UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

RODRIGO DA CRUZ

ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES VIA TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

PORTO ALEGRE
2013

RODRIGO DA CRUZ

ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES VIA TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Virgínia Maria Rodrigues

PORTO ALEGRE

2013

RODRIGO DA CRUZ

ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES VIA TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Virgínia Maria Rodrigues

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Lúcia Helena Marques Carrasco – UFRGS

Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana – UFRGS

Profª. Drª. Virgínia Maria Rodrigues – UFRGS

Orientadora

Dedico este trabalho aos meus pais Adão Moisés da Cruz e Noelza Bento da Cruz e ao meu irmão Cristófer Rafael da Cruz, que sempre estiveram ao meu lado me dando forças e guiando meus passos.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Noelza Bento da Cruz, por sempre ter se esforçado para cuidar de mim, me dando carinho, me apoiando e me auxiliando nos momentos de maior necessidade.

Ao meu pai, Adão Moisés da Cruz, por sempre ter sido o maior incentivador para que eu estudasse, e por ter se comprometido a sua vida toda para me proporcionar o necessário para que isso acontecesse.

Ao meu irmão, Cristófer Rafael da Cruz, por todo o apoio e companheirismo dedicados a mim em todos esses anos.

À minha namorada, Tamara Versteg Vitali, por ser um dos motivos de eu querer sempre dar o melhor de mim, por me mostrar como uma pessoa pode tornar nosso dia mais feliz, por ser minha companheira inseparável e por ser minha melhor amiga e confidente.

Aos meus amigos, João Francisco Staffa da Costa, Leonardo Guerini de Souza, Luiz Lague Bachernitzan, Diego Fontoura Lima, Bruna Rigolli, Fernando Rodrigues de Oliveira e Thayner Gomes de Bona, pelos grupos de estudo, pelas festas, pelas conversas, pelas brincadeiras, por cada momento que passamos juntos durante esses anos de graduação.

À minha orientadora, Virgínia Maria Rodrigues, por me aceitar como seu orientando, pelas orientações durante a época de natal e ano novo, pelas mensagens e e-mails com instruções, por todo comprometimento que fez com que este trabalho pudesse ser finalizado.

A todas as pessoas que de certa forma contribuíram para que eu concluísse esta graduação e que não foram citadas aqui.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal verificar se a abordagem do conteúdo de multiplicação de matrizes, a partir da utilização de transformações geométricas, pode contribuir positivamente para incentivar o estudo e a aprendizagem desse assunto. Para isso foram realizados três encontros com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio em uma escola da rede privada de ensino de Porto Alegre, no segundo semestre letivo do ano passado. No primeiro e no terceiro encontros desta prática foram discutidas questões teóricas sobre o conteúdo em questão, enquanto que, no segundo encontro, foi utilizado o programa GeoGebra objetivando proporcionar aos alunos um meio de analisar o que acontece geometricamente quando multiplicamos matrizes que representam transformações geométricas. A metodologia escolhida para a realização da coleta de dados e organização estrutural do trabalho foi a Engenharia Didática, proposta por Michele Artigue. Este texto apresenta ainda conceitos e resultados básicos sobre matrizes e transformações geométricas, assim como a descrição dos encontros e a análise das perguntas e comentários feitos pelos alunos durante as atividades, a fim de obter dados que ajudem a avaliar se a prática realizada cumpriu os objetivos iniciais.

Palavras-chave: Multiplicação de Matrizes, Transformações Geométricas, Engenharia Didática, GeoGebra.

ABSTRACT

The main goal of this monography is to verify if the approach of teaching matrix multiplication by using geometric transformations can contribute positively to encourage students to study and learn this topic. For that reason we had three meetings with a High School junior class at a private school in Porto Alegre, during the second semester of last year. In the first and third meetings we have discussed theoretical questions about the subject, while in the second meeting we have used the software GeoGebra to provide the students a way to analize the geometric effect of multiplying matrices that represent geometric transformations. The methodology that was chosen for collecting data and structural organization of our work was Didactic Engineering, proposed by Michele Artigue. This essay also presents concepts and basic results about matrices and geometric transformations, as well as a description of the meetings and an analysis of the questions and comments the students have made during the activities, which allowed us to evaluate the classes.

Keywords: Matrix Multiplication, Geometric Transformations, Didactic Engineering, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como futuro professor de matemática, acredito ser fundamental o planejamento cuidadoso das aulas. Neste sentido, desde muito cedo no curso de Licenciatura em Matemática somos motivados a trazer elementos para a sala de aula que possam contribuir para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Desta forma, desenvolvemos uma quase necessidade de encontrar formas diferenciadas de tratar conteúdos. Conforme Miguel [11],

> [...] um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de ideias e de estabelecimentos de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade. (p. 376-377)

Assim, estamos em um processo contínuo de “aperfeiçoamento” das didáticas, exemplos, contextualizações e todo tipo de abordagem que decidimos utilizar em sala de aula.

Neste trabalho pretendemos estudar como o ensino de multiplicação de matrizes utilizando transformações geométricas pode contribuir para incentivar os alunos do Ensino Médio no estudo deste conteúdo, contribuindo para a sua aprendizagem.

A justificativa para a escolha deste tema tem base em uma experiência pessoal na disciplina de Estágio em Educação Matemática III, durante o segundo semestre letivo do ano de 2011. Nesta disciplina lecionamos para uma turma de segundo ano do Ensino Médio em uma Escola Pública da capital Gaúcha, onde precisamos ministrar o conteúdo de multiplicação de matrizes e não encontramos referências para justificar aos alunos por que o produto de duas matrizes não é realizado de maneira análoga à adição, mas sim multiplicando-se as linhas da primeira pelas colunas da segunda. Na ocasião também não encontramos nos livros recomendados pela professora titular da turma exemplos de aplicações do produto que pudessem ser resolvidos pela turma. Além disso, observamos, em vários momentos durante as aulas, que os alunos se apresentaram desmotivados em relação ao conteúdo, pois afirmaram que estavam apenas realizando os cálculos como estava sendo pedido, mas não sabiam nem o porquê nem para que estavam fazendo aquilo.

Acreditamos que é importante que o professor saiba justificar aos alunos as razões pelas quais eles devem aprender certo conteúdo na escola, motivando-os, desta forma, a aprender, o que certamente contribuiria para apresentarem um maior rendimento na disciplina que estão estudando.

Com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma maior motivação ao estudo de multiplicação de matrizes, buscando justificar a maneira como esta operação é definida, elaboramos atividades de ensino-aprendizagem que foram executadas ao longo de três encontros que estão descritos no capítulo 4. No primeiro encontro apresentamos aos alunos conceitos básicos de matrizes, no segundo encontro realizamos atividades no laboratório de informática, elaboradas para mostrar a representação via composição de transformações geométricas do produto de matrizes, e um terceiro encontro para fixar esta ideia e definir o produto de matrizes a partir da composição das transformações que as matrizes representam.

No capítulo 2 analisamos o ensino de multiplicação de matrizes utilizando alguns livros didáticos de Ensino Médio indicados pelo professor regente da turma na qual a proposta foi aplicada e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), disponibilizados na página do MEC.

No capítulo 3 apresentamos conceitos matemáticos básicos sobre matrizes e transformações, que fundamentam a base teórica da proposta de ensino-aprendizagem que foi realizada.

No capítulo 4, além de relatarmos as atividades de ensino-aprendizagem que foram aplicadas, fazemos uma análise das aulas e do que foi percebido durante a prática, utilizando como base metodológica a Engenharia Didática proposta por Michele Artigue.

No quinto capítulo são apresentadas as considerações finais, incluindo os pontos que poderiam ser modificados para melhorar as atividades de multiplicação de matrizes relatadas neste trabalho.

2 ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Com o objetivo de conhecer a realidade do ensino de multiplicação de matrizes, buscamos em documentos oficiais o embasamento legal que deve direcionar o planejamento e as ações pedagógicas dos docentes nas diversas áreas de conhecimento que compõem o currículo da Educação Básica no Brasil. Em particular focamos nossa busca em documentos oficiais da área da Matemática e suas Tecnologias, sobretudo no que se refere ao ensino de álgebra na Educação Básica, na medida em que o nosso trabalho aborda as operações com matrizes, que estão contempladas dentro desta grande área da matemática. Além disso, consultamos livros didáticos do Ensino Médio, procurando saber se há uma preocupação por parte dos autores em apresentar o conteúdo de forma diferenciada e/ou motivadora.

Neste capítulo, estudaremos ainda um pouco da história do produto de matrizes e descreveremos brevemente uma proposta de utilização de transformações geométricas para o ensino deste assunto, conforme apresentado em [13].

2.1 ALGUMAS ORIENTAÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA SEGUNDO OS PCN'S

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) [3, p. 20]:

> Os estudos nessa área devem levar em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de ***aspectos do real*** e que é instrumento formal de expressão e ***comunicação para diversas ciências***. (grifo nosso)

Como citado acima, percebemos que construir uma proposta didática que aborde a multiplicação de matrizes, não somente nos seus aspectos analíticos, mas que leve em consideração o entendimento dos motivos por trás da forma como ela é definida, serve justamente para fazer esta aproximação da matemática com a realidade e suas aplicações. Neste sentido, é possível verificar que o uso de transformações geométricas para o ensino de matrizes, como descrevemos no capítulo 4, permite uma aproximação entre a matemática e as outras áreas do conhecimento, como a informática, por exemplo, em que as transformações geométricas são amplamente utilizadas na computação gráfica.

Nas experiências de docência, observamos que alguns professores tendem a não mudar algumas metodologias de ensino, não inovando na utilização de recursos, técnicas ou estratégias de abordagem, baseando-se apenas no que está exposto nos livros didáticos. De fato, conforme recomendações dos PCN's [3, p.22]:

> Conhecimentos selecionados a priori tendem a se perpetuar nos rituais escolares, sem passar pela crítica e reflexão dos docentes, tornando-se, desta forma, um acervo de conhecimentos quase sempre esquecidos ou que não se consegue aplicar, por se desconhecer suas relações com o real.

Acreditamos que não é preciso desconsiderar as abordagens dos autores ou remodelar completamente a prática de ensino nas escolas. Todas as concepções de matemática bem como de seu ensino contribuíram para o avanço desta ciência, para que ela estivesse como a conhecemos hoje. O que defendemos aqui é que é possível avançar, apontando, por exemplo, uma nova abordagem para o ensino de matrizes.

2.2 ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES SEGUNDO LIVROS DIDÁTICOS

Com o objetivo de conhecer o modo como alguns autores abordam o conteúdo de matrizes, principalmente de multiplicação de matrizes, fizemos a análise de três livros didáticos, indicados pelo professor titular da turma na qual aconteceu a prática deste trabalho. Os livros utilizados para esta análise foram os seguintes:

1) Matemática: construção e significado, coordenado por José Luiz Pastore Mello, publicado pela editora Moderna em 2005. [10]
2) Aprender e Aplicar Matemática, de Antônio dos Santos Machado, publicado pela editora Atual em 2011. [9]
3) Matemática: Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante, publicado pela editora Ática também em 2011. [5]

Iniciando a análise das obras, vimos que no livro 1 o autor apresenta um quadro listando os objetivos do capítulo de matrizes e determinantes como sendo:

- Identificar e classificar uma matriz.
- Operar com matrizes.
- Determinar as matrizes oposta e inversa.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.

Das obras pesquisadas, esta é a única que apresenta explicitamente as capacidades que deseja que os alunos desenvolvam ao longo do estudo do capítulo.

Antes de começar a apresentação do conteúdo o autor justifica a utilização de matrizes fazendo referência a tabelas. Para isso ele utiliza dois exemplos de tabelas que podem aparecer com frequência no dia-a-dia: uma delas apresenta as informações nutricionais de alguns alimentos e a outra mostra uma análise sobre animais herbívoros e carnívoros.

Em seguida, é dada a definição de matriz e alguns exemplos de matrizes numéricas, apresentando as diferentes maneiras como elas podem ser representadas. No decorrer do capítulo é apresentada a igualdade de matrizes, seguida de quatro tipos especiais de matrizes: *matriz quadrada*, *matriz transposta*, *matriz nula* e *matriz identidade*.

As operações com matrizes aparecem do mesmo modo: primeiro é dada a definição e em seguida alguns exemplos e propriedades. A multiplicação de matrizes é a única operação que tem uma referência de utilização no cotidiano. Para isto o autor utiliza um par de tabelas em que a primeira apresenta preços por unidades de determinados produtos e a segunda apresenta a quantidade comprada de cada um deles. Para obter o preço final gasto com cada produto, é feita a multiplicação das matrizes destas duas tabelas. Após este exemplo é apresentada a definição de multiplicação de matrizes, seguida de exemplos e propriedades. Após o produto de matrizes é definida *matriz inversa*, são dados exemplos e exercícios e inicia-se a parte de determinantes.

No livro 2, Machado inicia a apresentação de matrizes através de uma tabela. É feita uma pergunta sobre os dados desta tabela, buscando desta forma mostrar como se efetua a localização de um determinado elemento dentro dela, então é feita uma pergunta buscando comparar dados de diferentes colunas da tabela.

Após a apresentação da tabela e das atividades acima, ele define matriz e apresenta alguns exemplos de matrizes de diferentes ordens. Então é apresentada a definição de *matriz quadrada* seguida da notação para os elementos de uma matriz. As definições de *igualdade matricial* e *matriz transposta* aparecem depois de alguns exercícios. É percebido que Machado não se preocupa em dividir o conteúdo em subseções, como foi feito no livro 1, no qual o autor primeiro apresenta as matrizes especiais, suas definições e exemplos, e após define as operações.

Para introduzir a adição de matrizes, são utilizadas duas tabelas a partir das quais se deseja obter uma terceira, cujas entradas são as somas das respectivas entradas das duas tabelas iniciais. Após motivar a adição de matrizes com este exemplo, é dada a definição de adição e logo em seguida alguns exemplos e propriedades desta operação. Do mesmo modo como foi introduzida a adição de matrizes é feita a multiplicação de uma matriz por um escalar: primeiro é apresentado um exemplo real de utilização da operação para depois ser definida. Então são apresentadas as propriedades da multiplicação por escalar e por fim alguns exemplos.

Para introduzir a multiplicação de matrizes, Machado utiliza dois exemplos do cotidiano. O primeiro contém duas pequenas tabelas, uma com os preços por unidade de dois produtos, distribuídos em uma linha e duas colunas, e a outra tabela com as quantidades destes produtos, apresentadas em duas linhas e uma coluna. Machado faz o produto entre as matrizes das tabelas multiplicando a linha da primeira pela coluna da segunda, e afirma que o resultado representa o gasto total para se comprar as quantidades apresentadas de cada produto levando em conta o preço fornecido.

O segundo exemplo é sobre um concurso público. É apresentada uma matriz com os nomes de três participantes do concurso e seus respectivos acertos em cada uma das provas, e mais duas matrizes que representam o peso de cada questão, dado que existem dois cargos diferentes neste concurso. Ele faz uma análise destas tabelas perguntando qual dos três participantes teve melhor desempenho para um dos cargos e depois perguntando qual foi melhor para o outro cargo, e diz que o resultado final de cada participante é dado fazendo a multiplicação da matriz com os acertos em cada prova pela matriz que contém o peso de cada questão, conforme o cargo desejado. Como os participantes têm quantidades diferentes de acertos nas provas, torna-se necessário fazer seis multiplicações matriciais para obtermos os resultados finais de cada um, de modo a comparar os desempenhos.

Após estes exemplos introdutórios, Machado apresenta a multiplicação de linhas por colunas como a maneira de calcular o produto entre duas matrizes, apresentando também as condições para que se possa multiplicar duas matrizes e como se determina a ordem da matriz resultante do produto. Após vários exercícios, são discutidas as propriedades de comutatividade, associatividade e distributividade da multiplicação de matrizes. Para concluir ele apresenta outros tipos de matrizes especiais, assim como o tópico de potências de uma matriz quadrada.

No livro 3, antes de entrar na apresentação do conteúdo, Dante cita um exemplo prático de matrizes: ele afirma que um monitor de um aparelho de televisão que possui uma resolução de 800x600[1] é uma matriz com oitocentas colunas e seiscentas linhas, em que as cores colocadas em cada uma das entradas formam as imagens que são transmitidas na tela. Além disso, Dante menciona que matrizes podem também ser utilizadas em bancos de dados

---

[1] Note que 800x600 é o tamanho da matriz da tela, mas é representada pela notação (Largura)X(Altura), logo, o número de colunas da matriz é 800 (largura) e o número de linhas é 600 (altura).

na área da informática, porém fornece apenas esta informação, sem mais detalhes sobre isso. Ele também apresenta um pouco da história deste conteúdo, falando sobre as primeiras aparições da representação de conjuntos em forma de matriz.

Ao iniciar o estudo de matrizes, Dante utiliza, também, uma tabela para ilustrar o uso de matrizes no dia-a-dia ao transformar os dados contidos nesta em uma matriz. Depois deste exemplo introdutório ele apresenta a definição de matriz e dá alguns exemplos. Em seguida, ele mostra como representamos uma matriz de ordem *m*x*n* e seus elementos genericamente. Continuando, é feita a apresentação de "matrizes especiais", definindo e apresentando exemplos, por fim chegando às operações com matrizes.

Ele inicia a apresentação da adição de matrizes com um exemplo não contextualizado[2]: apenas escolhe duas matrizes de ordem 2x3 e soma as duas, definindo em seguida a operação de adição de matrizes. Após são dadas as propriedades da adição e alguns exemplos. Para falar em multiplicação de uma matriz por um escalar também não é dado um exemplo de uso no cotidiano, apenas um exemplo numérico seguido da definição e de propriedades.

Na multiplicação de matrizes, assim como Machado, Dante utiliza um exemplo com tabelas para fazer uma contextualização. O exemplo é composto por uma tabela com a quantidade de vitórias, empates e derrotas de quatro times de futebol e por uma tabela que contém a pontuação de cada vitória, empate e derrota. Ele multiplica as linhas da primeira tabela pelas colunas da segunda tabela para obter o total de pontos alcançado por cada time, exemplificando assim o modo como será definida a multiplicação de matrizes. Após este exemplo são apresentados mais alguns exemplos numéricos, e em seguida a condição para multiplicar matrizes assim como a ordem da matriz resultante.

Ao finalizar o conteúdo de matrizes, como último item deste capítulo de seu livro, Dante aborda o assunto *transformações geométricas* de forma rápida, fazendo menção ao exemplo sobre resoluções de monitores de TV's, utilizado na introdução do capítulo, como exemplo introdutório para falar em computação gráfica. Após introduzir o assunto ele define as matrizes que fazem rotações, translações e escalas (dilatações/reduções) e ilustra com exemplos. Depois disso, ele fala sobre composição de transformações geométricas utilizando *coordenadas homogêneas*, em que um ponto (x, y) é representado pela matriz-coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Então ele explica que para compor transformações utilizando as coordenadas homogêneas:

[2] Consideramos contextualização como a utilização de um exemplo que ilustre uma situação do cotidiano.

“basta multiplicar o ponto original pela sequência inversa das transformações que afetarão o(s) ponto(s)” [5, p.115], e em seguida dá um exemplo para finalizar a seção de transformações.

Analisando as abordagens das obras citadas acima, percebemos que há uma certa preocupação em fazer com que o aluno entenda a razão de se multiplicar matrizes operando linhas da primeira com colunas da segunda, porém os exemplos das três obras utilizam a mesma estratégia para introduzir o assunto: são apresentadas duas tabelas e é pedido para que as informações das mesmas sejam cruzadas, resultando em uma terceira tabela. Desta forma, mesmo que as informações de cada tabela sejam diferentes, o contexto em que elas são utilizadas é o mesmo, o que nos mostra uma tendência na abordagem desse conteúdo. E apesar de ser apresentada uma motivação para a multiplicação de matrizes, não é apresentada em nenhuma das obras a razão pela qual o produto de matrizes é definido desta maneira.

Dante é o único dos autores consultados que apresenta transformações geométricas em sua obra, mesmo que apenas no final do capítulo, em uma seção intitulada “Aplicações de matrizes”. Porém, o fato de ele ter apresentado as transformações, mesmo que rapidamente, nos mostra que é possível utilizarmos esta abordagem para “ensinar” multiplicação de matrizes, o que poderia se tornar mais uma referência para o ensino deste conteúdo.

2.3 O USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Como mencionamos na seção anterior, Dante [5] contempla o capítulo sobre matrizes com uma seção sobre transformações geométricas, assim como propomos neste trabalho. Entretanto, neste trabalho incentivamos a utilização das transformações como elemento principal para o ensino da multiplicação de matrizes, como método alternativo à utilização das tabelas, que vêm sendo utilizadas por diversos autores como único meio de contextualização para abordagem desse assunto.

Segundo Possani [12], o estudo do produto matricial a partir de transformações geométricas refaz o processo histórico da formalização desta operação:

> Tradicionalmente ensinamos Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares nessa ordem, o que é razoável do ponto de vista lógico, mas é bom observar que historicamente as coisas não se passaram assim. [...] O nome “determinante” foi utilizado pela primeira vez por Cauchy em 1812 [...]. As matrizes já aparecem mais

> tarde! Até então não se falava em determinante de uma matriz, mas em determinante do sistema de equações. (POSSANI [12], 1992, p. 35)

Ainda, segundo o autor, o conceito de matriz apareceu em 1858, num trabalho de Cayley sobre transformações do “plano ℝ² em si próprio”, do tipo

$$T(x; y) = (ax + by; cx + dy),$$

que podem ser vistas como mudanças de variáveis:

$$T: \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}.$$

Assim, considerando duas mudanças de variáveis:

$$T_1: \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \quad \text{e} \quad T_2: \begin{cases} r = Au + Bv \\ s = Cu + Dv \end{cases},$$

podemos expressar r e s em termos de x e y substituindo as expressões T_1 em T_2, obtendo:

$$\begin{cases} r = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ s = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}.$$

Desta maneira, segundo Possani, Cayley chamou a tabela $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de “matriz de T_1” e a tabela $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de “matriz de T_2” e percebeu que multiplicando a matriz de T_2 pela matriz de T_1, nesta ordem, da maneira como fazemos até hoje,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix},$$

(ibid, p. 36)

obteria a matriz que fornece r e s em termos de x e y.

Conforme Possani, as operações de adição matricial e multiplicação por escalar vieram depois do produto de matrizes.

É possível observar que muitos professores desconhecem a história das operações com matrizes e por isso não sabem as razões que justificam a forma como a multiplicação de matrizes é definida. Desta forma, assim como Stormowski [13], buscamos utilizar transformações geométricas para apresentar esta operação aos alunos, justificando a principal dúvida que tivemos ao lecionar este assunto: por que o produto de matrizes não é feito da mesma forma que a adição, multiplicando termo a termo?

Em seu trabalho, Stormowski [13] refaz o processo utilizado por Cayley, definindo o produto de matrizes utilizando transformações geométricas vistas como mudanças de variáveis. A abordagem que apresentaremos aqui utiliza a definição de transformação como função, definindo multiplicação de matrizes a partir da composição de funções.

Em seu trabalho, Stormowski [13] utiliza vários programas computacionais na execução de suas atividades, que vão desde a visualização de transformações até a obtenção de fractais. Nosso trabalho foi todo elaborado utilizando apenas o programa GeoGebra [15]. A escolha deste programa é baseada, principalmente, no fato dele possuir os recursos necessários para que os alunos possam multiplicar matrizes e tenham uma representação tanto algébrica quanto geométrica dos resultados obtidos. Além disso, o GeoGebra é um *software* livre e de fácil instalação.

3 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos de matrizes e de transformações lineares e geométricas, fundamentais para o ensino de multiplicação de matrizes utilizando essas transformações. Os resultados que apresentaremos neste capítulo foram adaptados das obras de Braga et al. [1], Boldrini et al. [2], de Berg et al. [6], Anton et al.[7] e Lay [8].

3.1 MATRIZES

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Dizemos que uma matriz com *m* linhas e *n* colunas tem ordem (ou tamanho) mxn.

Exemplo: Podemos escrever a tabela abaixo na forma matricial, bastando suprimir as legendas e deixar apenas os dados numéricos.

Série	**Exames 1º trimestre**	**Exames 2º trimestre**	**Exames 3º trimestre**
1º ano	15	18	11
2º ano	13	11	8
3º ano	4	7	3

Tabela 1 - Total de alunos por série em recuperação ao final de cada trimestre

(Dados criados pelo autor)

Assim, obtemos a matriz de ordem $3x3$:

$$\begin{bmatrix} 15 & 18 & 11 \\ 13 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar uma matriz A de ordem mxn na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{mxn},$$

na qual a_{ij} representa o elemento da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna de A.

Exemplo: Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2x3}$, o elemento que está na segunda linha e terceira coluna é 6, isto é, $a_{23} = 6$.

É comum utilizarmos letras maiúsculas para representar matrizes e letras minúsculas para representar os elementos.

Igualdade de Matrizes

Definição: Dizemos que duas matrizes A e B são *iguais*, e escrevemos $A = B$, se elas possuem a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplo: As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ de ordem 2x2 são iguais se e somente se $x = 3$.

3.1.1 Tipos especiais de matrizes

Algumas matrizes, que aparecem frequentemente na prática, apresentam características ou propriedades que as destacam no universo das matrizes, e por isto recebem nomes especiais. Listamos a seguir algumas delas.

- *Matriz Nula*: é uma matriz na qual todos os elementos são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, para todo *i* e *j*.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz Coluna*: é uma matriz que possui apenas uma coluna.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz Linha*: é uma matriz que possui apenas uma linha.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz Quadrada*: é uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Em uma matriz quadrada de ordem *n* (isto é, uma matriz de ordem *nxn*), dizemos que os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a *diagonal principal* da matriz.

- *Matriz Diagonal*: é uma matriz quadrada em que os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz Simétrica*: é uma matriz quadrada em que os elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo *i* e *j*.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- *Matriz Identidade*: é uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal valem um e os elementos fora desta diagonal são nulos, isto é,

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & i = j \\ a_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1.2 Operações com matrizes

Consideremos as tabelas 1 e 2 abaixo:

Produto	1° trimestre
Camiseta	100
Calça	50
Moletom	60
Pares de meias	150

Tabela 2 - Produção de uma fábrica de roupas no primeiro trimestre de 2012

(Dados criados pelo autor)

Produto	2° trimestre
Camiseta	125
Calça	110
Moletom	60
Pares de meias	175

Tabela 3 - Produção de uma fábrica de roupas no segundo semestre de 2012

(Dados criados pelo autor)

Suponhamos que queremos saber a quantidade total de cada tipo de peça de roupa que foi produzida nos dois primeiros trimestres de 2012. Para solucionar problemas como este, torna-se necessária a definição de uma operação que envolva a soma das respectivas entradas de cada uma das tabelas, como veremos a seguir.

Adição de Matrizes

Definição: A *adição* (ou *soma*) de duas matrizes de mesma ordem, $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, é uma matriz de ordem mxn, denotada por $A + B$, cujos elementos são obtidos somando os elementos correspondentes de A e B. Assim,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}.$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

A adição de matrizes possui as mesmas propriedades que a adição de números reais.

Propriedades: Sejam A, B e C matrizes de ordem mxn. Então:

1. $A + B = B + A$ *(comutatividade)*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associatividade)*
3. $A + 0 = A$, em que 0 é a matriz nula de ordem mxn.

Multiplicação por Escalar

Definição: Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e k um número real. A *multiplicação de A pelo escalar k* é a matriz de ordem *mxn*, denotada por *kA*, obtida multiplicando-se todos os elementos de *A* por k. Assim,

$$kA = [ka_{ij}]_{mxn}.$$

Exemplo:

$$2\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Propriedades: Sejam A e B matrizes de ordem mxn e $k, l \in \mathbb{R}$. Então:

1. $k(A + B) = kA + kB$
2. $(k + l)A = kA + lA$
3. $0A = 0_{mxn}$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz, obteremos a matriz nula.
4. $k(lA) = (kl)A$

Multiplicação de Matrizes

Definição: Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{nxp}$. O *produto de A e B é a matriz de ordem mxp*, $AB = [c_{ij}]_{mxp}$, em que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

ou seja, o elemento da linha i e coluna j de AB é obtido somando-se os produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna j de B.

Observação:

O produto de duas matrizes só está definido quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda. Além disso, a matriz resultante tem ordem mxp, em que m é o número de linhas da primeira matriz e p é o número de colunas da segunda.

Exemplos:

$1)$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2.(-1)+1.4 & 2.2+1.1 \\ 4.1+2.0 & 4.(-1)+2.4 & 4.2+2.1 \\ 5.1+3.0 & 5.(-1)+3.4 & 5.2+3.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 10 \\ 5 & 7 & 13 \end{bmatrix}.$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+(-1).4+2.5 & 1.1+(-1).2+2.3 \\ 0.2+4.4+1.5 & 0.1+4.2+1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 21 & 11 \end{bmatrix}.$

3) Se $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, então o produto AB não está definido, pois o número de colunas de A é diferente do número de linhas de B. Entretanto,

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+5.(-1) \\ 2.2+(-3).(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar, pelos exemplos acima, que o produto de matrizes não é comutativo.

Propriedades: Sejam A, B e C matrizes tais que os produtos abaixo estejam definidos e seja $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $AI = IA = A$, em que I é a matriz identidade.
2. $A(B+C) = AB + AC$ *(distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição)*
3. $(A+B)C = AC + AB$ *(distributividade à direita da multiplicação em relação à adição)*
4. $(AB)C = A(BC)$ *(associatividade)*
5. $0A = 0$ e $A0 = 0$, em que 0 é uma matriz nula

6. $A(kB) = k(AB)$

Transposição

Definição: Se A=$[a_{ij}]$ é uma matriz de ordem *m*x*n*, então a *matriz transposta* de *A*, denotada por A^T, é a matriz de ordem *n*x*m* cujas linhas são as colunas correspondentes de *A*, ou seja, a primeira linha de A^T é a primeira coluna de *A*, a segunda linha de A^T é a segunda coluna de *A*, etc. Assim,

$$A^T = \left[b_{ij}\right]_{nxm}, \text{ em que } b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemplos:

1) Se $A = [1 \quad 3 \quad -5]$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

2) Se $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

3.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto formado por todas as *n*-uplas de números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

chamado de *espaço n-dimensional*. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são usualmente chamados de *vetores*. Por conveniência, algumas vezes um vetor $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ será representado como um *vetor-coluna* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Definição: Uma de *transformação* T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é uma função que associa a cada vetor **u** de $\mathbb{R}^n$ um vetor T(**u**) de $\mathbb{R}^m$.

Exemplo:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$. Para $\mathbf{u} = (-1, 3)$, $T(\mathbf{u}) = (-2, 6)$.

Definição: Se A é uma matriz de ordem mxn, dizemos que a transformação T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, definida por $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, em que $\mathbf{u}$ é um vetor-coluna de $\mathbb{R}^n$, é uma *transformação matricial.*

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Então $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y \\ 3x + 5y \end{bmatrix}$, ou seja, T é a transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - 3y, 3x + 5y)$.

Definição: Dizemos que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma *transformação linear* se $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\ c \in \mathbb{R}$ as duas propriedades abaixo são satisfeitas:

a) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$
b) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$,

Teorema: Toda transformação matricial é uma transformação linear.

Demonstração: Seja $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação definida por $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, em que A é uma matriz de ordem mxn. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores-coluna de $\mathbb{R}^n$ e c é um escalar qualquer, então, pelas propriedades da multiplicação de matrizes,

$$T_A(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = cT_A(\mathbf{u})$$

e

$$T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v}).$$

Portanto, a transformação matricial T_A é linear. ■

Teorema: Toda transformação linear é uma transformação matricial, ou seja, se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, então existe uma matriz A de ordem mxn tal que $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, para todo vetor $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Então podemos escrever

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n},$$

em que

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Assim, se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, obtemos

$$T(\mathbf{u}) = T(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}) = x_1T(\boldsymbol{e_1}) + x_2T(\boldsymbol{e_2}) + \dots + x_nT(\boldsymbol{e_n}).$$

Seja A a matriz cujas colunas são os vetores-coluna $T(\boldsymbol{e_1}), T(\boldsymbol{e_2}), \dots, T(\boldsymbol{e_n})$, ou seja,

$$A = [T(\boldsymbol{e_1})\ \ T(\boldsymbol{e_2})\ \ \dots\ \ T(\boldsymbol{e_n})].$$

Então,

$$A\mathbf{u} = [T(\boldsymbol{e_1})\ T(\boldsymbol{e_2})\ \ \dots\ \ T(\boldsymbol{e_n})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1T(\boldsymbol{e_1}) + x_2T(\boldsymbol{e_2}) + \dots + x_nT(\boldsymbol{e_n}) = T(\mathbf{u}).$$

Portanto, T é uma transformação matricial. ■

A matriz A definida na demonstração acima é chamada de *matriz canônica* da transformação T.

Estamos particularmente interessados na relação entre a multiplicação de matrizes e a composição de transformações lineares, como veremos a seguir.

Dadas duas transformações lineares, $T_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $T_2: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, a composição de T_2 e T_1, denotada por $T_2 \circ T_1$, é a transformação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ definida por

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2\big(T_1(\mathbf{u})\big).$$

Teorema: A composição de duas transformações lineares é uma transformação linear.

Demonstração: Sejam $T_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $T_2: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ transformações lineares, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores quaisquer em $\mathbb{R}^n$ e c um escalar. Então,

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T_2\big(T_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})\big) = T_2\big(T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v})\big) \\ &= T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2\big(T_1(\mathbf{v})\big) \\ &= (T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) + (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

e

$$(T_2 \circ T_1)(c\mathbf{u}) = T_2(T_1(c\mathbf{u})) = T_2\big(cT_1(\mathbf{u})\big) = cT_2\big(T_1(\mathbf{u})\big) = c(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}). ■$$

Agora vamos considerar como a matriz canônica da composição de duas transformações lineares está relacionada com as matrizes canônicas das transformações individuais. Para isso, sejam $[T_1]$ a matriz canônica de $T_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $[T_2]$ a matriz canônica de $T_2: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Assim, para cada um dos vetores-coluna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ de $\mathbb{R}^n$ definidos em (1), temos;

$$(T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{e}_i) = T_2(T_1(\boldsymbol{e}_i)) = T_2([T_1]\boldsymbol{e}_i) = [T_2]([T_1]\boldsymbol{e}_i) = ([T_2][T_1])\boldsymbol{e}_i,$$

o que implica que a i-ésima coluna da matriz canônica de $T_2 \circ T_1$ é o produto $([T_2][T_1])\boldsymbol{e}_i$, para $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, é fácil observar que o resultado da multiplicação de uma matriz pelo vetor-coluna $\boldsymbol{e}_i$ é exatamente a i-ésima coluna dessa matriz. Logo, para i de 1 até n, o produto $([T_2][T_1])\boldsymbol{e}_i$ é a i-ésima coluna da matriz $[T_2][T_1]$.

Consequentemente,

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1].$$

Ou seja, a matriz da transformação composta $T_2 \circ T_1$ é o produto da matriz de T_2 pela matriz de T_1, nessa ordem.

3.3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

A *Computação Gráfica* (veja [6]) preocupa-se com a criação de imagens de “cenas modeladas” em uma tela de computador, numa impressora, ou em outro dispositivo de saída. As cenas variam de simples desenhos a duas dimensões – linhas, polígonos e outros objetos primitivos – a objetos tridimensionais incluindo fontes de luz, texturas e assim por diante. Em particular, a habilidade de rotacionar, transladar, dilatar ou projetar (entre outros movimentos) o conjunto de pontos que forma um objeto no computador é, em muitos casos, fundamental para o entendimento do mesmo.

As transformações geométricas mais usuais são as ampliações, reduções, translações, rotações, reflexões e projeções. Algumas dessas são *transformações lineares*, outras não, como as translações, que apesar de não serem lineares são igualmente importantes para a Computação Gráfica.

Neste trabalho, consideramos apenas transformações geométricas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, cujos “efeitos” podem ser facilmente visualizados, além de, no caso das lineares, serem representadas por matrizes quadradas de ordem 2, como vimos na seção 3.2, o que facilita a sua manipulação pelos alunos.

3.3.1 Ampliações e reduções

As *ampliações (ou reduções) uniformes* são transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$T(x,y) = (\alpha x,\ \alpha y),$$

em que α é um número real positivo, $\alpha \neq 1$. Em forma matricial:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Quando $\alpha > 1$ temos uma *ampliação* (ou *dilatação*) e quando $0 < \alpha < 1$ temos uma *redução* (ou *contração*).

Exemplo: Consideremos a dilatação uniforme de fator 2, definida por $T(x,y) = (2x, 2y)$, e um quadrado de lado 1, ilustrado na figura a seguir.

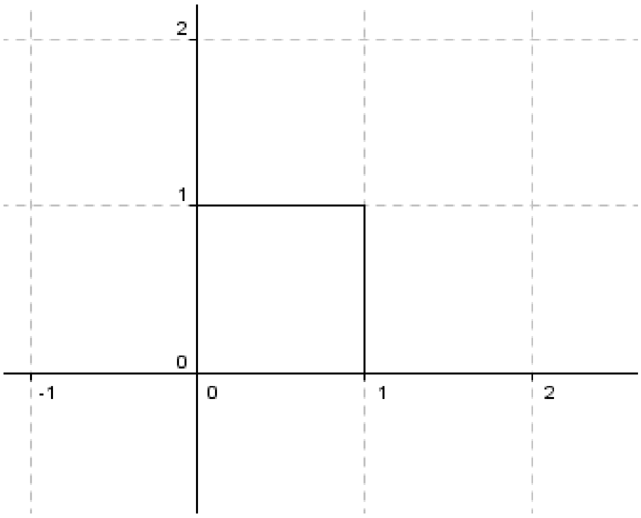


Figura 1 - Quadrado de lado 1

(Dados criados pelo autor)

Ao aplicarmos a transformação T nos vértices deste quadrado, obtemos um quadrado de lado 2, representado na figura abaixo:

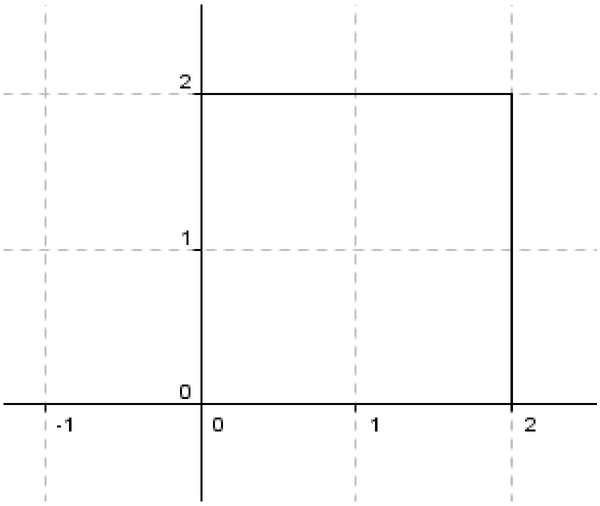


Figura 2 - Quadrado de lado 2 (Dados criados pelo autor)

3.3.2 Reflexões

As *reflexões* são transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$T(x, y) = (\alpha x,\ \beta y),$$

em que α e β valem 1 ou -1, pois as reflexões não geram "deformações" na figura transformada. Em forma matricial:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Desta forma, ao variarmos os valores de α e β, obtemos as seguintes reflexões:

α	β	Transformação	Matriz
1	-1	Reflexão em torno do eixo x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
-1	1	Reflexão em torno do eixo y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
-1	-1	Reflexão em torno da origem	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Tabela 4 - Tabela das reflexões

(Dados criados pelo autor)

Exemplos:

Consideremos a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, -y)$, e o triângulo representado na figura abaixo:

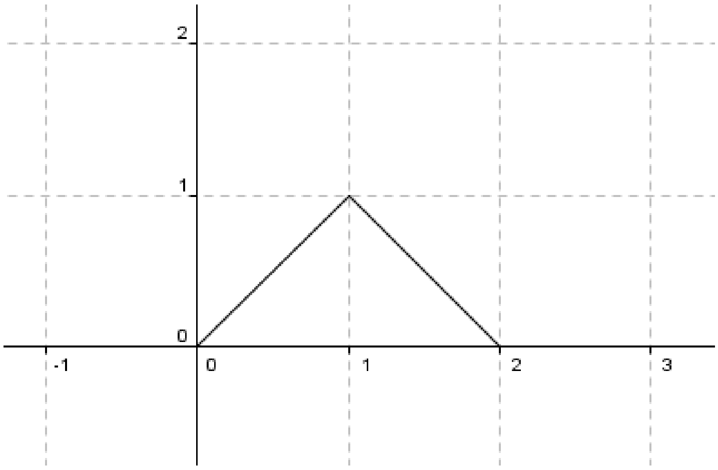


Figura 3 – Triângulo (Dados criados pelo autor)

Ao aplicarmos a transformação T nos vértices do triângulo, ele sofre uma reflexão sobre o eixo *x*, como mostramos abaixo:

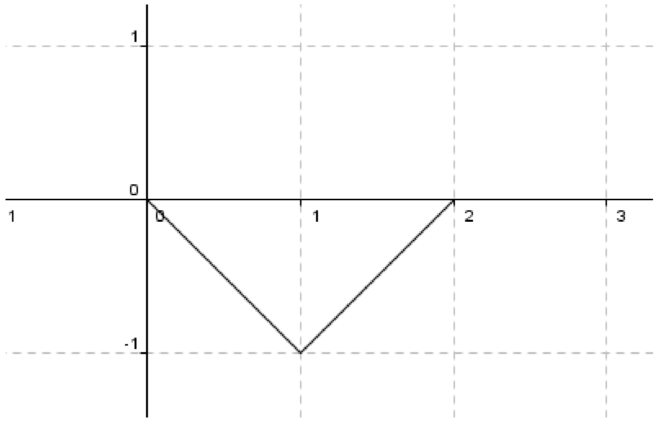


Figura 4 - Triângulo refletido em torno do eixo x

(Dados criados pelo autor)

Por outro lado, se aplicarmos a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-x, y)$ no triângulo da figura 3, ele sofre uma reflexão em torno do eixo *y*, como ilustrado abaixo:

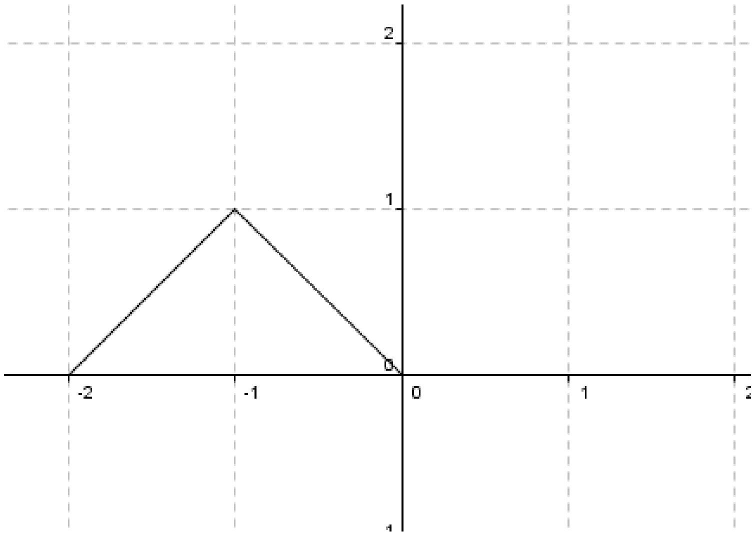


Figura 5 - Triângulo refletido em torno do eixo y
(Dados criados pelo autor)

3.3.3 Rotações em torno da origem

Uma transformação geométrica de extrema importância em Computação Gráfica é a *rotação*, que permite a visualização de um objeto por diferentes ângulos.

Pode-se mostrar (veja [2]) que a *rotação de um ângulo* θ de um ponto qualquer (x, y), em torno da origem, *no sentido anti-horário*, é dada pela transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta\,, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$

Em forma matricial:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo:

Suponhamos que queremos fazer uma rotação de 60°, no sentido anti-horário, no losango da figura abaixo:

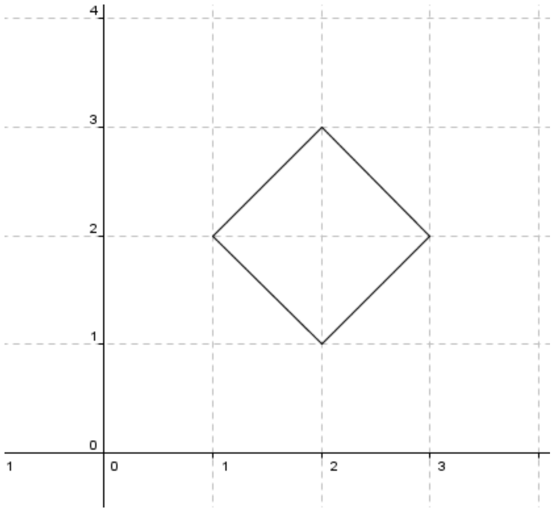


Figura 6 – Losango

(Dados criados pelo autor)

Temos que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e aplicando-se T nos vértices do losango obtemos:

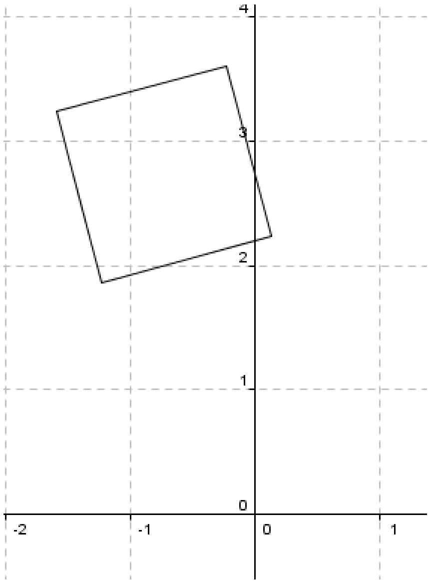


Figura 7 - Losango rotacionado 60° no sentido anti-horário

(Dados criados pelo autor)

Para visualizar mais claramente a rotação do losango, consideremos a próxima ilustração:

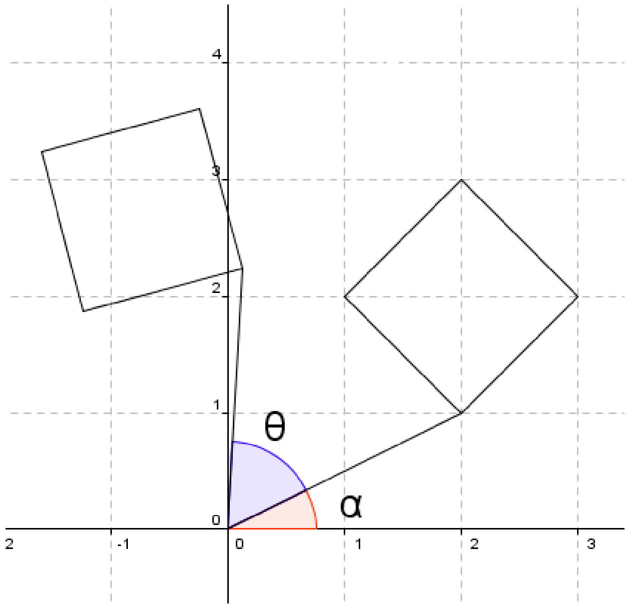


Figura 8 - Rotação de um losango

(Dados criados pelo autor)

Podemos perceber acima que o vértice que possui inclinação α em relação ao eixo x, após a rotação de $\theta = 60°$ passa a ter inclinação $\alpha + \theta$.

A *rotação de um ângulo* θ de um ponto qualquer (x, y), em torno da origem, *no sentido horário*, é dada pela transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y) = (x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta, -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

Em forma matricial:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

3.3.4 Translações

Consideremos agora que o objetivo é deslocar o triângulo da figura 3, duas unidades para a direita e uma para cima. Assim, gostaríamos de aplicar no triângulo a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y) = (x + 2, y + 1).$$

Pode-se verificar facilmente que essa não é uma transformação linear, não podendo, então, ser representada por uma matriz quadrada de ordem 2. Entretanto, podemos obter uma representação matricial para essa transformação utilizando uma matriz de ordem 3x3, como descrevemos a seguir.

Para resolver o problema de poder representar matricialmente as transformações não lineares, definiremos uma transformação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ utilizando matrizes quadradas de ordem $n+1$. Para esta “passagem” de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^{n+1}$, fazemos corresponder a cada ponto $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ o ponto $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n,\ 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Assim, por exemplo, para representar a translação $T(x,y) = (x+\gamma, y+\delta)$, associamos uma matriz de ordem 3x3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & 1 \end{bmatrix},$$

em que γ e δ são os responsáveis pelas translações em x e y, respectivamente.

Deste modo para fazer a translação de 2 unidades em x e 1 em y, como proposto anteriormente, utilizamos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poderíamos representar todas as transformações geométricas que apresentamos usando matrizes de ordem 3x3, o que permitiria compor essas transformações multiplicando as matrizes. Entretanto, nas atividades de ensino-aprendizagem que descreveremos no próximo capítulo, optamos por não utilizar translações, de forma que as atividades foram compostas apenas por matrizes quadradas de ordem 2, para facilitar os cálculos manuais dos alunos.

4 RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Divididas em três encontros ocorridos, a saber, nos dias 8, 9 e 13 de novembro do presente ano, as aulas práticas aqui relatadas, objetivando a validação da proposta de ensino deste trabalho, foram ministradas em uma escola da rede privada de Porto Alegre, com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, que contava com 25 alunos. Os encontros efetivados nesses dias, com duração média de 50 minutos cada totalizando quatro horas-aula de prática, foram planejados de acordo com a distribuição dos períodos de aula da presente turma dada de seguinte forma: um período na quinta-feira, dois períodos na sexta-feira e um período na terça-feira.

4.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

É inerente ao perfil de um educador preocupar-se com questões de cunho didático. Em se tratando do ensino de determinado conteúdo, de forma geral, os professores preocupam-se em encontrar estratégias, técnicas e recursos de maneira a aprimorar sua prática e oferecer aos alunos diversas abordagens metodológicas. Para tanto, um dos processos metodológicos empregados para a busca desta melhoria é a Engenharia Didática.

Proposta por Michele Artigue, a Engenharia Didática é um procedimento metodológico cujo objetivo geral é aproximar-se de uma realidade de ensino de algum conteúdo, conhecer as principais maneiras como este conteúdo é abordado, bem como identificar as dificuldades no avanço dessas abordagens tradicionais e realizar a apresentação de uma nova proposta didática de forma a tentar provocar melhorias no ensino do conteúdo que se pretende abordar.

Conforme Artigue (1996 *apud* CARNEIRO, 2005), podemos dividi-la em quatro etapas que abrangem desde o reconhecimento das condições para a abordagem do assunto até a fase de validação da proposta, a saber:

1) Análises prévias - Identificação da realidade de ensino de determinado conteúdo. Nesta primeira etapa, buscamos conhecer de que maneiras o conteúdo que pretendemos trabalhar com os alunos é abordado, ou seja, que recursos, técnicas e estratégias os professores utilizam para abordagem do assunto em questão, bem como a forma apresentada por autores de livros didáticos e outras fontes de referência.

2) Identificação dos constrangimentos para o avanço das estratégias de ensino – uma vez que tomamos conhecimento de determinada forma de se trabalhar algum assunto com os alunos, temos condições de detectar quais os constrangimentos, ou seja, quais as dificuldades, que encontramos para que supostamente não possamos melhorar o quadro que identificamos na etapa anterior.
3) Apresentação de sequência didática – Nesta etapa já conhecemos as principais abordagens de determinado conteúdo e as dificuldades que nos impedem de ensinarmos tal conteúdo de outra forma. Munidos deste conhecimento, partimos para a elaboração de uma proposta que leve em consideração aquilo que encontramos nas etapas anteriores, de forma a provocar contribuições para a melhoria deste ensino.
4) Validação da proposta – Nesta última etapa fazemos a análise e possíveis considerações sobre a proposta que apresentamos para verificar a sua validade, apontando as contribuições da proposta que foi criada.

4.1.1 Análises prévias

As análises prévias deste trabalho foram apresentadas no capítulo 2, com o propósito de apresentar a justificativa para a elaboração do mesmo.

4.1.2 Identificação das dificuldades dos alunos

Como não foi possível realizar uma atividade prévia com a turma na qual desenvolvemos o estudo, para o reconhecimento das dificuldades dos alunos fundamentei-me principalmente em minha experiência de estágio e nas dúvidas que os alunos apresentaram ao longo das atividades propostas, como descrevemos a seguir. Foram bastante úteis, também, os dados apresentados nos trabalho “Um Estudo Diagnóstico sobre as Dificuldades em Matrizes”, de Messias, Sá e Fonseca [14].

Algumas dúvidas que surgiram e que de certa forma foram obstáculos no decorrer da proposta, estavam ligadas ao trabalho com o *software* GeoGebra, pois os alunos ainda não o conheciam e demoraram para entender o mecanismo de funcionamento, assim como para decorar os comandos a serem utilizados. Além disso, os alunos se mostraram bastante resistentes à parte do conteúdo que dizia respeito às leis das transformações, apresentando uma grande dificuldade para compor duas funções, apesar de que haviam estudado este assunto há poucas semanas.

4.1.3 Descrição da sequência didática

Nesta seção serão descritas as aulas práticas, evidenciando os pontos importantes da nossa abordagem, assim como tudo que aconteceu de relevante para a pesquisa durante os três encontros em sala de aula.

4.1.3.1 **Aula 1**

Comecei a aula explicando para os alunos o que seria feito durante os próximos encontros e o porquê dessa atividade estar sendo desenvolvida com a turma deles. Após esta introdução falei que trabalharíamos com matrizes e fiz a seguinte pergunta: "vocês sabem o que é uma matriz, ou já ouviram falar?". Um dos alunos me disse que as matrizes são utilizadas na área da informática e que também já tinha ouvido falar por causa do filme "Matrix", porém não soube definir o que é ou qual é a forma de uma matriz.

Após esta discussão inicial apresentei no quadro as tabelas 5 e 6 a seguir:

Times	Vitórias	Empates	Derrotas
Sapucaiense	3	0	1
Juventude	1	2	1

Tabela 5 – Resultados dos jogos do 1° turno de um campeonato

(Dados criados pelo autor)

Produtos	Preço por un. (R$)	Quantidade	Total (R$)
Refrigerante	5	10	50
Pizza	20	5	100
Bolo	2	15	30

Tabela 6 - Gastos com compras em um supermercado

(Dados criados pelo autor)

Utilizando as tabelas 5 e 6 como base, falei que as matrizes nada mais são do que tipos especiais de tabelas, e que em certas situações é mais prático o uso de matrizes, justamente porque estas tornam os dados das tabelas mais compactos ao esconderem as informações que não são "numéricas". Falei que, para representamos uma tabela na forma de matriz, devemos pegar somente os números que representam alguma informação e colocá-los em linhas e colunas, mantendo a mesma posição em que se encontravam dentro da tabela inicial. Comentei ainda que estes números devem ficar posicionados dentro de dois parênteses ou de dois colchetes, para que não fiquem "soltos" fora da tabela.

Desta forma montamos as matrizes que representam as tabelas 5 e 6, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 10 & 50 \\ 20 & 5 & 100 \\ 2 & 15 & 30 \end{bmatrix}.$$

Após ter mostrado como fazemos para montar uma matriz a partir de sua tabela, apresentei mais alguns exemplos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Logo depois de mostrar os exemplos acima, concluí a explicação apresentando a definição de matriz, segundo Dante [5]:

> Denomina-se matriz de tamanho $m \text{ x } n$ uma tabela retangular formada por $m \,.\, n$ números reais, dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

Depois de escrever a definição no quadro, eu a li juntamente com os alunos. Enquanto lia, os alunos perguntaram o que eram as letras m e n que estavam aparecendo na definição, então falei que as letras representavam, nesta ordem, o número de linhas e de colunas da matriz, e que estavam sendo representadas por letras porque poderiam ser qualquer número natural. Então, utilizando as matrizes dos exemplos anteriores, mostrei quais eram os números m e n de cada uma delas, para que não ficasse nenhuma dúvida com o enunciado da definição.

Logo em seguida, um dos alunos perguntou o porquê de usarmos as letras m e n para representar o número de linhas e colunas enquanto poderíamos usar *"horizontal"* para nos referirmos ao número de linhas e *"vertical"* para nos referirmos às colunas da matriz, expliquei que esta nomenclatura foi definida desta forma muito tempo atrás, e que desde então é assim que fazemos para representar as linhas e colunas de uma matriz. Ressaltei ainda que a ordem da matriz foi definida desta forma, ou seja, sempre devemos indicar o número de linhas antes do número de colunas.

Enquanto falava sobre o que é o tamanho de uma matriz, comentei que para encontrarmos a quantidade total de números que formam a matriz basta que multipliquemos o número de linhas pelo número de colunas da matriz. Então multipliquei os números da ordem das matrizes formadas a partir das tabelas 5 e 6, para exemplificar o que acabara de comentar. Obtivemos então dois resultados, o primeiro resultado foi o da quantidade de elementos da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, que sabemos ser seis, pois a matriz possui ordem 2x3, e esta multiplicação tem como resultado seis. O segundo exemplo foi a multiplicação dos números da ordem da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 50 \\ 20 & 5 & 100 \\ 2 & 15 & 30 \end{bmatrix}$, que possui ordem 3x3 e por isso tem nove como quantidade total de números dentro dela.

Nesta parte da aula, falei sobre o nome que cada número dentro da matriz recebe e como fazemos para diferenciar caso a matriz contenha números que se repetem. Comecei explicando que cada número que compõe a matriz é chamado de *elemento* e que para nos referirmos a cada um deles existe uma classificação quanto à posição em que eles se encontram. Neste momento um dos alunos perguntou: "como se fosse em uma batalha naval?". Achei bem oportuna essa comparação, por isso repeti em voz alta para que toda a turma ouvisse. Então continuei falando que para localizarmos o elemento que queremos, devemos utilizar os números de suas linhas e colunas como coordenadas, sempre nesta ordem, assim como fazemos quando nos referimos a ordem da matriz. Continuei dizendo que essas coordenadas são denominadas "i" e "j", em que o primeiro é o número da linha em que o elemento se encontra e o segundo é o número da coluna. Neste momento um dos alunos perguntou: "por que antes a gente usava *m* e *n* e agora vamos usar *i* e *j*?" Expliquei que as letras m e n são utilizadas para denominar as linhas e colunas da matriz quando estamos falando de ordem, para localizar os elementos eles recebem essa outra nomenclatura.

Aqui utilizei uma das matrizes dos exemplos anteriores que ainda estava escrita no quadro para fazer com que os alunos me respondessem quais eram as coordenadas i e j de alguns dos seus elementos. A matriz que utilizei como exemplo foi a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Comecei perguntando quais eram as coordenadas do elemento 1, os alunos não encontraram nenhuma dificuldade para responder que ele era o elemento de posição "11", mas quando perguntei sobre as coordenadas do elemento -2 escutei alguns alunos que falaram "2 1", por isso repeti que ao identificar o elemento devemos prestar atenção na ordem dos números, assim como na ordem da matriz, o primeiro número é o da linha do elemento e o segunda é o número da coluna do elemento. Ao repetir a pergunta todos os alunos concordaram que o elemento -2 ocupa a posição "1 2". Uma das alunas perguntou ainda se teria como a localização de algum elemento ter "número com vírgula", falei que não, e expliquei que não tem como porque não existe número não inteiro de linhas e colunas.

Neste instante da aula, escrevi novamente a tabela 5 no quadro e apresentei uma nova tabela para eles, a tabela 7.

Times	Vitórias	Derrotas	Empates
Sapucaiense	1	1	1
Juventude	1	1	1

Tabela 7 - Resultados dos jogos do 2° turno de um campeonato

(Dados criados pelo autor)

A partir destas tabelas, perguntei como poderíamos fazer para obter a tabela com o desempenho final dos times deste campeonato. Imediatamente os alunos responderam que teríamos que somar as entradas correspondentes de cada tabela uma a uma para obter a nova tabela resultante. Enquanto alguns alunos ainda comentavam sobre as minhas perguntas, outro que estava no fundo da sala perguntou como faríamos para somar se uma das tabelas tivesse um time (linha) a mais que a outra. Antes que eu pudesse comentar algo, um segundo aluno respondeu que bastava adicionar outra linha com zeros na tabela que tivesse um time a menos.

Quando pedi a atenção para continuar falando, repeti a pergunta que havia sido feita, para que todos pudessem participar da discussão. Todos eles concordaram que adicionando uma nova linha com zeros na matriz com o menor número de linhas resolveria o problema, então argumentei que ao fazermos isso estaríamos mudando o tamanho da nossa matriz, que ela deixaria de ser 2x3 para ser 3x3. Porém isto não mudou a ideia deles. Argumentei que pelos exemplos que havíamos visto, ao somarmos duas matrizes, a resultante teria o mesmo número de linhas e colunas, a única modificação que aconteceria seria que as entradas seriam somadas umas as outras, resultando em números diferentes. Como meus exemplos e argumentos não estavam convencendo os alunos de maneira alguma resolvi encerrar a discussão e formalizar com eles a condição para podermos somar duas matrizes. Então escrevi no quadro a definição de adição de matrizes e a condição para podermos somá-las.

Dadas suas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C de ordem $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja, $C = a_{ij} + b_{ij}$.

Após acabar de escrever no quadro a definição acima, o sinal de término da aula tocou, então aproveitei que os alunos ainda estavam sentados para explicar que quando nos referimos a uma matriz utilizamos letras maiúsculas e para nos referirmos a elementos utilizamos letras minúsculas. Invadindo um pouco do tempo do intervalo deles, pedi que copiassem aquilo que ainda não haviam copiado e defini rapidamente a *multiplicação por escalar* utilizando o exemplo da tabela abaixo:

Item	Preço (R$)
Pão	0,35
Leite	1,50

Tabela 8 - Lista do supermercado

(Dados criados pelo autor)

Após escrever rapidamente a tabela no quadro, expliquei que para sabermos quanto gastaríamos indo no supermercado e comprando estes itens em doze dias diferentes, precisamos montar a matriz da tabela e multiplicar pelo número que queremos, obtendo assim o seguinte resultado:

$$12.\begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}2 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Deste modo poderíamos sempre multiplicar qualquer número por uma matriz, e para fazer isto bastaria que multiplicássemos cada entrada da matriz pelo mesmo número.

Com este exemplo a primeira aula deu-se por encerrada.

4.1.3.2 **Aula 2**

No segundo encontro demos seguimento às atividades propostas, que desta vez, se realizariam no laboratório de informática da escola, pois seria necessária a utilização de um *software* matemático. Tivemos um atraso de cerca de quinze minutos, pois o responsável pelo local chegou atrasado para destrancar a porta e iniciar os computadores.

Depois que todos os alunos entraram e escolheram um computador para trabalhar, foi possível começar a atividade. Primeiro expliquei que estávamos utilizando os computadores porque diferentemente das outras operações com matrizes que havíamos visto na aula anterior, a multiplicação delas tem um sentido geométrico que, com o auxílio do programa, poderíamos ver.

Como era a primeira vez que os alunos estavam trabalhando com o GeoGebra, fiz uma breve apresentação do programa e de alguns de seus recursos. Comecei falando como se fazia para exibir a malha pontilhada na janela do programa e que essa malha tornaria mais fácil a marcação de pontos. Além de falar como se marcam os pontos utilizando a malha pontilhada, também mostrei como que se faz isso digitando os comandos na *Caixa de Entrada* (ver apêndice B). Então, marquei alguns pontos para exemplificar a situação e falei que o programa também faz gráficos de funções, como os que eles aprenderam algumas semanas atrás enquanto estudavam o conteúdo de funções.

Passada essa parte inicial de apresentação do programa, mostrei os comandos que utilizaríamos para fazer a multiplicação de matrizes. O primeiro deles era como que se insere uma matriz no programa (ver apêndice B) para que possamos utilizá-la mais tarde. Este comando foi o mais difícil para os alunos, pois envolvia uma série de chaves e vírgulas que teriam que ser utilizadas na ordem correta ou o programa não aceitaria. Vagarosamente fui digitando no meu computador o comando utilizado e explicando todos os detalhes de sua criação, para que os alunos acompanhassem pela projeção passo-a-passo. Quando acabei de falar, pedi aos alunos que repetissem a operação criando a primeira matriz que utilizaríamos na atividade.

De vez em quando alunos chegavam atrasados na aula, por isso foi necessário que o professor regente da turma me ajudasse a repassar os comandos para estes alunos.

Após mostrar o comando para inserir matrizes no programa, mostrei como faríamos para multiplica-las. Como as primeiras matrizes que iríamos multiplicar representavam pontos cartesianos precisei dizer que estes pontos (x, y) podem ser escritos na forma de matriz coluna, em que x é o elemento a_{11} e y é o elemento a_{21}. E somente por isso seria possível fazer as multiplicações que viriam.

A partir daqui começamos a seguir o roteiro do material (ver apêndice D) que eu havia entregado para eles. O primeiro passo era criar um triângulo com os vértices em $A(0,1), B(1,1)$ e $C(1,2)$ (ver apêndice B). Depois de ter feito o triângulo, fiz o passo-a-passo no telão de como multiplicar os vértices da figura pela matriz transformação, enquanto explicava tudo que fazia. Após eles terem feito as três multiplicações, pedi que eles ligassem os três novos pontos (ver apêndice B) que surgiram no GeoGebra, além disso também pedi que marcassem os pontos no roteiro da aula, para que pudessem ter registrado em um material para eles estudarem posteriormente. Desta forma eles teriam os novos pontos marcados em dois lugares diferentes, na tela do computador e no roteiro.

Depois que todos os alunos fizeram as multiplicações e marcaram os pontos, pedi para que me falassem em voz alta as coordenadas que eles haviam obtido em cada um dos produtos. Fui perguntado um por um, o primeiro ponto pela matriz, o segundo ponto e, por fim, o terceiro ponto. Um dos alunos acrescentou ao final da discussão: *"o x de cada ponto está multiplicado por dois e o y ficou igual".* Respondi para ele que sim, que estava certo o que ele havia dito e falei em voz alta para que os outros alunos ouvissem a análise do ocorrido. Depois de estudar um ponto específico foquei o triângulo como um todo, este triângulo estava maior para o lado direito pelo motivo que concluímos instantes atrás, todas as suas coordenadas do x foram dobradas, porém sua altura continuava a mesma, pois suas coordenadas y não sofreram nenhuma alteração.

Concluí a análise da nova figura dizendo que ele havia sofrido uma *dilatação* e que essa dilatação é a responsável pelo triângulo ter tido seu tamanho aumentado para a direita depois de ter seus vértices multiplicados pela matriz. E, que isso que nós havíamos acabado de fazer era o que chamados de *transformação geométrica*, a partir de uma figura obtemos outra diferente. Quando acabei de explicar, um dos alunos me perguntou por que não havia acontecido nada com o y. Falei que não aconteceu nada com ele, porque a matriz que utilizamos fazia uma transformação que não alterava a coordenada y do ponto. Decidi voltar ao slide que mostrava a matriz transformação $\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ e falar que o elemento 1 era o responsável por dilatar o y, enquanto o 2 dilatava o x. Outro aluno então falou: "*se trocássemos o 1 por 2, o y também seria dilatado?"*, respondi para ele que sim. Concluindo a explicação, falei que poderíamos trocar os números da nossa matriz por quaisquer números que a nossa transformação também mudaria, de acordo com os novos valores que escolhêssemos. Quando acabei de falar um aluno perguntou: "*não tem como fazer tudo junto*", respondi que sim e que veríamos isso em seguida, mas que agora precisávamos seguir a ordem do roteiro.

Como já sabíamos o que tinha acontecido com a figura começamos a analisar individualmente cada uma das coordenadas do vértice. Olhando para a primeira coordenada vimos que o x havia sido multiplicado por 2 e que o y estava igual, desta forma falei que poderíamos montar uma função que controla cada uma das coordenadas, perguntei para a turma se algum deles tinha alguma ideia de como faríamos isso, me surpreendi ao ver que um dos alunos já havia completado no roteiro a lei da transformação que queríamos. Desta forma continuei falando que para montar a lei precisamos identificar qual é a transformação que está acontecendo com cada coordenada e escrever isso na forma de uma operação.

Analisando os vértices vimos que as nossas coordenadas x haviam sido dobradas, ao dobro associamos a multiplicação por 2, como nosso y não tinha sido afetado em nenhum vértice associamos a ele a operação de multiplicação por 1. Expliquei que agora que sabíamos montar a lei da função de transformação poderíamos montar também a matriz que gera a transformação, e faríamos isso da seguinte forma:

- A primeira linha representaria as operações feitas com a coordenada x. No nosso caso o x foi multiplicado por 2 e não foi somado nada, então a nossa primeira linha da matriz seria [2 0], 2 por causa do produto e 0 por causa que não houve nenhuma soma.
- Assim como a segunda linha seria representada pelas mudanças no y. Porém este não havia sofrido mudanças, então a nossa linha seria [0 1], 0 pois não foi somado nada e 1, porque ele não sofreu mudanças, então foi multiplicado por 1.

Enquanto eu explicava novamente para um aluno que não tinha entendido o processo, o mesmo aluno que tinha feito sozinho a lei da primeira transformação veio me perguntar se estava certa a segunda lei que ele havia feito, sendo que eu ainda não tinha mencionado o próximo exemplo. Deixei que este aluno me mostrasse o que tinha feito e novamente falei para ele que estava certo, e que se ele preferisse poderia ir fazendo as atividades sem precisar esperar o resto da turma.

Prosseguindo com as atividades propostas pedi que os alunos inserissem no programa uma nova matriz de transformação e assim que eles terminassem poderiam já fazer a multiplicação dos vértices do triângulo dilatado por essa nova matriz, obtendo assim um terceiro triângulo. Chamei a atenção dos alunos para analisarmos, juntos, o que aconteceu com a figura após esta transformação, falei que o triângulo que antes estava em "cima" agora havia passado para "baixo" (ver apêndice B), então perguntei o que aconteceu com as coordenadas dos pontos para que essa transformação acontecesse. Os alunos então responderam que o motivo da figura ter mudado a sua posição desta forma foi porque as coordenadas y dos vértices foram multiplicadas por -1.

Depois que os alunos identificaram as mudanças que ocorreram com as coordenadas dos vértices, perguntei para eles qual era a lei desta nova função, sendo que o x não havia mudado e o y havia sido multiplicado por -1. A maioria respondeu corretamente, dizendo que a lei da função era $(x, -y)$. Expliquei então o porquê, da mesma forma como havia explicado anteriormente.

Nesta parte da aula expliquei para os alunos que havia uma maneira mais fácil de transformar a figura, que poderíamos fazer a multiplicação da matriz transformação por uma única matriz que contém todos os vértices, obtendo deste modo todos os pontos transformados em um único passo. Para isso relembrei os alunos do momento que falei que cada ponto podia ser escrito como uma matriz coluna e, como a figura que estamos transformando tem três vértices, basta que transformemos cada um deles em uma coluna de uma mesma matriz. Obtendo desta forma uma matriz com duas linhas e três colunas, em que cada coluna é um vértice da figura. Desta forma, ao multiplicarmos a matriz transformação pela matriz dos pontos o resultado será uma matriz também de duas linhas e três colunas, em que cada uma dessas colunas será o respectivo ponto transformado.

Pedi que eles testassem esse método refazendo a transformação anterior, desta forma veriam que realmente funciona. Após dar um tempo para que fizessem as operações no programa perguntei se os vértices obtidos anteriormente eram iguais aos novos vértices obtidos dentro da matriz que continha os três juntos. Eles responderam que sim e perguntaram porquê eu não havia mostrado essa forma de resolver desde o começo da aula, pois assim teriam poupado bastante tempo com as multiplicações.

Para continuar com o planejado para a aula precisei relembrar os alunos das duas transformações feitas até agora e dos dois modos como podíamos aplica-las aos pontos. Continuei falando que assim como podemos transformar os pontos todos ao mesmo tempo, também podemos fazer mais de uma transformação a cada multiplicação. Então, perguntei a eles como que isso poderia ser feito, um dos alunos que já havia respondido uma de minhas perguntas corretamente mais cedo nesta aula respondeu novamente, ele disse que poderíamos multiplicar primeiro uma matriz pelos pontos e em seguida multiplicar o resultado pela segunda e então marcar os pontos. Respondi para ele que não deixava de estar certo, mas mesmo que ele marque os pontos ao final do processo a maneira utilizada foi uma multiplicação seguida de outra, nós queremos um método que resolva nosso problema apenas com uma.

Para não perder mais tempo comecei a explicar como faríamos para obter uma matriz que fizesse as duas transformações ao mesmo tempo. Falei que cada uma das matrizes que representavam transformações eram nada mais que funções, que nós já havíamos visto como que se fazia para determinar. Falei que o conteúdo de composição de funções que eles aprenderam pouco tempo atrás agora seria de extrema importância, utilizando a propriedade das matrizes de “armazenar” transformações geométricas faríamos a composição das funções das duas matrizes transformação e a matriz da função resultante será a matriz que contém as duas transformações. Expliquei que veríamos o porquê disso em outra aula, mas para fazer a composição das funções das matrizes basta que as multipliquemos. Teríamos ainda que tomar cuidado por causa da ordem das transformações, pois o produto de matrizes não é comutativo. Para não errar a ordem da multiplicação basta que comecemos a escrever o nosso cálculo pela ultima transformação feita, desta forma as matrizes delas serão sempre as primeiras a ser multiplicadas.

Utilizando o telão fui mostrando como fazemos a composição das duas transformações anteriores para obtermos a matriz que contém as duas transformações em uma só e apliquei a lei $(2x, y)$ na $(x, -y)$ para obtermos a lei da composta $(2x, -y)$. Fizemos ainda o produto das matrizes anteriores no GeoGebra para verificarmos que o resultado seria a lei da função que obtemos na composição. Concluí enfatizando novamente que **o produto de matrizes é composição de funções e que foi definido para ser deste modo.**

Ao final da explicação, menos de cinco minutos de aula restavam e não seriam suficientes para continuar com o que eu havia planejado, então deixei que eles explorassem mais um pouco o *software*. Enquanto isso uma aluna me perguntou o que aconteceria se tivéssemos outro número no lugar de um dos zeros da matriz transformação. Expliquei para ela que este outro número afetaria na lei da nossa função, em vez de termos apenas um coeficiente multiplicando o *x* ou o *y*, teríamos este outro somando, e que para identificar este tipo de transformação é bem mais complicado do que quando temos apenas um tipo de dilatação ou reflexão, como nos exemplos que utilizamos.

Após esta pequena discussão o sinal para o intervalo disparou e os alunos começaram a sair da sala de aula, deste modo se deu por encerrado o encontro número dois.

4.1.3.3 **Aula 3**

Iniciei a terceira aula das atividades propostas perguntando aos alunos se eles lembravam o que havia sido feito na aula anterior, que havia acontecido no laboratório de informática. Perguntei o que aconteceu com a figura com a qual estávamos trabalhando quando nós multiplicávamos a matriz transformação pela matriz com as coordenadas dos pontos, um dos alunos me respondeu que "elas mudavam", então concluí o raciocínio dele falando que ela transformava, e por isso o nome do conteúdo que estávamos estudando era *transformações geométricas*. Falei que esse resultado era o principal objetivo desta proposta, que eles entendessem que quando multiplicamos matrizes estamos transformando os pontos que cada uma dessas matrizes representa e falei também que as matrizes tem a propriedade de armazenar transformações geométricas, como já havia mencionado em uma aula anterior.

Continuando com a proposta, escrevi no quadro a primeira matriz transformação que utilizamos na aula anterior, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e disse que havíamos multiplicado ela pelos pontos *A*, *B* e *C*. Então perguntei qual era o resultado da multiplicação da matriz dada pelo ponto *A*(0,1) que eles haviam anotado na aula passada. Como os alunos demoraram um pouco para responder, eu mesmo respondi a pergunta dizendo que o resultado era o ponto (0,1) e perguntei se era este o resultado que eles tinham anotado. Neste momento, perguntei por que o resultado era esse, então para ajudá-los um pouco dei uma dica com a pergunta: “o que esta matriz estava fazendo com os pontos?”. Após a dica, um dos alunos me respondeu que ela estava expandindo, então perguntei: “expandindo em qual coordenada?”, vários alunos se manifestaram nesse momento falando que era a coordenada *x*, um dos alunos que respondeu por primeiro concluiu seu raciocínio falando que a expansão era na horizontal, então concluí para ele dizendo que a horizontal corresponde ao eixo *x*.

Prosseguindo a resolução deste exemplo, expliquei como foi feita a transformação do ponto *A*. Falei que podíamos escrever o ponto na forma de uma matriz coluna e aplicar a transformação da matriz, o *x* que vale 0, multiplicado por 2 continuou 0 e a coordenada y continuou 1 porque foi multiplicado por 1. Então falei para os alunos que iriamos estudar nesta aula como fazer o produto entre quaisquer duas matrizes e também provaríamos a o porquê de fazer desta forma.

Após falar na transformação que dilatou o triângulo utilizado como exemplo, perguntei se eles se lembravam da segunda transformação que fizemos, utilizando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Os alunos responderam que essa transformação invertia a figura, então fiz o desenho da figura no quadro mostrando a inversão e falando que é uma reflexão. Um dos alunos falou que fizemos a figura ficar negativa, então perguntei para ele o que havia se tornado negativo, e outros alunos me responderam que a coordenada y foi o que se tornou negativa.

Ao ver as duas matrizes transformação no quadro, um dos alunos me questionou sobre o produto entre elas, falei então que eu havia comentado na aula passada que quando multiplicamos uma matriz transformação por uma matriz que representa um ponto nós transformamos este ponto, mas quando multiplicamos duas matrizes que são transformações o resultado será uma matriz que faz as duas transformações de uma única vez. Uma das alunas, que havia chegado atrasada na aula anterior me perguntou por que podíamos multiplicar uma matriz de ordem 2x2 por uma de ordem 2x1 e por que seu resultado seria uma de ordem 2x1, pedi para ela que esperasse um pouco, pois esta parte do conteúdo estava em um momento um pouco mais adiante da aula.

Montei no quadro o produto entre as duas matrizes transformações que utilizamos anteriormente e pedi que alguém me falasse a resposta que havia encontrado na aula anterior, então um aluno que não estava com nenhuma anotação me falou o resultado, perguntei para ele como que ele havia chegado à resposta, o aluno então me falou que calculou o produto para me responder, perguntei como ele havia feito a multiplicação e ele me respondeu que multiplicou os elementos de cada matriz termo a termo para chegar ao resultado, após ouvir essa resposta, perguntei à turma se mais algum deles achava que a multiplicação se fazia desta forma, alguns deles falaram que sim, para ouvir novos argumentos mostrei os produtos que fizemos por primeiro na aula, nos quais multiplicamos matrizes que não tinham a mesma quantidade de elementos, logo este modo de fazer a multiplicação termo a termo não poderia ser o verdadeiro. Após este contraexemplo, ouvi mais algumas ideias dos alunos quanto ao modo de fazermos a multiplicação e apresentei a forma como multiplicamos duas matrizes, a partir de sua definição.

Calculei a primeira multiplicação que vimos na aula como exemplo, a multiplicação entre as matrizes $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, mostrando passo-a-passo quais elementos nós deveríamos multiplicar e fazendo a soma de cada um destes produtos, colocando os resultados em seus respectivos lugares na matriz. Durante a explicação um dos alunos me perguntou o que aconteceria se a primeira matriz tivesse três linhas e depois o que aconteceria se esta matriz tivesse três colunas, respondi a primeira pergunta dizendo que a matriz com o resultado também teria três linhas, a segunda pergunta eu disse como resposta que o produto não seria possível de ser feito, e que estudaríamos isso mais adiante nesta aula, por isso eu não responderia naquele momento. Após eu ter dito que estudaríamos mais adiante a condição para podermos multiplicar duas matrizes, um dos alunos sentados à frente da sala disse: “tem que ter o número de elementos por linha e por coluna do outro”. Falei para ele que a ideia dele estava correta e que a condição era que o número de elementos nas linhas da primeira matriz deveria ser igual ao número de elementos nas colunas da segunda, como ele havia sugerido. Como o restante da turma não havia participado deste diálogo continuei fazendo a multiplicação que havia iniciado e conclui a explicação de como se faz o produto.

Como segundo exemplo, utilizei duas matrizes quadradas de ordem 2. Comecei perguntando como os alunos achavam que seria a matriz resultante, todos responderam que seria também de ordem 2x2, então comecei a multiplicar como havia feito no primeiro exemplo, ressaltando novamente que deveríamos multiplicar os elementos das linhas da primeira matriz pelos elementos das colunas da segunda e soma-los. Ao multiplicar e somar os elementos da primeira linha da primeira matriz com os elementos da segunda coluna da segunda matriz, um dos alunos afirmou que não faria diferença multiplicar uma matriz quadrada de ordem 2 por uma matriz de ordem 2x1 ou por uma de ordem 1x2, como todos os alunos, exceto um, ainda não conheciam a condição para poder multiplicar matrizes, decidi fazer os produtos que o aluno sugeriu no quadro. Multipliquei novamente as matrizes do exemplo anterior, pois eram uma quadrada de ordem 2 e a outra uma matriz 2x1, e concluímos que o produto era mesmo uma matriz de ordem também 2x1.

Ao fazer a multiplicação no segundo caso, expliquei que não seria possível, pois a primeira linha da primeira matriz continha dois elementos, os quais precisariam ter correspondentes na primeira coluna da matriz de ordem 1x2, que possuía apenas um elemento, o que tornaria impossível fazer aquele produto.

Após falar sobre a dúvida do aluno citada acima, concluí a resolução do segundo exemplo e finalizei falando que os produtos que havíamos feito estavam de acordo com os resultados que obtivemos ao fazer as mesmas multiplicações utilizando o programa GeoGebra na aula anterior.

Continuando com o planejamento da aula, relembrei os alunos de que as matrizes representavam funções e que havíamos visto na aula passada como determinar as leis destas funções. Então perguntei para os alunos qual foi a primeira lei que determinamos na aula passada, como resposta eles me falaram que foi a lei $(x, y) \to (2x, y)$. Um deles me perguntou como poderíamos fazer para montar a matriz com a lei, pois ele havia esquecido, expliquei que cada linha da matriz seria presentada por uma componente da lei, assim a primeira linha seria dada pela componente *2x*, que representaria a linha $[2 \quad 0]$, e a segunda linha pela componente y, que definiria a linha $[0 \quad 1]$, resultando deste modo na matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Após apresentar esta matriz fui perguntado o que aconteceria se tivéssemos uma matriz de ordem 3x3, então respondi que esta matriz representaria outra transformação, mas que não estudaríamos nesta ocasião.

Apresentei um exemplo de função que não havíamos planejado, para verificar se os alunos haviam entendido como se montava a matriz a partir de sua lei. Escrevi a seguinte lei no quadro $F(x, y) = (2x + y, -4x + 2y)$ e perguntei qual seria a matriz que representaria ela, então os alunos me responderam que a matriz era $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, que estava correta.

Continuando com o planejado, falei para os alunos que já sabíamos que ao multiplicarmos matrizes estamos fazendo a composição de suas funções, então agora faríamos uma dessas composições para verificar que o resultado obtido ao multiplicar as matrizes e ao compor as funções é o mesmo. Para isso utilizaríamos as funções $g(x,y) = (-x+2y, 3x+y)$ e $f(x,y) = (2x+y, -4x+2y)$, como queremos primeiro aplicar a transformação f, falei que precisaríamos aplica-la na g, para isso substituiríamos $(2x+y)$ da função f onde houvesse x na função g, assim como substituiríamos $(-4x+2y)$ onde houvesse y, obtendo desta forma a função $g\big(f(x,y)\big) = \big(-(2x+y) + 2.(-4x+2y), 3.(2x+y) + (-4x+2y)\big)$. Após fazermos todos os cálculos obtivemos como resultado $(-10x+3y, 2x+5y)$, que ao montarmos a matriz resulta em $\begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Após chegarmos à matriz resultante pela composição das funções, multiplicamos as duas matrizes para comparar os resultados, fazendo a multiplicação das matrizes $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ da maneira como havíamos visto no começo da aula obtivemos também a matriz $\begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, constatando desta forma que a multiplicação de matrizes nada mais é que fazer a composição das funções que elas representam.

Ao perceber que o tempo da aula estava se esgotando falei a condição para podermos fazer o produto de duas matrizes. Comecei lembrando os alunos que este assunto havia entrado em debate anteriormente, mas que eu havia deixado para o final da aula. Apontando para a primeira linha de uma das matrizes do anterior, falei que o número de elementos que havia ali precisaria ser igual ao número de elementos nas colunas da segunda matriz, então perguntei à turma o que isso significava e um dos alunos me respondeu "*o número de colunas tem que ser o mesmo que o número de linhas*". Finalizei a explicação falando que o número de colunas da primeira matriz deveria ser igual ao número de linhas da segunda, deste modo poderíamos fazer o produto das duas.

Utilizando as matrizes com as quais havíamos trabalhado nesta aula, combinei algumas delas e perguntei se os produtos seriam possíveis, para que eles fixassem a condição que recém havíamos visto.

Após estes rápidos exemplos eu entreguei os testes (Ver figura 9) para que os alunos trouxessem na próxima aula, encerrando a última aula da prática realizada.

4.1.4 Validação da proposta

Nesta seção analisaremos as três aulas que constituíram a sequência didática, assim como as respostas de três alunos para o teste entregue no final da terceira aula.

4.1.4.1 **Análise das aulas**

Para sabermos se a prática aplicada atingiu seus objetivos, analisaremos as perguntas e comentários feitos pelos alunos no decorrer das três aulas.

A primeira observação que pode ser feita é com relação à adição de matrizes. Quando apresentei as tabelas 5 e 7 para os alunos e perguntei como poderíamos obter uma terceira tabela que possuísse o total de informações contida nas anteriores, entre os alunos que se pronunciaram a resposta foi unânime, todos concordaram que bastava somar as respectivas entradas de cada uma das tabelas.

Percebemos que os alunos já trazem consigo um conhecimento do cotidiano que permitiu que eles *antecipassem* essa operação, no sentido de saber defini-la, não formalmente, sem sequer necessitar que o professor tenha falado em adição. A partir do momento que os alunos sabem identificar as informações contidas nas tabelas fica claro que estas devem ser somadas com suas correspondentes para que se obtenha o seu total.

Ao contrário da situação citada acima, quando perguntei se poderíamos somar tabelas com números diferentes de linhas e colunas houve um pouco de confusão por parte deles. Alguns alunos acharam que ao somarmos essas matrizes bastava adicionar linhas e colunas formadas por 0 na matriz de menor ordem. Então falei para eles que quando falamos em matrizes, ao adicionarmos tais linhas e colunas estamos modificando elas, pois estaremos alterando suas ordens. Tentei convencer os alunos apresentando este raciocínio, mas não surtiu efeito, eles continuavam sem entender o motivo de não poder adicionar novas linhas e colunas. O exemplo deles como uma situação prática faz sentido de ser imaginado, a partir dos exemplos que eu havia dado pode-se imaginar um time de futebol entrando no decorrer de um campeonato, tendo desta forma suas estatísticas iguais a 0. Talvez por este exemplo ser passível de ser imaginado que eles não tenham entendido o motivo pelo qual não podemos adicionar linhas e colunas, mesmo tendo seus elementos iguais a 0, em matrizes de ordem diferentes ao tentar somá-las.

Já durante a segunda aula, no decorrer da primeira atividade de transformar os pontos *A*, *B* e *C* utilizando o GeoGebra, perguntei aos alunos as coordenadas destes pontos transformados, depois de terem me respondido e ficados em silêncio um dos alunos fez uma observação falando: "*o x de cada ponto está multiplicado por dois e o y ficou igual*". Ele conseguiu perceber o que estava acontecendo com cada componente *x* e *y* dos pontos, antecipando a importância deste resultado ao comentar em voz alta para a turma o que havíamos acabado de fazer. Ao conversar com o aluno alguns minutos depois, percebi que ele havia também preenchido uma das lacunas do roteiro, que pedia a lei da transformação que era justamente a observação que ele havia feito em aula.

Quando solicitei aos alunos que inserissem outra matriz no programa e fizessem mais uma transformação, da mesma forma como haviam feito anteriormente, um aluno então perguntou se existia um modo de transformar todos os pontos ao mesmo tempo. Do modo como aconteceu anteriormente um aluno, sem qualquer tipo de interferência minha, se deu conta que poderia existir uma maneira mais fácil de fazer a transformação e me questionou sobre tal modo.

No terceiro encontro, em um momento perguntei o resultado de uma multiplicação de duas matrizes, que os alunos deveriam ter anotado, e um deles me respondeu corretamente, porém não estava segurando nenhum tipo de anotação. Quando perguntei para ele o modo como havia feito a multiplicação ele respondeu que havia multiplicado os elementos termo a termo. É importante ressaltar que neste exemplo em específico o resultado da multiplicação a partir da definição e do produto termo a termo é o mesmo, e como ainda não havíamos visto a definição de produto estes fatores combinados fizeram o aluno imaginar que a multiplicação entre matrizes era feita da mesma forma como a adição, operando os elementos termo a termo.

É importante acrescentar também que o mesmo aluno que percebeu as leis das transformações na aula 2 conseguiu antecipar e se dar conta da condição para se fazer o produto entre duas matrizes, enquanto eu havia apenas comentado que alguns produtos não seriam possíveis de serem feitos.

Abaixo analisaremos os testes de três alunos, que chamaremos de A, B e C. As análises destes testes foram feitas levando em conta que além de apresentar aos alunos a razão de não fazermos a multiplicação de matrizes de forma análoga à adição gostaríamos também que eles aprendessem este conteúdo, já que esta prática estava sendo ministrada em horário de aula da turma.

O teste era composto de 4 perguntas, a saber:

1) Faça a multiplicação das matrizes $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Multiplique as matrizes $Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

3) Se as duas matrizes do exercício 1, V e U, representam transformações, o que significa o produto $V.U$?

4) Se a matriz V é a matriz de uma transformação e a matriz $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz cujas colunas são os vértices de um polígono, o que representa o produto que obtemos fazendo $V.W$?

Figura 9 - Teste de avaliação das atividades

4.1.4.2 <u>**Análise das respostas do aluno A**</u>

O aluno que aqui chamaremos de A apresentou as seguintes respostas para as perguntas 1 e 2:

1) $\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2-2 & 3+2 \\ -4-3 & -6+3 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}}$

2) $\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -1-3+20 & 2+4 \\ -2+9-10 & 4-2 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 16 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$

Figura 10 - Respostas do aluno A para as questões 1 e 2

Observando as respostas do aluno A para as duas primeiras perguntas do teste podemos ver que ele soube utilizar a definição de multiplicação de matrizes, tendo desta forma chegado corretamente as matrizes resultantes de cada uma das multiplicações.

Para a pergunta 3 ele apresentou a seguinte resposta:

3) O produto V.U faz as transformação V e U de uma vez só.

Figura 11 - Resposta do aluno A para a questão 3

Nesta resposta vemos que o aluno, de certa forma, demonstra ter entendido que o produto de matrizes armazena transformações geométricas, o que havia sido proposto nas atividades que apresentamos nas aulas, embora ele não tenha falado explicitamente sobre a matriz resultante do produto "$V.U$".

O aluno A não respondeu a questão 4, o que pode ter sido causado tanto por uma dúvida na interpretação da questão, quanto uma dúvida na própria questão em si, que apresenta um enunciado mais elaborado em relação às outras. Mas de qualquer forma é impossível analisarmos essa falta de resposta.

4.1.4.3 **Análise das respostas do aluno B**

O aluno B, responde as duas primeiras questões desta forma:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 20 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Figura 12 - Respostas do aluno B para as questões 1 e 2

Este aluno apresenta somente o resultado final das duas multiplicações que eram pedidas nos exercícios 1 e 2.

Na primeira multiplicação, que corresponde à resposta "A" dele, podemos perceber que ele multiplicou as matrizes termo a termo, como se estivesse fazendo a adição delas.

Na segunda multiplicação, que corresponde à resposta "B" do aluno, percebemos que ele faz a multiplicação termo a termo novamente, mas como as matrizes não possuem a mesma ordem ele faz a multiplicação de forma invertida, multiplicando os elementos das linhas da primeira matriz pelos elementos das colunas da segunda. Como ele realiza a multiplicação no primeiro caso de uma maneira e no segundo caso de outra, torna-se evidente que este aluno não entendeu como aplicar a definição de multiplicação de matrizes para fazer o produto e acabou simplesmente multiplicando os elementos como achou mais conveniente.

A resposta da terceira pergunta foi a seguinte:

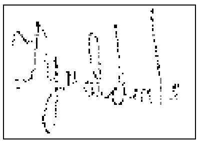


Figura 13 - Resposta do aluno B para a questão 3

O aluno respondeu apenas “*Igualdade*” para a pergunta 3.

É difícil fazer uma análise mais profunda desta resposta, dado que aluno o respondeu apenas isso. Então o que podemos concluir é que o aluno também não entendeu o que estávamos propondo ao fazer as transformações na atividade que executamos no laboratório de informática.

Como resposta para a questão 4 o aluno B apresentou a seguinte resposta:

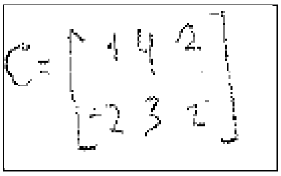


Figura 14 - Resposta do aluno B para a questão 4

O aluno para responder esta questão apresentou o resultado da multiplicação das matrizes *V* e *W*, mas novamente fez o produto de um modo aleatório. Desta vez ele multiplicou alguns dos elementos termo a termo e os elementos da matriz *W* que não possuíam correspondentes em *V* foram apenas copiados na matriz resultante. Mostrando novamente o que foi concluído na análise das questões 1 e 2.

4.1.4.4 <u>**Análise das respostas do aluno C**</u>

O aluno C respondeu a primeira questão da seguinte forma:

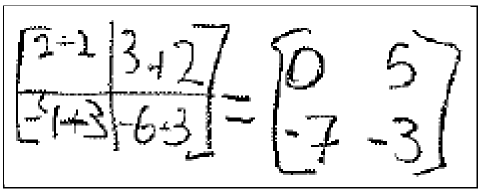


Figura 15 - Resposta do aluno C para a questão 1

Assim como o aluno A, o aluno C aplica corretamente a definição da multiplicação de matrizes e obtém a matriz resultante corretamente.

A resposta da pergunta 2 é apresentada da mesma forma:

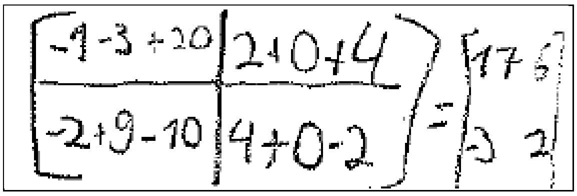


Figura 16 - Resposta do aluno C para a questão 2

Podemos notar que nas duas respostas são apresentadas uma matriz na qual os elementos são separados por traços e apresentam o cálculo resultante da multiplicação dos elementos das linhas pelas colunas seguido da soma dos mesmos, assim como foi mostrado em aula. Porém o aluno se confundiu no momento de fazer a adição dos números que resultaram no elemento a_{11} e obteve como resultado o número 17.

Como resposta para a questão 3 o aluno apresentou o seguinte raciocínio:

Figura 17 - Resposta do aluno C para a questão 3

O aluno C tentou utilizar as notações utilizadas em aula para explicar o que estava acontecendo nesta questão, o que acabou tornando sua explicação meio superficial, mas analisando o que foi dito é percebido que o aluno entendeu que ao multiplicar as matrizes ele criará uma nova matriz que representa a composta das funções das matrizes que foram multiplicadas.

Como resposta para a pergunta 4 o aluno C apresentou a seguinte frase:

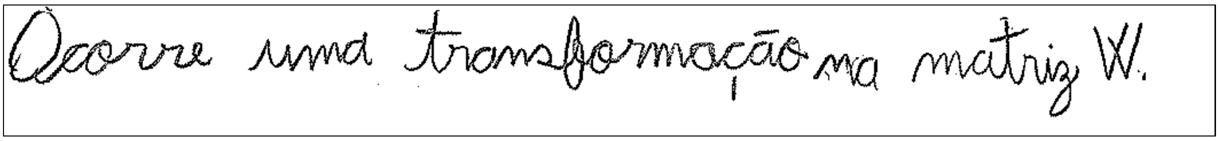


Figura 18 - Resposta do aluno C para a questão 4

Dentre os três alunos que tiveram suas respostas analisadas, o único que respondeu a questão 4 foi o aluno C. Este apresentou clareza e respondeu corretamente o que havia sido perguntado, mostrando que havia entendido claramente o que foi proposto nas atividades realizadas durante as três aulas aqui descritas.

Após fazer a análise das aulas e das respostas dos testes apresentados neste capítulo, podemos dizer que as nossas atividades atingiram os objetivos iniciais, pois a maioria dos alunos mostrou conhecimento do conteúdo de multiplicação de matrizes, assim como do significado geométrico desta operação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como objetivo principal deste trabalho, tínhamos o intuito de motivar o estudo de multiplicação de matrizes, buscando, a partir da utilização de transformações geométricas, justificar a maneira como esta operação é definida. Pretendíamos, também, analisar a contribuição que este método de abordagem poderia gerar no aprendizado deste conteúdo por parte dos estudantes com os quais trabalhamos.

Ao final deste trabalho, após relembrar e analisar os dados obtidos durante as práticas que realizamos e as respostas de alguns testes, podemos fazer uma reflexão sobre o alcance dos nossos objetivos iniciais.

Durante a realização de nossos encontros, percebemos bastante empenho por parte dos alunos no desenvolvimento das atividades, o que acreditamos ter sido um ponto positivo, visto que o interesse dos mesmos era fundamental para o bom andamento da atividade planejada. Apesar de não termos desenvolvido completamente algumas atividades que havíamos planejado, devido à falta de tempo, ao analisarmos os dados coletados percebemos que alguns alunos atingiram as expectativas, demonstrando domínio sobre os conceitos envolvidos na definição de multiplicação de matrizes que tratam desde a forma como multiplicar duas matrizes até a interpretação geométrica que pode ser dada a este produto.

É também importante ressaltar as observações feitas pelos alunos, principalmente durante o primeiro e o terceiro encontros. Alguns deles apresentaram, no decorrer das explicações, uma grande capacidade de antecipação do conteúdo, ou seja, muitas vezes, ao explicarmos algo novo, os alunos percebiam imediatamente a condição necessária para que aquela operação pudesse ser realizada. Além disso, durante a apresentação de exemplos sempre perguntavam sobre os casos mais especiais, que requisitavam maior atenção para serem resolvidos.

Desta forma, avaliamos positivamente o conjunto de atividades descrito neste trabalho. Podemos ainda ressaltar alguns pontos que poderiam ter sido previstos e, quem sabe, alterados, como, por exemplo, se os alunos tivessem um conhecimento prévio do programa GeoGebra utilizado na execução das atividades, teríamos nos concentrado menos na explicação dos comandos do mesmo, podendo aproveitar este tempo extra para visualizar uma quantidade maior de transformações. Além disso, poderíamos ter planejado a quantidade de atividades em cada aula de forma que em nenhuma delas o tempo para execução fosse insuficiente.

REFERÊNCIAS

[1] BRAGA, Rodrigo O.; RODRIGUES, Virgínia M. **Uma aplicação de matrizes em computação gráfica: transformações geométricas.** Apostila.

[2] BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3.ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[3] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2012.

[4] CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Campinas-UNICAMP: Zetetike, v.13, n.23, 2005, p.85-118.

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.

[6] de BERG, M.; van KREVELD, M.; OVERMARS, M.; SCHWARZKOPF, O. **Computational Geometry: Algorithms and Applications.** London: Springer, 1997.

[7] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

[8] LAY, David C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

[9] MACHADO, Antonio dos Santos. **Aprender e Aplicar Matemática.** 1. ed. São Paulo: Atual, 2011.

[10] MELLO, José Luiz Pastore. **Matemática, volume único: construção e significado.** 1. ed. São Paulo: Moderna 2005 (obra concebida, desenvolvida e produzida pelo departamento de edições educativas da editora moderna).

[11] MIGUEL, José Carlos. **O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas**. In: Sheila Zambello de Pinho; José Roberto Corrêa Saglietti. (Org.). Núcleos de Ensino - PROGRAD - UNESP. 1 ed.São Paulo - SP: Editora UNESP, 2005, v.1, p. 375-394.

[12] POSSANI, Claudio. **O produto de matrizes.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 21, p. 35-39. 1992.

[13] STORMOWSKI, Vandoir. **Estudando matrizes a partir de transformações geométricas**. Porto Alegre, 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). PPG-ENSIMAT, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[14] MESSIAS, Maria Alice V. F.; SÁ, Pedro F.; FONSECA, Rubens V. **Um Estudo Diagnóstico sobre as Dificuldades em Matrizes.** IX ENEM – Encontro Nacional de

Educação Matemática, Belo Horizonte, MG, 2007. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/posteres.html>.

[15] GeoGebra. Disponível em: <www.geogebra.org/cms/pt_BR> . Acesso em: 10 out. 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PLANEJAMENTO DO PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro será uma aula introdutória sobre matrizes. No começo da aula será perguntado aos alunos se eles sabem o que é uma matriz e, após ouvir as respostas e os comentários deles, apresentarei as tabelas 1 e 2 no quadro e a partir delas poderei definir o que é uma matriz.

Times	Vitórias	Empates	Derrotas
Sapucaiense	3	0	1
Juventude	1	2	1

Tabela 1 – Resultados dos jogos do 1° turno de um campeonato

Produtos	Preço por un. (R$)	Quantidade	Total (R$)
Refrigerante	5	10	50
Pizza	20	5	100
Bolo	2	15	30

Tabela 2 - Gastos com compras

Definição: Denomina-se matriz de tamanho m x n uma tabela retangular formada por $m\,.\,n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

Depois de definir matriz apresentarei alguns exemplos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Em seguida, usarei os exemplos para explicar o que são os elementos de uma matriz e citar as notações utilizadas. Direi que cada elemento possui dois índices que o localizam, ou seja, que determinam sua posição na matriz. Assim, o primeiro índice, chamado de “i”, é o indicador da linha e o segundo índice, chamado de “j”, é o indicador da coluna do elemento. Dessa forma, o elemento da linha i e coluna j é o elemento a_{ij} de uma matriz A. Sempre que nos referimos a uma matriz utilizaremos letras maiúsculas e aos nos referirmos aos elementos utilizaremos letras minúsculas.

Após essa explicação, utilizarei os exemplos anteriores para ilustração:

Exemplo 1: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. O elemento 1 encontra-se na posição *11*, pois está na primeira linha e primeira coluna da matriz A. Já o elemento 2 ocupa a posição *21* porque se encontra na segunda linha e primeira coluna.

Exemplo 2: Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$. O elemento -2 está na terceira linha e na segunda coluna, por isso ele é o elemento b_{32}.

Em seguida, continuarei com a apresentação do conteúdo mostrando que, assim como com números reais, também podemos definir a soma de duas ou mais matrizes. Apresentarei as tabelas 1 e 3 com os resultados de um campeonato fictício.

Times	Vitórias	Derrotas	Empates
Sapucaiense	3	0	1
Juventude	1	2	1

Tabela 1 - Resultados dos jogos do 1° turno de um campeonato

Times	Vitórias	Derrotas	Empates
Sapucaiense	1	1	1
Juventude	1	1	1

Tabela 3 – Resultados dos jogos do 2° turno de um campeonato

Perguntarei para os alunos como procedemos para saber qual foi o desempenho final de cada equipe no campeonato ilustrado pelas tabelas 1 e 3. Depois de ouvir as respostas e comentários concluiremos que para chegar ao desempenho final das equipes basta que somemos cada uma das respectivas entradas nas tabelas 1 e 3, obtendo assim a nossa tabela 4.

Times	Vitórias	Derrotas	Empates
Sapucaiense	4	1	2
Juventude	2	3	2

Tabela 4 - Resultado final do campeonato

Em seguida definirei que, como no exemplo acima, para somar duas matrizes basta somar os elementos da mesma posição, e que para isso as matrizes precisam ter mesma ordem, ou seja, mesmo número de linhas e de colunas.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = $?, não tem solução.

Verificamos que a as nossas matrizes não tem o mesmo número de elementos, logo não poderemos somar os seus elementos correspondentes. Depois desse exemplo e de sua explicação será dada a definição de soma de matrizes e a condição para efetuar a soma.

Definição: Dadas suas matrizes A e B de mesma ordem m x n, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C de ordem m x n na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja, $C = a_{ij} + b_{ij}$.

Assim como podemos somar matrizes também podemos fazer outras operações com elas, como, por exemplo, multiplicar uma matriz por um número, que denominamos "*multiplicação por escalar*". A multiplicação por escalar consiste em multiplicar todos os elementos de uma matriz pelo mesmo número. Um exemplo é a seguinte situação: uma tabela com o gasto mensal de uma casa. Se quisermos fazer uma estimativa do gasto para mais meses basta multiplicarmos os gastos do primeiro mês pelo número de meses para o qual queremos fazer a previsão, levando em conta que os gastos são os mesmos e que os produtos não sofram alterações de preço. Após o exemplo será dada a definição e alguns exemplos.

Definição: Se A é uma matriz m x n, de elementos a_{ij}, e α é um número real, então αA é uma matriz m x n cujos elementos são αa_{ij}.

Exemplo 3: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e o escalar α = 2. Fazemos a multiplicação de A pelo escalar ao multiplicarmos cada elemento de A por 2.

$$2.A = 2.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 & 2.1 \\ 2.-1 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4: Analogamente, ao multiplicarmos $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ pelo escalar α = 0.

$$0.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No exemplo 4 temos o caso de uma das matrizes especiais que veremos a seguir, trata-se da Matriz Nula, a matriz nula possui todos os seus elementos a_{ij} iguais a 0, para todo i e j.

A seguir veremos outros casos de matrizes especiais.

1) Matriz quadrada é a matriz *A* de ordem m x n que tem $m = n$. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

2) Matriz coluna é a matriz que possui apenas uma coluna. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3) Matriz linha é a matriz que possui apenas uma linha. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4) Matriz identidade é a matriz quadrada cujos elementos que possuem seus índices *i e j* iguais são todos iguais a um, enquanto que os elementos com índices diferentes são todos iguais a zero. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Após o término das explicações escreverei no quadro alguns exercícios para que os alunos resolvam.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -7 & -15 & -1 \\ 11 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $2.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

e) $-3.\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 27 \end{bmatrix}$

APÊNDICE B – PLANEJAMENTO DO SEGUNDO ENCONTRO

Iniciarei a aula com uma breve apresentação do *software* GeoGebra. Falarei sobre alguns recursos matemáticos que o *software* apresenta: gráficos de funções, construções de polígonos e calculo de áreas, ângulos e medidas, etc.

Para utilizar o programa utilizaremos o “campo de entrada” do programa. O campo de entrada é uma barra que fica acima da borda inferior da tela, é nele que são digitados todos os comandos que precisam ser escritos por extenso. Observemos a figura abaixo e em seguida o resultado do comando utilizado.

Figura 19 - matriz A digitada no campo de entrada

O comando utilizado na figura 1 cria a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. O primeiro e o segundo conjunto de dois elementos correspondem, respectivamente, a primeira e segunda linhas da matriz.

É no campo de entrada que faremos a soma de duas matrizes A e B utilizando o comando “$A + B$”. Assim como “$A * B$” para fazer a sua multiplicação.

Além do campo de entrada também utilizaremos a barra de ferramentas. Ela está localizada na parte superior da tela do programa e nos dá acesso direto a alguns recursos que utilizaremos, assim como o comando “Novo Ponto”, conforme figura abaixo.

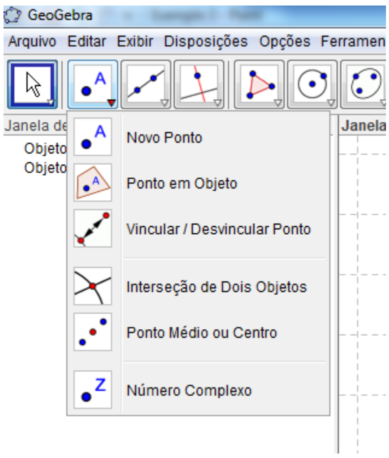


Figura 20 – Comando de criar ponto

Após selecionarmos o comando basta clicar sobre o ponto que gostaríamos de marcar na malha pontilhada da tela. Também podemos marcar um ponto no campo de entrada digitando a coordenadas do ponto juntamente com seu nome. Para marcar o ponto (1,1) utilizamos o comando da figura abaixo.

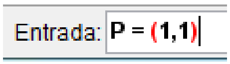


Figura 21 - Criação do ponto P

Para criar um polígono com vértices em pontos que já criamos, selecionamos a opção “Polígono”, e em seguida clicamos sobre os pontos que serão seus vértices. Após clicar no último vértice do polígono devemos clicar novamente sobre o primeiro para informar ao *software* que a operação terminou.

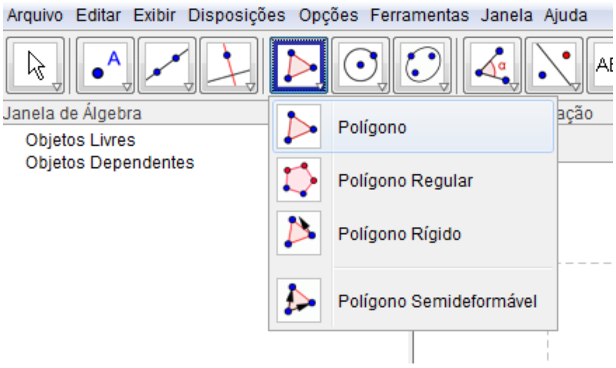


Figura 22 – Comando de criar polígono

Continuando a aula, explicarei que as matrizes podem ser utilizadas para realizar “transformações geométricas” de figuras no plano, com as quais podemos dilatar, refletir e rotacionar uma figura, por exemplo.

Para ilustrar criaremos o polígono de vértices $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,2)$ abaixo.

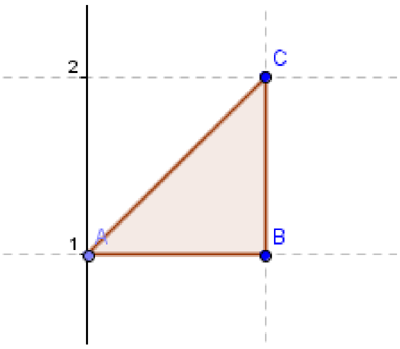


Figura 23 - Triângulo ABC

Agora faremos uma transformação geométrica em seus vértices utilizando a matriz $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para realizar a transformação multiplicaremos a matriz U pelos vértices A, B e C do triângulo utilizando os comandos "$U * A$", "$U * B$" e "$U * C$", obtendo assim os pontos A' (0,1), B' (2,1), C' (2,2) que serão os vértices de um novo triângulo transformado. A multiplicação feita dessa forma só funciona, porque o programa enxerga os pontos como vetores colunas, ou seja, cada ponto pode ser escrito como uma matriz em que as coordenadas (x, y) ficam da seguinte forma: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. E é por isso que o programa consegue fazer a multiplicação entre a matriz U e os pontos utilizando diretamente os comandos citados acima. Desta forma, teremos abaixo a figura com os vértices transformados: A', B' e C'.

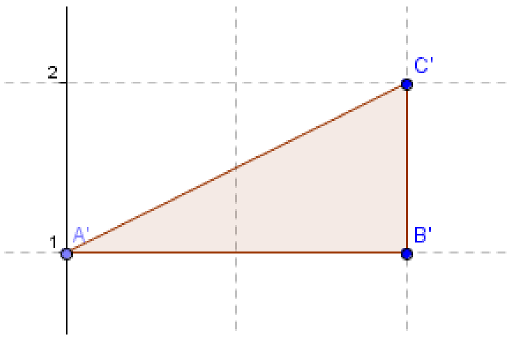


Figura 24 - Triângulo resultado da transformação do triângulo ABC

Em seguida analisarei com os alunos o que aconteceu com as coordenadas dos pontos A, B, C, A', B' e C'. Falarei que todas as coordenadas x dos pontos foram transformadas em $2x$ e que as coordenadas y permaneceram as mesmas. Logo podemos dizer que essa transformação é uma função que leva um ponto (x, y) num ponto $(2x, y)$. A partir daqui explicarei, como poderíamos obter a matriz $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a partir da lei da função que transforma os pontos. A primeira linha da matriz será composta pelos coeficientes de x e y na 1° componente da função. Por exemplo, para levar (x, y) em $(2x, y)$ nós apenas multiplicamos o x por dois, não foi preciso somar nada a ele para isso. Logo, temos $2x + 0y$ e a primeira linha da matriz é $[2 \quad 0]$. Analogamente a segunda linha é formada pelos coeficientes de x e y na 2° componente da função. Assim, como a coordenada y não sofreu nenhuma alteração, temos $0x + y$, resultando na segunda linha $[0 \quad 1]$. Logo $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e deste modo poderemos obter as matrizes das próximas transformações.

Continuando a aula faremos uma nova transformação com o polígono $A'B'C'$. Multiplicaremos desta vez a matriz $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ pelos vértices e observaremos o que acontece.

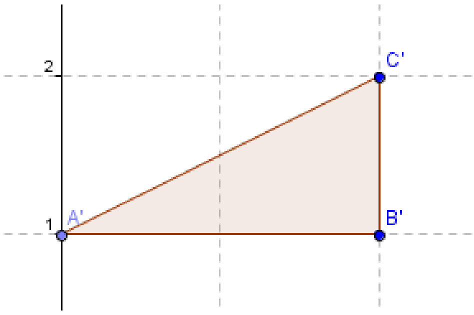


Figura 25 – Polígono A'B'C' originalmente

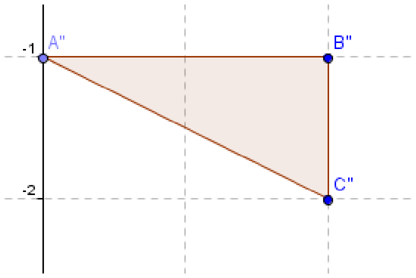


Figura 26 – Reflexão sobre o eixo x do polígono A'B'C'

.Com essa transformação, obtemos os novos vértices $A''(0,-1)$, $B''(2,-1)$ e $C''(2,-2)$, polígono da figura 7. Observando esses vértices veremos que as coordenadas y de cada um deles trocaram de sinal, o que fez com que o polígono sofresse uma reflexão em torno do eixo x. Pensando em termos de função como feito anteriormente, temos que desta vez os pontos (x, y) tornaram-se $(x, -y)$. Utilizando o raciocínio de antes, partindo da lei da função poderíamos obter a matriz utilizada, $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Nos exemplos das figuras 5, 6 e 7 nós multiplicamos a matriz da transformação por cada um dos vértices do polígono que queríamos alterar, porém este processo pode ser feito em uma única multiplicação de matrizes, transformando todos os vértices ao mesmo tempo. Agora mostrarei aos alunos como isso pode ser feito. Como vimos anteriormente, um ponto $A(x, y)$ pode ser representado por uma matriz coluna $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, podemos montar uma matriz P com os vértices A, B e C do polígono da seguinte maneira: $P = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \end{bmatrix}$, em que as colunas são as coordenadas de cada um dos vértices. Assim podemos transformar o polígono multiplicando a matriz da transformação pela matriz dos vértices. Por exemplo, fazendo a multiplicação da matriz U pela matriz dos vértices A, B e C, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, que é a matriz que contém os vértices A', B', C' nas colunas, nessa ordem, resultando nos três vértices do polígono em um único passo.

Vamos agora ver se é possível fazer as transformações das figuras 5 e 7 em um único passo. Para isso precisaríamos de uma matriz que realizasse as duas transformações ao mesmo tempo. Já observamos que as transformações podem ser vistas como funções. Primeiro tínhamos a função que levava (x, y) em $(2x, y)$, que chamaremos de f, e depois a função que levava (x, y) em $(x, -y)$, que chamaremos de g. Fazendo a composição destas funções, temos a função h que leva (x, y) em $g(f(x, y))$, na qual fazemos primeiro a transformação f, uma dilatação da coordenada x dos vértices, seguida da transformação g, reflexão em torno do eixo x. Assim, fazendo essa composição teremos a transformação h que leva (x, y) em $(2x, -y)$, pois $h(x, y) = g(f(x, y)) = g(2x, y) = (2x, -y)$. Observa-se que a matriz da transformação $h = gof$ é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Por outro lado, se multiplicarmos as matrizes de f e g, na qual a matriz da 1° transformação a ser aplicada, f, é a da direta obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz que representa a transformação composta $h = gof$ pode ser obtida multiplicando-se as matrizes de f e de g, mas como a primeira transformação que foi feita foi a f, devemos posicioná-la à direta da matriz transformação de g. Então se multiplicarmos a matriz de h pela matriz dos vértices, obtemos os vértices do polígono dilatado e refletido. A seguir pedirei aos alunos que efetuem a multiplicação abaixo e me digam se o resultado encontrado confere com os vértices do triângulo $A''B''C''$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora vamos considerar outro exemplo de transformação geométrica, a rotação. Esta transformação permitirá girar uma figura em torno da origem, no sentido anti-horário, ou horário, sem modificar a sua forma nem suas medidas. Como os alunos ainda não tem conhecimento do conteúdo de Trigonometria, não será possível deduzir a lei dessa transformação, pois esta depende dos valores dos senos e cossenos dos ângulos envolvidos. Por este motivo, apresentarei prontas as matrizes das transformações que fazem as rotações de 90° e 180° no sentido anti-horário e de 90° no sentido horário:

- ✓ $R_{90°} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, rotação de 90° no sentido anti-horário.
- ✓ $R_{180°} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, rotação de 180°.
- ✓ $R_{-90°} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, rotação de 90° no sentido horário.

Podemos utilizar o triângulo ABC e adicionar uma terceira transformação às já feitas anteriormente, uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Assim, utilizando a figura 8 poderemos analisar o que esta rotação fará com os vértices. Adicionando também esta transformação teremos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ representa os vértices do triângulo $A'''B'''C'''$.

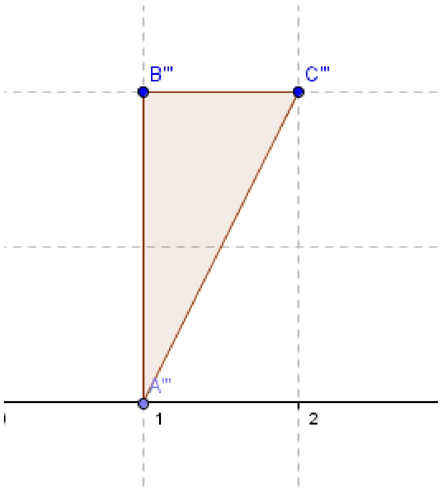


Figura 27 - Triângulo A'''B'''C'''

Então, após vermos estes exemplos concluímos que ao multiplicarmos duas, ou mais, matrizes que contenham transformações geométricas, estamos na verdade armazenando essas transformações em uma única matriz, para que possamos fazer várias transformações em um único passo, ao utilizarmos a matriz que contém todas elas.

APÊNDICE C – PLANEJAMENTO DO TERCEIRO ENCONTRO

Começarei esta aula falando e fazendo os desenhos de dois exemplos da aula anterior, que havíamos feito utilizando o GeoGebra, também comentarei um pouco sobre a área de aplicação do produto de matrizes e qual o contexto em que ele surgiu.

O primeiro exemplo, que fora utilizado na aula anterior, foi a multiplicação da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ pela matriz dos vértices do triângulo ABC, da qual obtivemos a matriz dos vértices transformados. Quando fizemos esta multiplicação utilizamos o fato das matrizes armazenarem transformações geométricas para aplicar essa transformação aos vértices do triângulo, que nada mais é, do que calcular a imagem da função que a matriz representa em vários pontos ao mesmo tempo.

O segundo exemplo utilizado anteriormente foi a multiplicação de duas matrizes que representam transformações, o que resultou na matriz que realizava essas duas transformações ao mesmo tempo. Isso, porque cada matriz transformação representa a lei de uma função e quando multiplicamos essas matrizes estamos compondo tais funções.

O exemplo de aplicação do qual falarei é a computação gráfica. O produto de matrizes é muito utilizado para fazer os efeitos especiais que vemos em filmes, jogos, etc. E historicamente, o produto de matrizes surgiu sendo definido como composição de funções, aparecendo antes das outras operações com matrizes que vimos nas aulas anteriores.

Aproveitarei que eles já sabem os resultados dos exemplos da aula anterior e farei os produtos manualmente, para mostrar a eles como se resolve sem a ajuda do computador.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Depois de mostrar como se faz o produto, utilizando os dois exemplos já conhecidos pelos alunos, multiplicarei mais duas matrizes que não contenham nenhum elemento igual a zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Analisando as matrizes do exemplo acima podemos encontrar as funções de cada matriz: a lei da primeira matriz é $g(x, y) = (-x + 2y, 3x + y)$ e a lei da segunda é $f(x, y) = (2x + y, -4x + 2y)$. Em seguida fazendo a composição das duas leis verificamos que a multiplicação já havia nos dado a lei da composta.

$$gof = g(f(x, y)) = (-(2x + y) + 2.(-4x + 2y), 3.(2x + y) + (-4x + 2y))$$
$$= (-2x - y - 8x + 4y, 6x + 3y - 4x + 2y) = (-10x + 3y, 2x + 5y)$$

Montando a matriz desta função obtemos a matriz $\begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, que é justamente a que queríamos encontrar. Logo, concluímos que ao fazer a multiplicação de matrizes nós estamos compondo as leis que elas representam.

Após fazer a composição de funções com números, farei a composição de duas funções genéricas, para demonstrar o método utilizado para fazer o produto de matrizes.

Dadas duas funções com leis:

$F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ e $G(x, y) = (ex + fy, gx + hy)$.

Fazendo a composição teremos:

$$G(F(x, y)) = G(e.(ax + by) + f.(cx + dy), g.(ax + by) + h.(cx + dy))$$
$$= (e.ax + e.by + f.cx + f.dy, g.ax + g.by + h.cx + h.dy)$$
$$= ((a.e + c.f).x + (b.e + d.f).y, (a.g + c.h).x + (b.g + d.h).y)$$
$$= \begin{bmatrix} a.e + c.f & b.e + d.f \\ a.g + c.h & b.g + d.h \end{bmatrix}$$

Em que a matriz $T = \begin{bmatrix} a.e + c.f & b.e + d.f \\ a.g + c.h & b.g + d.h \end{bmatrix}$ é o resultado do produto $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, e é a matriz que faz as transformações F e G simultaneamente.

Em seguida, explicarei que também podemos fazer o produto de matrizes de ordem maior que 2x2 e que ele é realizado da mesma forma. Também explicarei que para podermos fazer a multiplicação de matrizes, precisamos que a primeira tenha o número de elementos em suas linhas igual ao número de elementos nas colunas da segunda. Desta forma, concluiremos que a primeira matriz precisa ter o número de colunas igual ao número de linhas da segunda.

Após termos definido a condição para poder fazer o produto, falarei que a matriz resultante terá a ordem igual ao número de linhas da primeira matriz juntamente com o número de colunas da segunda.

Exemplo:

$$A_{2x3} \ x \ B_{3x4} = C_{2x4}.$$

Depois de terminar a apresentação do conteúdo, entregarei os testes para os alunos responderem.

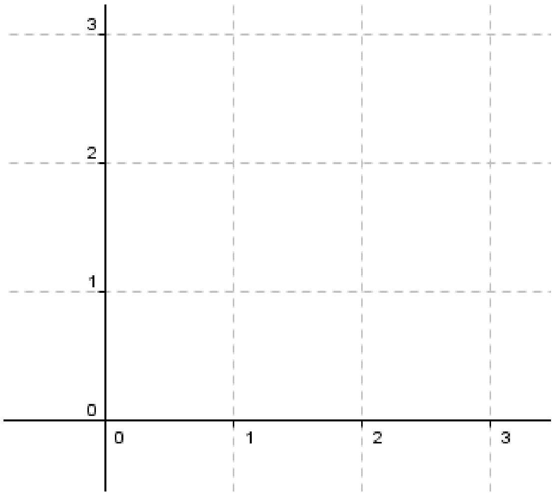
APÊNDICE D – ROTEIRO PARA AS ATIVIDADES DO SEGUNDO ENCONTRO

Acadêmico: Rodrigo da Cruz

Matrizes e transformações Geométricas

Triângulo ABC

Marque e ligue os pontos $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,2)$ no quadriculado ao lado, para formar o triângulo de vértices ABC.



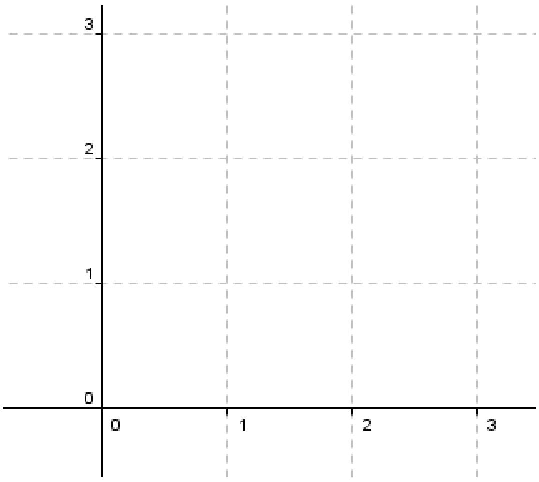
Dilatação horizontal de fator 2

Faça a multiplicação da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ por cada vértice do triângulo ABC. Marque e ligue ao lado os novos pontos obtidos.

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$



Qual é a lei da função que fez essa transformação?

$$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$$

Reflexão em torno do eixo x

Transforme os vértices do triângulo $A'B'C'$, utilizando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Em seguida marque e ligue os pontos no quadriculado ao lado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix}$$

Qual é a lei desta outra transformação?

$$(x, y) \to (\quad , \quad)$$

Obs: Nos exemplos acima poderíamos ter transformado todos os vértices dos triângulos ao mesmo tempo, bastando para isso multiplicar a matriz da transformação pela matriz em que os vértices formem as colunas. Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Dilatação e reflexão

Podemos encontrar a matriz que realiza as duas transformações anteriores ao mesmo tempo, basta que saibamos a lei da transformação que faz isso. A lei da primeira transformação é $f(x, y) = (\quad , \quad)$ e a da segunda é $g(x, y) = (\quad , \quad)$. Então a matriz que faz estas duas ao mesmo tempo é a composta gof cuja lei é $g(f(x, y)) = (\quad , \quad)$. Montando a matriz desta transformação obtemos: $\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} = T$.

Faça a multiplicação de T pelos vértices A, B e C e observe que o resultado obtido é o mesmo das transformações anteriores.

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Rotação em torno da origem

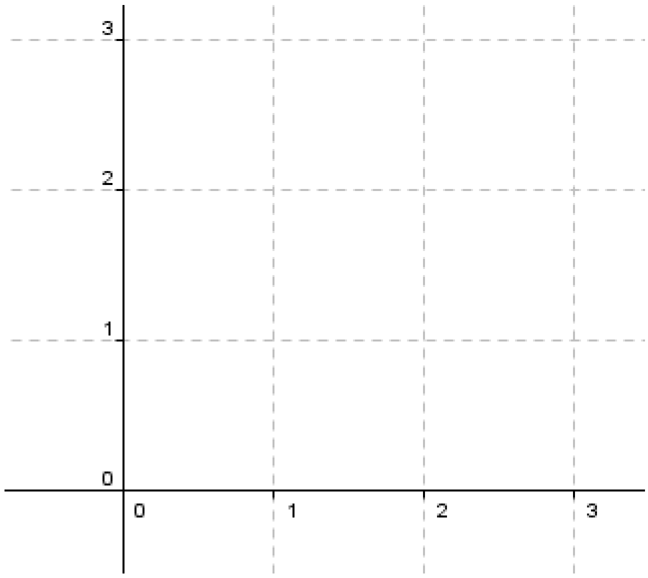
Algumas matrizes de rotação:

- ✓ $R_{90°} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$: rotação de 90° no sentido anti-horário.
- ✓ $R_{180°} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$: rotação de 180°.
- ✓ $R_{-90°} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: rotação de 90° no sentido horário.

Vamos realizar uma rotação de 90º no sentido anti-horário com o triângulo $A''B''C''$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Marque e ligue os novos vértices $A'''B'''C'''$ no quadriculado ao lado e compare com a figura obtida na transformação anterior.



Dilatação, Reflexão e Rotação

Vimos como proceder para fazer várias transformações em uma única multiplicação de matrizes. Utilizaremos este recurso para transformar o triângulo ABC original no triângulo $A'''B'''C'''$, realizando as três transformações vistas ao mesmo tempo.

A matriz da transformação composta é a matriz resultante do produto:

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$$

(Observe a ordem em que as transformações ocorreram para fazer corretamente a multiplicação).

Agora, multiplicamos os vértices do triângulo ABC pela matriz encontrada acima e verificamos o resultado.

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Agora marcamos no quadriculado abaixo.