UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

SOLUÇÃO DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM ESPAÇOS DE NIKOL'SKII ATRAVÉS DO MÉTODO DE GALERKIN

por

ADILÇÃO CABRINI BEUST

Dissertação submetida como requisito parcial
para obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. João Paulo Lukaszczyk
Orientador

Santa Maria, janeiro de 2001.

AGRADECIMENTOS

Para o desenvolvimento e a concretização deste trabalho sou imensamente grato:

Ao Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk pela sua incansável tarefa de orientador e que soube compartilhar a sua competência e integridade profissional; bem como pela sua força incentivadora e amizade.

As mulheres da minha vida, por toda a paciência, incentivo e demonstrações de amor:

– Marina, a minha esposa.

– Bruna e Mariane, as minhas filhas.

A minha mãe, por sua pureza de alma.

Ao meu pai, vivo nas minhas lembranças.

A todos os meus familiares e a Neusa Lixinski, pela dedicação e carinho.

Aos colegas do CPGMAp pelo companheirismo e apoio, em especial, o Rosenei Knackfuss, a Leandra Anversa Fiorese e o Alcides Buzato Dallanora, pela alegria e grande amizade.

A Profª. Drª. Vanilde Bisognin, Profª. Drª. Eleni Bisognin e Profª. Drª. Liliane Barrichello, pelo entusiasmo e empenho na viabilidade deste convênio UFRGS-UFSM.

Aos professores, funcionários e a coordenação do CPGMAp pela disponibilidade e apoio.

A UFSM pela oportunidade oferecida através deste convênio e, em especial, a UNIFRA pela oportunidade profissional e ambiente saudável de trabalho ao longo destes anos.

Aos colegas e, especialmente, a Diretora da Área de Ciências Exatas da UNIFRA Profª. Nires M. Colleto e ao Coordenador do Curso de Matemática Prof. Alcebíades Gazzoni pela compreensão, apoio e incentivo para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma solução para um problema abstrato de Cauchy. Basicamente, dá-se uma formulação abstrata para certos tipos de equações diferenciais parciais não lineares de evolução em espaços de Nikol'skii, tais espaços possuem boas propriedades de regularidade e resultados de imersão compacta, num certo sentido são intermediários entre os espaços de Hölder e os espaços de Sobolev. Aplicando o método de Galerkin, prova-se resultados de existência global de soluções fracas, como também a existência de soluções fracas com a propriedade de reprodução. E impondo mais hipóteses sobre os operadores envolvidos demonstra-se unicidade de soluções fracas.

Palavras-chave: Solução fraca, Método de Galerkin, Espaços de Nikol'skii.

ABSTRACT

In this work it is presented a solution for a Cauchy general problem. Basically is done a weak formulation for a class of non linear diferential partial equations in Nikol'skii spaces. Such spaces have good proprieties such as compact imersion and in a certain sense, this spaces are intermediate between Hölder spaces and Sobolev spaces. Aplying the Galerkin's method it's proved global existence results of weak solutions and also existence of weak solutions with a reproduction property. With further hypothesis at the operators we can proof the uniqueness of weak solutions.

Key words: Weak solution, Galerkin's method, Nikol'skii's spaces.

Sumário

NOTAÇÃO

Inicialmente, nesta etapa do nosso trabalho, vamos fixar as notações que iremos utilizar nos próximos capítulos normalmente utilizadas em estudos de equações diferenciais parciais.

$E \hookrightarrow F$, denota que o espaço funcional E está continuamente imerso no espaço funcional F, isto é, para todo e qualquer $x \in E$, temos que $\|x\|_F \leq \|x\|_E$, onde $c > 0$ é uma constante.

Ω, um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3, 4)$.

$\overline{\Omega}$, o fecho do conjunto Ω.

$\partial\Omega$, fronteira bem regular (suave) do conjunto Ω.

Q_T, onde $Q = \Omega \times (0, T)$, $t \in (0, T)$, t é o tempo.

$D^\alpha u(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} ... \partial x_n^{m_n}}$, onde $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ é um multi-índice em $\mathbb{R}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

$L^p(\Omega)$, o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \,, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{supess}_{t \in \Omega} |f(x)| < \infty \,, \text{ se } p = \infty \,.$$

$C^0(\Omega) = C(\Omega)$, espaço das funções contínuas em Ω.

$C^k(\Omega)$, espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω.

$C_0^k(\Omega)$, espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω.

$C^\infty(\Omega)$, espaço das funções indefinidamente contínuas e deriváveis em Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$, espaço das funções indefinidamente contínuas e deriváveis com suporte compacto em Ω.

$D(\Omega)$, o espaço das funções indefinidamente deferenciáveis e com suporte compacto em Ω, munido da topologia de Schwartz.

B^{-1}, denota o dual do espaço de Banach B, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos em B.

$D'(\Omega)$, representa o dual de $D(\Omega)$, ou seja, espaço das distribuições sobre Ω.

$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, espaço das funções localmente integráveis, ou seja, f é integrável a Lebesgue sobre cada compacto k, $k \subset \Omega$, tal que

$$\int_k |f(x)|\, dx < \infty .$$

$L^2(\Omega)$, espaço de Hilbert com produto interno

$$((u,v))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\, dx ,$$

e norma associada a este produto na forma

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u^2\, dx .$$

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \alpha = 0,1,...,m\}$, espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, com $D^\alpha u$ no sentido das distribuições e produto interno

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega D^\alpha u\, D^\alpha v\, dx$$

e norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$W^{m,p}(D) = \{u \in L^p(D) : D^\alpha u \in L^p(D)\ ,\ 0 \leq |\alpha| \leq m \text{ e } 1 \leq p \leq \infty\}$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$, com norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty\ .$$

$W^{m,2}(D) = H^m(D)$, um espaço de Hilbert separável com $D \subset \mathbb{R}^n$.

$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$, tal que $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' = W^{-m,2}(\Omega)$, relação entre os duais de H^m, H_0^m e $W^{m,2}$ sobre Ω.

Se B é um espaço de Banach, temos:

$$\begin{aligned} &L^p(0,T;B) = \{u : u \text{ mensurável de } [0,T] \longrightarrow B, \text{ onde} \\ &\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u(s)\|_B^p\ ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\,,\ \text{ se } 1 \leq p < \infty\,, \\ &\qquad\qquad \text{e} \\ &\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} = \operatorname*{supess}_{t \in (0,T)} \|u(s)\|_X < \infty,\ \text{ se } p = \infty\}\ . \end{aligned}$$

$L^2(0,T;X)$, onde X é um espaço de Hilbert, denotaremos o produto interno em X por

$$(u,v) = (u,v)_X = \int_0^T u(s)\ v(s)\ ds$$

e as normas na forma:

$$|u| = \|u\|_{L^2(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(s)\|_X^2\ ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,,\ \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$|u|_\infty = \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{supess}_{t \in (0,T)} \|u(s)\|_X < \infty,\ \text{ se } p = \infty\,.$$

$L^2(0,T;X^1)$, onde X^1 é um espaço de Hilbert, representaremos o produto interno em X^1 por

$$((u,v)) = ((u,v))_{X^1}$$

e, as normas na forma:

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(0,T;X^1)} \quad \text{e} \quad \|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(0,T;X^1)} \ ,$$

são obtidas de forma análoga como em X .

$L^q(0,T;X^{-1})$, o dual topológico de $L^p(0,T;X)$, para $1 \leq p,q < \infty$ e com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

$D(0,T;X)$, funções de C^∞ de $(0,T) \longrightarrow X$ e com suporte compacto em $(0,T)$.

$C^k([0,T];X)$, funções k vezes deriváveis com derivadas contínuas.

$W^{s,p}(I;B)$, o espaço de Sobolev fracionário para $I \subset \mathbb{R}$ e B um espaço de Banach.

$N^{s,q}(I;B)$, o espaço de Nikol'skii de ordem s e expoente q, para $I \subset \mathbb{R}$ e B um espaço de Banach.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste trabalho desenvolvemos uma formulação abstrata para uma classe de equações diferenciais parciais não lineares de evolução e estas incluem vários problemas da mecânica dos fluidos, por exemplo, a equação do calor, a equação de Burguers, as clássicas equações de Navier-Stokes, as equações de Boussinesq, as equações de fluidos micropolares, as equações de bioconvecção e outras.

Mais detalhadamente, consideramos o seguinte problema abstrato de Cauchy:

$$u_t + Au + B(u,u) + B_1 u + B_2 u = f\,, \quad \text{em } \; Q_T$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{com } \; x \in \Omega\,,$$

onde $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $u(x,t) \in \mathbb{R}^n$; A, B_1 e B_2, são operadores lineares em um espaço de Hilbert real separável X e B é uma aplicação bilinear.

Esta classe de equações é notadamente objeto de estudo de matemáticos e físicos em geral. As dificuldades que encontramos na análise desta classe são para determinar as condições matemáticas que garantam a existência de soluções em certos espaços funcionais e verificar a adequação das equações para a situação física que interessa-nos resolver.

O objetivo deste trabalho, principalmente, é o de determinar, com base, em ROJAS-MEDAR & ORTEGA-TORRES [18] uma solução através do método de Galerkin para uma classe de equações diferenciais parciais não lineares em espaços de Nikol'skii. Ao longo do trabalho, estabelecemos resultados de existência global de soluções fracas, bem como a existência de soluções com a propriedade de reprodução e ainda, impondo mais hipóteses sobre os operadores, demonstramos a unicidade de soluções fracas.

A formulação abstrata que apresentamos é análoga à apresentada por TEMAM [25] e HÃRÃGUS [6], o que justifica o nosso enfoque de utilizar o método de Galerkin, cujas etapas principais são as seguintes:

(i) A formulação variacional do problema, a qual requer uma escolha adequada dos espaços funcionais.

(ii) A existência da solução do problema variacional considerando os seguintes tópicos:

- **(a)** Formulação do problema aproximado e existência de solução local.
- **(b)** Estimativas a priori, onde obtemos a existência global das aproximações em um intervalo $[0,T]$, $T > 0$. Aqui vamos mostrar também que estas aproximações são limitadas uniformemente em certos espaços normados.
- **(c)** Uso das estimativas de (a) para obter o candidato a solução.
- **(d)** Fortalecimento das convergências obtidas em (c) para a passagem ao limite nos termos não lineares.
- **(e)** Mostrar que o candidato (c) é realmente solução do problema variacional.

(iii) Existência de solução fraca com propriedade de reprodução, a qual generaliza a periodicidade desta solução.

(iv) Estudo da unicidade da solução obtida, o que exige mais hipóteses sobre os dados e operadores do problema.

Uma das etapas mais difíceis dos ítens apresentados anteriormente é o fortalecimento das convergências para o qual são utilizados normalmente o lema de compacidade de Aubin-Lions ou teoremas que envolvam derivadas temporais fracionárias, ver LIONS [10]ou TEMAM [25] Estes teoremas citados podem ser aplicados no problema que apresentamos; porém nós utilizamos um teorema de compacidade devido a J. Simon, ver SIMON [19] o qual é uma nova versão do lema de Aubin-Lions em espaços de Nikol'skii. O lema de compacidade devido a Simon é aplicável em problemas nos quais os teoremas mencionados anteriormente são ineficazes, por exemplo, nos problemas que envolvem as equações dos fluidos não homogêneos, ver ROJAS-MEDAR [17] e SIMON [20].

Para o uso prático do teorema de J. Simon, ROJAS-MEDAR & ORTEGA-TORRES [18] apresenta um lema, preliminar 2.22, que é fundamental para obtermos as estimativas nos espaços de Nilkol'skii, as quais são necessárias quando utilizamos os resultados de compacidade devido a Simon.

O segundo capítulo deste trabalho apresenta os preliminares necessários para o estudo da equações diferenciais parciais e principalmente, o lema 2.22 que é básico para obtermos as estimativas nos espaços de Nikol'skii. Tais espaços foram introduzidos por S. M. Nilkol'skii no início da década de 50 (veja NIKOL'SKII [13], [14] e [15]) e são espaços que num certo sentido são intermediários entre os espaços de Hölder e Sobolev. Basicamente, os espaços de Nikol'skii envolvem a condição Hölder com derivadas fracionárias na norma L^p.

Posteriormente, no terceiro capítulo temos um capítulo referente a apresentação do problema abstrato de Cauchy, as hipóteses com relação aos seus dados e sobre os operadores envolvidos. A partir daí, nos próximos três capítulos, demonstraremos os teoremas fundamentais no desenvolvimento deste trabalho, os quais chamamos de Teorema 1, Teorema 2 e Teorema 3. O primeiro destes teoremas estabelece resultados de existência global de soluções fracas; o segundo, prova a existência de soluções com a propriedade de reprodução e o terceiro garante a unicidade de soluções fracas. Finalmente, o último capítulo apresenta algumas conclusões a respeito do estudo que fizemos e propõe algumas segestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

Nesta seção apresentaremos alguns resultados fundamentais necessários no estudo das equações diferenciais não lineares de evolução. Estes resultados são apresentados na forma de definições, lemas, proposições e teoremas, todos importantes para obtermos as demonstrações dos teoremas 1, 2, e 3; os quais apresentam resultados de existência de soluções, soluções periódicas e unicidade de soluções, respectivamente.

2.1 Desigualdade de Cauchy

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ então

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Demonstração: Veja EVANS [4] na página 553.

2.2 Desigualdade de Cauchy com ε

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ então

$$ab \leq \frac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon^2 b^2 .$$

Demonstração: Veja EVANS [4] na página 553.

2.3 Lema

Dados $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ então

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n a_1^2 + n a_2^2 + ... + n a_n^2 .$$

2.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Seja E um espaço com produto interno. Para quaisquer $u, v \in E$, temos:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\| \ .$$

Demonstração: Veja EVANS [4] na página 56.

2.5 Desigualdade de Young

Se $a, b \in \mathbb{R}_+$; $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 < p, q < \infty$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ,$$

então

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} a^q .$$

Demonstração: Veja BRÉZIS [2] na página 56.

Uma conseqüência imediata da desigualdade de Young é o seguinte resultado com as mesmas hipóteses do preliminar 2.5 e supondo $\varepsilon > 0$, obtemos:

$$ab \leq \frac{1}{p\varepsilon^p}a^p + \frac{\varepsilon^q}{q}b^q\,.$$

2.6 Desigualdade de Hölder

Sejam $1 < p < \infty$; $1 < q < \infty$, com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$, temos a desigualdade

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_p \, \|v\|_q\ .$$

Demonstração: Veja MEDEIROS [11] na página 75.

2.7 Teorema de Caractheodory

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde $D \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, uma função que satisfaz as condições de Caractheodory:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;

(iii) Para cada compacto $U \subset D$, existe uma função real integrável $m(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m(t)\ ,\ \ \forall (t,x) \in U\,.$$

Então existe uma única solução local de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(x_0) = x_0 \end{cases}$$

sobre algum intervalo $|t - t_0| < \beta$, $\beta > 0$.

Demonstração: Veja HALE [5] na página 28.

2.8 Teorema

Seja f contínua no conjunto aberto Ω de $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$. Para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$ suponhamos que o problema de dados iniciais, com λ fixo,

$$x' = f(t, x, \lambda)$$
$$x(t_0) = x_0$$

tenha uma única solução $\varphi = (t, t_0, x_0, \lambda)$, definida no seu intervalo máximo (W_-, W_+), onde $W_\pm = W_\pm (t_0, x_0, \lambda)$.

Então

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, \ t \in (W_- (t_0, x_0, \lambda), W_+ (t_0, x_0, \lambda))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e φ é contínua em D.

Demonstração: Veja SOTOMAYOR [22] na página 34.

2.9 Desigualdade de Gronwall

Sejam u, v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha \geq 0$, satisfazem a

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s) \ u(s) \ ds, \quad t \in [a, b] .$$

Então

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t v(s) \ ds\right) .$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Demonstração: Veja SOTOMAYOR [22] na página 37.

2.10 Corolário (Weierstrass)

Toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos (isto é, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $X \in A$).

Demonstração: Veja LIMA [8] na página 187.

2.11 Lema (Hardy-Littlewood)

Suponha que $\widetilde{f}$ é integrável sobre $(0, a)$, $a > 0$ finito. Para qualquer t, $0 < t < a$, colocamos

$$\theta(t) = \sup_{\xi} \frac{1}{t - \xi} \int_{\xi}^{t} \widetilde{f}(s)\, ds\,, \quad 0 \leq \xi < t\,,$$

$$\beta(t) = \sup_{\xi} \frac{1}{\xi - t} \int_{t}^{\xi} \widetilde{f}(s)\, ds\,, \quad t < \xi \leq a$$

e

$$M(t) = \max\{\theta(t), \beta(t)\}\,.$$

Então, se $\widetilde{f} \in L^r(0, a)$, $r > 1$, verificamos que:

$$M(t) \in L^r(0, a) \quad \text{e} \quad \int_0^a M^r(t)\, dt \leq 2\left(\frac{r}{1 - r}\right)^r \int_0^a \widetilde{f}(t)\, dt\,.$$

Demonstração: Veja ZYGMUND [27] na página 32.

2.12 Teorema de Fubini

Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

Então, para quase todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y)\, dy \in L^1_x(\Omega_1)\,.$$

Igualmente, para quase todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)\, dx \in L^1_y(\Omega_2)\ .$$

Além disso, verificamos que:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\, dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\, dx\, dy\,.$$

Demonstração: Veja MEDEIROS [11] na página 94.

2.13 Definição (Dualidade)

Para $u \in L^p(0,T;X)$ temos a dualidade:

$$\langle f, u \rangle_{L^q(o,T;X^{-1})\times(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(s), u(s) \rangle_{X^{-1}\times X}\, ds.$$

2.14 Definição (Integral de Bochner)

Dada $u \in L^p(0,T;X)$ podemos associá-la a uma distribuição com valores em X da seguinte forma:

$$T\,u : D(0,T) \longrightarrow X$$
$$\phi \longmapsto \langle T\,u, \phi \rangle\ ,$$

onde

$$\langle T\,u, \phi \rangle = \int_0^T u(s)\, \phi(s)\, ds, \quad \forall \phi \in D(0,T)\ ,$$

sendo a integração de funções à valores em espaços de Banach.

Neste sentido, $L^p(0,T;X) \hookrightarrow D'(0,T;X)$, onde $D'(0,T;X)$ é o espaço das distribuições com valores em X.

2.15 Teorema do Ponto Fixo de Schaefer

Seja $f : A \longrightarrow A$ um operador contínuo e compacto no espaço de Banach A.

Suponhamos que o conjunto $\{x \in A : x = \lambda f(x) \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\}$ é limitado.

Então f tem um ponto fixo.

Demonstração: Veja EVANS [4] na página 466.

2.16 Definição (Tipos de Convergências)

Sejam E, F espaços de Banach e (X_n) uma seqüência contida em E.

(i) Dizemos que X_n converge fortemente para X ($X_n \longrightarrow X$, quando $n \to \infty$), se tivermos que

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_E = 0\,.$$

(ii) Dizemos que X_n converge fracamente para X ($X_n \rightharpoonup X$, quando $n \to \infty$) se, para todo $f \in E'$, tivermos que

$$f(X_n) \longrightarrow f(x)\ , \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

(iii) Dizemos que X_n converge fraco-* para X ($X_n \underset{*}{\rightharpoonup} X$, quando $n \to \infty$), se para F com $F' = E$ e para todo $f \in F$, tivermos que

$$f(X_n) \longrightarrow f(x)\ , \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Para um maior detalhamento das definições acima ver BRÉZIS [2] na página 35.

2.17 Proposição

Seja $(X_n) \subset E$ uma seqüência.

Assim, se $X_n \rightharpoonup X$(fraco) então $(\|X_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|X_n\| \leq M$, $\forall n$.

Demonstração: Veja BRÉZIS [2] na página 35.

2.18 Teorema

Suponhamos que H é uma soma Hilbertiana dos $(E_n)_{n\geq 1}$, uma sucessão de subespaços fechados de H.

Seja $u \in H$ e seja $u_n = P_{E_n}u$.

Então, verificamos que:

(a)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,,$$

isto é,

$$u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n \,;$$

(b)

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \quad \text{(Identidade de Bessel-Parseval).}$$

Reciprocamente, dada uma sucessão (u_n) em H tal que $u_n \in E_n$, $\forall n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \,,$$

então a série

$$\sum_n u_n$$

é convergente e

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

verifica $u_n = P_{E_n} u$.

Demonstração: Veja BRÉZIS [2] na página 85.

2.19 Definição (Espaço de Sobolev Fracionário)

O espaço de Sobolev fracionário para $I \subset \mathbb{R}$ e B um espaço de Banach é definido por:

$$W^{s,p}(I;B) = \left\{ u \in L^p(I;B) : \|u\|_{W^{s,p}(I;B)} < \infty \,,\ 0 < s < 1 \text{ e } 1 \leq p \leq \infty \right\} ,$$

onde:

$$\|u\|_{W^{s,p}(I;B)} = \left(\int_{I \times I} \left(\frac{\|u(y) - u(x)\|_B}{|y-x|^s} \right) \frac{dy\,dx}{|y-x|} \right)^{\frac{1}{p}} , \quad \text{se } \ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{s,\infty}(I;B)} = \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{\|u(y) - u(x)\|_B}{|y-x|^s} , \quad \text{se } \ p = \infty.$$

Nota: Os $W^{s,p}(I;B)$ com as suas respectivas normas são espaços de Banach e $W^{s,2}(I;B) = H^s(I;B)$ é um espaço de Hilbert.

Ver ADAMS [1] na página 214, Teorema 7.48, para um maior detalhamento da definição acima.

2.20 Definição

Para qualquer $h > 0$, definimos I_h por $I_h = \{t \in I : t + h \in I\}$ e a função $u_h(t)$ na forma $u_h(t) = u(t+h) - u(t)$. Assim, dado $u \in L^p(I;B)$, $1 \leq p \leq \infty$, então u, u_h e $u_h + u$ estão todas bem definidas em I_h.

Os seguintes espaços funcionais possuem boas propriedades de regularidade e resultados de imersão compacta (como veremos adiante nos preliminares Lema 2.22, Proposição 2.33 e o Teorema 2.24). Eles constituem os espaços funcionais nos quais desenvolveremos os resultados principais deste trabalho.

Assim, uma referência fundamental com respeito a estes espaços é o artigo SIMON [21].

2.21 Definição (Espaço de Nikol'skii)

O espaço de Nikol'skii de ordem s e expoente q, para $I \subset \mathbb{R}$ e B um espaço de Banach, é definido na forma:

$$N^{s,q}(I;B) = \left\{u \in L^q(I;B) : \|u\|_{\widetilde{N}^{s,q}} < \infty\,,\ 0 \leq s \leq 1 \ \text{ e } \ 1 \leq q \leq \infty\right\},$$

onde

$$\begin{aligned}\|u\|_{\widetilde{N}^{s,q}(I;B)} &= \sup_{h>0} \frac{1}{h^s}\left(\int_{I_h} \|u_h(t)\|_B^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \|u_h\|_{L^q(I_h;B)} \ ,\end{aligned}$$

se $1 \leq q < \infty$ e $I_h(0, T-h)$ e

$$\|u\|_{\widetilde{N}^{s,\infty}(I;B)} \equiv \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \|u_h\|_{L^\infty(I_h;B)} \ ,$$

se $q = \infty$ e $I_h(0, T-h)$.

Assim, $N^{s,q}(I;B)$ tem estrutura de espaço vetorial para as operações usuais de funções e dotado da norma

$$\|u\|_{N^{s,q}(I;B)} = \|u\|_{L^q(I_h;B)} + \|u\|_{\widetilde{N}^{s,q}(I;B)}$$

é um espaço de Banach.

Sejam as considerações:

1ª A condição

$$\|u\|_{\widetilde{N}^{s,q}(I;B)} < \infty\,, \quad 1 \leq q \leq \infty\,,$$

é equivalente a

$$\|u_h\|_{L^q(I_h;B)} \leq ch^s\,, \quad \forall h \in I$$

e c é uma constante finita positiva.

2ª O espaço $N^{s,\infty}(I;B)$ é o espaço das funções Hölder – contínuas de expoente s com valores em B.

2.22 Lema

Suponha que X e Y espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ continuamente. Sejam $w \in L^2(0,T;X)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(0,T)$, e que satisfaçam a seguinte desigualdade integral:

$$\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_Y^2 \, dt \leq \int_0^{T-h} \left(\|w_h(t)\|_X \int_t^{t+h} g(\tau)\, d\tau \right) dt\,. \tag{2.1}$$

Então:

(A) Se $g \in L^1(0,T)$, temos

$$\|w\|_{N^{\frac{1}{4},2}(0,T;Y)} \leq c\,\|w\|_{L^2(0,T;X)}^{\frac{1}{2}}\,,$$

onde c é uma constante positiva que apenas depende de $\|g\|_{L^1(0,T)}$.

Demonstração:

Aplicando o Teorema de Fubini, preliminar 2.12, na integral do lado direito da estimativa (2.1), temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} g(s)\|w_h(t)\|_X\,ds\,dt &= \int_0^{T}\int_t^{t+h} g(s)\|w_h(t)\|_X\,dt\,ds\\ &= \int_0^{h}\int_0^{s} g(s)\|w_h(t)\|_X\,dt\,ds\\ &+ \int_h^{T-h}\int_{s-h}^{s} g(s)\|w_h(t)\|_X\,dt\,ds\\ &+ \int_{T-h}^{T}\int_{s-h}^{T-h} g(s)\|w_h(t)\|_X\,dt\,ds\end{aligned} \tag{2.2}$$

pois

$$\begin{cases} 0\le s\le h \Longrightarrow 0\le t\le s\\ h\le s\le T-h \Longrightarrow s-h\le t\le s\\ T-h\le s\le T \Longrightarrow s-h\le t\le T-h\end{cases}.$$

Majorando a primeira parcela de (2.2), obtemos

$$\int_0^{h}\int_0^{s} g(s)\|w_h(t)\|_X\,dt\,ds = \int_0^h g(s)\left(\int_0^s \|w_h(t)\|_X\,dt\right)ds$$

e pela desigualdade de Hölder, preliminar 2.6,

$$\le \int_0^h g(s)\left[\left(\int_0^s 1^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^s \|w_h(t)\|_X^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]ds$$

mas sabemos $s^{\frac{1}{2}}\le h^{\frac{1}{2}}$ e, ainda, que

$$\begin{aligned}\|w_h(t)\|_X^2 &= \|w(t+h)-w(t)\|_X^2 \le \left(\|w(t+h)\|_X+\|w(t)\|_X\right)^2\\ &\le \|w(t+h)\|_X^2 + 2\|w(t+h)\|_X\|w(t)\|_X + \|w(t)\|_X^2\\ &\le 2\|w(t+h)\|_X^2 + 2\|w(t)\|_X^2\end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}\int_0^s \|w_h(t)\|_X^2\ dt &\leq 2\int_0^s \|w(t+h)\|_X^2\ dt + 2\int_0^s \|w(t)\|_X^2\ dt \\ &\leq 2\int_0^T \|w(t)\|_X^2\ dt + 2\int_0^T \|w(t)\|_X^2\ dt \\ &\leq \left(4\int_0^T \|w(t)\|_X^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}} = c\,\|w(t)\|_{L^2(0,T;X)}\ .\end{aligned}$$

Assim, concluímos

$$\int_0^h \int_0^s g(s)\,\|w_h(t)\|_X\ dt\,ds \leq \int_0^h c\,h^{\frac{1}{2}}\,\|w(t)\|_{L^2(0,T;X)}\,g(s)\ ds \qquad (2.3)$$

que é a majoração da 1ª parcela (2.2).

De forma análoga obtemos a majoração da 2ª e 3ª parcelas da equação (2.2):

$$\int_h^{T-h} \int_{s-h}^s g(s)\,\|w_h(t)\|_X\ dt\,ds \leq \int_h^{T-h} c\,h^{\frac{1}{2}}\,\|w(t)\|_{L^2(0,T;X)}\,g(s)\ ds \qquad (2.4)$$

$$\int_{T-h}^T \int_{s-h}^{T-h} g(s)\,\|w_h(t)\|_X\ dt\,ds \leq \int_{T-h}^T c\,h^{\frac{1}{2}}\,\|w(t)\|_{L^2(0,T;X)}\,g(s)\ ds\,. \qquad (2.5)$$

Portanto, de (2.3), (2.4) e (2.5) em (2.2) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_t^{t+h} g(s)\,\|w_h(t)\|_X\ dt\,ds &\leq \int_0^T c\,h^{\frac{1}{2}}\,\|w(t)\|_{L^2(0,T;X)}\,g(s)\ ds \\ \int_0^T \int_t^{t+h} g(s)\,\|w_h(t)\|_X\ dt\,ds &\leq c\,h^{\frac{1}{2}}\,\|w\|_{L^2(0,T;X)}\,\|g\|_{L^1(0,T)} \\ \int_0^T \int_t^{t+h} g(s)\,\|w_h(t)\|_X\ dt\,ds &\leq \widetilde{c}\,h^{\frac{1}{2}}\,\|w\|_{L^2(0,T;X)}\ ,\end{aligned}$$

onde $\widetilde{c} = c\,\|g\|_{L^1(0,T)}$.

Voltando a estimativa (2.1), temos

$$\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_y^2 \, dt \leq \widetilde{c}\, h^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(0,T;X)}$$

$$\left[\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_y^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\widetilde{c}\, \|w\|_{L^2(0,T;X)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{h^{\frac{1}{4}}} \left(\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_y^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\widetilde{c}}\, \|w\|_{L^2(0,T;X)}^{\frac{1}{2}}$$

o que pela definição de espaço de Nikol'skii, preliminar 2.21, implica em

$$\|w\|_{N^{\frac{1}{4},2}(0,T;Y)} \leq c\, \|w\|_{L^2(0,T;X)}^{\frac{1}{2}} \ ,$$

onde $c = \sqrt{c\, \|g\|_{L^1(0,T)}}$ é uma constante positiva que depende apenas de $\|g\|_{L^1(0,T)}$.

Nota: A argumentação utilizada para demonstrar (A) é semelhante a utilizada por SIMON [21], o qual a utilizou nas equações dos fluídos não homogêneos.

(B) Se $g \in L^2(0,T)$, temos

$$\|w\|_{N^{\frac{1}{2},2}(0,T;Y)} \leq c\, \|w\|_{L^2(0,T;X)}^{\frac{1}{2}} \ ,$$

onde c é uma constante positiva que apenas depende de $\|g\|_{L^1(0,T)}$.

Demonstração:

Vamos estimar a integral do lado direito de (2.1), fazendo

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h} \int_t^{t+h} g(s)\, \|w_h(t)\|_X \, ds\, dt &= h \int_0^{T-h} \left[\|w_h(t)\|_X \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(s)\, ds\right)\right] dt \\ &= h \int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_X \, \theta(t)\, dt\,,\end{aligned}$$

onde

$$\theta(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(s)\, ds.$$

Utilizando, agora, a desigualdade de Cauchy-Scharwrz, preliminar 2.4, para obtermos

$$\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} g(s)\left\|w_h(t)\right\|_X \, ds\, dt \le h\left(\int_0^{T-h}\left\|w_h(t)\right\|_X^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T-h}\theta^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

Aplicando o Lema de Hardy-Littlewood na segunda integral, com $r=2$, $a=T-h$ e $\widetilde{f}=g$, temos:

$$\int_0^{T-h}\theta^2(t)\, dt \le 8\int_0^{T-h} g^2(t)\, dt \le 8\left\|g\right\|_{L^2(0,T)}^2 .$$

Conseqüentemente, da desigualdade (2.6) em (2.1), implica

$$\frac{1}{h}\int_0^{T-h}\left\|w_h(t)\right\|_Y^2 \, dt \le c_1\left\|w\right\|_{L^2(0,T;X)} 2\sqrt{2}\left\|g\right\|_{L^2(0,T)} ,$$

pois

$$\int_0^{T-h}\left\|w_h(t)\right\|_X^2 \, dt \le c_1\left\|w\right\|_{L^2(0,T;X)} .$$

Ou ainda:

$$\frac{1}{h}\int_0^{T-h}\left\|w_h(t)\right\|_Y^2 \, dt \le c\left\|w\right\|_{L^2(0,T;X)} ,$$

onde $c = 2\sqrt{2}c_1\left\|g\right\|_{L^2(0,T)}$.

Elevando a última desigualdade no expoente $\frac{1}{2}$, obtemos:

$$\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{T-h}\left\|w_h(t)\right\|_Y^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{c}\left\|w\right\|_{L^2(0,T;X)}^{\frac{1}{2}} ,$$

o que pela definição de espaço de Nikol'skii, preliminar 2.21, resulta em

$$\left\|w\right\|_{N^{\frac{1}{2},2}(0,T;Y)} \le c\left\|w\right\|_{L^2(0,T;X)}^{\frac{1}{2}} ,$$

onde c é uma constante positiva que depende apenas de $\left\|g\right\|_{L^2(0,T)}$.

Nota: A argumentação utilizada para demonstrar (B) foi inspirada em ZHANG [26], o qual a utilizou nas equações de Navier-Stokes clássicas.

Uma conseqüência imediata das estimativas estabelecidas nos espaços de Nikol'skii por este Lema é a seguinte:

Corolário: Sob as condições do Lema 2.22, temos

$$D_t^\alpha w \in L^2(0,T;Y) \ .$$

2.23 Proposição

Suponha $s > r$, com $0 < r < s < 1$ e $1 \leq p < \infty$.

Então

$$W^{s,p}(I;B) \hookrightarrow N^{s,p}(I;B) \hookrightarrow W^{r,p}(I;B)$$

sendo estas inclusões contínuas.

Nota: No caso que $p = 2$, temos:

$$W^{s,2}(I;B) = H^s(I;B) \hookrightarrow N^{s,2}(I;B) \hookrightarrow W^{r,2}(I;B) = H^r(I;B) \ ,$$

conseqüentemente, se $f \in N^{s,2}(I;B)$, com $0 < s < 1$, então

$$D_t^r f \in L^2(I;B) \ , \ \ \forall r < s \, ,$$

isto é, f tem derivada fracionária de ordem r em $L^2(I;B)$.

Demonstração: Veja SIMON [21] na página 141.

2.24 Teorema de Compacidade

Sejam $X \hookrightarrow E \hookrightarrow Y$ espaços de Banach, a inclusão $X \hookrightarrow E$ sendo compacta. Então as seguintes imersões são compactas:

(i) $L^q(0,T;X) \cap \{\varphi \,|\, \varphi_t \in L^1(0,T;Y)\} \hookrightarrow L^q(0,T;E)$, se $1 \leq q \leq \infty$;

(ii) $L^{\infty}(0,T;X) \cap \{\varphi \mid \varphi_t \in L^r(0,T;Y)\} \hookrightarrow C([0,T];E)$, se $1 < r \leq \infty$;

(iii) Para qualquer função dada $k \in L^1(0,T)$, $k > 0$ e $1 < r \leq \infty$, temos

$$L^{\infty}(0,T;X) \cap \{\varphi \mid |\varphi_t|_Y - k \in L^r(0,T)\} \hookrightarrow C([0,T];E) ;$$

(iv) $L^q(0,T;X) \cap N^{s,q}(0,T;Y) \hookrightarrow L^q(0,T;E)$, se $s > 0$ e $1 \leq q \leq \infty$.

Nota: O Teorema de Compacidade acima é devido a SIMON [19]. Observamos que o Teorema de Compacidade de Aubin-Lions em LIONS [10] é um caso particular de (i) e, além disso, o Teorema 5.1 em LIONS [10] é um caso particular de (iv).

Demonstração: Veja SIMON [19] nas páginas 65-96.

CAPÍTULO 3

O PROBLEMA ABSTRATO DE CAUCHY

3.1 Introdução

Vamos considerar o seguinte problema abstrato de Cauchy

$$u_t + Au + B(u,u) + B_1 u + B_2 u = f\,, \quad \text{em } \ Q_T \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{com } \ x \in \Omega\,, \tag{3.2}$$

onde $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, A, B_1 e B_2 são operadores lineares em um espaço de Hilbert real separável X e B é uma aplicação bilinear.

Supondo que A é autoadjunto, positivo e de inversa compacta, conseqüentemente, existe uma base ortonormal em X, $\left\{w^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ com a seguinte propriedade:

$$Aw^k = \lambda_k w^k,\ k = 1,2,... \ \text{ e } \ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_k \leq ... \to \infty\,.$$

Como $\left\{w^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal em X, para cada $u \in X$ temos uma combinação linear do tipo

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \ \text{ e } \ c_k = \left(u, w^k\right) \, .$$

Sendo $A : X \longrightarrow X$ ou $A : D(A) \longrightarrow X$, onde o domínio de A é dado por

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \middle| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 c_k^2 < \infty \right\} ,$$

pois

$$\begin{aligned} A(u) &= A\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} A\left(c_k w^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(A w^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\lambda_k w^k\right) \end{aligned}$$

e que

$$\|A(u)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 < \infty \, .$$

Notamos, também que para qualquer $u \in D(A)$ resulta que:

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k w_k \, ,$$

onde $c_k = \left(u, w^k\right)$.

Considerando o operador $A^\alpha : D(A^\alpha) \longrightarrow X$, com domínio

$$D(A^\alpha) = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \middle| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} c_k^2 < \infty \right\} ,$$

onde para qualquer $u \in D(A^\alpha)$, temos:

$$A^\alpha(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha c_k w^k$$

e $c_k = \left(u, w^k\right)$. Pois

$$A^\alpha (u) = A^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A^\alpha \left(c_k w^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(A^\alpha w^k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\lambda_k^\alpha w^k\right)$$

e

$$\|A^\alpha (u)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou ainda,

$$\|A^\alpha (u)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} c_k^2 < \infty .$$

Observamos que $X^\alpha = D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $(u, v)\, \alpha = \left(A^{\frac{\alpha}{2}} u, A^{\frac{\alpha}{2}} v\right)$, pois tomando $u, v \in D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right)$, temos:

$$(u, v)\, \alpha = \left(A^{\frac{\alpha}{2}} u, A^{\frac{\alpha}{2}} v\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} c_k w_k \, , \, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} d_k w_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} c_k\right) \left(\lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} d_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} c_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} d_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

O espaço dual de X^α é denotado por $X^{-\alpha}$ e identificando-se o espaço X com o seu dual $X^{-\alpha}$, temos

$$X^\alpha \hookrightarrow X \hookrightarrow X^{-\alpha}$$

onde cada injeção canônica é contínua e com imagem densa. Assim,

$$X^\alpha : D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right) \longrightarrow X$$
$$u \longmapsto u$$

é contínua pois $|u| \leq M \|u\|$. Tomando

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k ,$$

onde

$$|u| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e daí

$$|u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha} \frac{c_k^2}{\lambda_k^{\alpha}} \leq \frac{1}{\lambda_k^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha} c_k^2 = \frac{1}{\lambda_k^{\alpha}} \|u\|^2 .$$

Ou seja, $|u|^2 \leq M \|u\|^2$.

3.2 Propriedades dos Operadores

No problema proposto suporemos que os operadores B, B_0, B_1 e B_2 satisfazem as condições (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) e (vii), quais sejam:

(i) $B : X^1 \times X^1 \longrightarrow X^{-1}$ é bilinear contínua limitada, então
$|B(u,v)|_{-1} \leq \|B\|_1 \|u\| \|v\|, \forall u, v \in X^1$.

(ii) B possui extensões contínuas, então $B : X \times X^1 \longrightarrow X^{-1}$ e
$B : X^1 \times X \longrightarrow X^{-1}$.

(iii) $(B(u,v), w) + (B(u,w), v) = 0, \forall u, v, w \in X^1$.

Observamos que sendo B uma **aplicação bilinear**, existem operadores lineares $B^{(n)} : X^1 \longrightarrow X^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$B(u.v) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B^{(n)}u, v\right) w_n \ ,$$

onde $\left(\alpha_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ é a matriz do operador $B^{(n)}$ na base $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

(iv) B_1 e B_2 são **operadores lineares limitados**. Assim,
$B_i : X^1 \longrightarrow X^{-1}$ $(i = 1, 2)$ que possuem extensões contínuas
$B_i : X \longrightarrow X^{-1}$.

(v) B_1 satisfaz a seguinte hipótese

$$\left(B_1\left(u\right),v\right)+\left(B_1\left(v\right),u\right)=0,\forall u,v\in X^1.$$

(vi) B_0 é o operador não linear, tal que

$$\left(B_0\left(u\right),v\right)=B\left(u,v\right)+B_1v+B_2u\,.$$

(vii) Condições que garantem a uinicidade de solução para o problema de Cauchy:

(a) $\left\|B_1\left(u\right),v\right\|\leq c\left\|u\right\|\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}.$

Prova: Considerando $\left(B_1\left(u\right),v\right)=\left(u,v\right)$, $\left|v\right|\leq c\left\|v\right\|$ e $\left|u\right|\leq c\left\|u\right\|$ temos:

$$\begin{aligned}\left|\left(B_1\left(u\right),v\right)\right|=\left|\left(u,v\right)\right|\leq\left|u\right|\left|v\right|&\leq c\left\|u\right\|\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\\&\leq c\left\|u\right\|\left|v\right|^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}=c_1\left\|u\right\|\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\ ,\end{aligned}$$

onde $c_1=c.c^{\frac{1}{2}}$. ■

(b) $\left|\left(B_2\left(u\right),v\right)\right|\leq c\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}.$

Prova: Considerando $\left(B_2\left(u\right),v\right)=\left(u,v\right)$, $\left|u\right|\leq c\left\|u\right\|$ e $\left|v\right|\leq c\left\|v\right\|$ temos:

$$\begin{aligned}\left|\left(B_2\left(u\right),v\right)\right|=\left|\left(u,v\right)\right|\leq\left|u\right|\left|v\right|&=\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\\&\leq\left|u\right|^{\frac{1}{2}}c_1\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}c_2\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\\&=c\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\ .\end{aligned}$$

Assim: $\left|\left(B_2\left(u\right),v\right)\right|\leq c\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}.$ ■

(c) $\left|\left(B\left(u,v\right),w\right)\right|\leq c\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|w\right\|.$

Prova: Considerando $|(B_2(u), v)| \leq c\,|u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}}$,
$(B(u,v), w) = ((u,v), v)$ e $|w| \leq c_2 \|w\|$ temos:

$$\begin{aligned}
|(B(u,v), w)| = |((u,v), w)| \leq |(u,v)|\,|w| &\leq c_1 |u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}} c_2 \|w\| \\
&= c\,|u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}} \|w\| \,.
\end{aligned}$$

Assim, $|(B(u,v), w)| \leq c\,|u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}} \|w\|$. ■

3.3 Solução Fraca do Problema de Cauchy

Definição 1 *Diremos que* u *é solução fraca ou turbulenta do problema de Cauchy* (3.1)-(3.2) *com os dados* $u_0 \in X$ *e* $f \in L^2(0,T;X^{-1})$, *se* $u \in L^2(0,T;X^1) \cap L^\infty(0,T;X)$ *e para toda* $v \in C^1([0,T];X) \cap C([0,T];X^1)$ *com suporte de* v *compacto contido em* $[0,T)$, *verifica que*

$$-\int_0^T (u(t), v'(t))\,dt + \int_0^T (u(t), v(t))\,dt + \int_0^T (B_0(u(t), u(t)), v(t))\,dt$$

$$= \int_0^T (f(t), v(t))\,dt + (u_0, v(0))\,.$$

Inicialmente, utilizando esta definição, daremos uma formulação fraca para o problema proposto. E, após, os resultados fracos ou abstratos que iremos provar para o problema de Cauchy (3.1)-(3.2) são os Teoremas 1, 2 e 3 que estabelecem resultados de existência global, com a propriedade de reprodução e, também, a unicidade de soluções fracas, respectivamente.

CAPÍTULO 4

A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS

Neste capítulo, apresentaremos a demonstração da existência de pelo menos uma solução fraca para o problema de Cauchy, fazendo uso do Método de Galerkin. Sendo assim, o resultado básico de existência de solução é o teorema a seguir.

Teorema 1 *Com as hipóteses sobre* B, B_1 *e* B_2. *Se* $\|B_2\| < 1$ *então para todo* $u_0 \in X$ *e para toda* $f \in L^2\left(0, T; X^{-1}\right)$, *o problema* (3.1)-(3.2) *possui pelo menos uma solução fraca.*

Demonstração:

Faremos a prova deste Teorema em três etapas, ou seja, na primeira etapa, mostraremos a existência de soluções em dimensão finita, posteriormente, obteremos estimativas uniformes de tais soluções. As quais serão utilizadas para obtermos convergências fortes a fim de provarmos o limite na dimensão e, assim, obtermos a solução do problema abstrato de Cauchy.

4.1 Formulação do Problema Abstrato de Cauchy

A demonstração da existência de solução fraca do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) será feita através do Método de Galerkin. Desta forma, dado o espaço de Hilbert real separável X, ele possui uma base Hilbertiana, isto é, existe uma secessão $\{w^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as seguintes condições:

1ª) para cada k os vetores $w^1, w^2, ..., w^k$ são linearmente independentes;

2ª) as combinações lineares finitas dos w^i são densas em X.

Desta forma, para a solução aproximada do problema proposto consideremos as proximações de Galerkin na forma:

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\, w^i(x) \ ,$$

onde os coeficientes $c_{ik} = (u_k, w^i)$ são determinados de modo que u^k é solução do problema de Cauchy. O problema variacional geral é o seguinte:

Achar $u(t)$ com valores em X com $t \in [0,T]$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u,v) + (Au,v) + (B_0(u,u),v) = (f,v) \\ \qquad\qquad u(0) = u_0 \quad \forall v \in X \ . \end{cases}$$

Desta forma, formulamos o problema aproximado que consiste em determinar $u^k(t) \in V_k$, isto é,

$$u^k(t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\, w^i(x)$$

satisfazendo as condições:

$$\left(\frac{d}{dt}u^k, v\right) + \left(\left(u^k, v\right)\right) = (f,v) - \left(B_0\left(u^k, u^k\right), v\right) \ , \quad \forall v \in V_k \qquad (4.1)$$

$$u^k(0) = P_k(u_0) \tag{4.2}$$

Para $u^k(t) \in V_k$ temos

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\, w^i(x)$$

e $v \in V_k$, então podemos tomar $v = w_l$, $l = 1, ..., k$.

Assim, observamos que (4.1) é equivalente com o sistema de equações diferenciais ordinários da forma

$$\frac{dg}{dt} = G(f,g)\ , \tag{4.3}$$

onde $g = (c_{1k}(t), ..., c_{kk}(t))$ e a função $G = (G_1, ..., G_k)$ tem cada componente G_i na forma:

$$\begin{aligned} G_i(f,g) = \lambda_i c_{ik} &+ \sum_{l=1}^{k} \left(\left(B_1 w^l + B_2 w^l \right), w^i \right) c_{lk} \\ &+ \sum_{l,j=1}^{k} \alpha_{jl}^{(i)} c_{lk} c_{jk} + \left(f(t), w^i \right)\ . \end{aligned}$$

E a condição inicial (4.2) é dada por

$$c_{ik}(0) = \left(u^k(0), w^i(x) \right) = \left(u_0, w^i(x) \right)\ ,\quad i = 1, ..., k\,. \tag{4.4}$$

Pelo Torema de Caractheodory, preliminar 2.7, existe solução $g = (c_{1k}(t), ..., c_{kk}(t))$ definida em $[0, t_k)$ tal que

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\, w^i(x)$$

é solução do problema aproximado, ou seja, isto mostra que existe uma solução local fraca para o problema (4.1)-(4.2).

4.2 Estimativas a Priori

A seguir, faremos várias estimativas a priori supondo a existência de $u^k(t)$. A partir daí, estas estimativas permitirão a extensão da solução $u^k(t)$ sobre o intervalo $[0,T)$, $T>0$.

Sendo

$$u^k(x,t)=\sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\, w^i(x)\in V_k$$

e fazendo $v=u^k$ em (4.1), obtemos

$$\left(\frac{d}{dt}u^k,u^k\right)+\left(\left(u^k,u^k\right)\right)=\left(f,u^k\right)-\left(B_0\left(u^k,u^k\right),u^k\right)$$

ou, equivalentemente, que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u^k\right|^2+\left\|u^k\right\|^2=\left(f,u^k\right)-\left(B_2\left(u^k\right),u^k\right), \tag{4.5}$$

pois

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u^k\right|^2&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^k,u^k\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d}{dt}u^k,u^k\right)+\left(u^k,\frac{d}{dt}u^k\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{d}{dt}u^k,u^k\right)\right\}=\left(\frac{d}{dt}u^k,u^k\right)\end{aligned}$$

e pelas hipóteses sobre os operadores B, B_0, B_1 e B_2 temos que:

por (3.2-vi):

$$\left(B_0\left(u^k,u^k\right),u^k\right)=\left(B\left(u^k,u^k\right),u^k\right)+\left(B_1\left(u^k\right),u^k\right)+\left(B_2\left(u^k\right),u^k\right);$$

por (3.2-iii):

$$\left(B\left(u^k,u^k\right),u^k\right)+\left(B\left(u^k,u^k\right),u^k\right)=0\Longrightarrow\left(B\left(u^k,u^k\right),u^k\right)=0;$$

por (3.2-v):

$$\left(B_1\left(u^k\right),u^k\right)+\left(B_1\left(u^k\right),u^k\right)=0\Longrightarrow\left(B_1\left(u^k\right),u^k\right)=0;$$

e voltando a (3.2-vi) obtemos:

$$\left(B_0\left(u^k,u^k\right),u^k\right)=\left(B_2\left(u^k\right),u^k\right)\ .$$

Também, temos por (3.2-i) e (3.2-iv) que

$$-\left(B_2\left(u^k\right),u^k\right)+\left(f,u^k\right)\leq\left|B_2\left(u^k\right)\right|_{-1}\left\|u^k\right\|+\|f\|_{-1}\left\|u^k\right\|\ ,$$

mas como

$$\left|B_2\left(u^k\right)\right|_{-1}\left\|u^k\right\|\leq\|B_2\|_1\left\|u^k\right\|^2$$

e

$$|f|_{-1}\left\|u^k\right\|=\frac{\|f\|_{-1}}{\sqrt{2\varepsilon}}\left\|u^k\right\|\sqrt{2\varepsilon}\leq\frac{\|f\|_{-1}^2}{4\varepsilon}+\varepsilon\left\|u^k\right\|^2\ ,$$

pela desigualdade elementar de Cauchy, preliminar 2.1. Assim, vem que:

$$-\left(B_2\left(u^k\right),u^k\right)+\left(f,u^k\right)\leq\|B_2\|_1\left\|u^k\right\|^2+\frac{\|f\|_{-1}^2}{4\varepsilon}+\varepsilon\left\|u^k\right\|^2\ .$$

Logo, majorando (4.5) obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u^k\right|^2+\left\|u^k\right\|^2\leq\|B_2\|_1\left\|u^k\right\|^2+\frac{\|f\|_{-1}^2}{4\varepsilon}+\varepsilon\left\|u^k\right\|^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u^k\right|^2+\left(1-\|B_2\|_1-\varepsilon\right)\left\|u^k\right\|^2\leq\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{-1}^2\ . \tag{4.6}$$

Escolhendo $\varepsilon>0$ de forma que

$$1-\|B_2\|_1-\varepsilon>0\Longleftrightarrow 1-\|B_2\|_1>\varepsilon\,;$$

por exemplo:

$$\varepsilon=\frac{1-\|B_2\|}{2}\,,$$

tem-se que (4.6) fica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u^k\right|^2 + c_1\left\|u^k\right\|^2 \leq c_2\left\|f\right\|_{-1}^2 , \tag{4.7}$$

onde

$$c_1 = \frac{1-\left\|B_2\right\|_1}{2} \;\text{ e }\; c_2 = \frac{1}{2\left(1-\left\|B_2\right\|_1\right)} .$$

Assim, de (4.7) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left|u^k\right|^2 + c\left\|u^k\right\|^2 \leq c'\left\|f\right\|_{-1}^2 , \tag{4.8}$$

onde $c = 2c_1$ e $c' = 2c_2$.

Integrando (4.8) em $(0,T)$, com $t \leq T$, temos

$$\left|u^k(t)\right|^2 - \left|u^k(0)\right|^2 + c\int_0^t \left\|u^k(s)\right\|^2 ds \leq c'\int_0^t \left\|f(s)\right\|_{-1}^2 ds$$

$$\left|u^k(t)\right|^2 + c\int_0^t \left\|u^k(s)\right\|^2 ds \leq \left|u^k(0)\right|^2 + c'\int_0^t \left\|f(s)\right\|_{-1}^2 ds , \tag{4.9}$$

mas $\left|u^k(0)\right| \leq |u_0|$; pois se

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w^i$$

então

$$|u_0|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

de acordo com o Teorema 2.18-(b) e

$$u^k(0) = P_k u_0 = \sum_{i=1}^{k} c_i w^i$$

então

$$\left|u^k(0)\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 .$$

Assim, (4.9) pode ser escrita como:

$$\left|u^k(t)\right|^2 + c\int_0^t \left\|u^k(s)\right\|^2 ds \le |u_0|^2 + c'\,\|f(t)\|^2_{L^2(0,T;X^{-1})} \equiv M\,. \qquad (4.10)$$

Logo, a seqüência $\left\{u^k\right\}_{k\ge1}$ tem as seguintes propriedades:

$\left\{u^k\right\}_{k\ge1}$ é limitada por uma constante M, independente de k, em $L^\infty(0,T;X)$, ou seja:

$$\left|u^k(t)\right|^2 \le M \Longrightarrow u^k \in L^\infty(0,T;X)\;. \qquad (4.11)$$

$\left\{u^k\right\}_{k\ge1}$ é limitada por uma constante M, independente de k, em $L^2(0,T;X^1)$, ou seja,

$$\int_0^t \left\|u^k\right\|^2 dt \le M \Longrightarrow u^k \in L^2\left(0,T;X^1\right)\;. \qquad (4.12)$$

Portanto, existe uma seqüência de $\left\{u^k\right\}_{k\ge1}$ e $u \in L^2(0,T;X^1)\cap L^\infty(0,T;X)$ tal que quando $k\to\infty$, tem-se que:

$$u^k \longrightarrow u \;\text{ fraco-* em }\; L^\infty(0,T;X)\;, \qquad (4.13)$$

$$u^k \longrightarrow u \;\text{ fraco em }\; L^2\left(0,T;X^1\right)\;. \qquad (4.14)$$

Passaremos, agora, para a demonstração de que a seqüência $\left\{u^k\right\}_{k\ge1}$ é limitada em $N^{s,2}(0,T;X)$ para algum $s\in[0,1]$.

Integrando (4.1) de t a $t+h$, com $t+h\le T$, temos:

$$\int_t^{t+h}\left(\frac{d}{dt}u^k(s),v\right)ds = \int_t^{t+h}\left[(f(s),v) - \left(B_0\left(u^k(s),u^k(s)\right),v\right)\right]ds$$
$$-\int_t^{t+h}\left(\left(u^k(s),v\right)\right)ds$$

$$\left(u_h^k(t),v\right) = \int_t^{t+h}\left[(f(s),v) - \left(B_0\left(u^k(s),u^k(s)\right),v\right) - \left(\left(u^k(s),v\right)\right)\right]ds\,. \qquad (4.15)$$

Mas por $X^1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X^{-1}$ resulta que:

(a)

$$\left(f\left(s\right),v\right)\leq\left\|f\left(s\right)\right\|_{-1}\left|v\right|\leq c_1\left\|f\left(s\right)\right\|_{-1}\left\|v\right\|.$$

(b)

$$\left(\left(u^k\left(s\right),v\right)\right)\leq c_2\left\|u^k\left(s\right)\right\|\left\|v\right\|.$$

(c)

$$\left(B_0\left(u^k\left(s\right),u^k\left(s\right)\right),v\right)\leq c_3\left(2\left\|u^k\left(s\right)\right\|+\left\|u^k\left(s\right)\right\|^2\right)\left\|v\right\|\ ,$$

pois por (3.2-vi):

$$\left(B_0\left(u,v\right),w\right)=\left(B\left(u,v\right),w\right)+\left(B_1\left(v\right),w\right)+\left(B_2\left(u\right),w\right)$$

e fazendo $u=u^k\left(s\right)$, $v=u^k\left(s\right)$ e $w=v$, encontramos

$$\left(B_0\left(u^k,u^k\right),v\right)=\left(B\left(u^k,u^k\right),v\right)+\left(B_1\left(u^k\right),v\right)+\left(B_2\left(u^k\right),v\right)$$

e, por (3.2-vii), vem que:

$$\begin{aligned}&\leq c'\left|u^k\left(s\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^k\left(s\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|u^k\left(s\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|+c''\left\|u_k\right\|\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\\&+c'''\left|u^k\left(s\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^k\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\\&=c'\left|u^k\left(s\right)\right|\left\|u^k\right\|\left\|v\right\|+c''\left\|u^k\left(s\right)\right\|\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\\&+c'''\left|u^k\left(s\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^k\left(s\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left|v\right|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

e como

$$\left|u^k\left(s\right)\right|\leq N\left\|u^k\left(s\right)\right\|\ ,\ \left|v\right|^{\frac{1}{2}}\leq N_1\left\|v\right\|^{\frac{1}{2}}\ \text{e}\ \left|u^k\left(s\right)\right|^{\frac{1}{2}}\leq N_2\left\|u^k\left(s\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\ ,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}&\leq c'\left\|u^k\left(s\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|v\right\|+c''\left\|u^k\left(s\right)\right\|\left\|v\right\|+c'''\left\|u^k\left(s\right)\right\|\left\|v\right\|\\&\leq c_3\left(2\left\|u^k\left(s\right)\right\|+\left\|u^k\left(s\right)\right\|^2\right)\left\|v\right\|\ .\end{aligned}$$

Utilizando os resultados (a), (b) e (c) acima em (4.15) chegamos na desigualdade:

$$\begin{aligned}\left(u_h^k(t), v\right) \leq & \int_t^{t+h} \left[c_1 \|f(s)\|_{-1} + c_2 \left\|u^k(s)\right\|\right] \|v\| \, ds \\ & + \int_t^{t+h} c_3 \left(2\left\|u^k(s)\right\| + \left\|u^k(s)\right\|\right) \|v\| \, ds\end{aligned}$$

$$\left(u_h^k(t), v\right) \leq c\|v\| \int_0^{t+h} \left(\|f(s)\|_{-1} + \left\|u^k(s)\right\| + \left\|u^k(s)\right\|^2\right) ds\,.$$

Para fazer uso do Lema 2.22, ver preliminares, tomamos $v = u_h^k(t)$ e, assim:

$$\left|u_h^k(t)\right|^2 \leq c\left\|u_h^k(t)\right\| \int_t^{t+h} \left(\|f(s)\|_{-1} + \left\|u^k(s)\right\| + \left\|u^k(s)\right\|^2\right) ds \tag{4.16}$$

observemos que

$$g(s) = \|f(s)\|_{-1} + \left\|u^k(s)\right\| + \left\|u^k(s)\right\|^2\,,$$

onde $g(s) \in L^1(0,T)$, pois:

$$\int_0^T |g(s)| \, ds = \int_0^T \|f(s)\|_{-1} \, ds + \int_0^T \left\|u^k(s)\right\| \, ds + \int_0^T \left\|u^k(s)\right\|^2 ds\,,$$

por Hölder, preliminar 2.6, temos que:

$$\int_0^T \|f(s)\|_{-1} \cdot 1 \, ds \leq \left(\int_0^T \|f(s)\|_{-1}^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T 1^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\int_0^T \left\|u^k(s)\right\| \cdot 1 \, ds \leq \left(\int_0^T \left\|u^k(s)\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T 1^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

e por (4.10) tem-se

$$\int_0^T \left\|u^k(s)\right\|^2 ds \leq M.$$

Assim, integrando (4.16) de 0 a $T-h$, temos

$$\int_0^{T-h} \left\| u^k(t) \right\|^2 dt \leq \int_0^{T-h} \left(c \left\| u^k(t) \right\| \int_t^{t+h} g(s)\, ds \right) dt$$

conseqüêntemente, temos as condições do Lema 2.22, o que implica em

$$\left| u^k(t) \right|_{N^{\frac{1}{4},2}(0,T;X)} \leq c \left\| u^k(t) \right\|_{L^2(0,T;X^1)}^{\frac{1}{2}} \leq c \cdot M\,,$$

pela estimativa (4.10). Ou seja:

$$u^k(t) \in N^{\frac{1}{4},2}(0,T;X) \text{ uniformemente em } k\,.$$

Assim, estamos nas hipóteses do Teorema de Compacidade de J. Simon, preliminar 2.24. Logo, por (iv) deste teorema implica que existe uma subseqüência de $\left(u^k(t)\right)$, representada também por $\left(u^k\right)$, tal que:

$$u^k \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0,T;X)\,. \tag{4.17}$$

4.3 Passagem ao Limite

Uma vez obtida a solução aproximada em $[0,T)$, resta-nos nesta seção obter o limite destas soluções e provar que este limite é a solução mencionada no enunciado do Teorema 1.

Supondo $r(t) \in C^1([0,T])$ com suporte compacto contido em $[0,T)$, fazendo em (4.1) $v = r(t)\, w^i(x)$, com $i \leq k$, pois v é uma combinação linear em V_k, temos:

$$\left(\frac{d}{dt} u^k(t), w^i(x) \right) r(t) + \left(\left(u^k(t), w^i(x) \right) \right) r(t) + \left(B_0\left(u^k(t), u^k(t) \right), w^i(x) \right) r(t)$$

$$= \left(f(t), w^i(x) \right) r(t)\ .$$

Para fazermos a extensão sobre $[0,T]$, integramos a equação acima:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{d}{dt} u^k(t), w^i(x) \right) r(t) + \left(\left(u^k(t), w^i(x) \right) \right) r(t) \right.$$

$$+\left(B_0\left(u^k(t),u^k(t)\right),w^i(x)\right)r(t)\big]\ dt=\int_0^T\left(f(t),w^i(x)\right)r(t)\ dt$$

$$\int_0^T\left(\frac{d}{dt}u^k(t),w^i(x)\right)r(t)\ dt+\int_0^T\left(\left(u^k(t),w^i(x)\right)\right)r(t)\ dt$$

$$+\int_0^T\left(B_0\left(u^k(t),u^k(t)\right),w^i(x)\right)r(t)\ dt=\int_0^T\left(f(t),w^i(x)\right)r(t)\ dt$$

e resolvendo por partes a primeira integral, obtemos:

$$\left\{\left[\left(u^k(t),w^i(x)\right)r(t)\right]_0^T-\int_0^T\left(u^k(t),w^i(x)\right)r'(t)\ dt\right\}$$

$$+\int_0^T\left(\left(u^k(t),w^i(x)\right)\right)r(t)\ dt+\int_0^T\left(B_0\left(u^k(t),u^k(t)\right),w^i(x)\right)r(t)\ dt$$

$$=\int_0^T\left(f(t),w^i(x)\right)r(t)\ dt$$

$$\left(u^k(T),w^i(x)\right)r(T)-\left(u^k(0),w^i(x)\right)r(0)-\int_0^T\left(u^k(t),w^i(x)\right)r'(t)\ dt$$

$$+\int_0^T\left(\left(u^k(t),w^i(x)\right)\right)r(t)\ dt+\int_0^T\left(B_0\left(u^k(t),u^k(t)\right),w^i(x)\right)r(t)\ dt$$

$$=\int_0^T\left(f(t),w^i(x)\right)r(t)\ dt$$

e como $r(T)=0$, pois $r(t)$ tem suporte compacto em $[0,T)$, temos:

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\left(u^k(t),w^i(x)\right)r'(t)\ dt+\int_0^T\left(\left(u^k(t),w^i(x)\right)\right)r(t)\ dt\\&+\int_0^T\left(B_0\left(u^k(t),u^k(t)\right),w^i(x)\right)r(t)\ dt\\&=\int_0^T\left(f(t),w^i(x)\right)r(t)\ dt+\left(u^k(0),w^i(x)\right)r(0)\ .\end{aligned}\tag{4.18}$$

Agora, passaremos o limite, quando $k\to\infty$, para cada uma das integrais em (4.18):

1º

$$-\int_0^T \big(u^k(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt \longrightarrow -\int_0^T \big(u(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt$$

Assim:

$$\left|\int_0^T \big(u^k(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt - \int_0^T \big(u(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt\right|$$

$$= \left|\int_0^T \big(u^k(t) - u(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt\right| \leq \int_0^T \left|\big(u^k(t) - u(t), w^i(x)\big)\right| \left|r'(t)\right|\ dt\,,$$

mas como $r(t) \in C^1([0,T])$ então existe máximo de $|r'(t)|$ pelo Corolário de Weierstrass, preliminar 2.10, e daí vem que:

$$\leq \max_{0\leq t\leq T} |r'(t)| \int_0^T \left|\big(u^k(t) - u(t), w^i(x)\big)\right|\ dt\,,$$

pela desigualdade de Schwarz, preliminar 2.4,

$$\leq M \int_0^T \left|u^k(t) - u(t)\right| \left|w^i(x)\right|\ dt\,,$$

por Hölder, preliminar 2.6,

$$\leq M \left(\int_0^T \left|u^k(t) - u(t)\right|^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left|w^i(x)\right|^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

pois como em (4.17), $\left|u^k(t) - u(t)\right| \longrightarrow 0$ em $L^2(0,T;X)$.

Logo:

$$-\int_0^T \big(u^k(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt \longrightarrow -\int_0^T \big(u(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\ dt\,.$$

2º

$$\int_0^T \big(\big(u^k(t), w^i(x)\big)\big)\, r(t)\ dt \longrightarrow \int_0^T \big(\big(u(t), w^i(x)\big)\big)\, r(t)\ dt$$

Assim:

$$\left|\int_0^T \big(\big(u^k(t), w^i(x)\big)\big)\, r(t)\ dt - \int_0^T \big(\big(u(t), w^i(x)\big)\big)\, r(t)\ dt\right|$$

$$\leq \int_0^T \left\|u^k(t) - u(t), w^i(x)\right\| \left\|r(t)\right\|\ dt\,,$$

mas como $r(t) \in C^1([0,T])$, então existe máximo de $\|r'(t)\|$, preliminar 2.10, e daí vem que:

$$\leq \max_{0\leq t\leq T} r'(t) \int_0^T \left\|u^k(t) - u(t), w^i(x)\right\| dt\,,$$

pela desigualdade de Schwarz, preliminar 2.4,

$$\leq M \int_0^T \left\|u^k(t) - u(t)\right\| \left\|w^i(x)\right\| dt\,,$$

por Hölder, preliminar 2.6,

$$\leq M \left(\int_0^T \left\|u^k(t) - u(t)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|w^i(x)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

pois por $X^1 \hookrightarrow X$ e (4.17), tem-se $\left\|u^k(t) - u(t)\right\| \longrightarrow 0$ em $L^2(0,T;X)$.

Logo:

$$\int_0^T \left(\left(u^k(t), w^i(x)\right)\right) r(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \left(\left(u(t), w^i(x)\right)\right) r(t)\, dt\,.$$

3º

$$\left(u^k(0), w^i\right) r(0) = \left(P_k u_0, w^i\right) r(0) \longrightarrow \left(u_0, w^i\right) r(0)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \left|\left(P_k u_0, w^i\right) r(0) - \left(u_0, w^i\right) r(0)\right| &= \left|\left(P_k u_0 - u_0, w^i\right) r(0)\right| \\ &\leq \left|\left(P_k u_0 - u_0, w^i\right)\right| |r(0)| \end{aligned}$$

e pela desigualdade de Schwarz, preliminar 2.4, obtemos

$$\leq |P_k u_0 - u_0| \left|w^i\right| |r(0)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

onde $|P_k u_0 - u_0| \longrightarrow 0$, com $k \to \infty$; pois a projeção ortogonal em V_k de u_0 é $u^k(0)$, ou seja, $P_k(u_0) = u^k(0)$ e pelo Teorema 2.18, veja preliminares, tem-se que

$$\lim_{k\to\infty} u^k(0) = u_0 \text{ em } X\,.$$

Logo:

$$\left(u^k(0), w^i\right) r(0) = \left(P_k u_0, w^i\right) r(0) \longrightarrow \left(u_0, w^i\right) r(0) \,.$$

4º

$$\int_0^T \left(B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) r(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \left(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\right) r(t)\, dt$$

Assim, temos:

$$\left|\int_0^T \left(B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) r(t)\, dt - \int_0^T \left(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\right) r(t)\, dt\right|$$
$$= \left|\int_0^T \left[\left(B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) - \left(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\right)\right] r(t)\, dt\right|$$
$$\leq \int_0^T \left|\left[\left(B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) - \left(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\right)\right] r(t)\right| dt\,.$$

Mas pela propriedade (3.2-vi) sobre os operadores B, B_0, B_1 e B_2, temos:

$$\left(B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) = \left(B\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) + \left(B_1\left(u^k(t)\right); w^i(x)\right) + \left(B_2\left(u^k(t)\right); w^i(x)\right) ,$$

$$\left(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\right) = \left(B(u(t), u(t)); w^i(x)\right) + \left(B_1(u(t)); w^i(x)\right) + \left(B_2(u(t)); w^i(x)\right)$$

e, assim, obtemos:

$$= \int_0^T \left|\left[\left(B\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\right) + \left(B_1\left(u^k(t)\right); w^i(x)\right) + \left(B_2\left(u^k(t)\right); w^i(x)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(B(u(t), u(t)); w^i(x)\right) - \left(B_1(u(t)); w^i(x)\right) - \left(B_2(u(t)); w^i(x)\right)\right] r(t)\right| dt$$
$$\leq \int_0^T \left|\left(B\left(u^k(t), u^k(t)\right) - B(u(t), u(t)); w^i(x)\right) r(t)\right| dt \qquad \text{(I)}$$
$$+ \int_0^T \left|\left(B_1\left(u^k(t)\right) - B_1(u(t)); w^i(x)\right) r(t)\right| dt \qquad \text{(II)}$$
$$+ \int_0^T \left|\left(B_2\left(u^k(t)\right) - B_2(u(t)); w^i(x)\right) r(t)\right| dt \qquad \text{(III)}$$

Vamos mostrar (I), somando e subtraindo $\left(B\left(u\left(t\right),u^{k}\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)$, temos:

$$(\mathrm{I})=\int_{0}^{T}\left|\left[\left(B\left(u^{k}\left(t\right),u^{k}\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)-\left(B\left(u\left(t\right),u\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(B\left(u\left(t\right),u^{k}\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)-\left(B\left(u\left(t\right),u^{k}\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)\right]r\left(t\right)\right|\,dt$$

$$=\int_{0}^{T}\left|\left[\left(B\left(u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right),u\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)+\left(B\left(u\left(t\right),u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)\right]r\left(t\right)\right|\,dt$$
$$\leq\int_{0}^{T}\left|\left(B\left(u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right),u^{k}\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)\right|\left|r\left(t\right)\right|\,dt$$
$$+\int_{0}^{T}\left|\left(B\left(u\left(t\right),u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right);w^{i}\left(x\right)\right)\right|\left|r\left(t\right)\right|\,dt\,,$$

fazendo uso das condições (3.2-i) e (3.2-vii(a)), obtemos:

$$\leq\int_{0}^{T}c\left|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left|u^{k}\left(t\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k}\left(t\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|w^{i}\left(x\right)\right\|\left|r\left(t\right)\right|\,dt$$
$$+\int_{0}^{T}c\left|u\left(t\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k}\left(t\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left|u^{k}-u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k}-u\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|w^{i}\left(x\right)\right\|\left|r\left(t\right)\right|\,dt\,.$$

Mas sabe-se por (4.10) que $\left|u^{k}\left(t\right)\right|\leq\left\|u^{k}\left(t\right)\right\|\leq c$; pois $u^{k}\left(t\right)$ é limitada em $L^{\infty}\left(0,T;X\right)$ e, então escrevemos

$$\leq\int_{0}^{T}\widetilde{c}\left|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k}\left(t\right)\right\|^{\frac{1}{2}}\left|r\left(t\right)\right|\,dt\,,$$

por Hölder, preliminar 2.6,

$$\leq\widetilde{c}\left(\int_{0}^{T}\left|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right|^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{0}^{T}\left\|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{0}^{T}\left\|u^{k}\left(t\right)\right\|^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$\left(\int_{0}^{T}\left|r\left(t\right)\right|^{4}\,dt\right)^{\frac{1}{4}},$$

onde

$$\int_{0}^{T}\left\|u^{k}\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|^{2}\,dt\ \text{ e }\ \int_{0}^{T}\left\|u^{k}\left(t\right)\right\|^{2}\,dt$$

são limitadas, pois

$$u^k \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^2\left(0,T;X^1\right)$$

por (4.14), ou seja, são limitadas pela proposição 2.17 dos preliminares.

Ainda, notemos que

$$\int_0^T |r(t)|^4 \, dt \leq \max_{0\leq t\leq T} |r'(t)|^4 \int_0^T dt\,,$$

pois $r(t) \in C^1([0,T])$, veja preliminar 2.10.

Assim:

$$\leq \widetilde{c}_1 \left(\int_0^T \left| u^k(t) - u(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{4}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

pois por (4.17) resulta que

$$u^k \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0,T,X)\ .$$

Para mostrarmos (II), vamos considerar a condição (3.2-vii(a)), então

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}) = \int_0^T &\left| \left(B_1\left(u^k(t) - u(t)\right); w^i(x)\right) r(t) \right| dt \leq \int_0^T \left| \left(B_1\left(u^k(t) - u(t)\right); w^i(x)\right) \right| |r(t)| \, dt \\
&\leq c_2 \int_0^T \left\| u^k(t) - u(t) \right\| \left| w^i(x) \right|^{\frac{1}{2}} \left\| w^i(x) \right\|^{\frac{1}{2}} |r(t)| \, dt \\
&\leq c_2 \left(\int_0^T \left\| u^k(t) - u(t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \left| w^i(x) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \left\| w^i(x) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\left(\int_0^T |r(t)|^4 \, dt \right)^{\frac{1}{4}} .
\end{aligned}$$

E como

$$\int_0^T \left\| u^k(t) - u(t) \right\|^2 dt$$

é limitada, pois

$$u^k \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^2(0,T;X)$$

por (4.14), ou seja, são limitadas pela proposição 2.17 dos preliminares, também sabe-se que

$$\int_0^T |r(t)|^4 \, dt \leq \max_{0\leq t\leq T} |r'(t)| \int_0^T dt\,,$$

pois $r(t) \in C^1([0,T])$ e usando 2.10 dos preliminares. Logo,

$$\leq \widetilde{c}_2 \int_0^T \left\|u^k(t) - u(t)\right\|^2 dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Agora, mostraremos (III), fazendo uso da condição (3.2-vii(b)), então:

$$\text{(III)} = \int_0^T \left|B_2\left(\left(u^k(t) - u(t)\right); w^i(x)\right) r(t)\right| dt \leq \int_0^T \left|\left(B_2\left(u^k(t) - u(t)\right); w^i(x)\right)\right| |r(t)| \, dt$$

$$\leq c_3 \int_0^T \left|u^k(t) - u(t)\right|^{\frac{1}{2}} \left\|u^k(t) - u(t)\right\|^{\frac{1}{2}} \left|w^i(x)\right|^{\frac{1}{2}} \left\|w^i(x)\right\|^{\frac{1}{2}} |r(t)| \, dt$$

$$\leq c_3 \left(\int_0^T \left|u^k(t) - u(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \left\|u^k(t) - u(t)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \left|w^i(x)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\int_0^T \left\|w^i(x)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T |r(t)|^{\,4} dt\right)^{\frac{1}{4}} .$$

Mas como

$$\int_0^T \left\|u^k(t) - u(t)\right\|^2 dt$$

é limitada, pois

$$u^k \rightharpoonup u \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;X)$$

por (4.14), ou seja, são limitadas pela proposição, preliminar 2.17, também sabe-se que

$$\int_0^T |r(t)|^{\,4} dt \leq \max |r'(t)| \int_0^T dt\,,$$

pois $r(t) \in C^1([0,T])$ e usando 2.10 dos preliminares.

Assim:

$$\leq \widetilde{c}_3 \left(\int_0^T \left|u^k(t) - u(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{4}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

pois por (4.17):

$$u^k \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0,T;X) .$$

Logo, concluímos a prova de que

$$\int_0^T \big(B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right); w^i(x)\big)\, r(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \big(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\big)\, r(t)\, dt .$$

Agora, fazendo $k \to \infty$ em (4.18), temos:

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \big(u(t), w^i(x)\big)\, r'(t)\, dt + \int_0^T \big(\big(u(t), w^i(x)\big)\big)\, r(t)\, dt \\ &+ \int_0^T \big(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\big)\, r(t)\, dt \\ &= \big(u_0, w^i(x)\big)\, r(0) + \int_0^T \big(f(t), w^i(x)\big)\, r(t)\, dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

ou, ainda, podemos escrever (4.19) na forma:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{d}{dt} u(t), w^i(x)\right) r(t)\, dt + \int_0^T ((u(t), u(t)))\, r(t)\, dt \\ &+ \int_0^T \big(B_0(u(t), u(t)); w^i(x)\big)\, r(t)\, dt \\ &= \int_0^T \big(f(t), w^i(x)\big)\, r(t)\, dt , \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $w^i(x) \in V_k$ e $r(t) \in C^1([0,T], X)$.

Supondo que $v(t,x) = r(t)\, w^i(x) \in C^1([0,T], X) \cap C^1([0,T], X^1)$.

As funções v deste tipo são densas em $C^1([0,T], X)$ e $C^1([0,T], X^1)$; isto é, as combinações lineares finitas de termos do tipo $r(t)\, w^i(x)$ e, assim,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r(t)\, w^i(x)\right)$$

aproximam funções de $C^1([0,T], X) \cap C^1([0,T], X^1)$.

Logo, podemos escrever (4.20) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{d}{dt} u(t), v\right) dt + \int_0^T ((u(t), v))\, dt + \int_0^T B_0(u(t), v)\, dt \\ &= \int_0^T (f(t), v)\, dt , \quad \forall v \in C^1([0,T], X) \cap C^1\left([0,T], X^1\right) . \end{aligned} \tag{4.21}$$

E, assim, a igualdade (3.1) é obtida de (4.21) e a igualdade (3.2) é resultante de

$$\left(u^k(0), w^i(x)\right) r(0) = \left(P_k u_0, w^i(x)\right) r(0) \longrightarrow \left(u_0, w^i(x)\right) r(0) = \left(u_0, v(0,x)\right).$$

Finalmente, concluímos que o problema (3.1)-(3.2) possui pelo menos uma solução fraca u nas hipóteses do Teorema 1.

4.4 Alguns Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de equações diferenciais parciais conhecidas que se enquandram no formato geral proposto.

Exemplo 1: Equações do Calor.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ em } \Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{cases} \tag{*}$$

neste caso a formulação fraca é achar $u(t)$ com valores em $H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u,v) + (\nabla u, \nabla v) = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

Assim $B \equiv 0$; $B_1 \equiv B_2 \equiv 0$.

Aqui $A = -\Delta$; $X^1 = H_0^1(\Omega)$; $x = L^2(\Omega)$. De acordo com o Teorema 1 da página 701 de EVANS [4], existe uma base ortonormal (w_k) de $L^2(\Omega)$, onde $w_k \in H_0'(\Omega)$ tal que

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k \text{ em } \Omega$$

e onde $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ e $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Assim o Teorema 1 garante que $\forall u_0 \in L^2(\Omega)$ e $\forall f \in L^2(o,T;H^{-1}(\Omega))$ o problema $(*)$ tem uma solução fraca.

Exemplo 2: Sistema de equações de Burgers.

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u = f \ \text{ em } \ \Omega \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) \quad x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}\equiv 0 \end{cases}$$

neste caso a formulação fraca é achar $u\,(t)$ com valores em H_0^1 tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,(u,v) + (u\cdot\nabla u; v) + \mu\,(\nabla u,\nabla v) = (f,v) \quad \forall v\in H_0^1\,(\Omega) \\ u\,(0) = u_0 \end{cases}.$$

Assim $B_1\equiv B_2\equiv 0$; $x = L^2\,(\Omega)$; $X^1 = H_0^1\,(\Omega)$

$$\begin{aligned} &A : H^1 \longrightarrow H^{-1} \\ &u \longmapsto Au : \ \ H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad v \longmapsto (\nabla u,\nabla v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B : H_0^1\times H_0^1 \longrightarrow H^{-1} \\ &(u;v) \longmapsto B\,(u,v) : \ \ H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad w \longmapsto (B\,(u,v)\,;w) \end{aligned}$$

onde

$$(B\,(u,v)\,;w) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\,dx\,.$$

Os operadores A e B satisfazem as condições exigidas e assim podemos garantir que para $f\in L^2\,(0,T;H^{-1}\,(\Omega))$ e $u_0\in L^2\,(\Omega)$ existe uma solução para a equação de Burgers $u\in L^2\,(0,T;H_0^1\,(\Omega))\cap L^\infty\,(0,T;L^2\,(\Omega))\,.$

Exemplo 3: Sistema de equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = f \ \text{ em } \ \Omega \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) \quad x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}\equiv 0 \end{cases}$$

Aqui a formulação fraca é achar $u(t)$ com valores em $V = \{u \in H_0^1(\Omega) : \text{ div } u \equiv 0\}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u,v) + (u \cdot \nabla u; v) + \mu(\nabla u, \nabla v) = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

Neste caso

$$X = H = \left\{u \in L^2(\Omega) : \text{ div } u \equiv 0; \ u \cdot \overrightarrow{n}|_{\partial\Omega} \equiv 0\right\}$$
$$X^1 = V = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \text{ div } u \equiv 0\right\}$$

$B_1 \equiv B_2 \equiv 0.$

$B : V \times V \longrightarrow V'$ é contínua conforme TEMAM [25] Lema 1.1 da página 161.

B admite extensões contínuas $B : H \times V \longrightarrow V'$ e $B : V \times H \longrightarrow V'$ pois $V \subset H$ é denso.

Portanto de acordo com o Teorema 1 obtemos que o sistema de equações de Navier-Stokes admite uma solução fraca em $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ quando $f \in L^2(0,T,V')$ e $u_0 \in H$. confirmando o resultado clássico em TEMAM [25] na página 282 (Teorema 3.1).

CAPÍTULO 5

A PROPRIEDADE DE PERIODICIDADE DAS SOLUÇÕES FRACAS

Neste capítulo, a partir dos resultados obtidos através do Teorema 1, estabeleceremos resultados de existência de soluções fracas com a propriedade de reprodução, ou seja, noção que generaliza a periodicidade destas soluções.

Teorema 2 *Se* $\|B_2\|_1 < 1$*, então para toda* $f \in L^2\left(0,T;X^{-1}\right)$ *existe uma solução fraca de* (3.1)-(3.2) *que tem a seguinte propriedade de reprodução:*

$$u\left(0,x\right) = u\left(T,x\right) \ .$$

Demonstração:

Sendo $X^1 \hookrightarrow X$, existe $c_1 > 0$ tal que $\left|u^k\left(t\right)\right|^2 \leq C\left\|u^k\left(t\right)\right\|^2$, onde $C = \dfrac{c}{c_1}$. Daí obtemos que $c_1\left|u^k\left(t\right)\right|^2 \leq c\left\|u^k\left(t\right)\right\|^2$ e, utilizando esta desigualdade em (4.8), temos:

$$\frac{d}{dt}\left|u^k\left(t\right)\right|^2 + c_1\left\|u^k\left(t\right)\right\|^2 \leq C'\left\|f\left(t\right)\right\|_{-1}^2$$

ou equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{c_1 t}\left|u^k(t)\right|^2\right) \leq C' e^{c_1 t}\left\|f(t)\right\|_{-1}^2 ,$$

pois

$$\frac{d}{dt}\left(e^{c_1 t}\left|u^k(t)\right|^2\right) = e^{c_1 t}\left(c_1\left|u^k(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left|u^k(t)\right|^2\right) .$$

Integrando de 0 a T a desigualdade acima, obtemos:

$$e^{c_1 t}\left|u^k(T)\right|^2 \leq \left|u^k(0)\right| + C'\int_0^T e^{c_1 t}\left\|f(t)\right\|_{-1}^2 \, dt . \tag{5.1}$$

Agora, vamos definir a aplicação $L^k : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ na forma:

$$L^k(t) = \left(c_{1k}(t), c_{2k}(t), ..., c_{kk}(t)\right) ;$$

onde $c_{ik}(t)$, $i = 1, ..., k$ são coeficientes de expansão de $u^k(t)$, para

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\; w^i(x) \;\; \text{e} \;\; c_{ik}(t) = \left(u^k(t), w^i(x)\right) .$$

Observamos que

$$\left\|L^k(t)\right\|_{\mathbb{R}^k} = \left|u^k(t)\right| , \tag{5.2}$$

pois escolhemos a base espectral $\{w^i\}$ ortogonal em X.

Definindo a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi^k : \;\; & \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ & L_0^k \longmapsto \Phi\left(L_0^k\right) = L^k(T) , \end{aligned}$$

onde $L^k(t)$ corresponde a solução do problema (3.1)-(3.2) com valor inicial L_0^k, ou seja:

$$L_0^k = L^k(0) = \left(c_{1k}(0), ..., c_{kk}(0)\right) .$$

A aplicação Φ^k é contínua, pois a solução do sistema de E.D.O. (4.3) varia continuamente em relação aos dados iniciais e parâmetros conforme o Teorema 2.8 (de variação de soluções de uma E.D.O. em relação aos dados iniciais e parâmetros), ver preliminar. E ainda, devemos provar que Φ^k tem um ponto fixo. Para isto, é suficiente provar que para qualquer $\lambda \in [0,1]$, a possível solução da equação

$$L_0^k(\lambda) = \lambda \Phi^k\left(L_0^k(\lambda)\right) \tag{5.3}$$

é limitada independente de λ.

Sabendo que $L_0^k(0) = 0$, por (5.3) basta provar isto para $\lambda \in (0,1]$. Neste caso, observamos que (5.3) é equivalente a

$$\Phi^k\left(L_0^k(\lambda)\right) = \frac{1}{\lambda} L_0^k(\lambda)$$

e, pela definição de Φ^k e por (5.2), ou seja,

$$u^k(T) = \Phi^k\left(L_0^k(\lambda)\right) = \frac{1}{\lambda} L_0^k(\lambda)$$

e $u^k(0) = L_0^k(\lambda)$, temos que a desigualdade (5.1) implica que:

$$e^{c_1 t}\left\|\frac{1}{\lambda} L_0^k(\lambda)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 \leq \left\|L_0^k(\lambda)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 + 2C'\int_0^T e^{c_1 T}\left\|f(t)\right\|_{X^{-1}}^2\, dt\,,$$

onde

$$\int_0^T e^{c_1 t}\left\|f(t)\right\|_{X^{-1}}^2\, dt \leq \int_0^T e^{c_1 T}\left\|f(t)\right\|_{X^{-1}}^2\, dt\ .$$

E, assim, podemos escrever que:

$$\left\|L_0^k(\lambda)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2\left(\frac{e^{c_1 T}}{\lambda^2} - 1\right) \leq 2C'\int_0^T e^{c_1 T}\left\|f(t)\right\|_{X^{-1}}^2\, dt\ .$$

Considerando que:

$$0 < \lambda \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} \geq 1 \Longrightarrow \frac{e^{c_1 T}}{\lambda} \geq e^{c_1 T}$$
$$0 < \lambda^2 \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} \geq 1 \Longrightarrow \frac{e^{c_1 T}}{\lambda^2} \geq e^{c_1 T}$$

e, daí surge a desigualdade

$$\frac{e^{c_1 T}}{\lambda^2} - 1 \geq e^{c_1 T} - 1 > 0\,,$$

também ocorre que:

$$\left\| L_0^k\left(\lambda\right)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 \left(\frac{e^{c_1 T}}{\lambda^2} - 1 \right) \geq \left\| L_0^k\left(\lambda\right)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 \left(e^{c_1 T} - 1 \right)\,.$$

Portanto, daí temos

$$\left\| L_0^k\left(\lambda\right)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 \left(e^{c_1 T} - 1 \right) \leq 2C' \int_0^T e^{c_1 T} \left\| f\left(t\right)\right\|_{X^{-1}}^2 \, dt$$

a qual implica em

$$\left\| L_0^k\left(\lambda\right)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 \leq \frac{2C' \int_0^T e^{c_1 T} \left\| f\left(t\right)\right\|_{X^{-1}}^2 \, dt}{e^{c_1 T} - 1} = M\,,$$

onde $\lambda \in (0,1]$. Esta limitação é independente de $\lambda \in [0,1]$ e, portanto, Φ^k tem um ponto fixo $L_0^k(1)$ pelo teorema de Ponto Fixo de Schaefer, preliminar 2.15, satisfazendo a mesma limitação em (4.10). Ou seja, isto corresponde a existência de uma solução $u_p^k(t)$ de (4.1)-(4.2) onde $u_p^k(0) = u_p^k(T)$, isto é, uma solução periódica aproximada em $\mathbb{R}^k$. Além disso,

$$\left| u_p^k\left(0\right)\right|^2 = \left\| L_0^k\left(1\right)\right\|_{\mathbb{R}^k}^2 \leq M\,,$$

o qual é também independente de k.

Logo, os argumentos utilizados na prova do Teorema 1 podem ser repetidos para as soluções aproximadas $u_p^k(t)$ e, isto nos fornece exatamente os mesmos tipos de estimativas uniformemente em k para elas e, ainda, a convergência de uma subseqüência para a solução u_p de (3.1)-(3.2) satisfazendo a propriedade de reprodução $u(0,x) = u(T,x)$. Desta maneira, fica provado o Teorema 2.

CAPÍTULO 6

A EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO FRACA

Nesta etapa do trabalho vamos demonstrar dois lemas e impor as hipóteses (3.2-vii) sobre os operadores envolvidos no problema fraco de Cauchy e desta maneira demonstraremos a unicidade de soluções fracas.

Teorema 3 *Se os operadores B, B_1 e B_2 satisfazem as condições* (3.2-*i*) *a* (3.2-*vii*), *então para todo $u_0 \in X$ e para toda $f \in L^2\left(0, T; X^{-1}\right)$ existe uma única solução fraca para o problema de Cauchy* (3.1)-(3.2).

Antes de provarmos este teorema, vamos demonstrar os dois lemas seguintes.

6.1 1º Lema

Sob as hipóteses do Teorema 3, tem-se que

$$u_t^k(t) \in L^2\left(0, T; X^{-1}\right) .$$

Demonstração:

É suficiente mostrar que

$$\int_0^T \left\|u_t^k(t)\right\|_{-1}^2 dt \leq c\,, \quad \forall k : k = 1, 2, \ldots;$$

onde $c > 0$ é independente de k. Observamos que $P_k : X \longrightarrow V_k$ e desde que $X^1 \hookrightarrow X$ e $V_k \hookrightarrow X^1$, podemos considerar P_k como um operador contínuo de X^1 em X^1, pois:

$$\begin{aligned} P_k :\ & X^1 \longrightarrow V_k \subset X^1 \\ & v \longmapsto P_k v \end{aligned}$$

$$\|P_k v\| \leq c \|P_k v\|_{V_k} \leq c' |v| \, c'' \|v\| .$$

Consequentemente o seu adjunto P_k^* é também linear e contínuo de X^{-1} em X^{-1} e ele está definido por

$$\begin{aligned} P_k^* :\ & X^{-1} \longrightarrow X^{-1} \\ & v \longmapsto \langle P_k^* v, w \rangle = \langle v, P_k w \rangle , \end{aligned}$$

$\forall v \in X^{-1}$, $\forall w \in X^1$ e $\|P_k^*\| \leq \|P_k\| \leq 1$, pois

$$\begin{aligned} \|P_k^*\| = \sup_{\|v\|_{-1} \leq 1} \|P_k^* v\|_{-1} &= \sup_{\|v\|_{-1} \leq 1} \left(\sup_{\|w\| \leq 1} |\langle P_k^* v, w \rangle| \right) \\ &= \sup_{\|v\|_{-1} \leq 1} \left(\sup_{\|w\| \leq 1} \langle v, P_k w \rangle \right) \\ &\leq \sup_{\|v\|_{-1} \leq 1} \left(\sup_{\|w\| \leq 1} \|v\|_{-1} \|P_k w\| \right) \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \|P_k w\| = \|P_k\| , \end{aligned}$$

mas $\|P_k w\| \leq \|w\|$ então

$$\|P_k\| = \sup_{\|w\|\leq 1} \|P_k w\| \leq \sup \|w\| \leq 1\,.$$

Por outro lado, a equação (4.1) pode ser escrita na forma:

$$\left(u_t^k, v\right) = (f, v) - \left(B_0\left(u^k, u^k\right), v\right) - \left(Au^k, v\right)\ ,\ \ \forall v \in V_k\,,$$

tomando $v = P_k w$, $w \in X^1$, tem-se:

$$\left(P_k^* u_t^k, w\right) = \left(P_k^*\left(f - B_0\left(u^k, u^k\right), Au^k\right), w\right)\ ,$$

como os w^i são autofunções do operador A, temos que eles são invariantes por P_k e P_k^*, conseqüentemente $P_k^*\left(w^i\right) = w^i$. Ou seja: $P_k\left(w^i\right) = w^i$, pois $w^i \in V_k$ e

$$\left\langle P_k^* w^i, v\right\rangle = \left\langle w^i, P_k v\right\rangle = \left\langle w^i, v\right\rangle\ ,$$

onde $X^1 \subset X \simeq X' \subset X^{-1}$ e $v \in V_k$, daí vem que se $w^i \in X^1$ então $w^i \in X^{-1}$.

Logo: $\langle P_k^*\left(w^i\right) - w^i, v\rangle = 0$, $\forall v \in V_k$, implica em $P_k^* w^i = w^i$, para $w^i \in V_k$.

Desta forma, obtemos $\left(u_t^k, w\right)$ que define um funcional linear em X^1, isto é, um elemento de X^{-1}, tal que:

$$\left(u_t^k, w\right) = \left(P_k^*\left(f - B_0\left(u^k, u^k\right) - Au^k\right), w\right)\ ,\ \ \forall w \in X^1\,,$$

ou equivalentemente,

$$u_t^k = P_k^*\left(f - B_0\left(u^k, u^k\right) - Au^k\right) \ \text{ em }\ X^{-1}\,.$$

Assim, podemos escrever

$$\left\|u_t^k\right\|_{-1} = \left\|P_k^*\left(f - B_0\left(u^k, u^k\right) - Au^k\right)\right\|_{-1}$$

e, como P_k^* é contínuo de X^{-1} em X^{-1}, temos

$$\leq c\left\|f - B_0\left(u^k, u^k\right) - Au^k\right\|_{-1} .$$

Ou ainda, vem que

$$\left\|u_t^k\right\|_{-1} \leq c\left(\|f\|_{-1} + \left\|Au^k\right\|_{-1} + \left\|B_0\left(u^k, u^k\right)\right\|_{-1}\right) .$$

Elevando ao quadrado a desigualdade anterior:

$$\left\|u_t^k\right\|_{-1}^2 \leq c\left(\|f\|_{-1} + \left\|Au^k\right\|_{-1} + \left\|B_0\left(u^k, u^k\right)\right\|_{-1}\right)^2$$

e aplicando a desigualdade elementar 2.3 dos preliminares, obtemos:

$$\left\|u_t^k\right\|_{-1}^2 \leq 3c\|f\|_{-1}^2 + 3c\left\|Au^k\right\|_{-1}^2 + 3c\left\|B_0\left(u^k, u^k\right)\right\|_{-1}^2 .$$

Integrando esta última desigualdade de 0 a T, temos

$$\int_0^T \left\|u_t^k\right\|_{-1}^2 dt \leq \widetilde{c}\int_0^T \|f\|_{-1}^2 dt + \widetilde{c}\int_0^T \left\|Au^k\right\|_{-1}^2 dt + \widetilde{c}\int_0^T \left\|B_0\left(u^k, u^k\right)\right\|_{-1}^2 dt. \tag{6.1}$$

Agora, vamos estimar o lado direito da desigualdade acima. Inicialmente, mostraremos que

$$\int_0^T \left\|Au^k\right\|_{-1}^2 dt \leq \int_0^T \left\|u^k\right\|^2 dt \leq M .$$

Sendo X^α com domínio $D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ um espaço de Hilbert com produto interno $(u,v)_\alpha = \left(A^{\frac{\alpha}{2}}u, A^{\frac{\alpha}{2}}v\right)$. E definindo

$$\begin{aligned} A^\alpha :\ & D\left(A^\alpha\right) \longrightarrow X \\ & u \longmapsto Au . \end{aligned}$$

Para A^α contínuo, então $|A^\alpha u| \leq c\|u\|_\alpha$.

Fazendo $v = u$, temos:

$$\|u\|_\alpha^2 = \left|A^{\frac{\alpha}{2}}u\right| ,$$

o que implica em $\left|A^{\frac{\alpha}{2}}u\right| = \|u\|_{\alpha}$, tomando $\alpha = 1$, ocorre que $\left|A^{\frac{1}{2}}u\right| = \|u\|$.

Assim:

$$\left\langle A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right\rangle \leq c\left|A^{\frac{1}{2}}u^k(t)\right|\left|A^{\frac{1}{2}}v\right|$$

e $Au^k(t) \in X$, pois $u^k(t) \in V_k \hookrightarrow X^1 \hookrightarrow X$.

Então $Au^k(t)$ define um elemento de X^{-1}, tal que para $v \in X^{-1}$, temos

$$\begin{gathered}\left\langle Au^k(t), v\right\rangle = \left(Au^k(t), v\right)\\ \left\langle A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right\rangle = \left(A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right).\end{gathered}$$

Assim, aplicando Cauchy-Schwarz, preliminar 2.4,

$$\left(A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right) \leq \left|A^{\frac{1}{2}}u^k(t)\right|\left|A^{\frac{1}{2}}v\right|$$

ou, ainda:

$$\left\langle A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right\rangle \leq \left\|u^k(t)\right\|\|v\|.$$

Conseqüentemente:

$$\sup_{\|v\|\leq 1}\left\langle A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right\rangle = \sup_{\|v\|\leq 1}\left\|u^k(t)\right\|\|v\| \leq \left\|u^k(t)\right\|,$$

pois $\|v\|_1 \leq 1$.

Logo:

$$\left(\sup_{\|v\|\leq 1}\left\langle A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right\rangle\right)^2 \leq \left\|u^k(t)\right\|^2.$$

Da última desigualdade e pela estimativa (4.10) concluímos que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|Au^k(t)\right\|_{-1}^2 dt &\leq \int_0^T\left(\sup_{\|v\|\leq 1}\left\langle A^{\frac{1}{2}}u^k(t), A^{\frac{1}{2}}v\right\rangle\right)^2 dt\\ &\leq \int_0^T \left\|u^k(t)\right\|^2 dt \leq M. \qquad (6.2)\end{aligned}$$

Temos, também que fazer a estimativa do termo não linear da desigualdade (6.1).

Aplicando as propriedades (3.2-vi) e (3.2-vii) em (6.1):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right)\right\|_{-1}^2 dt &= \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left\langle B_0\left(u^k(t), u^k(t)\right), v\right\rangle \right)^2 dt \\
&\le \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left\langle B\left(u^k(t), u^k(t)\right), v\right\rangle \right)^2 dt \\
&+ \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left\langle B_1\left(u^k(t)\right), v\right\rangle \right)^2 dt \\
&+ \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left\langle B_2\left(u^k(t)\right), v\right\rangle \right)^2 dt \\
&\le c_1 \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left|u^k(t)\right| \left\|u^k(t)\right\| \|v\| \right)^2 dt \\
&+ c_2 \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left\|u^k(t)\right\| |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt \\
&+ c_3 \int_0^T \left(\sup_{\|v\|\le 1} \left|u^k(t)\right|^{\frac{1}{2}} \left\|u^k(t)\right\|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt\,.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Mas considerando que:

$$\left(\left|u^k(t)\right| \left\|u^k(t)\right\| \|v\|\right)^2 \le \left\|u^k(t)\right\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \left\|u^k(t)\right\|^2 , \tag{6.4}$$

pois $\left|u^k(t)\right| \le c \left\|u^k\right\|_{L^\infty(0,T;X)}$ e $\|v\| \le 1$.

$$\left(\left\|u^k(t)\right\| |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \le \left\|u^k(t)\right\|^2 , \tag{6.5}$$

pois $|v|^{\frac{1}{2}} \le c\,\|v\|$ e $\|v\| \le 1$.

$$
\begin{aligned}
\left(\left|u^k(t)\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u^k(t)\right\|^{\frac{1}{2}}|v|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}\right)^2 &\leq \left(\left\|u^k(t)\right\|_{L^\infty(0,T;X)}^{\frac{1}{2}}\left\|u^k(t)\right\|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&= \left\|u^k(t)\right\|_{L^\infty(0,T;X)}\left\|u^k(t)\right\|, \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

pois $\left|u^k(t)\right|^{\frac{1}{2}} \leq \left\|u^k(t)\right\|_{L^\infty(0,T;X)}^{\frac{1}{2}}$, $|v|^{\frac{1}{2}} \leq c\|v\|$ e $\|v\| \leq 1$.

De (6.4), (6.5) e (6.6) aplicados em (6.3), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\leq c_1\left\|u^k(t)\right\|_{L^\infty(0,T;X)}\int_0^T\left\|u^k(t)\right\|^2 dt + c_2\int_0^T\left\|u^k(t)\right\|^2 dt \\
&+c_3\left\|u^k(t)\right\|_{L^\infty(0,T;X)}\int_0^T\left\|u^k(t)\right\| dt \leq M
\end{aligned} \qquad (6.7)
$$

o que fica garantido pela estimativa (4.10). E sabemos, por hipótese, que $f(t) \in L^2(0,T;X^{-1})$.

Portanto, provamos que

$$
u_t^k(t) \in L^2\left(0,T;X^{-1}\right)
$$

uniformemente em k.

6.2 2º Lema

Sob as hipóteses do Teorema 3, temos

$$
D_t^\alpha u^k(t) \in L^2(0,T;X)\ ;\ \ \forall\alpha,\ 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}.
$$

Demonstração:

Integrando a igualdade (4.1) de 0 a $t+h \leq T$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+h}\left(u_t^k(\tau),v\right)d\tau + \int_t^{t+h}\left(\left(u^k(\tau),v\right)\right)d\tau &= \int_t^{t+h}\left(f(\tau),v\right)d\tau \\
&- \int_t^{t+h}\left(B_0\left(u^k(\tau),u^k(\tau)\right);v\right)d\tau
\end{aligned} \qquad (6.8)
$$

ou, similarmente:

$$\int_t^{t+h} \left(u_t^k(\tau), v\right) \, d\tau = \int_t^{t+h} \left((f(\tau), v) - \left(\left(u^k(\tau), v\right)\right) - \left(B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right); v\right)\right) d\tau \, ,$$

mas já sabemos que:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h} \left(u_t^k(\tau), v\right) \, d\tau &= \left(u^k(t+h), v\right) - \left(u^k(t), v\right) \\ &= \left(u^k(t+h) - u^k(t), v\right) = \left(u_h^k(t), v\right) \, , \qquad (6.9)\end{aligned}$$

$$(f(\tau), v) \leq \|f(\tau)\|_{-1} |v| \leq c \|f(\tau)\|_{-1} \|v\| \, , \qquad (6.10)$$

$$\left(\left(u^k(\tau), v\right)\right) \leq c \left\|u^k(\tau)\right\| \|v\| \, , \qquad (6.11)$$

$$\left(B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right); v\right) \leq \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1} |v| \leq c \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\| \|v\| \, . \qquad (6.12)$$

Utilizando as desigualdades (6.9) a (6.12) em (6.8), temos:

$$\begin{aligned}\left(u_h^k(t), v\right) &\leq c \int_t^{t+h} \left(\|f(\tau)\|_{-1} + \left\|u^k(\tau)\right\| + \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1}\right) \|v\| \, d\tau \\ &\leq c \|v\| \int_t^{t+h} g(\tau) \, d\tau \, , \qquad (6.13)\end{aligned}$$

definindo $g(\tau) = \|f(\tau)\|_{-1} + \left\|u^k(\tau)\right\| + \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1}$.

Assim, tomando $v = u_h^k(t)$ e integrando de 0 a T em (6.13), obtemos:

$$\int_0^T \left|u_h^k(t)\right|^2 dt \leq c \int_0^T \left(\left\|u^k(t)\right\| \int_t^{t+h} g(\tau) \, d\tau\right) dt \, . \qquad (6.14)$$

Agora, considerando que

$$\begin{aligned}g^2(\tau) &= \left(\|f(\tau)\|_{-1} + \left\|u^k(\tau)\right\| + \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1}\right)^2 \\ &\leq 3\left(\|f(\tau)\|_{-1}^2 + \left\|u^k(\tau)\right\|^2 + \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1}^2\right)\end{aligned}$$

e integrando de 0 a T a desigualdade anterior:

$$\int_0^T g^2(\tau)\; d\tau \leq 3\int_0^T \|f(\tau)\|_{-1}^2\; d\tau + 3\int_0^T \left\|u^k(\tau)\right\|^2\; d\tau$$
$$+\,3\int_0^T \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1}^2\; d\tau\,, \tag{6.15}$$

onde:

$$\int_0^T \|f(\tau)\|_{-1}^2 < \infty\,, \tag{6.16}$$

pois por hipótese $f \in L^2(0,T;X^{-1})$.

$$\int_0^T \left\|u^k(\tau)\right\|^2\; d\tau < \infty\,, \tag{6.17}$$

pela desigualdade (4.10) .

$$\int_0^T \left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1}^2\; d\tau < \infty\,, \tag{6.18}$$

pois na prova do Lema 6.1 em (6.7) concluímos também que $\left\|B_0\left(u^k(\tau), u^k(\tau)\right)\right\|_{-1} \in L^2(0,T)$.

Logo, por (6.16), (6.17) e (6.18) em (6.15) obtemos que $g(\tau) \in L^2(0,T)$.

Desta maneira, a desigualdade (6.14) está nas condições do Lema 2.22(B) dos preliminares, donde temos que

$$\left|u^k(t)\right|_{N^{\frac{1}{2},2}(0,T;X)} \leq c\left\|u^k(t)\right\|_{L^2(0,T;X^1)} \leq \widetilde{c},$$

pois sabemos que $u^k(t) \in L^2(0,T;X^1)$ por (4.12) .

E, assim, aplicando a proposição dos preliminares 2.23, com $s = \dfrac{1}{2}$ e $B = X$, temos:

$$N^{\frac{1}{2},2}(0,T;X) \hookrightarrow H^\alpha(0,T;X)$$

então $D_t^\alpha u^k \in L^2(0,T;X)$; $\forall\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Portanto, concluímos a prova do 2º Lema.

6.3 Demonstração do Teorema 3

Sejam u e v duas soluções do problema (3.1)-(3.2) e consideremos $w = u - v$ dentro das hipóteses do Teorema 1.

Assim, para $u \in L^2(0,T;X^1) \cap L^\infty(0,T;X)$, decorre:

$$u_t + Au + B(u,u) + B_1(u) + B_2(u) = f$$
$$u(0) = u_0 \,.$$

E, também, para $v \in L^2(0,T;X^1) \cap L^\infty(0,T;X)$, resulta:

$$v_t + Av + B(v,v) + B_1(v) + B_2(v) = f$$
$$v(0) = v_0 \,.$$

Efetuando a subtração entre as equações acima, obtemos:

$$(u_t - v_t) + A(u-v) + B(u,u) - B(v,v) + B_1(u-v) - B_2(u-v) = 0$$
$$w(0) = 0 \,.$$

Agora, considerando que w satisfaz a equação anterior, temos o seguinte resultado:

$$w_t + Aw + B(u,u) - B(v,v) + B_1(w) + B_2(w) = 0 \tag{6.19}$$
$$w(0) = 0 \,. \tag{6.20}$$

Mas sabendo que:

$$\begin{aligned} B(w,v) - B(u,w) &= B(u-v,v) + B(u,u-v) \\ &= B(u,v) - B(v,v) + B(u,u) - B(u,v) \\ &= B(u,u) - B(v,v) \ . \end{aligned}$$

Daí, equivalentemente, podemos escrever a equação (6.19) na forma:

$$w_t + Aw = -B_1(w) - B_2(w) - B(u,w) - B(w,v) \ . \tag{6.21}$$

Multiplicando a equação acima por w, chegamos em

$$(w_t, w) + (Aw, w) = -(B_1(w), w) - (B_2(w), w) - (B(u, w), w) - (B(w, v), w) \ . \tag{6.22}$$

Levando em consideração os seguintes resultados:

$$(B_1(w), w) = (B(u, w), w) = 0,$$

pelas propriedades (3.2-iii) e (3.2-v);

$$(Aw, w) = \left(A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}w\right) = ((w, w)) = \|w\|^2 \ ,$$

pela definição de produto interno em um espaço de Hilbert X^1;

$$|B_2(w), w| \leq c\,|w|\,\|w\| \leq c_n\,|w|^2 + n\,\|w\|^2 \ ,$$

por (3.2-vii(b)) e pela desigualdade de Cauchy com ε, preliminar 2.2, para $n = \dfrac{\varepsilon^2}{2} > 0$;

$$|(B(w, w), w)| = |B(w, w), v| \leq c\,|w|\,\|w\|\,\|v\| \leq c_n\,|w|^2\,\|v\|^2 + n\,\|w\|^2 \ ,$$

por (3.2-iii), (3.2-vii(b)) e pela desigualdade de Cauchy com ε, preliminar 2.2.

Integrando em Ω a equação (6.22) e substituindo os últimos resultados encontrados, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq c_n\,|w|^2 + n\,\|w\|^2 + c_n\,|w|^2\,\|v(t)\|^2 + n\,\|w\|^2 \ , \tag{6.23}$$

mas considerando que:

$$c_n\,|w|^2 + n\,\|w\|^2 + c_n\,|w|^2\,\|v(t)\|^2 + n\,\|w\|^2 = c_n\,|w(t)|^2\left(1 + \|v(t)\|^2\right) + 2n\,\|w(t)\|^2$$

e tomando $n = \dfrac{1}{4}$ em (6.23), podemos reescrever a desigualdade (6.23) na forma:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w\left(t\right)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|w\left(t\right)\right\|^2 \leq c\left|w\left(t\right)\right|^2\left(1 + \left\|v\right\|^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left|w\left(t\right)\right|^2 + \left\|w\left(t\right)\right\|^2 \leq c_1\left|w\left(t\right)\right|^2\left(1 + \left\|v\left(t\right)\right\|^2\right) . \tag{6.24}$$

Integrando de 0 a t a última desigualdade:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left|w\left(s\right)\right|^2\, ds + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2\, ds \leq c_1 \int_0^t \left|w\left(s\right)\right|^2\left(1 + \left\|v\left(s\right)\right\|^2\right)\, ds$$

chegamos em

$$\left|w\left(t\right)\right|^2 - \left|w\left(0\right)\right|^2 + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2\, ds \leq c_1 \int_0^t \left|w\left(s\right)\right|^2\left(1 + \left\|v\left(s\right)\right\|^2\right)\, ds$$

e como $w\left(0\right) = 0$, obtemos:

$$\left|w\left(t\right)\right|^2 + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2\, ds \leq c_1 \int_0^t \left|w\left(s\right)\right|^2\left(1 + \left\|v\left(s\right)\right\|^2\right)\, ds\, ,$$

mas

$$\int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2\, ds = 0$$

e, resulta:

$$\left|w\left(t\right)\right|^2 \leq \int_0^t \left|w\left(s\right)\right|^2\left(1 + \left\|v\left(s\right)\right\|^2\right)\, ds\, . \tag{6.25}$$

Utilizando o Lema de Gronwall, preliminar 2.9, onde $u\left(s\right) = \left|w\left(s\right)\right|^2$ e $v\left(s\right) = c_1\left(1 + \left\|v\left(s\right)\right\|^2\right) \in L^1\left(0, T\right)$, então

$$\left|w\left(t\right)\right|^2 \leq 0 \cdot \exp\left(\int_0^t c_1\left(1 + \left\|v\left(s\right)\right\|^2\right)\, ds\right) = 0\, .$$

Assim:

$$\|w(t)\|^2 = 0 \Longrightarrow w(t) = 0\,, \quad \forall t \in [0,T]\ ,$$

resultando que $u \equiv v$.

Portanto, concluímos a prova da unicidade de solução para o problema de Cauchy (3.1)-(3.2) .

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O objetivo deste trabalho foi o de dar uma formulação variacional para certos tipos importantes de equações diferenciais parciais não lineares de evolução cuja formulação inclui casos particulares de equações clássicas (sistemas de equações de Navier-Stokes e sistemas de equações de Boussinesq, por exemplo) e apresentar resultados de existência e unicidade de soluções fracas para este problema.

Nos preliminares apresentamos alguns resultados clássicos utilizados nas equações diferenciais parciais, fundamentalmente apresentamos um lema que permitiu garantir as estimativas em espaços de Nikol'skii, o que tornou possível a aplicação de um teorema de compacidade do tipo de J. Simon. Assim, foi possível resolver uma das maiores dificuldades do trabalho que é o fortalecimento das convergências na aplicação do método de Galerkin para determinar a existência de soluções fracas.

Provamos, também, que estas soluções fracas apresentam num certo sentido uma propriedade de periodicidade.

Na etapa final, foram impostas algumas hipóteses adicionais sobre os operadores e provados dois lemas (Lema 6.1 e 6.2) e assim foi possível obter a unicidade das soluções fracas.

Desta maneira, apresentamos o uso do método de Galerkin para uma classe geral das equações diferenciais parciais que inclui diversas equações clássicas na teoria de fluidos.

Entre as possíveis sugestões para trabalhos futuros temos:

— O uso do método de Galerkin em espaços de Nikol'skii para a equação de Navier-Stokes em domínios não cilíndricos.

— Uso do método de Galerkin em espaços de Nikol'skii para as equações que não se enquadram no tipo geral proposto.

— Estudar as questões relativas a decaimento das soluções fracas, como a regularidade e outras, para a classe de equações proposta neste trabalho.

— Estudar questões relativas a existência e unicidade de solução para as equações que se enquadram no tipo geral proposto neste trabalho utilizando a teoria de semigrupos em espaços de Nikol'skii.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R., **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1995.

[2] BRÉZIS, H., **Análisis Funcional – Toería y Aplicaciones**, Aliança Editorial S. A., Madrid, 1983.

[3] DAMÁSIO, P. D. & ROJAS-MEDAR, M. A., **On Some Questions of the Weak Solutions of Evolution Equation for Magnetohydrodynamic Type**, Capricórnio, Conferência no Sexto Congresso de Matemática, Iquique, Chile, 1996.

[4] EVANS, L. C., **Berkeley Mathematics Lectures Notes-Partial Differential Equations**, Vol. 3B, University of California, Berkeley, 1993.

[5] HALE, J. K., **Ordinary Diferential Equations**, Wiley-Interscience a Division of John Wiley & Sons, New York, 1969.

[6] HÃRÃGUS, D., **Equations du Type Navier-Stokes**, Monografia Matemática Número 49, Universitatea de Vest din Timisoana, 1994.

[7] KREYSZIG, E., **Introductory Functional Analysis With Applications**, John & Sons, New York, 1989.

[8] LIMA, E. L., **Curso de Análise**, Vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[9] LIMA, E. L., **Curso de Análise**, Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[10] LIONS, J. L., **Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires**, Dunod, Paris, 1969.

[11] MEDEIROS, L. A. & MELLO, E. A., **Textos de Métodos Matemáticos – A Integral de Lebesgue**, Vol. 18, UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[12] MEDEIROS, L. A. & MIRANDA, M. M., **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais**, UFRJ, Notas de Aula, Rio de Janeiro, 1989.

[13] NIKOL'SKII, S. M., **Inequalities for Entire Functions of Exponential Type and Their Application to the Theory of Differentiable Functions of Several Variables**, Trudy Mat. Inst. Steklov 38 (1951), 244-278 [English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2), 80 (1969), 1-38].

[14] NIKOL'SKII, S. M., **Properties of Certain Classes of Functions of Several Variables on Differentiable Manifolds**, Mat. Sb. 33 (75) (1953), 261-326 [English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2), 80 (1969), 39-118].

[15] NIKOL'SKII, S. M., **Extension of Functions of Several Variable Preserving Differential Properties**, Mat. Sb. 40 (82) (1956), 243-268 [English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2), 80 (1969), 159-188].

[16] ORTEGA-TORRES, E. & ROJAS-MEDAR, M. A., **On the Uniqueness and Regularity of the Weak Solution for Magnetomicro-**

polar Fluid Equations. Anais do 43º Seminário Brasileiro de Análise, IME-USP, São Paulo, 1996.

[17] ROJAS-MEDAR, M. A., **Algumas Questões Matemáticas das Equações dos Fluidos Não Homogêneos**, Minicurso, 41º Seminário Brasileiro de Análise, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1995.

[18] ROJAS-MEDAR, M. A. & ORTEGA-TORRES, E., **Sobre uma Classe de Equações Diferenciais Parciais Não Lineares**, Tese de Doutorado – Relatório de Pesquisa, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1996.

[19] SIMON, J., **Compact Sets in $\mathbf{L^p(0,T;B)}$**, Annali di Mat. Pura Applicata, (IV), 146, 65-96, 1987.

[20] SIMON, J., **Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids Existence of Velocity, Density and Pressure**, SIAM J. Math, Anal. 21, 1093-1117, 1990.

[21] SIMON, J., **Sobolev, Besov and Nikol'skii Functional Spaces: Imbeddings and Comparisons for Vector Valued Spaces on an Interval**, Annali di Mat. Pura Applicata, (IV), 117-148, 1990.

[22] SOTOMAYOR, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[23] STRANG, G., **Linear Algebra and it's Aplications**, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1976.

[24] TEMAM, R., **Infinite-Dimensional Dynamical Sistems in Mechanics and Physics**, Springer-Verlag, New York, 1988.

[25] TEMAM, R., **Navier-Stokes Equations – Theory and Numerical Analysis**, North-Holland Publishing Company, New York, 1979.

[26] ZHANG, K., **On Shinbrot's Conjecture for the Navier-Stokes**, Proc. R. Soc. Lodon A., 440, J37-J40, 1993.

[27] ZYGMUND, A., **Trigonometric Series**, Vol. 1, Cambrige University Press, Londres, 1959.