

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MODELO DE ÔNIBUS SOB MANOBRA DIRECIONAL

por

Eduardo Botti Noronha

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2012

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MODELO DE ÔNIBUS SOB MANOBRA DIRECIONAL

por

Eduardo Botti Noronha

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Arnaldo Ruben Gonzalez
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Porto Alegre, 17 de dezembro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Walter Jesus Paucar Casas, por toda a compreensão ao longo de todo processo de produção deste trabalho, principalmente nas etapas iniciais.

Aos colegas Eduardo Menezes e Victor Machado, pelo apoio indispensável com a programação em Matlab[®] e TruckSim[®].

A Polyana Birkhan, pela motivação e companheirismo.

E, fundamentalmente, aos meus pais.

NORONHA, E. B. **Comportamento dinâmico de modelo de ônibus sob manobra direcional**. 2012. 29 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

Neste trabalho busca-se a confirmação de um modelo matemático de suspensão de ônibus a ar disponível na literatura para fins de simulação dinâmica de manobras direcionais. São apresentados os componentes do sistema de suspensão do ônibus e aplicadas as devidas simplificações ao equacionamento. Após isso são montadas as matrizes características do sistema. A programação do modelo é feita em Matlab® e a confirmação é testada através da comparação dos resultados com os obtidos no Trucksim®, um *software* comercial. Por fim, é comentada a equivalência dos modelos.

PALAVRAS-CHAVE: (multicorpo, simulação, suspensão a ar, ônibus)

NORONHA, E. B. **Dynamic behaviour of bus model during direction change**. 2012. 29 pages. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

The objective of this project is to confirm a mathematical model available in the literature of an air suspension as found in a bus. The model is optimized for dynamic simulations of maneuvers on a smooth road. The suspension components are presented, as well as the simplifications that will be assumed. Then, the mass, stiffness and damping matrices are built. The programming is made in Matlab[®] and the confirmation is tested through comparison of the results to those generated on a commercial software called TruckSim[®]. Finally, the equivalence between the models is commented.

KEYWORDS: (multibody, simulation, air suspension, bus)

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
4. DESCRIÇÃO DOS COMPONENTES DO SISTEMA DE SUSPENSÃO DE UM ÔNIBUS ...	2
4.1 Geometria da suspensão	2
4.2 Molas	3
4.3 Amortecedores	5
4.4 Barras estabilizadoras	5
4.5 Esterçamento	6
4.6 Pneus	7
5. METODOLOGIA	8
5.1 Sistema de coordenadas	8
5.2 Equações do movimento	9
5.3 Forças externas	10
5.4 Matrizes de massa, rigidez e amortecimento e vetor de forças	10
5.5 Equação de estado	11
6. CONFIRMAÇÃO	11
7. CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15
ANEXO I – DADOS DO VEÍCULO UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO	16
APÊNDICE I – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	18

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geometria da suspensão tipo quatro barras e Barra Panhard e determinação do seu centro de rolagem.	3
Figura 2 – Componentes da bolsa de ar.....	3
Figura 3 – Força desenvolvida pelo batente de borracha dianteiro.....	4
Figura 4 – Força desenvolvida pelo batente de borracha traseiro.	4
Figura 5 – Barra estabilizadora.....	5
Figura 6 – Geometria de Ackermann.....	6
Figura 7 – Força lateral desenvolvida pelo pneu em função do ângulo de escorregamento e da carga estática.....	7
Figura 8 – Sistemas de coordenadas móveis para cada massa do ônibus.....	8
Figura 9 – Perfil do ângulo de esterçamento aplicado ao sistema para manobra direcional tipo troca simples de faixa a 10 m/s.	12
Figura 10 – Resultados obtidos pelo autor em Matlab® (em azul) e TruckSim® (em vermelho) para manobra direcional tipo troca simples de faixa a 10 m/s.....	12
Figura 11 – Perfil do ângulo de esterçamento aplicado ao sistema para manobra direcional tipo troca dupla de faixa a 10 m/s.....	13
Figura 12 – Resultados obtidos pelo autor em Matlab® (em azul) e TruckSim® (em vermelho) para manobra direcional tipo troca dupla de faixa a 10 m/s.....	13
Figura I – Diagrama de corpo livre da massa suspensa.	18
Figura II– Diagrama de corpo livre da massa não suspensa.	19

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes de amortecimento.....	5
Tabela 2 – Coeficientes de rigidez torsional das barras estabilizadoras	6
Tabela 3 – Valores das massas [kg].....	16
Tabela 4 – Coordenadas em z dos centros de gravidade das massas em relação ao eixo de coordenadas [m].....	16
Tabela 5 – Momentos de inércia em x e z das massas [kg.m ²].....	16
Tabela 6 – Coordenadas em x e y das bolsas de ar em relação à origem do sistema de coordenadas [m].....	16
Tabela 7 – Coeficientes de rigidez dos foles de ar [N/m].....	16
Tabela 8 – Coordenadas em x e y dos amortecedores em relação à origem do sistema de coordenadas [m].....	16
Tabela 9 – Coordenadas em x e y dos pneus em relação à origem do sistema de coordenadas [m].....	17
Tabela 10 – Coeficientes de rigidez lateral dos pneus [N/rad].	17

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Unidade	Significado
ax_s	[m/s ²]	Aceleração em x da massa suspensa
ay_s	[m/s ²]	Aceleração em y da massa suspensa
BB	[N]	Constante de não linearidade do batente de borracha
BD	[N]	Constante de não linearidade do amortecedor
CA	[N/m]	Coefficiente de rigidez do fole de ar
CB	[N/m]	Coefficiente de rigidez do batente de borracha
CD	[N.s/m]	Coefficiente de amortecimento do amortecedor
CK	[N/m]	Coefficiente de rigidez da bolsa de ar
CL_T	[N/rad]	Coefficiente de rigidez lateral do pneu
CSB	[N.m/rad]	Coefficiente de rigidez torsional da barra estabilizadora
d_{AS}	[m]	Deformação da bolsa de ar
EFF	[N]	Força externa frontal
EFL	[N]	Força externa lateral
FA	[N]	Força de mola do fole de ar
FAS	[N]	Força de mola da bolsa de ar
FB	[N]	Força de mola do batente de borracha
FD	[N]	Força de amortecimento do amortecedor
FT_x	[N]	Força em x desenvolvida pelo pneu
FT_y	[N]	Força em y desenvolvida pelo pneu
FT_{lat}	[N]	Força lateral desenvolvida pelo pneu
g	[m/s ²]	Aceleração da gravidade
Ix_s	[kg.m ²]	Momento de inércia em x da massa suspensa
Iz_s	[kg.m ²]	Momento de inércia em z da massa suspensa
Ix_u	[kg.m ²]	Momento de inércia em x da massa não suspensa
Iz_u	[kg.m ²]	Momento de inércia em z da massa não suspensa
L	[m]	Distância entre eixos do ônibus
m_s	[kg]	Massa suspensa
m_u	[kg]	Massa não suspensa
MSB	[N.m]	Momento exercido pela barra estabilizadora
MRS	[N.m]	Momento de resistência ao rolamento
p_s	[rad/s]	Velocidade de rotação em x da massa suspensa
\dot{p}_s	[rad/s ²]	Aceleração angular em x da massa suspensa

R	[m]	Raio da curva medido a partir do centro do eixo traseiro
r_s	[rad/s]	Velocidade de rotação em z da massa suspensa
\dot{r}_s	[rad/s ²]	Aceleração angular em z da massa suspensa
RSC	[–]	Coeficiente de esterçamento induzido pela rolagem
u_s	[m/s]	Velocidade em x da massa suspensa
\dot{u}_s	[m/s ²]	Aceleração em x da massa suspensa
v_D	[m/s]	Velocidade de compressão ou expansão do amortecedor
v_s	[m/s]	Velocidade em y da massa suspensa
\dot{v}_s	[m/s ²]	Aceleração em y da massa suspensa
x_{pCGu}	[m]	Coordenada em x do centro de gravidade da massa não suspensa
x_{pD}	[m]	Coordenada em x do amortecedor
x_{pEFL}	[m]	Coordenada em x da força externa lateral
x_{pK}	[m]	Coordenada em x da mola
x_{pR}	[m]	Coordenada em x do centro de rolagem da suspensão
x_{pT}	[m]	Coordenada em x do pneu
y_{pD}	[m]	Coordenada em y do amortecedor
y_{pEFF}	[m]	Coordenada em y da força externa frontal
y_{pK}	[m]	Coordenada em y da mola
y_{pT}	[m]	Coordenada em y do pneu
z_{pCGs}	[m]	Coordenada em z do centro de gravidade da massa suspensa
z_{pCGu}	[m]	Coordenada em z do centro de gravidade da massa não suspensa
z_{pEFL}	[m]	Coordenada em z da força externa lateral
α_T	[rad]	Ângulo de escorregamento do pneu
δ_{ACK}	[rad]	Ângulo de Ackermann
δ_{RS}	[rad]	Ângulo de esterçamento do pneu corrigido pelo efeito de esterçamento induzido pela rolagem
δ_T	[rad]	Ângulo de esterçamento do pneu
$\sum Fx_s$	[N]	Somatório das forças em x na massa suspensa
$\sum Fy_s$	[N]	Somatório das forças em y na massa suspensa
$\sum Mx_s$	[N.m]	Somatório dos momentos em x na massa suspensa
$\sum Mz_s$	[N.m]	Somatório dos momentos em z na massa suspensa
ϕ_s	[rad]	Ângulo de rolagem (rotação em x) da massa suspensa
$d\phi_A$	[rad]	Deformação angular da barra estabilizadora

1. INTRODUÇÃO

A indústria automobilística sempre esteve entre as mais inovadoras ao longo de sua história. Grande parte das tecnologias de componentes mecânicos, materiais, fabricação e manufatura que são aplicadas aos mais diversos produtos tiveram seu desenvolvimento no setor automotivo. O alto valor de investimento que a aquisição de um veículo demanda de uma pessoa ou empresa, bem como tudo o que se espera dele em termos de durabilidade, qualidade, conforto, economia, praticidade, estética e outros são os principais motivos por trás desta pressão pela inovação.

A competição entre as diferentes empresas, tanto montadoras quanto fornecedoras de peças, foi se acirrando cada vez mais com o passar do tempo. Hoje em dia a tecnologia tornou a dinâmica do ciclo de vida de um produto mais curta. Além disso, o acesso à informação tornou o público mais exigente, e cada nova geração de veículos é lançada com uma gama de recursos muito maior que a anterior. Isso diminui o potencial de retorno do investimento no desenvolvimento do produto, criando, portanto uma forte pressão para a redução de custos.

Na etapa de projeto do veículo, o impacto desta redução de tempo e custos é a transferência de uma parcela cada vez maior do desenvolvimento para o mundo virtual. A construção de modelos e protótipos físicos é cara e demorada, e acaba por ser utilizada principalmente nas etapas finais do projeto para testes de durabilidade.

Apesar de existirem diversos *softwares* comerciais no mercado, suas licenças são bastante caras. Quando se leva em conta todos os fatores que devem ser simulados em um projeto, desde características funcionais até de fabricação, o custo de aquisição de todos estes *softwares* torna-se proibitivamente alto. Muitas empresas optam então em desenvolver seus próprios programas, mais adaptados às suas necessidades. Para que eles gerem os resultados esperados, dando uma vantagem tecnológica à empresa, a programação e a teoria que a suporta precisam ser robustas.

2. OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo a confirmação de um modelo multicorpo de suspensão de um ônibus 4x2 disponível na literatura. Simplificações são aplicadas de forma a otimizá-lo para análises dinâmicas de manobras direcionais em uma pista plana. O resultados das simulações serão gráficos de posição do veículo, ângulo de rolagem e velocidade de guinada, os quais serão então comparados àqueles gerados por um *software* comercial, o TruckSim[®]. Por ser um programa amplamente utilizado na indústria, considera-se que ele já esteja suficientemente confirmado, e que pode ser tomado como base de comparação.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O trabalho que fornece as fundações para o modelo aqui apresentado é o desenvolvido por Carreirão, 2003, que utilizou um veículo instrumentado para confirmar experimentalmente o modelo. Os resultados obtidos por Smith e Starkey, 1995, também foram tomados como base para comparação, apesar de seu modelo ter oito graus de liberdade, quatro a mais em relação ao modelo aqui utilizado. Barbieri, 1989, desenvolveu modelos similares com o intuito de comparar a resposta de suspensões passivas com a apresentada por sistemas ativos.

4. DESCRIÇÃO DOS COMPONENTES DO SISTEMA DE SUSPENSÃO DE UM ÔNIBUS

Neste capítulo serão apresentados os componentes do sistema de suspensão do ônibus que serão inseridos na simulação, bem como o equacionamento que descreve seus comportamentos e as simplificações utilizadas para cada um deles. Estes componentes são as molas, amortecedores, barras estabilizadoras, sistema de direção e pneus.

Os componentes do conjunto propulsor responsáveis pela transmissão de torque trativo e de frenagem às rodas, como eixo cardan, diferenciais e freios, não serão tratados neste trabalho. As manobras direcionais que serão simuladas são tomadas a velocidade constante, portanto a influência destes componentes é nula.

4.1 Geometria da suspensão

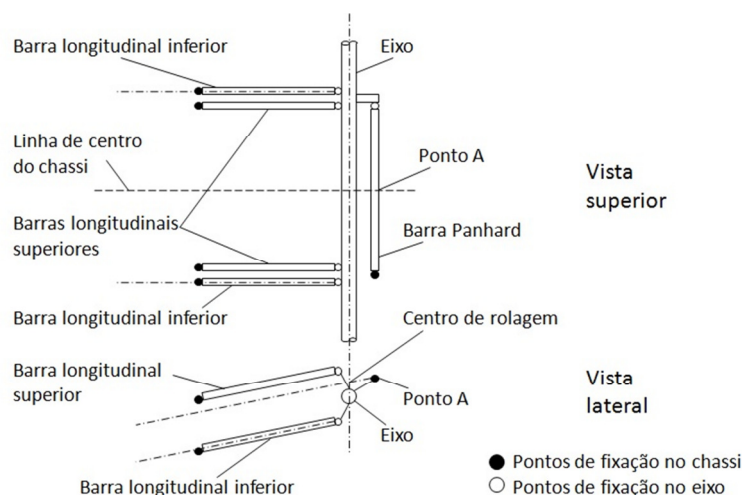
A suspensão exerce diversas funções em um veículo. Ela é responsável por manter o contato das rodas com o pavimento, estabilizar dinamicamente a carroceria, garantir o conforto a bordo e passar ao motorista uma sensação de segurança ao guiar. Todos estes efeitos são garantidos ao absorver ou transmitir vibrações à parcela da massa total do veículo que se encontra separada do pavimento pela suspensão, denominada massa suspensa. Os componentes que se encontram entre o piso e a suspensão do veículo, como eixos, diferenciais, freios, rodas e pneus compõem a chamada massa não-suspensa.

A arquitetura de suspensão utilizada nos ônibus Volvo utiliza barras longitudinais (quatro no eixo dianteiro e três no traseiro) e barras Panhard como elos de ligação entre os eixos e o chassi. As barras longitudinais têm a função de transmitir os esforços de aceleração e frenagem à carroceria, enquanto que a barra Panhard, paralela ao eixo, transfere os esforços transversais oriundos de mudanças de direção, evitando deslocamentos do eixo em relação à carroceria nesta direção.

Quando um veículo descreve uma curva, a inércia de sua massa suspensa faz com que ela role longitudinalmente no sentido contrário ao da trajetória. O eixo sobre o qual este movimento acontece é denominado eixo de rolagem. Ele passa pelos centros de rolagem de cada eixo do veículo, cuja localização depende da geometria da suspensão. Para o esquema de barras longitudinais e Panhard adotado no ônibus em estudo, o procedimento para determinar o centro de rolagem é como segue:

1. Encontra-se o ponto A, intersecção entre a linha de centro do chassi e a barra Panhard;
2. Traça-se uma reta paralela ao braço longitudinal inferior da suspensão passando pelo ponto A;
3. O ponto onde esta reta passa pela coordenada x do eixo do veículo é o centro de rolagem da suspensão.

A Figura 1 mostra um esquema dos componentes da suspensão dianteira do ônibus, bem como a dedução geométrica do seu centro de rolagem.



(Fonte: o autor, adaptado de Carreirão, 2003)

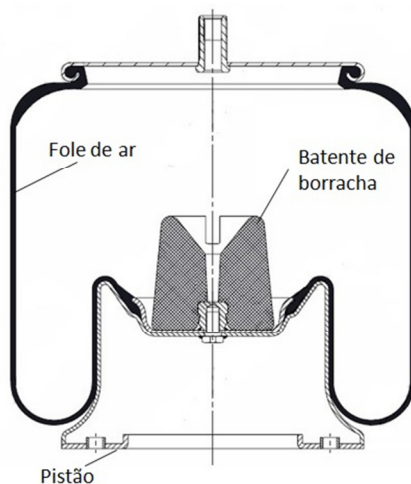
Figura 1 – Geometria da suspensão tipo quatro barras e Barra Panhard e determinação do seu centro de rolagem.

4.2 Molas

As molas utilizadas nos ônibus Volvo são do tipo pneumáticas. Este tipo de mola consiste em um fole de ar fixo ao chassi do ônibus e a um pistão, ligado ao eixo. Este fole é inflado com ar comprimido até que a pressão interna gere uma força que se iguale à parcela da massa suspensa apoiada naquela roda.

Uma característica construtiva importante dos foles de ar é a presença de um batente de borracha no seu interior. Por ter uma rigidez bastante elevada, ele modifica o comportamento do fole uma vez que começa a ser comprimido. No caso das molas usadas pela Volvo, isto acontece após os 50 mm iniciais de compressão. Além disso, por causa da sua geometria, seu comportamento não é linear. A força exercida pelo conjunto do fole de ar mais o batente de borracha (daqui em diante denominado *bolsa de ar*), de acordo com Carreirão, 2003, é dada pela Equação 4.1. A Figura 2 apresenta um desenho esquemático da bolsa de ar e seus componentes.

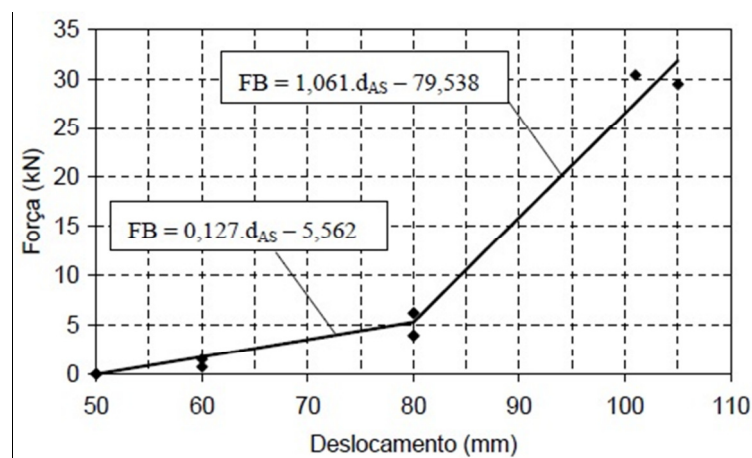
$$FAS = FA + FB = CA \cdot d_{AS} + (CB \cdot d_{AS} + BB) = (CA + CB) \cdot d_{AS} + BB = CK \cdot d_{AS} + BB \quad (4.1)$$



(Fonte: o autor)

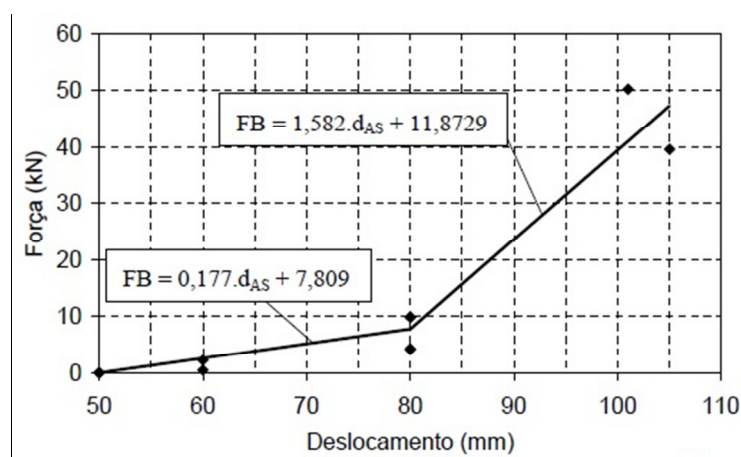
Figura 2 – Componentes da bolsa de ar.

Para este trabalho, a sua curva de compressão será aproximada por um comportamento bilinear. Os gráficos com os coeficientes CB e BB para os batentes de borracha dianteiros e traseiros são apresentados respectivamente nas Figuras 3 e 4.



(Fonte: Carreirão, 2003)

Figura 3 – Força desenvolvida pelo batente de borracha dianteiro.



(Fonte: Carreirão, 2003)

Figura 4 – Força desenvolvida pelo batente de borracha traseiro.

Quando o carregamento sobre a mola pneumática é constante – quando o ônibus encontra-se parado e descarregado, por exemplo – também deverá ser constante a pressão do ar dentro do fole. No entanto, durante o uso, a força exercida sobre as molas varia, seja por mudanças no carregamento estático devido à entrada e saída de passageiros e bagagem, ou por variações dinâmicas, advindas de acelerações, frenagens e mudanças de direção. Afim de minimizar todos estes efeitos, há um complexo sistema de controle que monitora posição, velocidade e aceleração das bolsas e regula individualmente as suas pressões internas através de compressores, tanques e válvulas de nível. Desta maneira, a estabilidade do veículo é melhorada sem comprometer-se o conforto a bordo.

Esta é uma das grandes vantagens das suspensões a ar sobre as tradicionais, que utilizam molas metálicas helicoidais ou em feixe. Entretanto, um sistema retroalimentado como este traz um nível de complexidade muito maior à simulação, devido a incertezas por parte do sensoramento e dinâmica do sistema de bombeamento do ar. Desta maneira, não será considerado neste trabalho, e a pressão interna nos foles de ar será considerada constante ao longo do tempo.

4.3 Amortecedores

Os amortecedores em um veículo servem a função de dissipar as oscilações das molas, visando o conforto dos ocupantes. Eles consistem em cilindros telescópicos com diversas válvulas e orifícios em seu interior por onde um fluido de trabalho, usualmente óleo, passa, absorvendo a energia da suspensão e transformando-a em calor.

A curva de resposta de um amortecedor depende da frequência da vibração à qual ele é submetido. Os amortecedores são projetados para transmitir à carroceria o mínimo possível das vibrações vindas do solo. Para isso, de uma maneira geral possuem coeficientes de amortecimento maiores nas menores faixas de frequência e que vão diminuindo para frequências maiores. Deste modo, ajudam a manter o veículo estável em mudanças de direção (baixas frequências) e absorvem a maior parte das oscilações ao se trafegar em pisos acidentados (altas frequências). A força exercida pelo amortecedor é representada pela Equação 4.2.

$$FD = CD \cdot v_D + BD \quad (4.2)$$

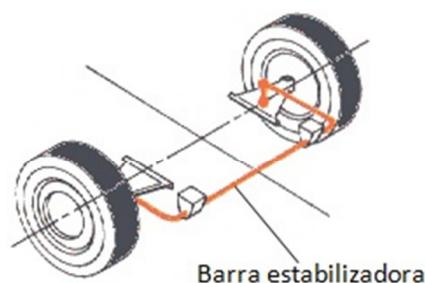
Uma vez que o pavimento a ser simulado não apresenta irregularidades e a frequência de oscilação da suspensão em uma manobra direcional é bastante baixa, o comportamento do coeficiente de amortecimento será simplificado como constante. A constante de não linearidade do amortecedor BD será, portanto, considerada igual a zero. A Tabela 1 apresenta os valores que serão utilizados na programação.

Tabela 1 – Coeficientes de amortecimento

Amortecedores	CD [N.s/m]
Dianteiros	39.370
Traseiros	38.415

4.4 Barras estabilizadoras

A barra estabilizadora consiste em uma mola torsional que liga as duas rodas de um mesmo eixo. Este componente da suspensão tem a função de estabilizar o veículo em curvas, quando a suspensão é comprimida na roda externa e estendida na roda interna. Esta diferença de altura em cada lado da barra causa um torque na mesma, cuja reação tende a diminuir o ângulo de rolagem da carroceria. A Figura 5 mostra um desenho esquemático de uma barra estabilizadora, e o momento gerado por ela é dado pela Equação 4.3.



(Fonte: o autor)

Figura 5 – Barra estabilizadora

$$MSB = CSB \cdot d\phi_A$$

A barra estabilizadora, trabalhando em conjunto com as molas, aumenta a rigidez à rolagem do veículo sem, no entanto, alterar o seu comportamento em retas. Assim, pode-se projetar um ônibus que tenha, ao mesmo tempo, uma resposta dinâmica adequada e um bom nível de conforto. Os valores dos coeficientes de rigidez das barras estabilizadoras dianteira e traseira utilizados neste trabalho são apresentados na Tabela 2.

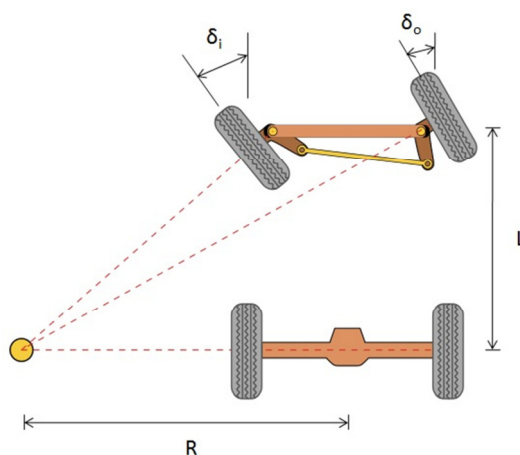
Tabela 2 – Coeficientes de rigidez torsional das barras estabilizadoras

Barra	CSB [Nm/rad]
Dianteira	76.300
Traseira	119.546

4.5 Esterçamento

Quando um veículo descreve uma curva a baixa velocidade, os seus pneus apresentam unicamente o movimento de rolamento em torno dos seus eixos. Para que isto aconteça, eles devem ficar perpendiculares às linhas que os ligam ao centro da curva. Como cada uma das rodas dianteiras percorre círculos de raios ligeiramente diferentes, o ângulo de esterçamento da roda interna deve ser maior que o da roda externa. Ao valor médio destes ângulos dá-se o nome de ângulo de Ackermann. Ele é definido pelo arco cuja tangente é igual ao quociente entre a distância entre eixos do veículo e o raio da curva medido a partir do centro do eixo traseiro, conforme a Equação 4.4. A Figura 6 mostra a geometria de Ackermann.

$$\delta_{ACK} = tg^{-1} \left(\frac{L}{R} \right) \quad (4.4)$$



(Fonte: o autor)

Figura 6 – Geometria de Ackermann.

Conforme a velocidade aumenta, as forças laterais necessárias para manter o veículo na trajetória tornam-se maiores. Estas forças têm sua origem em deformações locais na superfície do pneu em contato com a pista. O efeito disto é a geração de um vetor velocidade lateral no pneu. A sua velocidade resultante já não coincide, portanto, com o seu plano de rolamento. O ângulo entre estes dois componentes é chamado de ângulo de escorregamento do pneu. Ele é dependente do ângulo de esterçamento do pneu (igual a zero para os pneus traseiros), da posição dele em relação ao centro de gravidade da massa suspensa e das velocidades desta em x e y, conforme definido pela Equação 4.5.

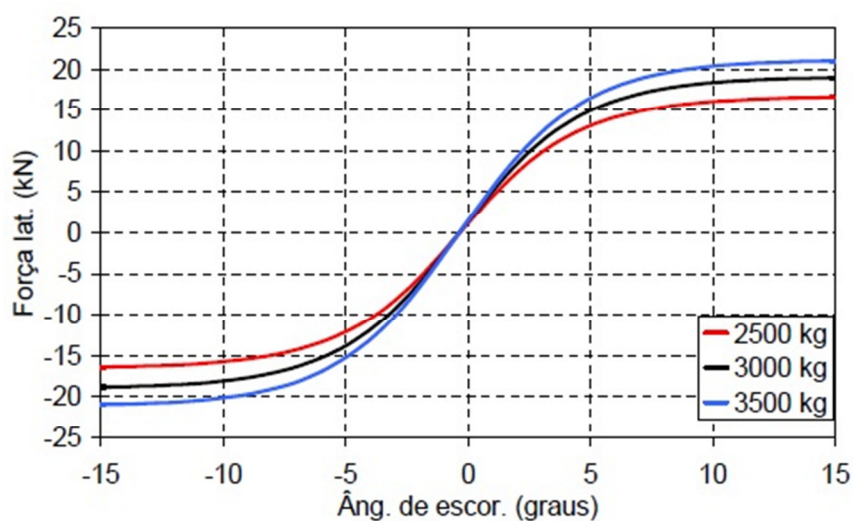
$$\alpha_T = \delta_{RS} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{v_s + x p_T \cdot r_s}{u_s - y p_T \cdot r_s} \right) \quad (4.5)$$

No decorrer da curva, as suspensões das rodas externas são comprimidas e, as das rodas internas, estendidas, por causa da inclinação da carroceria. Uma vez que, sob o carregamento estático, as barras longitudinais da suspensão dianteira não se encontram paralelas ao solo, quando a roda externa se comprime, ela se desloca ligeiramente para a frente. Por outro lado, quando a roda interna se expande, ela se desloca um pouco para trás. Este efeito causa uma leve rotação em z do eixo no sentido de aumentar o ângulo de esterçamento das rodas. Ela depende do coeficiente *RSC* que, para a geometria de suspensão do ônibus em estudo é igual a 0,095, e do ângulo de rolagem da carroceria. A Equação 4.6 define matematicamente esta rotação:

$$\delta_{RS} = \delta_T - RSC \cdot \phi_S \quad (4.6)$$

4.6 Pneus

A força lateral desenvolvida pelos pneus em uma curva é dependente do ângulo de escorregamento e da carga estática aplicada sobre ele. A Figura 7 mostra esta dependência para o pneu Pirelli FH55, de acordo com dados obtidos por Carreirão, 2003. Este modelo de pneu é o utilizado no ônibus em estudo.



(Fonte: Carreirão, 2003)

Figura 7 – Força lateral desenvolvida pelo pneu em função do ângulo de escorregamento e da carga estática.

Inicialmente a força lateral cresce linearmente, uma vez que o escorregamento do pneu deve-se à deformações localizadas na sua porção que toca o asfalto. A partir de aproximadamente 5° a curva estabiliza em um máximo de força lateral gerada. Para ângulos de escorregamento ainda maiores, o pneu começa a efetivamente deslizar sobre o asfalto. Com isso, o coeficiente de atrito deixa de ser o estático e passa a ser o dinâmico, diminuindo drasticamente a força lateral gerada. Nessa situação diz-se que o carro começa a derrapar.

Para fins de simulação, serão considerados apenas pequenos ângulos de escorregamento, e a força lateral será aproximada pela Equação 4.7.

$$FT_{lat} = CL_T \cdot \alpha_T \quad (4.7)$$

Dado que as manobras simuladas neste trabalho são todas com velocidade constante, a parte da teoria que trata das forças longitudinais de aceleração e frenagem no pneu não será apresentada aqui. Também serão considerados desprezíveis os efeitos de rigidez e amortecimento dos pneus em relação aos da suspensão.

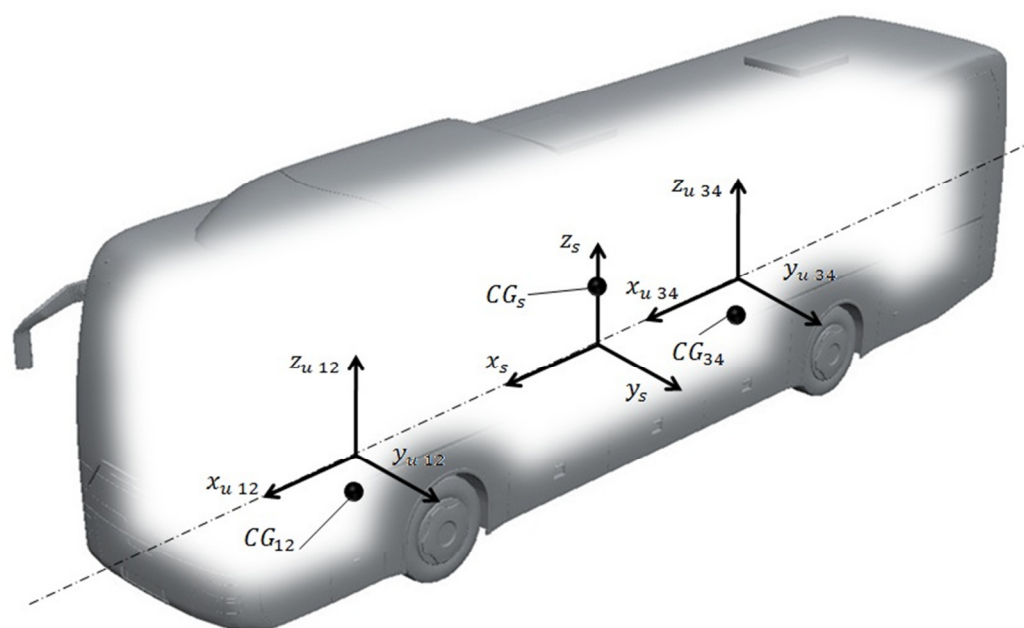
5. METODOLOGIA

Neste capítulo será apresentado o modelamento do ônibus utilizado na simulação. Primeiramente são definidos os sistemas de coordenadas para cada uma das massas. Em seguida, estabelecem-se as equações do movimento que, juntamente com as forças externas, irão compor as matrizes de massa, rigidez e amortecimento e o vetor de forças. Por último, é mostrada a Equação de Estado.

5.1 Sistema de coordenadas

O sistema de coordenadas adotado para a massa suspensa, de eixos x_s, y_s, z_s , será solidário a ela, ou seja, móvel em relação ao solo. Da mesma forma que na construção do modelo de Smith e Starkey, 1995, o eixo x_s será coincidente com o eixo de rolagem da carroceria. O centro de gravidade da massa suspensa não estará, portanto, na origem do sistema de coordenadas, mas estará contido no eixo z_s , tendo coordenadas $(0, 0, z_{pCG_s})$. Diferentemente de Carreirão, 2003, o eixo z_s será orientado para cima.

Também serão adotados sistemas de coordenadas secundários para as massas não suspensas, de eixos $x_{uij}, y_{uij}, z_{uij}$. Da mesma forma que o sistema de coordenadas da massa suspensa, eles terão os seus eixos x coincidentes com o eixo de rolagem da carroceria, enquanto que o centro de gravidade de cada massa não suspensa estará contido no seu respectivo eixo z . O equacionamento para cada massa não suspensa se iniciará no seu sistema de coordenadas individual, sendo depois trazido para o sistema da massa suspensa. A Figura 8 mostra um esquema do ônibus com os três sistemas de coordenadas móveis em posição.



(Fonte: o autor)

Figura 8 – Sistemas de coordenadas móveis para cada massa do ônibus

Além disso, será adotado também um sistema de coordenadas fixo de eixos XYZ. A partir deste sistema serão gerados os gráficos de trajetória do ônibus. No início do movimento, este sistema coincide com o sistema móvel.

5.2 Equações do movimento

Dos graus de liberdade da massa suspensa, quatro são de interesse neste trabalho: os deslocamentos em x_s e y_s , que irão compor a trajetória do veículo, o ângulo de guinada θ_s em torno do eixo z_s e o ângulo de rolagem ϕ_s em torno do eixo x_s . O deslocamento vertical no eixo z_s e o ângulo de arfagem em torno do eixo y_s são característicos de movimentos sobre pavimentos irregulares ou com inclinações. Uma vez que o piso a ser simulado é plano e suave, estes graus de liberdade não serão incluídos no equacionamento.

Quanto aos graus de liberdade das massas não suspensas, nenhum será de interesse neste trabalho. Por causa das características construtivas do ônibus, os deslocamentos em x_u e y_u e a rotação em z_u são solidários aos movimentos da massa suspensa. O deslocamento em z_u e a rotação em y_u são, mais uma vez, ligados a movimentos sobre pisos irregulares e, portanto, desprezados. Por fim, a rotação sobre o eixo y_u acontece somente com a parcela da massa não suspensa referente às rodas e pneus e não tem influência sobre o comportamento do ônibus.

O somatório das forças nas direções x_s e y_s é igual ao produto das acelerações nas respectivas direções pela massa suspensa e estão definidos pelas Equações 5.1 e 5.2. Do mesmo modo, presumindo que os eixos do sistema de coordenadas estão alinhados às direções principais de inércia [Ellis, 1995], o somatório dos momentos em torno dos eixos z_s e x_s é igual ao produto das acelerações angulares pelo momento de inércia em torno daquele eixo. Isto é demonstrado pelas Equações 5.3 e 5.4.

$$\sum Fx_s = m_s \cdot ax_s = m_s \cdot (\dot{u}_s - v_s \cdot r_s) + m_s \cdot zp_{CGS} \cdot p_s \cdot r_s \quad (5.1)$$

$$\sum Fy_s = m_s \cdot ay_s = m_s \cdot (\dot{v}_s + u_s \cdot r_s) - m_s \cdot zp_{CGS} \cdot \dot{p}_s \quad (5.2)$$

$$\sum Mz_s = Iz_s \cdot \dot{r}_s \quad (5.3)$$

$$\sum Mx_s = Ix_s \cdot \dot{p}_s - m_s \cdot zp_{CGS} \cdot (\dot{v}_s + u_s \cdot r_s) \quad (5.4)$$

Este equacionamento é também válido para as acelerações das massas não suspensas em seus sistemas de coordenadas.

As forças nas bolsas de ar, amortecedores e barras estabilizadoras podem agora ser expandidas a partir das Equações 5.5, 5.6 e 5.7 com a inserção dos graus de liberdade da massa suspensa e considerando pequenos movimentos angulares [Barbieri, 1989]:

$$FAS = CK \cdot yp_K \cdot \phi_s + BB \quad (5.5)$$

$$FD = CD \cdot yp_D \cdot p_s \quad (5.6)$$

$$MSB = CSB \cdot \phi_s \quad (5.7)$$

5.3 Forças externas

Quando um veículo percorre uma curva, a aceleração centrípeta que o mantém na trajetória é causada pelas forças de atrito nos pneus, transversais à linha de centro do veículo. Conforme mencionado no Capítulo 4.6, estas forças são dependentes do ângulo de escorregamento de cada pneu.

As forças longitudinais de arrasto não serão consideradas neste trabalho, visto que as manobras serão simuladas com velocidade constante. Uma vez que não é seu objetivo o cálculo de quanta potência do motor seria necessária para vencê-las, tanto o arrasto aerodinâmico quanto a resistência à rolagem serão deixados de fora das simulações.

5.4 Matrizes de massa, rigidez e amortecimento e vetor de forças

A dedução do equacionamento que acopla a massa suspensa às massas não suspensas e explicita as forças relacionadas aos componentes da suspensão é bastante longa e encontra-se no Apêndice I. Quando as equações são juntas e as acelerações, velocidade, posições e forças são colocadas em evidência, a equação do movimento pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{\eta}\} + [C] \cdot \{\dot{\eta}\} + [K] \cdot \{\eta\} = \{F\} \quad (5.8)$$

Onde $\{\ddot{\eta}\}$, $\{\dot{\eta}\}$ e $\{\eta\}$ são os vetores aceleração, velocidade e posição, como segue:

$$\{\ddot{\eta}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{v}_s \\ \dot{r}_s \\ \dot{p}_s \end{Bmatrix} \quad \{\dot{\eta}\} = \begin{Bmatrix} u_s \\ v_s \\ r_s \\ p_s \end{Bmatrix} \quad \{\eta\} = \begin{Bmatrix} dx_s \\ dy_s \\ \theta_s \\ \phi_s \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Carreirão, 2003, notou que seria necessária uma linearização dos componentes $v.r$, $u.r$, $p.r$ e r^2 para que a matriz de amortecimento pudesse ser construída. Para isso, foram consideradas como momentaneamente constantes a variável r na Equação XII e a variável u nas Equações XIII e XIV (estas Equações encontram-se ao fim do Apêndice I). A cada iteração do programa, os valores destas variáveis são recalculados e a matriz de amortecimento é atualizada. As matrizes de massa, amortecimento e rigidez, bem como o vetor força, são apresentados a seguir:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_s + \sum_{ij=12}^{MNu} m_{u\ ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_s + \sum_{ij=12}^{MNu} m_{u\ ij} & -\sum_{ij=12}^{MNu} (m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij}) & -m_s \cdot zp_{CGs} \\ 0 & 0 & Iz_s + \sum_{ij=12}^{MNu} (Iz_{u\ ij} + m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij}^2) & 0 \\ 0 & -m_s \cdot zp_{CGs} & 0 & Ix_s \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -(m_s + \sum_{ij=12}^{MNu} m_{u\ ij}) \cdot r_s & -(\sum_{ij=12}^{MNu} (m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij})) \cdot r_s & m_s \cdot zp_{CGs} \cdot u_s \\ 0 & 0 & (m_s + \sum_{ij=12}^{MNu} m_{u\ ij}) \cdot u_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_s \cdot zp_{CGs} \cdot u_s & \sum_{k=1}^{ND} (CD_k \cdot yp_{Dk}^2) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{ij=12}^{MN_u} (CSB_{ij}) + \sum_{k=1}^{N_{AS}} (CK_k \cdot yp_{Kk}^2) + m_s \cdot g \cdot zp_{CGS} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{t=1}^{n_T} FTx_t - EFF \\ \sum_{t=1}^{n_T} FTy_t + EFL \\ \sum_{k=1}^{n_T} (FTy_k \cdot xp_{Tk}) - \sum_{k=1}^{n_T} (FTx_k \cdot yp_{Tk}) + EFF \cdot yp_{EFF} + EFL \cdot xp_{EFL} \\ -EFL \cdot zp_{EFL} - \sum_{k=1}^{n_D} (BD_k \cdot yp_{Dk}) - \sum_{k=1}^{n_{AS}} (BB_k \cdot yp_{Kk}) \end{array} \right\} \quad (5.13)$$

5.5 Equação de estado

Para obter a solução numérica da equação do movimento, Barbieri, 1989, propôs a redução da sua ordem através da seguinte manipulação da equação:

1. Rearranjo da equação do movimento de forma a isolar o vetor aceleração;

$$\{\ddot{\eta}\} = -[M]^{-1} \cdot [C] \cdot \{\dot{\eta}\} - [M]^{-1} \cdot [K] \cdot \{\eta\} + [M]^{-1} \cdot \{F\} \quad (5.14)$$

2. Introdução da equação trivial $\{\dot{\eta}\} = \{\dot{\eta}\}$, criando um sistema de equações;

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1} \cdot [K] & -[M]^{-1} \cdot [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \cdot \{F\} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

3. Obtenção de uma equação de primeira ordem.

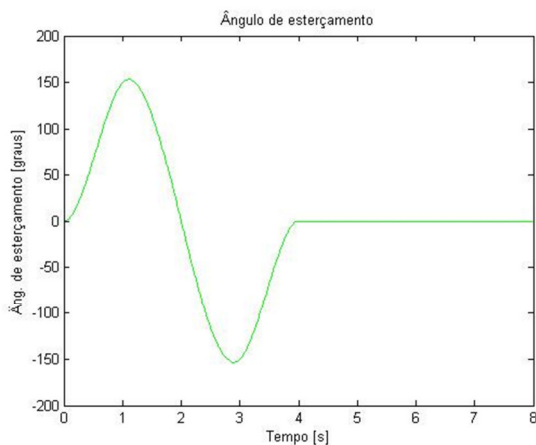
$$\{\dot{\xi}\} = [A] \cdot \{\xi\} + \{b\} \quad (5.16)$$

A Equação 5.15 é conhecida como Equação de Estado, onde $\{\xi\}$ é chamado de Vetor de Estado, $[A]$ é a Matriz de Estado e $\{b\}$, o termo fonte.

6. CONFIRMAÇÃO

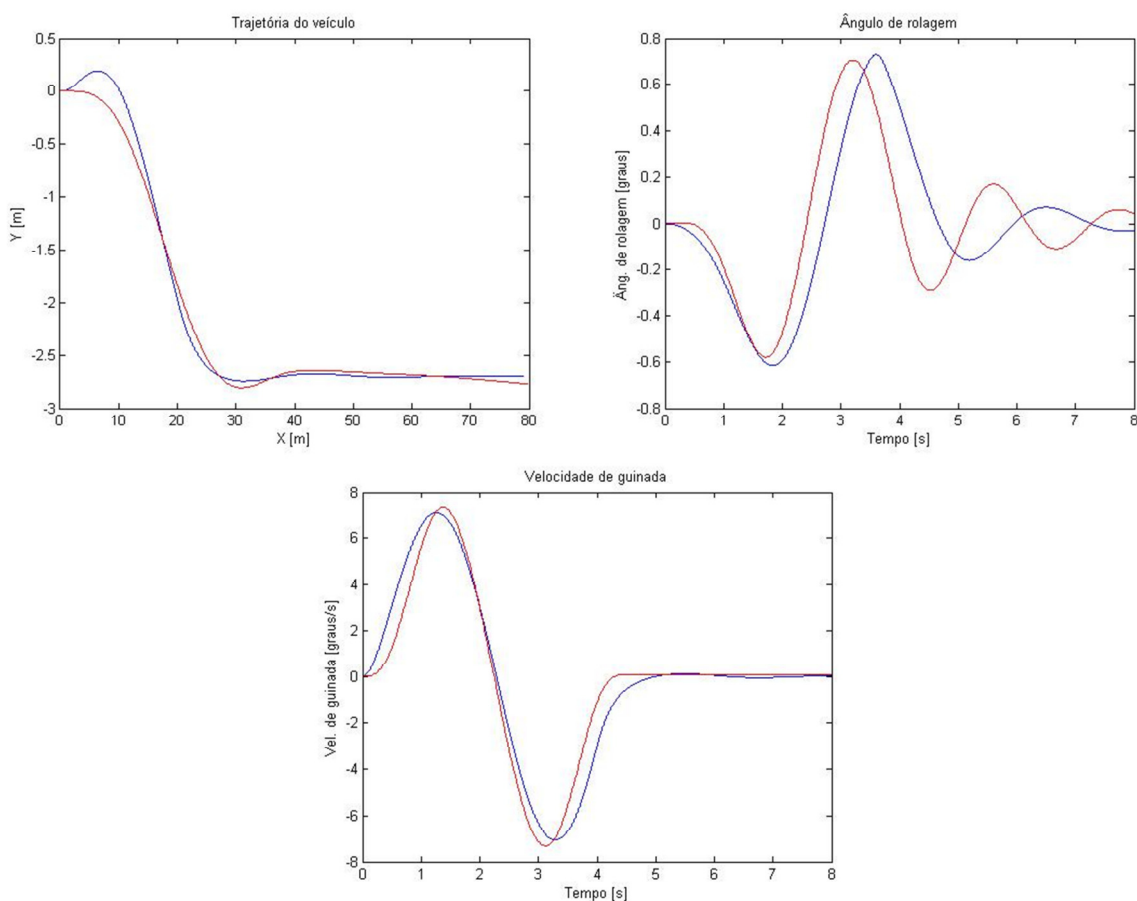
A partir do equacionamento apresentado no Capítulo 4 para o comportamento de cada componente do sistema de suspensão do ônibus e da metodologia desenvolvida no Capítulo 5, foi escrita uma programação em Matlab[®] para o cálculo da resposta do sistema. Como base para comparação dos resultados foi utilizado o *software* TruckSim[®]. Para fins de comparação, os dados de saída do programa foram gráficos de ângulo de rolagem e velocidade de guinada da massa suspensa, bem como a trajetória dela ao longo do movimento.

Os dados de entrada do sistema foram definidos como duas manobras direcionais distintas. A primeira delas consiste em uma troca simples de faixa com uma variação suave no ângulo da direção e uma velocidade longitudinal de 10 m/s. A Figura 9 apresenta o perfil do ângulo de esterçamento aplicado ao sistema, enquanto que a Figura 10 mostra os gráficos gerados nesta primeira simulação. Os dados referentes à programação em Matlab[®] podem ser vistos na linha de cor azul, enquanto que as saídas do TruckSim[®] são apresentadas na cor vermelha.



(Fonte: o autor)

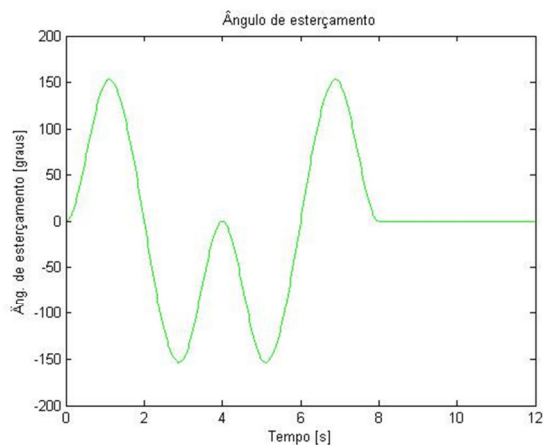
Figura 9 – Perfil do ângulo de esterçamento aplicado ao sistema para manobra direcional tipo troca simples de faixa a 10 m/s.



(Fonte: o autor)

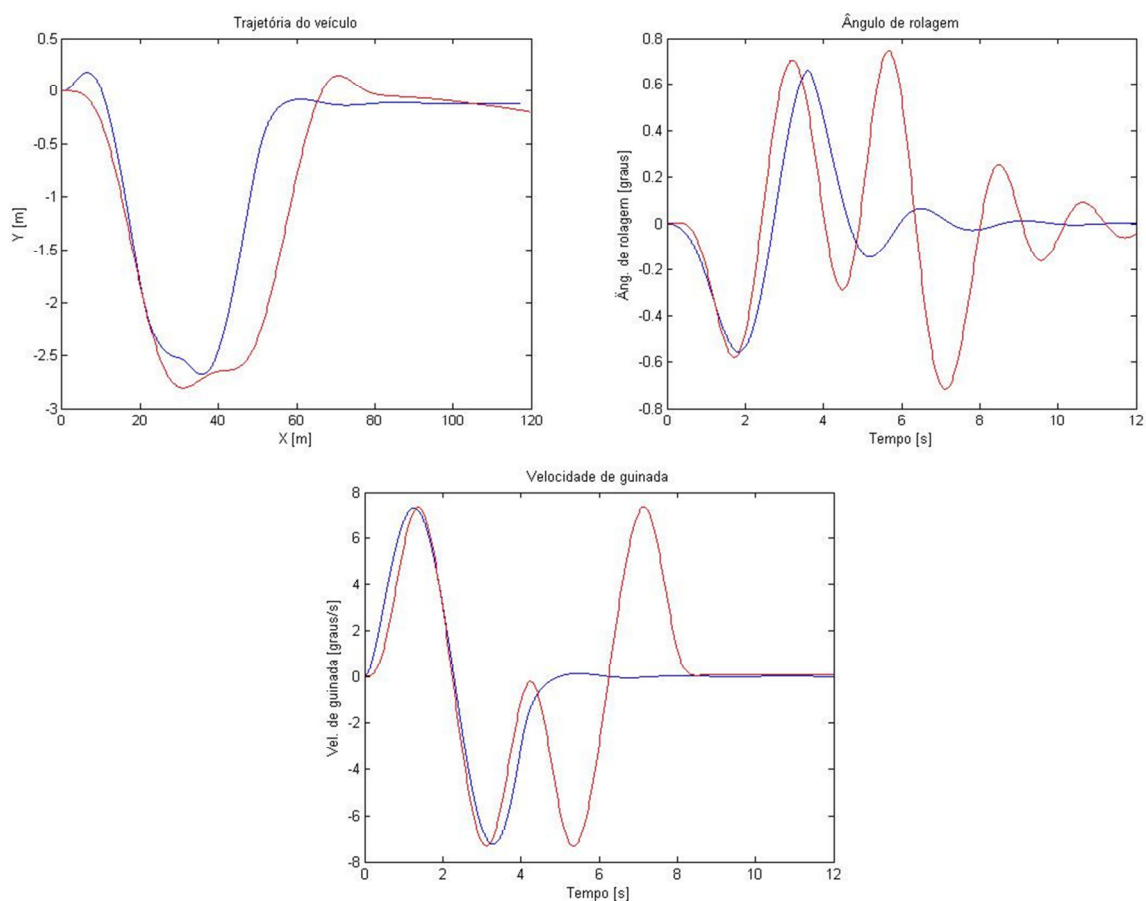
Figura 10 – Resultados obtidos pelo autor em Matlab[®] (em azul) e TruckSim[®] (em vermelho) para manobra direcional tipo troca simples de faixa a 10 m/s.

A segunda manobra consiste em uma troca dupla de faixa. Esta manobra começa da mesma maneira que a anterior, porém logo após a mudança inicial de direção, o ônibus retorna à faixa por onde originalmente trafegava, simulando uma ultrapassagem. A velocidade nesta manobra também foi fixada em 10 m/s. A Figura 11 mostra o perfil do ângulo de esterçamento utilizado, e a Figura 12 mostra os gráficos gerados.



(Fonte: o autor)

Figura 11 – Perfil do ângulo de esterçamento aplicado ao sistema para manobra direcional tipo troca dupla de faixa a 10 m/s.



(Fonte: o autor)

Figura 12 – Resultados obtidos pelo autor em Matlab® (em azul) e TruckSim® (em vermelho) para manobra direcional tipo troca dupla de faixa a 10 m/s.

7. CONCLUSÕES

Após análise dos gráficos gerados pelo Matlab® e TruckSim®, pode-se concluir que os resultados gerados pelo modelo construído ao longo deste trabalho estão bastante próximos daqueles saídos de um *software* comercial.

No entanto, podem ser notados pontos de melhoria com relação a alguns comportamentos percebidos nos gráficos, que são como segue:

1. O primeiro fenômeno que se pode perceber, em ambas as simulações, é uma leve diferença nas frequências de oscilação dos ângulos de rolagem dos modelos de ônibus. Uma vez que as frequências naturais de um corpo ou sistema ditam a maneira como ele vibra, e que estas dependem das suas matrizes de rigidez e amortecimento, um estudo mais aprofundado destes aspectos é sugerido para trabalhos futuros;
2. É notado também, a partir dos gráficos de ângulo de rolagem e velocidade de guinada, um amortecimento mais intenso no modelo de MatLab® em relação ao do TruckSim®. Apesar de os coeficientes de amortecimento e as simplificações utilizadas para estes componentes serem os primeiros a vir à mente como possíveis incongruências, é possível também que uma discrepância na forma como cada modelo trata as forças aplicadas nos pneus seja a raiz desta diferença, sobretudo no que tange os movimentos de guinada do veículo.

A conclusão final a que se chega é que algum refinamento da programação em Matlab® ainda é necessário de maneira que o modelo aqui apresentado adquira a robustez desejável para o seu propósito inicial, que é o uso no desenvolvimento de novos componentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbieri, N. **“Análise do comportamento dinâmico de um veículo automotivo”**, Universidade Estadual de Campinas, 1989.

Carreirão, C. **“Estudo do comportamento dinâmico de ônibus com diferentes arranjos de eixos”**, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2003.

Ellis, J. R. **“Vehicle handling dynamics”**, Mechanical Engineering Publications, Londres, 1994.

Smith, E. D., Starkey, J. M. **“Effects of model complexity on the performance of automated vehicle steering controllers: model, development, validation and comparison”**, Vehicle System Dynamics, vol. 24, pp 163-181, 1995.

ANEXO I – DADOS DO VEÍCULO UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO

Tabela 3 – Valores das massas [kg].

Massa suspensa m_s	Eixo dianteiro m_{u12}	Eixo traseiro m_{u34}
14.400	887	1.366

Tabela 4 – Coordenadas em z dos centros de gravidade das massas em relação ao eixo de coordenadas [m].

Massa suspensa z_{pCGs}	Eixo dianteiro z_{pCGu12}	Eixo traseiro z_{pCGu34}
0,65	-0,41	-0,41

Tabela 5 – Momentos de inércia em x e z das massas [kg.m²].

	Massa suspensa	Eixo dianteiro	Eixo traseiro
I_x	38.500	376	651
I_z	267.000	376	651

Tabela 6 – Coordenadas em x e y das bolsas de ar em relação à origem do sistema de coordenadas [m].

	Eixo dianteiro		Eixo traseiro	
	Lado direito	Lado esquerdo	Lado direito	Lado esquerdo
x_{p_K}	4,4	4,4	-2,7	-2,7
y_{p_K}	-0,43	0,431	-0,43	0,431

Tabela 7 – Coeficientes de rigidez dos foles de ar [N/m].

	Eixo dianteiro	Eixo traseiro
CA	133.000	236.000

Tabela 8 – Coordenadas em x e y dos amortecedores em relação à origem do sistema de coordenadas [m].

	Eixo dianteiro		Eixo traseiro	
	Lado direito	Lado esquerdo	Lado direito	Lado esquerdo
x_{p_D}	4,4	4,4	-2,7	-2,7
y_{p_D}	-0,51	0,508	-0,51	0,508

Tabela 9 – Coordenadas em x e y dos pneus em relação à origem do sistema de coordenadas [m].

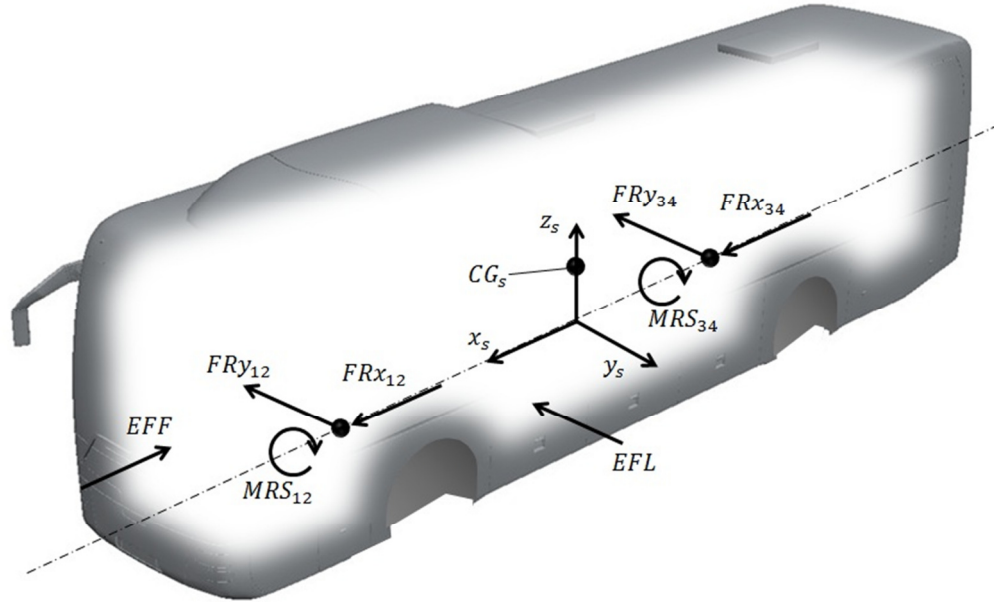
	Eixo dianteiro		Eixo traseiro	
	Lado direito	Lado esquerdo	Lado direito	Lado esquerdo
x_{p_T}	4,4	4,4	-2,7	-2,7
y_{p_T}	-1,011	1,011	-0,95	0,95

Tabela 10 – Coeficientes de rigidez lateral dos pneus [N/rad].

	Eixo dianteiro	Eixo traseiro
CL_T	267.380	2*267.380

APÊNDICE I – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

A partir do sistema de coordenadas móvel definido no Capítulo 5.1, constrói-se um diagrama de corpo livre para a massa suspensa. A Figura I ilustra este diagrama.



(Fonte: o autor)

Figura I – Diagrama de corpo livre da massa suspensa.

Onde MRS_{ij} é o momento de resistência ao rolamento em cada eixo, dado pela Equação I:

$$MRS_{ij} = \sum_{ij=12}^{MN_u} MSB_{ij} + \sum_{k=1}^{N_s} (FAS_k \cdot yp_{Kk}) + \sum_{k=1}^{N_D} (FD_k \cdot yp_{Dk}) \quad (I)$$

A partir do diagrama de corpo livre, pode-se reescrever as Equações 5.1 a 5.4, desenvolvendo-se os somatórios das forças em x e y e dos momentos em z e x.

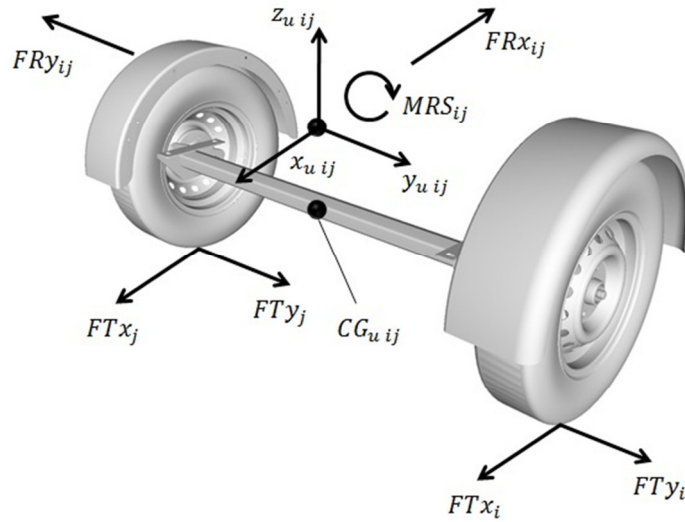
$$\sum_{ij=12}^{MN_u} FRx_{ij} - EFF = m_s \cdot \dot{u}_s - m_s \cdot v_s \cdot r_s + m_s \cdot zp_{CG_s} \cdot p_s \cdot r_s \quad (II)$$

$$\sum_{ij=12}^{MN_u} FRY_{ij} + EFL = m_s \cdot \dot{v}_s - m_s \cdot zp_{CG_s} \cdot \dot{p}_s + m_s \cdot u_s \cdot r_s \quad (III)$$

$$\sum_{ij=12}^{MN_u} (FRy_{ij} \cdot xp_{Rij}) + EFF \cdot yp_{EFF} + EFL \cdot xp_{EFL} = Iz_s \cdot \dot{r}_s \quad (IV)$$

$$-EFL \cdot zp_{EFL} - \sum_{ij=12}^{MN_u} MSB_{ij} - \sum_{k=1}^{N_s} (FAS_k \cdot yp_{Kk}) - \sum_{k=1}^{N_D} (FD_k \cdot yp_{Dk}) - m_s \cdot g \cdot zp_{CG_s} = Ix_s \cdot \dot{p}_s - m_s \cdot zp_{CG_s} \cdot (\dot{v}_s + u_s \cdot r_s) \quad (V)$$

Da mesma maneira, é construído um diagrama de corpo livre para as massas não suspensas, e reescreve-se as Equações 5.1 a 5.4, desenvolvendo-se os somatórios das forças em x e y e dos momentos em z.



(Fonte: o autor)

Figura II– Diagrama de corpo livre da massa não suspensa.

$$\sum_{k=i}^j FTx_k - FRx_{ij} = m_{u\ ij} \cdot \dot{u}_{u\ ijs} - m_{u\ ij} \cdot v_{u\ ij} \cdot r_{u\ ij} \quad (VI)$$

$$\sum_{k=i}^j FTy_k - FRY_{ij} = m_{u\ ij} \cdot \dot{v}_{u\ ijs} + m_{u\ ij} \cdot u_{u\ ij} \cdot r_{u\ ij} \quad (VII)$$

$$-FRy_{ij} \cdot xp_{R\ ij} + \sum_{k=i}^j (FTy_k \cdot xp_{T\ k}) - \sum_{k=i}^j (FTx_k \cdot yp_{T\ k}) = Iz_{u\ ij} \cdot \dot{r}_{u\ ij} \quad (VIII)$$

De forma a acoplar as equações da massa suspensa com as das massas não suspensas, deve-se realizar uma mudança de base das variáveis u_u , v_u e r_u , com as mesmas para a massa suspensa, u_s , v_s e r_s . Além disso, o momento de inércia Iz_u deve ser recalculado para uma rotação em torno do eixo z_s , que passa pelo centro de gravidade da massa suspensa. As relações a seguir definem a mudança de base necessária:

$$\begin{aligned} u_{u\ ij} &= u_s \\ v_{u\ ij} &= v_s + xp_{CGu\ ij} \cdot r_s \\ r_{u\ ij} &= r_s \\ Iz_{u\ ij} &\rightarrow Iz_{u\ ij} + m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij}^2 \end{aligned}$$

Aplicando-se as relações e somando-se as equações de todas as massas, chega-se ao conjunto de equações para o veículo como um todo:

$$\sum_{ij=12}^{MN_u} FRx_{u\ ij} = -\sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot \dot{u}_s) + \sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot v_s \cdot r_s) + \sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij} \cdot r_s^2) + \sum_{k=1}^{N_T} FTx_k \quad (IX)$$

$$\sum_{ij=12}^{MN_u} FRY_{u\ ij} = -\sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot \dot{v}_s) - \sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot u_s \cdot r_s) + \sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij} \cdot \dot{r}_s) + \sum_{k=1}^{N_T} FTy_k \quad (X)$$

$$\sum_{ij=12}^{MN_u} (FRy_{ij} \cdot xp_{R\ ij}) = \sum_{k=1}^{N_T} (FTy_k \cdot xp_{T\ k}) - \sum_{k=1}^{N_T} (FTx_k \cdot yp_{T\ k}) - \sum_{ij=12}^{MN_u} ((Iz_{u\ ij} + m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij}^2) \cdot \dot{r}_s) \quad (XI)$$

Por fim, substitui-se as Equações IX, X e XI em II, III e IV. Além disso, expande-se os termos da Equação V referentes às forças exercidas pelas bolsas de ar, amortecedores e barras estabilizadoras de acordo com as Equações 4.1, 4.2 e 4.3. O resultado final é como segue:

$$\left(m_s + \sum_{ij=12}^{MN_u} m_{u\ ij}\right) \cdot \dot{u}_s - \left(m_s + \sum_{ij=12}^{MN_u} m_{u\ ij}\right) \cdot v_s \cdot r_s + (m_s \cdot zp_{CGs}) \cdot p_s \cdot r_s - \left[\sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij})\right] \cdot r_s^2 = \sum_{t=1}^{n_T} FTx_t - EFF \quad (XII)$$

$$\left(m_s + \sum_{ij=12}^{MN_u} m_{u\ ij}\right) \cdot \dot{v}_s + \left(m_s + \sum_{ij=12}^{MN_u} m_{u\ ij}\right) \cdot u_s \cdot r_s - (m_s \cdot zp_{CGs}) \cdot \dot{p}_s - \left[\sum_{ij=12}^{MN_u} (m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij})\right] \cdot \dot{r}_s = \sum_{t=1}^{n_T} FTy_t + EFL \quad (XIII)$$

$$\left[Iz_s + \sum_{ij=12}^{MN_u} (Iz_{u\ ij} + m_{u\ ij} \cdot xp_{CGu\ ij}^2)\right] \cdot \dot{r}_s = \sum_{k=1}^{n_T} (FTy_k \cdot xp_{Tk}) - \sum_{k=1}^{n_T} (FTx_k \cdot yp_{Tk}) + EFF \cdot yp_{EFF} + EFL \cdot xp_{EFL} \quad (XIV)$$

$$Ix_s \cdot \dot{p}_s - (m_s \cdot zp_{CGs}) \cdot \dot{v}_s - (m_s \cdot zp_{CGs}) \cdot u_s \cdot r_s + \left[\sum_{k=1}^{N_D} (CD_k \cdot yp_{Dk}^2)\right] \cdot p_s + \left[\sum_{ij=12}^{MN_u} (CSB_{ij}) + \sum_{k=1}^{N_{AS}} (CK_k \cdot yp_{Kk}^2) + m_s \cdot g \cdot zp_{CGs}\right] \cdot \phi_s = -EFL \cdot zp_{EFL} - \sum_{k=1}^{n_D} (BD_k \cdot yp_{Dk}) - \sum_{k=1}^{n_{AS}} (BB_k \cdot yp_{Kk}) \quad (XV)$$

Estas equações dão origem às matrizes de massa, amortecimento e rigidez, bem como ao vetor força, apresentados no Capítulo 5.4, ao colocar-se em evidência os vetores aceleração, velocidade e posição.