge b_2Rc \longrightarrow b_2 = b_1))$$

$$(\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc \wedge (\forall b_2 \in A)(aRb_2 \wedge b_2Rc \longrightarrow b_2 = b))$$

7.4 Dependência

Este capítulo apresenta a caracterização de propriedades de endorrelações para endospans que as expressam. Algumas são encontradas na literatura e outras são propostas aqui. Uma nova propriedade também é proposta, tanto de forma categorial quanto de forma algébrica.

As verificações das propriedades dependem de cálculos propostos e de construções usuais⁸ na Teoria das Categorias. A Figura 7.13 (rotacionada) mostra uma espécie de diagrama de Hasse da relação de dependência que pode ser estabelecida entre as definições das propriedades, os cálculos e construções da Teoria das Categorias.

⁷Embora definições algébricas não façam parte do objetivo deste trabalho.

⁸O produto fibrado duplo, proposto aqui, é um limite, portanto é usual.

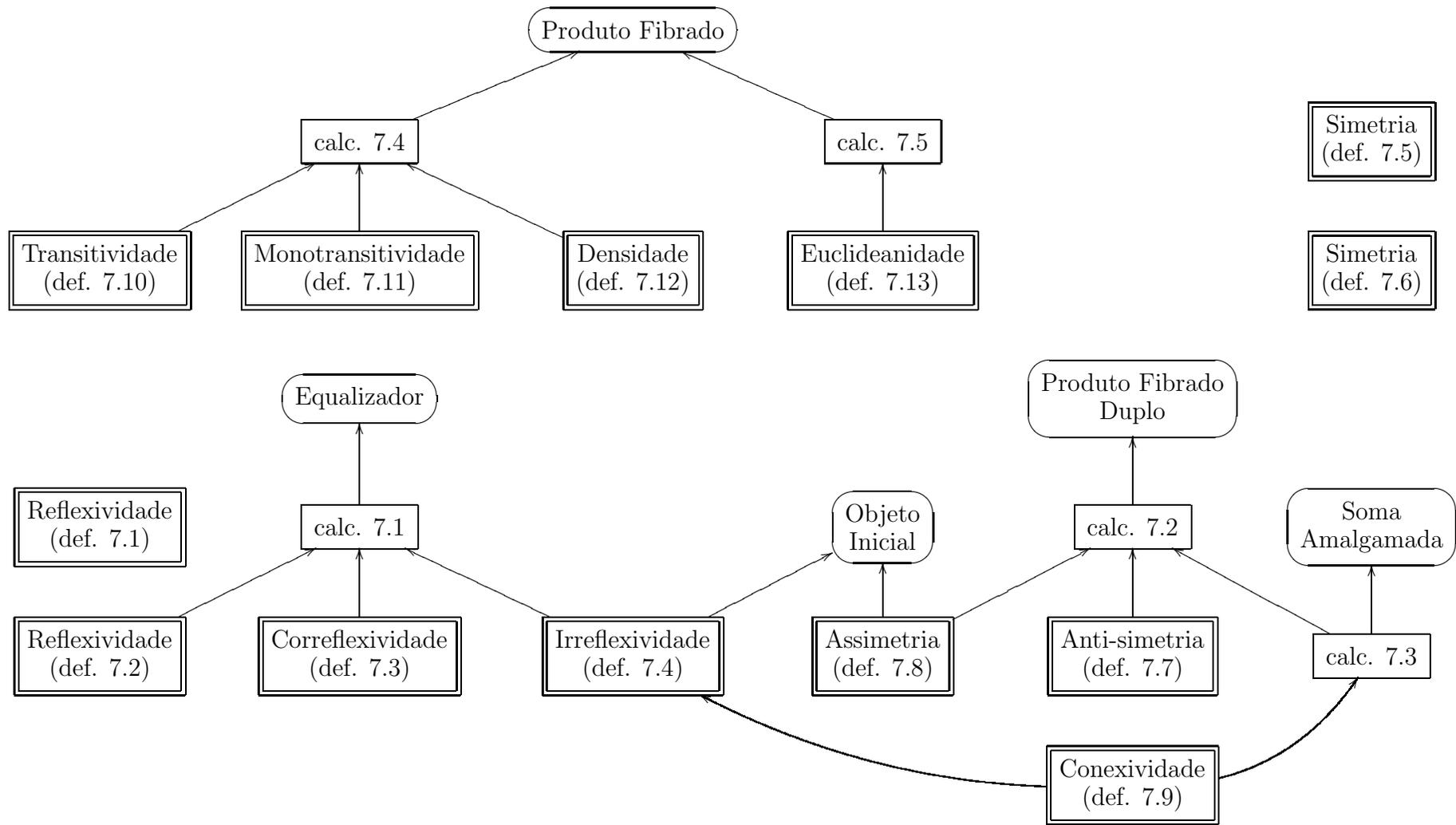


Figura 7.13: Relação de Dependência.

8 PROPRIEDADES DE GRAFOS INTERNOS

Este capítulo propõe generalizações das propriedades de endorrelações para grafos internos. Todas elas são diretamente inspiradas nos cálculos e nas verificações apresentados e propostos no capítulo 7. Como, aqui, há situações que não acontecem com as endorrelações, novas propriedades são propostas: monorreflexividade, isorreflexividade, pseudo-simetria e anti-simetria forte.

No final deste capítulo, também se propõe essas mesmas propriedades para endomultirrelações, mas de forma algébrica.

8.1 Caracterização Categorical

Nesta seção, todas as propriedades são consideradas sobre um endospan $\langle d_0, T, d_1 \rangle$: $A \rightarrow A$ que é um grafo interno $G = \langle A, T, d_0, d_1 \rangle$, onde A é um conjunto de vértices, T é um conjunto de arestas e d_0 e d_1 representam origem e destino, respectivamente. Todo o desenvolvimento do raciocínio é feito sobre um grafo interno a *Set*, mas as definições das propriedades são independentes da categoria.

8.1.1 Reflexividade, Monorreflexividade, Isorreflexividade, Correflexividade e Irreflexividade

Inicialmente, apresenta-se o cálculo 8.1 equivalente ao cálculo 7.1 do capítulo anterior. Esse cálculo também necessita da existência de equalizador.

Cálculo 8.1 Sejam, como na Figura 8.1, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um equalizador — constituído pelo objeto E e pelos morfismos e_0 e e_1 , onde $e_1 = d_0 \circ e_0$ e $e_1 = d_1 \circ e_0$.

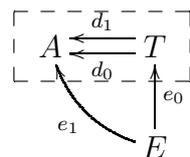


Figura 8.1: Cálculo para reflexividade, monorreflexividade, isorreflexividade, correflexividade e irreflexividade.

Sabe-se que e_0 é um monomorfismo e então E e e_0 são um subobjeto de T . Mas, diferentemente do caso com endorrelações, e_1 não necessariamente é mono, pois os morfismos d_0 e d_1 não formam necessariamente um par mono.

O objeto E pode ser interpretado como o subconjunto de arestas do grafo G que possui somente as endoarestas e , assim, o endospan $\langle e_1, E, e_1 \rangle: A \rightarrow A$ é o grafo com os mesmos vértices de G e somente com as endoarestas de G .

Se há um morfismo $f: A \rightarrow E$ tal que $e_1 \circ f = id_A$ — ou seja, se o morfismo e_1 é uma retração —, significa que, no grafo G , cada vértice de A , possui pelo menos uma endoaresta. Nesse caso, assim como para as endorrelações, o grafo G é reflexivo¹.

Se o morfismo e_1 é um monomorfismo, significa que, no grafo G , cada vértice de A , possui no máximo uma endoaresta. Para esta situação, propõe-se dizer que o grafo G é monorreflexivo.

Se e_1 é simultaneamente uma retração e um monomorfismo, sabe-se que é também um isomorfismo. Nesse caso, significa que, no grafo G , cada vértice de A , possui exatamente uma endoaresta e propõe-se dizer que o grafo G é isorreflexivo.

O morfismo e_0 é a inclusão de E em T . Como E possui somente as endoarestas presentes em T , se e_0 for uma retração, toda aresta em T está em E , ou seja, toda aresta em T é uma endoaresta. Nesse caso, assim como para as endorrelações, o grafo G é correflexivo.

Finalmente, se $E = \emptyset$, significa que nenhuma aresta do grafo G é uma endoaresta e , assim, o grafo G é irreflexivo.

Propõe-se, então, as definições dessas cinco propriedades de forma categorial.

Definição 8.1 (Reflexividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é reflexivo se e somente se e_1 é uma retração, onde e_1 é como no cálculo 8.1.

Definição 8.2 (Monorreflexividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é monorreflexivo se e somente se e_1 é um monomorfismo, onde e_1 é como no cálculo 8.1.

Definição 8.3 (Isorreflexividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é isorreflexivo se e somente se e_1 é um isomorfismo, onde e_1 é como no cálculo 8.1.

Definição 8.4 (Correflexividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é correflexivo se e somente se e_0 é uma retração, onde e_0 é como no cálculo 8.1.

Definição 8.5 (Irreflexividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é irreflexivo se e somente se E é um objeto inicial, onde E é como no cálculo 8.1.

Aqui, propõe-se a generalização para grafos e endomultirrelações da definição alternativa 7.1 de reflexividade para endorrelações. Esta generalização também não necessita de equalizador. A Figura 8.2 apresenta um diagrama comutativo para a definição.

Definição 8.6 (Reflexividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é reflexivo se e somente se existe um morfismo $d: A \rightarrow T$ tal que $d_0 \circ d = id_A$ e $d_1 \circ d = id_A$.

Esse morfismo d não é necessariamente único, pois r_0 e r_1 não formam necessariamente um par mono.

¹Deve-se chamar a atenção que, aqui, a palavra “reflexivo” trata-se de uma propriedade de um grafo qualquer. Não se deve confundir com Grafos Reflexivos que são definidos como uma 5-upla onde uma das componentes indica a endoaresta diferenciada que existe para cada vértice. De fato, cada Grafo Reflexivo, no sentido de uma 5-upla, quando visto como um grafo qualquer, respeita a propriedade reflexiva como definida aqui.

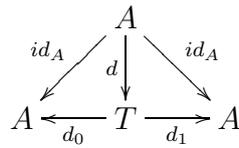


Figura 8.2: Diagrama comutativo para a definição 8.6.

8.1.2 Simetria e Pseudo-simetria

A definição 7.5 de simetria para endorrelações, se generalizada, não apresenta detalhes suficiente para se definir as duas propriedades propostas abaixo. Por este motivo, generaliza-se somente a definição 7.6.

A Figura 8.3 apresenta um diagrama comutativo para as definições 8.7 e 8.8.

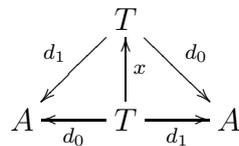


Figura 8.3: Diagrama comutativo para as definições 8.7 e 8.8.

No diagrama desta Figura, o morfismo x mapeia cada aresta numa aresta com origem e destino invertidos. A existência de um morfismo x desse tipo, garante que cada aresta possua pelo menos uma aresta no sentido contrário em que pode ser mapeada via x . Mas isso permite que duas arestas num sentido possam ser mapeadas, via x , na mesma aresta no outro sentido ou que uma aresta possa não ser imagem, via x , de qualquer aresta no outro sentido.

Por este motivo, pode-se ter uma definição mais rígida. Se o morfismo x é um isomorfismo, significa que é possível que, para cada aresta a , exista uma aresta b no sentido contrário em que somente a seja mapeada em b , via x . Isso significa que a quantidade de arestas nos dois sentidos é exatamente a mesma e o grafo G é simétrico.

No caso menos rígido em que um morfismo x existe, mas sem a necessidade de ser isomorfismo, propõe-se dizer que o grafo G é pseudo-simétrico.

Em qualquer um dos casos, se o morfismo x existe, não necessariamente é único.

Definição 8.7 (Pseudo-simetria) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é pseudo-simétrico se e somente se existe um morfismo $x : T \rightarrow T$ tal que $d_0 \circ x = d_1$ e $d_1 \circ x = d_0$.

Definição 8.8 (Simetria) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é simétrico se e somente se existe um isomorfismo $x : T \rightarrow T$ tal que $d_0 \circ x = d_1$ e $d_1 \circ x = d_0$.

Se um grafo $G = \langle A, T, d_0, d_1 \rangle$ é simétrico, então ele é isomorfo ao seu dual $G^{op} = \langle A, T, d_1, d_0 \rangle$.

8.1.3 Anti-simetria, Anti-simetria Forte e Assimetria

Aqui, é proposto um cálculo que permite a verificação da anti-simetria e da assimetria. Adicionalmente, propõe-se a anti-simetria forte. O cálculo em si necessita

da existência de produto fibrado duplo². A verificação da assimetria necessita da existência de objeto inicial.

Cálculo 8.2 Sejam, como na Figura 8.4, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um produto fibrado duplo — constituído pelo objeto P e pelos morfismos p_0, p_1, p_2 e p_3 , onde $d_0 \circ p_0 = p_2$, $d_1 \circ p_1 = p_2$, $d_1 \circ p_0 = p_3$ e $d_0 \circ p_1 = p_3$.

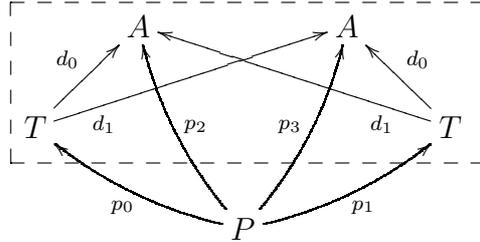


Figura 8.4: Cálculo para anti-simetria, anti-simetria forte e assimetria.

O objeto P pode ser interpretado como um conjunto de pares de arestas de G simétricas uma em relação à outra no sentido de origem e destino. Os morfismos p_0 e p_1 são as projeções desses pares e indicam arestas de “ida” e “volta”, respectivamente. Os morfismos p_2 e p_3 indicam os vértices envolvidos na “ida” e na “volta”.

Se p_2 e p_3 forem iguais, significa que os únicos pares em T são formados por endoarestas, ou seja, as únicas formas de se “ir e voltar” é através de endoarestas e, portanto, o grafo G é anti-simétrico.

Mas a “ida e volta” pode se dar por duas endoarestas distintas no mesmo vértice. Diferentemente do caso com endorrelações, aqui não necessariamente $p_2 = p_3 \implies p_0 = p_1$, pois r_0 e r_1 não necessariamente formam um par mono.

Então $p_0 = p_1$ é mais restrito que $p_2 = p_3$ e, nesse caso, a “ida e volta”, além de ser por endoarestas, é obrigatoriamente pela mesma endoaresta. Propõe-se, nesse caso, dizer que o grafo G é fortemente anti-simétrico.

Já se $P = \emptyset$, significa que não há arestas simétricas no grafo G e, portanto, o grafo G é assimétrico.

Definição 8.9 (Anti-simetria) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é anti-simétrico se e somente se $p_2 = p_3$, onde p_2 e p_3 são como no cálculo 8.2.

Definição 8.10 (Anti-simetria Forte) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é fortemente anti-simétrico se e somente se $p_0 = p_1$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 8.2.

Definição 8.11 (Assimetria) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é assimétrico se e somente se P é um objeto inicial, onde P é como no cálculo 8.2.

²Como definido no capítulo anterior no cálculo 7.2, embora esse nome seja apenas mencionado e não definido.

8.1.4 Conexividade³

Propõe-se aqui um cálculo que permite a verificação da conexividade³. Este cálculo é construído sobre o cálculo 8.2 e necessita, adicionalmente, da existência de soma amalgamada. A verificação da conexividade³ necessita da existência de todas as endorrelações irreflexivas⁴ no objeto que representa os vértices do grafo.

Cálculo 8.3 Sejam p_0 e p_1 como no cálculo 8.2. Sejam ainda, como na Figura 8.5, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu colimite — uma soma amalgamada — constituído pelo objeto S e pelos morfismos c_0 , c_1 e c_2 , onde $c_0 \circ p_0 = c_2$ e $c_1 \circ p_1 = c_2$. A Figura 8.6 repete o diagrama e o colimite anteriores (omitindo o morfismo c_2) e apresenta duas pré-somas amalgamadas⁵. Para cada uma, considera-se o morfismo induzido pela soma amalgamada. Esses dois morfismos induzidos são s_0 e s_1 e são denotados por setas pontilhadas.

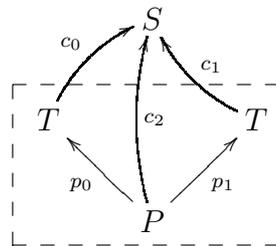


Figura 8.5: Cálculo para conexividade³.

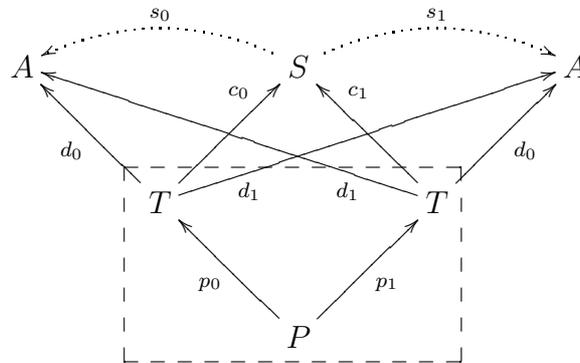


Figura 8.6: Morfismos induzidos para a verificação da conexividade³.

O objeto S pode ser interpretado como um conjunto que, para cada aresta do grafo G , possui uma aresta com mesma origem e mesmo destino e também possui uma aresta (possivelmente a mesma) com origem e destino invertidos. Os morfismos s_0 e s_1 indicam as origem e destino, respectivamente.

A Figura 8.7 apresenta um diagrama comutativo para a definição 8.12.

³Deve-se chamar a atenção que, aqui, por se tratar de uma generalização da propriedade “conexividade” de endorrelações, usa-se o mesmo nome. Entretanto, na teoria dos grafos, existe também uma propriedade com este nome, mas as duas não são equivalentes.

⁴Pode-se usar os grafos irreflexivos, mas apenas as endorrelações irreflexivas são suficientes.

⁵Que são realmente pré-somas amalgamadas pode ser verificado por p_0 e p_1 fazerem parte do limite no cálculo 8.2.

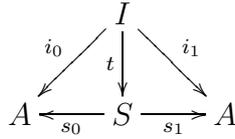


Figura 8.7: Diagrama comutativo para a definição 8.12.

Definição 8.12 (Conexividade³) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é conexo³ se e somente se para qualquer endorrelação irreflexiva⁴ — expressa por algum endospan $\langle i_0, I, i_1 \rangle: A \rightarrow A$ — existe um morfismo $t: I \rightarrow S$ tal que $s_0 \circ t = i_0$ e $s_1 \circ t = i_1$, onde s_0 e s_1 são como no cálculo 8.3.

Se o grafo G não é conexo³, existem pelo menos dois vértices distintos $a, b \in A$ tais que não existe aresta de a para b nem de b para a . Se isso acontecer, existe pelo menos uma endorrelação irreflexiva⁴ $I: A \rightarrow A$ que não pode ser mapeada para o conjunto S de forma que o diagrama da Figura 8.7 comute. Basta para isso que $\langle a, b \rangle \in I$.

8.1.5 Transitividade, Monotransitividade e Densidade

Aqui, propõe-se um cálculo que permite a verificação da transitividade, da monotransitividade e da densidade. O cálculo necessita da existência de produto fibrado.

Cálculo 8.4 Sejam, como na Figura 8.8, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um produto fibrado — constituído pelo objeto P e pelos morfismos p_0, p_1 e p_2 onde $d_1 \circ p_0 = p_2$ e $d_0 \circ p_1 = p_2$.

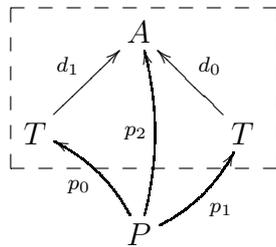


Figura 8.8: Cálculo para transitividade, monotransitividade e densidade.

O objeto P pode ser interpretado como um conjunto de pares de arestas em que o destino da primeira aresta coincide com a origem da segunda.

Se cada par de arestas em P puder ser mapeado, via um morfismo t para uma aresta em T que preserve a origem da primeira aresta e o destino da segunda aresta, propõe-se dizer que o grafo G é transitivo.

Se esse t for um monomorfismo, não há dois pares distintos de arestas sendo mapeados na mesma aresta e propõe-se dizer que o grafo G é monotransitivo.

Adicionalmente, se cada aresta de G puder ser mapeada, através de um morfismo $u: T \rightarrow P$, para algum par em P cuja primeira componente preserve origem e segunda componente preserve destino, significa que o grafo é denso.

A Figura 8.9 apresenta um diagrama comutativo para as definições 8.13 e 8.14.

Definição 8.13 (Transitividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle: A \rightarrow A$ é transitivo se e somente se existe um morfismo $t: P \rightarrow T$ tal que $d_0 \circ p_0 = d_0 \circ t$ e $d_1 \circ p_1 = d_1 \circ t$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 8.4.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{d_0} & T & \xrightarrow{d_1} & A \\
 d_0 \uparrow & & \uparrow t & & \uparrow d_1 \\
 T & \xleftarrow{p_0} & P & \xrightarrow{p_1} & T
 \end{array}$$

Figura 8.9: Diagrama comutativo para a definição 8.13.

Definição 8.14 (Monotransitividade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é monotransitivo se e somente se existe um monomorfismo $t : P \rightarrow T$ tal que $d_0 \circ p_0 = d_0 \circ t$ e $d_1 \circ p_1 = d_1 \circ t$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 8.4.

A Figura 8.10 apresenta um diagrama comutativo para a definição 8.15.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{d_0} & T & \xrightarrow{d_1} & A \\
 d_0 \uparrow & & \downarrow u & & \uparrow d_1 \\
 T & \xleftarrow{p_0} & P & \xrightarrow{p_1} & T
 \end{array}$$

Figura 8.10: Diagrama comutativo para a definição 8.15.

Definição 8.15 (Densidade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é denso se e somente se existe um morfismo $u : T \rightarrow P$ tal que $d_0 \circ p_0 \circ u = d_0$ e $d_1 \circ p_1 \circ u = d_1$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 8.4.

8.1.6 Euclideanidade

Finalmente, propõe-se um cálculo que permite a verificação da Euclideanidade. O cálculo necessita da existência de produto fibrado.

Cálculo 8.5 Sejam, como na Figura 8.11, um diagrama (dentro das linhas tracejadas) e o seu limite — um produto fibrado — constituído pelo objeto P e pelos morfismos p_0 , p_1 e p_2 onde $d_0 \circ p_0 = p_2$ e $d_0 \circ p_1 = p_2$.

Figura 8.11: Cálculo para Euclideanidade.

Nesse caso, o objeto P pode ser interpretado como um conjunto de pares de arestas com mesma origem.

Se cada um desses pares puder ser mapeado, via um morfismo $v : P \rightarrow T$, para uma aresta cuja origem seja o destino da primeira componente do par e cujo destino seja o destino da segunda componente do par, então o grafo G é Euclidean.

A Figura 8.12 apresenta um diagrama comutativo para a definição 8.16.

Definição 8.16 (Euclideanidade) O grafo interno $\langle d_0, T, d_1 \rangle : A \rightarrow A$ é Euclidean se e somente se existe um morfismo $v : P \rightarrow T$ tal que $d_1 \circ p_0 = d_0 \circ v$ e $d_1 \circ p_1 = d_1 \circ v$, onde p_0 e p_1 são como no cálculo 8.5.

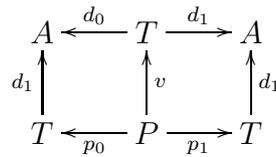


Figura 8.12: Diagrama comutativo para a definição 8.16.

8.2 Resumo das Propriedades — Interpretações

Apresenta-se aqui um resumo das propriedades propostas para um grafo $\langle \delta_0, T, \delta_1 \rangle : V \rightarrow V$ e possíveis interpretações em \mathcal{Set} .

- Reflexividade
 - há pelo menos uma endoaresta por nodo;
- Monorreflexividade
 - há no máximo uma endoaresta por nodo;
- Isorreflexividade
 - há exatamente uma endoaresta por nodo;
- Correflexividade
 - há somente endoarestas;
 - toda aresta é endoaresta;
- Irreflexividade
 - não há endoarestas;
- Pseudo-simetria
 - para cada aresta num sentido, existe pelo menos uma no sentido oposto;
 - com qualquer aresta com origem num nodo, é possível criar pelo menos um caminho de tamanho dois desse nodo para ele mesmo;
- Simetria
 - entre dois nodos, a quantidade de arestas nos dois sentidos é a mesma;
- Anti-simetria
 - entre dois nodos quaisquer, se há arestas nos dois sentidos, então os nodos são o mesmo;
 - entre dois nodos distintos, se há arestas, então são todas no mesmo sentido;
 - os únicos caminhos de tamanho dois de um nodo para ele mesmo, caso existam, são constituídos somente por endoarestas;
- Anti-simetria forte

- entre dois nodos quaisquer, se há arestas nos dois sentidos, então as arestas são a mesma (e, conseqüentemente, os nodos também são o mesmo);
- o único caminho de tamanho dois de um nodo para ele mesmo, se existe, é constituído por uma única endoaresta (em seqüência consigo mesma);
- Assimetria
 - entre dois nodos quaisquer, se há aresta num sentido, então não há aresta no sentido oposto;
- Conexividade
 - entre dois nodos distintos existe pelo menos uma aresta em pelo menos um sentido;
- Transitividade
 - para cada caminho de tamanho dois, existe pelo menos uma aresta com origem igual à do caminho e destino igual ao do caminho;
- Monotransitividade
 - para cada caminho de tamanho dois, existe pelo menos uma aresta com origem igual à do caminho e destino igual ao do caminho e há pelo menos tantas arestas com essa origem e esse destino quantos são os caminhos (de tamanho dois) com essa origem e com esse destino;
- Densidade
 - para cada aresta, existe pelo menos um caminho de tamanho dois com mesma origem dessa aresta e mesmo destino dessa aresta;
- Euclideanidade
 - se existem duas arestas com mesma origem, então existem pelo menos duas arestas entre seus destinos, uma em cada sentido.

8.3 Definições Algébricas — Multirrelações

Todas as propriedades de grafos propostas acima, são propostas algebricamente aqui para uma endomultirrelação $m : A \rightarrow A$. Novamente, quando houver mais de uma definição, elas são equivalentes.

- reflexividade

$$(\forall a \in A)(a\hat{m}a \neq 0)$$

$$(\forall a, b \in A)(a = b \longrightarrow a\hat{m}b \neq 0)$$
- monorreflexividade

$$(\forall a \in A)(a\hat{m}a \leq 1)$$

$$(\forall a, b \in A)(a = b \longrightarrow a\hat{m}b \leq 1)$$

- isorreflexividade
 $(\forall a \in A)(a\hat{m}a = 1)$
 $(\forall a, b \in A)(a = b \longrightarrow a\hat{m}b = 1)$
- correflexividade
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \longrightarrow a = b)$
- irreflexividade
 $(\forall a \in A)(a\hat{m}a = 0)$
 $(\forall a, b \in A)(a = b \longrightarrow a\hat{m}b = 0)$
- pseudo-simetria
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \longrightarrow b\hat{m}a \neq 0)$
- simetria
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b = b\hat{m}a)$
- anti-simetria
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \wedge b\hat{m}a \neq 0 \longrightarrow a = b)$
- anti-simetria forte
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \wedge b\hat{m}a \neq 0 \longrightarrow a = b \wedge a\hat{m}a = 1)$
- assimetria
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \longrightarrow b\hat{m}a = 0)$
- conexividade
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \vee b\hat{m}a \neq 0 \vee a = b)$
 $(\forall a, b \in A)(a \neq b \longrightarrow a\hat{m}b \neq 0 \vee b\hat{m}a \neq 0)$
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b = 0 \wedge b\hat{m}a = 0 \longrightarrow a = b)$
- transitividade
 $(\forall a, b, c \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \wedge b\hat{m}c \neq 0 \longrightarrow a\hat{m}c \neq 0)$
- monotransitividade
 $(\forall a, b_1, b_2, c \in A)$
 $(a\hat{m}b_1 \neq 0 \wedge b_1\hat{m}c \neq 0 \longrightarrow a\hat{m}c \neq 0 \wedge (a\hat{m}b_2 \neq 0 \wedge b_2\hat{m}c \neq 0 \longrightarrow b_2 = b_1))$
 $(\forall a, b, c \in A)$
 $(a\hat{m}b \neq 0 \wedge b\hat{m}c \neq 0 \rightarrow a\hat{m}c \neq 0 \wedge (\forall b_2 \in A)(a\hat{m}b_2 \neq 0 \wedge b_2\hat{m}c \neq 0 \rightarrow b_2 = b))$
- densidade
 $(\forall a, b \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \longrightarrow (\exists z \in A)(a\hat{m}z \neq 0 \wedge z\hat{m}b \neq 0))$
- Euclideanidade
 $(\forall a, b, c \in A)(a\hat{m}b \neq 0 \wedge a\hat{m}c \neq 0 \longrightarrow b\hat{m}c \neq 0)$

8.4 Dependência

Este capítulo propõe caracterizações de propriedades para grafos quando vistos como *endospans*. Todas essas propriedades são diretamente inspiradas nas propriedades de endorrelações apresentadas e propostas no capítulo 7.

Neste capítulo, também se apresenta a relação de dependência que se pode estabelecer entre as definições das propriedades, os cálculos e as construções de Teoria das Categorias. A Figura 8.13 (rotacionada) mostra essa relação. Nota-se que a Conexividade depende da Irreflexividade. Pode-se usar a Irreflexividade (def. 8.5) de grafos. Entretanto, usar a Irreflexividade (def. 7.4) de endorrelações é suficiente. Isso pode ser vantajoso em algumas situações. Por exemplo, na categoria \mathcal{Set} , para um conjunto finito A , a quantidade de grafos neste conjunto é infinita, mas a quantidade de endorrelações é finita. Na Figura, a seta tracejada indica que a Conexividade (def. 8.12) pode depender da Irreflexividade (def. 7.4) de endorrelações, que aparece na relação de dependência da Figura 7.13.

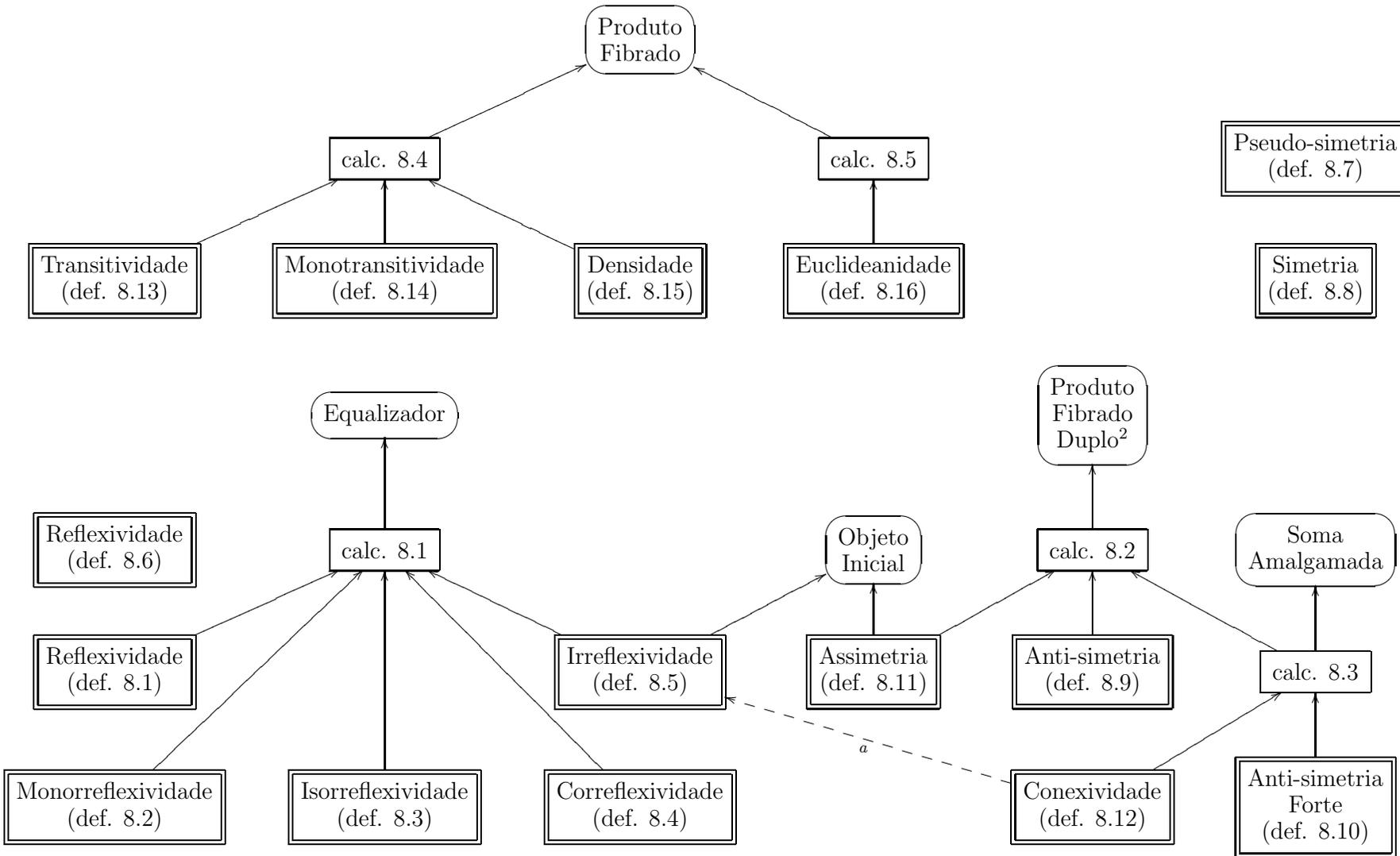


Figura 8.13: Relação de Dependência.

^aVer explicação em 8.4.

9 COMPOSIÇÃO DE SPANS

Neste capítulo, apresenta-se o *span* identidade de cada objeto de uma categoria, que é único a menos de equivalência de *spans*, e a operação de composição de *spans*¹ que, também a menos de equivalência de *spans*, é uma operação binária parcial entre *spans* em uma categoria. Também são apresentadas e provadas algumas propriedades dessa composição, como, por exemplo, associatividade e existência de identidade.

Embora não faça parte dos objetivos deste trabalho, apresenta-se também o produto binário de *spans*, pois prova-se uma propriedade que envolve a composição de *spans* e o produto binário de *spans*. Uma aplicação para essa propriedade é apresentada no capítulo 12.

9.1 Identidade

Definição 9.1 (*Span* Identidade) Seja A um objeto qualquer, o *span* identidade de A é $\langle id_A, A, id_A \rangle : A \rightarrow A$.

O *span* identidade de A pode ser denotado também por id_A . Assim, $id_A = \langle id_A, A, id_A \rangle : A \rightarrow A$. Neste trabalho, usa-se id_A tanto para morfismos, quanto para *spans*, sem necessariamente se indicar se se trata de morfismo ou de *span*. Geralmente isso pode ser entendido pelo contexto. Quando não pode, é indicado explicitamente.

O *span* identidade é único a menos de equivalência de *spans*. Ou seja, qualquer *span* equivalente a um *span* identidade do objeto A também pode ser considerado um *span* identidade do objeto A .

Exemplo 9.2 (*Span* Identidade, a menos de equivalência) O exemplo 3.11 mostra a categoria $\mathcal{X}or$ e todos os *spans* nessa categoria. Tanto o *span* $\langle 0, 0 \rangle$ quanto o *span* $\langle 1, 1 \rangle$ são identidade do objeto $\mathcal{X}or$, pois o morfismo 0 é identidade desse objeto e ambos *spans* são equivalentes via morfismo 1.

9.2 Composição

Definição 9.3 (Composição de *Spans*) (Ver Figura 9.1) Sejam dois *spans* $d = \langle d_0, D, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ e $e = \langle e_0, E, e_1 \rangle : B \rightarrow C$. A composição de d com e é $e \circ d = \langle d_0 \circ p_0, P, e_1 \circ p_1 \rangle : A \rightarrow C$, onde P , p_0 e p_1 fazem parte do produto fibrado dos morfismos d_1 e e_0 e são tais que $d_1 \circ p_0 = e_0 \circ p_1$.

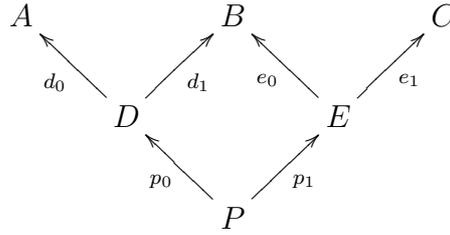


Figura 9.1: Composição de *Spans*.

A composição de *spans* somente é aplicada a dois *spans* cujo destino do primeiro coincida com a origem do segundo.

O *span* resultante da composição pode ser diferente, caso se escolha um produto fibrado diferente. Entretanto, como os produtos fibrados são isomorfos, os *spans* resultantes são equivalentes. Por esse motivo, a composição de dois *spans* é única a menos de equivalência de *spans* e pode, portanto, ser considerada uma operação binária (parcial) entre *spans*.

Exemplo 9.4 (Composição de *spans*) A Figura 9.2 apresenta uma categoria e a Figura 9.3 apresenta todos os oito *spans* nessa categoria. Por simplicidade, um *span* $\langle f, g \rangle$ nessa Figura é representado simplesmente por fg . Nesse exemplo, qualquer *span* é equivalente somente a si próprio. A Figura 9.3 também apresenta a táboa de composições de todos esses *spans*. Nessa táboa, um hífen (-) significa que a composição não é definida pois os *spans* não são componíveis (a origem do segundo não coincide com o destino do primeiro) enquanto um dois-pontos (:) significa que, embora os *spans* sejam componíveis, sua composição não é definida pois não existe o produto fibrado necessário — nesses quatro casos, não existe o produto fibrado do morfismo z consigo mesmo na categoria da Figura 9.2.

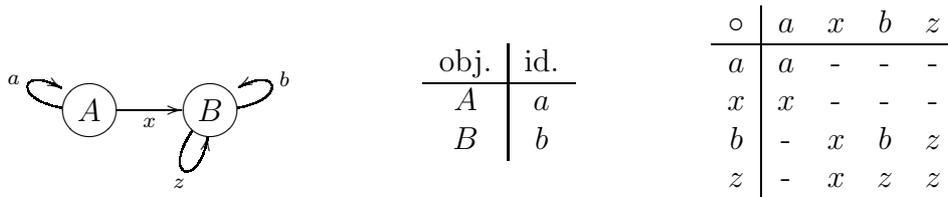
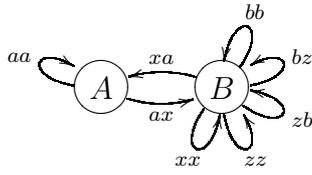


Figura 9.2: Categoria.

Exemplo 9.5 (Composição de *spans* na categoria $\mathcal{X}or$) O exemplo 3.11 apresenta a categoria $\mathcal{X}or$ e todos os *spans* nessa categoria. A Figura 9.4 (esquerda) apresenta a táboa de composições de todos esses *spans*. Como, nessa categoria, o *span* $\langle 0, 0 \rangle$ é equivalente ao *span* $\langle 1, 1 \rangle$, na táboa, qualquer ocorrência de um pode ser substituída pelo outro. O mesmo vale para os *spans* equivalentes $\langle 0, 1 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$. Observa-se, inclusive, que linhas de *spans* equivalentes são iguais a menos de equivalência de *spans*. O mesmo vale para colunas. Portanto, uma táboa de composições de *spans* pode ser representada usando-se apenas um *span* representativo de cada classe de equivalência, como feito na mesma Figura (direita).

¹Como em (BÉNABOU, 1967).



\circ	aa	ax	xa	xx	bb	bz	zb	zz
aa	aa	-	xa	-	-	-	-	-
ax	ax	-	xx	-	-	-	-	-
xa	-	aa	-	xa	xa	xa	xa	xa
xx	-	ax	-	xx	xx	xx	xx	xx
bb	-	ax	-	xx	bb	bz	zb	zz
bz	-	ax	-	xx	bz	bz	zz	zz
zb	-	ax	-	xx	zb	:	zb	:
zz	-	ax	-	xx	zz	:	zz	:

Figura 9.3: Todos os *spans* na categoria acima e a táboa de composições de *spans*.

\circ	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$

\circ	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$

Figura 9.4: Táboa de composições dos *spans* da categoria $\mathcal{X}or$.

9.3 Propriedades da Composição de *Spans*

9.3.1 Não Fechada

A composição de *spans* não está necessariamente definida para quaisquer dois *spans* cujo destino do primeiro coincida com a origem do segundo, pois depende da existência de produto fibrado.

Exemplo 9.6 (Composição de *spans* não é fechada) O exemplo 9.4 mostra uma categoria e todos os *spans* nessa categoria bem como a táboa de composições de *spans*, que não é totalmente definida para todos os *spans* componíveis e, portanto, a operação não é fechada.

9.3.2 Associativa

Sejam três *spans* $e = \langle e_0, E, e_1 \rangle : A \rightarrow B$, $f = \langle f_0, F, f_1 \rangle : B \rightarrow C$ e $g = \langle g_0, G, g_1 \rangle : C \rightarrow D$. A composição de *spans*, se existe, é associativa (a menos de equivalência de *spans*), ou seja, $(g \circ f) \circ e = g \circ (f \circ e)$ e pode, portanto, ser representada sem a necessidade de parênteses: $g \circ f \circ e$. Isso porque o produto fibrado é associativo, a menos de isomorfismo.

PROVA: PRODUTO FIBRADO É ASSOCIATIVO A MENOS DE ISOMORFISMO.
Sejam, como na Figura 9.5,

- (i) K, k_0 e k_1 o produto fibrado de e_1 e f_0 tais que $e_1 \circ k_0 = f_0 \circ k_1$;
- (ii) L, l_0 e l_1 o produto fibrado de f_1 e g_0 tais que $f_1 \circ l_0 = g_0 \circ l_1$;
- (iii) M, m_0 e m_1 o produto fibrado de $f_1 \circ k_1$ e g_0 tais que $(f_1 \circ k_1) \circ m_0 = g_0 \circ m_1$;
- (iv) N, n_0 e n_1 o produto fibrado de e_1 e $f_0 \circ l_0$ tais que $e_1 \circ n_0 = (f_0 \circ l_0) \circ n_1$.

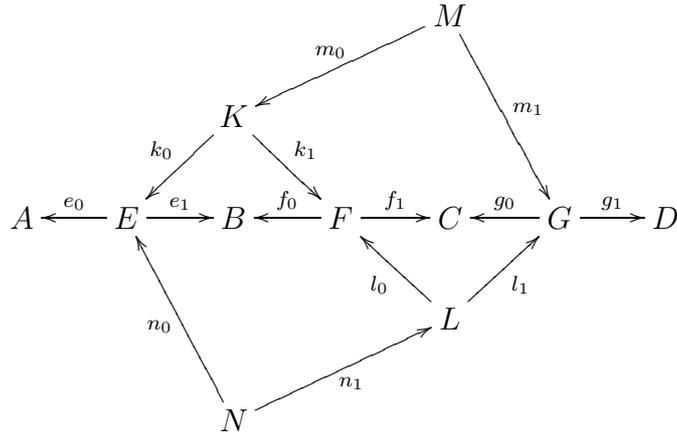


Figura 9.5: Associatividade do produto fibrado e da composição de *spans*.

Mostra-se² um isomorfismo $x: N \rightarrow M$ tal que $k_0 \circ m_0 \circ x = n_0$ e $m_1 \circ x = l_1 \circ n_1$. A demonstração é feita a seguir. Nas tabelas, à direita de cada implicação, há uma breve justificativa.

A partir de (iv),

$e_1 \circ n_0 = f_0 \circ l_0 \circ n_1 \implies$	induzido por (i)
$(\exists! r: N \rightarrow K)$ $(k_0 \circ r = n_0 \wedge k_1 \circ r = l_0 \circ n_1)$	Fato 1.

De forma similar, a partir de (iii), encontra-se

$(\exists! s: M \rightarrow L)$ $(l_0 \circ s = k_1 \circ m_0 \wedge l_1 \circ s = m_1)$	Fato 2.
---	---------

A partir de (ii),

$f_1 \circ l_0 = g_0 \circ l_1 \implies$	compondo n_1
$f_1 \circ l_0 \circ n_1 = g_0 \circ l_1 \circ n_1 \implies$	$k_1 \circ r = l_0 \circ n_1$ (do fato 1)
$f_1 \circ k_1 \circ r = g_0 \circ l_1 \circ n_1 \implies$	induzido por (iii)
$(\exists! x: N \rightarrow M)$ $(m_0 \circ x = r \wedge m_1 \circ x = l_1 \circ n_1)$	Fato 3.

De forma similar, a partir de (i), encontra-se

$(\exists! y: M \rightarrow N)$ $(n_0 \circ y = k_0 \circ m_0 \wedge n_1 \circ y = s)$	Fato 4.
---	---------

Agora, mostra-se que x é isomorfismo. Considera-se,

$k_0 \circ m_0 \circ x \circ y = k_0 \circ m_0 \circ x \circ y \implies$	$m_0 \circ x = r$ (do fato 3)
$k_0 \circ m_0 \circ x \circ y = k_0 \circ r \circ y \implies$	$k_0 \circ r = n_0$ (do fato 1)
$k_0 \circ m_0 \circ x \circ y = n_0 \circ y \implies$	$n_0 \circ y = k_0 \circ m_0$ (do fato 4)
$k_0 \circ m_0 \circ x \circ y = k_0 \circ m_0$	Fato 5.

e,

$k_1 \circ m_0 \circ x \circ y = k_1 \circ m_0 \circ x \circ y \implies$	$m_0 \circ x = r$ (do fato 3)
$k_1 \circ m_0 \circ x \circ y = k_1 \circ r \circ y \implies$	$k_1 \circ r = l_0 \circ n_1$ (do fato 1)
$k_1 \circ m_0 \circ x \circ y = l_0 \circ n_1 \circ y \implies$	$n_1 \circ y = s$ (do fato 4)
$k_1 \circ m_0 \circ x \circ y = l_0 \circ s \implies$	$l_0 \circ s = k_1 \circ m_0$ (do fato 2)
$k_1 \circ m_0 \circ x \circ y = k_1 \circ m_0$	Fato 6.

²Inspirando-se na prova que a composição binária de arestas de grafos é associativa a menos de isomorfismo presente em (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004) que, por sua vez, é inspirada na prova que composição de morfismos parciais é associativa a menos de isomorfismo presente em (ROGGIA, 2001).

Dos fatos 5 e 6,

$k_0 \circ m_0 \circ x \circ y = k_0 \circ m_0 \wedge k_1 \circ m_0 \circ x \circ y = k_1 \circ m_0 \implies$	$\langle k_0, k_1 \rangle$ é par mono
$m_0 \circ x \circ y = m_0$	Fato 7.

Considera-se,

$m_1 \circ x \circ y = m_1 \circ x \circ y \implies$	$m_1 \circ x = l_1 \circ n_1$ (do fato 3)
$m_1 \circ x \circ y = l_1 \circ n_1 \circ y \implies$	$n_1 \circ y = s$ (do fato 4)
$m_1 \circ x \circ y = l_1 \circ s \implies$	$l_1 \circ s = m_1$ (do fato 2)
$m_1 \circ x \circ y = m_1$	Fato 8.

Dos fatos 7 e 8,

$m_0 \circ x \circ y = m_0 \wedge m_1 \circ x \circ y = m_1 \implies$	$\langle m_0, m_1 \rangle$ é par mono
$x \circ y = id_M$	Fato 9.

De forma similar, encontra-se

$y \circ x = id_N$	Fato 10.
--------------------	----------

Pelos fatos 9 e 10, como x é retração e x é seção, portanto x é isomorfismo.

Finalmente,

$k_0 \circ m_0 \circ x = k_0 \circ m_0 \circ x$ e	$m_0 \circ x = r$ (do fato 3)
$m_1 \circ x = m_1 \circ x \implies$	$m_1 \circ x = l_1 \circ n_1$ (do fato 3)
$k_0 \circ m_0 \circ x = k_0 \circ r$ e	$k_0 \circ r = n_0$ (do fato 1)
$m_1 \circ x = l_1 \circ n_1 \implies$	
$k_0 \circ m_0 \circ x = n_0$ e	
$m_1 \circ x = l_1 \circ n_1$	

E, portanto, o produto fibrado é associativo a menos de isomorfismo. □

Com isso, é fácil verificar que os *spans* são equivalentes via esse isomorfismo x .

9.3.3 Identidade — Elemento Neutro

Os *spans* identidade atuam similarmente a elementos neutros na composição de *spans* da seguinte forma: seja $\langle e_0, E, e_1 \rangle : A \rightarrow B$ um *span*, $\langle e_0, E, e_1 \rangle \circ \langle id_A, A, id_A \rangle = \langle e_0, E, e_1 \rangle$ e $\langle e_0, E, e_1 \rangle = \langle id_B, B, id_B \rangle \circ \langle e_0, E, e_1 \rangle$, ambas igualdades a menos de equivalência de *spans*.

Apresenta-se, aqui, a prova que $\langle e_0, E, e_1 \rangle \circ \langle id_A, A, id_A \rangle = \langle e_0, E, e_1 \rangle$.

PROVA. Sejam, como na Figura 9.6, P , p_0 e p_1 o produto fibrado de id_A e e_0 tais que $id_A \circ p_0 = e_0 \circ p_1$. Como produto fibrado transfere isomorfismo, pode-se considerar $P = E$, $p_1 = id_E$ e $p_0 = e_0$. E o *span* resultante da composição é $\langle id_A \circ e_0, E, e_1 \circ id_E \rangle = \langle e_0, E, e_1 \rangle$. □

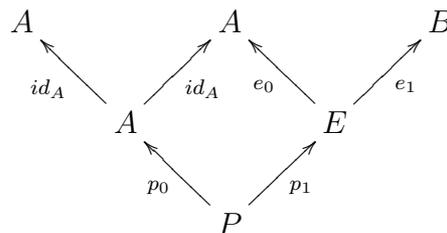


Figura 9.6: Identidade na composição de *spans*.

A prova que $\langle e_0, E, e_1 \rangle = \langle id_B, B, id_B \rangle \circ \langle e_0, E, e_1 \rangle$ é similar.

Observa-se que não existe um elemento neutro para todas os *spans*, mas para cada *span* existe um “elemento neutro” à esquerda e um à direita.

9.3.4 Não Idempotente

No geral, a composição de *spans* não é idempotente, ou seja, dado um endospan $x = \langle x_0, x_1 \rangle : A \rightarrow A$, $x \circ x \neq x$.

Exemplo 9.7 (Composição de *spans* não é idempotente) A Figura 9.7 (esquerda) apresenta um endospan $\langle x, x \rangle : A \rightarrow A$ em *Set*. A mesma Figura (direita) apresenta a composição $\langle x, x \rangle \circ \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle$ que não é equivalente a $\langle x, x \rangle$.

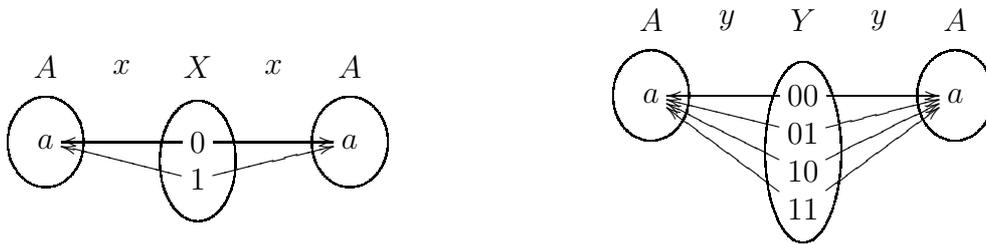


Figura 9.7: Composição de *spans* não é idempotente.

9.4 Autocomposição de *Spans*

O fato da composição de *spans* ser associativa e não ser idempotente, motiva o uso da notação de potência para a composição de um endospan consigo mesmo: $x^2 = x \circ x$, $x^3 = x \circ x \circ x$ e assim sucesivamente.

Definição 9.8 (Autocomposição de *Spans*) Sejam um endospan $\langle x_0, x_1 \rangle : A \rightarrow A$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$\langle x_0, x_1 \rangle^n = \begin{cases} \langle id_A, id_A \rangle & \text{se } n = 0 \\ \langle x_0, x_1 \rangle \circ \langle x_0, x_1 \rangle^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

9.5 Produto de *Spans*

Embora não faça parte dos objetivos deste trabalho, apresenta-se aqui o produto binário de *spans*, pois prova-se uma propriedade deste produto em conjunto com a composição de *spans*. Essa propriedade é aplicada a LTS no capítulo 12.

Definição 9.9 (Produto Binário de *Spans*) (Ver Figura 9.8) Sejam dois *spans* quaisquer $d = \langle d_0, D, d_1 \rangle : A \rightarrow B$ e $p = \langle p_0, P, p_1 \rangle : M \rightarrow N$. O produto binário dos *spans* d e p é $d \times p = \langle d_0 \times p_0, D \times P, d_1 \times p_1 \rangle : A \times M \rightarrow B \times N$ calculado com os respectivos produtos dos objetos suporte, origem e destino e com os respectivos produtos de morfismo das projeções.

Assim como a composição de *spans*, o produto binário de *spans* é uma operação a menos de equivalência de *spans*.

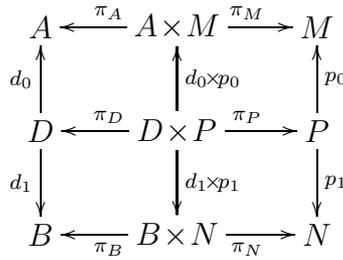


Figura 9.8: Produto binário de *spans*.

9.6 Propriedades Envolvendo a Composição de *Spans* e o Produto de *Spans*

9.6.1 Não Distributivo

No geral, o produto de *spans* não se distribui sobre a composição de *spans*, ou seja, dados *spans* $d : A \rightarrow B$, $e : X \rightarrow Y$ e $f : Y \rightarrow Z$, $d \times (f \circ e) \neq (d \times f) \circ (d \times e)$ e $(f \circ e) \times d \neq (f \times d) \circ (e \times d)$.

Exemplo 9.10 (Produto não se distribui sobre a composição) A Figura 9.9 apresenta os dois *spans* em \mathcal{Set} $r = \langle r_0, R, r_1 \rangle : A \rightarrow A$ e $s = \langle s_0, S, s_1 \rangle : A \rightarrow A$. A Figura 9.10 apresenta $r \times (s \circ r) = \langle x_0, X, x_1 \rangle : A \times A \rightarrow A \times A$ (esquerda) e $(r \times s) \circ (r \times r) = \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle : A \times A \rightarrow A \times A$ (direita), que não são equivalentes.



Figura 9.9: *Spans* em \mathcal{Set} .



Figura 9.10: Não distributividade.

Verificar se a composição de *spans* se distribui sobre o produto de *spans* não é necessário pois, para *spans* x , y e z , no geral, em um dos lados da igualdade $x \circ (y \times z) = (x \circ y) \times (x \circ z)$ ou da igualdade $(y \times z) \circ x = (y \circ x) \times (z \circ x)$, os *spans* não são componíveis.

9.6.2 Lei do Intercâmbio

Sejam quatro *spans* $d = \langle d_0, D, d_1 \rangle : A \rightarrow B$, $e = \langle e_0, E, e_1 \rangle : B \rightarrow C$, $v = \langle v_0, V, v_1 \rangle : X \rightarrow Y$ e $w = \langle w_0, W, w_1 \rangle : Y \rightarrow Z$. A lei do intercâmbio entre

composição de *spans* e produto de *spans* vale, a menos de equivalência de *spans*, ou seja, $(e \circ d) \times (w \circ v) = (e \times w) \circ (d \times v)$.

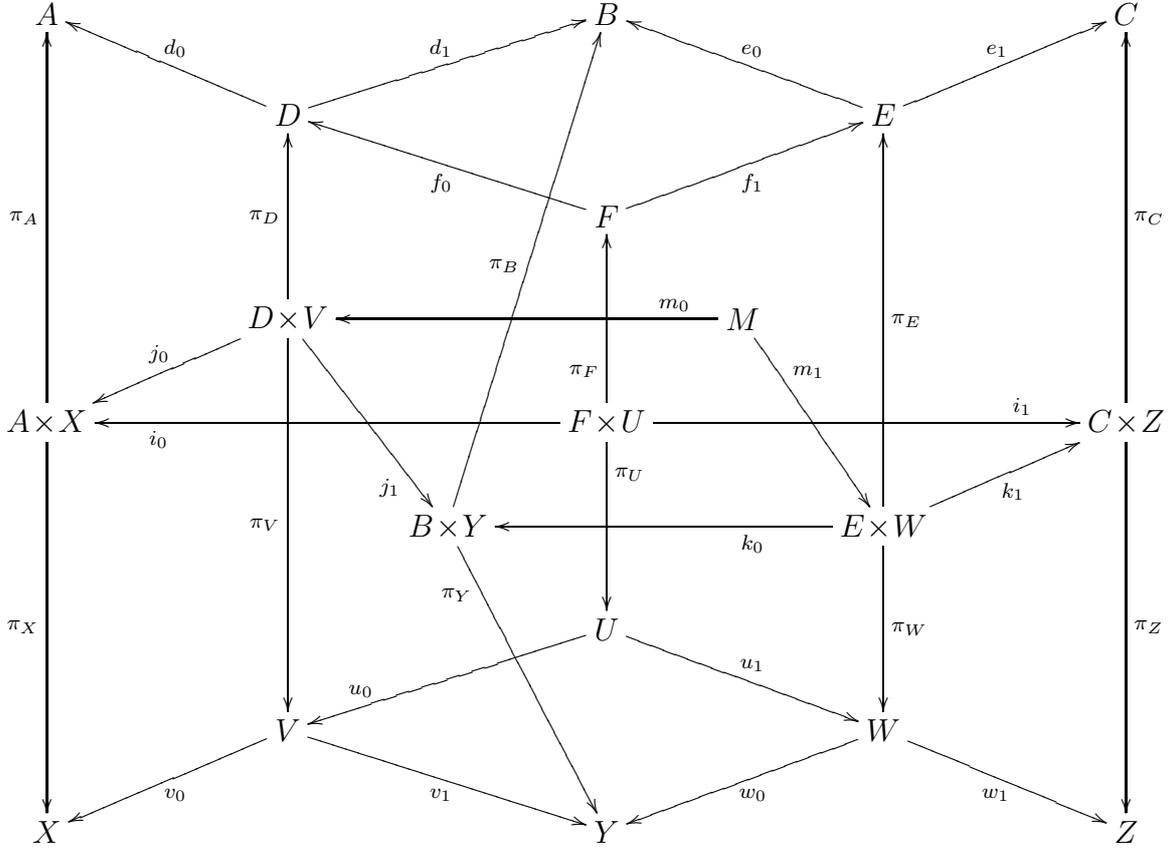


Figura 9.11: Lei do intercâmbio para produto fibrado e produto de morfismos e para composição de *spans* e produto de *spans*.

PROVA: LEI DO INTERCÂMBIO ENTRE COMPOSIÇÃO DE SPANS E PRODUTO BINÁRIO DE SPANS.

Sejam, como na Figura 9.11,

- (i) $A \times X$, π_A e π_X são produto de A e X ;
- (ii) $C \times Z$, π_C e π_Z são produto de C e Z ;
- (iii) F , f_0 e f_1 são produto fibrado de d_1 e e_0 , tais que $d_1 \circ f_0 = e_0 \circ f_1$;
- (iv) U , u_0 e u_1 são produto fibrado de v_1 e w_0 , tais que $v_1 \circ u_0 = w_0 \circ u_1$;
- (v) $F \times U$, π_F e π_U são produto de F e U ;
- (vi) i_0 é produto de $d_0 \circ f_0$ e $v_0 \circ u_0$ e é tal que $\pi_A \circ i_0 = d_0 \circ f_0 \circ \pi_F$ e $\pi_X \circ i_0 = v_0 \circ u_0 \circ \pi_U$;
- (vii) i_1 é produto de $e_1 \circ f_1$ e $w_1 \circ u_1$ e é tal que $\pi_C \circ i_1 = e_1 \circ f_1 \circ \pi_F$ e $\pi_Z \circ i_1 = w_1 \circ u_1 \circ \pi_U$;
- (viii) $D \times V$, π_D e π_V são produto de D e V ;
- (ix) $E \times W$, π_E e π_W são produto de E e W ;
- (x) $B \times Y$, π_B e π_Y são produto de B e Y ;

- (xi) j_0 é produto de d_0 e v_0 e é tal que $\pi_A \circ j_0 = d_0 \circ \pi_D$ e $\pi_X \circ j_0 = v_0 \circ \pi_V$;
- (xii) j_1 é produto de d_1 e v_1 e é tal que $\pi_B \circ j_1 = d_1 \circ \pi_D$ e $\pi_Y \circ j_1 = v_1 \circ \pi_V$;
- (xiii) k_0 é produto de e_0 e w_0 e é tal que $\pi_B \circ k_0 = e_0 \circ \pi_E$ e $\pi_Y \circ k_0 = w_0 \circ \pi_W$;
- (xiv) k_1 é produto de e_1 e w_1 e é tal que $\pi_C \circ k_1 = e_1 \circ \pi_E$ e $\pi_Z \circ k_1 = w_1 \circ \pi_W$;
- (xv) M , m_0 e m_1 são produto fibrado de j_1 e k_0 , tais que $j_1 \circ m_0 = k_0 \circ m_1$.

Mostra-se um isomorfismo $\eta: M \rightarrow F \times U$ tal que $i_0 \circ \eta = j_0 \circ m_0$ e $i_1 \circ \eta = k_1 \circ m_1$. A demonstração é feita a seguir. Nas tabelas, à direita de cada implicação, há uma breve justificativa.

Considera-se,

$f_0 \circ \pi_F$ e $u_0 \circ \pi_U$	\implies	induzido por (viii)
$(\exists! \alpha: F \times U \rightarrow D \times X)$ $(\pi_D \circ \alpha = f_0 \circ \pi_F \wedge \pi_V \circ \alpha = u_0 \circ \pi_U)$		Fato 1.

De forma similar, encontra-se

$(\exists! \beta: F \times U \rightarrow E \times W)$ $(\pi_E \circ \beta = f_1 \circ \pi_F \wedge \pi_W \circ \beta = u_1 \circ \pi_U)$		Fato 2.
$(\exists! \gamma: F \times U \rightarrow B \times Y)$ $(\pi_B \circ \gamma = d_1 \circ f_0 \circ \pi_F \wedge \pi_Y \circ \gamma = v_1 \circ u_0 \circ \pi_U)$		Fato 3.

Considera-se,

$\pi_B \circ j_1 \circ \alpha = \pi_B \circ j_1 \circ \alpha$ e $\pi_Y \circ j_1 \circ \alpha = \pi_Y \circ j_1 \circ \alpha$	\implies	$\pi_B \circ j_1 = d_1 \circ \pi_D$ (de (xii)) $\pi_Y \circ j_1 = v_1 \circ \pi_V$ (de (xii))
$\pi_B \circ j_1 \circ \alpha = d_1 \circ \pi_D \circ \alpha$ e $\pi_Y \circ j_1 \circ \alpha = v_1 \circ \pi_V \circ \alpha$	\implies	$\pi_D \circ \alpha = f_0 \circ \pi_F$ (do fato 1) $\pi_V \circ \alpha = u_0 \circ \pi_U$ (do fato 1)
$\pi_B \circ j_1 \circ \alpha = d_1 \circ f_0 \circ \pi_F$ e $\pi_Y \circ j_1 \circ \alpha = v_1 \circ u_0 \circ \pi_U$	\implies	$\pi_B \circ \gamma = d_1 \circ f_0 \circ \pi_F$ (do fato 3) $\pi_Y \circ \gamma = v_1 \circ u_0 \circ \pi_U$ (do fato 3)
$\pi_B \circ j_1 \circ \alpha = \pi_B \circ \gamma$ e $\pi_Y \circ j_1 \circ \alpha = \pi_Y \circ \gamma$	\implies	$\langle \pi_B, \pi_Y \rangle$ é par mono
$j_1 \circ \alpha = \gamma$		Fato 4.

De forma similar, encontra-se

$k_0 \circ \beta = \gamma$	Fato 5.
----------------------------	---------

Dos fatos 4 e 5,

$j_1 \circ \alpha = k_0 \circ \beta$	\implies	induzido por (xv)
$(\exists! \delta: F \times U \rightarrow M)$ $(m_0 \circ \delta = \alpha \wedge m_1 \circ \delta = \beta)$		Fato 6.

Considera-se,

$d_1 \circ \pi_D \circ m_0 = d_1 \circ \pi_D \circ m_0$	\implies	$\pi_B \circ j_1 = d_1 \circ \pi_D$ (de (xii))
$d_1 \circ \pi_D \circ m_0 = \pi_B \circ j_1 \circ m_0$	\implies	$j_1 \circ m_0 = k_0 \circ m_1$ (de (xv))
$d_1 \circ \pi_D \circ m_0 = \pi_B \circ k_0 \circ m_1$	\implies	$\pi_B \circ k_0 = e_0 \circ \pi_E$ (de (xiii))
$d_1 \circ \pi_D \circ m_0 = e_0 \circ \pi_E \circ m_1$	\implies	induzido por (iii)
$(\exists! \epsilon: M \rightarrow F)$ $(f_0 \circ \epsilon = \pi_D \circ m_0 \wedge f_1 \circ \epsilon = \pi_E \circ m_1)$		Fato 7.

De forma similar, encontra-se

$(\exists! \zeta: M \rightarrow U)$ $(u_0 \circ \zeta = \pi_V \circ m_0 \wedge u_1 \circ \zeta = \pi_W \circ m_1)$		Fato 8.
---	--	---------

Considera-se,

ϵ e ζ	\implies	induzido por (v)
$(\exists! \eta: M \rightarrow F \times U)$ $(\pi_F \circ \eta = \epsilon \wedge \pi_U \circ \eta = \zeta)$		Fato 9.

Agora, mostra-se que η é isomorfismo. Considera-se,

$f_0 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = f_0 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta$ e $f_1 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = f_1 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta$	\implies	$\pi_F \circ \eta = \epsilon$ (do fato 9)
$f_0 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = f_0 \circ \epsilon \circ \delta$ e $f_1 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = f_1 \circ \epsilon \circ \delta$	\implies	$f_0 \circ \epsilon = \pi_D \circ m_0$ (do fato 7) $f_1 \circ \epsilon = \pi_E \circ m_1$ (do fato 7)
$f_0 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = \pi_D \circ m_0 \circ \delta$ e $f_1 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = \pi_E \circ m_1 \circ \delta$	\implies	$m_0 \circ \delta = \alpha$ (do fato 6) $m_1 \circ \delta = \beta$ (do fato 6)
$f_0 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = \pi_D \circ \alpha$ e $f_1 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = \pi_E \circ \beta$	\implies	$\pi_D \circ \alpha = f_0 \circ \pi_F$ (do fato 1) $\pi_E \circ \beta = f_1 \circ \pi_F$ (do fato 2)
$f_0 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = f_0 \circ \pi_F$ e $f_1 \circ \pi_F \circ \eta \circ \delta = f_1 \circ \pi_F$	\implies	$\langle f_0, f_1 \rangle$ é par mono
$\pi_F \circ \eta \circ \delta = \pi_F$		Fato 10.

De forma similar,

$\pi_U \circ \eta \circ \delta = \pi_U$	Fato 11.
---	----------

Dos fatos 10 e 11,

$\pi_F \circ \eta \circ \delta = \pi_F$ e $\pi_U \circ \eta \circ \delta = \pi_U$	\implies	$\langle \pi_F, \pi_U \rangle$ é par mono
$\eta \circ \delta = id_{F \times U}$		Fato 12.

Considera-se,

$\pi_D \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = \pi_D \circ m_0 \circ \delta \circ \eta$ e $\pi_V \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = \pi_V \circ m_0 \circ \delta \circ \eta$	\implies	$m_0 \circ \delta = \alpha$ (do fato 6)
$\pi_D \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = \pi_D \circ \alpha \circ \eta$ e $\pi_V \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = \pi_V \circ \alpha \circ \eta$	\implies	$\pi_D \circ \alpha = f_0 \circ \pi_F$ (do fato 1) $\pi_V \circ \alpha = u_0 \circ \pi_U$ (do fato 1)
$\pi_D \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = f_0 \circ \pi_F \circ \eta$ e $\pi_V \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = u_0 \circ \pi_U \circ \eta$	\implies	$\pi_F \circ \eta = \epsilon$ (do fato 9) $\pi_U \circ \eta = \zeta$ (do fato 9)
$\pi_D \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = f_0 \circ \epsilon$ e $\pi_V \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = u_0 \circ \zeta$	\implies	$f_0 \circ \epsilon = \pi_D \circ m_0$ (do fato 7) $u_0 \circ \zeta = \pi_V \circ m_0$ (do fato 8)
$\pi_D \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = \pi_D \circ m_0$ e $\pi_V \circ m_0 \circ \delta \circ \eta = \pi_V \circ m_0$	\implies	$\langle \pi_D, \pi_V \rangle$ é par mono
$m_0 \circ \delta \circ \eta = m_0$		Fato 13.

De forma similar, encontra-se

$m_1 \circ \delta \circ \eta = m_1$	Fato 14.
-------------------------------------	----------

Dos fatos 13 e 14,

$m_0 \circ \delta \circ \eta = m_0$ e $m_1 \circ \delta \circ \eta = m_1$	\implies	$\langle m_0, m_1 \rangle$ é par mono
$\delta \circ \eta = id_M$		Fato 15.

Pelos fatos 12 e 15, como η é seção e η é retração, portanto η é isomorfismo.

Finalmente,

$\pi_A \circ i_0 \circ \eta = \pi_A \circ i_0 \circ \eta$ e	$\pi_A \circ i_0 = d_0 \circ f_0 \circ \pi_F$ (de (vi))
$\pi_X \circ i_0 \circ \eta = \pi_X \circ i_0 \circ \eta \implies$	$\pi_X \circ i_0 = v_0 \circ u_0 \circ \pi_U$ (de (vi))
$\pi_A \circ i_0 \circ \eta = d_0 \circ f_0 \circ \pi_F \circ \eta$ e	$\pi_F \circ \eta = \epsilon$ (do fato 9)
$\pi_X \circ i_0 \circ \eta = v_0 \circ u_0 \circ \pi_U \circ \eta \implies$	$\pi_U \circ \eta = \zeta$ (do fato 9)
$\pi_A \circ i_0 \circ \eta = d_0 \circ f_0 \circ \epsilon$ e	$f_0 \circ \epsilon = \pi_D \circ m_0$ (do fato 7)
$\pi_X \circ i_0 \circ \eta = v_0 \circ u_0 \circ \zeta \implies$	$u_0 \circ \zeta = \pi_V \circ m_0$ (do fato 8)
$\pi_A \circ i_0 \circ \eta = d_0 \circ \pi_D \circ m_0$ e	$\pi_A \circ j_0 = d_0 \circ \pi_D$ (de (xi))
$\pi_X \circ i_0 \circ \eta = v_0 \circ \pi_V \circ m_0 \implies$	$\pi_X \circ j_0 = v_0 \circ \pi_V$ (de (xi))
$\pi_A \circ i_0 \circ \eta = \pi_A \circ j_0 \circ m_0$ e	$\langle \pi_A, \pi_X \rangle$ é par mono
$\pi_X \circ i_0 \circ \eta = \pi_X \circ j_0 \circ m_0 \implies$	
$i_0 \circ \eta = j_0 \circ m_0$	Fato 16.

De forma similar,

$i_1 \circ \eta = k_1 \circ m_1$	Fato 17.
----------------------------------	----------

Com os fatos 16 e 17, vê-se que os resultados são isomorfos e, portanto, os *spans* são equivalentes.

□

10 COMPOSIÇÃO DE MULTIRRELAÇÕES COMO COMPOSIÇÃO DE SPANS

10.1 A Composição de *Spans* expressa a Composição de Multirrelações

Sejam $\langle m_0, M, m_1 \rangle : A \rightarrow B$ e $\langle n_0, N, n_1 \rangle : B \rightarrow C$ dois *spans* em *Set* que expressam multirrelações binárias componíveis $m : A \rightarrow B$ e $n : B \rightarrow C$. O *span* composto $\langle n_0, N, n_1 \rangle \circ \langle m_0, M, m_1 \rangle : A \rightarrow C$ expressa justamente a multirrelação composta $n \circ m : A \rightarrow C$.

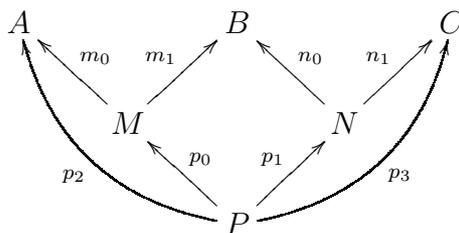


Figura 10.1: Composição de *spans* que expressam multirrelações.

PROVA: COMPOSIÇÃO DE SPANS EXPRESSA COMPOSIÇÃO DE MULTIRRELAÇÕES. Sejam, como na figura 10.1,

- (i) $\langle m_0, M, m_1 \rangle : A \rightarrow B$ expressa a multirrelação $m : A \rightarrow B$, ou seja, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, $a \widehat{m} b = \#\{x \in M \mid m_0(x) = a \wedge m_1(x) = b\}$;
- (ii) $\langle n_0, N, n_1 \rangle : B \rightarrow C$ expressa a multirrelação $n : B \rightarrow C$, ou seja, para quaisquer $b \in B$ e $c \in C$, $b \widehat{n} c = \#\{y \in N \mid n_0(y) = b \wedge n_1(y) = c\}$;
- (iii) $\langle p_2, P, p_3 \rangle : A \rightarrow C = \langle n_0, N, n_1 \rangle \circ \langle m_0, M, m_1 \rangle : A \rightarrow C$ onde $p_2 = m_0 \circ p_0$ e $p_3 = n_1 \circ p_1$, sendo P , p_0 e p_1 o P.F. de m_1 e n_0 tais que $m_1 \circ p_0 = n_0 \circ p_1$.

Para se mostrar que o *span* $\langle p_2, P, p_3 \rangle : A \rightarrow C$ realmente expressa a multirrelação $n \circ m : A \rightarrow C$, mostra-se que, para quaisquer $a \in A$ e $c \in C$, a cardinalidade do conjunto $P_{a,c} = \{z \in P \mid p_2(z) = a \wedge p_3(z) = c\}$ é igual a $a \widehat{n \circ m} c$. Como, em *Set*, o P.F. pode ser definido por um conjunto de pares¹, cada $z \in P$ é um par $z = \langle x, y \rangle$ e, portanto, tem-se

$$P_{a,c} = \{\langle x, y \rangle \in P \mid p_2(\langle x, y \rangle) = a \wedge p_3(\langle x, y \rangle) = c\}$$

¹Em *Set*, o P.F. de duas funções $f : R \rightarrow T$ e $g : S \rightarrow T$ é dados por Q , $q_0 : Q \rightarrow R$ e $q_1 : Q \rightarrow S$, onde $Q = \{\langle i, j \rangle \in R \times S \mid f(i) = g(j)\}$ e, para qualquer $\langle i, j \rangle \in Q$, $q_0(\langle i, j \rangle) = i$ e $q_1(\langle i, j \rangle) = j$.

e, devido a todos os fatos presentes em (iii), tem-se

$$P_{a,c} = \{\langle x, y \rangle \in M \times N \mid m_0(x) = a \wedge n_1(y) = c \wedge m_1(x) = n_0(y)\}$$

Agora, para cada $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, considera-se o conjunto

$$K_{a,b,c} = \{\langle x, y \rangle \in M \times N \mid m_0(x) = a \wedge m_1(x) = b \wedge n_0(y) = b \wedge n_1(y) = c\}$$

Fica claro que, para cada $a \in A$ e $c \in C$,

$$P_{a,c} = \bigcup_{b \in B} K_{a,b,c} \quad \text{e, portanto,} \quad \#P_{a,c} = \# \bigcup_{b \in B} K_{a,b,c}$$

Também fica claro que, para quaisquer $b, d \in B$, se $b \neq d$, então $K_{a,b,c} \cap K_{a,d,c} = \emptyset$ sendo, assim, disjuntos².

Como $\#P_{a,c} = \# \bigcup_{b \in B} K_{a,b,c}$ e como os conjuntos $K_{a,b,c}$ são dois a dois disjuntos, pela cardinalidade de conjuntos disjuntos,

$$\#P_{a,c} = \sum_{b \in B} \#K_{a,b,c}$$

O conjunto $K_{a,b,c}$ pode ser reescrito como um produto cartesiano e, assim,

$$\#P_{a,c} = \sum_{b \in B} \#(\{x \in M \mid m_0(x) = a \wedge m_1(x) = b\} \times \{y \in N \mid n_0(y) = b \wedge n_1(y) = c\})$$

e, pela cardinalidade do produto cartesiano,

$$\#P_{a,c} = \sum_{b \in B} (\#\{x \in M \mid m_0(x) = a \wedge m_1(x) = b\} \cdot \#\{y \in N \mid n_0(y) = b \wedge n_1(y) = c\})$$

Por fim, usando (i) e (ii),

$$\#P_{a,c} = \sum_{b \in B} ((a\widehat{m}b) \cdot (b\widehat{n}c))$$

e, pela definição de composição de multirrelações,

$$\#P_{a,c} = a\widehat{n \circ m}c$$

□

Exemplo 10.1 (Composição de *spans* e de multirrelações) Os *spans* em $\mathcal{S}et$ $\langle m_0, M, m_1 \rangle: A \rightarrow B$ e $\langle n_0, N, n_1 \rangle: B \rightarrow C$ da Figura 10.2 expressam respectivamente as multirrelações $m: A \rightarrow B$ e $n: B \rightarrow C$ em $\mathcal{S}et$ da Figura 10.4. A Figura 10.3 mostra o *span* resultante da composição dos *spans* $\langle m_0, M, m_1 \rangle: A \rightarrow B$ e $\langle n_0, N, n_1 \rangle: B \rightarrow C$. Esse *span* resultante expressa a multirrelação $n \circ m: A \rightarrow C$, também na Figura 10.4.

²Entretanto, pode ocorrer $K_{a,b,c} = \emptyset$ para algum $b \in B$ e, portanto, não se pode dizer que $\{K_{a,b,c} \mid a \in A \wedge c \in C\}$ seja uma partição de $P_{a,c}$.

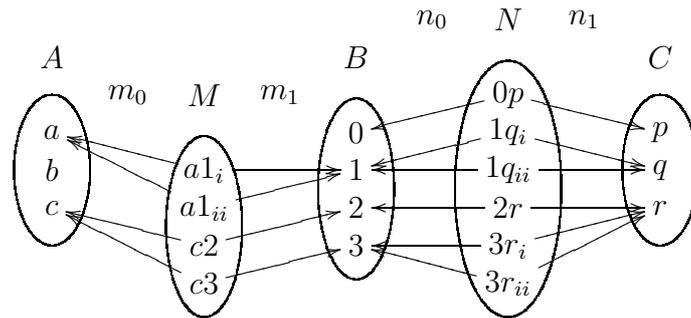


Figura 10.2: *Spans* que expressam multirrelações em *Set*.

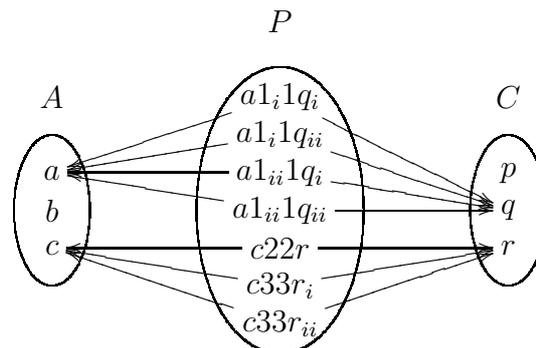


Figura 10.3: *Spans* resultante da composição.

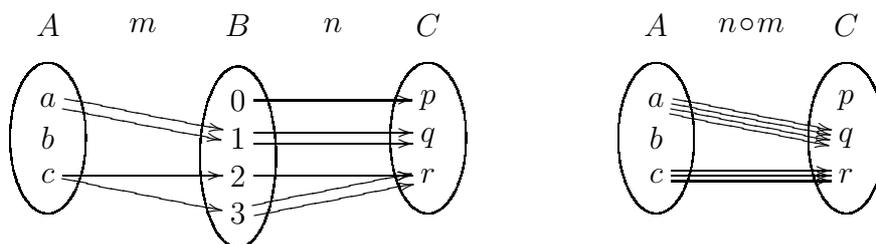


Figura 10.4: Composição de multirrelações.

10.2 A Composição de *Spans* não expressa a Composição de Relações

Como a composição de *spans* expressa a composição de multirrelações, pelo exemplo 2.19, é imediato que a composição de *spans* não expressa a composição de relações. Mesmo que dois *spans* expressem relações, eles também expressam multirrelações e sua composição expressa a multirrelação composta que, no geral, não é igual à relação composta.

Há várias alternativas de soluções para este problema na literatura³. Entretanto, neste trabalho, composição de relações através de composição de *spans* não é tratada.

³Por exemplo, em (FREYD; SCEDROV, 1990), define-se um tipo de morfismo chamado *cover* e, após o P.F. da composição, deve-se achar um *cover* do objeto suporte para o suporte de outro *span* que comute um determinado diagrama. Se existir tal *cover*, o *span* envolvido expressa a relação composta procurada. Outro exemplo está em (MILIUS, 2000) onde define-se uma adjunção entre a categoria das relações e a categoria dos *spans*. A imagem do *span* resultante da composição através dos funtores da adjunção é a relação composta procurada.

10.3 Composição de Multirrelações Estendidas

Em *Set*, nem todo *span* expressa uma multirrelação. Muitos expressam multirrelações estendidas. Compondo-se *spans* que expressam multirrelações estendidas, obtém-se outro *span* que também expressa uma multirrelação estendida.

Assumindo-se o axioma da escolha⁴, a composição de multirrelações estendidas expressa pela composição de *spans* quaisquer pode ser definida algebricamente da mesma forma que a composição de multirrelações, como na definição 2.14, entretanto, as operações de multiplicação e adição devem ser definidas para a coleção de todos os cardinais, da seguinte maneira⁵:

- a adição é definida, para quaisquer cardinais α e β , como

$$\begin{cases} \alpha + \beta & \text{se } \alpha \in \mathbb{N} \wedge \beta \in \mathbb{N} \\ \alpha & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N} \wedge \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{se } \beta \notin \mathbb{N} \wedge \beta \geq \alpha \end{cases}$$

- a multiplicação é definida, para quaisquer cardinais α e β , como

$$\begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 0 \vee \beta = 0 \\ \alpha \cdot \beta & \text{se } \alpha \in \mathbb{N} - \{0\} \wedge \beta \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \alpha & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N} \wedge \alpha \geq \beta \wedge \beta \neq 0 \\ \beta & \text{se } \beta \notin \mathbb{N} \wedge \beta \geq \alpha \wedge \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Não se assumindo o axioma da escolha, essa definição algébrica não é possível pois não se pode comparar quaisquer dois cardinais α e β infinitos.

⁴O que permite se comparar a cardinalidade de quaisquer dois conjuntos e, caso sejam diferentes, permite se saber qual é maior.

⁵Aqui, definidas informalmente.

11 COMPOSIÇÃO DE ARESTAS DE GRAFOS INTERNOS

Neste capítulo, mostra-se o *span* identidade e a composição de *spans*, bem como suas propriedades, quando interpretados como grafos internos.

11.1 Identidade

Em *Set*, se V é um conjunto de vértices, o *span* identidade de V , que é o endospan $\langle id_V, V, id_V \rangle: V \rightarrow V$, é um grafo cujas únicas arestas são endoarestas e que possui uma e somente uma endoaresta em cada vértice. Este grafo é considerado o grafo identidade do conjunto de vértices V . A menos de isomorfismo de grafos, ou seja, a menos de equivalência de *spans*, ele é único.

Em qualquer categoria, dado um objeto V , o *span* identidade $\langle id_V, V, id_V \rangle: V \rightarrow V$ é o grafo interno identidade do objeto V , também único, a menos de equivalência de *spans*.

11.2 Composição

Dois grafos internos com mesmos vértices numa categoria são dois endospans paralelos. A composição desses dois endospans resulta num terceiro endospan paralelo aos dois primeiros que é um terceiro grafo interno com os mesmos vértices dos dois primeiros.

Na categoria *Set*, dados dois grafos G_A e G_B , o grafo resultante da composição $G_B \circ G_A$ é um grafo em que cada aresta tem o significado de um (e somente um) caminho de tamanho dois entre vértices, sendo que a primeira metade do caminho é percorrida em alguma aresta do grafo G_A e a segunda metade do caminho é percorrida em alguma aresta do grafo G_B que inicie no mesmo vértice em que termina a primeira metade do percurso no grafo G_A .

Por este motivo, a essa composição de *spans*, no caso específico de endospans — que são grafos internos —, dá-se o nome de Composição de Arestas de Grafos Internos.

Para cada caminho de tamanho dois desse tipo possível de se formar com os grafos G_A e G_B , existe uma e somente uma aresta no grafo resultante cujo significado seja o desse caminho. Como, em cada caminho, a primeira parte ocorre em G_A e a segunda parte ocorre em G_B , propõe-se denotar $G_B \circ G_A$ por $G_A \triangleright G_B$, que melhor indica a noção da ordem em cada caminho.

A definição a seguir se aplica a qualquer categoria.

Definição 11.1 (Composição de Arestas de Grafos Internos) Sejam uma categoria \mathcal{C} e dois grafos $G_A = \langle \delta_{0A}, T_A, \delta_{1A} \rangle: V \rightarrow V$ e $G_B = \langle \delta_{0B}, T_B, \delta_{1B} \rangle: V \rightarrow V$ internos a \mathcal{C} . A composição de arestas do grafo G_A com o grafo G_B é $G_A \triangleright G_B = G_B \circ G_A$.

Exemplo 11.2 (Composição de Arestas de Grafos em Set) Na Figura 11.1 está a composição de arestas de um grafo G_A (esquerda) com um grafo G_B (centro) resultando num terceiro grafo $G_A \triangleright G_B$ (direita), todos com os mesmos vértices. A única aresta no resultado é a aresta 5 que representa o único caminho de tamanho dois, como explicado acima, possível de ser formado: o caminho de a para d , cuja primeira metade é percorrida na aresta 1 do grafo G_A e cuja segunda metade é percorrida na aresta 4 do grafo G_B .

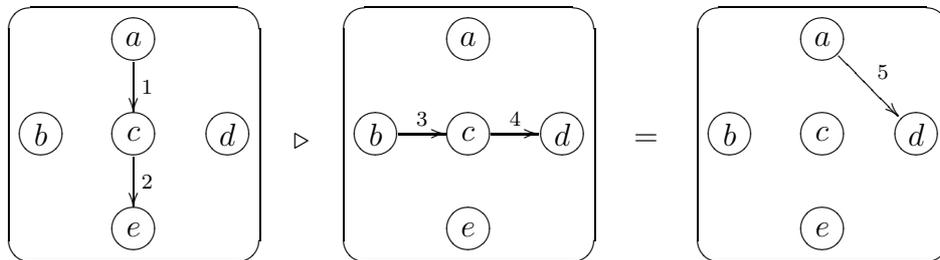


Figura 11.1: Composição de arestas de grafos em Set .

11.3 Propriedades

As propriedades são as mesmas da composição de *spans*. Em especial, enfatiza-se as duas seguintes devido a interpretações interessantes a respeito de caminhos.

11.3.1 Identidade — Elemento Neutro

O grafo interno identidade de um objeto V atua como “elemento neutro” para a composição de arestas de grafos internos, no mesmo sentido que para *spans*. No caso de Set , pode-se considerar que as arestas do grafo identidade representam caminhos de tamanho zero e, assim, as arestas do grafo resultante ainda representam caminhos de tamanho um (e não dois) feitas nas arestas do grafo operado com o grafo identidade.

11.3.2 Associatividade

Para três grafos G_A , G_B e G_C , a composição $(G_A \triangleright G_B) \triangleright G_C$ é um grafo em que cada aresta significa um caminho de tamanho dois cuja primeira metade é percorrida em alguma aresta de $G_A \triangleright G_B$ e cuja segunda metade é percorrida em alguma aresta de G_C . Mas a aresta de $G_A \triangleright G_B$ já significa um caminho de tamanho dois.

Como a composição de *spans* é associativa, a menos de equivalência de *spans*, a composição de arestas de grafos internos é associativa também, a menos de equivalência de *spans*, ou seja, a menos de isomorfismo de grafos. A composição de arestas de grafos pode, portanto, ser denotada sem a necessidade de parênteses: $G_A \triangleright G_B \triangleright G_C$.

Dessa forma, cada aresta de $G_A \triangleright G_B \triangleright G_C$ significa um caminho de tamanho três em que o primeiro terço é percorrido em alguma aresta de G_A , o segundo terço é

percorrido em alguma aresta de G_B e o terceiro terço é percorrido em alguma aresta de G_C , sendo que todas as arestas a partir da segunda devem iniciar no vértice em que a aresta anterior termina.

Exemplo 11.3 (Composição de Arestas de três grafos) A Figura 11.2 mostra a composição de arestas de três grafos G_A , G_B e G_C resultando no grafo $G_A \triangleright G_B \triangleright G_C$. A Figura 11.3 apresenta todos os possíveis caminhos de tamanho três e as respectivas arestas do grafo resultante.

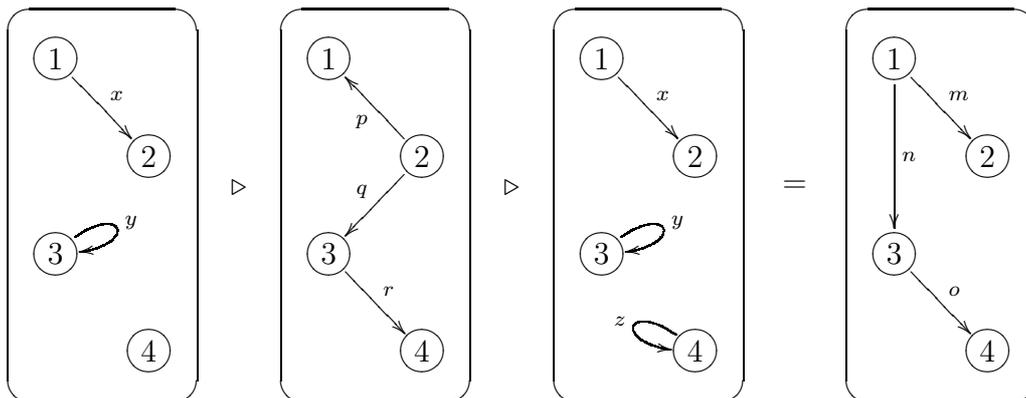


Figura 11.2: Composição de arestas de grafos em Set .

G_A	G_B	G_C	$G_A \triangleright G_B \triangleright G_C$
x	p	x	m
x	q	y	n
y	r	z	o

Figura 11.3: Significado das arestas.

Generalizando, para $n \in \mathbb{N}$, com $n > 0$, a composição $G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n$ é um grafo em que cada aresta significa exatamente um caminho de tamanho n e onde, para cada $0 < i \leq n$, o i -ésimo $1/n$ do caminho é percorrido em alguma aresta do i -ésimo grafo e toda aresta a partir da segunda deve iniciar onde a anterior termina.

Para $n, t \in \mathbb{N}$, com $n > 0$ e $t \leq n$, a composição $G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n$, em que o grafo identidade ocorre t vezes, pode ser considerado um grafo em que cada aresta significa um caminho de tamanho $n - t$.

11.4 Autocomposição

Assim como para *endospans*, pode-se usar uma notação de potência para um grafo composto consigo mesmo n vezes. A mesma notação G^n usada para *endospans* pode ser usada aqui pois, tratando-se do mesmo grafo, tanto a notação com \circ quanto a notação com \triangleright são equivalentes¹.

Exemplo 11.4 (Autocomposição) A Figura 11.4 mostra um grafo G_A (esquerda), G_A^2 (centro) e G_A^3 (direita). A Figura 11.5 mostra um grafo G_B (esquerda), G_B^2 (centro) e G_B^3 (direita). Nas duas figuras, os próprios nomes das arestas nos grafos resultantes indicam os respectivos caminhos no grafo original.

¹Como, por exemplo: $G^3 = G \circ G \circ G = G \triangleright G \triangleright G = G^3$.

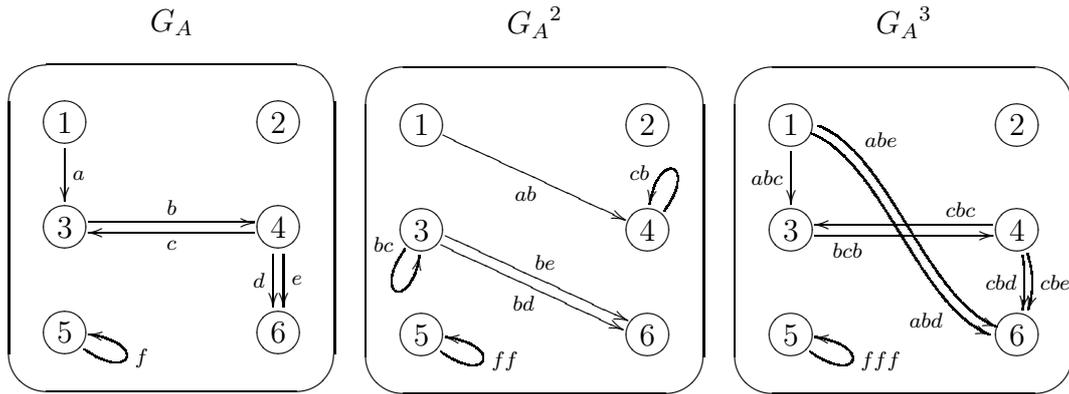


Figura 11.4: Autocomposição de arestas de grafos.

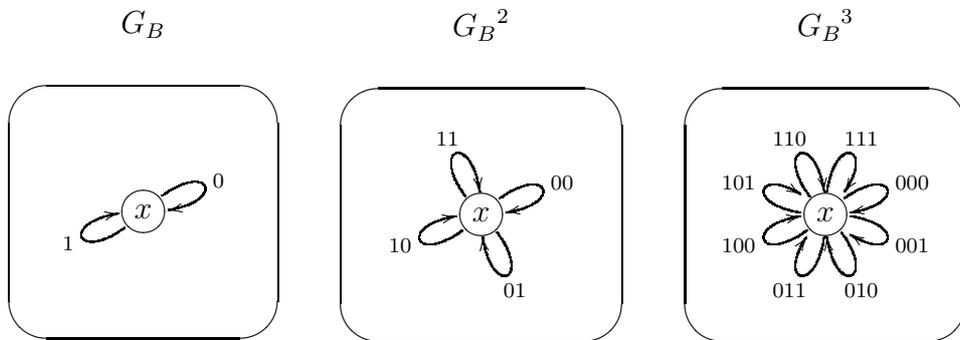


Figura 11.5: Autocomposição de arestas de grafos.

11.5 Exemplos em outras categorias

11.5.1 \mathcal{Pfn}

Assim como em \mathcal{Set} , para $n \in \mathbb{N}$, com $n > 0$, a composição $G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n$ em \mathcal{Pfn} é um grafo em que cada aresta significa um caminho, mas aqui, não necessariamente entre vértices, pois há arestas sem origem ou sem destino e, portanto, os caminhos também podem não ter origem ou não ter destino. As arestas do grafo resultante representam caminhos em que, em cada grafo, se o local de onde se deve continuar (ou iniciar) o percurso é um vértice, então necessariamente uma aresta com origem nesse vértice deve ser percorrida; mas se esse local não é um vértice, pode-se percorrer uma aresta sem origem ou pode-se “ficar parado”, não se percorrendo aresta alguma. “Ficar parado” em todos os grafos não é considerado um caminho. Portanto, cada caminho representado por alguma aresta do grafo $G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n$ tem tamanho $t \in \mathbb{N}$ com $0 < t \leq n$.

Exemplo 11.5 (Composição de Arestas de Grafos Internos a \mathcal{Pfn}) A Figura 11.6 mostra a composição de arestas de um grafo G_A (esquerda) com um grafo G_B (centro) resultando num terceiro grafo $G_A \triangleright G_B$ (direita), todos grafos internos a \mathcal{Pfn} e com os mesmos vértices. Os nomes das arestas no grafo resultante indicam quais arestas dos grafos operados formam os respectivos caminhos.

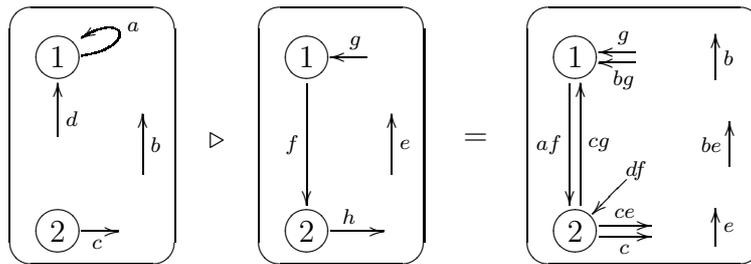


Figura 11.6: Composição de arestas de grafos internos a $\mathcal{P}fn$.

11.5.2 $\mathcal{M}Rel$

A seguir, um exemplo da composição de arestas de grafos internos a $\mathcal{M}Rel$. Um possível significado das arestas do grafo resultante fica mais claro no capítulo 13.

Exemplo 11.6 (Composição de Arestas de Grafos Internos a $\mathcal{M}Rel$) A Figura 11.7 está a composição de arestas de um grafo G_A (esquerda) com um grafo G_B (centro) resultando num terceiro grafo $G_{A \triangleright G_B}$ (direita), todos grafos internos a $\mathcal{M}Rel$ e com os mesmos vértices. A aresta X significa um “caminho” composto pelas arestas 1 e 2 do grafo G_A e pela aresta 6 do grafo G_B .

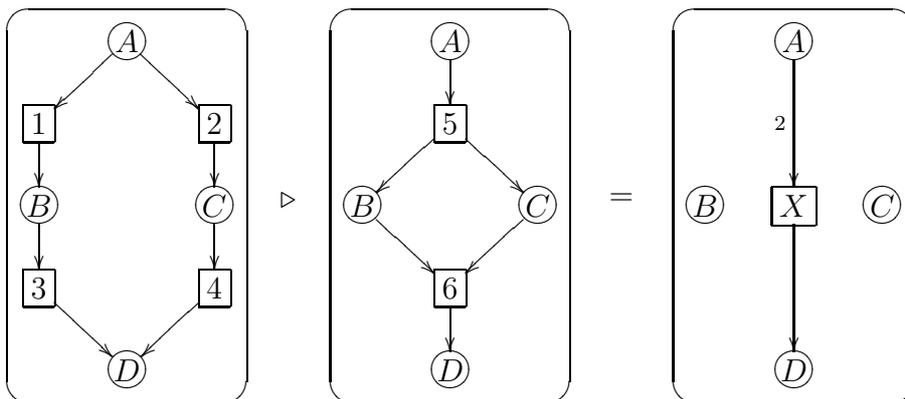


Figura 11.7: Composição de arestas de grafos internos a $\mathcal{M}Rel$.

11.5.3 Uma categoria pequena qualquer

Exemplo 11.7 (Composição de Arestas de Grafos Internos) O exemplo 9.4 mostra uma categoria, todos os *spans* nela e a tábua de composição desses *spans*. Os *spans* bb , bz , zb , zz e xx são grafos internos, todos com vértices em B , portanto, todos componíveis. Na tábua, observa-se que, por exemplo, a composição de arestas de grafos $zb \triangleright bz = bz \circ zb$ resulta no grafo zz . Observa-se também que $bz \triangleright zb = zb \circ bz$ é indefinido, mesmo sendo grafos componíveis.

12 COMPOSIÇÃO DE TRANSIÇÕES DE LTS

Este capítulo aplica a composição de arestas de grafos internos a LTS. Prova-se aqui diversas propriedades da composição de *span* aplicadas a LTS.

12.1 Identidade

Dado um conjunto Q de estados, define-se o LTS identidade para esse conjunto de estados.

Definição 12.1 (LTS Identidade) Seja Q um conjunto de estados. O LTS identidade para o conjunto de estados Q é $\langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle$, onde 1 é um objeto terminal e q é o único morfismo de Q para 1 .

O objeto 1 , em Set , é um conjunto unitário qualquer. É interessante considerá-lo como o conjunto unitário $\{nop\}$ cujo único elemento nop significa “no operation”, assim, as únicas transições de um LTS identidade são nop . Um motivo para isso fica claro logo adiante quando se mostra que esse LTS atua realmente como identidade da composição.

12.2 Composição

Como LTS são grafos com arestas etiquetadas, pode-se aplicar a composição de arestas de grafos internos a eles. A etiquetagem das arestas resultantes é induzida pelo produto e, assim, permite recuperar a componente de cada “pedaço” do caminho que cada aresta significa.

A essa operação dá-se o nome de composição de transições de LTS. No LTS resultante da composição de n LTS, um possível significado para cada transição é o de uma transação composta por uma seqüência de n transições, cada uma executada em um dos LTS operados sendo que, a partir da segunda, cada transição inicia no estado em que a anterior termina.

Definição 12.2 (Composição de transições de LTS) Sejam dois LTS quaisquer $S_A = \langle \Sigma_A, Q, \langle t_{0A}, T_A, t_{1A} \rangle, l_A \rangle$ e $S_B = \langle \Sigma_B, Q, \langle t_{0B}, T_B, t_{1B} \rangle, l_B \rangle$, ambos com mesmos estados Q . (Ver Figura 12.1) A composição de transições de S_A com S_B é $S_{A \triangleright B} = \langle \Sigma_A \times \Sigma_B, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$, onde $\Sigma_A \times \Sigma_B$, π_A e π_B são o produto de Σ_A e Σ_B , $t_0 = t_{0A} \circ p_0$ e $t_1 = t_{1B} \circ p_1$, onde T , p_0 e p_1 são o P.F. de t_{1A} e t_{0B} tais que $t_{1A} \circ p_0 = t_{0B} \circ p_1$ e l é o morfismo único induzido pelo produto de Σ_A e Σ_B tal que $l_A \circ p_0 = \pi_A \circ l$ e $l_B \circ p_1 = \pi_B \circ l$.

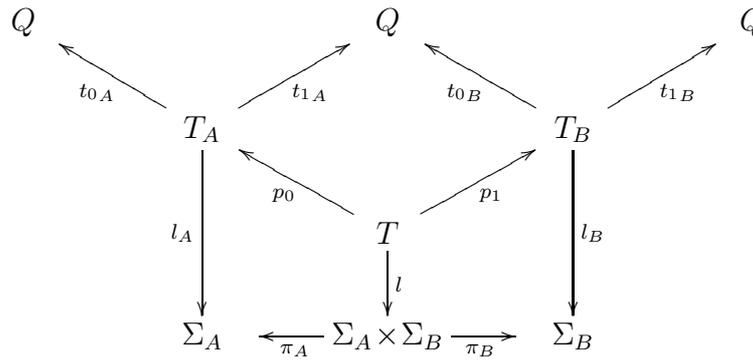


Figura 12.1: Diagrama para Composição de Transições de LTS.

A parte superior do diagrama da Figura 12.1 é uma composição de *spans*. A parte inferior é um produto. O morfismo l é induzido.

Exemplo 12.3 (Composição de Transições de LTS) Seja um LTS qualquer $S_A = \langle \Sigma_A, Q, \langle t_{0A}, T_A, t_{1A} \rangle, l_A \rangle$ como apresentado na Figura 12.2 (esquerda) — que é um AFN —. A mesma Figura (direita) apresenta o LTS $S_A \triangleright S_A$ — que também é um AFN —, onde a etiqueta ab é considerada um elemento de $\Sigma_A \times \Sigma_A$, cujas primeira e segunda componentes são a e b , respectivamente. A semântica dessas transições etiquetadas por ab pode ser interpretada justamente como a de uma transação composta por duas transições em seqüência, a primeira etiquetada por a e a segunda etiquetada por b . Observa-se que, se na definição 6.1 não se relaxasse a condição de tripla mono, essa operação não seria fechada, pois, mesmo que os LTS operados não possuam arestas paralelas com mesmas etiquetas, o resultado pode possuí-las.

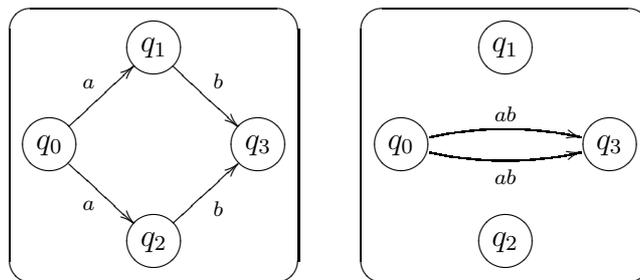


Figura 12.2: Composição de transições de LTS.

Exemplo 12.4 (Composição de Transições de LTS diferentes) A Figura 12.3 apresenta dois LTS distintos (esquerda e centro) e o LTS resultante da respectiva composição (direita).

12.3 Propriedades

12.3.1 Composição de Transições de LTS é Fechada

Como a categoria Set é completa, a composição de transições de LTS é uma operação fechada.

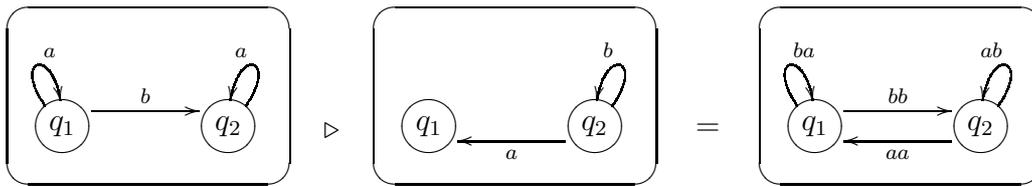


Figura 12.3: Composição de transições de LTS diferentes.

12.3.2 Composição de Transições de LTS Determinísticos é Fechada

Compondo-se transições de LTS determinísticos, o LTS resultante também é um LTS determinístico.

PROVA: Seja a composição de dois LTS, como na Figura 12.1 e na definição 12.2. Se os LTS são determinísticos, sabe-se que $\langle t_{0A}, l_A \rangle$ e $\langle t_{0B}, l_B \rangle$ são pares mono. Mostra-se que, dessa forma, $\langle t_0, l \rangle$ também é um par mono. A demonstração segue e, nas tabelas, como de costume, à direita de cada implicação há uma breve justificativa.

Considera-se um objeto qualquer Z e dois morfismos quaisquer $x: Z \rightarrow T$ e $y: Z \rightarrow T$, tais que

$$(i) \quad l \circ x = l \circ y;$$

$$(ii) \quad t_0 \circ x = t_0 \circ y.$$

De (i), compondo-se com π_A e também com π_B ,

$\pi_A \circ l \circ x = \pi_A \circ l \circ y$	\implies	$\pi_A \circ l = l_A \circ p_0$ (da def.)
$\pi_B \circ l \circ x = \pi_B \circ l \circ y$		$\pi_B \circ l = l_B \circ p_1$ (da def.)
$l_A \circ p_0 \circ x = l_A \circ p_0 \circ y$		Fato 1.
$l_B \circ p_1 \circ x = l_B \circ p_1 \circ y$		Fato 2.

De (ii),

$t_0 \circ x = t_0 \circ y$	\implies	$t_0 = t_{0A} \circ p_0$ (da def.)
$t_{0A} \circ p_0 \circ x = t_{0A} \circ p_0 \circ y$		Fato 3.

Dos fatos 1 e 3,

$l_A \circ p_0 \circ x = l_A \circ p_0 \circ y$ e $t_{0A} \circ p_0 \circ x = t_{0A} \circ p_0 \circ y$	\implies	$\langle t_{0A}, l_A \rangle$ é par mono
$p_0 \circ x = p_0 \circ y$		Fato 4.

Do fato 4, compondo-se com t_{1A} ,

$t_{1A} \circ p_0 \circ x = t_{1A} \circ p_0 \circ y$	\implies	$t_{1A} \circ p_0 = t_{0B} \circ p_1$ (da def.)
$t_{0B} \circ p_1 \circ x = t_{0B} \circ p_1 \circ y$		Fato 5.

Dos fatos 2 e 5,

$l_B \circ p_1 \circ x = l_B \circ p_1 \circ y$ e $t_{0B} \circ p_1 \circ x = t_{0B} \circ p_1 \circ y$	\implies	$\langle t_{0B}, l_B \rangle$ é par mono
$p_1 \circ x = p_1 \circ y$		Fato 6.

Dos fatos 4 e 6,

$p_0 \circ x = p_0 \circ y$ e $p_1 \circ x = p_1 \circ y$	\implies	$\langle p_0, p_1 \rangle$ é par mono
$x = y$		

E, portanto, $\langle t_0, l \rangle$ é par mono e conclui-se que o LTS resultante também é determinístico. □

12.3.3 Identidade — Elemento Neutro

Os LTS identidades atuam similarmente a elementos neutros na composição de transições de LTS da seguinte forma: seja um LTS $\langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$ com conjunto

de estados Q , então $\langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle \triangleright \langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle = \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$ e $\langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle \triangleright \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle = \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$, ambas igualdades a menos de isomorfismo.

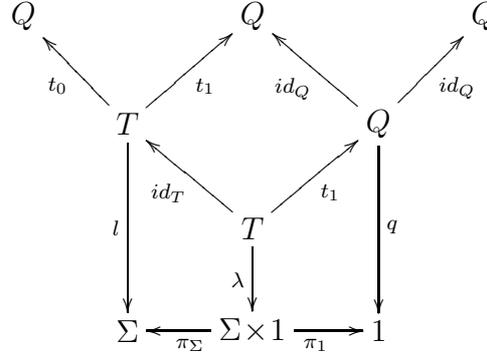


Figura 12.4: LTS Identidade atua como elemento neutro.

Prova-se aqui que $\langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle \triangleright \langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle = \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$.
PROVA. Já se viu que o *span* identidade atua como elemento neutro na composição de *spans*. Sejam, então, como no diagrama da Figura 12.4, T , id_T e t_1 o produto fibrado de t_1 e id_Q , $\Sigma \times 1$, π_Σ e π_1 o produto de Σ e 1 e λ o morfismo induzido tal que $l \circ id_T = \pi_\Sigma \circ \lambda$ e $q \circ t_1 = \pi_1 \circ \lambda$.

Seja σ o morfismo único de Σ para 1 . Considera-se Σ , id_Σ e σ como um pré-produto de Σ e 1 . Existe, então, um morfismo único $h: \Sigma \rightarrow \Sigma \times 1$ tal que $\pi_\Sigma \circ h = id_\Sigma$ e $\pi_1 \circ h = \sigma$. Portanto, π_Σ é uma retração.

Considera-se agora um objeto qualquer X e dois morfismos $m: X \rightarrow \Sigma \times 1$ e $n: X \rightarrow \Sigma \times 1$. Como 1 é objeto terminal, $\pi_1 \circ m = \pi_1 \circ n$. Com isso, se $\pi_\Sigma \circ m = \pi_\Sigma \circ n$, como $\langle \pi_\Sigma, \pi_1 \rangle$ é par mono, então $m = n$. Portanto π_Σ é um monomorfismo.

Como π_Σ é simultaneamente uma retração e um monomorfismo, então também é um isomorfismo.

□

Se o conjunto 1 for considerado o conjunto unitário $\{nop\}$, para um LTS A , a composição $A \triangleright ID$, onde ID é o LTS identidade será um LTS isomorfo a A e, para qualquer transição x do LTS A , a correspondente transição em $A \triangleright ID$ será algo como $\langle x, nop \rangle$ cuja semântica pode ser interpretada como a mesma da transição x . O mesmo vale para $ID \triangleright A$.

A prova que $\langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle \triangleright \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle = \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$, é similar.

12.3.4 Associatividade

Como, a menos de equivalência de *spans*, a composição de *spans* é associativa e, a menos de isomorfismo, o produto é associativo, a composição de LTS também é associativa, a menos de isomorfismo, ou seja, para quaisquer três sistemas S_A , S_B e S_C , todos com mesmos estados, $(S_A \triangleright S_B) \triangleright S_C = S_A \triangleright (S_B \triangleright S_C)$, a menos de isomorfismo, e pode ser denotada sem parênteses: $S_A \triangleright S_B \triangleright S_C$.

Para se provar isso, inicialmente prova-se que o produto de objetos é associativo, a menos de isomorfismo.

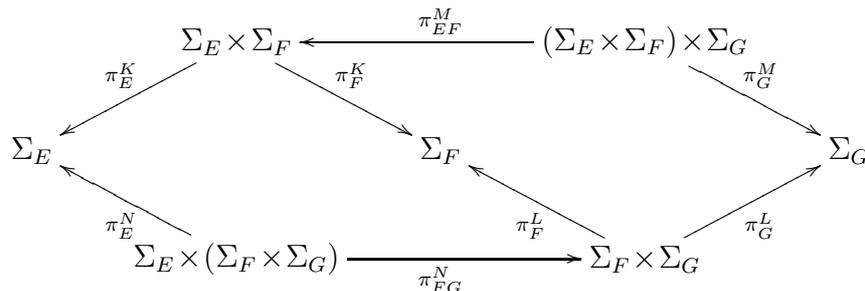


Figura 12.5: Associatividade do produto de objetos.

PROVA: PRODUTO BINÁRIO DE OBJETOS É ASSOCIATIVO, A MENOS DE ISOMORFISMO.

Sejam os objetos Σ_E , Σ_F e Σ_G e, como na Figura 12.5:

- (v) $\Sigma_E \times \Sigma_F$, π_E^K e π_F^K são o produto de Σ_E e Σ_F ;
- (vi) $\Sigma_F \times \Sigma_G$, π_F^L e π_G^L são o produto de Σ_F e Σ_G ;
- (vii) $(\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G$, π_{EF}^M e π_G^M são o produto de $\Sigma_E \times \Sigma_F$ e Σ_G ;
- (viii) $\Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G)$, π_E^N e π_{FG}^N são o produto de Σ_E e $\Sigma_F \times \Sigma_G$.

Mostra-se que existe um isomorfismo $\omega : \Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G) \rightarrow (\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G$ tal que $\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_E^N$, $\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_F^L \circ \pi_{FG}^N$ e $\pi_G^M \circ \omega = \pi_G^L \circ \pi_{FG}^N$.

Considera-se,

$\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M$ e π_G^M	\implies	induzido por (vi)
$(\exists! \varphi : (\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G \rightarrow \Sigma_F \times \Sigma_G)$ $(\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M = \pi_F^L \circ \varphi \wedge \pi_G^M = \pi_G^L \circ \varphi)$		Fato P1.

De forma similar, encontra-se

$(\exists! \chi : \Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G) \rightarrow \Sigma_E \times \Sigma_F)$ $(\pi_E^N = \pi_E^K \circ \chi \wedge \pi_F^L \circ \pi_{FG}^N = \pi_F^K \circ \chi)$		Fato P2.
--	--	----------

Considera-se,

$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M$ e φ	\implies	induzido por (viii)
$(\exists! \psi : (\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G \rightarrow \Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G))$ $(\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M = \pi_E^N \circ \psi \wedge \varphi = \pi_{FG}^N \circ \psi)$		Fato P3.

De forma similar, encontra-se

$(\exists! \omega : \Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G) \rightarrow (\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G)$ $(\chi = \pi_{EF}^M \circ \omega \wedge \pi_F^L \circ \pi_{FG}^N = \pi_F^K \circ \omega)$		Fato P4.
--	--	----------

Agora, mostra-se que ω é isomorfismo.

Considera-se

$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi \implies$	$\chi = \pi_{EF}^M \circ \omega$	(do fato P4)
$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_E^K \circ \chi \circ \psi \implies$	$\pi_E^N = \pi_E^K \circ \chi$	(do fato P2)
$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_E^N \circ \psi \implies$	$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M = \pi_E^N \circ \psi$	(do fato P3)
$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_E^K \circ \pi_{EF}^M$		Fato P5.

De forma similar, encontra-se

$\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_F^K \circ \pi_{EF}^M$	Fato P6.
---	----------

Dos fatos P5 e P6,

$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_E^K \circ \pi_{EF}^M$ e $\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \implies$	$\langle \pi_E^K, \pi_F^K \rangle$ é par mono
$\pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_{EF}^M \implies$	Fato P7.

Considera-se

$\pi_G^M \circ \omega \circ \psi = \pi_G^M \circ \omega \circ \psi \implies$	$\pi_G^L \circ \pi_{FG}^N = \pi_G^M \circ \omega$ (do fato P4)
$\pi_G^M \circ \omega \circ \psi = \pi_G^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \implies$	$\varphi = \pi_{FG}^N \circ \psi$ (do fato P3)
$\pi_G^M \circ \omega \circ \psi = \pi_G^L \circ \varphi \implies$	$\pi_G^M = \pi_G^L \circ \varphi$ (do fato P1)
$\pi_G^M \circ \omega \circ \psi = \pi_G^M$	Fato P8.

Dos fatos P7 e P8,

$\pi_{EF}^M \circ \omega \circ \psi = \pi_{EF}^M$ e $\pi_G^M \circ \omega \circ \psi = \pi_G^M \implies$	$\langle \pi_{EF}^M, \pi_G^M \rangle$ é par mono
$\omega \circ \psi = id_{(\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G}$	Fato P9.

De forma similar, encontra-se

$\psi \circ \omega = id_{\Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G)}$	Fato P10.
---	-----------

Pelos fatos P9 e P10, como ω é retração e ω é seção, portanto ω é isomorfismo.

Finalmente,

$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega$	$\chi = \pi_{EF}^M \circ \omega$ (do fato P4)
$\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega$	$\chi = \pi_{EF}^M \circ \omega$ (do fato P4)
$\pi_G^M \circ \omega = \pi_G^M \circ \omega \implies$	$\pi_G^L \circ \pi_{FG}^N = \pi_G^M \circ \omega$ (do fato P4)
$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_E^K \circ \chi$	$\pi_E^N = \pi_E^K \circ \chi$ (do fato P2)
$\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_F^K \circ \chi$	$\pi_F^N = \pi_F^K \circ \chi$ (do fato P2)
$\pi_G^M \circ \omega = \pi_G^L \circ \pi_{FG}^N \implies$	
$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_E^N$	
$\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \omega = \pi_F^N$	
$\pi_G^M \circ \omega = \pi_G^L \circ \pi_{FG}^N$	

□

Agora, com essa prova acima e com a prova em 9.3.2 que composição de *spans* é associativa, a menos de equivalência de *spans*, prova-se que a composição de transições de LTS é associativa, a menos de isomorfismo.

PROVA: COMPOSIÇÃO DE TRANSIÇÕES DE LTS É ASSOCIATIVA, A MENOS DE ISOMORFISMO.

Sejam os morfismos $\lambda_E: E \rightarrow \Sigma_E$, $\lambda_F: F \rightarrow \Sigma_F$ e $\lambda_G: G \rightarrow \Sigma_G$ (do diagrama da Figura 9.5 para o diagrama da Figura 12.5).

Considera-se,

$\lambda_E \circ k_0$ e $\lambda_F \circ k_1 \implies$	induzido por (v)
$(\exists! \lambda_K: K \rightarrow \Sigma_E \times \Sigma_F)$ $(\lambda_E \circ k_0 = \pi_E^K \circ \lambda_K \wedge \lambda_F \circ k_1 = \pi_F^K \circ \lambda_K)$	Fato P11.

De forma similar, encontra-se

$(\exists! \lambda_L: L \rightarrow \Sigma_F \times \Sigma_G)$ $(\lambda_F \circ l_0 = \pi_F^L \circ \lambda_L \wedge \lambda_G \circ l_1 = \pi_G^L \circ \lambda_L)$	Fato P12.
$(\exists! \lambda_M: M \rightarrow (\Sigma_E \times \Sigma_F) \times \Sigma_G)$ $(\lambda_K \circ m_0 = \pi_{EF}^M \circ \lambda_M \wedge \lambda_G \circ m_1 = \pi_G^M \circ \lambda_M)$	Fato P13.
$(\exists! \lambda_N: N \rightarrow \Sigma_E \times (\Sigma_F \times \Sigma_G))$ $(\lambda_E \circ n_0 = \pi_E^N \circ \lambda_N \wedge \lambda_L \circ n_1 = \pi_{FG}^N \circ \lambda_N)$	Fato P14.

Já se tem suficientes isomorfismos para esta prova: os isomorfismos x e y da prova em 9.3.2 e os isomorfismos ψ e ω da prova acima.

Basta agora se provar que $\psi \circ \lambda_M \circ x = \lambda_N$ e $\omega \circ \lambda_N \circ y = \lambda_M$.

Considera-se,

$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x \implies$	$\pi_E^K \circ \pi_{EF}^M = \pi_E^N \circ \psi$ (do fato P3)
$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_E^K \circ \pi_{EF}^M \circ \lambda_M \circ x \implies$	$\lambda_K \circ m_0 = \pi_{EF}^M \circ \lambda_M$ (do fato P13)
$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_E^K \circ \lambda_K \circ m_0 \circ x \implies$	$m_0 \circ x = r$ (do fato 3)
$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_E^K \circ \lambda_K \circ r \implies$	$\lambda_E \circ k_0 = \pi_E^K \circ \lambda_K$ (do fato P11)
$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \lambda_E \circ k_0 \circ r \implies$	$k_0 \circ r = n_0$ (do fato 1)
$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \lambda_E \circ n_0 \implies$	$\lambda_E \circ n_0 = \pi_E^N \circ \lambda_N$ (do fato P14)
$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_E^N \circ \lambda_N$	Fato P15.

Considera-se,

$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x \implies$	$\varphi = \pi_{FG}^N \circ \psi$ (fato P3)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^L \circ \varphi \circ \lambda_M \circ x \implies$	$\pi_F^K \circ \pi_{EF}^M = \pi_F^L \circ \varphi$ (fato P1)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^K \circ \pi_{EF}^M \circ \lambda_M \circ x \implies$	$\lambda_K \circ m_0 = \pi_{EF}^M \circ \lambda_M$ (fato P13)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^K \circ \lambda_K \circ m_0 \circ x \implies$	$m_0 \circ x = r$ (fato 3)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^K \circ \lambda_K \circ r \implies$	$\lambda_F \circ k_1 = \pi_F^K \circ \lambda_K$ (fato P11)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \lambda_F \circ k_1 \circ r \implies$	$k_1 \circ r = l_0 \circ n_1$ (fato 1)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \lambda_F \circ l_0 \circ n_1 \implies$	$\lambda_F \circ l_0 = \pi_F^L \circ \lambda_L$ (fato P12)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^L \circ \lambda_L \circ n_1 \implies$	$\lambda_L \circ n_1 = \pi_{FG}^N \circ \lambda_N$ (fato P14)
$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \lambda_N$	Fato P16.

De forma similar, encontra-se

$\pi_G^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_G^L \circ \pi_{FG}^N \circ \lambda_N$	Fato P17.
--	-----------

Dos fatos P16 e P17,

$\pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_F^L \circ \pi_{FG}^N \circ \lambda_N$	$\langle \pi_F^L, \pi_G^L \rangle$ é par mono
$\pi_G^L \circ \pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_G^L \circ \pi_{FG}^N \circ \lambda_N \implies$	
$\pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_{FG}^N \circ \lambda_N$	Fato P18.

Dos fatos P15 e P18,

$\pi_E^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_E^N \circ \lambda_N$	$\langle \pi_E^N, \pi_{FG}^N \rangle$ é par mono
$\pi_{FG}^N \circ \psi \circ \lambda_M \circ x = \pi_{FG}^N \circ \lambda_N \implies$	
$\psi \circ \lambda_M \circ x = \lambda_N$	

De forma similar, mostra-se que $\omega \circ \lambda_N \circ y = \lambda_M$.

Portanto, a composição de transições de LTS é associativa, a menos de isomorfismo.

□

12.4 Autocomposição

Para se compor um LTS consigo mesmo $n \in \mathbb{N}$ vezes, usa-se, também, a notação de potência.

Definição 12.5 (Autocomposição de transições de LTS) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $S = \langle \Sigma, Q, \langle t_0, T, t_1 \rangle, l \rangle$ um LTS qualquer.

$$S^n = \begin{cases} \langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle & \text{se } n = 0 \\ S \triangleright S^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

onde $\langle 1, Q, \langle id_Q, Q, id_Q \rangle, q \rangle$ é o LTS identidade de Q .

Novamente, considera-se o objeto 1 como o conjunto unitário $\{nop\}$ cujo único elemento nop significa “no operation”. Assim, para qualquer sistema S , S^0 somente possui endoarestas, uma por estado e todas elas são etiquetadas com nop .

Exemplo 12.6 (Autocomposição de transições de LTS) Seja S o LTS apresentado na Figura 12.6 (esquerda). A mesma Figura apresenta o LTS S^2 (centro) e S^3 (direita). Todos eles são AFDs. Adicionando-se estados inicial e finais a esses autômatos, considerando, por exemplo, que o estado inicial é q_0 e o conjunto de estados finais é $\{q_3\}$, o AFD da esquerda reconhece a linguagem $L \subseteq \{a, b\}^*$ cujas palavras terminam imediatamente após a primeira ocorrência de aa ou de bb . Com os mesmos estado inicial e estados finais, o AFD do centro reconhece a linguagem $\{w \in L \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ e o AFD da direita reconhece a linguagem $\{w \in L \mid |w| = 3k, k \in \mathbb{N}\}$, ambas sublinguagens de L . Generalizando-se, para $n \in \mathbb{N}$, S^n com mesmos estado inicial e estados finais, o AFD reconhece a linguagem $\{w \in L \mid |w| = n \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$.

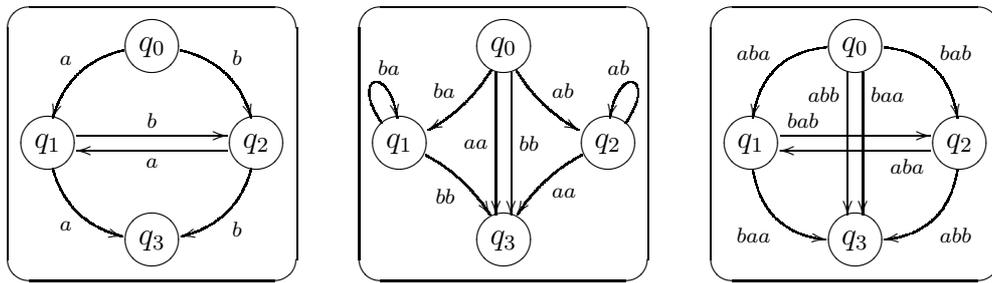


Figura 12.6: Autocomposição de LTS.

12.5 Combinação Síncrona de LTS

A seguinte definição é inspirada na literatura¹ onde o LTS resultante representa todas as sincronizações possíveis entre as transições dos LTS operados.

Definição 12.7 (Combinação Síncrona de LTS) Sejam dois LTS quaisquer $S_A = \langle \Sigma_A, Q_A, \langle t_{0A}, T_A, t_{1A} \rangle, l_A \rangle$ e $S_B = \langle \Sigma_B, Q_B, \langle t_{0B}, T_B, t_{1B} \rangle, l_B \rangle$. (Ver Figura 12.7) A combinação síncrona de S_A com S_B é $S_A \times S_B = \langle \Sigma_A \times \Sigma_B, Q_A \times Q_B, \langle t_{0A} \times t_{0B}, T_A \times T_B, t_{1A} \times t_{1B} \rangle, l_A \times l_B \rangle$, sendo todas componentes dadas por produto de objetos ou de morfismos.

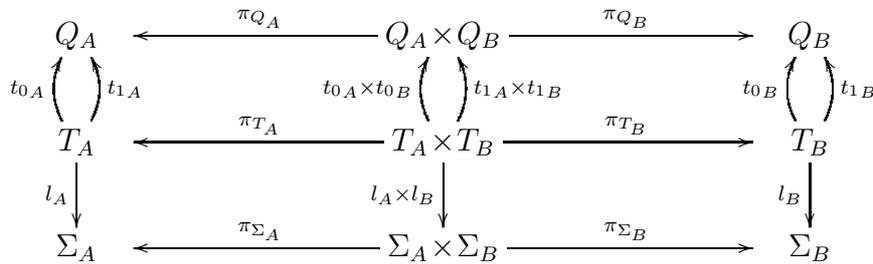


Figura 12.7: Diagrama para Combinação Síncrona de LTS.

O resultado dessa operação é um LTS que combina cada estado do primeiro LTS com cada estado do segundo LTS e também combina cada transição do primeiro LTS com cada transição do segundo LTS, respeitando a combinação de estados tanto na origem quanto no destino das transições.

¹(MENEZES; HAEUSLER, 2001)

12.6 Propriedades Envolvendo a Composição de Transições de LTS e a Combinação Síncrona de LTS

12.6.1 Lei do Intercâmbio

A lei do intercâmbio vale, a menos de isomorfismo, entre as operações de composição de arestas de LTS e a combinação síncrona de LTS, ou seja, para quaisquer dois sistemas S_D e S_E com mesmos estados e para quaisquer dois sistemas S_V e S_W também com mesmos estados, mas não necessariamente os mesmos estados dos dois anteriores, vale $(S_D \triangleright S_E) \times (S_V \triangleright S_W) = (S_D \times S_V) \triangleright (S_E \times S_W)$, a menos de isomorfismo, como na Figura 12.8.

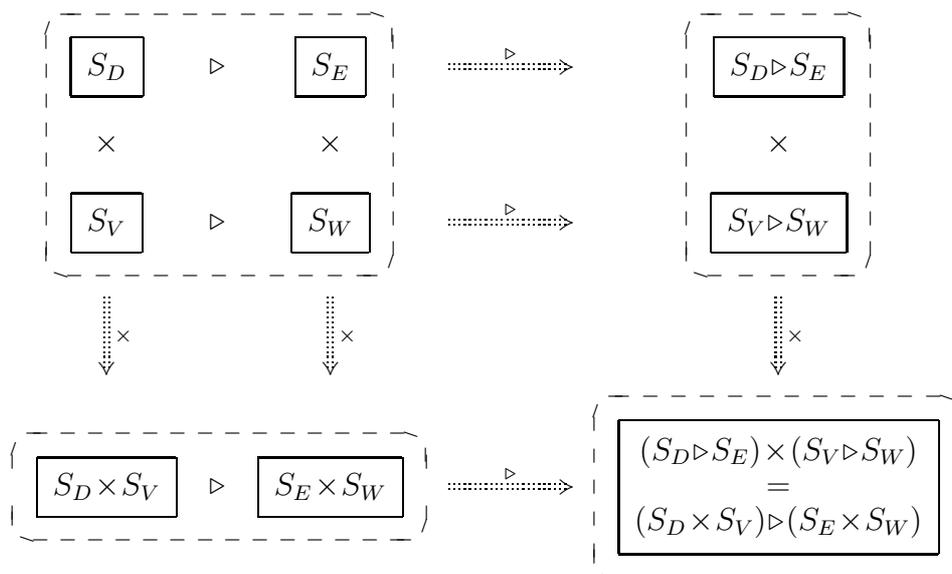


Figura 12.8: Lei do Intercâmbio para LTS.

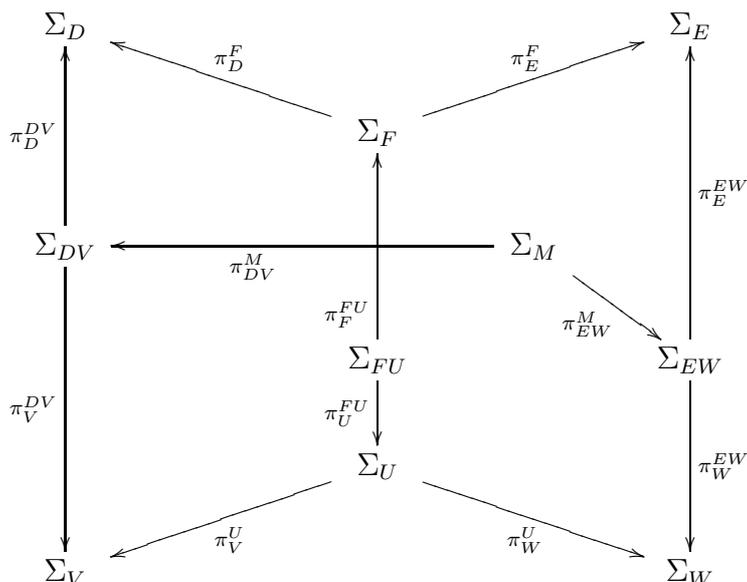


Figura 12.9: Diagrama para a prova da Lei do Intercâmbio para LTS.

PROVA: LEI DO INTERCÂMBIO.

Sejam os objetos Σ_D , Σ_E , Σ_V e Σ_W e, como na Figura 12.9:

- (xvi) Σ_F, π_D^F e π_E^F são o produto de Σ_D e Σ_E ;
- (xvii) Σ_U, π_V^U e π_W^U são o produto de Σ_V e Σ_W ;
- (xviii) Σ_{FU}, π_F^{FU} e π_U^{FU} são o produto de Σ_F e Σ_U ;
- (xix) Σ_{DV}, π_D^{DV} e π_V^{DV} são o produto de Σ_D e Σ_V ;
- (xx) Σ_{EW}, π_E^{EW} e π_W^{EW} são o produto de Σ_E e Σ_W ;
- (xxi) Σ_M, π_{DV}^M e π_{EW}^M são o produto de Σ_{DV} e Σ_{EW} .

Considera-se,

$\pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M$ e $\pi_E^{EW} \circ \pi_{EW}^M$	\implies	induzido por (xvi)
$(\exists! \tau: \Sigma_M \rightarrow \Sigma_F)$ $(\pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M = \pi_D^F \circ \tau \wedge \pi_E^{EW} \circ \pi_{EW}^M = \pi_E^F \circ \tau)$		Fato IL1.

De forma similar, encontra-se

$(\exists! v: \Sigma_M \rightarrow \Sigma_U)$ $(\pi_V^{DV} \circ \pi_{DV}^M = \pi_V^U \circ v \wedge \pi_W^{EW} \circ \pi_{EW}^M = \pi_W^U \circ v)$	Fato IL2.
$(\exists! \varphi: \Sigma_M \rightarrow \Sigma_{FU})$ $(\tau = \pi_F^{FU} \circ \varphi \wedge v = \pi_U^{FU} \circ \varphi)$	Fato IL3.
$(\exists! \chi: \Sigma_{FU} \rightarrow \Sigma_{DV})$ $(\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} = \pi_D^{DV} \circ \chi \wedge \pi_V^U \circ \pi_U^{FU} = \pi_V^{DV} \circ \chi)$	Fato IL4.
$(\exists! \psi: \Sigma_{FU} \rightarrow \Sigma_{EW})$ $(\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} = \pi_E^{EW} \circ \psi \wedge \pi_W^U \circ \pi_U^{FU} = \pi_W^{EW} \circ \psi)$	Fato IL5.
$(\exists! \omega: \Sigma_{FU} \rightarrow \Sigma_M)$ $(\chi = \pi_{DV}^M \circ \omega \wedge \psi = \pi_{EW}^M \circ \omega)$	Fato IL6.

Considera-se,

$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega$	$\tau = \pi_F^{FU} \circ \varphi$	(do fato IL3)
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega \implies$	$\tau = \pi_F^{FU} \circ \varphi$	(do fato IL3)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_D^F \circ \tau \circ \omega$	$\pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M = \pi_D^F \circ \tau$	(do fato IL1)
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_E^F \circ \tau \circ \omega \implies$	$\pi_E^{EW} \circ \pi_{EW}^M = \pi_E^F \circ \tau$	(do fato IL1)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M \circ \omega$	$\chi = \pi_{DV}^M \circ \omega$	(do fato IL6)
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_E^{EW} \circ \pi_{EW}^M \circ \omega \implies$	$\psi = \pi_{EW}^M \circ \omega$	(do fato IL6)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_D^{DV} \circ \chi$	$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} = \pi_D^{DV} \circ \chi$	(do fato IL4)
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_E^{EW} \circ \psi \implies$	$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} = \pi_E^{EW} \circ \psi$	(do fato IL5)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_D^F \circ \pi_F^{FU}$	$\langle \pi_D^F, \pi_E^F \rangle$ é par mono	
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \implies$		
$\pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_F^{FU}$	Fato IL7.	

De forma similar, encontra-se

$\pi_U^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_U^{FU}$	Fato IL8.
--	-----------

Dos fatos IL7 e IL8,

$\pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_F^{FU}$ e $\pi_U^{FU} \circ \varphi \circ \omega = \pi_U^{FU} \implies$	$\langle \pi_F^{FU}, \pi_U^{FU} \rangle$ é par mono
$\varphi \circ \omega = id_{\Sigma_{FU}}$	Fato IL9.

De forma similar, encontra-se

$\omega \circ \varphi = id_{\Sigma_M}$	Fato IL10.
--	------------

Finalmente,

$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi = \pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi$	$\tau = \pi_F^{FU} \circ \varphi$	(do fato IL3)
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi = \pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \implies$	$\tau = \pi_F^{FU} \circ \varphi$	(do fato IL3)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi = \pi_D^F \circ \tau$	$\pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M = \pi_D^F \circ \tau$	(do fato IL1)
$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi = \pi_E^F \circ \tau \implies$	$\pi_E^{EW} \circ \pi_{EW}^M = \pi_E^F \circ \tau$	(do fato IL1)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi = \pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M$ $\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi = \pi_E^{EW} \circ \pi_{EW}^M$	Fato IL11.	

De forma similar, encontra-se

$\pi_V^U \circ \pi_U^{FU} \circ \varphi = \pi_V^{DV} \circ \pi_{DV}^M$ $\pi_W^U \circ \pi_U^{FU} \circ \varphi = \pi_W^{EW} \circ \pi_{EW}^M$	Fato IL12.
--	------------

(portanto são isomorfos, considerando as projeções)

Sejam agora os morfismo $\lambda_D: D \rightarrow \Sigma_D$, $\lambda_E: E \rightarrow \Sigma_E$, $\lambda_V: V \rightarrow \Sigma_V$ e $\lambda_W: W \rightarrow \Sigma_W$ (do diagrama da Figura 9.11 para o diagrama da Figura 12.9).

Considera-se

$\lambda_D \circ f_0$ e $\lambda_E \circ f_1 \implies$	induzido por (xvi)
$(\exists! \lambda_F: F \rightarrow \Sigma_F)$ $(\lambda_D \circ f_0 = \pi_D^F \circ \lambda_F \wedge \lambda_E \circ f_1 = \pi_E^F \circ \lambda_F)$	Fato IL13.

De forma similar, encontra-se:

$(\exists! \lambda_U: U \rightarrow \Sigma_U)$ $(\lambda_V \circ u_0 = \pi_V^U \circ \lambda_U \wedge \lambda_W \circ u_1 = \pi_W^U \circ \lambda_U)$	Fato IL14.
$(\exists! \lambda_{FU}: F \times U \rightarrow \Sigma_{FU})$ $(\lambda_F \circ \pi_F = \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU} \wedge \lambda_U \circ \pi_U = \pi_U^{FU} \circ \lambda_{FU})$	Fato IL15.
$(\exists! \lambda_{DV}: D \times V \rightarrow \Sigma_{DV})$ $(\lambda_D \circ \pi_D = \pi_D^{DV} \circ \lambda_{DV} \wedge \lambda_V \circ \pi_V = \pi_V^{DV} \circ \lambda_{DV})$	Fato IL16.
$(\exists! \lambda_{EW}: E \times W \rightarrow \Sigma_{EW})$ $(\lambda_E \circ \pi_E = \pi_E^{EW} \circ \lambda_{EW} \wedge \lambda_W \circ \pi_W = \pi_W^{EW} \circ \lambda_{EW})$	Fato IL17.
$(\exists! \lambda_M: M \rightarrow \Sigma_M)$ $(\lambda_{DV} \circ m_0 = \pi_{DV}^M \circ \lambda_M \wedge \lambda_{EW} \circ m_1 = \pi_{EW}^M \circ \lambda_M)$	Fato IL18.

Os isomorfismos φ e ω dos fatos IL3 e IL6, respectivamente, e os isomorfismos δ e η dos fatos 6 e 9, respectivamente, são suficientes para esta demonstração.

Basta, agora, mostrar-se que $\lambda_{FU} = \varphi \circ \lambda_M \circ \delta$ e $\lambda_M = \omega \circ \lambda_{FU} \circ \eta$.

Considera-se,

$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta \implies$	$\tau = \pi_F^{FU} \circ \varphi$	(fato IL3)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^F \circ \tau \circ \lambda_M \circ \delta \implies$	$\pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M = \pi_D^F \circ \tau$	(fato IL1)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^{DV} \circ \pi_{DV}^M \circ \lambda_M \circ \delta \implies$	$\lambda_{DV} \circ m_0 = \pi_{DV}^M \circ \lambda_M$	(fato IL18)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^{DV} \circ \lambda_{DV} \circ m_0 \circ \delta \implies$	$m_0 \circ \delta = \alpha$	(fato 6)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^{DV} \circ \lambda_{DV} \circ \alpha \implies$	$\lambda_D \circ \pi_D = \pi_D^{DV} \circ \lambda_{DV}$	(fato IL16)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \lambda_D \circ \pi_D \circ \alpha \implies$	$\pi_D \circ \alpha = f_0 \circ \pi_F$	(fato 1)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \lambda_D \circ f_0 \circ \pi_F \implies$	$\lambda_D \circ f_0 = \pi_D^F \circ \lambda_F$	(fato IL13)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^F \circ \lambda_F \circ \pi_F \implies$	$\lambda_F \circ \pi_F = \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU}$	(fato IL15)
$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU}$	Fato IL19.	

De forma similar, encontra-se

$\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU}$	Fato IL20.
---	------------

Dos fatos IL19 e IL20,

$\pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_D^F \circ \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU}$ $\pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_E^F \circ \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU} \implies$	$\langle \pi_D^F, \pi_E^F \rangle$ é par mono
$\pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU}$	Fato IL21.

De forma similar, encontra-se

$\pi_U^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_U^{FU} \circ \lambda_{FU}$	Fato IL22.
---	------------

Dos fatos IL21 e IL22,

$\pi_F^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_F^{FU} \circ \lambda_{FU}$	$\langle \pi_F^{FU}, \pi_U^{FU} \rangle$ é par mono
$\pi_U^{FU} \circ \varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \pi_U^{FU} \circ \lambda_{FU} \implies$	
$\varphi \circ \lambda_M \circ \delta = \lambda_{FU}$	Fato IL22.

De forma similar, encontra-se

$\omega \circ \lambda_{FU} \circ \eta = \lambda_M$	Fato IL23.
--	------------

□

13 COMPOSIÇÃO DE REDES DE PETRI

Propõe-se aqui um tipo de composição de redes de Petri cujo resultado pode ser interpretado como uma rede em que as transições representam um tipo de transação — a qual se propõe chamar de “transação n tempos”, onde n é um número natural.

Neste capítulo, considera-se redes de Petri como na definição 6.5, ou seja, um grafo interno a \mathcal{MRel} . A composição proposta é simplesmente a composição de arestas de grafos internos a \mathcal{MRel} : sendo R_1 e R_2 redes de Petri com mesmos lugares, o resultado da composição $R_1 \triangleright R_2$ também é uma rede de Petri.

13.1 Transições Dois Tempos

Para redes de Petri R_1 e R_2 , as transições de $R_1 \triangleright R_2$ representam o que aqui se propõe chamar de “transações dois tempos” e que são como segue:

- uma transação dois tempos é realizada numa seqüência de exatamente dois períodos finitos de tempo;
- considera-se que cada lugar da rede R_1 possui tantos *tokens* quantos necessários disponíveis e são todos considerados “*tokens* limpos”;
- cada lugar da rede R_2 é considerado vazio, isto é, sem *tokens*;
- primeiro período
 - são realizadas apenas transições na rede R_1 sem qualquer sincronismo;
 - *tokens* produzidos por transições no primeiro período são chamados “*tokens* sujos” e não podem ser consumidos por transições neste mesmo período;
 - ao final do primeiro período de tempo, os únicos “*tokens* sujos” presentes na rede são aqueles produzidos por transições realizadas durante este período;
- todos e somente os “*tokens* sujos” na rede R_1 são transferidos para os respectivos lugares na rede R_2 a qual não possui qualquer outro *token*;
- segundo período
 - são realizadas apenas transições na rede R_2 sem qualquer sincronismo;
 - as transições realizadas no segundo período podem consumir apenas os “*tokens* sujos” (produzidos no período anterior);

- *tokens* produzidos por transições neste período de tempo são “limpos”;
- ao final do segundo período de tempo, não pode sobrar qualquer “*token* sujo” (não há resíduo).

Cada transação, portanto, consome *tokens* limpos e produz *tokens* limpos sem deixar resíduos (*tokens* sujos).

Cada transação dois tempos desse tipo poderia ser vista como uma transição na rede resultante. Entretanto, devido à propriedade universal do produto fibrado, as transações representadas pelas transições da rede de Petri resultante são todas as necessárias e somente as suficientes para se construir qualquer outra transação dois tempos.

As transições da rede resultante representam então as transações dois tempos atômicas e realizadas em um período de tempo finito — a soma dos dois períodos de tempo descritos acima.

A Figura 13.1 esquematiza a idéia de uma transação dois tempos, representada por uma transição da rede resultante da composição.

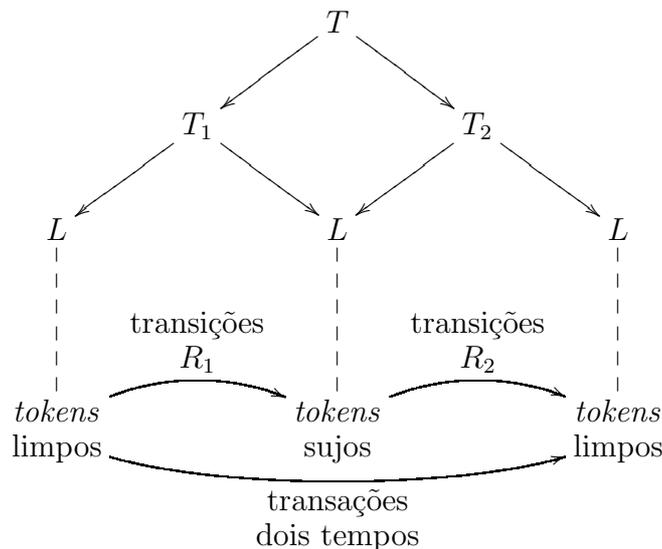


Figura 13.1: Transação dois tempos.

Exemplo 13.1 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.2 mostra a rede de Petri R (esquerda) e a rede de Petri S (direita). A Figura 13.3 mostra $R \triangleright S$ (esquerda) e $S \triangleright R$ (direita). Em $S \triangleright R$ (direita), a transição “ d ” significa a transação “ $b; a$ ”, ou seja, no primeiro período de tempo, a transição “ b ” ocorre na rede S consumindo um *token* limpo do lugar 2 e produzindo um *token* sujo no lugar 1 e, no segundo período de tempo, esse *token* sujo é consumido pela transição “ a ” da rede R que gera três *tokens* limpos no lugar 2. Já em $R \triangleright S$ (esquerda), a transição “ c ” significa a transação “ $a; (b|b|b)$ ” ou “ $a; 3b$ ”, ou seja, no primeiro período de tempo, a transição “ a ” ocorre na rede R consumindo um *token* limpo do lugar 1 e produzindo três *tokens* sujos no lugar 2 e, no segundo período de tempo, esses três *tokens* sujos são consumidos pela transição “ b ” que é executada três vezes (sem sincronismo) na rede S , cada execução gerando um *token* limpo no lugar 1, totalizando, assim, três *tokens* limpos. Ainda em $R \triangleright S$ (esquerda), uma transição que signifique a transação “ $2a; 6b$ ” não aparece pois ela pode ser construída como “ $2c$ ”.



Figura 13.2: Redes R (esquerda) e S (direita).



Figura 13.3: Redes $R \triangleright S$ (esquerda) e $S \triangleright R$ (direita).

O cálculo de $S \triangleright R$ está na Figura 13.4, onde $\langle r_0, T_R, r_1 \rangle : L \rightarrow L$ é a rede R , $\langle s_0, T_S, s_1 \rangle : L \rightarrow L$ é a rede S , P , p_0 e p_1 são o P.F. de r_1 e s_0 e $\langle r_0 \circ p_0, P, s_1 \circ p_1 \rangle : L \rightarrow L$ é a rede $S \triangleright R$.

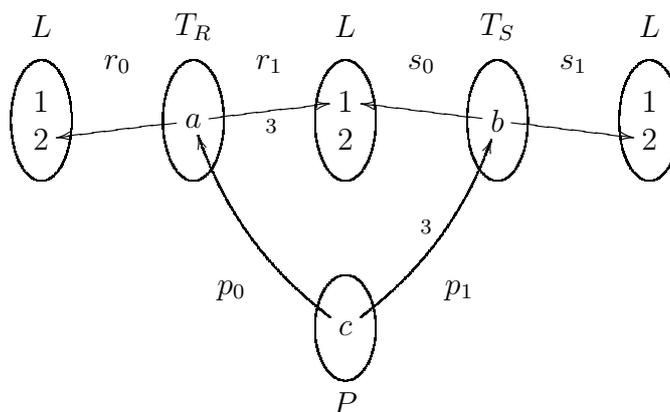


Figura 13.4: Rede $S \triangleright R$.

A seguir, mostra-se um esboço de prova que P , p_0 e p_1 é realmente o P.F. de r_1 e s_0 em \mathcal{MRel} .

É pré-P.F., pois comuta:

$$\widehat{r_1 \circ p_0}(\langle c, 1 \rangle) = \widehat{s_0 \circ p_1}(\langle c, 1 \rangle) \text{ e } \widehat{r_1 \circ p_0}(\langle c, 2 \rangle) = \widehat{s_0 \circ p_1}(\langle c, 2 \rangle).$$

É P.F., pois, para qualquer outro pré-P.F. Q , $q_0 : Q \rightarrow T_R$ e $q_1 : Q \rightarrow T_S$, existe um único morfismo $h : Q \rightarrow P$ tal que $p_0 \circ h = q_0$ e $p_1 \circ h = q_1$, como a seguir.

Se é pré-P.F., comuta, ou seja, para qualquer $x \in Q$, $\widehat{r_1 \circ q_0}(\langle x, 1 \rangle) = \widehat{s_0 \circ q_1}(\langle x, 1 \rangle)$ e $\widehat{r_1 \circ q_0}(\langle x, 2 \rangle) = \widehat{s_0 \circ q_1}(\langle x, 2 \rangle)$. Pela def. de composição de multirrelações: $\widehat{r_1}(\langle a, 1 \rangle) \cdot \widehat{q_0}(\langle x, a \rangle) = \widehat{s_0}(\langle b, 1 \rangle) \cdot \widehat{q_1}(\langle x, b \rangle)$ e $\widehat{r_1}(\langle a, 2 \rangle) \cdot \widehat{q_0}(\langle x, a \rangle) = \widehat{s_0}(\langle b, 2 \rangle) \cdot \widehat{q_1}(\langle x, b \rangle)$. E disso, conclui-se que $3 \cdot \widehat{q_0}(\langle x, a \rangle) = \widehat{q_1}(\langle x, b \rangle)$.

Basta se definir $h : Q \rightarrow P$, para qualquer $x \in Q$, como $\widehat{h}(\langle x, c \rangle) = \widehat{q_0}(\langle x, a \rangle)$.

Fica imediato que $p_0 \circ h = q_0$ e $p_1 \circ h = q_1$.

Tendo qualquer $h_2 : Q \rightarrow P$ tal que $p_0 \circ h_2 = q_0$ e $p_1 \circ h_2 = q_1$, é fácil mostrar que $h_2 = h$, portanto, h é única.

Esse esboço de prova foi feito para se exemplificar o cálculo do P.F. na categoria \mathcal{MRel} . O mesmo pode ser feito para os exemplos que seguem. Pretende-se, como trabalho futuro, estabelecer uma definição algébrica para o P.F. nessa categoria.

A seguir, diversos outros exemplos de composição de redes de Petri.

Exemplo 13.2 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.5 mostra a rede de Petri T (esquerda) e a rede de Petri U (direita). A Figura 13.6 mostra $T \triangleright U$, onde

a transição “ d ” significa “ $a; (b|b)$ ” ou “ $a; 2b$ ”, a transição “ e ” significa “ $a; (b|c)$ ” ou “ $a; (b + c)$ ”¹ e a transição “ f ” significa “ $a; (c|c)$ ” ou “ $a; 2c$ ”.



Figura 13.5: Redes T (esquerda) e U (direita).

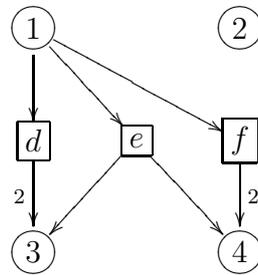


Figura 13.6: Rede $T \triangleright U$.

Exemplo 13.3 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.7 mostra a rede de Petri V (esquerda) e a rede de Petri W (direita). A rede de Petri $V \triangleright W$ é a própria rede V , a menos de isomorfismo (equivalência de *spans*).

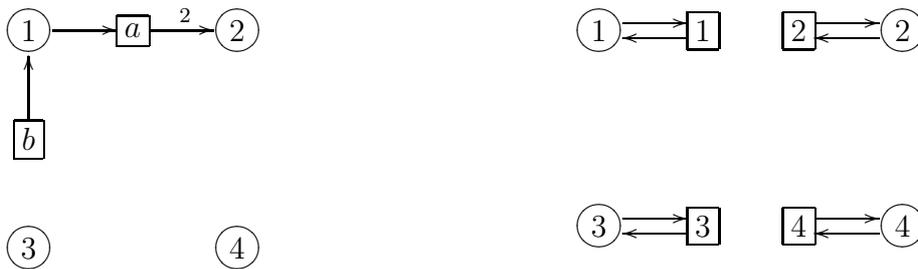


Figura 13.7: Redes V (esquerda) e W (direita).

A rede W desse exemplo é o *span* identidade $\langle id_L, L, id_L \rangle : L \rightarrow L$ onde $L = \{1, 2, 3, 4\}$. De fato, para qualquer conjunto de lugares L , a rede de Petri dada pelo *span* identidade desse lugar atua como identidade na composição de redes de Petri.

Exemplo 13.4 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.8 mostra a rede de Petri R_1 (esquerda) e a rede de Petri R_2 (direita). A Figura 13.9 mostra $R_1 \triangleright R_2$, onde a transição “ z ” significa “ $(x|x|x); (y|y|y|y|y)$ ” ou “ $3x; 5y$ ”.



Figura 13.8: Redes R_1 (esquerda) e R_2 (direita).

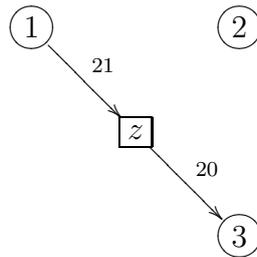


Figura 13.9: Rede $R_1 \triangleright R_2$.



Figura 13.10: Redes R_3 (esquerda) e R_4 (direita).

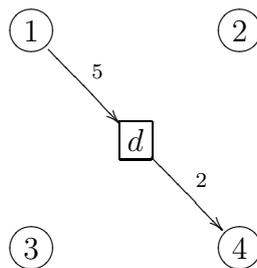


Figura 13.11: Rede $R_3 \triangleright R_4$.



Figura 13.12: Redes R_5 (esquerda) e R_6 (direita).

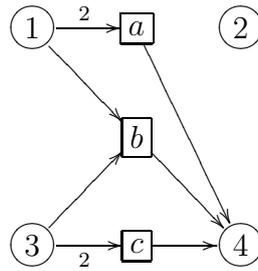


Figura 13.13: Rede $R_5 \triangleright R_6$.

Exemplo 13.5 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.10 mostra a rede de Petri R_3 (esquerda) e a rede de Petri R_4 (direita). A Figura 13.11 mostra $R_3 \triangleright R_4$, onde a transição “ d ” significa “ $(a|a|b|b|b); (c|c)$ ” ou “ $(2a + 3b); 2c$ ”.

Exemplo 13.6 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.12 mostra a rede de Petri R_5 (esquerda) e a rede de Petri R_6 (direita). A Figura 13.13 mostra $R_5 \triangleright R_6$, onde “ a ” significa “ $2x; z$ ”, “ b ” significa “ $(x + y); z$ ” e “ c ” significa “ $2y; z$ ”.



Figura 13.14: Redes R_7 (esquerda) e R_8 (direita).

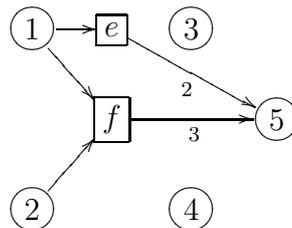


Figura 13.15: Rede $R_7 \triangleright R_8$.

Exemplo 13.7 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.14 mostra a rede de Petri R_7 (esquerda) e a rede de Petri R_8 (direita). A Figura 13.15 mostra $R_7 \triangleright R_8$, onde “ e ” significa “ $a; (c + 2d)$ ” e “ f ” significa “ $(a + b); 3d$ ”.

Exemplo 13.8 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.16 mostra uma rede de Petri T (esquerda) e as redes de Petri T^2 (centro) e T^3 (direita), onde “ d ” significa “ $a; b$ ”, “ e ” significa “ $b; c$ ” e “ f ” significa “ $a; b; c$ ”, esta última, uma transação três tempos.

¹Onde, “+” significa “soma monoidal”; não significa “não-determinismo”.

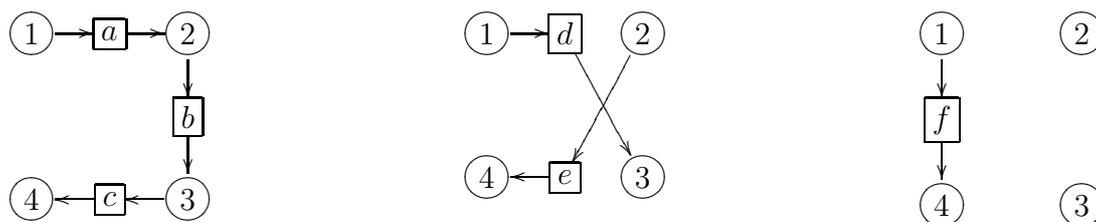


Figura 13.16: Redes T (esquerda), T^2 (centro) e T^3 (direita).



Figura 13.17: Redes P (esquerda) e P^2 (direita).

Exemplo 13.9 (Composição de Redes de Petri) A Figura 13.17 mostra uma rede de Petri P (esquerda) e a rede de Petri P^2 (direita), onde “ d ” significa “ $a; (a + b)$ ”, “ e ” significa “ $c; a$ ”, “ f ” significa “ $b; -$ ” e “ g ” significa “ $-; c$ ”, onde “ $-$ ” significa nenhuma transição.

14 CONCLUSÃO

Este trabalho explorou *spans* e composição de *spans* em algumas categorias apresentando diversos exemplos.

14.1 Principais Resultados

Os principais resultados obtidos foram:

- apresentou através de *spans*: como se definir relações binárias e multirrelações binárias estendidas em qualquer categoria, grafos internos, LTS e LTS determinísticos;
- propôs duas definições alternativas de redes de Petri através de *spans*, sendo que uma delas generaliza redes de Petri;
- estabeleceu maneiras de se verificar diversas propriedades de endorrelações expressas por *spans*;
- propôs propriedades de grafos internos e maneiras de as verificar;
- provou algumas propriedades da composição de *spans*;
- mostrou que a composição de *spans* expressa a composição de multirrelações, mas não de relações;
- definiu uma composição de grafos internos que calcula caminhos de tamanhos pré-estabelecidos, podendo esses terem pedaços em grafos diferentes, desde que com mesmos vértices;
- definiu uma composição de LTS que calcula transações de tamanhos pré-estabelecidos, podendo ser realizadas em LTS diferentes, desde que com mesmos estados, e provou algumas propriedades a respeito dessa composição;
- definiu um tipo de transação capaz de ser calculado em redes de Petri através da composição de grafos internos.

14.2 Publicações

- “Composition of Transformations: a Framework for Systems with Dynamic Topology”. In: CASYS’2003: 6th International Conference on

Computing Anticipatory Systems, 2003, Liège. Computing Anticipatory Systems: abstract book. Liège : CHAOS asbl, 2003. v. 1. p. 10-10. Marnes Augusto Hoff (autor), Karina Girardi Roggia (co-autora), Paulo Blauth Menezes (co-autor).

- **“Composition of Transformations: a Framework for Systems with Dynamic Topology”**. International Journal Of Computing Anticipatory Systems, Liège, v. 14, p. 259-270, 2004. Marnes Augusto Hoff (autor), Karina Girardi Roggia (co-autora), Paulo Blauth Menezes (co-autor).
- **“Computations of Partial Automata through Span Composition”**. In: EUROCAST’2005 - 10th International Workshop on Computer Aided Systems Theory, 2005, Las Palmas de Gran Canaria. Cast and Tools for Robotics, Vehicular and Communication Systems, 2005. p. 5-6. Artigo completo em: Lecture Notes in Computer Science. v. 3643. p. 15-20. Karina Girardi Roggia (autora), Paulo Blauth Menezes (co-autor), Marnes Augusto Hoff (co-autor).
- **“Bicompleteness in the Category of Partial Graphs with Total Homomorphisms”**. Electronic Journal on Mathematics of Computation, 2005. Karina Girardi Roggia (autora), Paulo Blauth Menezes (co-autor), Marnes Augusto Hoff (co-autor).

14.3 Trabalhos Futuros

- Estudar a noção dual de *span* — *cospan* —, bem como cografos e correlações;
- estudar as noções duais das propriedades de relações e de grafos;
- estudar bicategorias: $Span(\mathcal{C})$ (ou $Sp(\mathcal{C})$), $Cospan(\mathcal{C})$ e $Rel(\mathcal{C})$;
- generalizar a composição de arestas de grafos internos para tratar grafos com conjuntos de vértices diferentes;
- estabelecer a preservação de propriedades de grafos pela composição de arestas de grafos internos;
- generalizar a composição de arestas de grafos internos para grafos reflexivos¹ e categorias;
- generalizar a composição de redes de Petri para indicar transações quaisquer e não apenas transações n -tempos;
- comparar as redes de Petri aqui definidas com as redes de Petri *zero safe* (BRUNI; MONTANARI, 2001);
- incluir marcação na definição de redes de Petri;
- definir uma categoria de redes de Petri como definidas neste trabalho;
- aprofundar o estudo da categoria \mathcal{MRel} : identificar monomorfismos, epimorfismos, pares e famílias mono; definir produtos, equalizadores, P.F.;

¹Cada grafo reflexivo é uma 5-upla e cada vértice possui uma aresta diferenciada.

- investigar maneiras de se distinguir multirrelações de multirrelações estendidas em qualquer categoria.

REFERÊNCIAS

ADÁMEK, J.; ROSICKÝ, J. On Multivarieties and Multialgebraic Categories. **Journal of Pure and Applied Algebra**, [S.l.], n.163, p.1–17, 2001.

BARBOSA, L. S. **A Brief Introduction to Bicategories**. [S.l.]: Departamento de Informática da Universidade de Minho, 2003. (DI-PURe-03:12:01).

BARR, M.; WELLS, C. **Toposes, Triples, and Theories**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1985. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).

BARR, M.; WELLS, C. **Category Theory for Computing Science**. 2nd ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. (Prentice Hall International Series in Computer Science).

BEDNARCZYK, M. A.; BORZYSZKOWSKI, A. M. General Morphisms of Petri Nets. In: ICALP: ANNUAL INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON AUTOMATA, LANGUAGES AND PROGRAMMING, 1999. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999.

BÉNABOU, J. Introduction to Bicategories. In: **Reports of the Midwest Category Seminar**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1967. p.1–77. (Springer Lecture Notes in Mathematics, n. 47).

BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra 1: basic category theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v.50).

BRUNI, R.; GADDUCCI, F. Some algebraic laws for spans. **Electr. Notes Theor. Comput. Sci.**, [S.l.], v.44, n.3, 2001.

BRUNI, R.; MONTANARI, U. Transactions and Zero-Safe Nets. In: ADVANCES IN PETRI NETS: UNIFYING PETRI NETS, 2001. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 2001. (Lecture Notes in Computer Science).

FREYD, P. J.; SCEDROV, A. **Categories, Allegories**. Amsterdam: North-Holland, 1990. xviii+296p. (North-Holland Mathematical Library, v.39).

HENNESSY, M. **Algebraic Theory of Processes**. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1988.

HOFF, M. A.; ROGGIA, K. G.; MENEZES, P. B. Composition of Transformations: a framework for systems with dynamic topology. **International Journal Of Computing Anticipatory Systems, Liège**, [S.l.], v.14, p.259–270, 2004.

- LAWVERE, F. W.; ROSEBRUGH, R. **Sets for Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- LAWVERE, F. W.; SCHANUEL, S. H. **Conceptual Mathematics: a first introduction to categories**. Buffalo, NY: Buffalo Workshop Press, 1991.
- MAC LANE, S. **Categories for the working mathematician**. 2nd ed. New York / Berlin: Springer, 1998. (Graduate Texts in Mathematics).
- MENEZES, P. B. **Reificação de Objetos Concorrentes**. 1997. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- MENEZES, P. B. **Linguagens Formais e Autômatos**. 4.ed. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 2001. 165p.
- MENEZES, P. B.; HAEUSLER, E. H. **Teoria das Categorias para Ciência da Computação**. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 2001. 324p.
- MESEGUER, J.; MONTANARI, U. **Petri Nets Are Monoids**. [S.l.]: SRI International, 1988. (SRI-CSL-88-3).
- MILIUS, S. **Relations in Categories**. 2000. Dissertação (Graduate Program in Mathematics and Statistics) – York University, Toronto.
- MILNER, R. **Communication and Concurrency**. [S.l.]: Prentice Hall, 1989. (International Series in Computer Science. SU Fisher Research 511/24).
- PIERCE, B. C. **Basic Category Theory for Computer Scientists**. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.
- ROGGIA, K. G. **Morfismos Parciais e Ciência da Computação: um estudo**. 2001. Projeto de Diplomação (Curso de Bacharelado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, UFRGS, Porto Alegre.
- STREET, R. H.; CARBONI, A.; KASANGIAN, K. Bicategories of Spans and Relations. **Journal of Pure and Applied Algebra**, [S.l.], v.33, p.259–267, 1984.
- VIGNA, S. Multirelational Semantics for Extended Entity-Relationship Schemata With Applications. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONCEPTUAL MODELING, ER, 21, 2002. **Conceptual modeling: proceedings**. Berlin: Springer-Verlag, 2002. (Lecture Notes in Computer Science, v. 2503).