Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DESIGUALDADE DE HARNACK

por

SABRINA ZANCAN

Porto Alegre, setembro de 2004.

Dissertação submetida por Sabrina Zancan* como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Dr. João Paulo Lukaszczyk
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Data da Defesa: 27 de setembro de 2004.

---

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Para Jeovani Peripolli,
com todo amor e admiração.

Agradecimentos

A Deus e a Nossa Senhora, que estão sempre comigo.

A meu Anjo Jeovani, pelo amor, carinho, incentivo, proteção e paciência.

A meus pais, pela vida e por tudo que tenho, e a toda minha família.

A meu amigo Marnei, pela amizade, incentivo, companheirismo em todos estes anos.

Ao professor Leonardo, pelos ensinamentos, orientação e pelo exemplo.

A todos os professores, em especial Professor Eduardo, por ter mudado meu conceito de Análise.

As amigas Rosane, Dilnez, Eliane e Flávia, que nunca me deixaram sem apoio, sem carinho e sem teto.

A Denise, pelo exemplo de que vencer é possível apesar das dificuldades do caminho.

Ao Cleber a ao Luciano, pela ajuda na digitação, na apresentação e principalmente pela amizade.

A Valéria e ao Maurício pela amizade e coleguismo.

A todos aqueles que acreditaram em mim, que passaram por mim e deixaram sua marca, aqui citados ou não, serão sempre lembrados.

Muito obrigada a todos.

Resumo

Neste trabalho provamos a Desigualdade de Harnack para soluções positivas de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem usando as iterações de Jürgen Moser. A partir disso, mostramos que estas soluções são funções de Hölder e estudamos o seu comportamento no infinito. Aplicamos este resultado para provar que uma superfície mínima, gráfico de uma função definida fora de um cubo em $\mathbb{R}^n$ e com derivadas limitadas, aproxima-se de um plano em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Abstract

In this work we prove Harnack Inequality for solutions of Elliptic Partial Differential Equations of second order using Jürgen Moser iterations. Hence we show that these solutions are Hölder continuous and we study their behavior at infinity. We apply these results to prove that minimal surfaces, that are graphics of functions with bounded derivatives defined outside a cube in $\mathbb{R}^n$ can be approximated by a plane in $\mathbb{R}^{n+1}$.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos a Desigualdade de Harnack para soluções fracas positivas da equação diferencial parcial elíptica linear de segunda ordem

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i(A_{ij}(x)D_j u) \;=\; 0, \tag{1.1}$$

onde $(A_{ij}(x))$ é uma matriz simétrica positiva definida de funções mensuráveis com autovalores entre λ e Λ para $0 < \lambda < \Lambda$.

Inicialmente esta desigualdade foi estabelecida para funções harmônicas. De acordo com o Teorema de Harnack, se u é uma função harmônica positiva definida em um aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e Ω' é um compacto contido em Ω, então existe uma constante C dependendo apenas de Ω e Ω' tal que

$$\sup_{\Omega'} u \;\leq\; C \inf_{\Omega'} u. \tag{1.2}$$

Posteriormente, Serrin [8] mostrou que esta desigualdade também vale para soluções não-negativas de

$$Lu \;=\; au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \;=\; 0 \quad \text{em} \quad D_R,$$

onde D_R é um disco em $\mathbb{R}^2$. Neste caso, a constante C também depende da razão entre o maior e o menor autovalor associados a L. A demonstração usa o princípio do máximo. Bers e Nirenberg [1] mostraram resultados semelhantes usando técnicas diferentes. Moser [7] provou a desigualdade para soluções fracas de (1.1). Serrin [9] e Trudinger [10] também estenderam estes resultados para equações quasilineares na forma da divergência. Em 1979, Krylov e Safanov [4, 5] provaram a Desigualdade de Harnack para soluções de equações elípticas de segunda ordem na forma não divergente com coeficientes mensuráveis.

O nosso objetivo é estudar as iterações de Jürgen Moser [7] para mostrar a Desigualdade de Harnack e usá-la para provar que soluções fracas de (1.1) são funções de Hölder. Aplicamos estes resultados para analisar o comportamento de superfícies mínimas.

No capítulo 2, definimos conceitos, notação e apresentamos alguns resultados clássicos que são usados ao longo do trabalho.

No capítulo 3, mostramos alguns lemas importantes como as desigualdades de Sobolev e Poincaré e um teorema fundamental ao trabalho, de autoria de John e Nirenberg [6].

No capítulo 4, é feita uma motivação para a desigualdade de Harnack, cuja prova é feita no capítulo 5. Aqui usamos as iterações de Moser.

No capítulo 6, usando esta desigualdade, mostramos que as soluções de (1.1) são Hölder contínuas. O estudo do comportamento no infinito é feito no capítulo 7.

Como aplicação dos resultados dos capítulos anteriores, mostramos que a superfície mínima, que é gráfico de função fora de um cubo em $\mathbb{R}^n$ com derivadas limitadas, aproximam-se, no infinito, de um plano em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Notações e Definições

1. Ω é um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$.

   Ω' é um subconjunto compacto de Ω.

   $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω.

2. $m(\Omega)$ representa a medida do conjunto Ω.

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o **produto interno**.

4. $Q(a, h)$ é um cubo aberto de aresta $h > 0$, centrado em $a \in \mathbb{R}^n$.

   $Q[a, h]$ é um cubo fechado de aresta $h > 0$, centrado em $a \in \mathbb{R}^n$

5. $B(x, r)$ é uma bola aberta de centro x e raio $r > 0$.

6. $C^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis.

7. $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω.

8. Distância entre os conjuntos Ω a Ω' é dada por:

   $$\text{dist}(\Omega, \Omega') = \inf\{|x - y| : x \in \Omega \text{ e } y \in \Omega'\}.$$

   Distância entre um elemento x e um conjunto Ω é dada por:

   $$\text{dist}(x, \Omega) = \inf\{|x - y| : y \in \Omega\}.$$

9. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. A função $u_{x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ representa a **derivada parcial** de $u(x)$ em relação a x_i. Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$, definimos a α-ésima derivada de $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ por

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

10. $(u)_\Omega$ é a **média de** u **sobre** Ω, dada por:

$$(u)_\Omega = ⨍_\Omega u \ \ dx = \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega u \, dx.$$

11. Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável, definimos

$$\operatorname*{supess}_{\Omega} u(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : m(\{u(x) > y\}) = 0\}$$

e

$$\operatorname*{infess}_{\Omega} u(x) := \sup\{y \in \mathbb{R} : m(\{u(x) < y\}) = 0\}$$

como o **supremo essencial** e o **ínfimo essencial** de u em Ω, respectivamente.

12. **Espaço** $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, é o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\left(\int_\Omega |f|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

13. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, definimos a **norma** L^p para $1 \leq p < \infty$, como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

14. Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$. A função v é dita a α**-ésima derivada parcial fraca de** u**,** $v = D^\alpha u$ se

$$\int_\Omega u \ D^\alpha \phi \ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \ \phi \ dx$$

para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Se $|\alpha| = 1$ temos $Du = \nabla u$.

15. $W^{1,p}(\Omega)$ é o **Espaço de Sobolev**, que consiste de todas as funções em $L^p(\Omega)$ tais que as derivadas parciais de primeira ordem no sentido fraco também pertencem a $L^p(\Omega)$.

16. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos a **norma de u em $W^{1,p}$** por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (Du)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega u^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

17. Definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Intuitivamente, as funções deste espaço se anulam na fronteira.

18. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, é dita **Hölder Contínua** se existem $k > 0$ e $0 < \beta \leq 1$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x - y|^\beta,$$

para qualquer $x, y \in \Omega$.

19. Uma função duas vezes diferenciável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita **harmônica** se satisfaz $\triangle u = 0$.

20. A_{ij} representa uma matriz simétrica e positiva definida. Isto é, existe $\lambda > 0$ tal que $\langle (A - \lambda I)v, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

21. Uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem

$$\sum_{i,j}^{n} A_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i,j}^{n} B_i(x)u_{x_i}(x) + C(x)u(x) = f(x)$$

é dita **elíptica** se

$$\sum_{i,j}^{n} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \qquad \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq 0,$$

e é dita **uniformemente elíptica** se $\exists\ \lambda > 1$ tal que

$$\lambda^{-1}\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j}^{n} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda\|\xi\|^2, \qquad \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

22. Dizemos que a função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é **solução** de (1.1) se

$$\int_\Omega \langle\, D\phi, ADu\rangle \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \phi_{x_i} A_{ij} u_{x_j} \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A função u é dita **subsolução** se para $\phi \in C_0^\infty$ positiva, temos

$$\int_\Omega \langle\, D\phi, ADu\rangle \, dx \leq 0.$$

A função u é dita **supersolução** se $-u$ for subsolução.

2.2 Desigualdades e Teoremas

1. **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \text{para } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Desigualdade de Hölder:** Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\int_U |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)} \qquad \text{para } u \in L^p, v \in L^q.$$

3. **Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev:** Seja $1 \leq p < n$. Existe uma constante C, dependendo somente de p e n tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ conjugado de Sobolev de p.

4. **Princípio do Máximo:** Sejam Ω uma região limitada e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e solução fraca de (1.1) em Ω. Então, o máximo de u é atingido na fronteira de Ω.

5. **Teorema do Valor Médio:** Se $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica, então

$$u(x) = \frac{\int_{B(x,r)} u(y) dy}{m(B(x,r))}$$

com $B(x, r) \subset \Omega, \;\; r > 0$.

6. **Teorema de Aproximação:** O subespaço $C^\infty(\Omega) \bigcap W^{1,p}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$.

7. **Teorema de Rellich-Kondrachov:** Seja Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de Lipschitz. Se $1 \leq p < \infty$, então toda seqüência limitada (u_n) em $W^{1,p}(\Omega)$, possui uma subsequência (u_{n_k}) que converge em L^q para qualquer $1 \leq q < p^*$.

   Dizemos que $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, onde i é a identidade, é um mergulho compacto e representamos esta inclusão compacta por $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$. Como $p < p^*$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ temos $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$.

8. **Teorema da Extensão:** Seja Ω limitado com fronteira de Lipschitz. Então, Ω tem a propriedade de extensão, isto é, existe um operador linear limitado

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

i) $Eu = u$ em Ω;

ii) Eu tem suporte compacto;

iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde C depende somente de p e Ω.

9. **Regra da cadeia:** Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que f' é limitada em $\mathbb{R}$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D(f \circ u) = f'(u)Du$.

10. **Derivada da Parte Positiva e Negativa:** Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, defina $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Então, $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0, \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} 0 & \text{se } u \geq 0 \\ Du & \text{se } u < 0, \end{cases}$$

$$D|u| = \begin{cases} Du & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -Du & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

As demonstrações dos ítens acima podem ser encontradas em [2] e [3].

Capítulo 3

Lemas Auxiliares

Teorema 3.1 (Poincaré) *Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de Lipschitz. Assumindo $1 < p \leq \infty$, existe uma constante C, dependendo somente de n, p e Ω tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

para qualquer função $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Suponhamos que a estimativa seja falsa. Logo, para cada inteiro $k = 1, 2, ...$ existe uma função $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz

$$\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.1}$$

Seja (v_k) uma seqüência definida da forma

$$v_k = \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}, \quad k = 1, 2, ...$$

Observamos que $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ por construção e que $(v_k)_\Omega = 0$, pois

$$\begin{aligned}
(v_k)_\Omega &= ⨍_\Omega v_k \, dx = \frac{1}{m(U)} \int_\Omega v_k \, dx \\
&= \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \\
&= \frac{1}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \left[\frac{\int_\Omega u_k \, dx}{m(\Omega)} - \frac{\int_\Omega (u_k)_\Omega \, dx}{m(\Omega)} \right] \\
&= \frac{1}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \left[(u_k)_\Omega - \frac{(u_k)_\Omega . m(\Omega)}{m(\Omega)} \right] \\
&= \frac{1}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \left[(u_k)_\Omega - (u_k)_\Omega \right] = 0.
\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} D(v_k) &= D\left(\frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}\right) \\ &= \frac{1}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}[D(u_k) - D((u_k)_\Omega)] \\ &= \frac{D(u_k)}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|D(v_k)\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|D(u_k)\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} < \frac{\|D(u_k)\|_{L^p(\Omega)}}{k\|D(u_k)\|_{L^p(\Omega)}} = \frac{1}{k}$$

para $k = 1, 2, ...,$ por (3.1).

De $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $\|D(v_k)\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k}$, $\forall k = 1, 2, ...,$ concluímos que as funções $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ são limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$.

Pelo teorema de Rellich-Kondrachov, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para cada $1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p}$. Ou seja, existe uma subsequência $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ e uma função $v \in L^p(\Omega)$ tal que $v_{k_j} \to v$ em $L^p(\Omega)$.

Note que:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega v\ dx - \int_\Omega v_{k_j}\ dx\right| &= \left|\int_\Omega v - v_{k_j}\ dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|v - v_{k_j}\right|\ dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left|v - v_{k_j}\right|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega 1^q\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||v - v_{k_j}||_{L^p(\Omega)}[m(\Omega)]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

para $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Assim,

$$\lim_{k_j \to +\infty} \left|\int_\Omega v\ dx - \int_\Omega v_{k_j}\ dx\right| \leq \lim_{k_j \to +\infty} ||v - v_{k_j}||_{L^p(\Omega)}[m(\Omega)]^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{k_j \to +\infty} (v_{k_j})_\Omega = (v)_\Omega.$$

Sendo $(v_{k_j})_\Omega = 0$, concluímos que $(v)_\Omega = 0$.

Pela desigualdade triangular,

$$\lim_{k_j \to +\infty} |\ ||v_{k_j}||_{L^p(\Omega)} - ||v||_{L^p(\Omega)}\ | \leq \lim_{k_j \to +\infty} ||v_{k_j} - v||_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{k_j \to +\infty} ||v_{k_j}||_{L^p(\Omega)} = ||v||_{L^p(\Omega)}$.

Sendo $||v_{k_j}||_{L^p(\Omega)} = 1$, concluímos que $||v||_{L^p(\Omega)} = 1$.

Por outro lado, $\|Dv_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ e tomando $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ qualquer, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{k_j \to +\infty} \left| \int_\Omega v\phi_{x_i}\, dx - \int_\Omega v_{k_j}\phi_{x_i}\, dx \right| &= \lim_{k_j \to +\infty} \left| \int_\Omega (v - v_{k_j})\phi_{x_i}\, dx \right| \\
&\leq \lim_{k_j \to +\infty} \int_\Omega \left|(v - v_{k_j})\phi_{x_i}\right|\, dx \\
&\leq \lim_{k_j \to +\infty} \left(\int_\Omega |v - v_{k_j}|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\phi_{x_i}|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= ||v - v_{k_j}||_{L^p(\Omega)} ||\phi_{x_i}||_{L^q(\Omega)} = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{k_j \to +\infty} \int_\Omega v_{k_j}\phi_{x_i}\, dx = \int_\Omega v\phi_{x_i}\, dx. \tag{3.2}$$

Como $\{v_{k_j}\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ e utilizando (3.2), temos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega v\phi_{x_i}\, dx \right| = \left| \lim_{k_j \to +\infty} \int_\Omega v_{k_j}\phi_{x_i}\, dx \right| &= \left| \lim_{k_j \to +\infty} \int_\Omega v_{k_j x_i}\phi\, dx \right| \\
\leq \lim_{k_j \to +\infty} \|v_{k_j x_i}\| \|\phi\| &< \lim_{k_j \to +\infty} \frac{1}{k_j} ||\phi|| = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $v \in W^{1,p}(\Omega)$, pois possui derivada fraca $Dv = 0$.

Mas, $Dv = 0$ e Ω conexo implica que v é constante em Ω. Sendo $(v)_\Omega = 0$, temos que $v \equiv 0$ em Ω. E assim, $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 0$, contradizendo com $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$.
Portanto, existe $C = C(n, p, \Omega) > 0$ tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Corolário 3.1 *Sejam $Q = Q(a,h)$, $u \in W^{1,2}(Q)$ e $(u)_Q$ o valor médio de u sobre Q. Então*

$$\int_Q (u-(u)_Q)^2\,dx \le Ch^2 \int_Q (Du)^2\,dx,$$

onde C depende somente n.

Prova: Pelo Teorema 3.1, para $\Omega = Q(0,1)$ existe $C > 0$ tal que para todo $v \in \Omega$,

$$\|v-(v)_{Q(0,1)}\|_{L^2(Q(0,1))} \le C\|Dv\|_{L^2(Q(0,1))}.$$

Portanto,

$$\int_{Q(0,1)} [v-(v)_{Q(0,1)}]^2\,dx \le C^2 \int_{Q(0,1)} (Dv)^2\,dx. \tag{3.3}$$

Dado $u \in W^{1,2}(Q(a,h))$, seja $v(y) = u(a+hy)$, onde $y \in Q(0,1)$. Então, $v \in W^{1,2}(Q(0,1))$ e desta forma satisfaz (3.3). Assim

$$\int_{Q(0,1)} [v(y)-(v(y))_{Q(0,1)}]^2 dy \le C^2 \int_{Q(0,1)} [D_y v(y)]^2 dy.$$

Ou seja,

$$\int_{Q(0,1)} [u(a+hy)-(u(a+hy))_{Q(0,1)}]^2 dy \le C^2 \int_{Q(0,1)} [D_y u(a+hy)]^2 dy.$$

Fazendo a mudança de variável $x = a+hy$, obtemos

$$\int_{Q(a,h)} [u(x)-(u(x))_{Q(a,h)}]^2 \frac{dx}{h^n} \le C^2 \int_{Q(a,h)} h^2 [Du(x)]^2 \frac{dx}{h^n}.$$

Portanto,

$$\int_{Q(a,h)} [u(x)-(u(x))_{Q(a,h)}]^2\,dx \le Ch^2 \int_{Q(a,h)} [Du(x)]^2\,dx,$$

para todo $x \in Q(a,h)$, como desejávamos.

$\square$

Lema 3.1 *Se $u \in W^{1,2}(Q)$, $Q = Q(a,h)$, então*

$$\left(⨍_Q u^{2\kappa}\,dx\right)^{\frac{1}{\kappa}} \le \beta \left\{ h^2 ⨍_Q (Du)^2\,dx + ⨍_Q u^2\,dx \right\}, \tag{3.4}$$

onde $\kappa = \frac{n}{n-2}$ e β depende somente de n, quando $n > 2$. Quando $n = 2$, $1/2 \le \kappa < \infty$ e β depende de n e κ. No caso $n = 2$, fixaremos $1 < \kappa < \infty$.

Prova: Primeiro provaremos para o cubo $Q(0,1)$.
Seja $u \in W^{1,2}(Q(0,1))$. Através do Teorema da Extensão, podemos estender u para todo $\mathbb{R}^n$. Isto é, existe um operador linear limitado $E : W^{1,2}(Q(0,1)) \to W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que

i. $Eu = u$ em $Q(0,1)$;

ii. Eu tem suporte compacto;

iii. $\|Eu\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq \beta \|u\|_{W^{1,2}(Q(0,1))}$, onde β depende somente de $Q(0,1)$.

Utilizando os ítens acima e a desigualdade de Sobolev, mostramos que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{Q(0,1)} u^{2\kappa} \, dx \right)^{\frac{1}{\kappa}} &= \left(\int_{Q(0,1)} (Eu)^{2\kappa} \, dx \right)^{\frac{1}{\kappa}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Eu)^{2\kappa} \, dx \right)^{\frac{1}{\kappa}} \\
&\leq \beta_1 \int_{\mathbb{R}^n} [D(Eu)]^2 \, dx \\
&\leq \beta_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} [D(Eu)]^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (Eu)^2 \, dx \right) \\
&= \beta_1 \|Eu\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \beta_2 \|u\|^2_{W^{1,2}(Q(0,1))} \\
&= \beta_2 \left(\int_{Q(0,1)} (Du)^2 \, dx + \int_{Q(0,1)} u^2 \, dx \right).
\end{aligned}$$

Portanto, como $m(Q(0,1)) = 1$, temos que

$$\left(\fint_{Q(0,1)} u^{2\kappa} \, dx \right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \beta \left(\fint_{Q(0,1)} (Du)^2 \, dx + \fint_{Q(0,1)} u^2 \, dx \right) \tag{3.5}$$

e a desigualdade (3.4) está provada para o cubo $Q(0,1)$.

Dado $u \in W^{1,2}(Q(a,h))$, seja $v(y) = u(a + hy)$.

Portanto, a função v está definida em $Q(0,1)$ e $v \in W^{1,2}(Q(0,1))$. Logo, v

satisfaz (3.5). Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{Q(0,1)}[v(y)]^{2\kappa}dy\right)^{\frac{1}{\kappa}} &\leq \beta\left(\fint_{Q(0,1)}[Dv(y)]^2dy+\fint_{Q(0,1)}[v(y)]^2\,dx\right)\\
\left(\int_{Q(0,1)}[u(a+hy)]^{2\kappa}dy\right)^{\frac{1}{\kappa}} &\leq \beta\left(\int_{Q(0,1)}[D_yu(a+hy)]^2dy+\int_{Q(0,1)}[u(a+hy)]^2dy\right)\\
\left(\int_{Q(0,1)}[u(a+hy)]^{2\kappa}dy\right)^{\frac{1}{\kappa}} &\leq \beta\left(\int_{Q(0,1)}h^2[Du(a+hy)]^2dy+\int_{Q(0,1)}[u(a+hy)]^2dy\right).
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = a + hy$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{Q(a,h)}[u(x)]^{2\kappa}\frac{dx}{h^n}\right)^{\frac{1}{\kappa}} &\leq \beta\left(h^2\int_{Q(a,h)}[Du(x)]^2\frac{dx}{h^n}+\int_{Q(a,h)}[u(x)]^2\frac{dx}{h^n}\right)\\
\left(\fint_{Q(a,h)}[u(x)]^{2\kappa}\,dx\right)^{\frac{1}{\kappa}} &\leq \beta\left(h^2\fint_{Q(a,h)}[Du(x)]^2\,dx+\fint_{Q(a,h)}[u(x)]^2\,dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto, vale a desigualdade (3.4) para um cubo qualquer $Q(a,h)$.

$\square$

Lema 3.2 *Se u é de quadrado integrável no cubo $Q[0,1]$ e se para todo cubo $Q \subset Q[0,1]$,*

$$\fint_Q (u-(u)_Q)^2\,dx \leq 1,$$

então toda potência de u é integrável, e ainda, existem constantes positivas α, β, dependendo somente de n tal que

$$\int_{Q[0,1]} e^{\alpha u}\,dx \int_{Q[0,1]} e^{-\alpha u}\,dx \leq \beta^2.$$

Prova: Note que,

$$\fint_Q |u|\,dx \;\leq\; \frac{1}{m(Q)}\left(\int_Q u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\fint_Q u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\left(\fint_Q |u-(u)_Q|\,dx\right)^2 \;\leq\; \fint_Q [u-(u)_Q]^2\,dx \leq 1.$$

Por uma observação feita após o Lema 1' de [6], descrito no apêndice, decorre

$$\int_Q e^{\alpha|u-(u)_Q|}\, dx \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma-\alpha} + e^{\alpha\gamma}\right)$$

para $0 < \alpha < \gamma$. Denotando o lado direito da inequação por β, concluímos que

$$\int_Q e^{\alpha(u-(u)_Q)}\, dx \leq \beta \quad \text{e} \quad \int_Q e^{-\alpha(u-(u)_Q)}\, dx \leq \beta$$

e o Lema está provado.

□

Lema 3.3 *Se $u > 0$ é uma subsolução de* (1.1) *em Ω e $v = u^k,\ k > \frac{1}{2}$, então para qualquer função $\eta(x)$ com suporte em Ω, temos*

$$\int_\Omega \eta^2 (Dv)^2\, dx \leq C\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \int_\Omega (D\eta)^2 v^2\, dx, \tag{3.6}$$

onde $C = \lambda^4$. O mesmo vale para supersoluções se $k < \frac{1}{2}$.

Prova: Como a função $u > 0$ é uma subsolução em Ω, então para $\phi \geq 0,\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos,

$$\int_\Omega \langle\, D\phi, ADu\rangle\, dx \leq 0. \tag{3.7}$$

De fato, esta desigualdade pode ser estendida para qualquer $\phi \geq 0$ tal que $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Para isto, basta tomar uma sequência $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \phi$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Isto é possível devido a definição de $W_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso, podemos considerar $\phi_n \geq 0$.

Vamos escolher ϕ conveniente.
Se $k \in (\frac{1}{2}, 1]$, seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = (t+\epsilon)^k$, onde $\epsilon \in (0,1)$. Se $k > 1$, para $\epsilon \in (0,1)$ e $m \in \mathbb{N}$, seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ crescente, de classe C^2 tal que $f(t) = (t+\epsilon)^k$ para $0 \leq t \leq m$ e $f(t)$ é linear para $t \geq m+1$.

Seja $\overline{v} = f(u)$. Defina $\phi = f(u).f'(u)\eta^2$, onde η é uma função de Lipschitz de suporte compacto. Note que $f(t)f'(t)$ é de classe C^1, pois f é de classe C^2. Além disso, $f(t)f'(t)$ tem derivada limitada. Logo, pela Regra da Cadeia, $f(u)f'(u) \in W^{1,2}(\Omega)$. Usando isto e que η é de Lipschitz de suporte compacto, $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Note que,

$$\begin{aligned} D\phi &= D(ff')\eta^2 + ff'2\eta\, D\eta \\ &= (f')^2 Du\, \eta^2 + ff'' Du\, \eta^2 + ff'2\eta\, D\eta \\ &= [(f'^2 + ff'')\eta^2 Du + 2ff'\eta D\eta]. \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle D\phi, ADu\rangle &= \langle[(f'^2 + ff'')\eta^2 Du + 2ff'\eta D\eta], ADu\rangle \\
&= [(f'^2 + ff'')\eta^2\langle\, Du, ADu\rangle + 2ff'\eta\langle\, D\eta, ADu\rangle] \\
&= \left\{(f')^2\left(1 + \frac{ff''}{(f')^2}\right)\eta^2\langle\, Du, ADu\rangle + 2ff'\eta\langle\, D\eta, ADu\rangle\right\} \\
&= \left\{\left(1 + \frac{ff''}{(f')^2}\right)\langle\eta f' Du, A\eta f' Du\rangle + 2f\eta\langle\, D\eta, Af' Du\rangle\right\} \\
&= \left\{\left(1 + \frac{ff''}{(f')^2}\right)\langle\eta D\overline{v}, A\eta D\overline{v}\rangle + 2\langle\overline{v} D\eta, A\eta\, D\overline{v}\rangle\right\}
\end{aligned}
$$

Definindo $\sigma = 1 + \frac{f\,f''}{(f')^2}$, temos

$$
\langle D\phi, ADu\rangle = \sigma\langle\eta D\overline{v}, A\eta D\overline{v}\rangle + 2\langle\overline{v} D\eta, A\eta D\overline{v}\rangle. \tag{3.8}
$$

Substituindo (3.8) em (3.7), obtemos

$$
\int_\Omega \sigma\langle\eta D\overline{v}, A\eta D\overline{v}\rangle\, dx \leq \left|2\int_\Omega \langle\overline{v} D\eta, A\eta D\overline{v}\rangle\, dx\right|.
$$

Lembrando as hipóteses feitas sobre A, existe $\lambda > 1$ tal que $\lambda^{-1}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda\|x\|^2$. Com isso,

$$
\int_\Omega \sigma\langle\eta D\overline{v}, A\eta D\overline{v}\rangle\, dx \geq \lambda^{-1}\int_\Omega \sigma\|\eta D\overline{v}\|^2\, dx.
$$

Observe que se $k \in (\frac{1}{2}, 1]$, $\sigma(t) \equiv \frac{2k-1}{k}$. Se $k > 1$, $\sigma(t) \equiv \frac{2k-1}{k}$ para $0 \leq t \leq m$ e $\sigma(t) = 1$ para $t \geq m+1$. Podemos definir f em $[m, m+1]$ de modo que $\sigma(t)$ seja contínua em $\mathbb{R}$ e uma função afim em $[m, m+1]$, bastando resolver uma equação do tipo

$$
1 + \frac{f\,f''}{(f')^2} = \sigma(t) = at + b.
$$

Assim, $1 \leq \sigma(t) \leq \frac{2k-1}{k}$ para qualquer $t \geq 0$, visto que $\frac{2k-1}{k} > 1$, quando $k > 1$.

Também vale

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \langle \overline{v} D\eta, A\eta D\overline{v}\rangle\, dx\right| &\leq \int_\Omega |\langle \overline{v} D\eta, A\eta D\overline{v}\rangle|\ dx \\
&\leq \int_\Omega \sigma^{-\frac{1}{2}} \|\overline{v} D\eta\| \sigma^{\frac{1}{2}} \|A\eta D\overline{v}\|\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \sigma^{-1}\|\overline{v} D\eta\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sigma \|A\eta D\overline{v}\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda \left(\int_\Omega \sigma^{-1}\|\overline{v} D\eta\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sigma \|\eta D\overline{v}\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Destas desigualdades segue que

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-1}\int_\Omega \sigma\|\eta D\overline{v}\|^2\ dx &\leq 2\lambda \left(\int_\Omega \sigma^{-1}\|\overline{v} D\eta\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sigma \|\eta D\overline{v}\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\left(\int_\Omega \sigma\|\eta D\overline{v}\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\lambda^2 \left(\int_\Omega \sigma^{-1}\|\overline{v} D\eta\|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\int_\Omega \sigma\|\eta D\overline{v}\|^2\ dx &\leq 4\lambda^4 \int_\Omega \sigma^{-1}\|\overline{v} D\eta\|^2\ dx. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Suponhamos que a integral do lado direito de (3.6) seja finita, de outra forma a desigualdade é trivial.

Se $\frac{1}{2} \leq k \leq 1$, temos que $f(t) = (t+\epsilon)^k \leq 2^k(t^k + \epsilon^k) \leq 2^k(t^k + 1)$.

Se $k > 1$, como $1 + \frac{ff''}{(f')^2} = \sigma(t) \leq \frac{2k-1}{k} \quad \forall\ t \geq 0$, $f(m) = (m+\epsilon)^k$ e $f'(m) = k(m+\epsilon)^{k-1}$, concluímos que $f(t) \leq (t+\epsilon)^k \quad \forall\ t \geq 0$.

Assim, também temos $f(t) \leq 2^k t^k + 2^k$.

Logo, $\overline{v} = f(u) \leq 2^k u^k + 2^k = 2^k v + 2^k$.

Note que $\overline{v}, f$ e σ dependem de $\epsilon \in (0,1)$ e $m \in \mathbb{N}$. Esta estimativa para $\overline{v}$, no entanto, independe de m e ϵ escolhidos, isto é, $\overline{v}_{\epsilon,m} \leq 2^k v + 2^k$.

Considere $\overline{v}_m = \overline{v}_{\frac{1}{m},m}$. Também vale

$$
c = \min\left\{1, \frac{2k-1}{k}\right\} \leq \sigma_m(t) \leq \max\left\{1, \frac{2k-1}{k}\right\} \quad \forall\ t \geq 0.
$$

Logo,

$$
\sigma_m^{-1}\|\overline{v}_m D\eta\|^2 \leq c^{-1}\|(2^k v + 2^k) D\eta\|^2 \leq c_1\|vD\eta\|^2 + c_2\|D\eta\|^2.
$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega \sigma_m^{-1} \|\overline{v}_m D\eta\|^2 \, dx \to \int_\Omega \overline{\sigma}^{-1} \|v D\eta\|^2 \, dx.$$

Visto que $\sigma_m \to \overline{\sigma} := \frac{2k-1}{k}$ e $\overline{v}_m \to v$ pontualmente quando $m \to \infty$. Assim, pela desigualdade (3.9), temos

$$\overline{\lim} \int_\Omega \sigma_m \|\eta D\overline{v}_m\|^2 \, dx \leq 4\lambda^4 \int_\Omega \overline{\sigma}^{-1} \|v D\eta\|^2 \, dx.$$

Como $D\overline{v}_m \to Dv$ pontualmente, pelo Lema de Fatou,

$$\int_\Omega \overline{\sigma} \|\eta Dv\|^2 \, dx \leq 4\lambda^4 \int_\Omega \overline{\sigma}^{-1} \|v D\eta\|^2 \, dx.$$

Então

$$\int_\Omega \|\eta Dv\|^2 \, dx \leq \frac{4\lambda^4}{\overline{\sigma}^2} \int_\Omega \|v D\eta\|^2 \, dx = \lambda^4 \Big(\frac{2k}{2k-1}\Big)^2 \int_\Omega \|v D\eta\|^2 \, dx,$$

ficando provado o lema para $u > 0$ subsolução.

Se $u > 0$ é uma supersolução e $k < \frac{1}{2}$, definindo $f(t) = (t+\epsilon)^k$, $\phi = f(u) f'(u) \eta^2$ e fazendo um raciocínio análogo, concluímos que

$$\left(\frac{1-2k}{|k|}\right) \int_\Omega \langle \eta Dv, A\eta Dv \rangle \, dx \leq \left| 2 \int_\Omega \langle v D\eta, A\eta Dv \rangle \, dx \right|.$$

A partir disto, seguindo os mesmos passos da demonstração anterior, obtemos a mesma desigualdade e o Lema está provado.

□

Capítulo 4

Motivação para o estudo da Desigualdade de Harnack

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função harmônica e positiva no domínio Ω. O Teorema de Harnack afirma que em qualquer compacto $\Omega' \subset \Omega$, vale a desigualdade

$$\max_{\Omega'} u \leq c \min_{\Omega'} u,$$

onde a constante $c > 1$ depende somente de Ω e Ω'.

Neste capítulo mostramos dois exemplos que verificam esta desigualdade.

Exemplo 1: Seja $u : I \to \mathbb{R}$ uma função harmônica positiva num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Funções harmônicas definida em domínios reais são retas que podem ser representadas por $u(x) = ax + b$, onde a, b são constantes reais.
Suponhamos , sem perda de generalidade, que $I = (x_1, x_2)$, $u(x) = ax + b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $I' = [x_3, x_4]$ é um compacto de I.
Sendo a função u contínua e crescente ($a > 0$), u assume um mínimo e um máximo em I', que são $u(x_3)$ e $u(x_4)$, respectivamente.
Desta forma, temos que

$$\frac{\max_{I'} u}{\min_{I'} u} = \frac{u(x_4)}{u(x_3)}. \tag{4.1}$$

Estamos interessados numa estimativa que independa de u para o quociente (4.1).
Sabemos que, $u(x) > 0$ em $I = (x_1, x_2)$. Com isso, $u(x_1) \geq 0$ e temos $b \geq -ax_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\max_{I'} u}{\min_{I'} u} &= \frac{u(x_4)}{u(x_3)} = \frac{ax_4 + b}{ax_3 + b} = \frac{ax_4 - ax_3 + ax_3 + b}{ax_3 + b} \\
&= \frac{a(x_4 - x_3)}{ax_3 + b} + 1 \leq \frac{a(x_4 - x_3)}{ax_3 - ax_1} + 1 = \frac{x_4 - x_3}{x_3 - x_1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_{I'} u(x) \leq c \min_{I'} u(x)$$

para a constante $c = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1}$, que depende somente de I e I'.
Teremos a igualdade quando $u(x_1) = 0$, pois $b = ax_1$ e

$$\frac{\max_{I'} u}{\min_{I'} u} = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Ou seja, se $u(x_1) = 0$,

$$\max_{I'} u(x) = c \min_{I'} u(x),$$

para $c = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1}$, dependendo somente de I e I'.

Vejamos alguns exemplos numéricos:
a) Sejam $I = (0, 5)$ e $I' = [2, 4]$ intervalos reais, $u_1(x) = 0,7x$, $u_2(x) = 3x$ e $u_3(x) = 6x$ funções harmônicas, positivas, definidas em I, cuja representação gráfica é dada na **Figura 1.1**.

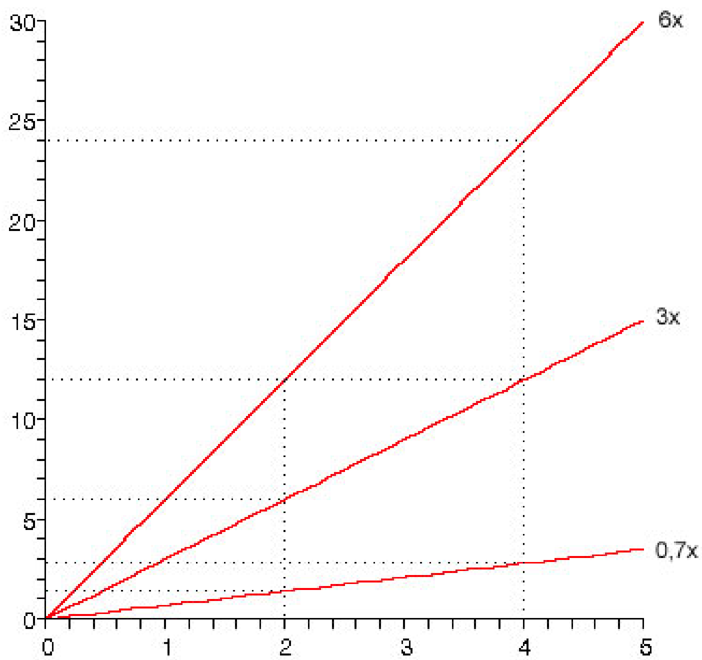

Figura 1.1

Note que,

$$\frac{\max\limits_{[2,4]} u_1(x)}{\min\limits_{[2,4]} u_1(x)} = \frac{u_1(4)}{u_1(2)} = \frac{0,7.\ 4}{0,7.\ 2} = 2,$$

$$\frac{\max\limits_{[2,4]} u_2(x)}{\min\limits_{[2,4]} u_2(x)} = \frac{u_2(4)}{u_2(2)} = \frac{3.\ 4}{3.\ 2} = 2,$$

$$\frac{\max\limits_{[2,4]} u_3(x)}{\min\limits_{[2,4]} u_3(x)} = \frac{u_3(4)}{u_3(2)} = \frac{6.\ 4}{6.\ 2} = 2.$$

Observamos que, embora as funções possuam inclinações diferentes, as razões $\max u(x)/\min u(x)$ em $[2,4]$ são todas iguais.

b) Seja a função $u(x) = x$, definida em $I = (0,10)$. Sejam $[4,6]$, $[2,8]$ e $[1,9]$ intervalos compactos de I.

Para cada um destes intervalos compactos segue:

$$\frac{\max\limits_{[4,6]} u(x)}{\min\limits_{[4,6]} u(x)} = \frac{u(6)}{u(4)} = \frac{5.\ 6}{5.\ 4} = 1,5,$$

$$\frac{\max\limits_{[2,8]} u(x)}{\min\limits_{[2,8]} u(x)} = \frac{u(8)}{u(2)} = \frac{5.\ 8}{5.\ 2} = 4,$$

$$\frac{\max\limits_{[1,9]} u(x)}{\min\limits_{[1,9]} u(x)} = \frac{u(9)}{u(1)} = \frac{5.\ 9}{5.\ 1} = 9.$$

Verificamos com este exemplo, que ao variarmos o intervalo compacto de I, a razão $\max u(x)/\min u(x)$ também varia. Observamos ainda que, quanto maior o compacto, maior a razão $\max u(x)/\min u(x)$. A medida que I' se aproxima da ∂D a razão tende para infinito (ver **Figura 1.2**).

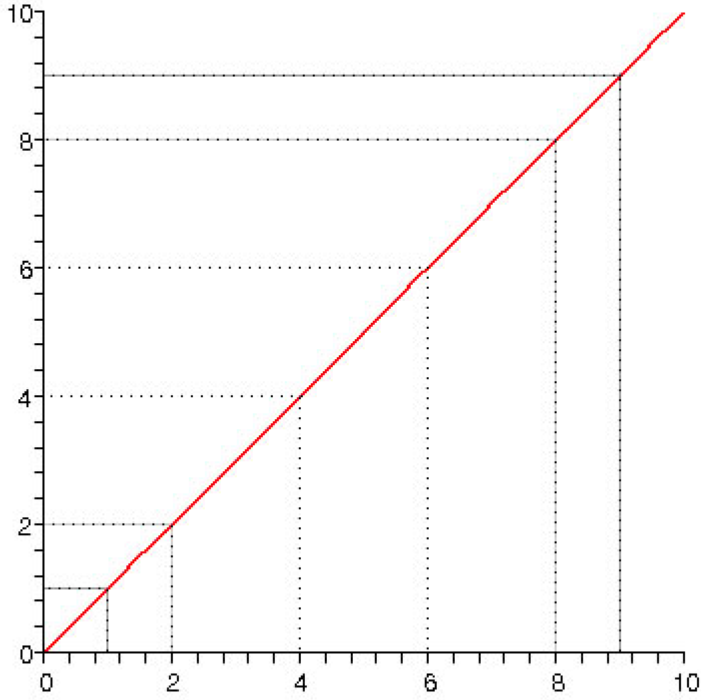

Figura 1.2

Exemplo 2: Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função harmônica e positiva num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e conexo.

Seja Ω' compacto de Ω. Suponhamos que $x,\ y\ \in \Omega'$ satisfazem $\text{dist}(x, y) < \frac{d}{2}$, onde $d = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Nestas condições, é válido o Teorema do Valor Médio para $r = 2\text{dist}(x, y)$. Assim,

$$u(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)\ dy \geq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(y,\frac{r}{2})} u(z)\ dz,$$

pois $B(y, \frac{r}{2}) \subset B(x, r)$.

Note que, $m(B(x,r)) = r^n m(B(x,1)) = r^n m(B(y,1)) = \frac{r^n}{(\frac{r}{2})^n} m(B(y, \frac{r}{2})) = 2^n m(B(y, \frac{r}{2}))$.
Logo,

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n m(B(y,\frac{r}{2}))} \int_{B(y,\frac{r}{2})} u(z)\ dz = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Assim,

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y). \tag{4.2}$$

Analogamente,

$$u(y) \geq \frac{1}{2^n} u(x). \tag{4.3}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2^n} u(y) \leq u(x) \leq 2^n u(y)$$

para quaisquer $x, y \in \Omega'$ tais que $\text{dist}(x, y) < \frac{d}{2}$.

Dado $0 < \epsilon < \frac{d}{4}$ existem $a_i \in \Omega'$, $i = 1, 2, ..., m$ elementos convenientes de Ω tais que $\Omega' \subset \cup B(a_i, \epsilon)$ para $i = 1, ..., m$. Pois Ω' é um conjunto compacto e $\Omega' \subset \cup B(a, \epsilon)$ para $a \in \Omega'$.

O domínio Ω é conexo. Logo, existe um caminho γ_{ij} em Ω ligando a_i e a_j para quaisquer $i, j = 1, ..., m$.

Um caminho é um conjunto compacto, portanto, existe uma subcobertura $B(b_k^{ij}, \delta)$ finita de abertos para γ_{ij}. Ou seja, $\gamma_{ij} \subset \cup B(b_k^{ij}, \delta)$ para $k = 1, ..., l_{ij}$, $b_k^{ij} \in \Omega$, $0 < \delta < \min\{\text{dist}(\gamma_{ij}, \partial\Omega), \frac{d}{4}\}$ e $l_{ij} \in \mathbb{N}$ convenientes.

Para cada $x, y \in \Omega'$, existem $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \leq m$, tais que $x \in B(a_i, \epsilon)$ e $y \in B(a_j, \epsilon)$.

Os elementos $b_k^{i,j}$, $k = 1, ...l_{i,j}$, formam uma seqüência em Ω. Reordenando estes elementos formamos uma nova seqüência b'_k, que satisfaz as condições abaixo:

$$\text{dist}(x, b'_1) < \epsilon + \delta; \quad \text{dist}(b'_k, b'_{k+1}) < 2\delta; \quad \text{dist}(b'_l, y) < \epsilon + \delta$$

para $k = 1, 2, ..., l_{i,j} - 1$ (Note que, $\epsilon + \delta$ e 2δ são menores que $\frac{d}{2}$).

Portanto, chamando $l_{i,j} = l$, aos elementos da seqüência $\{x, b'_k, y\}_{k=1}^{l}$, podemos aplicar as desigualdades (4.2) e (4.3), obtendo,

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(b'_1) \geq ... \geq \frac{1}{2^{nl}} u(b'_l) \geq \frac{1}{2^{n(l+1)}} u(y)$$

e

$$u(y) \geq \frac{1}{2^n} u(b'_l) \geq ... \geq \frac{1}{2^{nl}} u(b'_1) \geq \frac{1}{2^{n(l+1)}} u(x),$$

donde concluímos que

$$\frac{1}{2^{n(l+1)}} u(y) \leq u(x) \leq 2^{n(l+1)} u(y)$$

para todo $x, y \in \Omega'$. Note que, $l = l_{i,j} \leq L = \max\limits_{i,j} l_{i,j}$.

Logo,

$$\max_{\Omega'} u \leq 2^{2n(L+1)} \min_{\Omega'} u$$

e a desigualdade de Harnack está satisfeita para qualquer u solução positiva de $\triangle u = 0$ e $\Omega' \subset \Omega$ compacto.

A demonstração acima usa a propriedade do valor médio das funções harmônicas. Esta propriedade não vale para soluções da equação (1.1). Por isso, no caso geral vai ser seguido um caminho diferente - as iterações de Moser.

Capítulo 5

Desigualdade de Harnack

De acordo com os objetivos deste trabalho, neste capítulo demonstramos a Desigualdade de Harnack para um domínio Ω e um compacto $\Omega' \subset \Omega$ quaisquer. Para isso usamos dois teoremas importantes que são provados através de iterações e com o auxílio de uma função ϕ definida abaixo.

Seja a função $u > 0$ solução de (1.1) em $Q(0,4)$. Defina a função

$$\phi(p,h) = \left(\fint_{Q(a,h)} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.1}$$

onde p assume valores reais não nulos e $h > 0$.

Afirmação 1: $\phi(p,h)$ é não-decrescente em p.
Prova:
Caso 1: Sejam $p, q \in \mathbb{R},\ q > p > 0$. Seja $r \in \mathbb{R}$ definido por $r = \frac{q}{p} > 1$.
Desta forma,

$$\begin{aligned}
\phi(p,h) &= \left(\fint_{Q(a,h)} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{h^{\frac{n}{p}}} \left(\int_{Q(a,h)} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{h^{\frac{n}{p}}} \left[\left(\int_{Q(a,h)} (u^p)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{Q(a,h)} 1^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{h^{\frac{n}{p} - \frac{n}{ps}}} \left(\int_{Q(a,h)} u^{pr} dx \right)^{\frac{1}{pr}} = \left(\fint_{Q(a,h)} u^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \phi(q,h)
\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder, para $s > 1$ real, tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$.
Assim, $\phi(p,h)$ é não-decrescente em $(0, +\infty)$.

Caso 2: Sejam $p, q \in \mathbb{R},\ q < p < 0$. Seja $r \in \mathbb{R}$ definido por $r = \frac{q}{p} > 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(p,h) &= \left(\fint_{Q(a,h)} u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{h^{\frac{n}{p}}}\left(\frac{1}{\int_{Q(a,h)} u^p dx}\right)^{-\frac{1}{p}} \\
&\geq \frac{1}{h^{\frac{n}{p}}}\left[\frac{1}{\left(\int_{Q(a,h)} (u^p)^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{Q(a,h)} 1^s dx\right)^{\frac{1}{s}}}\right]^{-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{h^{\frac{n}{p}-\frac{n}{ps}}}\left(\int_{Q(a,h)} u^{pr} dx\right)^{\frac{1}{pr}} = \left(\fint_{Q(a,h)} u^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \phi(q,h)
\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder, para $s > 1$ real tal que $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$.
Assim, $\phi(p,h)$ é não-decrescente em $(-\infty, 0)$.

Caso 3: Sejam $p, q \in \mathbb{R},\ p > 0$ e $q < 0$.
Note que

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{h^n}\int_{Q(a,h)} 1\, dx \\
&= \frac{1}{h^n}\int_{Q(a,h)} u^{\frac{pq}{p-q}}.\frac{1}{u^{\frac{pq}{p-q}}}\, dx \\
&\leq \frac{1}{h^n}\left[\int_{Q(a,h)}\left(u^{\frac{pq}{p-q}}\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}}.\left[\int_{Q(a,h)}\left(\frac{1}{u^{\frac{pq}{p-q}}}\right)^s dx\right]^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder, para $r, s > 1$ reais, tais que $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$.
Assim,

$$\left[\int_{Q(a,h)}\left(u^{\frac{pq}{p-q}}\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}}.\left[\int_{Q(a,h)}\left(\frac{1}{u^{\frac{pq}{p-q}}}\right)^s dx\right]^{\frac{1}{s}} \geq h^n$$

$$\left[\int_{Q(a,h)}\left(u^{\frac{pq}{p-q}}\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}} \geq \frac{1}{h^n}\left[\int_{Q(a,h)}\left(\frac{1}{u^{\frac{pq}{p-q}}}\right)^s dx\right]^{-\frac{1}{s}}.$$

Elevando ambos os membros à potência $\frac{p-q}{pq} < 0$, temos,

$$\left[\int_{Q(a,h)}\left(u^{\frac{pq}{p-q}}\right)^r dx\right]^{\frac{p-q}{pqr}} \leq \frac{1}{h^{n\left(\frac{p-q}{pq}\right)}}\left[\int_{Q(a,h)}\left(\frac{1}{u^{\frac{pq}{p-q}}}\right)^s dx\right]^{-\frac{p-q}{pqs}}$$

$$\left[\int_{Q(a,h)} u^{\frac{pqr}{p-q}} dx\right]^{\frac{p-q}{pqr}} \leq \frac{1}{h^{n\left(\frac{p-q}{pq}\right)}}\left[\int_{Q(a,h)} \frac{1}{u^{\frac{pqs}{p-q}}} dx\right]^{-\frac{p-q}{pqs}}.$$

Lembrando que esta desigualdade é válida para quaisquer $r, s > 1$, com $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$, podemos tomar $r = \frac{p-q}{p}$ e $s = \frac{q-p}{q}$.
Observe que,

$$\left[\int_{Q(a,h)} u^{\frac{pqr}{p-q}} dx\right]^{\frac{p-q}{pqr}} = \left[\int_{Q(a,h)} u^q dx\right]^{\frac{1}{q}} = \left[h^n \fint_{Q(a,h)} u^q dx\right]^{\frac{1}{q}} = h^{\frac{n}{p}} \phi(q,h)$$

$$\left[\int_{Q(a,h)} \frac{1}{u^{\frac{pqs}{p-q}}} dx\right]^{-\frac{p-q}{pqs}} = \left[\int_{Q(a,h)} u^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[h^n \fint_{Q(a,h)} u^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = h^{\frac{n}{q}} \phi(p,h).$$

Logo, $\phi(q,h) \leq \phi(p,h)$.

Portanto, $\phi(p,h)$ é não-decrescente em $\mathbb{R}^*$, conforme afirmação.

$\square$

Afirmação 2:

a) $\lim_{p\to+\infty} \phi(p,h) = \sup\operatorname{ess}_{Q[a,h]} u(x)$ **b)** $\lim_{p\to-\infty} \phi(p,h) = \inf\operatorname{ess}_{Q[a,h]} u(x)$

Prova: a) Seja $M = \sup\operatorname{ess}_{Q[a,h]} u > 0$. Desta forma, se $X = \{x \in Q[a,h] : u(x) > M\}$, então $m(X) = 0$.
Assim,

$$\begin{aligned} \phi(p,h) &= \left(\fint_{Q(a,h)} (u(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(h^{-n} \int_{Q(a,h)} M^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= [h^{-n} M^p m(Q(a,h))]^{\frac{1}{p}} = (h^{-n} M^p)^{\frac{1}{p}} = h^{-\frac{n}{p}} M. \end{aligned}$$

Ou seja, $\phi(p,h) \leq h^{-\frac{n}{p}} M$, $\forall p > 0$.(Se $M = \infty$, esta desigualdade é trivial).

A partir disso, usando que ϕ é crescente, ϕ converge quando $p \to +\infty$ e

$$\lim_{p\to+\infty} \phi(p,h) \leq M = \sup\operatorname{ess}_{Q[a,h]} u(x).$$

Por outro lado, seja $N < \sup\operatorname{ess}_{Q[a,h]} u(x)$, $N > 0$ e $A = \{x : u(x) > N\}$. Pela definição de supremo essencial e por $A \subset Q[a,h]$, $0 < m(A) \leq 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(p,h) &= \left(\fint_{Q(a,h)} (u(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(h^{-n} \int_A (u(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(h^{-n} \int_A N^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = (h^{-n} N^p (m(A)))^{\frac{1}{p}} = N(h^{-n} m(A))^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\phi(p,h) \geq N(h^{-n}m(A))^{\frac{1}{p}}, \quad \forall p > 0$. Quando $p \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{p\to+\infty} \phi(p,h) \geq \lim_{p\to+\infty} N(h^{-n}m(A))^{\frac{1}{p}} = N.$$

Como a desigualdade é válida para todo $N < \operatorname*{supess}_{Q[a,h]} u(x)$,

$$\lim_{p\to+\infty} \phi(p,h) \geq \operatorname*{supess}_{Q[a,h]} u(x).$$

Portanto,

$$\lim_{p\to+\infty} \phi(p,h) = \operatorname*{supess}_{Q[a,h]} u(x). \tag{5.2}$$

b) Seja $N = \operatorname*{inf\,ess}_{Q[a,h]} u(x) \geq 0$. Note que, $m\{x \in Q[a,h] : u(x) < N\} = 0$. Assim, para $p < 0$,

$$\begin{aligned}
\phi(p,h) &= \left(\fint_{Q(a,h)} (u(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(h^{-n} \int_{Q(a,h)} N^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = (h^{-n} N^p m(Q[0,1]))^{\frac{1}{p}} = h^{-\frac{n}{p}} N = h^{-\frac{n}{p}} \operatorname*{inf\,ess}_{Q[a,h]} u(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{p\to-\infty} \phi(p,h) \geq \operatorname*{inf\,ess}_{Q[a,h]} u(x)$.

Seja $S > \operatorname*{inf\,ess}_{Q[a,h]} u(x)$ e $B = \{x \in Q[a,h] : u(x) \leq S\}$. Pela definição de ínfimo essencial e por $B \subset Q[a,h]$, temos que $0 < m(B) \leq 1$.

Assim, para $p < 0$,

$$\begin{aligned} \phi(p,h) &= \left(\fint_{Q(a,h)} (u(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(h^{-n} \int_B (u(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(h^{-n} \int_B S^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = (h^{-n} S^p m(B))^{\frac{1}{p}} = S(h^{-n} m(B))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Logo, $\phi(p,h) \leq S(h^{-n}m(B))^{\frac{1}{p}}$.

Para $p \to -\infty$, encontramos $\lim\limits_{p \to -\infty} \phi(p,h) \leq S$. Como é válida a desigualdade para todo $S > \inf\limits_{Q[a,h]} \text{ess } u(x)$,

$$\lim_{p \to -\infty} \phi(p,h) \leq \inf_{Q[a,h]} \text{ess } u(x).$$

Portanto,

$$\lim_{p \to -\infty} \phi(p,h) = \inf_{Q[a,h]} \text{ess } u(x). \tag{5.3}$$

□

Vamos usar a seguinte notação:

$$\phi(+\infty,h) = \lim_{p \to +\infty} \phi(p,h) \qquad \text{e} \qquad \phi(-\infty,h) = \lim_{p \to -\infty} \phi(p,h).$$

Observe que as afirmações 1 e 2 são válidas para funções positivas mensuráveis.

Teorema 5.1 *Se u é uma subsolução positiva em $Q(0,4)$, então para $p > 1$*

$$\sup_{Q[0,1]} \text{ess } u(x) \leq c \left(\frac{p}{p-1} \right)^{2\sigma} \left(\fint_{Q[0,2]} (u(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\phi(+\infty,1) \leq c \left(\frac{p}{p-1} \right)^{2\sigma} \phi(p,2),$$

onde $\sigma = \lim\limits_{m \to \infty} \left(\frac{m}{\kappa^m} + ... + \frac{1}{\kappa} + 1 \right)$ e c depende somente de n e λ.

Prova: Sejam $\Omega = Q(a,h)$ e η a função definida por $\eta(x) \equiv 1$ em $Q(a,h')$ e nula em seu complementar, para $0 < h' < h \leq 2h'$. Mais precisamente, seja $\varphi : [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e linear por partes tal que $\varphi(x_i) = 0$ em $|x_i| > \frac{h}{2}$, $\varphi(x_i) = 1$ em $|x_i| < \frac{h'}{2}$ e linear no intervalo $\frac{h'}{2} < |x_i| < \frac{h}{2}$.

Definindo $\eta(x_i, ...x_n) = \min\limits_{i=1,2,...,n} \varphi(x_i - a_i)$, temos que $|D\eta(x)| \leq \frac{2}{h-h'}$.

Como u é positiva e subsolução e como $\eta(x)$ tem suporte em $Q(a,h)$, podemos utilizar o Lema 3.3, obtendo as seguintes desigualdades para $k \neq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{Q(a,h)} \eta^2 (Dv)^2 dx &\leq c_1 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \int_{Q(a,h)} (D\eta)^2 v^2 dx \\
\int_{Q(a,h')} (Dv)^2 dx &\leq c_1 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 \int_{Q(a,h)} v^2 dx \\
(h')^n \fint_{Q(a,h')} (Dv)^2 dx &\leq c_1 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 h^n \fint_{Q(a,h)} v^2 dx \\
\fint_{Q(a,h')} (Dv)^2 dx &\leq c_1 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 \left(\frac{h}{h'}\right)^n \fint_{Q(a,h)} v^2 dx.
\end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade no resultado do Lema 3.1, temos que, para $\kappa = \frac{n}{n-2}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{Q(a,h')} v^{2\kappa} dx\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \\
&\leq \beta \left\{ (h')^2 \left[c \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 \left(\frac{h}{h'}\right)^n \fint_{Q(a,h)} v^2 dx \right] + \fint_{Q(a,h')} v^2 dx \right\}.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\fint_{Q(a,h')} v^2 dx = \frac{1}{(h')^n} \int_{Q(a,h')} v^2 dx \leq \frac{1}{(h')^n} \int_{Q(a,h)} v^2 dx = \left(\frac{h}{h'}\right)^n \fint_{Q(a,h)} v^2 dx.$$

Com isto, temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\fint_{Q(a,h')} v^{2\kappa} dx\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \\
\leq\;& \beta \left\{ (h')^2 \left[c_1 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 \left(\frac{h}{h'}\right)^n \fint_{Q(a,h)} v^2 dx \right] + \left(\frac{h}{h'}\right)^n \fint_{Q(a,h)} v^2 dx \right\} \\
\leq\;& \beta \left(\frac{h}{h'}\right)^n \left\{ \left[c_1 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2h'}{h-h'}\right)^2 + 1 \right] \fint_{Q(a,h)} v^2 dx \right\} \\
\leq\;& \beta \left(\frac{2h'}{h'}\right)^n \left\{ \left[c_1\, 2^2 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2} + 1 \right] \fint_{Q(a,h)} v^2 dx \right\} \\
\leq\;& \left[\beta\, c_1\, 2^{n+2} \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2} + \beta\, 2^n \right] \fint_{Q(a,h)} v^2 dx.
\end{aligned}
$$

Tomando $c_2 = \max(\beta\, c_1\, 2^{n+2}\ ,\ \beta\, 2^n)$, obtemos

$$
\left(\fint_{Q(a,h')} v^{2\kappa} dx\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \left[c_2 \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2} + c_2 \right] \fint_{Q(a,h)} v^2 dx.
$$

É possível uma estimativa melhor, tomando

$$
\gamma \leq c_2 \left[\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2} + 1 \right]
$$

tal que

$$
\left(\fint_{Q(a,h')} v^{2\kappa} dx\right)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \gamma \fint_{Q(a,h)} v^2 dx.
$$

Note que, $\left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2} \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 > 1$. Portanto,

$$
\gamma \leq 2c_2 \left[\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2} \right].
$$

Vamos atribuir $t = 2k$. (Futuramente utilizaremos $|t| \geq q = \alpha\ \lambda^{-2}\ 3^{\frac{-n}{2}} 8^{-1}$, onde α é a constante do Lema 3.2.)

Assim, considerando $v = u^k$, é possível comparar $\phi(\kappa t, h')$ com $\phi(t,h)$, da forma:

$$\begin{aligned}
\phi(\kappa t, h') &= \left(\fint_{Q(a,h')} u^{\kappa t}\, dx \right)^{\frac{1}{\kappa t}} \\
&= \left[\left(\fint_{Q(a,h')} v^{2\kappa}\, dx \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left(\gamma \fint_{Q(a,h)} v^{2}\, dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left[c_3 \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{-2} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{2} \right]^{\frac{1}{t}} \left(\fint_{Q(a,h)} v^{2}\, dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= c_3^{\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{-\frac{2}{t}} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\frac{2}{t}} \left(\fint_{Q(a,h)} u^{2k}\, dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= c_3^{\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{-\frac{2}{t}} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\frac{2}{t}} \phi(t,h).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\phi(\kappa t, h') \leq c_3^{\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{-\frac{2}{t}} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\frac{2}{t}} \phi(t,h), \tag{5.4}$$

onde $0 < h' < h \leq 2h'$, $t = 2k > 1$. Note que, $c_3 = 2c_2 = 2\max(\rho\lambda^4 2^{n+2}, \beta 2^n)$ que só dependem de λ e n.

Observação 5.1 Se tivermos $t < 0$ e u uma supersolução, usando a segunda parte do Lema 3.3, com $k < \frac{1}{2}$, teremos:

$$\begin{aligned}
\phi(\kappa t, h') &= \left(\fint_{Q(a,h')} u^{\kappa t}\, dx \right)^{\frac{1}{\kappa t}} = \left[\left(\fint_{Q(a,h')} v^{2\kappa}\, dx \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]^{\frac{1}{t}} \\
&\geq \left(\gamma \fint_{Q(a,h)} v^{2}\, dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&\geq c_3^{\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{-\frac{2}{t}} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\frac{2}{t}} \left(\fint_{Q(a,h)} u^{t}\, dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= c_3^{\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{-\frac{2}{t}} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\frac{2}{t}} \phi(t,h).
\end{aligned}$$

Como $t < 0$,

$$\phi(\kappa t, h') \geq c_3^{-\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{\frac{2}{|t|}} \phi(t,h). \tag{5.5}$$

para $0 < h' < h < 2h'$.

$\Diamond$

Nosso objetivo é encontrar $\phi(+\infty, 1)$. Observamos que definindo

$$h' = h_{i+1} = 1 + \frac{1}{2^{i+1}} \text{ e } h = h_i = 1 + \frac{1}{2^i} \quad \text{para } i \in \mathbb{N},$$

e substituindo $t = p_i = \kappa^i p$, é válida a desigualdade (5.4), pois $0 < h' < h \leq 2h'$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(p_{i+1}, h_{i+1}) &= \phi(\kappa^{i+1}p, h_{i+1}) = \phi(\kappa\kappa^i p, h_{i+1}) \\
&\leq c_3^{\frac{1}{\kappa^i p}} \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1\right)^{\frac{-2}{\kappa^i p}} \left(\frac{\kappa^i p}{\kappa^i p - 1}\right)^{\frac{2}{\kappa^i p}} \phi(\kappa^i p, h_i).
\end{aligned}$$

Observação 5.2

1) $\left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1\right)^{\frac{-2}{\kappa^i p}} = (2^{i+1}+1)^{\frac{2}{\kappa^i p}} \leq (8^i)^{\frac{2}{\kappa^i p}} = (8^{\frac{2}{p}})^{\frac{i}{\kappa^i}}$

2) $\left(\frac{\kappa^i p}{\kappa^i p-1}\right)^{\frac{2}{\kappa^i p}} = \left(\frac{p}{p-\frac{1}{\kappa^i}}\right)^{\frac{2}{\kappa^i p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{\kappa^i p}} \leq \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^i\right]^{\frac{2}{\kappa^i p}} \leq \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{i}{\kappa^i}}.$

$\Diamond$

Então,

$$\begin{aligned}
\phi(p_{i+1}, h_{i+1}) &\leq c_3^{\frac{1}{\kappa^i p}} \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1\right)^{\frac{-2}{\kappa^i p}} \left(\frac{\kappa^i p}{\kappa^i p - 1}\right)^{\frac{2}{\kappa^i p}} \phi(\kappa^i p, h_i) \\
&\leq c_3^{\frac{i}{\kappa^i p}} (8^{\frac{2}{p}})^{\frac{i}{\kappa^i}} \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{i}{\kappa^i}} \phi(\kappa^i p, h_i) \\
&\leq c_4^{\frac{i}{\kappa^i}} \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{i}{\kappa^i}} \phi(p_i, h_i).
\end{aligned}$$

onde $c_4 = 8^2 c_3$.

Portanto,

$$\phi(p_{i+1},h_{i+1}) \leq c_4^{\frac{i}{\kappa^i}} \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{i}{\kappa^i}} \phi(p_i,h_i), \quad i=1,2,\dots .$$

Iterando esta desigualdade, encontramos

$$\phi(p_{i+1},h_{i+1}) \leq c_4^{(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa})} \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa})} \phi(p_1,h_1).$$

Para $p_1=\kappa p$, $h'=\frac{3}{2}$ e $h=2$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(p_1,h_1) &= \phi(\kappa p,h') \leq c_3^{\frac{1}{p}} \left(\frac{h}{h'}-1\right)^{\frac{-2}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}} \phi(p,h) \\
&= c_3^{\frac{1}{p}}\, 3^{\frac{2}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}} \phi(p,2) \\
&\leq c_4 \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2} \phi(p,2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\phi(p_{i+1},h_{i+1}) \leq c_4^{(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa}+1)} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa}+1)} \phi(p,2).$$

Como $\kappa=\left(\frac{n}{n-2}\right)>1$, $(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa}+1)$ converge a $\sigma=\sigma(\kappa)$ quando $i\to\infty$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty}\phi(p_{i+1},h_{i+1}) &= \lim_{i\to\infty}\phi(\kappa^{i+1}p,1+\frac{1}{2^{i+1}}) \\
&\leq \lim_{i\to\infty} c_4^{(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa}+1)} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2(\frac{i}{\kappa^i}+\dots+\frac{1}{\kappa}+1)} \phi(p,2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi(+\infty,1) \leq c_5 \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2\sigma} \phi(p,2), \quad p>1$$

e o teorema está provado.

$\square$

Teorema 5.2 *Se $u>0$ é uma supersolução em $Q(0,4)$, então*

$$\left(\int_{Q(0,2)} u^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{(\kappa-p)^{2\sigma}} \inf_{Q[0,1]}\text{ess}\, u(x), \qquad para\ \ 0<p<\kappa=\frac{n}{n-2},$$

ou seja,

$$\phi(p,2) \leq \frac{c}{(\kappa - p)^{2\sigma}}\, \phi(-\infty,1)$$

onde $\sigma = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{\kappa^m} + ... + \frac{1}{\kappa} + 1 \right)$ *e* c *depende somente de* λ *e* n*.*

Prova: Vejamos algumas afirmações para $q = \alpha\ \lambda^{-2}\ 3^{\frac{-n}{2}} 8^{-1}$ definido no Teorema 5.1:

i) $\phi(-\infty,1) \geq c_1\phi(-q,2)$

ii) $\phi(-q,2) \geq c_2\phi(-q,3)$

iii) $\phi(-q,3) \geq c_3\phi(q,3)$

iv) $\phi(q,3) \geq c_4\phi(p,2)$.

Primeiro, vamos demonstrar o teorema supondo que $u \geq \epsilon > 0$, onde ϵ é uma constante, para garantir a existência de $\phi(t,h)$ para $t < 0$. Após demonstrar a desigualdade para este caso, podemos aplicá-lo, no caso geral, para $u+\epsilon$ e concluir que

$$\left(\int_{Q(0,3)} (u+\epsilon)^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \inf_{Q[0,1]} \text{ess}\ u + \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, o teorema ficará provado.

i) Na demonstração do Teorema 5.1, Observação 5.1, encontramos a expressão (5.6), que repetimos aqui:

$$\phi(\kappa t, h') \geq c_5^{-\frac{1}{t}} \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)^{\frac{2}{|t|}} \phi(t,h),$$

para $t < -q$ e $0 < h' < h < 2h'$. Podemos supor que $c_5 < 1$.
De modo análogo ao Teorema 5.1, definimos

$$h' = h_{i+1} = 1 + \frac{1}{2^{i+1}}, \quad h = h_i = 1 + \frac{1}{2^i} \quad \text{e} \quad p_i = \kappa^i t < -q.$$

Assim,

$$\phi(p_{i+1},h_{i+1}) = \phi(\kappa^{i+1}t, h_{i+1}) \geq c_5^{-\frac{1}{\kappa^i t}} \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1 \right)^{\frac{2}{|\kappa^i t|}} \phi(p_i,h_i). \tag{5.6}$$

Note que,

$$1 \geq \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - 1 \right)^{\frac{2}{|\kappa^i t|}} \geq 8^{-\frac{2i}{\kappa^i |t|}}.$$

A partir disso e usando que $c_5 < 1$,

$$\phi(p_{i+1}, h_{i+1}) \geq c_5^{-\frac{1}{\kappa^i t}} (8^{-\frac{2}{|t|}})^{\frac{i}{\kappa^i}} \phi(p_i, h_i) \geq c_6^{\frac{i}{\kappa^i}} \phi(p_i, h_i).$$

Iterando este resultado, temos

$$\phi(p_{i+1}, h_{i+1}) \geq c_6^{\frac{i}{\kappa^i} + \ldots + \frac{1}{\kappa}} \phi(p_1, h_1).$$

Para $i = 0$,

$$\phi(p_1, h_1) = \phi(\kappa t, h') \geq c_5 3^{-\frac{2}{|t|}} \phi(t, 2) \geq c_6 \phi(t, 2).$$

Portanto,

$$\phi(p_{i+1}, h_{i+1}) \geq c_6^{\frac{i}{\kappa^i} + \ldots + \frac{1}{\kappa} + 1} \phi(t, 2).$$

Tomando o limite para $i \to \infty$, com $t \leq -q$ e $\kappa = \frac{n}{n-2} > 1$, obtemos

$$\phi(-\infty, 1) \geq c_7 \; \phi(t, 2).$$

Portanto, como $t \leq -q$,

$$\phi(-\infty, 1) \geq c_7 \; \phi(-q, 2). \tag{5.7}$$

ii) Note que

$$\begin{aligned} \phi(-q, 2) &= \left(\fint_{Q(0,2)} u^{-q} \, dx \right)^{\frac{1}{-q}} \\ &= \left(\frac{1}{2^n} \int_{Q(0,2)} u^{-q} \, dx \right)^{\frac{1}{-q}} \\ &\geq \left(\frac{1}{2^n} \int_{Q(0,3)} u^{-q} \, dx \right)^{\frac{1}{-q}} \\ &= \left(\frac{3^n}{2^n} \fint_{Q(0,3)} u^{-q} \, dx \right)^{\frac{1}{-q}} \\ &= c_8 \phi(-q, 3). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi(-q, 2) \geq c_8 \phi(-q, 3). \tag{5.8}$$

iii) Definimos

$$v = \ln u \quad \text{e} \quad \psi = \frac{1}{u} \eta^2,$$

para η não nula e diferenciável. Como $u \geq \epsilon$, v e ψ pertencem a $W^{1,2}(\Omega)$ e

$$Dv = \frac{1}{u}Du \quad \text{e} \quad D\psi = -\frac{1}{u^2}Du\,\eta^2 + \frac{1}{u}2\eta\,D\eta.$$

De fato, pela Desigualdade de Hölder, o lado direito das igualdades estão em L^2.

A função u é uma supersolução em $Q(0,4)$. Para $Q(0,3) \subset Q(0,4)$,

$$\int_{Q(0,3)} \langle\, D\psi, ADu\rangle\, dx \geq 0.$$

Donde temos

$$\int_{Q(0,3)} \langle -\frac{1}{u^2}Du\,\eta^2 + \frac{1}{u}2\eta\,D\eta, ADu\rangle\, dx \geq 0$$

$$\int_{Q(0,3)} -\eta^2\langle Dv, ADv\rangle \;+ 2\eta\langle D\eta, ADv\rangle\, dx \geq 0$$

$$\int_{Q(0,3)} \eta^2\langle Dv, ADv\rangle\, dx \leq 2\int_{Q(0,3)} \langle D\eta, A\eta\,Dv\rangle\, dx.$$

Pela desigualdade de Schwarz e por A ser positiva definida,

$$\int_{Q(0,3)} \eta^2\langle Dv, ADv\rangle\, dx \;\;\geq\;\; \int_{Q(0,3)} \eta^2(Dv)^2\lambda^{-1}\, dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{Q(0,3)} \langle D\eta, A\eta\,Dv\rangle\, dx &\leq \int_{Q(0,3)} \|D\eta\|\,\|A\eta\,Dv\|\, dx \\
&\leq \left(\int_{Q(0,3)} \|D\eta\|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q(0,3)} \|A\eta\,Dv\|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{Q(0,3)} \|D\eta\|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q(0,3)} \lambda^2\eta^2(Dv)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1}\int_{Q(0,3)} \eta^2 (Dv)^2\,dx &\leq 2\left(\int_{Q(0,3)} \|D\eta\|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q(0,3)} \lambda^2\eta^2 (Dv)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\lambda^{-2}\left(\int_{Q(0,3)} \eta^2 (Dv)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\left(\int_{Q(0,3)} \|D\eta\|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\int_{Q(0,3)} \eta^2 (Dv)^2\,dx &\leq 4\lambda^4 \int_{Q(0,3)} \|D\eta\|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Dado um compacto $K \subset \Omega$ aberto, existe uma função $\eta \in C_0^\infty$ que vale 1 em K e tem suporte em Ω. Além disto, η pode ser construída de forma que a derivada seja menor que $\frac{c}{\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)}$.

Suponhamos aqui o compacto $K = Q[a,h] \subset Q(0,3)$, o aberto $\Omega = Q(0,3)$ e a função $\eta = 1$ em $Q[a,h]$ e com suporte em $Q(a,3h) \subset Q(0,3)$. Assim, podemos supor $\|D\eta\| \leq \frac{4}{h}$, obtendo

$$\begin{aligned}
\int_{Q(a,h)} (Dv)^2\,dx &\leq 4\lambda^4 \int_{Q(0,3)} \|D\eta\|^2\,dx \\
&\leq 4\lambda^4 \int_{Q(0,3h)} \|D\eta\|^2\,dx \\
&\leq 4\lambda^4 \int_{Q(0,3h)} \left(\frac{4}{h}\right)^2\,dx \\
&= 4^3\lambda^4 h^{-2} \int_{Q(0,3h)} dx \\
&= 4^3\lambda^4 h^{-2} 3^n \int_{Q(a,h)} dx = \tau h^{-2} \int_{Q(a,h)} dx,
\end{aligned}$$

onde $\tau = 4^3\lambda^4 3^n$.

Pelo Corolário 3.1, para todo $Q[a,h] \subset Q(0,3)$,

$$\int_{Q(a,h)} (v - (v)_{Q(a,h)})^2\,dx \leq c\,h^2 \int_{Q(a,h)} (Dv)^2\,dx \leq c_1\tau \int_{Q(a,h)} dx.$$

Para a função $w = \tau^{-\frac{1}{2}} v = \tau^{-\frac{1}{2}} \ln u$ valem as hipóteses do Lema 3.2. Assim,

$$\int_{Q(0,3)} e^{\alpha\tau^{-\frac{1}{2}}\ln u}\,dx \int_{Q(0,3)} e^{-\alpha\tau^{-\frac{1}{2}}\ln u}\,dx \leq \beta^2$$

onde α e β só dependem de n. Então

$$\int_{Q(0,3)} u^q \, dx \int_{Q(0,3)} u^{-q} \, dx \leq \beta^2 \quad \text{para} \quad q = \alpha\tau^{-\frac{1}{2}}.$$

A partir disto,

$$\left(\int_{Q(0,3)} u^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \beta^{\frac{2}{q}} \left(\int_{Q(0,3)} u^{-q} \, dx\right)^{-\frac{1}{q}}.$$

Logo,

$$\phi(q,3) \leq \beta^{\frac{2}{q}} \phi(-q,3)$$

para $q = \alpha \, \lambda^{-2} \, 3^{\frac{-n}{2}} 8^{-1}$.
Portanto,

$$\phi(q,3) \leq c_9 \phi(-q,3). \tag{5.9}$$

iv) Dado $0 < p < \kappa$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $q\kappa^m \geq p$. Logo, existe $r \in (0,q)$ tal que $r\kappa^m = p$.
Note que, $r\kappa^i = \frac{r\kappa^m}{\kappa^{m-i}} = \frac{p}{\kappa^{m-i}} < 1$, para $i \in \{0,1,...,m-1\}$. Assim, a desigualdade (5.4) é válida com $t = r\kappa^i$ ($i \in \{0,1,...,m-1\}$), visto que $t \in (0,1)$ e u é supersolução.
Portanto, definindo $h_i = 2 + \frac{1}{2^i}$ para $i \in \{0,1...,m\}$ e fazendo iterações análogas as do Teorema 5.1, obtemos

$$\phi(\kappa^m r, h_m) \leq c^{(\frac{m}{\kappa^m}+...+\frac{1}{\kappa}+1)} \left(\frac{r}{r-1}\right)^{2(\frac{m}{\kappa^m}+...+\frac{1}{\kappa}+1)} \phi(r,3).$$

Como ϕ é crescente, $\phi(r,3) \leq \phi(q,3)$.
Logo,

$$\phi(p,h_m) \leq c\left(\frac{r}{r-1}\right)^{2\sigma} \phi(q,3),$$

onde $\sigma = \lim\limits_{m\to\infty}(\dfrac{m}{\kappa^m} + ... + \dfrac{1}{\kappa} + 1)$.

De $p = r\kappa^m$, então concluímos que $r = \frac{p}{\kappa^m}$. Assim,

$$\left(\frac{r}{r-1}\right)^2 = \left(\frac{p}{p-\kappa^m}\right)^{2\sigma} \leq \frac{p^{2\sigma}}{(\kappa-p)^{2\sigma}}.$$

Como $h_m > 2$, de forma análoga ao ii), $\phi(p,2) \leq c\phi(p,h_m)$. Portanto,

$$\phi(p,2) \leq \frac{c}{(\kappa-p)^{2\sigma}} \phi(q,3). \tag{5.10}$$

Utilizando as desigualdades (5.7),(5.8),(5.9) e (5.10), concluímos que

$$\phi(p,2) \leq \frac{c}{(\kappa - p)^{2\sigma}}\, \phi(-\infty,1).$$

e o teorema está provado.

$\square$

Teorema 5.3 Desigualdade de Harnack
Se $u > 0$ é uma solução de (1.1) em um domínio qualquer Ω e se Ω' é um subconjunto compacto de Ω, então

$$\operatorname*{supess}_{\Omega'} u \leq c \operatorname*{infess}_{\Omega'} u,$$

onde a constante $c > 1$ depende somente de Ω, Ω' e λ.

Prova: Suponhamos $\Omega = Q(0,4)$, $\Omega' = Q[0,1]$ e $u : Q(0,4) \to \mathbb{R}$ solução positiva de (1.1). Sendo u solução em $Q(0,4)$, u é também subsolução e supersolução em $Q(0,4)$. Desta forma, pelos Teoremas (5.1) e (5.2), temos que:

$$\phi(+\infty,1) \leq c_1 \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2\sigma} \phi(p,2), \qquad \text{para } p > 1$$

e

$$\phi(p,2) \leq \frac{c_2}{(\kappa - p)^{2\sigma}}\, \phi(-\infty,1), \qquad \text{para } 0 < p < \kappa = \frac{n}{n-2}.$$

Em particular, para $p = \frac{1+\kappa}{2}$ as duas desigualdades são satisfeitas, assim,

$$\begin{aligned} \phi(+\infty,1) &\leq c_1 \left(\frac{1+\kappa}{\kappa-1}\right)^{2\sigma} \phi(p,2) \\ &\leq c_1 \left(\frac{1+\kappa}{\kappa-1}\right)^{2\sigma} \frac{2c_2}{(\kappa-1)^{\sigma}}\, \phi(-\infty,1) \\ &= c_3 \phi(-\infty,1), \end{aligned}$$

onde c_3 depende somente de n e λ. De (5.2) e (5.3), temos que

$$\sup_{Q[0,1]} \text{ess}\, u \leq c_3 \inf_{Q[0,1]} \text{ess}\, u, \qquad \text{para } c_3(n,\lambda). \tag{5.11}$$

Para os conjuntos Ω e Ω' existe $h > 0$ real tal que para qualquer $a \in \Omega'$, $Q(a,4h) \subset \Omega$.

Dada u solução de (1.1) em $Q(a, 4h)$, seja a função $v : Q(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $v(y) = u(a + hy)$, $\; a \in \Omega'$ e $h > 0$. Com esta definição temos que v é uma solução em $Q(0, 1)$ de

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_{y_i}(A_{ij}(a + hy)D_{y_j}u) \; = \; 0.$$

Como os autovalores de $\widetilde{A}_{ij}(y) = A_{ij}(a+hy)$ estão entre $[\lambda, \Lambda]$ e c_3 só depende de λ e n, então v satisfaz (5.11). Assim,

$$\sup_{Q[0,1]} \text{ess}\, v(y) \leq c_3 \inf_{Q[0,1]} \text{ess}\, v(y), \qquad \text{para } c_3(n, \lambda).$$

Ou seja,

$$\sup_{Q[0,1]} \text{ess}\, u(a + hy) \leq c_3 \inf_{Q[0,1]} \text{ess}\, u(a + hy), \qquad \text{para } c_3(n, \lambda).$$

Fazendo $x = a + hy$, obtemos:

$$\sup_{Q[a,h]} \text{ess}\, u(x) \leq c_3 \inf_{Q[a,h]} \text{ess}\, u(x), \qquad \text{para } c_3(n, \lambda).$$

Observamos aqui que esta desigualdade é equivalente às desigualdades (4.2) e (4.3). Através de um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do caso harmônico (Exemplo 2), obtemos

$$\operatorname*{supess}_{\Omega} u(x) \leq c_4 \operatorname*{infess}_{\Omega} u(x),$$

para $c_4(n, \lambda)$.

$\square$

Observação 5.3 Fazendo uma mudança de variável, como a feita na demonstração do teorema acima, verificamos que a constante c é invariante por translações e homotetias, isto é, se $\Omega_1 = T(\Omega)$ e $\Omega_1' = T(\Omega')$, onde $T(x) = ax + b$ $\;(a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n)$, então $c(n, \lambda, \Omega_1, \Omega_1') = c(n, \lambda, \Omega, \Omega')$.

Capítulo 6

Continuidade de Hölder de Soluções

Se u é solução de (1.1), num compacto Ω' de Ω o supremo fica controlado pelo ínfimo. Porém, não sabemos se u é contínua. Neste capítulo, mostramos que a função u é Hölder contínua, como conseqüência da Desigualdade de Harnack.

Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$, solução de (1.1) e a um ponto interior do domínio Ω. Logo, $\exists\ R \in \mathbb{R}$ tal que $Q(a,R) \subset \Omega$.

Sejam $M(r) = \operatorname*{supess}_{Q[a,r]} u(x)$, $\mu(r) = \operatorname*{infess}_{Q[a,r]} u(x)$, $0 < r < R$. Defina $E = Q(a,r)$ e $E' = Q[a,r']$, com $r' = \frac{r}{2}$, subconjuntos de Ω.

Sejam $M = M(r)$, $M' = M(r')$, $\mu = \mu(r)$ e $\mu' = \mu(r')$.

As funções $M - u(x)$ e $u(x) - \mu$ são também soluções positivas da equação (1.1) no domínio E. Para o compacto E'

$$\begin{aligned}
\operatorname*{supess}_{E'} (M - u(x)) &= M - \operatorname*{infess}_{E'} u(x) = M - \mu', \\
\operatorname*{infess}_{E'} (M - u(x)) &= M - \operatorname*{supess}_{E'} u(x) = M - M', \\
\operatorname*{supess}_{E'} (u(x) - \mu) &= \operatorname*{supess}_{E'} u(x) + \operatorname*{supess}_{E'} (-\mu) = M' - \mu, \\
\operatorname*{infess}_{E'} (u(x) - \mu) &= \operatorname*{infess}_{E'} u(x) + \operatorname*{infess}_{E'} (-\mu) = \mu' - \mu.
\end{aligned}$$

Quando aplicamos o Teorema de Harnack às funções $M - u(x)$ e $u(x) - \mu$ obtemos

$$\operatorname*{supess}_{E'} (M - u(x)) \leq c \operatorname*{infess}_{E'} (M - u(x)),$$

onde $c > 1$ só depende de n, λ, E e E'. Como E e E' podem ser obtidos por uma mesma homotetia de $Q[a,1]$ e $Q[a,1/2]$, respectivamente, a constante c

pode ser tomada como sendo a mesma para todo r, pela observação 5.3. Isto é, para estes cubos, c não depende de r.
Logo,

$$(M-\mu') \leq c(M-M'). \tag{6.1}$$

Analogamente,

$$\operatorname*{supess}_{E'}\,(u(x)-\mu) \leq c\operatorname*{infess}_{E'}\,(u(x)-\mu).$$

$$(M'-\mu) \leq c(\mu'-\mu), \tag{6.2}$$

onde c depende somente de n, λ, $Q(0,1)$ e $Q[0,1/2]$ (c não depende de r).

Adicionando as desigualdades (6.1) e (6.2):

$$\begin{aligned}
(M-\mu')+(M'-\mu) &\leq cM-cM'+c\mu'-c\mu \\
M'(1+c)-\mu'(c+1) &\leq M(c-1)-\mu(c-1) \\
(M'-\mu')(c+1) &\leq (M-\mu)(c-1) \\
(M'-\mu') &\leq \left(\frac{c-1}{c+1}\right)(M-\mu) \\
M(r')-\mu(r') &\leq \left(\frac{c-1}{c+1}\right)(M(r)-\mu(r)) \\
M\left(\frac{r}{2}\right)-\mu\left(\frac{r}{2}\right) &\leq \left(\frac{c-1}{c+1}\right)(M(r)-\mu(r)). \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

Fazendo as iterações em (6.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\left[M\left(\frac{r}{2}\right)-\mu\left(\frac{r}{2}\right)\right] &\leq \left(\frac{c-1}{c+1}\right)[M(r)-\mu(r)] \\
\vdots \qquad & \vdots \qquad \vdots \\
\left[M\left(\frac{r}{2^i}\right)-\mu\left(\frac{r}{2^i}\right)\right] &\leq \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^i[M(r)-\mu(r)]
\end{aligned}$$

para $i=1,2,...;\;\; 0<r<R$.

Denotando por $\omega(r)=M(r)-\mu(r)$ a oscilação de u em $Q(a,r)$ e tomando $\theta=\left(\frac{c-1}{c+1}\right)$,

$$\omega\left(\frac{r}{2^i}\right) \leq \theta^i\omega(r), \quad i=1,2,\dots\,. \tag{6.4}$$

Nesta desigualdade estamos comparando a oscilação em dois cubos de arestas $\frac{r}{2^i}$ e r, para $i=1,2,\dots$. Nosso interesse está em saber qual a oscilação para um cubo qualquer de aresta $\rho\in(0,r)$.

Todavia, para qualquer $\rho \in (0, r)$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r}{2^{i+1}} \leq \rho < \frac{r}{2^i}$. Assim, $\omega(\rho) \leq \omega(\frac{r}{2^i})$. Utilizando (6.4)

$$\omega(\rho) \leq \theta^i \omega(r), \quad 0 < \rho < r < R, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Mas,

$$\frac{r}{2^{i+1}} \leq \rho \Rightarrow i + 1 \geq \log_2 \frac{r}{\rho} \Rightarrow \theta^i \leq \theta^{\log_2 \frac{r}{\rho} - 1}$$

e

$$\theta^{\log_2 \frac{r}{\rho}} = (\theta^{\log_\theta \frac{r}{\rho}})^{(\frac{1}{\log_\theta 2})} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{1}{\log_\theta 2}} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha}$$

para $\frac{1}{\log_\theta 2} = -\alpha$. Logo, podemos escrever a desigualdade (6.5) da forma

$$\omega(\rho) \leq \theta^{-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} \omega(r)$$

para $\alpha = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \theta} > 0, \ \ 0 < \rho < r < R$.

Note que,

$$\omega(\rho) = M(\rho) - \mu(\rho) = \operatorname*{supess}_{Q[a,\rho]} u(x) - \operatorname*{inf\,ess}_{Q[a,\rho]} u(x) \geq |u(x) - u(y)|,$$

para todo $x, y \in Q[a, \rho]$.

Logo,

$$|u(x) - u(y)| \leq \theta^{-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} \omega(r), \tag{6.6}$$

para todo $x, y \in Q[a, \rho]$. Portanto, u é contínua.

Sejam $x \in \ Q(a, r)$ e $d = \operatorname{dist}(x, \partial Q(a, r))$. Assim, $Q(x, d/2) \subset Q(a, r)$.

Se $y \in Q(x, d/2)$, então $\operatorname{dist}(x, y) = |x - y| < d/2 < r$. Chamando $\rho = |x - y| < r$ e substituindo em (6.6), obtemos

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{\theta^{-1}\omega(r)}{r^{\alpha}} |x - y|^{\alpha} = \theta' |x - y|^{\alpha}.$$

Se $y \in Q(a, r)$ e $y \notin Q(x, d/2)$, então $\operatorname{dist}(x, y) > d/2, \ d$ fixo.
Logo, usando (6.6),

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} \leq \frac{\omega(r)}{|x - y|^{\alpha}} \leq \frac{\omega(r)}{(d/2)^{\alpha}} = \theta''$$

para θ'' constante. Tomando $C = \max\{\theta', \theta''\}$, temos que a função u é Hölder contínua em um cubo $Q(a, r)$. Como a é qualquer, u é Hölder contínua em Ω.

Portanto, a função u é contínua e $\operatorname*{supess}_{\Omega'} u(x) = \max_{\Omega'} u(x)$ e $\operatorname*{infess}_{\Omega'} u(x) = \min_{\Omega'} u(x)$.

Princípio Forte do Máximo: Seja u uma solução de (1.1) em um domínio conexo e limitado Ω, contínua em $\overline{\Omega}$. Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} u$, então u é constante.

Prova: Seja $M = \sup_{\overline{\Omega}} u$. Defina $v(x) = M - u(x) + \epsilon$. Logo, v é solução de (1.1). Seja Ω' um compacto de Ω contendo x_0. Pela desigualdade de Harnack, existe $c = c(n, \lambda, \Omega)$ tal que

$$\sup_{\Omega'} v \leq c \inf_{\Omega'} v.$$

Logo, $M - u(x) + \epsilon \leq c(M - u(y) + \epsilon) \;\; \forall x, y \in \Omega'$.
Como c não depende de v e, portanto, de ϵ, podemos fazê-lo tender a 0, obtendo

$$M - u(x) \leq c(M - u(y)) \;\; \forall x, y \in \Omega'.$$

Tomando $y = x_0$, temos

$$M - u(x) \leq c(M - u(x_0)) = 0.$$

Logo, $u(x) = M \;\; \forall x \in \Omega'$. Como Ω' é um compacto qualquer de Ω, concluímos que $u \equiv M$ em Ω.

□

Capítulo 7

Comportamento de Soluções no Infinito

Todo o estudo precedente foi realizado com cubos de $\mathbb{R}^n$. Nosso interesse agora está em analisar o comportamento no infinito de soluções da equação (1.1) em $\mathbb{R}^n \setminus Q(0,r)$.

Sejam

$$M(r) = \max_{|x|=r} u(x) \quad \text{e} \quad \mu(r) = \min_{|x|=r} u(x)$$

onde $1 < r < \infty$ e $|x|$ representa a norma do máximo do ponto x. Assim, $\{|x| = r\}$ representa a fronteira de $Q(0,r)$. Note que, M e μ estão bem definidas, pois u é contínua e $\{|x| = r\}$ é compacto.

Afirmações:
1) $M(r)$ tem no máximo um mínimo em $(1,+\infty)$;
2) $\mu(r)$ tem no máximo um máximo em $(1,+\infty)$.

Prova: 1) Suponhamos que existam dois mínimos relativos para $M(r)$, $M(r_1)$ e $M(r_2)$, com $1 < r_1 < r_2$.
Logo, existem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que $M(r_1) \leq M(s_1)$ e $M(r_2) \leq M(s_2)$ para $s_1 \in (r_1 - \epsilon_1, r_1 + \epsilon_1)$ e $s_2 \in (r_2 - \epsilon_2, r_2 + \epsilon_2)$.

Sejam $t_1 \in (r_1, r_1 + \epsilon_1)$ e $t_2 \in (r_2 - \epsilon_2, r_2)$. Para tais valores, temos

$$M(r_1) \leq M(t_1) \quad \text{e} \quad M(r_2) \leq M(t_2).$$

Note que $M(t_1) = \max_{|x|=t_1} u(x)$ e $M(t_2) = \max_{|x|=t_2} u(x)$.

Assim, $\max_{|x|=t_1} u(x) \geq M(r_1)$ e $\max_{|x|=t_2} u(x) \geq M(r_2)$.

Como $|x| = t_1$ e $|x| = t_2$ são compactos e u é contínua, $u(x)$ assume um máximo em pontos destes conjuntos, ou seja, existem x_1 e x_2, com $|x_1| = t_1$ e $|x_2| = t_2$ tais que

$$M(t_1) = \max_{|x|=t_1} u(x) = u(x_1) \quad \text{e} \quad M(t_2) = \max_{|x|=t_2} u(x) = u(x_2).$$

Assim,

$$u(x_1) \geq M(r_1) \quad \text{e} \quad u(x_2) \geq M(r_2).$$

Consideremos o anel $A = \{x : r_1 \leq |x| \leq r_2\}$. Sabemos que u é contínua em A, logo u assume um máximo em A. Seja $x' \in A$ o ponto de máximo de $u(x)$ em A. Assim, $u(x') \geq u(x), \forall x \in A$.

Se x' pertence ao interior de A, temos um absurdo, pois pelo Princípio do Máximo, o máximo deve ocorrer na fronteira do conjunto.

Se $x' \in \partial A$ e $|x'| = r_1$, então $u(x') = \max_A u(x) = \max_{|x|=r_1} u(x) = M(r_1) \leq u(x_1)$ para $x_1 \in (r_1, r_1 + \epsilon_1) \subset A$. Então x_1 também é máximo em A, contradizendo o princípio do máximo.

Se $x' \in \partial A$ e $|x'| = r_2$, então $u(x') = \max_A u(x) = \max_{|x|=r_2} u(x) = M(r_2) \leq u(x_2)$ para $x_2 \in (r_2 - \epsilon, r_2) \subset A$. Então x_2 também é máximo em A, contradizendo o princípio do máximo.

Portanto, $M(r)$ tem no máximo um mínimo para $1 < r < \infty$.

2) Provamos esta afirmação através de um raciocínio análogo ao anterior.

$\square$

Vejamos algumas conclusões derivadas destes resultados:

Se o mínimo de $M(r)$ ocorre em $r = t$, para $r > t$, a função $M(r)$ é crescente, pois não possui nenhum outro mínimo relativo. Assumindo este mínimo em $t = \infty$, teremos que $M(r)$ é decrescente. De maneira análoga, se o máximo de $\mu(r)$ ocorre em $r = \tau$, para $r > \tau$ a função $\mu(r)$ é decrescente, pois não possui nenhum outro máximo relativo. Se o máximo ocorre em $\tau = \infty$, então $\mu(r)$ é crescente.

Se u é uma solução definida no espaço inteiro, $M(r)$ e $\mu(r)$ estão definidas para $0 \leq r < \infty$. Pelo Princípio do Máximo, $\max_{|x| \leq r_1} u(x) = \max_{|x|=r_1} u(x) = M(r_1)$ e $\min_{|x| \leq r_1} u(x) = \min_{|x|=r_1} u(x) = \mu(r_1)$.

Como $\{x : |x| \leq r_1\} \subset \{x : |x| \leq r_2\}$, para $r_1 < r_2$, temos que

$$\max_{|x| \leq r_1} u(x) \leq \max_{|x| \leq r_2} u(x) \quad \text{e} \quad \min_{|x| \leq r_1} u(x) \geq \min_{|x| \leq r_2} u(x).$$

Portanto, $M(r_1) \leq M(r_2)$ e $\mu(r_1) \geq \mu(r_2)$ para $r_1 < r_2$. Ou seja, $M(r)$ é crescente e $\mu(r)$ é decrescente. Como ambas são contínuas em $0 \leq r < \infty$, $M(r)$ assume seu mínimo em $t = 0$ e $\mu(r)$ assume seu máximo em $\tau = 0$. Os seguintes teoremas revelam o comportamento da função u no infinito para alguns casos especiais.

Teorema 7.1 *Se $M(r)$ é crescente e $\mu(r)$ é decrescente para $r > r_0$, então $M(r) - \mu(r)$ tende para infinito pelo menos com uma potência de r, se u não for constante.*

Prova: Seja u solução não constante de (1.1), $M(r)$ função crescente e $\mu(r)$ função decrescente de r, para $r > r_0$.

Consideremos $\Omega = \{x : \frac{r}{2} < |x| < 2r\}$ o domínio e $\Omega' = \{x : |x| = r\}$ um compacto de Ω.

$M(r)$ e $\mu(r)$ assumem um máximo e um mínimo em $\overline{\Omega}$, pois são contínuas e definidas em Ω. $M(r)$ assume seu máximo em $2r$, pois é crescente e $\mu(r)$ assume seu mínimo em $2r$, pois é decrescente.

Logo, $M(2r) > u(x)$ e $\mu(2r) < u(x)$, para $\frac{r}{2} < |x| < 2r$.

Concluímos que $M(2r) - u(x)$ e $u(x) - \mu(2r)$ são soluções positivas de (1.1) definidas em Ω. Portanto, podemos aplicar a Desigualdade de Harnack para estas duas soluções no compacto Ω' de Ω.

Assim,

$$\begin{aligned} \max_{|x|=r}(M(2r) - u) &\leq c \min_{|x|=r}(M(2r) - u), \\ M(2r) - \min_{|x|=r} u &\leq c(M(2r) - \max_{|x|=r} u), \\ M(2r) - \mu(r) &\leq c(M(2r) - M(r)). \end{aligned} \tag{7.1}$$

E também,

$$\begin{aligned} \max_{|x|=r}(u - \mu(2r)) &\leq c \min_{|x|=r}(u - \mu(2r)), \\ M(r) - \mu(2r) &\leq c(\mu(r) - \mu(2r)), \end{aligned} \tag{7.2}$$

onde $c > 1$ depende só de n, λ, Ω e Ω'. Pela mesma consideração feita no Capítulo 6, c não depende de r.

Adicionando as desigualdades (7.1) e (7.2), temos

$$\begin{aligned} M(2r)-\mu(r)+M(r)-\mu(2r) &\leq c(M(2r)-M(r)+\mu(r)-\mu(2r)), \\ (M(2r)-\mu(2r))(1-c) &\leq (M(r)-\mu(r))(-1-c), \\ (M(2r)-\mu(2r)) &\geq \left(\frac{c+1}{c-1}\right)(M(r)-\mu(r)). \end{aligned}$$

Iterando este resultado, chamando $\omega(r)=M(r)-\mu(r)$ e $C=\left(\frac{c+1}{c-1}\right)$, temos

$$\omega(2^i r)\geq C^i\omega(r), \quad i=1,2,3,\ldots$$

Para $\rho\in\mathbb{R}$, $\rho\geq r$, $\exists i\in\mathbb{N}$ tal que $2^{i-1}r\leq\rho<2^i r$. Desta desigualdade, obtemos

$$i-1\leq \log_2\tfrac{\rho}{r} < i.$$

Chamando $\alpha=(\log_C 2)^{-1}$, temos

$$i-1\leq\alpha\log_C\frac{\rho}{r}<i.$$

Note que, sendo $2^{i-1}r\leq\rho$ e $i>\alpha\log_C\frac{\rho}{r}$, então

$$\omega(\rho)\geq\omega(2^{i-1}r)\geq C^{i-1}\omega(r)\geq C^{\alpha\log_C^{\frac{\rho}{r}}-1}\omega(r)=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha}\frac{1}{C}\omega(r)=\frac{1}{Cr^{\alpha}}\rho^{\alpha}\omega(r),$$

onde α e $\frac{1}{Cr^{\alpha}}$ são constantes positivas.

Portanto,

$$\omega(\rho)\geq\frac{1}{Cr^{\alpha}}\rho^{\alpha}\omega(r) \quad \text{para } \alpha>0$$

ou seja, para $\rho\to+\infty$, $\omega(\rho)$ tende para infinito pelo menos como potência de ρ com expoente positivo, e o teorema está provado.

□

Corolário 7.1 *A oscilação de uma solução, definida no espaço $|x|<r$, cresce mais rapidamente que uma potência de r com expoente positivo.*

Prova: Seja u uma solução definida em $|x| < r$. Para $0 < s < r$, $M(s)$ é crescente e $\mu(s)$ é decrescente. De fato, pelo Princípio do Máximo para $0 < s_1 < s_2 < r$,

$$M(s_1) = \max_{|x|=s_1} u(x) = \max_{|x|\leq s_1} u(x) \leq \max_{|x|\leq s_2} u(x) = \max_{|x|=s_2} u(x) = M(s_2),$$

$$\mu(s_1) = \min_{|x|=s_1} u(x) = \min_{|x|\leq s_1} u(x) \geq \min_{|x|\leq s_2} u(x) = \min_{|x|=s_2} u(x) = \mu(s_2).$$

Portanto, pelo Teorema 7.1 a oscilação $M(r) - \mu(r)$ cresce, pelo menos, como uma potência de r com expoente positivo, conforme desejávamos demonstrar.

$\square$

Teorema 7.2 *Se u é uma solução limitada (não constante) definida para $|x| > 1$, então a oscilação $\omega(r) = [M(r) - \mu(r)] \to 0$ quando $r \to \infty$. Assim, $\lim_{|x|\to\infty} u = u_\infty$ existe.*

Prova: Sabemos que u é limitada e não constante. Portanto, pelo Teorema 7.1, não podemos ter $M(r)$ crescente e $\mu(r)$ decrescente. Os casos possíveis são:

1. $M(r)$ decrescente e $\mu(r)$ crescente para $r > r_0$;
2. $M(r)$ e $\mu(r)$ decrescentes para $r > r_0$;
3. $M(r)$ e $\mu(r)$ crescentes para $r > r_0$.

Vamos estudar cada um deles:

1. $M(r)$ decrescente e $\mu(r)$ crescente para $r > r_0$.

Consideremos o anel $\Omega = \{x : r < |x| < 4r\}$ e o compacto $\Omega' = \{x : |x| = 2r\}$, com $r > r_0$. Devido a continuidade e a monoticidade das funções $M(r)$ e $\mu(r)$, utilizando um argumento análogo ao usado na prova do Teorema 7.1, encontramos

$$\omega(2r) \leq \left(\frac{c-1}{c+1}\right) \omega(r)$$

para $r < r_0$, onde $c > 1$ não depende de r. Assim, concluímos que

$$\omega(\rho) \leq k\rho^{-\alpha}\omega(r)$$

para $0 < \rho < r$, k constante e $\alpha > 0$. Desta desigualdade, concluímos que $\omega(\rho) \to 0$ quando $\rho \to \infty$, conforme desejávamos.

2. $M(r)$ e $\mu(r)$ decrescentes para $r > r_0$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim\limits_{r\to\infty} \mu(r) = 0$, pois $\mu(r)$ é decrescente e $u > 0$ para $r > r_0$. No caso geral, basta considerar $u - \lim\limits_{r\to\infty} \mu(r)$.
Consideremos o anel $\Omega = \{x : \frac{r}{2} < |x| < 2r\}$ e o compacto $\Omega' = \{x : |x| = r\}$.
Podemos aplicar a Desigualdade de Harnack para a função u, obtendo

$$\begin{aligned} \max_{|x|=r} u(x) &\leq c \min_{|x|=r} u(x) \\ M(r) &\leq c\mu(r), \end{aligned}$$

onde $c > 1$ não depende de r conforme observado no Capítulo 6.
Logo, $\omega(r) = M(r) - \mu(r) \leq c\mu(r) - \mu(r) = (c-1)\mu(r)$.
Tomando o limite para $r \to \infty$, temos

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \omega(r) \leq \lim_{r\to\infty} (c-1)\mu(r) = (c-1) \lim_{r\to\infty} \mu(r) = 0,$$

conforme desejávamos.

3. $M(r)$ e $\mu(r)$ crescentes para $r > r_0$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim\limits_{r\to\infty} M(r) = M$, pois $M(r)$ é limitada. Desta forma, temos que $M - u(x) > 0$ é solução positiva de (1.1).
Podemos então, aplicar a Desigualdade de Harnack para esta função no anel $\Omega = \{x : \frac{r}{2} < |x| < 2r\}$ e no compacto $\Omega' = \{x : |x| = r\}$, concluindo que

$$\begin{aligned} \max_{|x|=r}(M - u(x)) &\leq c \min_{|x|=r}(M - u(x)), \\ M - \mu(r) &\leq c(M - M(r)), \\ -\mu(r) &\leq (c-1)M - cM(r), \end{aligned}$$

onde $c > 1$ não depende de r.
Logo,

$$\omega(r) = M(r) - \mu(r) \leq M(r) + (c-1)M - cM(r) = (c-1)(M - M(r)).$$

Aplicando o limite para $r \to \infty$, temos

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \omega(r) \leq \lim_{r\to\infty} (c-1)(M - M(r)) = (c-1) \lim_{r\to\infty} (M - M(r)) = 0,$$

ou seja, $\lim\limits_{r\to\infty} \omega(r) = 0$.

Note que, $\omega(r) \to 0$ implica em $M(r) \to \mu(r)$ para $r \to +\infty$. Isto é, $\max\limits_{|x|=r} u(x) \to \min\limits_{|x|=r} u(x)$ para $r \to \infty$. Logo, $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)$ existe e o Teorema está provado.

$\square$

Corolário 7.2 *Se u é uma solução em $|x| > 1$, então a oscilação de u em $|x| = r$ tende ou para 0 ou para ∞.*

Prova: Sabemos que, para $1 < r < \infty$, $M(r)$ tem no máximo um mínimo relativo e $\mu(r)$ tem no máximo um máximo relativo.

Se $M(r)$ assume tal máximo em $r = t$ e $\mu(r)$ assume tal mínimo em $r = \tau$, então u é limitada, donde concluímos, pelo Teorema 7.2, que a oscilação tende para zero.

Se $M(r)$ assume tal máximo em $r = t$ e $\mu(r)$ assume tal mínimo em $r = \infty$, então $M(r)$ e $\mu(r)$ são decrescentes para $r > t$. Pelo ítem 2 do Teorema 7.2, a oscilação tende para zero.

Se $M(r)$ assume tal máximo em $r = \infty$ e $\mu(r)$ assume tal mínimo em $r = \tau$, então $M(r)$ e $\mu(r)$ são crescentes para $r > \tau$. Pelo ítem 3 do Teorema 7.2, a oscilação tende para zero.

Se $M(r)$ assume tal máximo em $r = \infty$ e $\mu(r)$ assume tal mínimo em $r = \infty$, então $M(r)$ é crescente e $\mu(r)$ é decrescente em $|x| > 1$. Pelo Teorema 7.1, a oscilação tende para infinito.

Portanto, a oscilação tende ou para zero ou para infinito.

$\square$

Capítulo 8

Superfícies Mínimas

Uma questão de interesse em geometria é estudar as superfícies de área mínima. Como caso particular, podemos destacar as superfícies mínimas que são gráficos de funções definidas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e que satisfazem uma condição prescrita na fronteira $\partial\Omega$. Mais precisamente, dada $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, procuramos $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ que minimiza o funcional área

$$A(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + \|Df\|^2}\, dx \tag{8.1}$$

e tal que $f = \varphi$ em $\partial\Omega$. Suponhamos que exista uma função $f_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ que minimize esta área. Com isso,

$$A(f_0 + \epsilon\phi) \geq A(f_0)$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e ϵ pequeno.

Assim,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{A(f_0+\epsilon\phi) - A(f_0)}{\epsilon} = \\
= \;& \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\int_\Omega \sqrt{1+\|(Df_0+\epsilon\phi)\|^2}dx - \int_\Omega \sqrt{1+\|Df_0\|^2}dx}{\epsilon} \\
= \;& \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon}\left[\int_\Omega \sqrt{1+\|Df_0\|^2 + 2\epsilon\left\langle Df_0, D\phi\right\rangle + \epsilon^2\|D\phi\|} - \sqrt{1+\|Df_0\|^2}dx\right] \\
= \;& \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon}\left[\int_\Omega \frac{2\epsilon\left\langle Df_0, D\phi\right\rangle + \epsilon^2\|D\phi\|}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2+2\epsilon Df_0\, D\phi+\epsilon^2\|D\phi\|} + \sqrt{1+\|Df_0\|^2}}\, dx\right] \\
= \;& \int_\Omega \frac{Df_0 D\phi}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}}\, dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{A(f_0 + \epsilon\phi) - A(f_0)}{\epsilon} = \int_\Omega \frac{\langle Df_0, D\phi \rangle}{\sqrt{1 + \|Df\|^2}}\, dx \leq 0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \frac{\langle Df_0, D\phi \rangle}{\sqrt{1 + \|Df_0\|^2}}\, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{8.2}$$

As soluções desta equação são analíticas em Ω pela teoria clássica de regularidade.

Sabemos que, para $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis e Ω domínio regular, valem:

$$\operatorname{div}(gG) = g \ \operatorname{div} G + \langle\, Dg, G \rangle \tag{8.3}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} G\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle G, n \rangle ds. \tag{8.4}$$

Assim, utilizando (8.3), (8.4) e (8.2) para $G = \phi \frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df\|^2}}$ e para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Omega} \langle \phi \frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}}, n \rangle\, ds = \int_\Omega \operatorname{div}\left(\phi \frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}}\right) dx \\
&= \int_\Omega \phi \operatorname{div}\left(\frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}}\right) dx + \int_\Omega \langle\, D\phi, \frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}} \rangle\, dx \\
&= \int_\Omega \phi \operatorname{div}\left(\frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}}\right) dx.
\end{aligned}$$

Como vale a igualdade acima para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\operatorname{div}\left(\frac{Df_0}{\sqrt{1+\|Df_0\|^2}}\right) = 0. \tag{8.5}$$

Reescrevendo a equação (8.5) utilizando a definição de divergente de uma função, encontramos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_{x_i}}{W}\right) = 0, \tag{8.6}$$

onde $W = \sqrt{1 + \|Df_0\|^2}$.

Concluímos que, se f_0 minimiza o funcional (8.1), então f_0 satisfaz a equação (8.6).

Para provarmos o próximo teorema vamos supor que a função $z = f(x)$, que minimiza a área em $|x| > 1$, seja dada e vamos analisar como se comporta o seu gráfico próximo ao infinito.

Teorema 8.1 *Se $z = f(x)$ é solução da equação* (8.6) para $|x| > 1$ e $\|Df\| < B$ para $|x| > 1$, então

$$\lim_{|x|\to\infty} f_{x_k}(x) = a_k, \quad \text{para} \;\; k = 1, 2, ..., n \quad \text{existe.}$$

Prova: Seja $z = f(x)$ solução da equação (8.6) para $|x| > 1$, tal que $\|Df\| < B$ para $|x| > 1$.

Para $k \in \{1, 2, ..., n\}$ fixo, podemos derivar a equação (8.6) em relação a variável x_k. Obtendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \quad \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_{x_i}}{W}\right)\right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f_{x_i}}{W}\right)\right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f_{x_i x_k} W - f_{x_i} W_{x_k}}{W^2}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Note que,

$$W_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{1 + \|Df\|^2}) = \frac{\langle\, Df, Df_{x_k}\rangle}{W} = \frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} f_{x_j} f_{x_k x_j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f_{x_i x_k} W}{W^2} - \frac{f_{x_i}}{W^3}\sum_{j=i}^{n} f_{x_j} f_{x_k x_j}\right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} f_{x_j x_k}\delta_{ij} - \frac{1}{W^3}\sum_{j=i}^{n} f_{x_i} f_{x_j} f_{x_k x_j}\right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f_{x_j x_k}\delta_{ij}}{W} - \frac{f_{x_i} f_{x_j} f_{x_k x_j}}{W^3}\right] &= 0 \\
\sum_{i,j=1}^{n} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\delta_{ij}}{W} - \frac{f_{x_i} f_{x_j}}{W^3}\right) f_{x_k x_j}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Para $A_{ij} = \left(\frac{\delta_{ij}}{W} - \frac{f_{x_i} f_{x_j}}{W^3}\right)$ e $u = f_{x_k}$, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] = 0. \tag{8.7}$$

Portanto, a função $u = f_{x_k}$ é solução de uma equação diferencial parcial da forma (1.1). Para que esta equação seja uniformemente elíptica, precisamos mostrar que existem $\lambda,\ \Lambda > 0$ tais que

$$\lambda\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \Lambda\|x\|^2,$$

onde $A = (A_{ij})$.

Afirmação: $\frac{1}{W^3}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \frac{1}{W}\|x\|^2$.
De fato,

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\left(\frac{\delta_{ij}}{W} - \frac{f_{x_i} f_{x_j}}{W^3}\right)x, x\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\frac{\delta_{ij}}{W} - \frac{f_{x_i} f_{x_j}}{W^3}\right)x_i x_j\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\frac{\delta_{ij}}{W}\right)x_i x_j\right] - \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\frac{f_{x_i} f_{x_j}}{W^3}\right)x_i x_j\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\frac{\delta_{ij}}{W}\right)x_i x_j\right] - \frac{1}{W^3}\sum_{i=1}^{n} f_{x_i} x_i \sum_{j=1}^{n} f_{x_j} x_j \\
&= \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{W^3}(\langle x, Df\rangle)^2 \\
&= \frac{1}{W}\|x\|^2 - \frac{1}{W^3}(\langle x, Df\rangle)^2.
\end{aligned}$$

Observamos que $(\langle x, Df\rangle)^2 \geq 0$ e $(\langle x, Df\rangle)^2 \leq \|x\|^2\|Df\|^2$.
Assim,

$$\langle Ax, x\rangle \leq \frac{1}{W}\|x\|^2$$

e

$$\langle Ax, x\rangle \geq \frac{1}{W}\|x\|^2 - \frac{1}{W^3}\|x\|^2\|Df\|^2 = \frac{1}{W^3}\|x\|^2.$$

Portanto, provamos que

$$\frac{1}{W^3}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \frac{1}{W}\|x\|^2. \tag{8.8}$$

Note que, para $x = Df$ vale a igualdade $\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{W^3}\|x\|^2$ e para qualquer $x \perp Df$, vale a igualdade $\frac{1}{W}\|x\|^2 = \langle Ax, x\rangle$. Portanto, mostramos que a equação (8.7) é uma equação uniformemente elíptica para $\Lambda = \frac{1}{W}$ e $\lambda = \frac{1}{W^3}$, e estes são autovalores de A.

Com isso, provamos que se f é uma superfície mínima em $|x| > 1$, com $\|Df\|$ limitado, a função $u = f_{x_k}$ é solução de uma equação uniformemente elíptica e pelo Teorema 7.2, temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \lim_{|x|\to\infty} f_{x_k}(x) = a_k \quad \text{constante.}$$

□

Deste teorema resulta que a superfície mínima para uma região da forma $|x| > 1$ se aproxima de um plano quando $|x| \to \infty$.

Corolário 8.1 *Se $f(x)$ está definida para todo x e $\|Df\| < B$ em $|x| > 1$, então $f(x)$ é linear, isto é, representa um hiperplano n-dimensional.*

Prova: Temos que $\|Df\|$ é limitada em $|x| > 1$. Disto, $|f_{x_k}|$ também é limitada em $|x| > 1$, pois $|f_{x_k}| \leq \|Df\|$. A função f é solução, logo Df é contínua. Como $|x| \leq 1$ é compacto, Df é limitada para $|x| \leq 1$. Usando isto e a hipótese, Df é limitada em R^n. O mesmo para f_{x_k}.

Na demonstração do Teorema (8.1), provamos que f_{x_k} é solução de uma equação elíptica em todo o espaço. Pelo corolário (7.1) aplicado a f_{x_k}, ou a oscilação de f_{x_k} cresce ou f_{x_k} é constante. Sendo f_{x_k} limitada, concluímos que f_{x_k} é constante.

Logo, Df é constante e f é linear, representando um hiperplano n-dimensional.

□

APÊNDICE

Teorema A.1 *Seja $u(x)$ integrável no cubo Q e suponhamos que exista uma constante ζ tal que para todo $Q' \subset Q$ temos,*

$$\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} |u - (u)_{Q'}| \, dx \leq \zeta,$$

onde $(u)_{Q'}$ é a média de u sobre Q'. Então, se S_σ é o conjunto dos pontos onde $|u - (u)_Q| > \sigma$, a medida $m(S_\sigma)$ satisfaz

$$m(S_\sigma) \leq \frac{A}{\zeta} \int_Q |u - (u)_Q| \, dx \cdot e^{-\alpha\sigma\zeta^{-1}} \quad \text{para } \frac{\sigma}{\zeta} \geq a,$$

onde $A \leq 1$, α, a são constantes positivas dependendo somente da dimensão n. Sendo $m(S_\sigma) \leq m(Q)$ segue que

$$m(S_\sigma) \leq e^{\alpha a} e^{-\alpha\sigma\zeta^{-1}} m(Q) \quad \text{para } \sigma > 0.$$

Como conseqüência,

$$\int_Q e^{\alpha\zeta^{-1}|u-(u)_Q|} \, dx \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} + e^{\alpha\beta} \right) m(Q).$$

REFERÊNCIAS

[1] L. Bers e L. Nirenberg, *On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane,* Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivative Parziali, Trieste, 1954, 141-167.

[2] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Lecture Notes, Department of Mathematics, University of California, Berkeley.

[3] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag, Berlin (1977).

[4] N. V. Krylov e M. V. Safonov, *An estimate of the probability that a diffusion process hits a set of positive measure,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 245 (1979), 253-255. Tradução para o inglês na Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 253-255.

[5] N. V. Krylov e M. V. Safonov, *Certain properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients,* Izvestia Akad. Nauk. SSSR 40 (1980), 161-175.

[6] F. John e L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation,* Comm. Pure Appl. Math., VOL.XIV (1961), 415-426.

[7] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577-591.

[8] J. Serrin, *On the Harnack inequality for linear elliptic equations,* J. Analyse Math, 4 (1955/56), 292-308.

[9] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations,* Acta Math., 111 (1964), 247-302.

[10] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations,* Comm Pure Appl. Math., 20 (1967), 721-747.