UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

ANDRÉIA CRISTINA DIAS GARCIA

PLANEJAMENTO FINANCEIRO PESSOAL: UM ESTUDO SOBRE A RENDA PÓS-APOSENTADORIA

Porto Alegre
2005

TRABALHO APRESENTADO EM BANCA E APROVADO POR:

Prof. Dr. Oscar Claudino Galli

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. João Luiz Becker

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Ronald Hilbrecht

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Conceito final:

Porto Alegre, 28 de abril de 2005.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto de Oliveira Kloeckner.

Aluna: Andréia Cristina Dias Garcia

AGRADECIMENTO

Agradeço ao Professor Dr. Gilberto de Oliveira Kloeckner pela orientação recebida durante todo o curso de mestrado. Agradeço, também, ao Professor Dr. João Luiz Becker pelas sugestões apresentadas para essa dissertação.

Ao atuário, Professor José Antônio Lumertz, agradeço pela apreciação e correção desse estudo e pelo incentivo.

Agradeço aos demais professores do programa e colegas da turma de 2003 que colaboraram para meu desenvolvimento pessoal e para a consecução desse estudo.

Para minha família, um agradecimento especial, pela ajuda recebida e pelo estímulo.

RESUMO

A incerteza sobre qual o valor da renda para o período pós-aposentadoria pode levar o indivíduo a constituir um plano de acumulação de capital com o intuito de garantir antecipadamente a existência e o nível da mesma. Esse estudo aborda uma série de fatores que influenciam a tomada dessa decisão: a renda do indivíduo, a disposição para o consumo e poupança, as possibilidades de investimento no mercado financeiro e previdenciário, e, também, se propõe a analisar os modelos atuariais utilizados para o cálculo do valor a ser poupado para a geração da renda na fase da aposentadoria. Nos modelos apresentados o indivíduo escolhe o tipo de contribuição, o tipo de renda e a taxa de juro. A partir dessas premissas, calcula-se o valor a ser poupado a partir do valor da renda desejada. Para calcular a probabilidade de ocorrência do valor da renda esperada, cada plano é simulado em dois cenários distintos, para uma determinada idade, contemplando, também, a aplicação do fundo acumulado somente em ativos livres de risco e numa segunda etapa permitindo o investimento em ativos com risco. Observa-se que uma atitude conservadora em relação à escolha da taxa de juro, ou seja, a preferência por uma taxa de juro menor, aproxima o resultado simulado do resultado esperado e, também, que a aplicação do capital acumulado em ativos de risco contribui, em geral, para a melhoria dos resultados obtidos, nos planos e cenários simulados. A matemática atuarial é a ferramenta utilizada para o desenvolvimento dos modelos.

Palavras-chave: Renda pós-aposentadoria. Modelo atuarial. Investimento financeiro. Taxa de juro.

ABSTRACT

The uncertainty about the amount of income for the retirement stage may lead a person to make a capital accumulation plan in order to guarantee beforehand such income and its level. This study approaches a series of factors that influence this decision making process: the person's income, his or her attitude towards consuming and saving, the investment possibilities in the financial markets. The study also aims at analyzing the actuary models that are used for the calculation of the amount to be saved in order to generate the income at the retirement stage. In the models that are presented, the person chooses the type of contribution, the type of income and the rate of interest. Based upon these premises, the amount to be saved is calculated, bearing in mind the expected income. In order to calculate the probability of the occurrence of the expected income amount, each plan is simulated in two different scenarios, for a specific age, also taking into account the investment of the accumulated fund only in risk free assets and, in a second stage, allowing the investment in risky assets. It is noted that a conservative attitude towards the choice of the interest rate, that is, the preference for a lower interest rate, approximates the simulated and the expected results; it is also noted that the accumulated capital investment in risk asset contributes, in general, for the improvement of the final results, in the simulated plans and scenarios. The tool that is used for the development of the models is Actuary Mathematics.

Key words: Post retirement income. Actuarial model. Financial investment. Interest rate.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANAPP – Associação Nacional de Previdência Privada

APT – Arbitrage Pricing Theory

CAPM – Capital Asset Pricing Model

CRAA – Aversão Absoluta ao Risco Constante

CRRA – Aversão Relativa ao Risco Constante

EAPP – Entidades Abertas de Previdência Privada

EFPP – Entidades Fechadas de Previdência Privada

FAPI – Fundo de Aposentadoria Programada Individual

FGV – Fundação Getúlio Vargas

HJB – Hamilton-Jacobi-Bellmann

HLV – Human Life Value

IGP-DI – Índice Geral de Preços

INPC – Índice Nacional de Preços ao Consumidor

INPC – Índice Nacional de Preços ao Consumidor — Restrito

INSS – Instituto Nacional de Seguridade Social

IPEA – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

IRA – Individual Retirement Account

PAGP – Plano com Atualização Garantida e Performance

PGBL – Plano Gerador de Benefícios Livres

PNAD – Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios

PRGP – Plano com Remuneração Garantida e Performance

RGPS – Regime Geral da Previdência Social

RPPS – Regime Próprio da Previdência Social

SPS – Secretaria de Previdência Social

SUSEP – Superintendência de Seguros Privados

U. M. – Unidade Monetária

VGBL – Vida Gerador de Benefícios Livres

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As preocupações de um indivíduo podem passar, entre outros, por três temas distintos – saúde, educação e aposentadoria. A questão da saúde é básica em qualquer sociedade. A necessidade de uma educação de qualidade é imperativa para o desenvolvimento e o progresso. No caso da aposentadoria, a existência de um sistema de previdência organizado contribui para o bem-estar da população na fase inativa.

O padrão de vida futura que um indivíduo deseja será aquele capaz de manter e até melhorar seu nível de consumo. Existem algumas maneiras pelas quais a renda pode ser gerada para o período de aposentadoria. De acordo com Booth *et al.* (1999), as mais comuns, conhecidas como "Os Quatro Pilares", são:

a) a renda gerada pelo Estado;

b) os planos de previdência ocupacional, conhecidos no Brasil como Previdência Fechada;

c) a poupança pessoal do indivíduo;

d) a renda obtida pelo aposentado por ainda encontrar-se no mercado de trabalho.

De acordo com o artigo 194 da Constituição Federal de 1988, alterado pela Emenda Constitucional nº 20, de 1998, o Brasil possui um sistema de seguridade social com o objetivo de garantir os direitos relativos à saúde, à previdência e à assistência social, por meio de ações de iniciativa dos poderes públicos e da sociedade. Este sistema é responsável pela proteção social, pela reposição de renda dos contribuintes na fase inativa e por evitar a pobreza dos que não participam do mercado de trabalho ou da geração da riqueza do País (BRASIL, MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL, 2003).

> A Previdência Social é o seguro social para a pessoa que contribui. É uma instituição pública que tem como objetivo reconhecer e conceder direitos aos seus segurados. A renda transferida pela Previdência Social é utilizada para substituir a renda do trabalhador contribuinte, quando ele perde a capacidade de trabalho, seja pela doença, invalidez, idade avançada, morte e desemprego involuntário, ou mesmo a maternidade e a reclusão (BRASIL, MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL, 2003).

A previdência social atende os trabalhadores do setor privado e os funcionários públicos – cerca de 30 milhões de pessoas em maio de 2003 – deixando de atender cerca de 40 milhões de indivíduos que não participam do mercado formal de trabalho (BRASIL, MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL, 2003). O nível de bem-estar que a previdência proporciona está ligado ao nível de renda do indivíduo quando na fase ativa. O Brasil classifica-se no grupo de países onde a pobreza absoluta[1] (ROCHA, 1996) ainda persiste, em virtude da má distribuição da renda. Em 1997, 1% da população respondia por 13,7% do rendimento total, enquanto que 50% respondia por outros 13,7% (ROCHA, 2000).

Para uma parcela da população, o benefício advindo da previdência social é igual e, em alguns casos, até superior à renda da fase ativa, devido à baixa renda da maioria dos brasileiros. De acordo com Camarano (2002), comparando o período de 1981 a 1998, houve uma melhora na renda do idoso no Brasil, o que ocorreu devido às alterações estabelecidas pela Constituição de 1988, principalmente quanto à garantia de um salário mínimo para os idosos carentes com mais de 70 anos. O valor médio do benefício pago a um aposentado oriundo do setor privado era de R$ 389,14 em dezembro de 2002, existindo, porém, 14 milhões de aposentados com um salário mínimo mensal de R$ 200,00 a título de benefício, do total de 21 milhões de aposentados existentes (BRASIL, MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL, 2003).

Entretanto, para outra parcela da população o benefício está distante daquele desejado, havendo uma diferença entre a renda pré-aposentadoria e o valor do mesmo. Existe, ainda, uma quantidade significativa de indivíduos, com diversos níveis de renda, que não se encontra sob a proteção da previdência social, necessitando buscar uma renda para a fase inativa. A necessidade de uma fonte alternativa de renda para esta fase torna-se desejável, razão pela qual o indivíduo pode pensar em prover ou complementar sua aposentadoria, reduzindo o seu consumo de hoje e direcionando o valor que economizou para algum tipo de investimento de longo prazo.

A previdência privada apresenta-se como opção de complemento de renda para aqueles que desejam e podem receber valores superiores ao teto do regime a que pertencem e para aqueles que estão excluídos do mercado formal de trabalho. O Brasil possui um sistema de previdência complementar, no qual estão presentes a previdência fechada e a aberta. Esse sistema está organizado sob o regime de capitalização, onde a contribuição fundará o

1 O rendimento *per capita* se situa aquém do mínimo indispensável para atendimento das necessidades básicas no âmbito do consumo privado.

benefício futuro. As Entidades Fechadas de Previdência Privada (EFPP), também conhecidas como fundos de pensão, abrangem os contribuintes que possuem vínculo empregatício com a patrocinadora[2] do fundo e funcionam com a contribuição de ambos – funcionário e empresa. As Entidades Abertas de Previdência Privada (EAPP) estão disponíveis para qualquer indivíduo que queira fazer parte do sistema, de forma a constituir o seu próprio fundo de aposentadoria.

Os planos da previdência fechada estão organizados, geralmente, sob a forma de benefício definido, isto é, o contribuinte conhece, na data de adesão ao plano, qual será o valor do benefício futuro, normalmente vinculado ao salário. As administradoras destes planos estão alterando para a forma de contribuição definida, em que o valor do benefício será resultante do fundo acumulado até a data da aposentadoria, sem vínculo direto ao salário da fase ativa. Deste modo, as administradoras isentam-se de futuros prejuízos advindos da insuficiência do fundo para a manutenção do valor do salário da ativa na aposentadoria. Já a previdência aberta trabalha com planos diversos, inclusive contribuição definida, administrando as contribuições do indivíduo de acordo com a modalidade escolhida pelo mesmo.

O aumento da procura por planos de previdência privada, que está ocorrendo de forma mais intensiva nestes últimos anos[3], é devido à consciência de que a previdência social, unicamente, não responderá pelos anseios da população na fase da aposentadoria.

A reforma da previdência, votada e aprovada no Congresso Nacional, no ano de 2003, provocou a discussão do tema aposentadoria em diversas instâncias e setores da sociedade, existindo uma preocupação generalizada com o mesmo. De acordo com o Ministério da Previdência Social, a reforma foi necessária porque, no Regime Geral da Previdência Social (RGPS), o aumento do número de benefícios e do valor médio dos mesmos, ocorrido nos últimos anos, resultou num aumento das despesas.

Em 1995, a necessidade de financiamento para o RGPS era da ordem de 400 milhões de reais e, em 2002, já estava em 17 bilhões de reais, em termos nominais. Em 2002, a arrecadação líquida foi de 71 bilhões e os benefícios pagos de 88 bilhões, gerando o déficit de aproximadamente 17 bilhões de reais, sendo que mais de 80% deste valor referia-se aos benefícios rurais.

---

[2] Empresa ou grupo de empresas que beneficia seus empregados com um plano de previdência.
[3] De acordo com dados da Associação Nacional de Previdência Privada de 2003.

Para o Regime Próprio da Previdência Social (RPPS), ou seja, o regime para os servidores públicos, o déficit situava-se em 22 bilhões de reais para o ano de 2002, somente para a União, incluindo os Estados e Municípios, este déficit passa para 39,1 bilhões de reais (BRASIL, MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL, 2003).

Para os trabalhadores vinculados ao Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS), foi alterado o teto de benefícios e contribuições, que era de 1.869,34 reais por mês e passou a ser de 2.400,00 reais, a partir da publicação da emenda constitucional número 67. Ainda há a previsão da instituição de uma lei responsável pela inclusão previdenciária, ou seja, o acesso de trabalhadores de baixa renda ao benefício de um salário mínimo, favorecendo 18,7 milhões de trabalhadores[4]. De acordo com as informações da Secretaria de Previdência Social (SPS), a necessidade de financiamento está relativamente controlada no curto e médio prazo, permitindo que ajustes sejam feitos ao RGPS ao longo das próximas duas décadas. As mudanças ocorridas na previdência se deram fortemente para os servidores públicos. O objetivo foi fazer com que os servidores recebessem benefícios de acordo ao seu esforço contributivo, como já ocorre com os trabalhadores da iniciativa privada.

O debate sobre a necessidade da reforma foi estimulado pelo acelerado envelhecimento populacional e pelo aumento da taxa de informalidade do mercado de trabalho, embora o Brasil se encontre, atualmente, em seu melhor momento em termos de estrutura populacional para a previdência, pois prepondera o crescimento da população em idade ativa. Este envelhecimento é decorrente da queda na taxa de mortalidade que vem ocorrendo desde os anos 40, de um processo acelerado de redução da fecundidade e do aumento da expectativa média de vida que, em 1940, era de 40 anos, e em 2000 estava em 64,8 anos para homens e 72,6 anos para as mulheres (SILVA; SCHWARZER, 2002).

Diante dessa situação, o indivíduo que busca garantir uma renda futura para a sua sobrevivência está consciente de que necessita poupar. Para isso, ele precisa saber qual o valor a ser poupado e como investir estes recursos no mercado previdenciário ou diretamente no mercado financeiro, de forma a alcançar a renda futura almejada.

As empresas de previdência privada disponibilizam uma variedade de planos de aposentadoria, existindo hoje no Brasil 47 empresas de previdência privada, associadas à Associação Nacional de Previdência Privada (ANAPP)[5], conforme pesquisa realizada na

[4] Segundo o texto da Emenda Constitucional n. 41 e o site do Ministério da Previdência Social.
[5] Fundada em 1974 com o objetivo de fortalecer as empresas do setor de previdência privada.

Internet em outubro de 2004. Do total de empresas, 40 possuem página na Internet, sendo que 16 destas apresentam um simulador disponível para o cálculo dos planos de previdência.

Dessa forma, pode-se calcular o valor da contribuição para a renda desejada na aposentadoria, possibilitando um comparativo entre os resultados das diferentes empresas. Os simuladores das 16 empresas permitem que se entre com o valor da contribuição mensal e os mesmos calculam o valor da renda mensal de aposentadoria e, em alguns casos, o fundo gerado por estas contribuições. É possível calcular de modo inverso, ou seja, informar a renda mensal pretendida e obter a contribuição mensal necessária em 12 dos 16 simuladores.

Para se ter uma idéia do valor da renda gerada por uma determinada contribuição, foi realizada a simulação nas 16 empresas, em outubro de 2004, com os seguintes parâmetros:

a) idade para início das contribuições: 30 anos;

b) tempo de contribuição: 35 anos;

c) idade para início do recebimento da renda: 65 anos;

d) sexo: masculino (informação colocada em algumas solicitações);

e) contribuição inicial mensal: R$ 500,00.

Em todos os casos procurou-se o plano mais simples existente, do tipo Plano Gerador de Benefícios Livres (PGBL)[6], com ativos investidos em renda fixa. O resultado obtido está apresentado na Tabela 1, a seguir, onde os nomes das empresas foram mantidos em sigilo.

[6] O Plano Gerador de Benefícios Livres – PGBL – é um plano gerador de renda para a aposentadoria a partir de contribuições do indivíduo, que serão administradas pela empresa de previdência.

Tabela 1: Renda e fundo gerados por uma contribuição mensal de R$ 500,00, obtido pelos simuladores das 16 empresas selecionadas.

Empresa	Renda Gerada	Fundo Gerado
A	2.763,27	676.342,12
B	10.919,85	2.672.753,15
C	18.767,20	2.600.564,99
D	9.550,73	1.292.949,33
E	8.855,57	Não Disponível
F	4.832,22	686.694,30
G	4.402,44	Não Disponível
H	11.515,33	2.567.490,28
I	5.646,59	Não Disponível
J	5.082,05	913.250,52
K	4.343,54	668.491,58
L	5.006,54	Não Disponível
M	2.816,90	659.288,67
N	5.201,14	673.342,13
O	4.171,46	679.792,94
P	12.311,23	1.831.755,06

Fonte: Elaborada pela autora.

Algumas observações quanto a particularidades das empresas são necessárias, pois podem explicar as diferenças nos resultados encontrados. A maior parte das empresas trabalhava com uma rentabilidade real de 6% ao ano. As empresas B, C e P trabalhavam com uma rentabilidade de 12% ao ano; a empresa D com 9% ao ano e a empresa E com 8,5% ao ano. O cálculo do valor acumulado no fundo não foi disponibilizado pelas empresas E, G, I e L.

Alguns números chamam a atenção na Tabela 1, principalmente o fato da empresa que possui a maior renda simulada gerar um fundo no mesmo patamar de outras duas que oferecem uma renda mais baixa. Analisando-se graficamente, é possível visualizar estas diferenças nas Figuras 1 e 2.

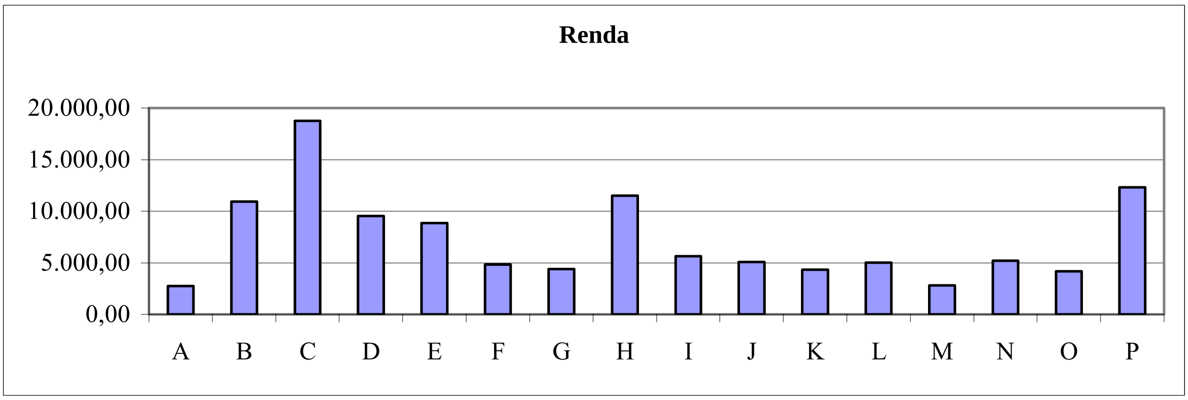

Figura 1: Gráfico da renda para a contribuição mensal de R$ 500,00.

Fonte: Elaborado pela autora.

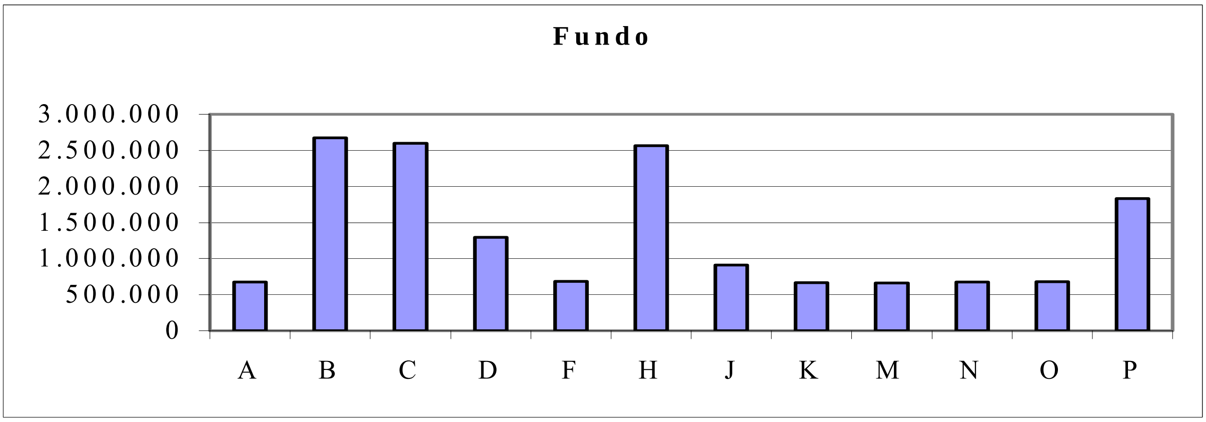

Figura 2: Gráfico do fundo para a contribuição mensal de R$ 500,00.

Fonte: Elaborado pela autora.

Observa-se que a variação existente entre a menor e a maior renda mensal foi de 16.003,93 reais e a variação entre o menor e o maior fundo gerado pela contribuição de 500 reais foi de 2.013.464,48. Desta forma, um indivíduo que tem 500 reais para aplicar mensalmente, tenderia a escolher aquela empresa que lhe desse uma previsão de maior renda no futuro, neste caso, a empresa C, apesar desta empresa não simular o maior fundo. Nos resultados obtidos pela simulação, percebe-se que nem sempre o maior fundo acumulado gerará a maior renda. Todas as empresas ressaltaram que se tratava apenas de uma simulação, sendo assim deve-se considerar a possibilidade de divergência entre o resultado simulado e o resultado obtido após o período de acumulação.

Pelo fato das empresas não disponibilizarem a forma como os cálculos foram realizados, acredita-se que existam diferenças na metodologia e nos parâmetros utilizados que levaram a estas divergências. Essas diferenças estão representadas pelas distintas taxas de juro utilizadas, pelas tábuas de mortalidade escolhidas e, ainda, pela projeção realizada para o desempenho do fundo, que pode ter-se dado a partir de um cenário futuro otimista ou pessimista.

A necessidade do indivíduo é conhecer o valor da contribuição que lhe retornará a renda desejada. Normalmente, a contribuição é uma parcela de sua renda atual, sendo a parcela restante destinada ao consumo. A proporção entre o valor da renda destinada à contribuição e ao consumo depende das preferências do indivíduo quanto à satisfação de suas necessidades. O objetivo é tentar conhecer o valor do benefício previamente que seja o mais próximo da realidade futura. Para visualizar deste ângulo esse problema, realizou-se uma nova simulação com as mesmas empresas. Fixou-se uma renda mensal no valor de R$ 3.000,00 e simulou-se a contribuição de acordo com os parâmetros anteriores.

Observa-se que, pelos resultados encontrados, todos os simuladores apresentaram valores proporcionais, ou seja, aparentemente utilizaram uma base matemática consistente entre si: para uma contribuição menor, uma renda menor gerada pelo respectivo simulador e vice-versa. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 2: Contribuição e fundo gerados para uma renda mensal de R$ 3.000,00

Empresa	Contribuição gerada	Fundo gerado
A	542,84	734.284,51
B	137,36	734.282,93
C	79,93	415.709,05
D	157,06	406.131,05
E	169,38	Não Disponível
F	310,42	426.322,25
G	340,72	Não Disponível
H	130,26	668.888,42
I	265,65	Não Disponível
J	295,16	539.103,62
K	345,34	461.714,35
L	299,61	Não Disponível
M	532,50	702.142,78
N	288,40	388.381,47
O	359,59	488.888,50
P	121,84	446.361,99

Fonte: Elaborada pela autora.

A grande variação entre o menor e o maior valor mantém-se, seguindo a mesma linha do caso anterior. Conforme observado nas Figuras 3 e 4, nem sempre a maior contribuição gera o maior fundo. Novamente é possível observar contribuições de valores diferentes gerando fundos de mesmo nível.

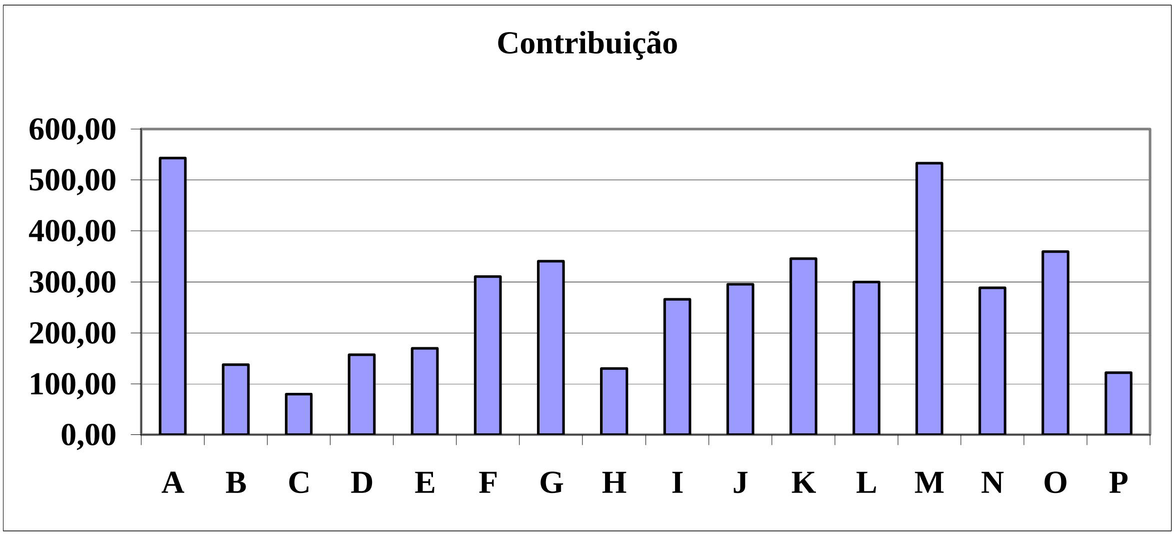

Figura 3: Gráfico da contribuição para uma renda mensal de R$ 3.000,00.

Fonte: Elaborada pela autora.

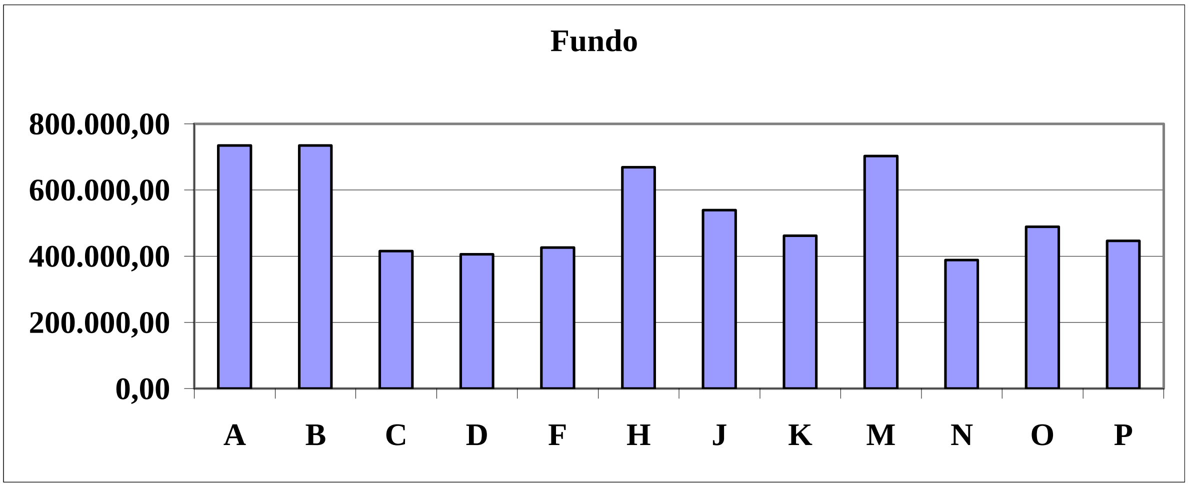

Figura 4: Gráfico do fundo para a renda mensal de R$ 3.000,00.

Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados das simulações indicam que se pode pagar 79,93 reais mensais e obter-se uma renda, também mensal, de 3.000 reais ou pagar 542,84 reais para obter-se a mesma renda. Logo, a opção tenderá a ser pelo menor valor, mas não há a certeza de que essa situação se mantenha daqui a 35 anos. As incertezas estão presentes tanto no valor dos parâmetros adotados na simulação quanto no próprio modelo utilizado, que podem não representar fielmente os riscos advindos do mercado financeiro, da instituição de previdência na qual serão depositados os recursos, se for o caso, e do próprio indivíduo, como, por exemplo, a perda inesperada da renda na fase ativa.

A opção pelo plano de aposentadoria de uma determinada empresa não se dá apenas pelos cálculos realizados pelos simuladores. Uma série de fatores deve ser levada em conta, tal como: idoneidade da empresa, planos oferecidos, preferências e possibilidades financeiras do indivíduo.

A existência de divergências nestes resultados gera dúvida sobre como agir hoje para se ter uma renda no futuro. O propósito deste estudo é, portanto, contribuir com informações que facilitem a escolha de um plano de poupança pelo indivíduo.

1.1 PROBLEMA

A renda na aposentadoria é uma questão que deveria ser refletida pelo indivíduo desde o início de sua vida laboral, pois, de acordo com os argumentos citados anteriormente, não há certeza sobre qual será sua renda na fase inativa, sabendo-se somente que esta renda será provida pelo próprio indivíduo e, dependendo da situação, pelo Estado. Conhecendo esta realidade e desejando acumular riqueza de modo a transformá-la em renda para a sua fase inativa, torna-se importante saber se o plano de acumulação traçado será capaz de gerar uma renda que mantenha seu padrão de consumo.

O questionamento principal nesse âmbito é saber se a renda recebida após a aposentadoria, derivada da previdência social ou complementar ou de algum tipo de investimento, manterá o consumo do indivíduo, no mínimo, no mesmo nível em que ocorria na vida ativa.

A adequação da renda da fase ativa às necessidades para a constituição do fundo garantidor da renda futura pode levar o indivíduo a decisões quanto ao aumento da renda atual, à redução do consumo presente, ao investimento do fundo acumulado em ativos de maior rentabilidade implicando maior risco, dentre outras.

1.2 OBJETIVO GERAL

Com base no exposto, apresenta-se, a seguir, o objetivo geral da presente dissertação:

– analisar modelos para geração de renda pós-aposentadoria a partir de planos de acumulação de capital com características distintas, de modo que se possa estimar, a priori, os valores a serem poupados de acordo com o nível de renda desejado pelo próprio indivíduo.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para a consecução do objetivo geral desta dissertação, faz-se necessária a realização de uma série de etapas para as quais foram traçados os seguintes objetivos específicos:

a) estabelecer um modelo atuarial que permita encontrar valores a serem poupados e os respectivos benefícios gerados de acordo com a idade do indivíduo, por meio da matemática atuarial, utilizando a abordagem tradicional;

b) ampliar o modelo atuarial possibilitando o atendimento de diferenças provenientes de escolha taxa de juro, de tipo de contribuição e renda;

c) calcular o valor da contribuição, do fundo e da renda nos modelos propostos, para uma determinada idade;

d) simular a evolução do fundo constituído para fins de aposentadoria nos modelos distintos para cenários diferentes em relação à taxa de juro e à preferência ao risco;

e) comparar o resultado do fundo obtido pela simulação com o fundo esperado.

Para estudar os aspectos envolvidos no tema e procurar esclarecer dúvidas pertinentes, este trabalho será desenvolvido em três etapas, tendo como direcionamento questões relativas à poupança – por que, quanto e como poupar, sendo que o maior enfoque será direcionado para a questão de quanto poupar.

No Capítulo 2 são abordados os temas renda, consumo e poupança, que fornecem os subsídios para o estudo sobre o por que poupar. O Capítulo 3 apresenta a relação entre consumo e investimento, a partir dos estudos realizados por Merton a partir de 1969. No Capítulo 4 é apresentada a matemática atuarial pela abordagem determinística e, na seqüência, confrontada com a abordagem estocástica, mostrando os fundamentos do cálculo para a determinação do valor a ser poupado durante a fase ativa para respaldar a renda futura desejada. O Capítulo 5 é destinado a apresentar alternativas de como poupar, a partir do mercado financeiro e do mercado previdenciário.

Após a revisão da literatura, apresentada nos Capítulos de 2 a 5, passa-se ao método. O método está colocado no Capítulo 6 e apresenta um modelo atuarial para o cálculo de contribuições para a geração da renda pós-aposentadoria e uma simulação desse modelo com a finalidade de analisar seu desempenho em cenários distintos.

As considerações finais estão colocadas no Capítulo 7.

2 ENFOQUE ECONÔMICO

Esse capítulo apresenta alguns aspectos inerentes à relação existente entre renda, consumo e poupança do ponto de vista do indivíduo. São mostrados dados da realidade brasileira, inclusive os resultados de uma pesquisa sobre a poupança.

No senso comum, renda, geralmente, é a importância recebida por uma pessoa como remuneração de seu trabalho; consumo é o ato ou efeito de consumir, gastar ou corroer algo até a extinção; poupança é a parte da renda pessoal que não é gasta em consumo.

Na fase ativa do indivíduo, a renda é, normalmente, oriunda do seu trabalho, enquanto que, na fase inativa, a renda dependerá do seu ganho anterior e de quanto ele conseguiu poupar durante este período, ou seja, do quanto ele deixou de consumir hoje para poder consumir no futuro. Dessa forma, renda, consumo e poupança estão interligados.

2.1 RENDA

A renda é uma medida da riqueza pessoal. Um indivíduo é considerado pobre ou rico segundo o nível da mesma. A forma de quantificá-la é por meio do estudo da renda monetária, podendo medir-se a flutuação, distribuição e dispersão da mesma em um determinado período ou avaliar-se em termos do poder de compra dos distintos segmentos da população. No Brasil, a renda pessoal só começou a ser investigada regularmente a partir do Censo Demográfico de 1960 (MEDICI, 1988).

Em um estudo empírico, Néri, Carvalho e Nascimento (1999) concluem que a trajetória da renda do trabalho do brasileiro ao longo do ciclo da vida tem um formato de U invertido sendo seu pico, aproximadamente, entre 40 e 50 anos de idade. A renda não oriunda do trabalho[7] é quase nula até 45 anos e passa a crescer uniformemente até o fim da vida do

[7] Ativos alternativos ao retorno do capital humano: aposentadoria, pensões, aluguel e ativos financeiros.

sujeito, sendo este aumento resultado de um acúmulo prévio de recursos financeiros com o objetivo de manter seu nível de bem-estar na aposentadoria.

Outros resultados apresentados a partir de dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) de 1996, da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, mostram a renda do trabalho principal do indivíduo de acordo com a idade e o nível de escolaridade do mesmo. É possível visualizar que a renda em relação à idade cresce até a idade de 40 a 50 anos e, após, decresce, independente do nível de escolaridade. Um resultado esperado é que quanto maior o nível de escolaridade maior a renda para cada uma das idades estudadas. Isso pode ser visto na Tabela 3, a seguir.

Tabela 3: Distribuição de renda no Brasil, por faixa etária e escolaridade, em reais.

Idade/Escolaridade	1 a 4 anos	4 a 8 anos	8 a 12 anos	12 e 16 anos	Mais de 16
20 anos	50,00	80,00	120,00	200,00	-
30 anos	145,00	200,00	400,00	800,00	1.200,00
40 anos	180,00	290,00	550,00	1.400,00	2.000,00
50 anos	175,00	320,00	600,00	1.350,00	2.400,00
60 anos	135,00	230,00	400,00	1.000,00	1.500,00

Fonte: Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, (1996).

O rendimento-hora da população brasileira ocupada, apurado por grupos de anos de estudo, pela PNAD 2002, está apresentado na Tabela 4 e satisfaz à premissa de que quanto maior a escolaridade maior a renda.

Tabela 4: Rendimento-hora da população ocupada, em reais, por grupo de anos de estudo, no Brasil – 2002.

Anos de estudo	Até 4 anos	De 5 a 8 anos	De 9 a 11 anos	Mais de 12 anos
Rendimento-hora	2,00	2,60	4,00	11,70

Fonte: FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. Pesquisa. Pesquisa nacional por amostra de domicílios, (2002).

Em um estudo para a determinação do salário no setor formal da economia brasileira, Corseuil e Santos (2002) encontraram que a experiência do trabalhador na firma afeta de forma significativa o seu salário, conseguindo quase 20% de aumento se a permanência for de cinco anos. Já, as características estudadas da firma – tamanho, setor e natureza jurídica – não revelaram influência nos salários de forma significativa.

Para a comparação da renda em períodos distintos, é necessária a existência de um índice que capte a perda de poder aquisitivo da renda, ou seja, a ação da inflação. No estudo realizado por Corseuil e Foguel (2002), com o objetivo de fornecer uma alternativa de índice de preço a ser utilizado no Brasil para deflacionar a renda, de forma a tornar possível sua comparação entre distintos instantes do tempo, é apresentada uma tabela que cobre o período de janeiro de 1982 a janeiro de 2002. A base do índice proposto neste estudo é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor — Restrito (INPC) da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE com três ajustes: a alteração da data de referência, centrando o índice no primeiro dia do mês; a alteração do valor referente a julho de 1994, de forma a levar em consideração o *carry-over* inflacionário[8] decorrente da mudança de unidade monetária ocorrida naquele mês; e a expansão da série para períodos anteriores à sua criação. O INPC restrito é construído por meio da coleta mensal de preços de produtos, em dez regiões metropolitanas brasileiras mais o Distrito Federal, consumidos por indivíduos com renda familiar na faixa de 1 a 8 salários mínimos.

2.2 CONSUMO

A determinação do valor da renda da fase inativa necessária para um indivíduo manter um padrão de consumo adequado visando seu bem-estar, envolve uma série de informações que vão desde as preferências de consumo até a situação econômica da região onde ele vive. Para isto, é fundamental analisar o consumo do indivíduo e a evolução do mesmo em função do tempo, contemplando questões como perda e ganho de poder aquisitivo da moeda.

A teoria microeconômica está calcada no fato de que os indivíduos possuem uma renda limitada, impedindo-os de adquirir tudo o que necessitam ou desejam. Logo, deve ser feita uma escolha sobre o que adquirir. Esta escolha leva em conta os preços das diversas mercadorias e serviços e a renda disponível. As preferências do consumidor seguem três premissas básicas: elas são completas, transitivas e os consumidores sempre preferem quantidades maiores de uma mesma mercadoria.

---

[8] É a variação de preço ocorrida entre duas unidades monetárias correntes. Nesse caso foi o excesso da variação de preços em cruzeiro real em relação à variação em URV, ocorrida em julho de 1994 no Brasil.

Quanto à premissa referente às preferências completas, também chamada de Axioma da Completeza, Sanson (1994) coloca que esse axioma se refere à relação de preferência sempre existente entre duas combinações possíveis de mercadorias, colocando que não há uma combinação de bens que não seja ordenável, razão pela qual o consumidor sempre escolherá imediatamente entre duas cestas apresentadas a ele. A transitividade da relação de preferência implica que se a cesta A é preferível à cesta B e B à C, então A será preferível à C. A terceira premissa é designada como axioma da apetência por bens e diz que sempre que houver diferença de quantidade do mesmo bem, em combinações distintas de bens, a combinação com a maior quantidade do bem em questão é que será escolhida.

A combinação de cestas de mercado – conjunto de uma ou mais mercadorias, que proporciona o mesmo nível de satisfação para um dado indivíduo, é representada por uma curva de indiferença. A cesta de mercado ótima deve satisfazer duas condições: esgotar o orçamento e fornecer ao consumidor sua combinação preferida de bens. Logo, o consumidor gasta toda a sua renda, sendo possível, então, concluir que ele jamais poupa. Entretanto, se a poupança for colocada como um bem a ser escolhido pelo consumidor, a extinção da renda continuará existindo concomitantemente com a existência da poupança.

Reis *et al*. (1998) e Issler e Rocha (2000) chegaram ao resultado que 75% dos consumidores no Brasil estão restritos a consumir toda a renda deles em cada período para cobrir seus gastos prioritários.

2.3 POUPANÇA

De acordo com a hipótese do ciclo da vida, apresentada inicialmente por Franco Modigliani (1986), a poupança surge do desejo individual de manter um padrão estável de consumo ao longo da existência. O modelo básico de Modigliani reconhece o tempo de vida finito do indivíduo e concentra-se nas variações sistemáticas da renda e nas necessidades que ocorrem sobre o ciclo da vida, como resultado da maturidade e da aposentadoria e também de mudanças no tamanho da família.

As simplificações feitas no modelo básico referem-se à renda, considerada constante até a aposentadoria e depois zero, à taxa de juro, também considerada zero, e, também, ao consumo, considerado constante no tempo e a não existência de herança. Dessa forma, a única mudança de renda ocorre quando o indivíduo se aposenta. Nessa ocasião a renda cessa e o consumo passa a ser suprido pelos ativos acumulados até então. Os ativos crescem até o momento da aposentadoria e, a partir daí, decrescem até a extinção total (NÉRI; CARVALHO; NASCIMENTO, 1999).

A Figura 5 apresenta graficamente o modelo básico da hipótese do ciclo da vida.

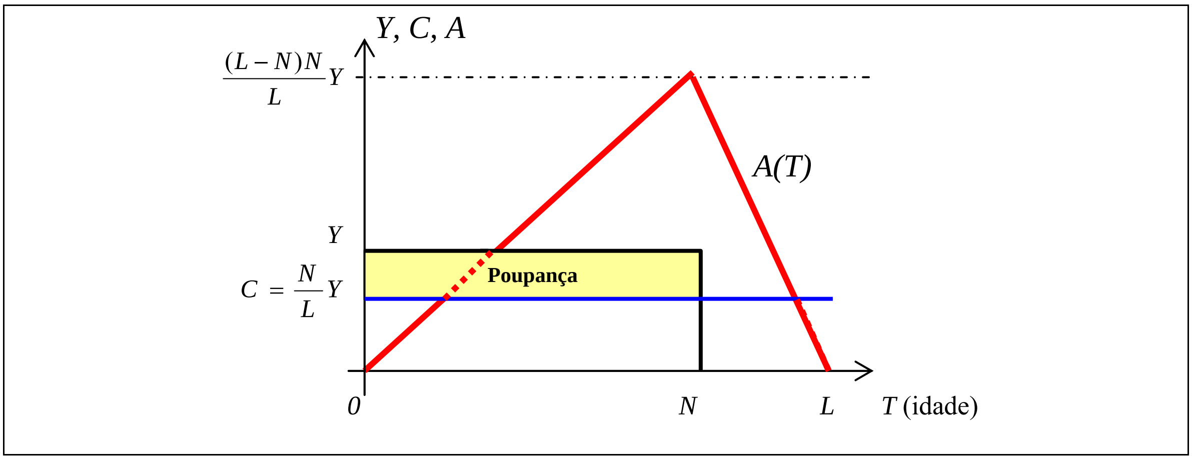

Figura 5: Renda, consumo, poupança e riqueza como uma função da idade.

Fonte: Modigliani, 1985.

No gráfico acima, *N* representa o período de atividade do indivíduo, ou seja, o período de recebimento da renda do trabalho, *L* designa o período total – recebimento da renda do trabalho e aposentadoria, logo *L* - *N* é o período de inatividade. O consumo é representado por

C, a renda por Y, a riqueza por *A(T)*. A poupança é a área compreendida entre a renda e o consumo, o consumo sendo constante é dado pela relação $C(T) = \frac{N}{L}Y$, que pode ser interpretada como a renda do período de atividade dividida pelo período total ($C(T) = \frac{NY}{L}$). A riqueza atinge seu ponto máximo na data do recebimento da última renda, sendo seu valor, nesta data, dado pelo produto do consumo pelo período de inatividade, ou seja, $\frac{(L-N)N}{L}Y$.

De acordo com Modigliani (1986), os indivíduos terão poupanças positivas durante os anos de trabalho produtivo e poupanças negativas quando se aposentarem, pois preferem manter uma estrutura de consumo relativamente constante enquanto viverem. Uma implicação do modelo básico é que o parâmetro principal que controla a proporção entre riqueza e renda e controla, também, a taxa de poupança é, predominantemente, a duração do período de aposentadoria.

Outros motivos para poupança, além da hipótese do ciclo da vida, são: a acumulação para a aquisição de bens indivisíveis de alto valor unitário; as incertezas do futuro que afetam o bem-estar do indivíduo e a formação de uma herança. Quanto mais incerta a renda futura, maior a poupança e menor o consumo presente.

Oliveira, Beltrão e David (1998) colocam que existe uma discussão nos países desenvolvidos sobre a importância relativa do motivo que leva um indivíduo a poupar: se este motivo é o ciclo da vida – poupar para financiar o consumo durante a velhice ou se é a herança – poupar para financiar o consumo dos dependentes. Os indivíduos deixam herança por altruísmo – preocupação com as próximas gerações, por controle – compensação dos herdeiros por serviços prestados ou por acidente – morte do poupador. O ciclo da vida é freqüentemente apresentado como a principal motivação para demanda de ativos financeiros de longo prazo.

De acordo com a Pesquisa de Comportamento Financeiro da Associação Brasileira de Crédito e Poupança (ABECIP), de 2003, o motivo precaucional é o mais importante entre os poupadores brasileiros que utilizam a caderneta de poupança como instrumento. A segunda maior motivação é economizar fundos para a compra da casa própria. Esta pesquisa foi realizada pelo Instituto de Pesquisas DATAFOLHA, nos dias 31 de março e 1º de abril de 2003, em 127 municípios, com um total de 2.594 entrevistados. O principal ativo financeiro no Brasil é a caderneta de poupança, tanto pelo valor mínimo exigido ser baixo quanto pela sua longa tradição. Em março de 2003, a poupança apresentava um saldo de 138 bilhões de reais para um total de 120 milhões de contas e 58 milhões de poupadores.

Os resultados da pesquisa da ABECIP de 2003 ratificam que a posse de conta de poupança tem relação direta com a capacidade de poupar dos indivíduos e que 60% da população brasileira não mantém uma reserva financeira por falta de recursos. Para aqueles que poupam, os efeitos da acumulação de ativos são percebidos pelo nível mais alto de bem-estar que podem desfrutar, pelo aumento da capacidade de geração de renda futura, bem como pela melhoria na habilidade em lidar com choques adversos da renda.

Oliveira, Beltrão e David (1998) apontam a existência de uma forte correlação entre poupança e crescimento econômico, mas, no entanto, a identificação da relação de causalidade entre estas duas variáveis apresenta sérias dificuldades.

Além e Giambiagi (1997) apontam iniciativas que poderiam conduzir a um aumento da taxa de crescimento do País através de uma melhora dos mecanismos de financiamento. São elas:

a) aumento da poupança pública;

b) estímulo aos fundos de pensão;

c) fortalecimento do Fundo de Aposentadoria Programada Individual (FAPI);

d) estímulo aos mecanismos de aquisição de casa própria.

Em todas as alternativas propostas há uma questão de poupança envolvida, seja ela em nível macro ou em nível individual, sendo possível perceber a influência da poupança individual no desenvolvimento e crescimento da nação.

Cada indivíduo deverá decidir quanto gastar da sua renda para o consumo presente e quanto economizar para a aposentadoria. De acordo com Bodie e Merton (2002), o indivíduo pode estabelecer um percentual da renda pré-aposentadoria como objetivo para a renda pós-aposentadoria, ou desejar manter o mesmo nível de renda antes e depois da aposentadoria. Seguindo a segunda alternativa, a formulação deste modelo, de um modo geral, diz que o valor presente da despesa com o consumo ao longo da vida – a renda permanente – deve igualar-se ao valor presente da renda do trabalho da fase ativa – o capital humano.

Pode-se expressar esta igualdade pela fórmula a seguir.

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{m} \frac{Y_t}{(1+r)^t}, \text{ onde:}$$

C é o consumo;

Y_t é a renda de cada período;

r é a taxa de juro da economia;

m é o período de recebimento da renda;

n é o período de consumo.

A Figura 6 apresenta um exemplo numérico do valor a ser poupado por um indivíduo com 35 anos que espera aposentar-se aos 65 e viver até os 80 anos. A renda é de R$ 30.000,00 por ano e ele não possui, ainda, nenhum ativo acumulado. A taxa de juro utilizada foi de 6% ao ano.

Dessa forma, o valor presente da renda para o período 35-65 é R$ 437.721,63[9] e o valor do consumo anual para o período 35-80 é R$ 26.717,74[10]. O valor poupado no período de recebimento da renda é R$ 3.282,26, isto é, a diferença entre a renda e o consumo. O valor total poupado até a idade 65 anos cobre exatamente o consumo até os 80 anos, seguindo a premissa de que a renda permanente é igual ao capital humano.

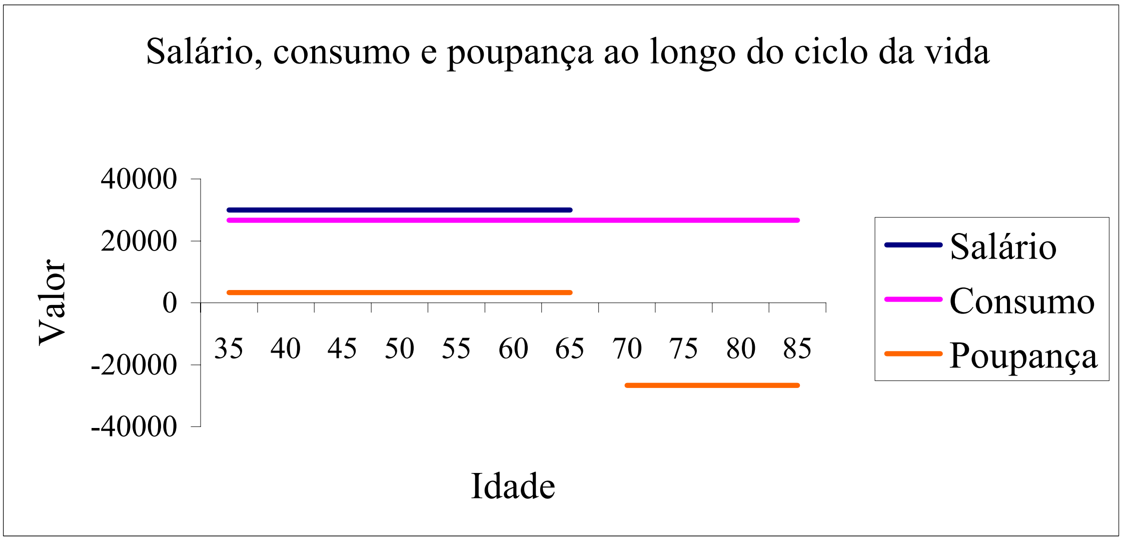

Figura 6: Salário, consumo e poupança ao longo do ciclo da vida.

Fonte: Adaptado de Bodie e Merton (2002).

---

[9] Valor obtido pelo cálculo financeiro do valor presente de uma renda antecipada, com os dados R = 30.000, i = 6 e n = 30, onde R é a renda, i é a taxa de juro e n é o período.

[10] Valor obtido pelo cálculo financeiro da parcela de uma renda antecipada, a partir dos dados VP = 437.721,63, i = 6 e n = 45, onde VP é o valor presente da renda, i é a taxa de juro e n é o período.

Esse é um modelo simplificado. Na realidade, geralmente a renda não é constante, o consumo também não, logo a poupança não o será. Os estudos que seguem o modelo do ciclo da vida já adicionaram uma série de incrementos ao modelo que consideram essas diferenças e o aproximam melhor da realidade.

Partindo-se do estudo realizado sobre os temas renda, consumo e poupança, é necessário dimensionar o percentual da renda individual que será destinada ao consumo e à poupança. Na teoria econômica Samuelson (1969) e Merton (1969, 1971) construíram um modelo que maximiza a utilidade esperada do consumo por meio da decisão de quanto consumir e quanto investir em ativos com risco. Esse modelo será apresentado no próximo capítulo, juntamente com algumas extensões do mesmo.

3 MODELOS ECONÔMICOS DE CONSUMO E INVESTIMENTO

A situação atual da previdência no Brasil e a preocupação com a manutenção de um nível mínimo de consumo durante a aposentadoria ratificam o interesse do indivíduo pela geração de renda para essa fase. Tal renda resultará, provavelmente, da poupança de uma parcela da renda do trabalho de cada período e do investimento desta parcela em ativos que trarão um rendimento que possa, no mínimo, acompanhar a inflação. A existência de herança auxilia e até, em alguns casos, supre a necessidade de renda futura. Neste estudo, a ênfase é dada para o caso em que não existe herança; portanto, a geração de renda para a fase inativa se dará pela poupança acumulada na fase ativa do trabalhador.

De acordo com Merton (1990), o comportamento financeiro ótimo dos consumidores e dos investidores é derivado de funções de preferência específicas, exógenas e individuais, que ordenam alternativas de consumo e herança ao longo da vida para cada indivíduo. O consumidor escolhe quanto da sua renda e riqueza será destinado para o consumo corrente e quanto será poupado para o consumo futuro e herança. Ele toma estas decisões com o objetivo de maximizar o valor esperado da utilidade de seu consumo ao longo da vida. O investidor resolve o problema de seleção de carteiras para determinar os percentuais a serem alocados de sua poupança nas oportunidades de investimento existentes. Em geral, decisões ótimas de consumo-poupança e seleção de carteiras não podem ser vistas independentemente.

Existem três horizontes de tempo envolvidos no problema de decisão sobre consumo e investimento, segundo Merton (1975) – o horizonte de negociação, o horizonte de decisão e o horizonte de planejamento. Começando pelo menor deles, tem-se o horizonte de negociação, que representa o mais curto período de tempo entre transações sucessivas que podem ser realizadas no mercado, sendo este quem as determina. Desse horizonte passa-se para o de decisão, que representa os períodos de tempo entre os quais o investidor revisa sua carteira de investimentos. Finalmente, chega-se ao horizonte de planejamento, que representa o período total de tempo para o qual o investidor obtém uma medida de sua função utilidade, ou seja, o balanço da vida do consumidor – seu planejamento financeiro. As decisões de consumo e investimento intertemporal estão relacionadas diretamente com o horizonte de planejamento.

3.1 MODELO DE MERTON

A relação entre o quanto consumir e o quanto investir é apresentada na literatura econômica por meio do modelo de Samuelson (1969) e Merton (1969, 1971). Eles realizaram os primeiros trabalhos que apresentam o estudo das decisões sobre consumo e investimento e sobre seleção de carteiras conjuntamente. Eles criaram um modelo de maximização da utilidade esperada do consumo intertemporal do indivíduo por meio da otimização das decisões de consumo e da decisão sobre a proporção de riqueza a ser investida no ativo de risco em cada período. Samuelson utilizou um modelo discreto e Merton estendeu o modelo para o tempo contínuo.

O modelo contínuo é utilizado por Merton, segundo a explicação do próprio autor, em seu artigo de 1975, porque os investidores podem revisar freqüentemente a composição de suas carteiras, os preços podem sofrer pequenas alterações de valor em períodos curtos de tempo e, também, porque o resultado no tempo contínuo é consistente com o tempo discreto quando uma comparação apropriada entre as duas análises é feita.

As fontes de incerteza para a tomada de decisão pelo consumidor vão desde as possíveis alterações de seus gostos, das cestas de consumo disponíveis no futuro, dos preços dos bens de consumo, até a incerteza quanto à renda do trabalho, quanto ao valor dos ativos não-humanos, quanto às oportunidades de investimento e mesmo quanto a própria idade da sua morte. Merton (1975) observou que nos modelos de maximização da riqueza final esperada, formulados até aquela data, apenas estava contemplada a incerteza com o valor futuro dos ativos não-humanos.

O modelo de maximização é geralmente apresentado como uma soma de funções estritamente côncavas, a função utilidade do consumo e a função utilidade da riqueza do final da vida representando o motivo herança. O caminho real do consumo ótimo será um processo estocástico porque o consumo ótimo é uma função da riqueza e de outras variáveis de estado (taxa de juros, preços e tempo) que seguem um processo estocástico (MERTON, 1975).

No artigo de Samuelson (1969) é demonstrado que a decisão de seleção de carteiras de investimento, ou seja, a proporção de riqueza investida em ativos de risco é independente da decisão de consumo, permanecendo constante durante toda a vida do indivíduo, considerando a aversão ao risco relativo constante. O modelo nega a validade do conceito do risco do homem de negócios[11], uma vez que, tanto na primeira metade da vida quanto em relação ao fim da vida, a tolerância ao risco permanece a mesma.

Merton examina, em seu artigo de 1969, o problema da seleção ótima de carteiras combinado com o problema da decisão ótima de consumo para um indivíduo. Num modelo contínuo, ele deriva as equações de otimização para o caso de muitos ativos considerando a taxa dos retornos dada por um processo geométrico browniano. Este problema foi formulado por Merton do modo que segue.

$$MaxE\left\{\int_0^T U[C(t),t]dt + B[W(T),T]\right\}$$

Onde:

t é o período de vida do indivíduo;

T é o tempo total de vida do indivíduo;

C(t) é o consumo no período *t*;

W(T) é a riqueza no período *T*;

U[.] é a função utilidade do consumo;

B[.] é função utilidade da herança.

O modelo está sujeito às seguintes restrições:

$C(t) \geq 0$;

$W(t)>0$;

$W(0)=W_0$;

U(C) é assumida ser uma função utilidade estritamente côncava ($U'(C)>0$ e $U''(C)<0$);

B[W(T),T] é uma função para avaliação da função herança, côncava em *W(T)*.

Para derivar as equações de otimização, a equação acima foi reescrita na forma da programação dinâmica, de modo que o Princípio de Bellmann de otimização possa ser

[11] Ele possui capital para investir, possui um elevado valor presente descontado da riqueza pelo fato de poder alcançar maiores salários no futuro, está no início da vida e pode recuperar eventuais perdas.

aplicado. A programação dinâmica é uma ferramenta para o estudo de otimização intertemporal sob incerteza. A característica comum de todos os modelos de programação dinâmica é que o problema de decisão é expresso por meio de uma formulação recursiva. Resolvendo essa formulação determina-se uma política ótima para todos os valores possíveis da variável de estado em cada estágio (WAGNER, 1985).

O sistema obtido a partir da programação dinâmica possui solução não-trivial, em geral, mas se a função utilidade assumida for da forma Aversão Relativa ao Risco Constante (CRRA), então o sistema pode ser resolvido, ou seja, se tiver:

$$\begin{cases} U(C) = \dfrac{C^{\gamma}}{\gamma}, \ \gamma < 1, \gamma \neq 0, \\ U(C) = \log C, \quad para \ \gamma = 0, \end{cases}$$

onde $\delta \equiv 1-\gamma$ é a medida de aversão relativa ao risco – medida de Arrow-Pratt[12] –, as regras de consumo ótimo e seleção ótima de carteiras num modelo de dois ativos, para horizonte infinito, são as que seguem:

$$\begin{aligned} C^*(t) &= \left\{ \frac{\rho}{1-\gamma} - \gamma \left[\frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2 (1-\gamma)^2} + \frac{r}{1-\gamma} \right] \right\} W(t) \\ w^*(t) &= \frac{(\alpha - r)}{\sigma^2 (1-\gamma)} \qquad \text{ou} \qquad w^*(t) = \frac{(\alpha - r)}{\sigma^2 \delta}, \text{onde:} \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

*C** é a variável de controle que representa o consumo ótimo;

*w** é a variável de controle que representa a proporção ótima de riqueza investida no ativo de risco;

W(t) é o valor da riqueza no período *t*;

γ é o parâmetro de aversão ao risco;

ρ é a taxa de preferência do consumidor;

α é o retorno médio do ativo de risco;

r é o retorno do ativo livre de risco;

σ é o desvio padrão do retorno do ativo de risco.

---

[12] Medida de Arrow-Pratt de aversão relativa ao risco: $R_u(C) = -\dfrac{CU''(C)}{U'(C)}$.

Para uma função utilidade da forma Aversão Absoluta ao Risco Constante (CRAA), também chamada utilidade exponencial, num modelo de dois ativos e horizonte infinito,

$$U(C) = \frac{e^{-\eta C}}{\eta}, \quad \eta > 0, \qquad \text{com} \quad -\frac{U''(C)}{U'(C)} = \eta \ ,$$

onde η é a medida de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt, ou seja, a medida da curvatura da função utilidade, os controles ótimos serão dados por

$$\begin{aligned} C^*(t) &= rW(t) + \left[\frac{\rho - r + (\alpha - r)^2 / 2\sigma^2}{\eta r} \right] \\ w^*(t) &= \frac{(\alpha - r)}{\eta r \sigma^2 W(t)} \qquad \text{ou} \qquad w^*(t).W(t) = \frac{(\alpha - r)}{\eta r \sigma^2} \end{aligned} \quad \textbf{(2)}$$

Comparando os resultados **(1)** e **(2)** dos controles ótimos para os dois tipos de função utilidade, observa-se que, no primeiro, o consumo é uma proporção constante da riqueza e a proporção investida em ativos de risco também é constante. No segundo resultado, o consumo não é mais uma proporção constante da riqueza, embora ainda seja linear na riqueza. A proporção de riqueza investida no ativo de risco também não é mais constante, mas observa-se que o valor total da riqueza investida no ativo de risco é constante, de acordo com a representação alternativa da segunda equação (MERTON, 1969).

Um resultado importante de Merton (1969) foi a confirmação do teorema provado por Samuelson (1969) para o caso discreto, que diz que, para uma função utilidade isoelástica (CRRA), a decisão de seleção de carteiras é independente da decisão de consumo. Para o caso de utilidade exponencial (CRAA), a decisão de consumo é independente dos parâmetros financeiros e dependente, somente, do nível de riqueza. Isto se dá devido à suposição da aversão relativa ao risco ser constante e devido à geração das mudanças nos preços ser dada por um processo estocástico. O indivíduo com menor grau de aversão ao risco renunciará ao consumo presente para atingir um consumo futuro esperado maior, enquanto que o indivíduo com maior grau de aversão ao risco sempre escolherá aumentar o valor do consumo presente.

3.2 MODELO DE RICHARD

Richard (1975) estendeu o trabalho de Merton (1971) por meio da inclusão da decisão ótima sobre o seguro de vida. O valor do seguro de vida é definido pela diferença entre o valor ótimo desejado do legado e o nível de riqueza existente. Se esta diferença for positiva, ou seja, a riqueza existente for insuficiente para prover a herança, o seguro de vida assumirá este papel quando da morte do investidor. Para isto, o pagamento de um prêmio atuarial é adicionado ao modelo.

> Sistemas de seguro são estabelecidos para reduzir o impacto financeiro adverso de alguns tipos de eventos aleatórios. Indivíduos e organizações adotam modelos de utilidade para representar suas preferências, modelos estocásticos para representar o impacto financeiro incerto e princípios econômicos para guiar os preços (BOWERS JUNIOR *et al.*, 1997, p. 93).

As suposições do modelo seguem as mesmas descritas por Merton, ou seja, os mercados são assumidos perfeitos e sem fricção com ativos negociados continuamente. O preço de todos os ativos negociados segue um movimento geométrico browniano estacionário com uma distribuição lognormal para qualquer período. Merton prova o teorema da separação, que diz que cada investidor será indiferente entre escolher seu portfólio entre todos os ativos disponíveis ou escolher por intermédio da compra de ações em apenas dois fundos (RICHARD, 1975).

No Modelo de Richard também prevalece o teorema da separação, se o investidor se comporta como maximizador da utilidade esperada do consumo e herança em multiperíodos. A equação de maximização é a mesma utilizada no Modelo de Merton.

$$MaxE\left[\int_0^T U(C,t)dt + B(Z,T)\right], \text{ onde:}$$

E é o operador de esperança sobre o período da morte do investidor e sobre a distribuição futura dos preços;

t é o tempo;

T é o momento incerto da morte do investidor;

U é a função utilidade do consumo;

C é o consumo;

Z é o legado que o investidor deixa na sua morte;

B é a função utilidade do legado.

O modelo assume a existência de dois ativos transacionados no mercado, um livre de risco e outro de risco. O preço do ativo de risco (*Q*) segue um movimento geométrico browniano, ou seja, $\frac{dQ(t)}{Q(t)} = \alpha dt + \sigma dq(t)$, onde *dq(t)* é um incremento de Wiener.

A alteração na riqueza do investidor é dada pela equação diferencial estocástica que segue.

$$dW(t) = -C(t) - P(t)dt + Y(t)dt + rW(t)dt + (\alpha - r)\pi(t)W(t)dt + \sigma\pi(t)Wdq(t)$$

onde:

C(t) é o consumo do período *t*;

P(t) é o prêmio pago pelo seguro de vida no período t;

Y(t) é a renda do período t, que, no modelo, é não estocástica;

W(t) é a riqueza do período t;

α é o retorno médio dos investimentos aplicados no ativo de risco;

σ é o desvio padrão do retorno do ativo de risco;

r é o retorno do investimento livre de risco;

π é a proporção da riqueza investida no ativo de risco.

O estoque de riqueza do indivíduo é reduzido pelo consumo e gastos com seguro de vida e é aumentado pelo recebimento da renda e pelo retorno dos investimentos nos ativos de risco e nos ativos sem risco.

Desta forma, o problema do investidor será resolver a equação de maximização da utilidade esperada do consumo e do legado, sujeito à restrição orçamentária e a uma condição inicial de riqueza, por meio da decisão ótima do nível de consumo, da proporção de riqueza a ser investida no ativo de risco e do nível de legado desejado.

No Modelo de Richard, a riqueza corrente (*W*) é alterada pela riqueza ajustada ($\widetilde{W}$). A riqueza ajustada expressa a riqueza corrente mais o valor atual da renda futura (*b(t)*) e pode ser descrita matematicamente por meio da relação $\widetilde{W}(t) \equiv W(t) + b(t)$, sendo $b(t) = \int_t^w Y(\theta)\frac{S(\theta)}{S(t)}e^{-r(\theta - t)}d\theta$, onde *b(t)* é o valor presente esperado da renda futura para o período *t*, pois depende da probabilidade do indivíduo sobreviver até esta idade. Richard demonstra que *b(t)* é independente do risco das oportunidades do mercado e das preferências do indivíduo.

Uma solução algébrica para o Modelo de Richard (1975) é prevista pelo mesmo, considerando a função utilidade CRRA. Ele demonstra que, quando a utilidade do consumo para o investidor é dada por $U(C(t),t) = h(t)\frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma}$, com $\gamma < 1,\ h > 0,\ C > 0$ e a utilidade da herança é $B(Z(t),t) = m(t)\frac{Z^{\gamma}(t)}{\gamma}$, com $\gamma < 1,\ m > 0,\ Z > 0,$ os controles ótimos do consumo, do seguro de vida e da aplicação em ativos com risco, são:

$$C^*(W,t) = \left(\frac{h(t)}{\hat{a}(t)}\right)^{1/(1-\gamma)}\widetilde{W},$$

$$Z^*(W,t) = W + \frac{P^*(W,t)}{\mu(t)} = \left(\frac{m(t)}{\hat{a}(t)}\right)^{1/(1-\gamma)}\widetilde{W}$$

$$\pi^*(W,t)W = \frac{\alpha - r}{(1-\gamma)\sigma^2}\left[W + b(t)\right] = \widetilde{\pi}^*\widetilde{W}$$

onde:

$$\hat{a}(t) = \left\{\int_t^w k(\theta)\frac{S(\theta)}{S(t)}\exp\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{(\alpha - r)^2}{2(1-\gamma)\sigma^2} + r\right)\right]d\theta\right\}^{1-\gamma}$$

$$k(t) = \left\{\left[\frac{1}{\mu(t)}\right]^{\gamma/(1-\gamma)}[\mu(t)m(t)]^{1/(1-\gamma)} + h^{1/(1-\gamma)}(t)\right\}$$

As soluções são lineares para a riqueza ajustada. A solução para π* indica que o investimento no ativo de risco será uma fração constante da riqueza ajustada. Este é um resultado já conhecido na literatura e considerado “míope” – os investidores alocando uma porção constante de sua riqueza no ativo de risco, ignorando a distribuição futura dos retornos do mesmo.

De acordo com Richard (1975), no modelo com incerteza quanto ao tempo de vida, o indivíduo não investirá a mesma proporção de sua riqueza no ativo de risco em comparação com a decisão do indivíduo no modelo de vida certa. No contexto do Modelo de Merton, a incerteza do tempo de vida e o seguro de vida não afetam o conjunto de oportunidades de investimento nem as carteiras eficientes. Se a função utilidade da riqueza for estritamente côncava, então a herança será uma função crescente da riqueza.

3.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DO MODELO DE RICHARD

Purcal (1999) obtém soluções numéricas do Modelo de Richard a partir de uma abordagem que permite incorporar formas funcionais diferentes e, também, impor uma variedade de restrições. Esta abordagem está baseada na solução numérica de problemas de controle ótimo estocástico em horizonte finito, descrita por Kushner e Dupuis, em 2001. O caminho da solução envolve uma aproximação por diferenças finitas para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB), que foi resolvida computacionalmente em uma rede de iterações *backward.*

Purcal apresenta a solução numérica para o caso de um investidor moderadamente avesso ao risco (γ = -0,5), com taxa de preferência ρ = 0,05. O resultado pode ser visto na Tabela 5 e na Figura 7 a seguir.

Tabela 5: Resultado da simulação do Modelo de Richard obtido por Purcal (1999).

Idade	$E(\tilde{W})$	E(W)	C*	π*	Z*	Seguro de vida	Investido em risco
30	1.000.000	10.000	59.100	35,9	792.000	782.000	359.000
40	1.062.000	221.000	67.500	36,0	797.000	576.000	382.000
50	1.070.000	459.000	76.600	36,4	792.000	333.000	389.000
60	962.000	704.000	82.700	36,7	714.000	10.000	353.000
70	711.000	711.000	79.600	36,8	560.000	-151.000	262.000
80	356.000	356.000	56.100	36,5	305.000	-51.000	130.000
90	81.000	81.000	19.600	36,8	76.000	-5.000	30.000
100	7.000	7.000	2.500	36,8	6.000	-1.000	3.000

Fonte: Purcal (1999)

Na Tabela 5, Purcal apresenta os resultados para as variáveis de estado – riqueza ajustada ($\tilde{W}$) e riqueza (W) – e para os controles ótimos do consumo (C*), da proporção investida em risco (π*) e do legado (Z*). A coluna do seguro de vida é dada pela diferença entre o legado ótimo (Z*) e a riqueza financeira existente para cada período ($E(W)$), enquanto o valor investido em risco é dado pela porcentagem ótima a ser aplicada em ativos de risco (π*) para uma dada idade sobre a riqueza ajustada $E(\tilde{W})$. Pode-se observar que o consumo aumenta até os 60 anos, passando a decrescer e voltando ao patamar inicial por volta dos 80 anos.

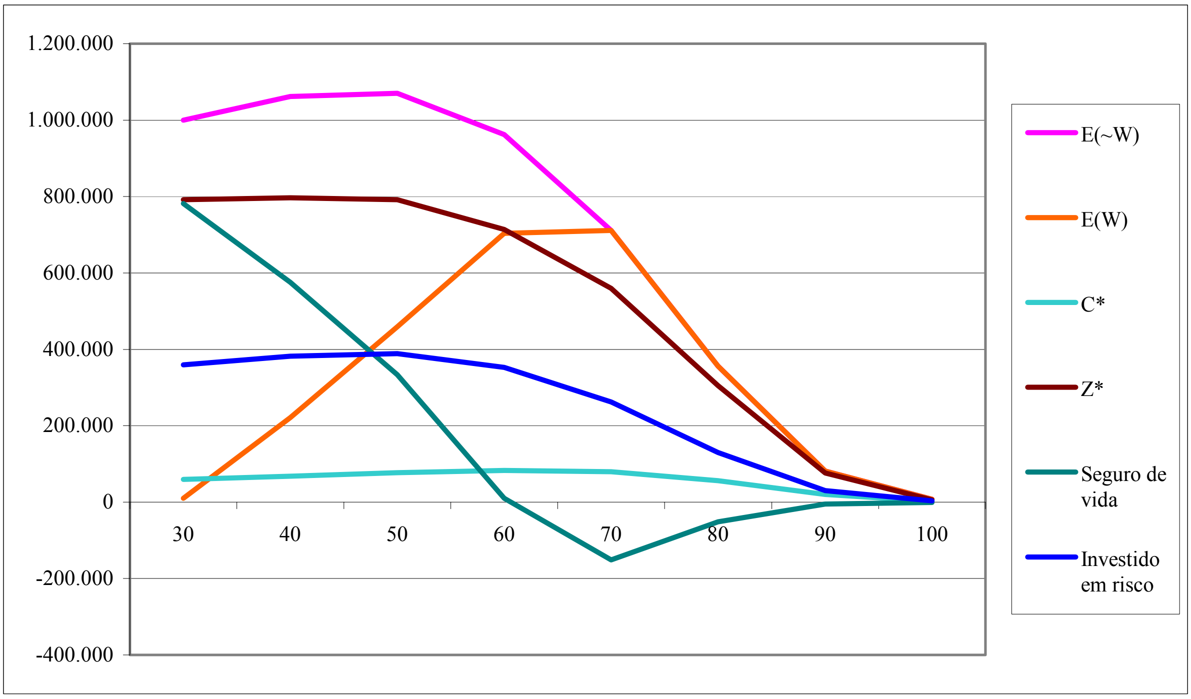

Figura 7: Resultados da simulação do Modelo de Richard obtido por Purcal (1999).

Fonte: Elaborado pela autora a partir dos dados da Tabela 5.

A proporção ótima da riqueza ajustada investida em ativos de risco é praticamente constante no tempo, apresentando um valor próximo a 37% (coluna 5 da Tabela 5), uma característica de modelos com indivíduos com função utilidade que exibe aversão relativa ao risco constante e um processo estocástico com coeficientes predeterminados. Entretanto, a proporção da riqueza financeira investida em ativos de risco cai com o aumento da idade do investidor, constituindo-se este um exemplo no qual o indivíduo reduzirá sua exposição ao risco no tempo (Tabela 6).

O modelo de Richard suporta este princípio comum de planejamento financeiro, sugerindo também que investidores jovens são altamente alavancados. Um exemplo é a alavancagem financeira pela compra da casa própria.

Tabela 6: Solução numérica de Richard (1975) – caminho da proporção da riqueza financeira investida em ativos de risco ao longo da vida, para γ = -0,5 e r = 0,05.

Idade	Proporção da riqueza financeira investida em risco (%)
30	3.590
35	328
40	173
45	114
50	83
55	64
60	49
>65	37

Fonte: Purcal (1999).

Em todas as idades, o nível de seguro de vida sugerido pelo modelo de Richard (1975) é menor que a regra HLV – *human life value* – de Huebner (1964), que diz que os indivíduos fazem um seguro de vida para o valor de seus ganhos futuros, protegendo seu capital humano de tal forma que a morte não altere a renda de sua família. Matematicamente, o HLV de um indivíduo na idade t pode ser expresso como $\int_t^{\infty} Y(\theta)e^{-r(\theta-t)}d\theta,$ onde r é a taxa de desconto usada e $Y(\theta)$ é a renda do indivíduo na data θ (PURCAL, 1999). Purcal e Piggott (2001) partiram da análise de Richard (1975) e parametrizaram o modelo com dados japoneses, conforme Tabelas 7 e 8.

Tabela 7: Dados utilizados por Purcal e Piggott (2001) para simulação do Modelo de Richard.

	Renda[1]	Preços[2]	Nikkei[3]	Bill Rate[4]
Média	5,9%	3,9%	6,4%	4,7%
Volatilidade	2,2%	2,5%	19,9%	0,9%
Intervalo	(-1,9%,29,1%)	(-1,1%,24,7%)	(-41,1%,99,4%)	(0,5%,12,2%)

Fonte: Purcal; Piggott (2001).

Nota: Índices utilizados:

[1]CEIC, índice japonês de renda nacional, mensal, Jan. 1970 – Jun 2000.

[2]CEIC, índice japonês de preço ao consumidor, mensal, Jan. 1970 – Jun 2000.

[3]CEIC, índice japonês da bolsa de valores Nikkei 225, mensal, Fev. 1970 – Jul 2000.

[4]CEIC, título do Banco do Japão, mensal, Jan. 1970 – Jun 2000.

Tabela 8: Parâmetros utilizados por Purcal e Piggott (2001) para simulação do Modelo de Richard.

Parâmetro	**Valor**
α : retorno do ativo de risco	0,025
r : retorno do ativo livre de risco	0,005
ρ : taxa de preferência	0,005
σ : desvio padrão do ativo de risco	0,2
Tábua de mortalidade	JLT 18 (homens)
γ : taxa de aversão ao risco	(-0,5,-4)
w : período de vida máximo	110
Y : renda	$ 4.375.686

Fonte: Purcal; Piggott (2001).

Purcal e Piggott (2001) concluíram que a introdução da incerteza sobre o tempo de vida não faz diferença para o comportamento econômico, desde que possa ser segurada por intermédio de preços justos atuarialmente[13]. Quando um ativo de risco é introduzido no modelo, os indivíduos maximizam sua utilidade esperada por meio de alguma exposição ao ativo de risco. O modelo foi simulado para um indivíduo altamente avesso ao risco e outro moderadamente avesso. Comparando os resultados obtidos, tem-se o seguinte comportamento quanto aos controles ótimos de consumo, proporção investida em risco e legado e quanto ao caminho traçado pela riqueza indicados na Figura 8, a seguir.

[13] Preços que satisfazem a equação de equilíbrio receita = despesa.

	Altamente avesso ao risco (γ = -4)	Moderadamente avesso ao risco (γ=-0,5)
Consumo esperado	Fluxo de consumo quase constante e baixo.	Fluxo de consumo crescendo gradualmente ao longo da vida.
Proporção investida em risco	Decrescente ao longo da vida, variando de 300% a 10%.	Decrescente ao longo da vida variando de 1000% a 33%. Sempre superior se comparado em cada idade com o indivíduo altamente avesso ao risco.
Legado	Cai gradualmente com a idade.	Cai gradualmente com a idade mas sempre será maior do que a herança deixada pelo indivíduo altamente avesso ao risco.
Riqueza esperada	Trajetória decrescente ao longo da vida.	Trajetória decrescente mas mais alta durante toda a vida do que para o consumidor altamente avesso.

Figura 8: Resumo dos resultados obtidos por Purcal e Piggott (2001) da simulação do Modelo de Richard.

Fonte: Elaborado pela autora.

Purcal (2003), na tradição de Merton (1969, 1971), estende o Modelo de Richard (1975) modelando a renda por um processo estocástico, pois, para a maioria dos trabalhadores, o capital humano é um componente significativo da riqueza total e influencia a tomada de decisões do indivíduo. Em seu artigo, Purcal persegue as respostas às seguintes questões: Como o comportamento de um indivíduo é afetado por mudanças aleatórias em sua renda? Em um mundo de renda flutuante, como um indivíduo consumirá, investirá, adquirirá um seguro e uma anuidade para a aposentadoria?

Com a adição da modelagem da renda por meio de um processo estocástico ao Modelo de Richard, Purcal sai de um modelo de mercado completo para um modelo de mercado incompleto, onde a renda estocástica pode ser segurada imperfeitamente, enquanto que a renda, como um processo determinístico, pode ser perfeitamente reproduzida por ativos negociáveis. Usando os mesmos dados de seu artigo de 2001 para a parametrização do modelo, Purcal (2003) acrescentou a taxa média de crescimento salarial real anual para o Japão, que foi de 1,92% por ano, e o desvio padrão do crescimento salarial anual de 2,2%.

Uma solução aproximada foi encontrada pelo uso da técnica de diferenças finitas como feito anteriormente em Purcal e Piggott (2001) e da implementação computacional do método da cadeia de Markov. Purcal faz uma comparação entre um indivíduo com 30 anos e um com 60 anos para verificar o que acontece aos controles ótimos – consumo, percentual investido em risco e legado – quando a riqueza varia e a renda está fixa e quando a renda varia e a riqueza está fixa.

No primeiro caso – riqueza variável e renda fixa – o consumo aproxima-se de uma função linear na riqueza, a declividade é 0,02, mostrando pouca sensibilidade do consumo em relação à riqueza. Há uma alta proporção de riqueza financeira investida em ativos de risco por indivíduos com riqueza menor, ou seja, quanto maior a riqueza, menor o investimento em ativos de risco. A riqueza não tem efeito sobre a demanda de seguro de vida para o caso particular analisado, o gráfico do prêmio do seguro de vida ótimo é aproximadamente constante, ou ainda, a demanda para o seguro de vida é inelástica em relação à riqueza, para a idade de 30 anos. Neste aspecto, para a idade de 60 anos, a relação apresenta-se inversamente proporcional, com declividade – 0,002, indicando que o seguro de vida ótimo não é particularmente sensível a mudanças na riqueza.

No segundo caso – renda variável e riqueza fixa – salário e consumo têm uma relação linear com declividade da curva perto de 1, a proporção de riqueza financeira investida em ativos de risco também cresce com o aumento do salário, salários crescentes resultam num aumento da predisposição ao risco. A relação entre salário e proporção investida em risco está próxima da relação linear, exceto para salários muito baixos ou muito altos, onde a proporção investida em ativos de risco é muito sensível a mudanças salariais. O nível de herança ótimo tem uma relação linear com o salário. Assim, dado o mesmo nível de riqueza financeira, indivíduos jovens com altos salários comprarão mais seguro de vida do que aqueles indivíduos com baixos salários.

Usando a metodologia de Purcal e Piggott (2001), os caminhos esperados da variável estado e das variáveis de controle foram calculados em um ambiente de renda estocástica. Purcal (2003) verificou que um indivíduo de 30 anos pode acumular menos riqueza durante sua vida ativa do que aquele que possui uma renda determinística. Num ambiente de risco, o indivíduo acumula cerca de 87% da riqueza obtida sem a consideração do risco. Uma renda com risco resulta, também, em um menor consumo esperado. Em relação à proporção investida em ativos de risco, nos anos iniciais ela é menor do que quando a renda é considerada determinística e, na seqüência, passa a ser maior. A demanda esperada por seguro de vida é maior no período que se aproxima da aposentadoria, enquanto que a demanda por anuidades é menor.

Segundo o Modelo de Merton, o objetivo do indivíduo é otimizar seu consumo ao longo da vida e sua herança no final da vida. Para isso ele deve decidir quanto consumir em cada período e quanto investir em ativos com risco. Essas decisões dependerão de seu grau de aversão ao risco. Richard incluiu no modelo a decisão quanto ao nível de legado desejado, possibilitando ao indivíduo contratar um seguro que possa suprir a insuficiência da riqueza frente ao legado desejado. Purcal resolveu o modelo de Richard numericamente e constatou que os indivíduos investem uma fração constante de sua riqueza ajustada no ativo de risco.

Como a questão da decisão de consumo é diretamente dependente do nível de renda do indivíduo, e a variável renda é complexa, a continuação desse estudo abordará os modelos de cálculo da contribuição necessária para a geração da renda pós-aposentadoria. No próximo capítulo serão apresentadas as bases da matemática atuarial para a elaboração desse modelo.

4 ENFOQUE MATEMÁTICO

Para a estimação da renda pós-aposentadoria e do valor a ser acumulado para a satisfação da mesma é necessária a adoção de um modelo matemático. A área da matemática que se dedica a tais cálculos é denominada matemática atuarial. A matemática atuarial fornece as bases tanto para o cálculo de seguros quanto para o de rendas. Este capítulo apresenta uma síntese da matemática atuarial a partir da abordagem tradicional e, também, os conceitos básicos a partir da abordagem estocástica.

Os modelos matemáticos básicos comuns a todos os tipos de seguro possuem três elementos fundamentais: as variáveis aleatórias que caracterizam a magnitude do risco – por exemplo, a duração da vida; os estados definidos, separados por eventos de transição – transição entre vida e morte; e a função econômica normalmente ligada a variáveis exógenas incontroláveis ou a medidas de desempenho – inflação, retorno do capital e outras (BOOTH *et al.*, 1999).

O fato de que os modelos são abstrações ou idealizações do mundo real significa que há um grau de incerteza associado a qualquer modelo. Daykin; Pentikainen e Pesonem (1994) identificaram três tipos de incerteza – a variabilidade estocástica, que surge porque as quantidades modeladas estão sujeitas a flutuações aleatórias, a incerteza dos parâmetros, freqüentemente estimados a partir de dados observados e a incerteza do modelo, que não pode representar fielmente o mundo real.

Bowers Junior *et al.* (1997) apresentam duas causas para a incerteza nos modelos de seguro de vida: a taxa de retorno do investimento e a duração do mesmo.

As suposições econômicas para o desenvolvimento de um modelo atuarial são a taxa de retorno esperado para os investimentos, o aumento esperado dos preços, o aumento esperado do salário médio, o ganho esperado e a taxa de crescimento dos dividendos, todos para o longo prazo (BOOTH *et al.*, 1999).

A Tabela 9 exemplifica uma base econômica adotada nos modelos atuariais, de acordo com a prática atuarial no Reino Unido.

Não há uma única base atuarial correta, somente um conjunto de alternativas plausíveis. Uma base atuarial forte é conservadora e será esperado resultar em contribuições maiores do que uma base fraca, que tem suposições mais otimistas.

Tabela 9: Parâmetros econômicos utilizados no Reino Unido para os modelos atuariais.

Parâmetro	Intervalo	Base forte	Base fraca
Dividendo	3,5% a 6,5%	4,5%	5,0%
Preços	3,5% a 6,0%	5,0%	5,0%
Juro	7,5% a 12,5%	8,5%	10,0%
Juro real	4,0% a 6,0%	3,5%	5,0%
Crescimento real dividendo	-2,0% a 2,0%	-1,0%	0%
Salário real	0% a 2,0%	2,0%	2,5%

Fonte: Booth *et al.*, (1999).

Num modelo atuarial, além das suposições econômicas, existem as suposições estatísticas. Segundo Booth *et al.*, tais suposições são usadas para tentar representar a experiência futura do indivíduo. Os decrementos, ou seja, os motivos para a exclusão do indivíduo de um determinado plano, incluem aposentadoria (*retirement*), invalidez (*ill health*), morte (*death*) e retirada voluntária (*withdrawal*).

4.1 ABORDAGEM DETERMINÍSTICA

De acordo com Booth *et al.* (1999), a matemática atuarial tradicional segue uma abordagem determinística e envolve as suposições de uma taxa fixa de juro e da presença de um grande número de passivos idênticos de vidas diferentes que torne ignorável a variabilidade devido à morte. A abordagem determinística não é completamente satisfatória por causa da restritividade das suposições, da falha no tratamento tanto da variabilidade quanto da incerteza e por ser inerentemente contraditória, visto que o processo é aleatório.

A abordagem tradicional aqui tratada segue o desenvolvimento apresentado por Gilberto Brasil (1985), que descreve a matemática atuarial a partir do estudo das probabilidades e da esperança matemática. Esta abordagem será utilizada para a construção do modelo atuarial a ser utilizado neste estudo.

O cálculo das probabilidades é utilizado para mensurar a influência do acaso ou azar nos acontecimentos, sendo possível medir-se este fenômeno probabilística ou estatisticamente. Pelo método probabilístico pode-se ter uma estimativa dos casos favoráveis à realização do fenômeno e, pelo método estatístico, a freqüência com a qual acontecem os casos favoráveis ao aparecimento do fenômeno.

A probabilidade matemática é a relação entre os casos favoráveis de realização de um acontecimento sobre os casos igualmente possíveis. A partir daí, tem-se a equação fundamental, a seguir, onde *p* representa a probabilidade de ocorrência de determinado fenômeno e *q* representa a probabilidade de não-ocorrência.

$$p = \frac{a}{N} \qquad q = \frac{b}{N} \qquad N = a + b \text{, onde:}$$

a: numero de ocorrências do evento *Z*;

b: número de ocorrências do evento *Z'*, que é contrário a *Z*;

N: número de casos possíveis.

A esperança matemática é o que produz o jogo honesto e é igual ao ganho esperado, multiplicado pela probabilidade desse ganho e multiplicado pelo fator de desconto correspondente ao período entre a aposta e o sorteio. Ela representa o preço matemático, isto é, o preço puro, onde não estão presentes despesas e lucro.

$$E = Q.p.v^t \text{, onde:}$$

E: esperança matemática;

Q: ganho esperado;

p: probabilidade de ganho;

v: fator de desconto;

t: prazo.

No caso dos seguros de vida e rendas de aposentadoria, o ganho esperado para o indivíduo é o valor do seguro a ser recebido ou da renda em questão, a probabilidade de ganho é a probabilidade de morte ou sobrevivência do mesmo, conforme o caso, e a esperança matemática é o prêmio atuarial a ser pago na data inicial para a obtenção do seguro ou renda.

Para a definição das probabilidades de morte ou sobrevivência, calcula-se a taxa de mortalidade. Ela pode ser determinada pelo método do grupo-fechado, o qual se dá por intermédio de um cadastro individual de um grande grupo de pessoas e o acompanhamento do decrescimento do grupo até a sua extinção total, onde a taxa de mortalidade será a relação entre os óbitos e o número de vivos. Este método é de difícil aplicação por envolver períodos longos de acompanhamento e exigir condições idênticas em relação à idade, saúde e outros. Outro método é o do seguro, que calcula a taxa de mortalidade com base na experiência das seguradoras. Existe, ainda, o método do censo, que fornece a classificação completa da população suplementada pelo levantamento do registro de óbitos (BRASIL,G., 1985).

A tábua de vida, também conhecida como tábua de mortalidade, é um instrumento para exibir dados sobre mortalidade humana. Ela é representada pela função l_x, que indica os sobreviventes para cada idade inteira x e está sujeita a um decremento simples – a morte. O intervalo de variação de x é $(0,w)$, onde w representa o limite da vida (IYER, 2002).

A tábua utilizada, em geral, decorre da experiência acumulada pelas companhias de seguros e é composta por seis colunas com as seguintes informações:

x: coluna das idades em ordem crescente;

l_x: quantidade de pessoas vivas em cada idade (*living*) sendo o primeiro valor designado como raiz da tábua e w representando a última idade da tábua;

d_x: quantidade de mortes ocorridas ao longo da idade x (*death*);

q_x: taxa de mortalidade correspondente a cada idade, ou seja, é a probabilidade de um indivíduo de idade x vir a falecer antes da idade $x + 1$;

p_x: taxa de sobrevivência correspondente a cada idade; é a probabilidade um indivíduo de idade x vir a atingir com vida a idade $x + 1$;

e_x^o: esperança de vida, expectativa completa de vida ou vida média para cada idade (*expectation of life*).

Uma vez escolhida a tábua de vida, o modelo de sobrevivência determinado pela mesma é único, mas o inverso não é verdadeiro. Um mesmo modelo de sobrevivência pode determinar mais de uma tábua de vida, bastando, para isso, introduzir constantes diferentes multiplicando l_x (BOOTH *et al.*, 1999).

A construção de uma tábua de mortalidade é dependente do conhecimento que se tem da taxa de mortalidade (q_x) para cada idade do universo em estudo e as demais funções se originam desta taxa por meio das relações que seguem:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \qquad d_x = l_x - l_{x+1} \qquad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad e_x^o = \frac{T_x}{l_x}$$

$$T_x = \frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega,$$

onde T_x representa a quantidade de existência, isto é, o número de anos vividos pelas l_x pessoas.

As probabilidades fundamentais utilizadas para o cálculo do prêmio para um seguro de vida ou para a obtenção de uma renda de aposentadoria, baseadas na tábua de mortalidade, são dadas por:

${}_np_x$, probabilidade de uma pessoa de idade x vir a sobreviver n anos;

${}_nq_x$, probabilidade de uma pessoa de idade x vir a falecer até a idade $x + n$;

${}_{n/}Q_x$, probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver até alcançar a idade $x + n$ e nesta idade vir a falecer;

${}_{n/m}Q_x$, probabilidade de uma pessoa de idade x vir a falecer entre a idade $x + n$ e a idade $x + n + m$.

A formulação matemática dessas probabilidades fundamentais estão apresentadas a seguir:

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{n/}Q_x = {}_np_x . q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} \qquad {}_{n/m}Q_x = {}_np_x - {}_{n+m}p_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$$

A taxa de mortalidade central para a idade x (m_x) é dada pela razão entre o número de mortes na idade x (d_x) pelo número de pessoas que estão vivas na metade desta idade (L_x). Esta relação é representada pela seguinte equação:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}, \text{ mas } L_x = l_x - 0{,}5d_x, \text{ então } m_x = \frac{d_x}{l_x - 0{,}5d_x} = \frac{q_x}{1 - 0{,}5q_x}.$$

Essas são as bases da matemática atuarial pela abordagem determinística para o desenvolvimento dos modelos de cálculo de prêmio puro para seguros de vida e rendas de aposentadoria.

4.2 ABORDAGEM ESTOCÁSTICA

Nas últimas duas décadas houve uma significativa mudança no pensamento e na abordagem levada pela prática atuarial. Os atuários deixaram de utilizar apenas métodos determinísticos passando a usar métodos estocásticos (BOOTH *et al.*, 1999).

A abordagem estocástica para a matemática do seguro de vida, descrita em Booth *et al.* (1999), baseada em Bowers Junior *et al.,* (1997) define:

T^o como a variável aleatória contínua que mede o tempo decorrido entre a idade zero e a morte geralmente dada em anos.

$F_o(t) = P\,[T^o \leq t]$ é a função de distribuição acumulada de T^o, representando a probabilidade de um indivíduo vir a falecer até a idade t.

$S_o(t) = P\,[T^o > t] = 1 - F_o(t)$ é a função sobrevivência, que representa a probabilidade de um indivíduo sobreviver além da idade t.

T^x : variável aleatória contínua que mede o tempo decorrido entre a idade x e a morte, supondo que o indivíduo já atingiu a idade x.

Logo, $F_x(t) = P[T^x \leq t]$ e $S_x(t) = P[T^x > t]$

A conexão entre F_x e F_o pode ser estabelecida como a probabilidade que um indivíduo venha a falecer até a idade $x + t$, uma vez que já atingiu a idade x. Então:

$$F_x(t) = \frac{F_o(x+t) - F_o(x)}{1 - F_o(x)} \quad \text{e} \quad S_x(t) = \frac{S_o(x+t)}{S_o(x)}$$

A força da mortalidade na idade x é denotada por μ_x e é definida por:

$\mu_x = \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{h}P[x < T^o \leq x + h \mid T^o > x]\right)$, onde μ_x representa a probabilidade de um indivíduo, que sobreviveu até a idade x, falecer nesta idade. Utilizando os resultados anteriores, chegar-se-á a uma expressão da força da mortalidade por meio das funções de mortalidade ou sobrevivência, supondo ambas diferenciáveis em t.

$$\mu_x = \frac{1}{1 - F_o(x)} \cdot \frac{d}{dx} F_o(x) = \frac{-1}{S_o(x)} \cdot \frac{d}{dx} S_o(x)$$

Fazendo um paralelo entre a abordagem determinística e a estocástica, tem-se a seguinte correspondência:

Probabilidade de vir a falecer até a idade $x + t$	${}_tq_x$	$F_x(t)$
Probabilidade de sobreviver além da idade $x + t$	${}_tp_x$	$S_x(t)$
Taxa central de Mortalidade	m_x	$\mu_{x+\frac{1}{2}}$

Figura 9: Comparação entre abordagem determinística e abordagem estocástica da matemática atuarial.

Fonte: Elaborada pela autora.

A função densidade de probabilidade para T^x será:

$$f_x(t) = \frac{d}{dx} F_x(t) = \frac{S_o(x+t).\mu_{x+t}}{S_o(x)} = {}_tp_x.\mu_{x+t}$$

Existem duas abordagens para construir aproximações estimadas para μ_x: uma seria expressar μ_x como uma combinação de probabilidades p_x supondo que é uma função polinomial da idade de grau apropriado e, outra, em termos de valores certos da função l_x, supondo, também, uma função polinomial da idade de grau apropriado. Os resultados obtidos pelo uso de um modelo determinístico, geralmente, podem ser obtidos como valores esperados em um modelo probabilístico (BOWERS JUNIOR *et al*., 1997).

4.3 ANUIDADES

O conceito de juros compostos fundamenta a análise e a avaliação de investimentos. A definição de juros compostos é baseada em períodos discretos de tempo, sendo possível conceber, teoricamente, uma taxa de juros δ equivalente em termos contínuos. A relação entre δ e i pode ser expressa da seguinte forma:

$$\delta = ln(1+i) \qquad \Rightarrow \qquad e^{\delta} = 1+i \qquad \text{e} \qquad v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$$

O valor presente de uma anuidade antecipada ou devida, que paga 1 unidade monetária no início de cada ano por n anos, é a soma de uma progressão geométrica onde cada termo representa o valor atual do pagamento individual realizado em um determinado período. Esta anuidade é representada da seguinte forma:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

Por meio do estudo das anuidades na matemática financeira, já se tem o conhecimento da terminologia, da notação e da própria teoria utilizados na teoria das anuidades de vida, que agrega uma condição para o pagamento da anuidade, ou seja, a anuidade só será paga se o indivíduo estiver vivo. Logo, uma anuidade de vida é uma série de pagamentos feitos continuamente ou em intervalos iguais enquanto o indivíduo estiver vivo. Ela pode ser vitalícia ou temporária, imediata ou diferida (BOWERS JUNIOR *et al.*, 1997).

Geralmente, trabalha-se com anuidades pagas em intervalos de tempo iguais, definindo apenas se estas serão pagas no início ou no final do período. Quando se pensa em receber uma renda ou efetuar um pagamento que dê direito a uma renda futura, normalmente faz-se de forma antecipada.

Qualquer estudo de anuidades começa por definir uma anuidade vitalícia imediata antecipada como sendo o caso mais geral. Uma anuidade que paga, de imediato, 1 unidade monetária, no início de cada ano, enquanto o indivíduo estiver vivo, é conhecida na literatura internacional, como *whole life annuity-due*.

Pela abordagem atuarial tradicional, esse valor é dado por:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{\sum_{t=w}^{x} D_t}{l_x.v^x} = \frac{D_w + D_{w-1} + ... + D_x}{l_x.v^x} = \frac{l_w.v^w + l_{w-1}.v^{w-1} + ... + l_x.v^x}{l_x.v^x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{l_w.v^{w-x} + l_{w-1}.v^{w-1-x} + ... + l_x.v^0}{l_x} = \frac{\sum_{t=0}^{w-x} l_{x+t}.v^t}{l_x}$$

Onde:

$\ddot{a}_x$ é o valor atuarial de uma renda unitária vitalícia, imediata, antecipada para a idade *x*;
N_x é o somatório dos valores de D_x, variando de ω a *x*, isto é, do fim da tábua para o princípio;
D_x é o produto de l_x pelo fator de juros, conhecido como valor descontado dos vivos da idade *x*.

As funções D_x e N_x estão apresentadas numa tábua chamada Tábua de Comutação. Ela reúne em várias colunas os números de comutação resultantes da multiplicação das funções l_x e d_x, de uma Tábua de Mortalidade, pelo fator de juros a uma taxa prefixada (BRASIL, G., 1985).

Pela abordagem estocástica, de acordo com Bowers Junior *et al.* (1997), considera-se a variável aleatória discreta *K* sendo o tempo de vida futura do indivíduo. O valor presente da variável aleatória Y, que representa a anuidade, será $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$.

A probabilidade associada a este valor presente é $\Pr(K = k) = {}_K p_x q_{x+K}$, ou seja, a probabilidade que um indivíduo de idade *x* venha a sobreviver até a idade *x* + *K* e, nesta idade, faleça.

O valor presente atuarial desta anuidade será dado pela esperança de *Y*.

$\ddot{a}_x = E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}] = \sum_{K=0}^{+\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}\, {}_K p_x q_{x+K} = \sum_{K=0}^{+\infty} v^K\, {}_K p_x$, resultado este obtido pelas somas de séries. Esta expressão é a fórmula de pagamento corrente do valor presente atuarial para uma anuidade unitária imediata vitalícia antecipada, onde ${}_K p_x$ é a probabilidade de um pagamento de 1 u.m. ser feito no período K. Trabalhando a fórmula acima recursivamente, obtém-se:

$$\ddot{a}_x = E\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] = \frac{1 - A_x}{d} \qquad Var(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}) = Var\left(\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right) = \frac{Var(v^{K+1})}{d^2} = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2},$$

onde ^2A_x é o valor presente atuarial de um seguro de vida para uma unidade monetária calculado à taxa de juro 2δ.

Para as variações da renda relativas a duração e ao período inicial de pagamento, as formulações estão apresentadas na seqüência, de acordo com a abordagem estocástica.

O valor presente da variável aleatória de uma renda imediata temporária antecipada de u.m. por ano é $Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \ge n \end{cases}$ e seu valor presente atuarial é

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = E[Y] = \sum_{K=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}\, {}_K p_x q_{x+K} + \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_n p_x = \sum_{K=0}^{n-1} v^K\, {}_K p_x .$$

Sendo $Y = (1 - Z)/ d$, onde $Z = \begin{cases} v^{K+1}, & 0 \le K < n \\ v^n, & K \ge n \end{cases}$ é o valor presente da variável aleatória para 1 u. m. de seguro de vida, pagável no final do ano da morte do indivíduo ou no vencimento do contrato, tem-se:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - E[Z]}{d} = \frac{1 - A_{x:\overline{n|}}}{d} \quad e \quad Var(Y) = \frac{Var(Z)}{d^2} = \frac{{}^2A_{x:\overline{n|}} - (A_{x:\overline{n|}})^2}{d^2}$$

Para uma renda vitalícia diferida antecipada de 1 u.m. pagável no início de cada ano enquanto o indivíduo sobreviver, a partir da idade $x + n$, o valor presente da variável aleatória e o valor presente atuarial são, respectivamente:

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \le K < n \\ {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{K+1-n|}}, & K \ge n \end{cases}$$

$$E[Y] = {}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{K=n}^{+\infty} v^K\, {}_K p_x$$

$$Var(Y) = \frac{2}{d} v^{2n}\, {}_n p_x (\ddot{a}_{x+n} - {}^2\ddot{a}_{x+n}) + {}^2_{n|}\ddot{a}_x - ({}_{n|}\ddot{a}_x)^2$$

O estudo da renda por meio de modelos estocásticos é recente e a aplicação dos mesmos também é nova. Essa linha de estudo está sendo desenvolvida por autores de diversas áreas, por exemplo,economia, finanças, pesquisa operacional e outras afins, além da atuarial.

4.4 MODELO ATUARIAL

Os parâmetros demográficos e econômicos básicos utilizados para a modelagem atuarial de qualquer plano previdenciário, segundo Iyer (2002), envolvem a definição:

- da taxa de juro;
- da taxa de crescimento salarial, que deve exceder a taxa de inflação numa situação de normalidade econômica;
- da taxa de indexação das aposentadorias, que deve, no mínimo, manter o poder de compra da mesma e, de preferência, manter o padrão de vida dos aposentados em um nível semelhante ao da fase ativa;
- das taxas de mortalidade, invalidez e outros decrementos conforme o plano;
- da taxa de inflação.

O valor de uma renda pós-aposentadoria e o valor a ser poupado, com a finalidade de constituir o fundo gerador da mesma, são calculados por intermédio da matemática atuarial. A equação que determina o valor da contribuição ou da renda parte de uma situação de equilíbrio, onde o valor atual das contribuições realizadas ao longo de um período deve ser igual ao valor atual da renda a ser recebida.

> O equilíbrio atuarial exige que às despesas e demais desembolsos futuros correspondam fontes presumivelmente capazes de, pelo menos, se equipararem aos gastos. [...] não pode ser tão precisamente avaliado quanto o equilíbrio financeiro, [...], pois devem ser levados em conta parâmetros sobre os quais não se tem certeza total. A análise do equilíbrio atuarial verifica a capacidade do fundo para saldar de forma consistente os seus débitos em longo prazo. (PEREIRA; MIRANDA; SILVA, 1997, p.14).

O modelo atuarial pode ser discreto ou contínuo, com parâmetros predeterminados e com variáveis determinísticas ou estocásticas.

Modelo discreto:

$$\sum_{t=0}^{w} \frac{C_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{w} \frac{B_t}{(1+i)^t}, \text{com } t \in \{0,1,2,3,\ldots,w\}$$

Modelo contínuo:

$$\int_0^w C(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^w B(t)e^{-\delta t}dt, \text{com } t \in [0,w]$$

No primeiro caso, tanto as contribuições (C_t) quanto os benefícios (B_t) são indicados um a um e descontados à taxa de juro i, sendo o modelo discreto mais simples aquele que considera as contribuições e benefícios como valores constantes ao longo do tempo. Este modelo pode, pois, ser aperfeiçoado utilizando-se valores crescentes em progressão aritmética ou geométrica em ambas as situações. É possível ainda considerar crescimentos diferentes, ou seja, as contribuições podem estar vinculadas à taxa de crescimento salarial e os benefícios à taxa de juro da economia.

No caso contínuo, o valor das contribuições e dos benefícios é calculado pelas funções matemáticas deriváveis ($C(t)$ *e* $B(t)$) e o valor atual é calculado por juros compostos capitalizados continuamente, onde $\delta = \ln(1 + i)$.

A utilização de um modelo atuarial é necessária para que se possa determinar o valor da contribuição ou da renda de aposentadoria, mas não é suficiente, pois não consegue garantir que esses valores calculados se manterão, independentemente do desenvolvimento da economia e do mercado financeiro. Pelo fato de ser um modelo, é uma aproximação da realidade e não absorve a totalidade das variações dos parâmetros e premissas adotadas.

O capítulo seguinte apresenta um estudo sobre os fatores financeiros que determinarão o desempenho do fundo, desde a taxa de juro até o mercado financeiro e previdenciário.

5 ENFOQUE FINANCEIRO

Uma vez que poupar é uma condição essencial para a existência de uma renda futura e o valor a ser poupado já está definido, é relevante a destinação desses recursos, seja ele para o mercado financeiro ou diretamente no mercado previdenciário. Depende da evolução financeira do fundo, ou seja, do retorno do capital investido por meio das contribuições, o alcance do valor da renda de aposentadoria calculada previamente. A decisão de investimento pressupõe a existência de um determinado valor oriundo, em geral, da decisão de não consumir no presente, para que mais possa ser consumido no futuro. Esta decisão será ótima na medida em que maximizar a satisfação esperada do consumo futuro, isto é, se a renda de aposentadoria for suficiente para satisfazer às necessidades e preferências do poupador.

O capital disponibilizado pelos poupadores é direcionado aos investidores que pagarão pelo mesmo uma taxa de juro acordada inicialmente. Dessa forma, a intermediação pode ser considerada como o processo de mercado que traz juntos os usuários finais do sistema financeiro: famílias e empresas que poupam dinheiro e tomadores que desejam investir em capital físico ou financiar o consumo sobre e acima da renda corrente (BOOTH *et al.*,1999).

De acordo com a teoria financeira, os indivíduos têm gostos diferentes em relação ao consumo e graus distintos de aversão ao risco. Para o investimento ocorrer, os aplicadores calcularão a utilidade esperada para todas as alternativas possíveis e escolherão aquela que a maximiza (COPELAND; WESTON, 1988).

Desta forma, $E[U(W)] = \sum_i p_i U(W_i)$, onde:

$U(W)$ representa a função utilidade da riqueza;

p_i representa a probabilidade de ocorrência de cada alternativa i;

$U(W_i)$ representa a função utilidade da riqueza da alternativa i.

A teoria das preferências do consumidor foi utilizada para desenvolver a função utilidade cardinal da riqueza e, uma medida para o prêmio de risco, além da derivação da medida de aversão ao risco do investidor.

5.1 TAXA DE JURO

A definição da taxa de juro a ser utilizada em qualquer cálculo financeiro é fundamental, ocorrendo isto, também, para os cálculos atuariais, sejam eles referentes tanto a benefícios quanto a contribuições. Além da definição de qual taxa usar, será necessário fazer projeções, para períodos futuros, de crescimento da mesma.

Como a taxa de juro definirá o fator de desconto a ser utilizado no cálculo de valor atual, taxas altas implicarão valor de contribuição menor para a geração do fundo de aposentadoria, enquanto que taxas mais baixas exigirão contribuições de maior valor.

De acordo com a teoria clássica de juros, Fisher em 1930 coloca que a taxa de juro é aquela que equilibra a oferta e a procura de capital, onde a oferta depende da propensão das pessoas para a poupança e a procura depende das oportunidades de investimento produtivo (BREALEY; MYERS, 2000).

A taxa de juro dita nominal ou aparente é decomposta em dois fatores – a taxa de juro real e a taxa de inflação. É preciso estar claro em qualquer cálculo realizado qual a taxa de juro utilizada, se a taxa de juro real ou se a taxa de juro nominal.

Fisher afirma que a taxa de juro nominal deve ser igual à taxa de juro real mais a taxa de inflação prevista, e que uma variação na inflação esperada causará a mesma variação na taxa de juro nominal (BREALEY; MYERS, 2000).

Desta forma, a relação apresentada é:

$$1+i=(1+r)(1+I)$$
$$i=r+I+Ir,\ \text{onde:}$$

i é a taxa de juro nominal;

r é a taxa de juro real;

I é a taxa de inflação.

A taxa de juro real é, efetivamente, uma taxa esperada porque a inflação futura não é totalmente previsível, a taxa de juro real (esperada) varia efetivamente ao longo do tempo (BREALEY; MYERS, 2000).

Taxas de juro não são, portanto, constantes através do tempo e a taxa de juro de um instrumento financeiro será uma função de sua maturidade, isto é, o tempo até o vencimento. Tanto as contribuições para formação de uma poupança com a finalidade de aposentadoria quanto os benefícios recebidos a partir dela envolvem prazos longos. Por isso é necessário conhecer a estrutura temporal da respectiva taxa de juro.

A teoria financeira apresenta, em seu desenvolvimento, hipóteses para o crescimento da taxa de juro em função do tempo. A primeira hipótese surgida é a hipótese das expectativas não-viesadas, que foi primeiramente postulada por Irving Fisher em 1896 e desenvolvida posteriormente por Friedrich Lutz em 1940. Lutz refere-se à perfeita previsibilidade da fórmula fischeriana – a taxa de longo prazo será igual à média geométrica das de curto prazo e, além disso, que a taxa de retorno sobre a aplicação de um período será a mesma, independentemente da maturidade do título. (COPELAND; WESTON, 1988).

De acordo com Brealey e Myers (2000), esta teoria é extrema e não totalmente comprovada pelos fatos, e o estudo de Fama de 1984 confirma que as taxas de juro de longo prazo refletem, em parte, as expectativas dos investidores acerca das futuras taxas de curto prazo.

Outra hipótese levantada é a teoria da preferência pela liquidez. Esta teoria supõe que o risco advém unicamente da incerteza acerca das taxas reais subjacentes e que as taxas de juro de longo prazo seriam mais altas que as de curto prazo, devido à menor liquidez e à maior sensibilidade dos títulos de longo prazo aos movimentos da taxa de juro (BREALEY; MYERS, 2000).

Hicks argumenta que um prêmio de liquidez, isto é, um maior ganho para investir no longo prazo existe porque uma dada mudança na taxa de juro terá um efeito maior no preço dos títulos de longo prazo do que nos de curto prazo. Como princípio geral, tem-se que maiores riscos devem ser compensados por maiores rendimentos (COPELAND; WESTON, 1988).

A hipótese de segmentação de mercado é a terceira teoria da estrutura a termo, atribuída a Culbertson, Walker, Modigliani e Sutch. Ela enfatiza que existe relativamente pouca substituição entre ativos de maturidades diferentes porque os investidores têm hábitos preferentes e que as taxas de juro para uma dada maturidade são explicadas principalmente pela procura e oferta de fundos de maturidade específica (COPELAND; WESTON, 1988).

A teoria econômica apresenta, então, três hipóteses para as alterações temporais da taxa de juro, sendo possível resumi-las, tentando não simplificar em demasia, na existência de expectativas racionais dos investidores, preferência por liquidez e maturidade dos investimentos.

Para este trabalho, será necessário determinar a taxa de juro a partir das taxas existentes no mercado brasileiro e fazer uma projeção da mesma para um longo período. A taxa de juro que serve como referência às demais é a taxa de juro do mercado de reservas bancárias – taxa SELIC, determinada pelo Banco Central do Brasil. É por meio da taxa SELIC que as taxas do mercado financeiro são determinadas: taxas de empréstimos, poupança, CDB, financiamento e outras (MENDONÇA, 2001).

Famá (2002) faz aproximações da taxa de juro livre de risco – taxa pura de juro – testando o retorno do C-bond, da caderneta de poupança e do CDI. Ele conclui que o C-bond mostra-se inadequado, pois está correlacionado estatisticamente com outros ativos da economia. A poupança e o CDI mostram-se condizentes com a conceituação teórica de uma taxa pura de juro. A questão que fica, portanto, é a existência destas duas taxas na economia brasileira com características similares em termos de risco, mas com retornos médios distintos no longo prazo.

Além da definição da taxa a ser utilizada, tem-se a necessidade de projetar a mesma para o período futuro, mas não é possível saber se essa taxa manterá sua variabilidade no mesmo patamar dos dados passados. Existem muitos métodos para incorporar a variabilidade da taxa de juros aos modelos atuariais. Um método seria o de propor cenários de taxas de juro. Um possível cenário é o esboço de uma seqüência projetada de eventos. No cenário determinístico as taxas de juro para cada período são determinadas pelo atuário. Nos cenários aleatórios, as taxas de juro são determinísticas, o atuário formula os cenários plausíveis especificando uma distribuição de probabilidades para os mesmos. Outro método, seria utilizar um modelo estocástico baseado em dados passados ou que dependa de características assumidas do mercado de capitais, dessa forma, as taxas de juro apresentam uma variação aleatória e são modeladas por uma função de distribuição de probabilidades. (BOWERS JUNIOR *et al.*, 1997).

5.2 RETORNO E RISCO DE UM INVESTIMENTO

A teoria básica relativa a risco e retorno é normalmente estudada nos modelos de equilíbrio dos ativos financeiros, que se prestam a explicar o comportamento dos preços dos títulos e fornecer mecanismos de avaliação do risco e retorno da carteira. Se a distribuição dos retornos dos ativos é normal, então a utilidade esperada pode ser maximizada pela seleção das melhores combinações entre retorno e risco, calculados, respectivamente, pela média e variância. A média do retorno esperado do conjunto dos investimentos pode ser expressa como a média ponderada dos retornos esperados dos títulos individuais, onde os pesos são as porcentagens investidas em cada título. A variância é dada pela soma das variâncias individuais multiplicadas pelo quadrado do peso mais a covariância entre os títulos. A covariância é um conceito fundamental, uma vez que ela mede a contribuição de cada título individual ao risco da carteira, que é o conjunto de investimentos selecionados para aplicação dos valores (COPELAND; WESTON, 1988).

O risco pode ser visto como a possibilidade de prejuízo financeiro, sabendo-se que, quanto mais incerto for o retorno de um investimento, maior será o risco. A preferência em relação ao risco se dá por comportamentos:

a) de indiferença, onde o mesmo retorno é aceito para diferentes taxas de risco;

b) de aversão, onde taxas de retorno maiores são exigidas para taxas de risco maiores, ou;

c) de propensão, onde o investidor assume maiores riscos sem previsão de retornos maiores.

Para Ross, Westerfield e Jaffe (2002), o investidor típico é avesso ao risco. Dessa forma ele assume riscos maiores somente se puder obter retornos maiores também. Esse maior retorno está contemplado na parcela referente ao prêmio de risco contida na taxa de juro do investimento. O prêmio pelo risco reflete a possibilidade de inadimplemento do emissor da dívida, a possibilidade de alteração da taxa de juro durante o período do investimento, também a liquidez do título e questões como a forma de resgate prevista no contrato e alterações na tributação do mesmo.

No mercado financeiro pode-se dividir o risco total em dois tipos: o risco diversificável, que se pode minimizar e o risco não-diversificável, que se refere a forças que afetam a todas as empresas. Este último é o mais relevante, pois reflete a contribuição de cada ativo ao risco da carteira.

A diversificação simples dos ativos diminui o risco não-sistemático ou diversificável, que é o tipo de risco relacionado a eventos específicos das empresas, mas não elimina o risco sistemático ou não-diversificável, que é o risco que afeta conjuntamente a todos que participam do mercado. A preocupação do investidor é, então, com o risco não-diversificável. Fama (1976) apresenta em seu estudo que a composição de uma carteira diversificada atingirá o seu ótimo, ou seja, a redução do risco diversificável, com não mais do que 15 títulos (BREALEY; MYERS, 2000).

Os modelos de precificação de ativos são utilizados para determinar o preço de mercado para o risco e medir, apropriadamente, o risco de um ativo individual. O Capital Asset Pricing Model (CAPM) foi desenvolvido em 1963, inicialmente por Sharpe, a partir dos estudos de Tobin e Markowitz. Este modelo supõe que os investidores são avessos ao risco e maximizadores da utilidade esperada de sua riqueza ao final do período e possuem expectativas homogêneas sobre os retornos dos ativos, que têm uma distribuição conjunta normal. A eficiência do portfólio de mercado e o modelo CAPM são inseparáveis, constituem hipóteses conjuntas (COPELAND; WESTON, 1988).

A equação do CAPM é $E(\tilde{R}_i) = R_f + [E(\tilde{R}_m) - R_f]\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, conhecida também por *Security Market Line* (*SML*). A taxa de retorno requerida de qualquer ativo ($E(\tilde{R}_i)$) é igual à taxa de retorno livre de risco (R_f) mais o prêmio de risco ($[E(\tilde{R}_m) - R_f]\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$). O prêmio de risco é o preço do risco ($[E(\tilde{R}_m) - R_f]$) multiplicado pela quantidade de risco ($\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$). O preço de risco é a diferença entre a taxa de retorno esperado do portfólio de mercado e a taxa de retorno livre de risco. A quantidade de risco é dada pela covariância entre o retorno do ativo de risco I e o portfólio de mercado M, dividido pela variância do portfólio de mercado, designada por β.

De acordo com o CAPM, a definição correta do risco de um ativo individual é a que está apresentada na relação a seguir, pois revela a contribuição do mesmo ao risco do portfólio.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{COV(R_i, R_m)}{VAR(R_m)}$$

Existem muitas críticas ao CAPM, em virtude das suposições iniciais serem consideradas bastante restritivas. Dentre estas está a questão dos retornos com distribuição não-normal, a existência de ativos não-negociáveis, o modelo em tempo contínuo, a existência de expectativas heterogêneas e impostos (COPELAND; WESTON, 1988).

Em 1976, Ross desenvolveu um novo método de precificação de ativos denominado Arbitrage Pricing Theory (APT). Diferentemente do CAPM, a APT admite que o retorno esperado de um determinado ativo é função da covariância do ativo em questão com diversos fatores, e não apenas do portfólio de mercado.

A teoria apregoa que os fatores usados na APT, de âmbito setorial ou macroeconômico, são responsáveis pela parte do risco que não pode ser anulada com a diversificação, mas não especifica quais são eles. A APT é um modelo mais amplo e sofisticado do que o CAPM, pois permite trabalhar mais próximo da realidade pelo uso de múltiplos fatores para medir os retornos esperados. O portfólio de mercado se apresenta como um dos diversos fatores escolhidos para determinar o prêmio de risco do ativo (BREALEY; MYERS, 2000).

5.3 MERCADO FINANCEIRO

Os investimentos no mercado financeiro tanto podem ser dirigidos ao mercado de renda fixa quanto ao de renda variável. O mercado de renda fixa compõe-se de ativos cuja remuneração ou retorno de capital pode ser dimensionado no momento da aplicação. Os títulos de renda fixa são públicos ou privados, conforme a condição da entidade ou empresa que os emite. Já o mercado de renda variável compõe-se de ativos cuja remuneração ou retorno de capital não pode ser dimensionado no momento da aplicação. Este mercado compreende todas as operações realizadas nas bolsas de valores, de mercadorias, de futuros e assemelhadas, bem como as operações com ouro, com a interveniência de instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional (PEREIRA; MIRANDA; SILVA, 1997).

O mercado de ações e derivativos tem, como características básicas, a maior exposição ao risco, a magnitude incerta dos ganhos, a agilidade de negociação dos ativos e a incorporação rápida de novas informações ao preço dos ativos. Esse mercado contribui para o crescimento da economia do país, na medida em que orienta o investimento para o setor produtivo. A característica principal dos derivativos é que, por intermédio deles, é possível esterilizar grande parte do risco – objeto de negociação deste mercado (PEREIRA; MIRANDA; SILVA, 1997).

5.4 MERCADO PREVIDENCIÁRIO

O modelo de previdência adotado em qualquer país é fundamental para a formação da poupança pelo fato de deslocar consumo presente para o futuro e ampliar a poupança corrente. No modelo de capitalização há uma transferência de renda intertemporal para o próprio indivíduo (CONTADOR, 2003).

A aplicação dos recursos destinados à aposentadoria pode ser realizada em investimentos do mercado financeiro específicos para tal ou diretamente no mercado de previdência complementar.

Os fundos de investimento orientados à aposentadoria são aplicações com o objetivo de complementação da aposentadoria de seu investidor. O Fundo de Aposentadoria Programada Individual (FAPI) é constituído sob a forma de um condomínio aberto e administrado por instituições financeiras. Não há rentabilidade mínima prevista e todo o rendimento é repassado ao investidor que, ao final do período de contribuição, poderá sacar todos os recursos. O risco do investidor no FAPI é o risco dos títulos da carteira. Este modelo foi inspirado no Individual Retirement Account (IRA) dos Estados Unidos (FORTUNA, 2001).

Outro tipo de aplicação com fins previdenciais é o Plano Gerador de Benefícios Livres (PGBL), inspirado no plano 401K dos Estados Unidos, no qual o cliente pode escolher o perfil do risco desejado. O PGBL oferece três modalidades distintas de investimento: o plano soberano, que aplica os recursos apenas em títulos federais, o plano renda fixa, títulos públicos federais e outros de renda fixa e o plano composto, que além das aplicações anteriores adiciona a possibilidade de aplicar até 49% dos valores em renda variável. A rentabilidade vai depender da modalidade escolhida, da capacidade do administrador e da economia do país.

Além do PGBL, existe o produto Vida Gerador de Benefícios Livres (VGBL). Eles são produtos com características semelhantes, a diferença está no tratamento fiscal. No PGBL, o investidor deduz de sua base de cálculo do Imposto de Renda as contribuições feitas, até o limite de 12% de sua renda bruta anual. O VGBL não conta com esse incentivo, mas, nesse caso, o investidor é tributado apenas em relação ao ganho de capital.

A previdência privada aberta tradicional é uma opção de aposentadoria complementar na qual o interessado irá custear integralmente a sua renda futura, garantindo uma rentabilidade mínima de TR ou IGP-M mais juros de 6% ao ano. O aplicador poderá contribuir para uma renda vitalícia por sobrevivência, por invalidez e também por morte.

Os novos planos da previdência aberta também garantem uma renda mínima aos participantes. O plano com remuneração garantida e performance (PRGP) garante uma taxa de juro mais uma correção por índice de preços e um excedente financeiro. O plano com atualização garantida e performance (PAGP) não garante taxa de juro, mas inclui correção pelo índice de preços e excedente financeiro. Os custos dos mesmos envolvem uma taxa de carregamento, uma taxa de administração e uma taxa de gestão financeira (FORTUNA, 2001).

A escolha de um fundo de previdência aberta deve ser realizada com cuidado, analisando-se aspectos quanto à rentabilidade, liquidez, benefícios fiscais, taxas de administração, taxas de carregamento e outros fatores que possam influenciar. De acordo com o estudo realizado por Leal (2001), nem sempre as vantagens fiscais oferecidas pelos fundos de previdência privada os tornam mais vantajosos do que a poupança realizada por meio de fundos de renda fixa e fundos de investimento financeiro. Ele verificou que o custo de administração de maior impacto sobre a riqueza final do poupador é a taxa de administração, se comparado com a taxa de carregamento.

O plano de contribuição definida oferece um mecanismo flexível para a poupança destinada à aposentadoria, sendo necessário, em alguns casos, um nível mínimo de contribuições, mas, em geral, será possível fazer contribuições adicionais voluntárias, para que o valor poupado atinja o nível desejado. Estes planos envolvem um risco considerável para os membros, estando dentre eles: o risco de mercado causado por condições; o risco econômico gerado por meio de taxas de retorno real insuficientes, devido à inflação e ao baixo crescimento econômico; o risco de falência do administrador do fundo; o risco de longevidade, no qual o contribuinte sobrevive um número maior de anos do que o utilizado nas estimativas iniciais; o risco fiscal e o risco político, dentre outros (DAYKIN, 2002).

Os mercados financeiro e previdenciário apresentam uma série de alternativas para o investimento do valor acumulado para fins de aposentadoria. O indivíduo deve estar atento ao desempenho do investimento escolhido e ter sempre presente a possibilidade de redirecionamento do mesmo na busca de um maior rendimento.

6 MÉTODO

A presente dissertação é desenvolvida a partir da construção de um modelo matemático atuarial capaz de apresentar o valor atual a ser poupado para a geração de uma renda futura definida inicialmente, com parâmetros predeterminados. A solução analítica do modelo é apresentada na seqüência desse capítulo considerando variações nos parâmetros de entrada.

O modelo desenvolvido é um modelo de longo prazo, desse modo as premissas adotadas apresentarão, possivelmente, alguma variabilidade. Para capturar essa variabilidade é realizada uma simulação do modelo para cenários diferentes, utilizando uma variação estocástica da taxa de juro, com o objetivo de estudar a distribuição de probabilidades do resultado esperado.

O desenvolvimento desse capítulo envolve uma série de passos arrolados abaixo e discutidos a seguir:

a) a escolha da tábua de mortalidade para a utilização nos cálculos atuariais;

b) o estudo da taxa de inflação e da taxa de juro para determinação da taxa de juro real da economia para ativos com e sem risco;

c) a apresentação de um modelo atuarial, baseado na matemática atuarial tradicional, para a constituição de um fundo capaz de gerar uma renda vitalícia constante, a ser recebida a partir da data de aposentadoria do indivíduo. Este fundo será constituído por contribuições periódicas constantes durante um período de tempo predeterminado;

d) a apresentação de uma variação do modelo constante, contemplando a contribuição e/ou a renda com um crescimento geométrico no tempo;

e) a determinação da contribuição inicial anual necessária para gerar uma unidade monetária anual real de renda, para todos os modelos, em idades iniciais distintas;

f) o cálculo dos valores do fundo e da renda gerados para a idade 65, de acordo com os parâmetros de cada modelo, para a idade de ingresso no modelo de 30 anos;

g) a simulação do desempenho do fundo considerando a variação estocástica da taxa real de juro, para os modelos que apresentaram as menores contribuições, calculando o fundo provável a ser gerado para a idade 65;

h) a comparação dos resultados obtidos, visando a identificação do modelo mais adequado a ser utilizado.

6.1 TÁBUA DE MORTALIDADE

A escolha da tábua de mortalidade, também chamada tábua de vida ou de sobrevivência, afeta diretamente qualquer estudo atuarial. O mercado brasileiro utiliza diversas tábuas internacionais, pois carece de tábuas específicas. A Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE desenvolve anualmente uma tábua para o Brasil, que é utilizada para o cálculo do fator previdenciário[14] (DEUD, 2004).

Motivados pela inexistência de tábuas específicas para o caso brasileiro, Beltrão e Pinheiro (2002) construíram duas tábuas de vida, uma para os consumidores do produto seguro de vida e outra para os de previdência privada, a partir dos dados de 1998, fornecidos pela Superintendência de Seguros Privados – SUSEP. Foram utilizadas as informações sobre os óbitos dos indivíduos em questão ocorridos no período. Os autores, ainda, comparam as tábuas construídas com aquelas existentes no mercado. Para isto, eles utilizam o cálculo do desvio relativo quadrático médio, que mede a variabilidade intrínseca dos dados utilizados para o ajuste e a distância do ajuste aos dados originais, para cada tábua e concluem que a tábua AT 2000, que é a tábua geralmente utilizada pela SUSEP, é a que apresenta a melhor aderência aos dados da população base da nova tábua.

A comparação entre a tábua proposta por Beltrão e Pinheiro (2002) para previdência, com a tábua AT 2000 e com os dados de mortalidade do Censo 2003 mostra que a tábua de Beltrão e Pinheiro (2002) é mais agravada, ou seja, apresenta taxas de mortalidade, para cada idade, maiores do que a AT 2000 e apresenta taxas de mortalidade menores para a idade até 70 anos do que os dados fornecidos pelo Censo 2003. Cabe ressaltar que a tábua proposta foi obtida a partir dos dados de indivíduos que possuem planos de previdência, ou seja, pessoas que se preocupam com a renda para a aposentadoria, e este é o caso específico tratado neste estudo.

O gráfico comparativo das tábuas está apresentado na Figura 10 e a tábua proposta por Beltrão e Pinheiro (2002) encontra-se no Anexo A.

---

[14] Índice instituído pela Lei 9.876 de 26/11/99 para utilização na determinação do valor das aposentadorias por tempo de serviço e por idade da Previdência Social, baseado na idade do segurado, no tempo de contribuição e na expectativa de sobrevida no momento da aposentadoria.

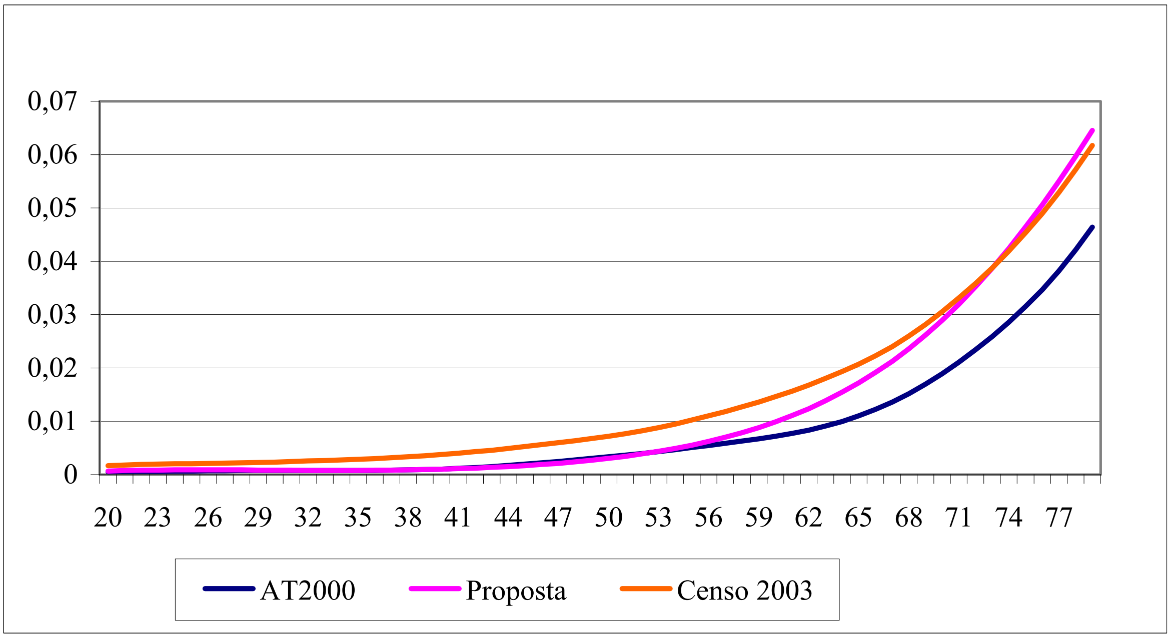

Figura 10: Gráfico da tábua de vida AT2000, da tábua de vida proposta por Beltrão e Pinheiro (2002) e dos dados de mortalidade do Censo de 2003

Fonte: elaborado pela autora

A tábua elaborada por Beltrão e Pinheiro (2002) é preferida nesse estudo pelo fato de que a partir dos 55 anos ela apresenta uma taxa de mortalidade maior do que a taxa utilizada pela SUSEP, mas ainda inferior aos dados do Censo, pois ela contempla a população que possui seguro ou algum plano de previdência privada.

Uma tábua mais agravada gera um tempo de sobrevivência menor após a idade relativa à aposentadoria e, portanto, implica acumulação de um fundo menor. Como se estuda nesse momento uma renda para o período de aposentadoria, é interessante que se possa usar uma tábua com taxas de mortalidade menores nesse período, dado que a estimativa de vida do brasileiro está aumentando gradativamente. Logo não interessa acumular um fundo que não consiga responder à totalidade do período entre a aposentadoria e a morte. Nesse caso é preferível que o fundo não acabe – e aí apareça a questão da herança – do que o indivíduo extinga sua renda antes de sua morte.

6.2 TAXA DE JURO

A taxa de juro é essencial para os cálculos a serem realizados neste estudo. Como a taxa de juro da economia é uma taxa nominal, expressando simultaneamente o ganho real e a inflação, é necessário ter uma série que expresse somente o ganho real.

Para medir a inflação, existe uma variedade de índices calculados por diversos institutos. Neste estudo será adotado o índice calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), o Índice Geral de Preços (IGP-DI) anual, obtido do banco de dados do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA). O Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) não será adotado, em virtude da série disponível iniciar em 1980. O IGP-DI tem sua série a partir de 1945 até hoje. Os dois índices são altamente relacionados, apresentando uma correlação de 0,996393, que pode ser observada na Figura 11.

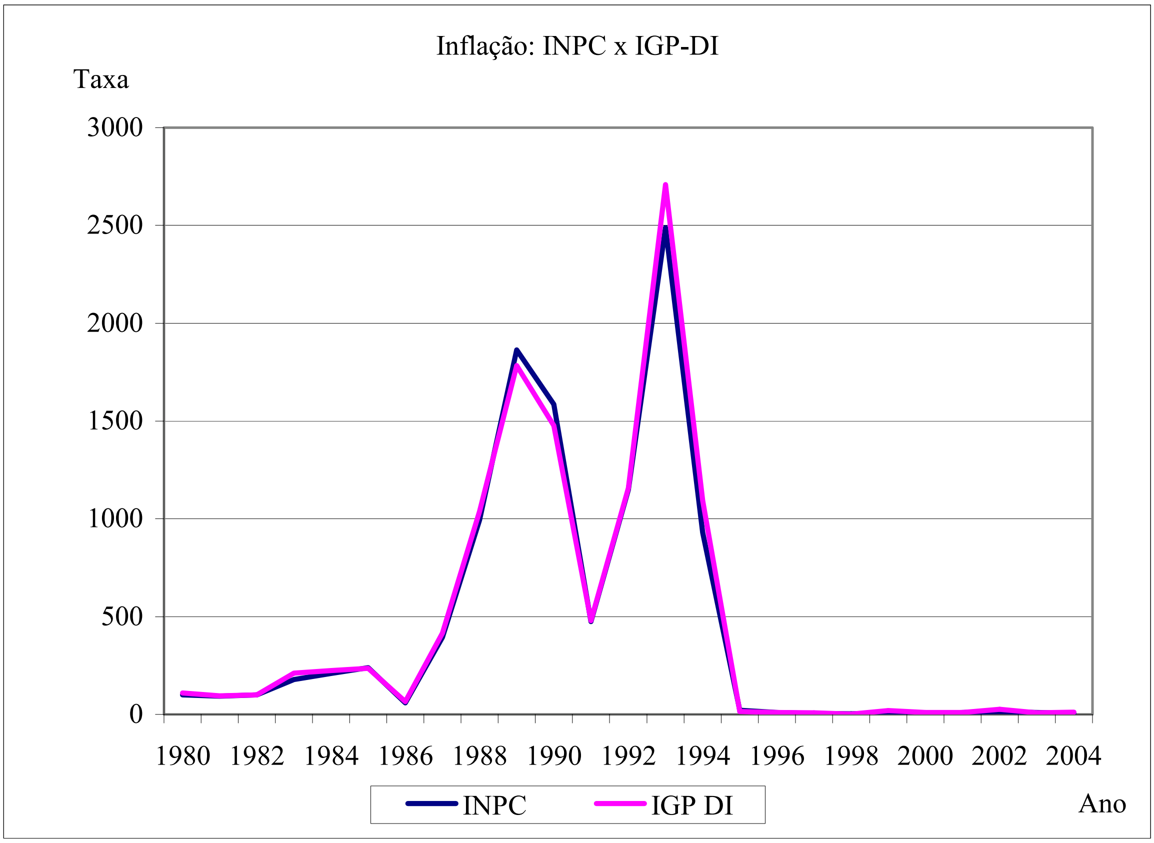

Figura 11: Gráfico das séries do INPC e do IGP-DI de 1980 a 2003.

Fonte: Elaborado pela autora.

O cálculo da taxa real (*r*) é dado pela razão entre a taxa nominal (*i*) e a taxa de inflação (*I*), como segue.

$$r = \left[\left(\frac{1+i}{1+I} \right) - 1 \right]$$

Pelo estudo de Famá (2002), tanto a taxa do CDI quanto a taxa da poupança podem ser consideradas taxas livres de risco para o Brasil. Nesse estudo optou-se por trabalhar com a taxa do CDI. No entanto, a série disponível do CDI inicia-se em setembro de 1994 e como se buscam dados a partir de 1970, esta série mostrou-se não apropriada. Dessa forma, buscou-se outro indicador, com uma série mais extensa. Como a taxa de juros do CDB está disponível a partir de 1970 e fazendo uma análise de regressão linear entre o CDI e o CDB, ou seja, CDI = $\alpha + \beta$CDB, verifica-se que o CDB é menor do que o CDI[15], a utilização do CDB como taxa livre de risco revela-se condizente com este estudo.

A taxa do CDB é fornecida pelo Banco Central do Brasil (BCB), e foi obtida junto ao IPEA. Extraindo-se a inflação da taxa de juro livre de risco, obtemos uma série de taxa de juro real livre de risco, intitulada CDB – real. As séries do CDB nominal e IGP-DI estão apresentadas no Anexo B e graficamente na Figura 12.

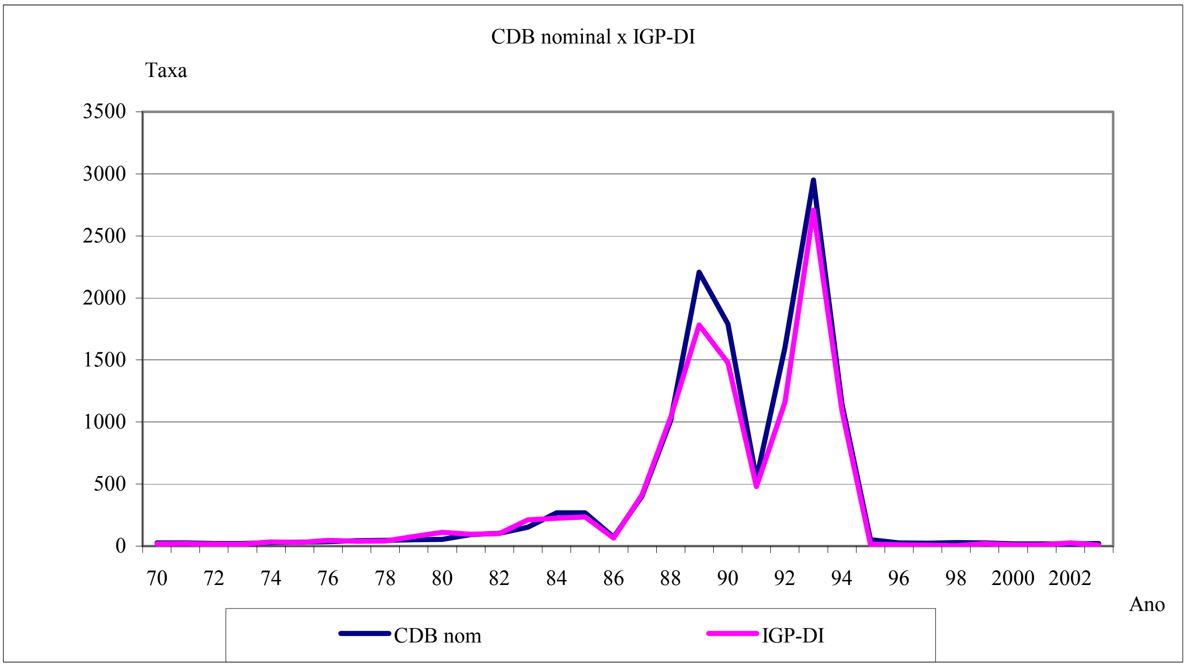

Figura 12: Gráfico comparativo das séries anuais CDB nominal e IGP-DI para o período 1970 a 2003.

Fonte: Elaborado pela autora.

15 Resultado da regressão linear: R-quadrado = 0,97400678, α = -0,08422886 e β = 1,008009603.

De acordo com a evolução da taxa real, podemos calcular a média e o desvio-padrão de todo o período bem como para períodos menores. O período que vai de 1970 a 1982 possui inflação variando entre 15 e 100% ao ano; de 1983 a 1994 tem-se uma variação da inflação de 200 a 2800%, exceto para o ano de 1986, que obteve uma taxa de 65%, e para o período posterior a 1995 a inflação média passa a ser de 12% ao ano.

Baseado nestes períodos, calculou-se a média, mediana e desvio padrão para a taxa CDB-real, conforme apresentado na Tabela 10.

Tabela 10: Medidas estatísticas para a série do CDB-real.

Período	**70 a 03**	**70 a 82**	**83 a 94**	**95 a 03**
Média	5,7029	-1,6675	8,7765	12,2512
Mediana	4,9723	1,7807	9,0896	10,9955
Desvio padrão	12,8695	9,5551	13,7381	11,6642
Mínimo	-26,1021	-26,1021	-18,8304	-6,6241
Máximo	34,9855	6,2232	34,9855	32,3921
Contagem	34	13	12	9

Fonte: Elaborada pela autora.

A maior média é observada para o período onde a inflação mantém-se controlada. No período de inflação alta, em torno de 100% ao ano, encontra-se a menor média em termos reais. Para o período com inflação descontrolada, a taxa permanece acima daquela para o período inteiro, mas inferior à do período final. Esses resultados podem ser observados na Figura 13.

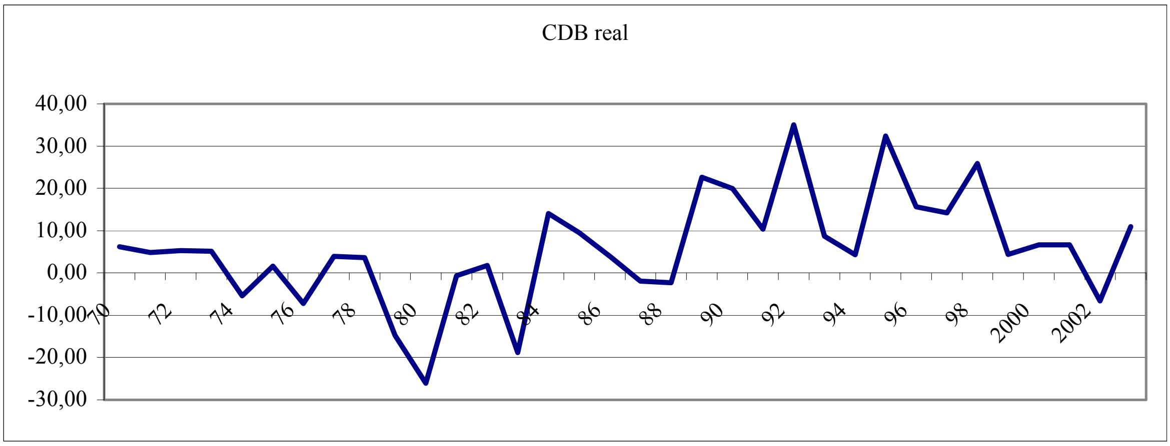

Figura 13: Evolução da taxa real anual do CDB para o período 1970 a 2003.

Fonte: Elaborada pela autora.

O valor da autocorrelação para a série do CDB real é de 0,332961, indicando que este valor não é significativamente diferente de zero a um nível de significância de 5% (KAZMIER, 1982), conforme mostrado a seguir.

$$\text{Hipótese nula } H_0 : \rho = 0 \qquad \text{Hipótese alternativa } H_1 : \rho \neq 0$$
$$t \text{ crítico (31 graus de liberdade, } \alpha = 0{,}025) = \pm 2{,}040$$
$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0{,}332961}{\sqrt{\frac{0{,}8891}{31}}} = \frac{0{,}332961}{0{,}1694} = 1{,}9661$$

O resultado encontrado para o teste *t* está praticamente no limite de aceitação da hipótese nula, ou seja, de que não existe auto correlação. Verificando a auto correlação da taxa do CDB real período a período, observa-se que de 1970 a 1982 a auto correlação é de 0,2973, de 1983 a 1994 é de 0,1323 e de 1995 a 2003 é de 0,0352. Em todos os períodos aceita-se a hipótese nula com uma margem de segurança maior do que para o período todo.

Da mesma forma, é necessária a utilização de uma taxa para a remuneração dos ativos com risco. Foi utilizado, então, o rendimento dado pelo IBOVESPA para o mesmo período. As séries IBOVESPA – nominal e real estão apresentadas no Anexo C. A comparação da série IGP-DI com a série IBOVESPA nominal está na Figura 14.

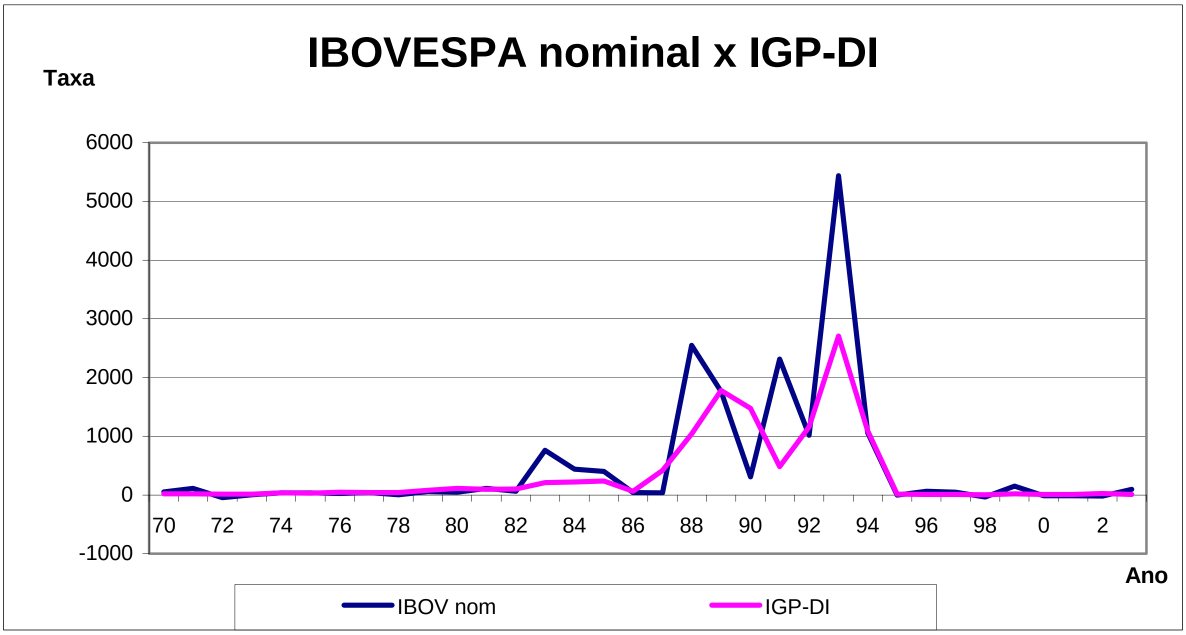

Figura 14: Gráfico da série IBOVESPA nominal x IGP-DI para 1970-2003.

Fonte: Elaborado pela autora.

A tabela a seguir apresenta as medidas estatísticas para a série anual IBOVESPA – real para os períodos calculados anteriormente.

Tabela 11: Medidas estatísticas para a série do IBOVESPA - real.

Período	70 a 03	70 a 82	83 a 94	95 a 03
Média	22,9515	-2,9571	55,1678	17,4199
Mediana	-1,9727	-9,2824	24,2864	-13,9699
Desvio padrão	77,2448	31,8030	112,8285	53,9405
Mínimo	-74,1062	-51,9762	-74,1062	-34,5812
Máximo	316,3824	78,2823	316,3824	109,954
Contagem	34	13	12	9

Fonte: Elaborado pela autora.

A maior média é observada para o período 1983 a 1994, período este caracterizado pelo descontrole inflacionário. No período de 1995 a 2003, a taxa real de juro dada pelo IBOVESPA fica próxima da taxa de todo o período. Já no período em que a inflação apresenta-se alta (1970-1982), em torno de 100% ao ano, encontra-se uma média negativa. Esse resultado pode ser visualizado na Figura 15, a seguir.

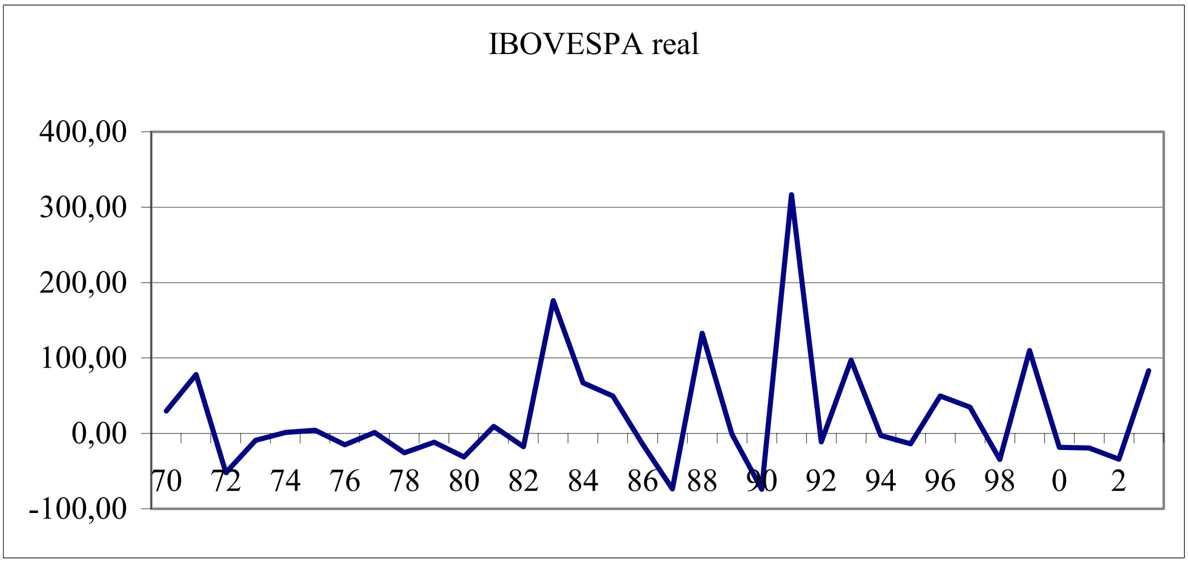

Figura 15: Evolução da taxa IBOVESPA real para o período 1970 a 2003.

Fonte: Elaborado pela autora.

O valor da auto correlação para a série do IBOVESPA real é de –0,260403, sendo que este valor não é significativamente diferente de zero a um nível de significância de 5%, aceitando-se a hipótese nula de que não existe auto correlação.

Comparando-se as séries CDB – real e IBOV – real, tem-se uma correlação de -0,0563, que indica uma ausência de correlação entre as duas séries.

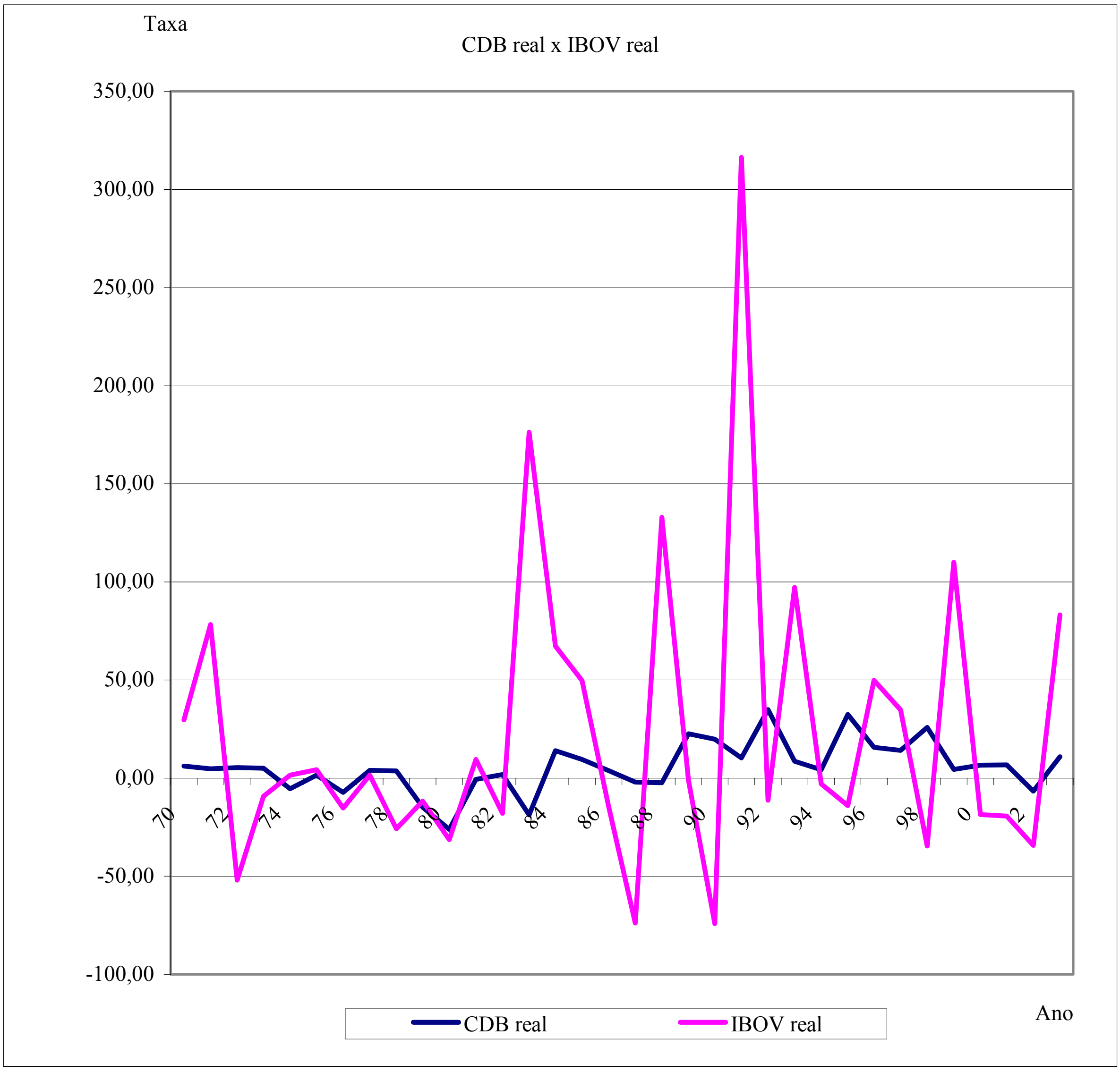

Figura 16: Gráfico comparativo das séries anuais CDB – real e IBOVESPA – real para o período 1970 a 2003.

Fonte: Elaborada pela autora.

A análise realizada permite caracterizar o período integral como aquele em que ocorrem fases de estabilização e fases de descontrole inflacionário. Para a caracterização de dois cenários futuros possíveis foram calculadas as médias das taxas para o período todo, contemplando um cenário com possibilidade de inflação alta, e para o período a partir de 1995, como sendo um período de inflação controlada. Os resultados encontrados estão na Tabela 12 e serão utilizados como parâmetros para o cálculo da variação estocástica da taxa de juro.

Tabela 12: Média e desvio-padrão do CDB – real e do IBOVESPA – real para os períodos 1970-2003 e 1995-2003

Cenário I – Período 70 a 02			Cenário II – Período 95 a 03		
	Média	**Desvio padrão**		**Média**	**Desvio padrão**
CDB real	6	12	CDB real	12	12
IBOV real	23	77	IBOV real	17	54

Fonte: Elaborada pela autora.

As taxas utilizadas para os cálculos atuariais, no decorrer deste estudo, são 6% ao ano e 12% ao ano, em virtude da média encontrada para o CDB real nos dois cenários contemplados e, também, pelo fato de serem as taxas tradicionalmente adotadas pelas empresas de previdência, para seus planos de renda para aposentadoria. A taxa a ser utilizada para o estudo da evolução do fundo de um plano predeterminado, no Cenário I, será gerada estocasticamente por meio de um sorteio no qual todas as taxas do período 1970 a 2003, do CDB real, têm a mesma probabilidade de ocorrer. Para o Cenário II ela será gerada também aleatoriamente, por meio da inversa da distribuição normal com média e desvio-padrão obtidos para esse cenário.

6.3 DEFINIÇÃO DO MODELO ATUARIAL

Esse capítulo apresenta o modelo atuarial utilizado para o cálculo do valor a ser poupado, seguindo a abordagem tradicional. Esse modelo é estendido de modo a contemplar formas diferentes de contribuição e renda. Ele parte de uma equação de equilíbrio, onde a receita é igualada a despesa. A receita, nesse caso, é constituída pelo valor acumulado durante a fase ativa e a despesa é representada pelo valor da renda pós-aposentadoria. Comparando com o Modelo de Merton, pode-se dizer que o consumo para a fase inativa será garantido pela poupança da fase ativa.

Na linguagem atuarial, o consumo da fase inativa é visto como a renda de aposentadoria capaz de supri-lo e a poupança da fase ativa é a responsável pelas contribuições periódicas que gerarão o fundo provedor desta renda.

Dessa forma:

$\text{Consumo}_{\text{inativo}} = \text{Poupança}_{\text{ativo}}$.

A poupança é obtida pela parcela da renda não destinada ao consumo.

$\text{Consumo}_{\text{inativo}} = \text{Renda}_{\text{ativo}} - \text{Consumo}_{\text{ativo}}$.

Ou ainda,

$\text{Consumo}_{\text{ativo}} + \text{Consumo}_{\text{inativo}} = \text{Renda}_{\text{ativo}}$

Considerando a existência de riqueza inicial e o desejo de deixar uma herança, pode-se estender o modelo.

$\text{Consumo}_{\text{ativo}} + \text{Consumo}_{\text{inativo}} + \text{Herança} = \text{Riqueza Inicial} + \text{Renda}_{\text{ativo}}$, logo,

$\text{Consumo} + \text{Herança} = \text{Riqueza Inicial} + \text{Renda}_{\text{ativo}}$

Essa é a equação de equilíbrio do Modelo de Merton, no qual os níveis de consumo e herança serão determinados pelos níveis de riqueza e renda.

Neste estudo, o modelo utilizado para o cálculo da renda de aposentadoria que considera a contribuição e a renda gerada constantes ao longo do tempo é chamado de Modelo I. É um modelo discreto, com parâmetros determinísticos, que segue a abordagem tradicional. As premissas do Modelo I são:

a) o indivíduo começa sua poupança com x anos;

b) ele poupa durante m anos por meio de parcelas anuais constantes (C);

c) a renda da aposentadoria (R) é constante e recebida vitaliciamente a partir da idade $x + m$;

d) o valor descontado é obtido pela aplicação da taxa de juro real da economia (r);

e) a probabilidade de sobrevivência do indivíduo é dada pela tábua de mortalidade para planos de previdência privada elaborada por Beltrão e Pinheiro (2002).

Como o problema é saber se a renda recebida após a aposentadoria será suficiente para manter o mesmo padrão de vida, o modelo desenvolvido neste estudo parte de uma renda desejada, conhecida na data de início do plano, e busca determinar o valor da contribuição necessária para formar o fundo que responderá pela mesma, futuramente.

O valor atual deste fundo é calculado atuarialmente, em virtude do mesmo envolver a probabilidade do indivíduo estar vivo na idade do recebimento da renda. Este valor é conhecido como prêmio único e puro de uma renda vitalícia, antecipada, diferida em *m* anos para a idade *x*.

As parcelas destinadas à acumulação deste fundo são calculadas também atuarialmente, vencendo a primeira na idade *x*, e a última na idade *x* + *m* – *1*. O fluxo financeiro que representa a situação tanto do pagamento das contribuições quanto do recebimento da renda ao longo da vida está ilustrado na Figura 17.

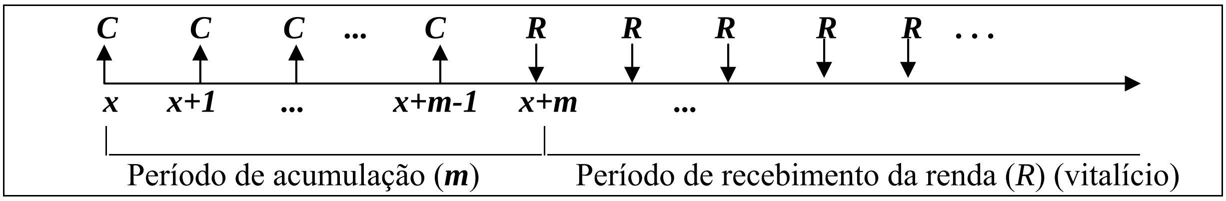

Figura 17: Fluxo do pagamento das contribuições e recebimento da renda para um indivíduo de idade *x*, que pretenda se aposentar na idade *x* + *m*.

Fonte: Elaborada pela autora.

O cálculo do prêmio único e puro de uma renda diferida em *m* períodos, vitalícia e antecipada para um indivíduo na idade *x* é realizado por meio do somatório do produto da renda pela probabilidade de sobrevivência de cada idade, descontados a valor presente pela taxa de juro real (*r*) da economia, como é indicado a seguir:

$$_{m|}\ddot{a}_x = R_{x+m}.v^m.\frac{l_{x+m}}{l_x} + R_{x+m}.v^{m+1}.\frac{l_{x+m+1}}{l_x} + R_{x+m}.v^{m+2}.\frac{l_{x+m+2}}{l_x} + ...$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = R_{x+m}.v^m.\left(v^0.\frac{l_{x+m}}{l_x} + v^1.\frac{l_{x+m+1}}{l_x} + v^2.\frac{l_{x+m+2}}{l_x} + ... \right)$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = R_{x+m}.v^m.\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t.\frac{l_{x+m+t}}{l_x}, \qquad \text{sendo} \qquad R_x = R_{x+m}.v^m$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{R_x}{l_x}.\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t.l_{x+m+t}$$

onde :

- x é a idade do indivíduo;
- m é o período de diferimento da renda;
- ${}_{m|}\ddot{a}_x$ é o prêmio único e puro de uma renda vitalícia, diferida e antecipada para um indivíduo na idade x;
- R_{x+m} é o valor da renda anual para a idade $x+m$;
- R_x é o valor da renda R_{x+m} descontada m períodos;
- r é a taxa de juro real da economia;
- v é o fator de desconto, ou seja, $v = \frac{1}{1+r}$;
- $\frac{l_{x+m+t}}{l_x}$ é a probabilidade de um indivíduo de idade x estar vivo na idade $x+m+t$.

Uma vez obtido o valor total a ser acumulado para o provisionamento da renda futura (${}_{m|}\ddot{a}_x$), é necessário transformar este valor único em parcelas a serem poupadas durante o prazo de diferimento da renda, ou seja, m anos. O valor das parcelas será calculado a partir do valor atual de uma renda atuarial temporária, imediata, antecipada, com parcelas constantes.

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = C + C.v.\frac{l_{x+1}}{l_x} + C.v^2.\frac{l_{x+2}}{l_x} + ... + C.v^{m-1}.\frac{l_{x+m-1}}{l_x} $$

$$ \frac{R_x}{l_x}.\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t.l_{x+m+t} = C.\sum_{t=0}^{m-1} v^t.\frac{l_{x+t}}{l_x} $$

Dessa forma, a contribuição para a idade x, pelo Modelo I, será:

$$ C = \frac{R_x.\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t.l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t.l_{x+t}} \quad \textbf{(1)} $$

O Modelo I estabelece um valor constante tanto para as contribuições quanto para a renda pós-aposentadoria. Este é o tratamento utilizado, geralmente, nos cálculos atuariais.

Conforme mencionado no Capítulo 2, a renda proveniente do trabalho do indivíduo, segue, em geral, uma trajetória crescente até um determinado nível e, após, começa a decrescer. Por essa razão torna-se útil considerar o caso em que a contribuição assume um crescimento durante todo o período de acumulação ou até um valor estipulado previamente. Quem determina se as contribuições serão constantes ou crescentes é o próprio indivíduo na hora da opção por um plano de acumulação. Para isso, faz-se necessária a apresentação de um segundo modelo, que segue as premissas do Modelo I, mas considera a contribuição crescente.

O Modelo II será, então, um modelo onde a contribuição é crescente e a renda é constante. A única premissa alterada em relação ao Modelo I é a de que as parcelas poupadas durante a fase ativa sofrerão um reajuste anual pela taxa (α) representando a taxa de crescimento salarial real ou uma taxa de crescimento pessoal desejada.

A formulação do Modelo II mantém o fundo igual ao do Modelo I, ou seja,

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{R_x}{l_x} \cdot \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t}$$

Para o cálculo da contribuição, tem-se que:

$$_{m|}\ddot{a}_x = C + C.(1+\alpha).v.\frac{l_{x+1}}{l_x} + ... + C.(1+\alpha)^{m-1}.v^{m-1}.\frac{l_{x+m-1}}{l_x}$$

$$\frac{R_x}{l_x} \cdot \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t} = \frac{C}{l_x} . \sum_{t=0}^{m-1} (1+\alpha)^t . v^t . l_{x+t}$$

Logo, a contribuição para a idade *x*, dada pelo Modelo II, é obtida por meio da fórmula que segue:

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} (1+\alpha)^t . v^t . l_{x+t}} \quad \textbf{(2)}$$

Uma variação possível para o Modelo II é considerar a contribuição crescente, mas limitada. O indivíduo estipula então o limite, ou seja, decide se a contribuição crescerá até duplicar, triplicar, etc. Neste estudo foi considerado o caso em que a contribuição cresce geometricamente até duplicar seu valor.

Supondo que o valor limite da contribuição seja um múltiplo da contribuição inicial – *K.C* – onde *K* é um número inteiro, positivo e diferente de zero e *C* é o valor da contribuição inicial, o número de contribuições (*n*) até alcançar o valor limite estipulado é dado por:

$$
\begin{aligned}
C_n &= K.C \\
C.(1+\alpha)^n &= K.C \\
\ln(1+\alpha)^n &= \ln K \\
n &= \frac{\ln K}{\ln(1+\alpha)}
\end{aligned}
$$

Fixando $K = 2$, ou seja, a contribuição limite sendo o dobro da contribuição inicial, o valor de n para um crescimento de 3% ao ano, será de 24 anos, para 6% a.a. de 12 anos e para 12% de 6 anos.

A formulação para o Modelo II com contribuição crescente limitada, mantém o cálculo para a renda, ou seja, ${}_m|\ddot{a}_x = \frac{R_x}{l_x}.\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t.l_{x+m+t}$ e para o cálculo da contribuição, segue o raciocínio dos modelos anteriores.

Dessa forma,

$$
{}_m|\ddot{a}_x = C + C.(1+\alpha).v.\frac{l_{x+1}}{l_x} + \ldots + C.(1+\alpha)^n.v^n.\frac{l_{x+n}}{l_x} + \ldots + C.(1+\alpha)^n.v^{m-1}.\frac{l_{x+m-1}}{l_x}
$$

$$
{}_m|\ddot{a}_x = \frac{C}{l_x}\left[\left(\sum_{t=0}^{n}(1+\alpha)^t.v^t.\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) + \left((1+\alpha)^n.\sum_{t=1}^{m-n-1} v^{n+t}.\frac{l_{x+n+t}}{l_x}\right)\right]
$$

$$
C = \frac{R_x.\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t.l_{x+m+t}}{\left[\left(\sum_{t=0}^{n}(1+\alpha)^t.v^t.\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) + \left((1+\alpha)^n.\sum_{t=1}^{m-n-1} v^{n+t}.\frac{l_{x+n+t}}{l_x}\right)\right]} \quad \textbf{(2.1)}
$$

A primeira parcela do denominador representa o período de contribuição no qual a mesma apresenta-se crescente e, a segunda parcela, o período onde a contribuição permanece constante.

A renda a ser recebida após a aposentadoria pode ter também um crescimento. A necessidade disso pode ser justificada pelos custos relativos à saúde – planos de saúde, remédios e outros – que após uma determinada idade tornam-se mais presentes, em geral, comprometendo uma parte significativa da renda do indivíduo.

O Modelo III foi elaborado para contemplar tal situação. Ele é um modelo também discreto e com parâmetros determinísticos, mas com o valor da contribuição e da renda crescendo geometricamente. Ele mantém as premissas do Modelo II agregando o fato de que a renda sofre um reajuste anual pela taxa (β), representando uma taxa de crescimento real do benefício.

Calculando o valor do fundo com a renda crescendo geometricamente, tem-se:

$$_{m|}\ddot{a}_x = R_{x+m}.v^m.\frac{l_{x+m}}{l_x} + R_{x+m}.(1+\beta).v^{m+1}.\frac{l_{x+m+1}}{l_x} + R_{x+m}.(1+\beta)^2 v^{m+2}.\frac{l_{x+m+2}}{l_x} + \ldots$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{R_{x+m}}{l_x}.v^m.\sum_{t=0}^{w-(x+m)}(1+\beta)^t.v^t.l_{x+m+t}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{R_x}{l_x}.\sum_{t=0}^{w-(x+m)}(1+\beta)^t.v^t.l_{x+m+t}$$

O cálculo da contribuição segue o mesmo desenvolvimento apresentado para o Modelo II:

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{C}{l_x}.\sum_{t=0}^{m-1}(1+\alpha)^t.v^t.l_{x+t}$$

$$\frac{R_x}{l_x}.\sum_{t=0}^{w-(x+m)}(1+\beta)^t.v^t.l_{x+m+t} = \frac{C}{l_x}.\sum_{t=0}^{m-1}(1+\alpha)^t.v^t.l_{x+t}$$

O valor da contribuição para o Modelo III é dado pela formulação a seguir.

$$C = \frac{R_x.\sum_{t=0}^{w-(x+m)}(1+\beta)^t.v^t.l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1}(1+\alpha)^t.v^t.l_{x+t}} \quad \textbf{(3)}$$

Para o Modelo III também é possível que a contribuição apresente um limite em seu crescimento. A formulação do Modelo III limitado apresenta-se a seguir.

$$C = \frac{R_x.\sum_{t=0}^{w-(x+m)}(1+\beta)^t.v^t.l_{x+m+t}}{\left[\left(\sum_{t=0}^{n}(1+\alpha)^t.v^t.\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)+\left((1+\alpha)^n.\sum_{t=1}^{m-n-1}v^{n+t}.\frac{l_{x+n+t}}{l_x}\right)\right]} \quad \textbf{(3.1)}$$

É possível considerar um modelo no qual a contribuição seja constante e a renda crescente. Este será designado como Modelo IV e sua formulação está apresentada na seqüência.

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} (1+\beta)^t . v^t . l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t . l_{x+t}} \quad \textbf{(4)}$$

O Modelo III é o caso geral. Os modelos I, II e IV são casos particulares do Modelo III, com alfa e beta iguais a zero, com beta igual a zero e com alfa igual a zero, respectivamente.

A formulação final para o cálculo da contribuição, por meio dos quatro modelos apresentados e seus subcasos está resumida nos quadros a seguir.

Modelo I – Contribuição constante e renda constante

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t . l_{x+t}}$$

Quadro 1: Modelo I – Contribuição e renda constante

Fonte: Elaborado pela autora.

Modelo II – Contribuição crescente e renda constante

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} (1+\alpha)^t . v^t . l_{x+t}}$$

Quadro 2: Modelo II – Contribuição crescente e renda constante.

Fonte: Elaborado pela autora.

Modelo II -1 – Contribuição crescente limitada e renda constante

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t}}{\left[\left(\sum_{t=0}^{n} (1+\alpha)^t . v^t . \frac{l_{x+t}}{l_x}\right) + \left((1+\alpha)^n . \sum_{s=1}^{m-n-1} v^{n+s} . \frac{l_{x+n+s}}{l_x}\right)\right]}$$

Quadro 3: Modelo II -1 – Contribuição crescente limitada e renda constante.

Fonte: Elaborado pela autora.

Modelo III – Contribuição crescente e renda crescente

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} (1+\beta)^t . v^t . l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} (1+\alpha)^t . v^t . l_{x+t}}$$

Quadro 4: Modelo III – Contribuição crescente e renda crescente.

Fonte: Elaborado pela autora.

Modelo III - 1 – Contribuição crescente limitada e renda crescente

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} (1+\beta)^t . v^t . l_{x+m+t}}{\left[\left(\sum_{t=0}^{n} (1+\alpha)^t . v^t . \frac{l_{x+t}}{l_x} \right) + \left((1+\alpha)^n . \sum_{s=1}^{m-n-1} v^{n+s} . \frac{l_{x+n+s}}{l_x} \right) \right]}$$

Quadro 5: Modelo III - 1 – Contribuição crescente limitada e renda crescente.

Fonte: Elaborado pela autora.

Modelo IV – Contribuição constante e renda crescente

$$C = \frac{R_x . \sum_{t=0}^{w-(x+m)} (1+\beta)^t . v^t . l_{x+m+t}}{\sum_{t=0}^{m-1} v^t . l_{x+t}}$$

Quadro 6: Modelo IV – Contribuição constante e renda crescente.

Fonte: Elaborado pela autora.

Uma vez que os modelos estão definidos, pode-se calcular o valor da contribuição para uma dada renda esperada. Esse cálculo será feito para todos os modelos, no próximo capítulo, afim de comparação posterior.

6.4 CÁLCULO DA CONTRIBUIÇÃO

Como a definição de uma renda pós-aposentadoria desejada depende das necessidades e preferências de cada indivíduo, optou-se em calcular o valor da contribuição para uma renda anual hoje de uma unidade monetária (1 u.m.) para os modelos definidos anteriormente. O resultado pode, então, ser estendido para qualquer valor de renda pretendida pela multiplicação da contribuição calculada pela renda atual desejada.

Nos quatro modelos apresentados nesse estudo, pode-se optar, conforme o caso, quanto às seguintes questões:

a) taxa de crescimento da contribuição: a mesma taxa aplicada ao fundo ou a metade desta;

b) taxa de crescimento da renda: a mesma taxa aplicada ao fundo ou a metade desta;

c) taxa de juro para remuneração do fundo: 6% ou 12% ao ano, de acordo com o estudo das taxas de juro real passadas, onde se verificou uma taxa média de 6% ao ano para o período 70/03 e uma taxa média de 12% ao ano para o período 95/03.

Considerando todas as possibilidades tem-se uma ramificação dos 4 modelos iniciais em 30 submodelos. Os modelos e seus subcasos estão apresentados na Tabela 13.

Tabela 13: Modelos atuariais gerados a partir das combinações de taxas.

Modelo	Contribuição C	Renda R	Taxa de juro r (%)	Taxa cresc. α (%)	Taxa cresc. β (%)
I – (6)	Constante	Constante	6	0	0
I – (12)	Constante	Constante	12	0	0
II – a (6)	Crescente	Constante	6	6	0
II – a (12)	Crescente	Constante	12	12	0
II – b (6)	Crescente	Constante	6	3	0
II – b (12)	Crescente	Constante	12	6	0
II – c (6)	Crescente lim.	Constante	6	6	0
II – c (12)	Crescente lim.	Constante	12	12	0
II – d (6)	Crescente lim.	Constante	6	3	0
II – d (12)	Crescente lim.	Constante	12	6	0
III – a (6)	Crescente	Crescente	6	6	6
III – a (12)	Crescente	Crescente	12	12	12
III – b (6)	Crescente	Crescente	6	3	3
III – b (12)	Crescente	Crescente	12	6	6
III – c (6)	Crescente	Crescente	6	3	6
III – c (12)	Crescente	Crescente	12	6	12

Continua...

Modelo	Contribuição C	Renda R	Taxa de juro r (%)	Taxa cresc. α (%)	Taxa cresc. β (%)
Continuação.					
III – d (6)	Crescente	Crescente	6	6	3
III – d (12)	Crescente	Crescente	12	12	6
III – e (6)	Crescente lim.	Crescente	6	6	6
III – e (12)	Crescente lim.	Crescente	12	12	12
III – f (6)	Crescente lim.	Crescente	6	3	3
III – f (12)	Crescente lim.	Crescente	12	6	6
III – g (6)	Crescente lim.	Crescente	6	3	6
III – g (12)	Crescente lim.	Crescente	12	6	12
III – h (6)	Crescente lim.	Crescente	6	6	3
III – h (12)	Crescente lim.	Crescente	12	12	6
IV – a (6)	Constante	Crescente	6	0	6
IV – a (12)	Constante	Crescente	12	0	12
IV – b (6)	Constante	Crescente	6	0	3
IV – b (12)	Constante	Crescente	12	0	6

Fonte: Elaborada pela autora.

O cálculo da contribuição inicial para os modelos I, II, III e IV foi realizado em planilhas, no software Excel. Para o Modelo I, foi gerada uma planilha para o cálculo dos fatores $\sum_{t=0}^{w-(x+m)} v^t . l_{x+m+t}$ e $\sum_{t=0}^{m-1} v^t . l_{x+t}$ para as idades 30 a 50, que se encontra no Anexo D, outra planilha para o cálculo da contribuição inicial para cada uma das idades e uma terceira contendo a evolução do fundo ao longo do tempo, para a idade de 30 anos, de acordo com as suposições do modelo, como exemplificado a seguir.

A contribuição inicial gerada pelo Modelo I**(6)**, para cada uma das idades iniciais, pode ser vista na Tabela 14 e na Figura 18. Pelo cálculo realizado, um indivíduo, com 30 anos, necessita contribuir com o valor de 0,57 reais, anualmente, até os 64 anos, para cada unidade monetária desejada para a renda, também anual, no período de aposentadoria. Já para aquele que começa a poupar com 50 anos, a contribuição inicial é de 0,89 reais.

Tabela 14: Valor da contribuição inicial gerada pelo Modelo I (6), para as idades 30 a 50.

Idade	Contribuição inicial (R$)
30	0,57
31	0,58
32	0,58
33	0,59
34	0,60
35	0,60
36	0,61
37	0,62
38	0,63
39	0,64
40	0,66
41	0,67
42	0,69
43	0,70
44	0,72
45	0,74
46	0,76
47	0,79
48	0,82
49	0,85
50	0,89

Fonte: Elaborada pela autora.

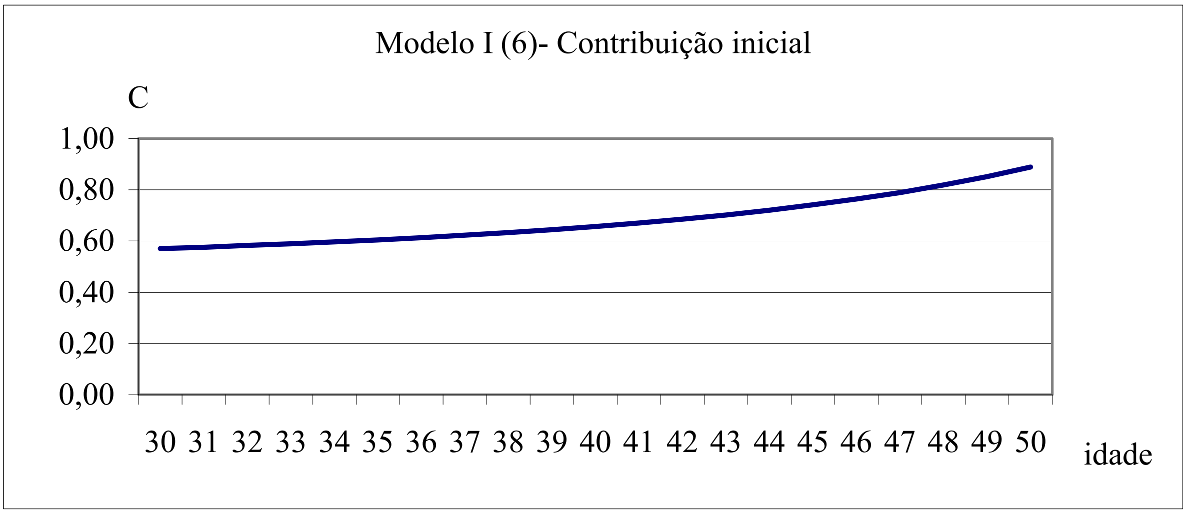

Figura 18: Gráfico da evolução da contribuição inicial em função da idade de ingresso no modelo, dada pelo Modelo I (6)

Fonte: Elaborado pela autora.

Todos os cálculos foram realizados de forma a encontrar a contribuição em sua forma anual. Para encontrar o valor mensal da contribuição pode-se calcular o mesmo por meio do estudo de rendas financeiras com juros capitalizados mensalmente.

A planilha da evolução do fundo e da renda de aposentadoria, para o Modelo I **(6)**, com início aos 30 anos, pode ser observada na Tabela 15.

Tabela 15: Evolução do fundo e a renda gerada para um indivíduo com 30 anos, Modelo I (6).

Idade	C	Fundo	Idade	R	Fundo
30	0,57	0,57	65	6,67	60,67
31	0,57	1,17	66	6,67	57,64
32	0,57	1,82	67	6,67	54,42
33	0,57	2,49	68	6,67	51,02
34	0,57	3,21	69	6,67	47,41
35	0,57	3,98	70	6,67	43,58
36	0,57	4,79	71	6,67	39,52
37	0,57	5,64	72	6,67	35,22
38	0,57	6,55	73	6,67	30,66
39	0,57	7,51	74	6,67	25,82
40	0,57	8,54	75	6,67	20,70
41	0,57	9,62	76	6,67	15,27
42	0,57	10,77	77	6,67	9,51
43	0,57	11,98	78	6,67	3,41
44	0,57	13,27	79	3,61	0,00
45	0,57	14,64	80	0,00	0,00
46	0,57	16,09			
47	0,57	17,62			
48	0,57	19,25			
49	0,57	20,97			
50	0,57	22,80			
51	0,57	24,74			
52	0,57	26,79			
53	0,57	28,97			
54	0,57	31,28			
55	0,57	33,73			
56	0,57	36,32			
57	0,57	39,07			
58	0,57	41,98			
59	0,57	45,07			
60	0,57	48,35			
61	0,57	51,82			
62	0,57	55,50			
63	0,57	59,40			
64	0,57	63,53			

Fonte: Elaborado pela autora.

O valor da contribuição é constante, a renda gerada também, de acordo com o modelo adotado. O fundo acumulado para a idade 65 é de 67,34[16] reais e a idade de recebimento da última renda integral é 78. A representação gráfica da evolução do fundo gerado pela contribuição calculada pelo Modelo I está apresentada na Figura 19.

[16] 67,34=63,53*(1,06), ou seja, o montante do fundo para a idade 65.

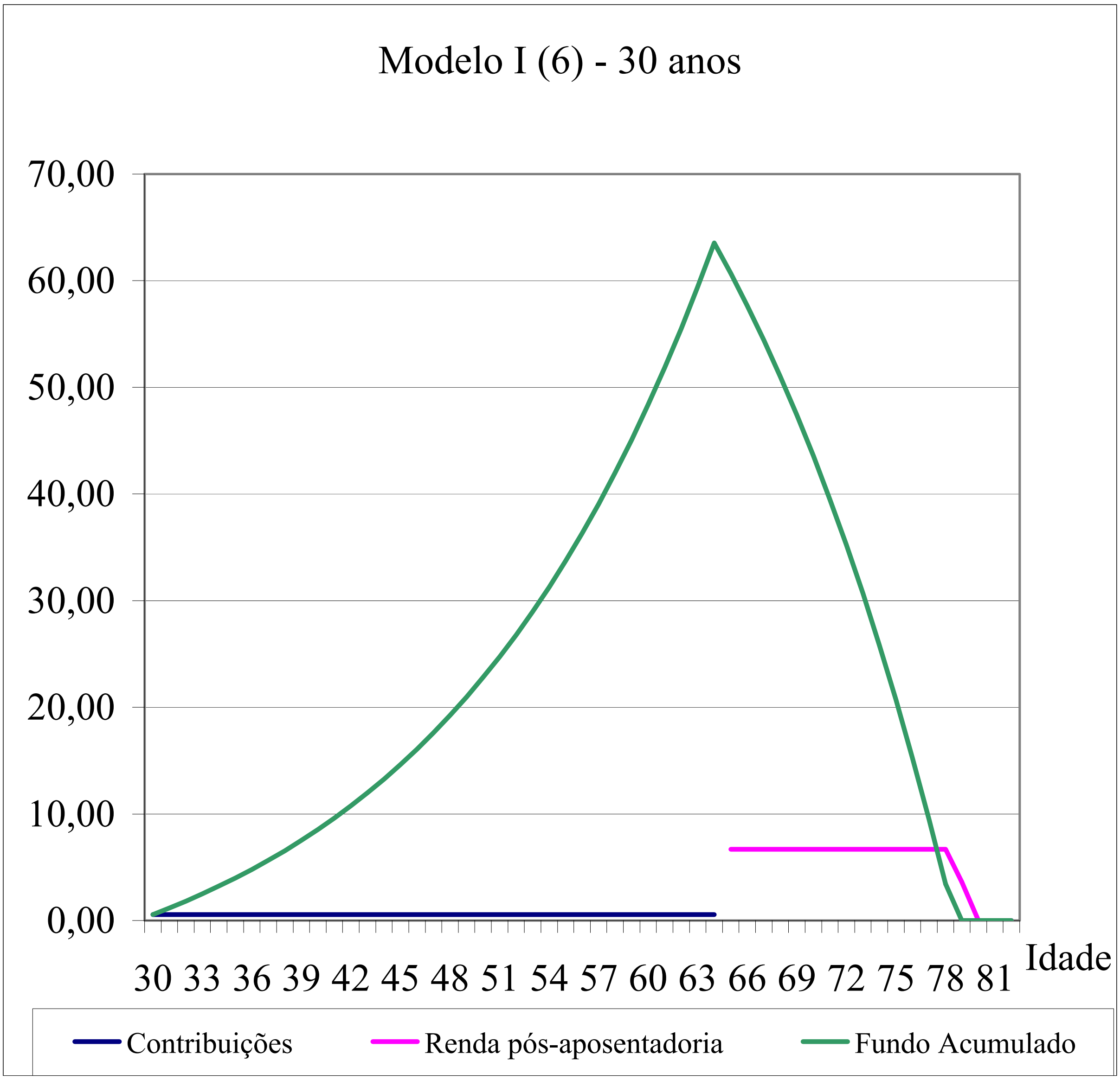

Figura 19: Gráfico apresentando a evolução do fundo, a contribuição e a renda em função da idade, para o Modelo I (6).

Fonte: Elaborado pela autora.

A renda para a idade 65 anos foi obtida pelo cálculo de uma renda atuarial vitalícia, imediata e antecipada, conforme as premissas do modelo, para o fundo acumulado existente na idade 65. Dessa forma,

$$\text{Fundo} = \frac{R}{l_{65}}.\sum_{t=0}^{35} v^t.l_{65+t}$$

$$R = \frac{\text{Fundo}.l_{65}}{\sum_{t=0}^{35} v^t.l_{65+t}}$$

Para todos os modelos e seus subcasos foram geradas as mesmas planilhas do Modelo I, alterando-se os pressupostos básicos e os parâmetros adotados para cada um.

A contribuição inicial foi calculada para cada um deles e seus subcasos, para as idades de ingresso de 30 a 50. Os resultados obtidos estão apresentados nas tabelas e figuras a seguir.

Tabela 16: Contribuição inicial para os modelos I (6) e I (12).

Idade	I (6)	I (12)
30	0,57	0,67
31	0,58	0,67
32	0,58	0,68
33	0,59	0,68
34	0,60	0,68
35	0,60	0,69
36	0,61	0,69
37	0,62	0,69
38	0,63	0,70
39	0,64	0,71
40	0,66	0,71
41	0,67	0,72
42	0,69	0,73
43	0,70	0,73
44	0,72	0,75
45	0,74	0,76
46	0,76	0,77
47	0,79	0,78
48	0,82	0,80
49	0,85	0,82
50	0,89	0,84

Fonte: Elaborada pela autora.

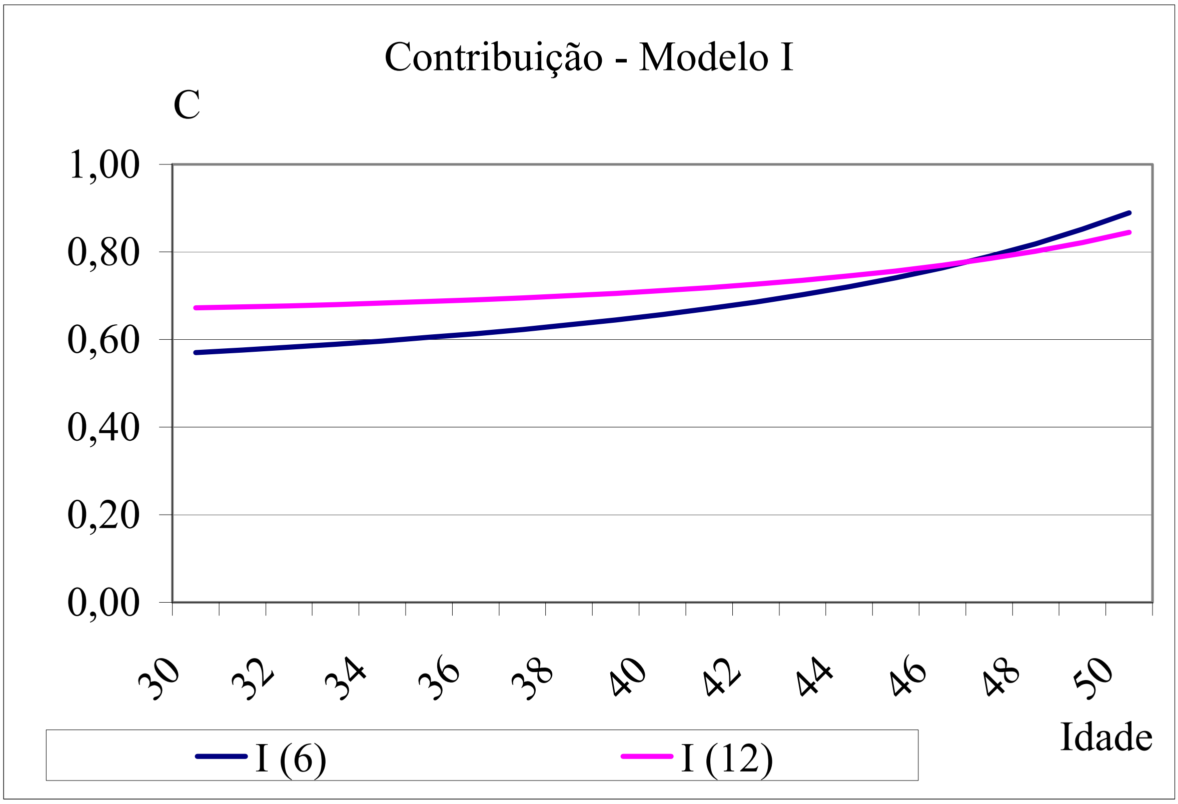

Figura 20: Gráfico da evolução da contribuição inicial para as idades 30 a 50, dada pelo Modelo I (6) e I (12)

Fonte: Elaborada pela autora.

Observa-se que, para 17 das 21 idades de ingresso, o modelo com taxa de juro real de 6% ao ano apresenta uma contribuição menor. Dos 47 aos 50, o modelo com taxa de 12% ao ano possui a menor contribuição. Apesar do rendimento superior aplicado ao fundo, no segundo caso, não há uma compensação por meio da diminuição da contribuição inicial, isto se dá em função do alto valor da renda a ser gerada.

Os resultados para o Modelo II estão apresentados nas tabelas 17 e 18, sendo que a primeira considera a renda crescente e, a segunda, os casos onde a renda é crescente e limitada.

Tabela 17: Contribuição inicial para os modelos II a e II b

Idade	a (6)	a (12)	b (6)	b (12)
30	0,25	0,18	0,39	0,39
31	0,26	0,19	0,40	0,39
32	0,27	0,19	0,41	0,40
33	0,28	0,20	0,42	0,40
34	0,29	0,20	0,43	0,41
35	0,30	0,21	0,44	0,41
36	0,31	0,22	0,45	0,42
37	0,32	0,23	0,46	0,43
38	0,33	0,24	0,47	0,44
39	0,35	0,25	0,48	0,44
40	0,36	0,26	0,50	0,45
41	0,38	0,27	0,51	0,46
42	0,39	0,28	0,53	0,47
43	0,41	0,29	0,54	0,48
44	0,43	0,31	0,56	0,50
45	0,46	0,32	0,59	0,51
46	0,48	0,34	0,61	0,53
47	0,51	0,36	0,64	0,55
48	0,54	0,38	0,67	0,57
49	0,58	0,41	0,70	0,59
50	0,62	0,44	0,74	0,62

Fonte: Elaborada pela autora.

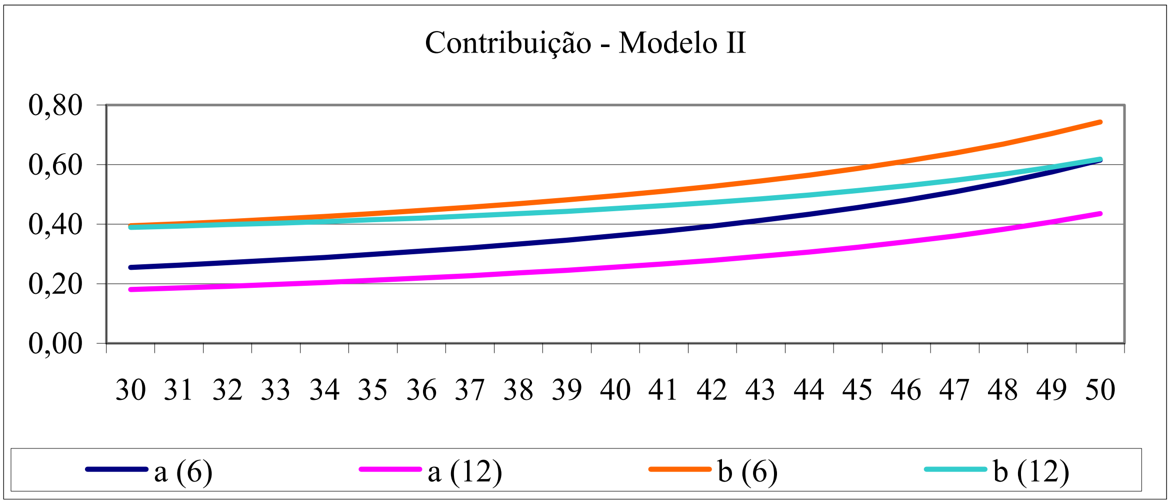

Figura 21: Gráfico da evolução da contribuição inicial para as idades 30 a 50, dada pelo Modelo II a e b.

Fonte: Elaborada pela autora.

No Modelo II, a taxa de juro maior (12) gera uma contribuição menor em ambos os casos, **a** e **b**, para todas as idades de ingresso. O modelo com taxa de crescimento da contribuição inferior à taxa de juro do fundo, o Modelo **b**, apresenta contribuições sempre maiores em comparação com o Modelo **a**. Na seqüência deste estudo serão analisados com mais detalhe os Modelos **a (6)** e **a (12)** por apresentarem a menor contribuição de acordo com a taxa de juro escolhida.

Para o Modelo II com contribuição limitada, obteve-se os resultados a seguir.

Tabela 18: Contribuição inicial para os modelos II c e II d.

Idade	c (6)	c (12)	d (6)	d (12)
30	0,35	0,41	0,40	0,46
31	0,36	0,41	0,41	0,46
32	0,36	0,41	0,42	0,46
33	0,37	0,42	0,42	0,46
34	0,37	0,42	0,43	0,47
35	0,38	0,42	0,44	0,47
36	0,38	0,42	0,45	0,47
37	0,39	0,43	0,46	0,48
38	0,40	0,43	0,47	0,48
39	0,41	0,44	0,48	0,49
40	0,42	0,44	0,50	0,49
41	0,43	0,45	0,51	0,50
42	0,44	0,45	0,53	0,51
43	0,46	0,46	0,54	0,51
44	0,47	0,46	0,56	0,52
45	0,49	0,47	0,59	0,54
46	0,51	0,48	0,61	0,55
47	0,53	0,49	0,64	0,56
48	0,56	0,51	0,67	0,58
49	0,59	0,52	0,70	0,60
50	0,62	0,54	0,74	0,62

Fonte: Elaborada pela autora.

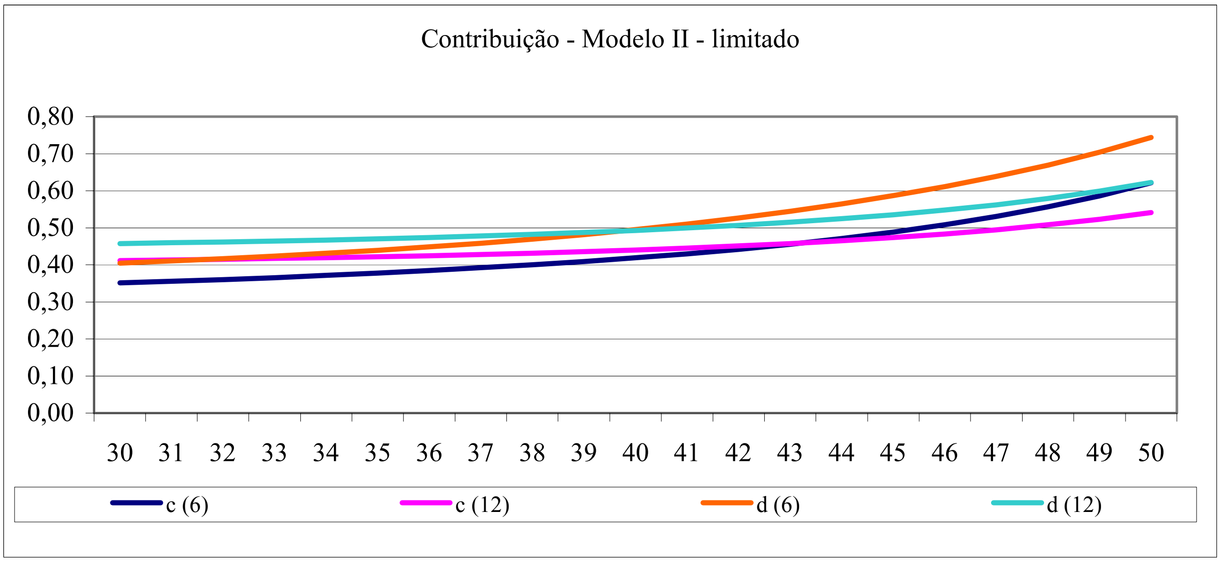

Figura 22: Gráfico da evolução da contribuição inicial para as idades 30 a 50, dada pelo Modelo II c e II d.

Fonte: Elaborada pela autora.

No Modelo II, com contribuições limitadas a um determinado valor, a taxa de juro menor gera uma contribuição menor até as idades 42 e 39, respectivamente, invertendo após isso. Os modelos que apresentam a menor contribuição são os modelos c (6) e c (12).

O valor da contribuição inicial para o Modelo III, onde a contribuição e a renda são crescentes, está mostrado na Tabela 19 e na Figura 23.

Tabela 19: Contribuição inicial para os modelos III a, b, c, d.

Idade	a (6)	a (12)	b (6)	b (12)	c (6)	c (12)	d (6)	d(12)
30	0,42	0,42	0,50	0,56	0,65	0,90	0,32	0,26
31	0,43	0,43	0,51	0,57	0,66	0,91	0,33	0,27
32	0,44	0,44	0,52	0,58	0,67	0,92	0,34	0,28
33	0,46	0,46	0,53	0,58	0,69	0,94	0,35	0,29
34	0,47	0,47	0,54	0,59	0,70	0,95	0,36	0,30
35	0,49	0,49	0,55	0,60	0,72	0,96	0,38	0,31
36	0,51	0,51	0,56	0,61	0,73	0,98	0,39	0,32
37	0,53	0,53	0,58	0,62	0,75	0,99	0,40	0,33
38	0,55	0,55	0,59	0,63	0,77	1,01	0,42	0,34
39	0,57	0,57	0,61	0,64	0,79	1,03	0,44	0,35
40	0,59	0,59	0,62	0,65	0,81	1,05	0,46	0,37
41	0,62	0,62	0,64	0,67	0,84	1,07	0,47	0,39

Continua...

Idade	a (6)	a (12)	b (6)	b (12)	c (6)	c (12)	d (6)	d(12)
Continuação.								
42	0,65	0,65	0,66	0,68	0,87	1,10	0,50	0,40
43	0,68	0,68	0,69	0,70	0,90	1,12	0,52	0,42
44	0,71	0,71	0,71	0,72	0,93	1,15	0,55	0,44
45	0,75	0,75	0,74	0,74	0,96	1,19	0,57	0,47
46	0,79	0,79	0,77	0,76	1,00	1,23	0,61	0,49
47	0,84	0,84	0,81	0,79	1,05	1,27	0,64	0,52
48	0,89	0,89	0,84	0,82	1,10	1,32	0,68	0,55
49	0,95	0,95	0,89	0,85	1,16	1,37	0,73	0,59
50	1,01	1,01	0,94	0,89	1,22	1,43	0,78	0,63

Fonte: Elaborada pela autora.

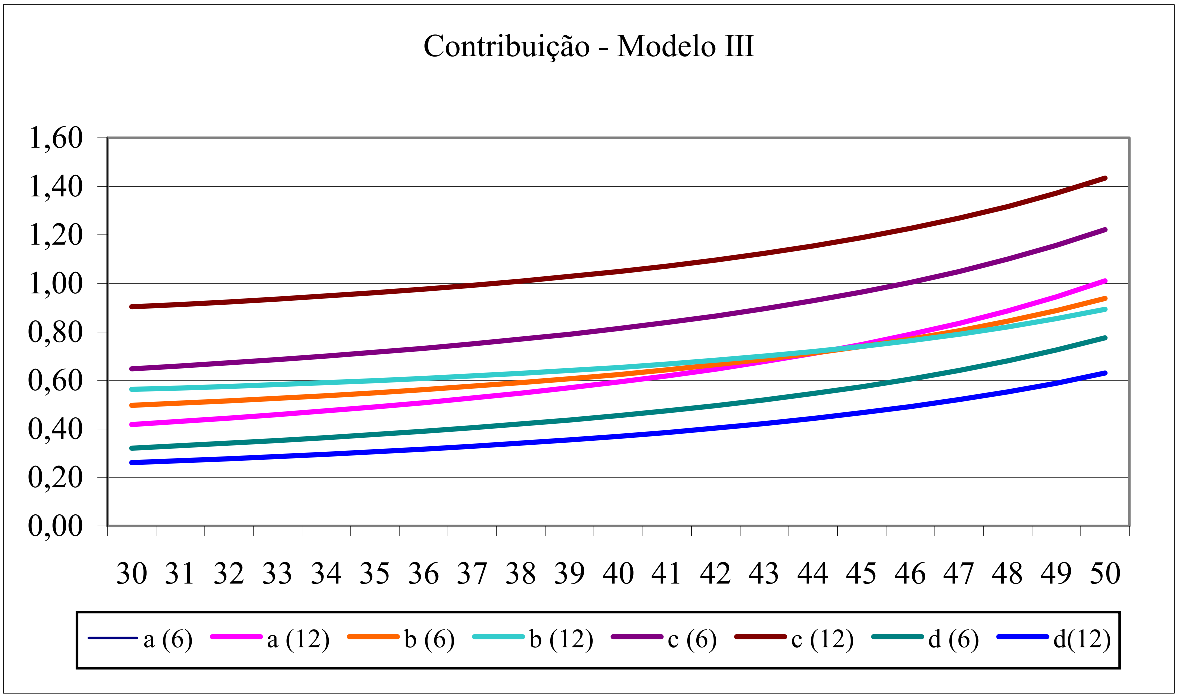

Figura 23: Gráfico da evolução da contribuição inicial para as idades 30 a 50, dada pelo Modelo III a, b, c, d.

Fonte: Elaborada pela autora.

Os modelos III **a (6)** e **a (12)** possuem o mesmo valor de contribuição para todas as idades, devido à premissa de que as taxas *r*, α e β são iguais entre si. Os modelos onde a taxa alfa é a metade da taxa r possuem contribuição menor quando *r* assume o valor de 6%, no modelo **b (6)** a contribuição menor ocorre até a idade 44 e no **c(6)**, este fato acontece sempre. O modelo que apresenta uma contribuição menor para a taxa de juro maior é o **d**. O modelo que gera as menores contribuições, independente da taxa de juro adotada, é o **d**. Esse modelo será estudado com mais detalhe na seqüência desse trabalho.

Os resultados para o Modelo III com contribuição limitada podem ser vistos na Tabela 20 e na Figura 24.

Tabela 20: Contribuição inicial para os modelos III e, f, g, h.

Idade	e (6)	e (12)	f (6)	f (12)	g (6)	g (12)	h (6)	h (12)
30	0,58	0,95	0,51	0,66	0,66	1,06	0,44	0,59
31	0,58	0,96	0,52	0,66	0,67	1,07	0,45	0,60
32	0,59	0,96	0,53	0,67	0,68	1,07	0,45	0,60
33	0,60	0,97	0,53	0,67	0,70	1,08	0,46	0,60
34	0,61	0,97	0,54	0,67	0,71	1,08	0,47	0,61
35	0,62	0,98	0,55	0,68	0,72	1,09	0,48	0,61
36	0,63	0,98	0,57	0,68	0,74	1,10	0,48	0,61
37	0,64	0,99	0,58	0,69	0,75	1,11	0,49	0,62
38	0,66	1,00	0,59	0,70	0,77	1,12	0,50	0,62
39	0,67	1,01	0,61	0,70	0,79	1,13	0,52	0,63
40	0,69	1,02	0,62	0,71	0,81	1,14	0,53	0,64
41	0,71	1,03	0,64	0,72	0,84	1,16	0,54	0,64
42	0,73	1,05	0,66	0,73	0,87	1,17	0,56	0,65
43	0,75	1,06	0,69	0,74	0,90	1,19	0,57	0,66
44	0,77	1,08	0,71	0,76	0,93	1,22	0,59	0,67
45	0,80	1,10	0,74	0,77	0,96	1,24	0,62	0,68
46	0,83	1,12	0,77	0,79	1,00	1,27	0,64	0,70
47	0,87	1,15	0,81	0,81	1,05	1,30	0,67	0,71
48	0,91	1,18	0,84	0,84	1,10	1,34	0,70	0,73
49	0,96	1,21	0,89	0,87	1,16	1,39	0,74	0,76
50	1,02	1,26	0,94	0,90	1,22	1,44	0,78	0,78

Fonte: Elaborada pela autora.

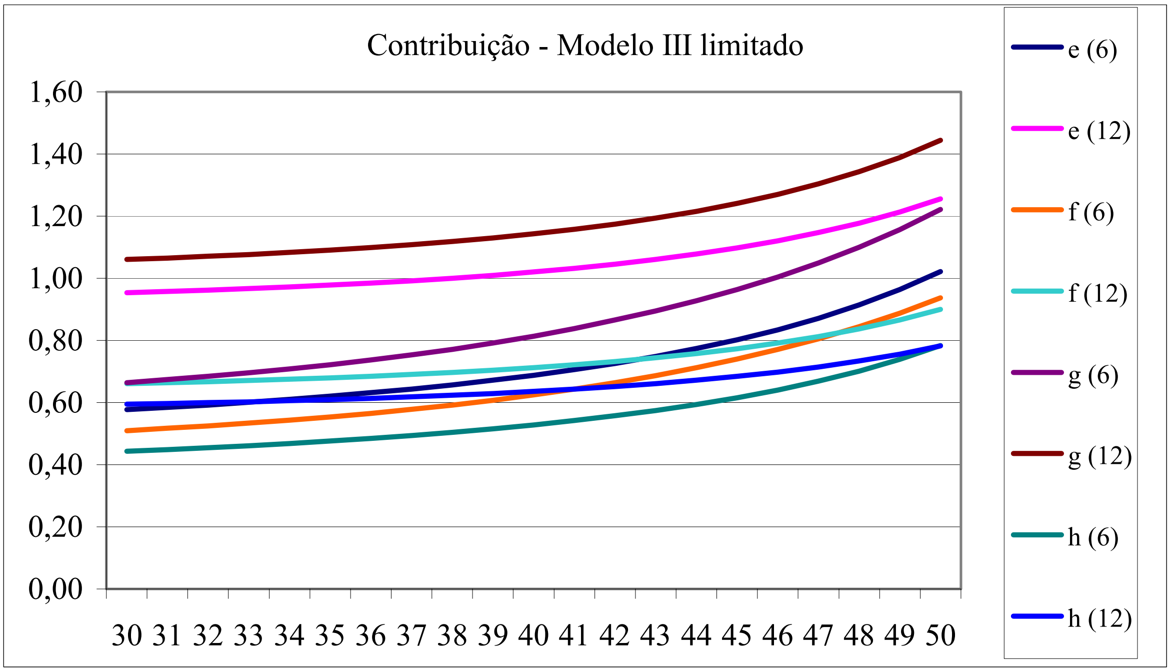

Figura 24: Gráfico da evolução da contribuição inicial para as idades 30 a 50, dada pelo Modelo III e, f, g, h.

Fonte: Elaborada pela autora.

O Modelo III com contribuição limitada sempre gera a menor contribuição quando a taxa de juro adotada é 6% ao ano, para todas as idades, exceto o caso **f (6**) que gera uma contribuição menor até os 46 anos, invertendo após. O caso que será analisado do decorrer desse estudo será o **h**, tanto para a taxa 6% quanto para a taxa 12%.

Para o Modelo IV, o valor da contribuição inicial para as idades 30 a 50 está mostrado tanto na Tabela 21 quanto na Figura 25, a seguir.

Tabela 21: Contribuição inicial para o Modelo IV.

Idade	a (6)	a (12)	b (6)	b (12)
30	0,94	1,56	0,72	0,97
31	0,95	1,56	0,73	0,97
32	0,96	1,57	0,73	0,98
33	0,97	1,58	0,74	0,98
34	0,98	1,58	0,75	0,99
35	0,99	1,59	0,76	0,99
36	1,01	1,60	0,77	1,00
37	1,02	1,61	0,79	1,00
38	1,04	1,62	0,80	1,01
39	1,06	1,64	0,81	1,02

Continua...

Idade	a (6)	a (12)	b (6)	b (12)
Continuação.				
40	1,08	1,65	0,83	1,03
41	1,10	1,67	0,85	1,04
42	1,13	1,68	0,86	1,05
43	1,15	1,70	0,89	1,06
44	1,18	1,73	0,91	1,08
45	1,22	1,75	0,93	1,09
46	1,25	1,78	0,96	1,11
47	1,30	1,82	1,00	1,13
48	1,34	1,86	1,03	1,16
49	1,40	1,90	1,07	1,19
50	1,46	1,96	1,12	1,22

Fonte: Elaborada pela autora.

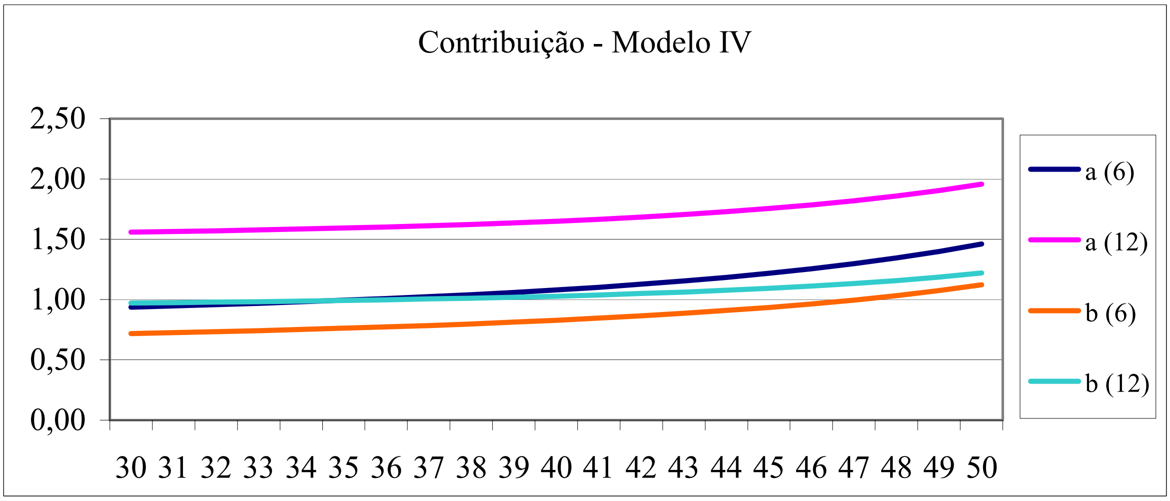

Figura 25: Gráfico da evolução da contribuição inicial para as idades 30 a 50, dada pelo Modelo IV.

Fonte: Elaborada pela autora.

O Modelo IV gera contribuição inicial menor sempre que a taxa de juro adotada for de 6%, e o modelo com as menores contribuições, independentemente da taxa utilizada, é o modelo b.

Terminada a fase do cálculo da contribuição inicial para todos os modelos, para a idade de 30 a 50 anos, escolheu-se um indivíduo que ingressa no modelo aos 30 anos como um exemplo para o cálculo da contribuição inicial, da contribuição final, do fundo acumulado, da renda inicial, da renda final e da idade de recebimento da última renda de aposentadoria. Os resultados encontrados estão apresentados tabelas 22, 23, 24 e 25 a seguir.

Tabela 22: Modelos I, II a, II b, II c e II d.

Modelo	I (6)	I (12)	II a (6)	II a (12)	II b (6)	II b (12)	II c (6)	II c (12)	II d (6)	II d (12)
Contribuição inicial	0,57	0,67	0,25	0,18	0,39	0,39	0,35	0,41	0,40	0,46
Contribuição final	0,57	0,67	1,85	8,50	1,08	2,82	0,71	0,81	0,82	0,92
Fundo acumulado	67,34	324,89	68,48	333,27	67,85	327,99	67,60	325,46	67,71	325,76
Renda inicial	6,67	45,44	6,79	46,61	6,72	45,87	6,70	45,52	6,71	45,56
Renda final	6,67	45,44	6,79	46,61	6,72	45,87	6,70	45,52	6,71	45,56
Idade última renda	78	76	78	76	78	76	78	76	78	76

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 23: Modelos III a, III b, III c e III d.

Modelo	III a (6)	III a (12)	III b (6)	III b (12)	III c (6)	III c (12)	III d (6)	III d (12)
Contribuição inicial	0,42	0,42	0,50	0,56	0,65	0,90	0,32	0,26
Contribuição final	3,03	19,72	1,36	4,08	1,77	6,55	2,33	12,28
Fundo acumulado	112,50	772,84	85,55	473,91	111,48	760,59	86,34	481,53
Renda inicial	6,79	46,61	6,72	45,87	6,72	45,87	6,79	46,61
Renda final	16,26	255,13	10,17	97,84	16,11	251,08	10,26	99,42
Idade última renda	80	80	79	78	80	80	79	78

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 24: Modelas IIIe, III f, III g e III h.

Modelo	III e (6)	III e (12)	III f (6)	III f (12)	III g (6)	III g (12)	III h (6)	III h (12)
Contribuição inicial	0,58	0,95	0,51	0,66	0,66	1,06	0,44	0,59
Contribuição final	1,16	1,88	1,04	1,33	1,35	2,13	0,89	1,17
Fundo acumulado	111,06	754,73	85,38	470,69	111,26	755,44	85,22	470,25
Renda inicial	6,70	45,52	6,71	45,56	6,71	45,56	6,70	45,52
Renda final	16,05	249,15	10,15	97,18	16,08	249,38	10,13	97,09
Idade última renda	80	80	79	78	80	80	79	78

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 25: Modelos IV a e IV b.

Modelo	IV a (6)	IV a (12)	IV b (6)	IV b (12)
Contribuição inicial	0,94	1,56	0,72	0,97
Contribuição final	0,94	1,56	0,72	0,97
Fundo acumulado	110,64	753,41	84,92	469,43
Renda inicial	6,67	45,44	6,67	45,44
Renda final	15,99	248,71	10,09	96,92
Idade última renda	80	80	79	78

Fonte: Elaborada pela autora.

A renda inicial gerada para a idade 65 praticamente não varia para todos os modelos, ficando em torno de 6,67 ou 45,44 reais, de acordo com a taxa escolhida, 6% ou 12%, respectivamente. Isso ocorre porque ela é calculada tendo em vista a obtenção de uma renda de 1 u. m. para a idade inicial, ou seja, o valor da renda gerada equivale a uma unidade monetária capitalizada à taxa de juro predeterminada na idade de ingresso no modelo, pelo período de contribuição.

No entanto, os fundos acumulados apresentam diferenças grandes de um modelo para o outro. O que define o valor do mesmo é a possibilidade de se ter a renda crescendo geometricamente, ou seja, quanto maior o crescimento previsto da renda, maior deverá ser o fundo gerado para a satisfação da mesma. Todos os modelos nos quais a renda cresce 12% ao ano apresentam sempre um fundo gerado em torno de R$ 760,00, o menor fundo gerado é de cerca de R$ 67,00 e está associado aos modelos onde a renda é constante e a taxa de juro utilizada é 6% ao ano.

Em todos os casos a renda se extingue por volta dos 78 anos, devido a tábua de mortalidade utilizada ser comum a todos os modelos. O indivíduo que vier a falecer antes desta idade deixará uma herança e aquele que sobreviver a esta idade deverá arcar com o seu consumo sem a existência dessa renda, ou, então, ele poderá adicionar um valor à contribuição inicial proposta pelo modelo para suprir esse consumo futuro, se porventura vier a existir.

6.5 PROJEÇÃO DA EVOLUÇÃO DO FUNDO

Após escolhido um determinado plano de acumulação, resta ao indivíduo acompanhar a evolução do fundo gerado pelas contribuições e estar atento a quaisquer mudanças na economia que possam comprometer o valor futuro esperado.

Para avaliação antecipada da evolução do fundo, ou seja, uma projeção do valor futuro, foi realizada uma simulação do plano escolhido considerando o crescimento da taxa de juro real seguindo uma variação estocástica. Dos 30 planos possíveis, foram escolhidos aqueles que possuem um valor de contribuição menor, dentro de cada modelo. São eles: Modelo I, Modelo II a, modelo II c, Modelo III d, Modelo III h e Modelo IV b.

A simulação foi realizada para dois cenários distintos. No cenário I a taxa média de juro real é de 6% ao ano e no cenário II de 12% ao ano. Para os dois cenários foram considerados dois casos, no primeiro caso o fundo acumulado é investido somente em ativos livres de risco e no segundo caso, 37%[17] do valor do fundo é aplicado em ativos de risco.

O cenário I está baseado na distribuição dos dados passados e apresenta períodos de inflação alta e períodos de inflação controlada. Ele foi gerado a partir do sorteio das taxas de juro real para o período 70/03, tanto para a taxa livre de risco como para a taxa que remunera os ativos com risco. Ele foi simulado 100 vezes numa planilha Excel, com a ferramenta Macro. Para a geração aleatória das taxas de juro, no Cenário II, foi utilizada a inversa da distribuição normal com a média e o desvio-padrão obtidos para o período de 1995 a 2003.

Para exemplificar esse procedimento, a planilha de simulação para o Modelo I(6), apresenta-se na Tabela 26 e o resultado de cada uma das rodadas na Tabela 27.

[17] Este percentual foi utilizado seguindo os resultados apontados no estudo de Purcal (1999).

Tabela 26: Planilha de simulação da evolução do fundo pelo Modelo I (6) para a idade 30.

t	CDB	Aleat	Aleat fix	r	Contrib.	IBOV	Aleat	Aleat fix	Risco real	Fundo livre	Fundo risco	Fundo total
1	6,2232	26	33	-6,62	0,57	29,67	29	34	83,28	0,57	0,00	0,57
2	4,8158	29	19	-2,29	0,57	78,28	12	2	78,28	0,56	0,00	1,13
3	5,3378	34	19	-2,29	0,57	-51,98	21	1	29,67	1,10	0,00	1,67
4	5,1289	32	1	6,22	0,57	-9,28	9	5	1,54	1,78	0,00	2,35
5	-5,3788	18	35	12,00	0,57	1,54	11	29	-34,58	2,63	0,00	3,20
6	1,5819	17	11	-26,10	0,57	4,24	18	14	176,26	2,36	0,00	2,93
7	-7,2460	4	26	32,39	0,57	-15,21	14	24	97,18	3,88	0,00	4,45
8	3,9315	23	3	5,34	0,57	1,56	21	13	-17,94	4,69	0,00	5,26
9	3,6415	11	26	32,39	0,57	-25,81	17	3	-51,98	6,96	0,00	7,53
10	-14,7469	11	10	-14,75	0,57	-11,64	11	1	29,67	6,42	0,00	6,99
11	-26,1021	4	13	1,78	0,57	-31,41	9	17	-14,41	7,12	0,00	7,69
12	-0,6458	15	16	9,51	0,57	9,53	28	30	109,95	8,42	0,00	8,99
13	1,7808	19	11	-26,10	0,57	-17,94	21	26	-13,97	6,64	0,00	7,21
14	-18,8304	18	17	3,92	0,57	176,26	15	31	-18,69	7,49	0,00	8,06
15	14,0440	33	20	22,63	0,57	67,25	13	7	-15,21	9,89	0,00	10,46
16	9,5065	16	10	-14,75	0,57	49,65	15	33	-34,34	8,92	0,00	9,49
17	3,9199	7	16	9,51	0,57	-14,41	28	27	49,78	10,39	0,00	10,96
18	-1,9377	17	8	3,93	0,57	-73,86	24	20	-1,08	11,39	0,00	11,96
19	-2,2916	24	15	14,04	0,57	132,92	16	4	-9,28	13,64	0,00	14,21
20	22,6281	2	6	1,58	0,57	-1,08	33	2	78,28	14,43	0,00	15,00
21	19,9078	19	13	1,78	0,57	-74,11	34	33	-34,34	15,27	0,00	15,84
22	10,3632	14	21	19,91	0,57	316,38	14	15	67,25	18,99	0,00	19,56
23	34,9855	7	4	5,13	0,57	-11,30	16	10	-11,64	20,57	0,00	21,14
24	8,6729	19	29	25,88	0,57	97,18	29	33	-34,34	26,61	0,00	27,18
25	4,3501	14	14	-18,83	0,57	-2,87	9	11	-31,41	22,06	0,00	22,63
26	32,3922	23	31	6,66	0,57	-13,97	21	8	1,56	24,14	0,00	24,71
27	15,6504	21	31	6,66	0,57	49,78	17	11	-31,41	26,35	0,00	26,92
28	14,2116	19	18	-1,94	0,57	34,75	4	22	316,38	26,40	0,00	26,97
29	25,8806	4	32	6,70	0,57	-34,58	6	21	-74,11	28,78	0,00	29,35
30	4,4010	18	7	-7,25	0,57	109,95	32	4	-9,28	27,22	0,00	27,79
31	6,6595	1	3	5,34	0,57	-18,69	10	30	109,95	29,27	0,00	29,84
32	6,6950	9	25	4,35	0,57	-19,40	17	31	-18,69	31,14	0,00	31,71
33	-6,6241	12	12	-0,65	0,57	-34,34	27	11	-31,41	31,51	0,00	32,08
34	10,9955	10	7	-7,25	0,57	83,28	10	6	4,24	29,75	0,00	30,32
35	11,9955	14	11	-26,10	0,57		13	26	-13,97	22,41	0,00	22,98

Fonte: Elaborado pela autora.

Nota: Idade ingresso: 30 % ativos aplicados a taxa livre de risco: 100 r: 0,06
Idade aposentadoria: 65 % ativos aplicados a taxa com risco: 0 α: 0,00
Contribuição inicial: 0,57 β: 0,00

A partir da simulação da taxa de juro, para o período de 35 anos, foi possível calcular o valor do fundo ao final de cada período e o fundo total acumulado. Este cálculo foi repetido 100 vezes e o fundo total utilizado como resultado final foi a média dos cem resultados parciais do fundo final. O fundo gerado para cada uma das cem rodadas pode ser observado na Tabela 27, a seguir.

Tabela 27: Fundo encontrado por meio da simulação para cem rodadas.

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
54,27	38,48	31,15	66,85	47,61	40,99	103,45	32,36	27,69	47,42
48,42	49,62	77,35	48,83	34,64	33,74	86,78	55,14	51,96	85,58
63,97	76,09	38,96	35,00	52,97	55,42	48,32	27,77	63,64	23,64
36,07	57,02	80,77	37,78	99,21	65,94	43,75	49,82	61,90	158,62
14,10	62,69	44,29	31,74	42,74	52,75	79,18	74,34	63,88	89,03
110,95	55,54	34,12	25,77	47,64	88,17	116,72	64,53	49,36	47,17
23,39	27,30	79,69	55,02	53,24	91,93	94,81	36,85	44,35	59,27
42,27	33,70	73,64	56,64	15,00	36,91	36,02	48,93	34,80	47,05
38,03	33,95	45,10	27,05	25,58	61,38	88,83	41,16	38,77	60,26
112,79	126,28	23,68	82,37	48,65	89,10	123,48	88,71	27,23	22,98

Fonte: Elaborado pela autora.

O fundo médio encontrado foi de 56,30[18] reais. A distribuição dos valores obtidos foi dividida em decis (10 décimos), de acordo com a proporção das freqüências observadas. O fundo médio está no sétimo decil caracterizando uma probabilidade de ocorrência de 30 a 40% e o fundo esperado necessário para a geração da renda (R$ 67,34) está no oitavo decil, ou seja, 20 a 30% de probabilidade de ocorrência.

Tabela 28: Distribuição do fundo total gerado pela simulação organizada em decis.

Decil	Valor do Fundo
0º	14,10
1º	27,30
2º	34,54
3º	38,69
4º	46,27
5º	49,15
6º	55,25
7º	63,71
8º	79,28
9º	89,39
10º	158,62

Fonte: Elaborado pela autora.

[18] $Fundo = \dfrac{\sum_{t=1}^{100} Fundo_t}{100}$

Analisando-se os decis, conclui-se que, quanto menor o decil no qual o valor esperado do fundo se encontra, maior será a probabilidade de alcançá-lo. A análise feita a seguir busca identificar quais os planos que gerarão um fundo esperado com, no mínimo, 70% de probabilidade de ocorrência, ou seja, aqueles que estão, no máximo, no terceiro decil.

Após a simulação realizada para os modelos escolhidos previamente, os quais apresentavam as menores contribuições iniciais, os resultados obtidos estão descritos nas tabelas a seguir. Cada tabela apresenta o resultado do fundo médio obtido a partir da simulação, o fundo esperado calculado de acordo com a taxa de juro do cenário utilizado, já realizado anteriormente e o decil onde se encontra o fundo esperado na distribuição obtida pela simulação.

Para o Cenário I, com o fundo aplicado somente em ativos livres de risco, os modelos com taxa de 6% ao ano apresentam o fundo esperado no sexto, sétimo ou oitavo decil, ou seja, uma probabilidade de ocorrência de 20 a 40%. Para os modelos com taxa de 12% ao ano, o fundo esperado encontra-se no quinto ou no sexto decil (probabilidade de ocorrência de 40 a 50%) e para os modelos IIa e IIId o fundo esperado está no primeiro decil (probabilidade de ocorrência de 90%). Observa-se que os modelos que conseguem uma probabilidade superior a 70% são aqueles que propõem uma taxa de 12% ao ano, que vai de encontro à taxa proposta no cenário e que prevêem uma contribuição crescente também a taxa de 12% ao ano.

Tabela 29: Decil do fundo esperado para o Cenário I, caso 1, para cada modelo simulado.

Modelo	Fundo médio	Fundo esperado	Decil
I (6)	56,30	67,34	8º
I (12)	73,07	67,34	5º
II a (6)	67,39	68,48	7º
II a (12)	132,15	68,48	1º
II c (6)	57,06	67,60	8º
II c (12)	76,48	67,60	6º
III d (6)	80,13	86,34	7º
III d (12)	195,25	86,34	1º
III h (6)	80,01	85,22	6º
III h (12)	109,42	85,22	5º
IV b (6)	74,06	84,92	8º
IV b (12)	110,21	84,92	5º

Fonte: Elaborado pela autora.

Ainda no Cenário I, mas considerando uma aplicação de 37% do valor do fundo em ativos com risco, observa-se que os modelos com contribuição inicial calculada para uma taxa de 6% ao ano apresentam o fundo esperado no terceiro decil (probabilidade de ocorrência de

70%). Para os modelos com taxa de 12% ao ano, a probabilidade de ocorrência está entre 70 e 90%.

Tabela 30: Decil do fundo esperado para o Cenário I, caso 2, para cada modelo simulado.

Modelo	Fundo médio	Fundo esperado	Decil
I (6)	192,17	67,34	3º
I (12)	271,43	67,34	2º
II a (6)	162,21	68,48	3º
II a (12)	282,17	68,48	1 º
II c (6)	224,22	67,60	3º
II c (12)	361,18	67,60	3º
III d (6)	229,71	86,34	3º
III d (12)	516,97	86,34	1º
III h (6)	265,54	85,22	3º
III h (12)	447,66	85,22	2º
IV b (6)	261,74	84,92	3º
IV b (12)	306,37	84,92	2º

Fonte: Elaborado pela autora.

O Cenário II foi constituído considerando a taxa de juro com uma distribuição normal, sendo que, para a taxa livre de risco, utilizou-se a média de 12% ao ano e desvio padrão também de 12% ao ano e, para a taxa com risco, a média utilizada foi de 17%a.a. e o desvio padrão de 54%a.a., conforme estudo apresentado no Capítulo 6.2.

Os resultados obtidos apontam que, para os modelos com taxa prevista de 6%, nenhum consegue gerar o fundo esperado com uma probabilidade de, no mínimo, 70%, eles obtém no máximo 20% de probabilidade de ocorrência. Para os modelos com taxa de 12%, a probabilidade de gerar o fundo esperado está entre 20 e 30%.

Tabela 31: Decil do fundo esperado para o Cenário II, caso 1, para cada modelo simulado.

Modelo	Fundo médio	Fundo esperado	Decil
I (6)	251,53	324,89	8º
I (12)	279,33	324,89	8º
II a (6)	182,48	333,27	10º
II a (12)	288,12	333,27	8º
II c (6)	229,33	325,46	9º
II c (12)	283,91	325,46	8º
III d (6)	236,00	481,53	10º
III d (12)	414,76	481,53	8º
III h (6)	268,21	470,25	10º
III h (12)	412,71	470,25	7º
IV b (6)	305,56	84,92	9º
IV b (12)	452,74	469,43	7º

Fonte: Elaborado pela autora.

Considerando a aplicação em ativos com risco, os modelos com taxa 12% ao ano têm entre 30 e 50% de probabilidade de gerar o fundo esperado, para os com taxa de 6%, todos apresentam probabilidade de ocorrência de 10 a 30%.

Tabela 32: Decil do fundo esperado para o Cenário II, caso 2, para cada modelo simulado.

Modelo	Fundo médio	Fundo esperado	Decil
I (6)	353,19	324,89	7º
I (12)	377,80	324,89	6º
II a (6)	239,37	333,27	9º
II a (12)	372,53	333,27	7º
II c (6)	294,93	325,46	7º
II c (12)	398,82	325,46	6º
III d (6)	386,13	481,53	8º
III d (12)	508,74	481,53	7º
III h (6)	394,95	470,25	8º
III h (12)	593,40	470,25	6º
IV b (6)	512,82	84,92	7º
IV b (12)	674,22	469,43	5º

Fonte: Elaborado pela autora.

Para visualizar os resultados encontrados, a Tabela 33 apresenta, para cada modelo, as premissas adotadas, os resultados para o cálculo da contribuição para um indivíduo com 30 anos e a probabilidade de ocorrência do fundo esperado, obtida pela simulação do modelo para os cenários I e II.

Tabela 33: Probabilidade de ocorrência do fundo esperado para os modelos simulados.

Modelo	C	R	r	α	β	Cc	Cenário I		Cenário II	
							1	2	1	2
I – (6)	CT	CT	6	0	0	0,57	20	70	20	30
I – (12)	CT	CT	12	0	0	0,67	50	80	20	40
II – a (6)	CR	CT	6	6	0	0,25	30	70	0	10
II – a (12)	CR	CT	12	12	0	0,18	90	90	20	30
II – c (6)	CRL	CT	6	6	0	0,35	20	70	10	30
II – c (12)	CRL	CT	12	12	0	0,41	40	70	20	40
III – d (6)	CR	CR	6	6	3	0,32	30	70	0	20
III – d (12)	CR	CR	12	12	6	0,26	90	90	20	30
III – h (6)	CRL	CR	6	6	3	0,44	40	70	0	20
III – h (12)	CRL	CR	12	12	6	0,59	50	80	30	40
IV – b (6)	CT	CR	6	0	3	0,72	20	70	10	30
IV – b (12)	CT	CR	12	0	6	0,97	50	80	30	50

Fonte: Elaborada pela autora.

Legenda: C – contribuição, pode ser constante (CT), crescente (CR) ou crescente limitada (CRL);
R – renda, pode ser constante (CT) ou crescente (CR);
r – taxa de juro real dada percentualmente;
α - taxa de crescimento da contribuição dada percentualmente;
β - taxa de crescimento da renda dada percentualmente;
Cc – contribuição inicial calculada para um indivíduo com 30 anos, em reais;
Cenário I, caso 1 – apresenta a probabilidade de ocorrência do fundo esperado, de acordo com a distribuição do fundo calculado pela simulação em 100 rodadas.
Cenário I, caso 2 e Cenário II, casos 1 e 2 – idem ao anterior.

Após a análise é possível constatar que o resultado da simulação não apresenta um modelo que gere o fundo necessário para a renda pós-aposentadoria para todos os cenários utilizados simultaneamente.

O modelo atuarial tradicionalmente utilizado – contribuição constante gerando uma renda constante – com taxa de 6% ao ano, não obteve sucesso para o Cenário I, com 100% do fundo aplicado em ativos livres de risco, que é o plano oferecido geralmente pelas empresas de previdência. Este modelo passa a ter uma probabilidade de ocorrência do fundo esperado de 70% quando existe a possibilidade do investimento de uma parcela do fundo em ativos de risco.

Os modelos que prevêem uma contribuição constante não conseguem atingir uma probabilidade de ocorrência de 70%, exceto quando a aplicação em ativos de risco é considerada, mas somente para o cenário I. Os modelos com contribuição crescente limitada estão na mesma situação dos modelos com contribuição constante. Os únicos modelos que conseguem atingir o fundo esperado são aqueles que apresentam uma contribuição crescente, mas esse resultado satisfatório só é conseguido quando a contribuição cresce a uma taxa de 12% ao ano e a economia apresenta uma taxa média de 6% ao ano.

Os resultados obtidos permitem confirmar que a obtenção do fundo desejado, vai depender, diretamente, da possibilidade de um rendimento maior, conseguido por meio da aplicação de uma parcela do fundo em ativos de risco. O comportamento de aversão ao risco do poupador pode impedi-lo de assumir tais riscos dificultando a obtenção de maiores retornos.

Quanto à utilização de taxas em diferentes níveis, sabe-se que a preferência dos atuários é pela utilização de taxas menores, pois implicam maior segurança na obtenção do resultado esperado. Este estudo vai ao encontro dessa conduta, pois todo o plano considerado, projetado com uma taxa de 6% ao ano, tem um melhor desempenho no cenário I (taxa de 6% ao ano) do que os planos considerados com taxa de 12% no cenário II (12% ao ano).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tudo o que se refere ao futuro do indivíduo, em geral, é incerto. A busca por um padrão de vida que atenda às necessidades, sejam elas básicas ou não, é uma propulsora do crescimento pessoal. Para o alcance desse padrão almejado uma condição básica é o planejamento financeiro pessoal, por meio dele é possível analisar conjuntamente as despesas pessoais e as receitas que farão frente às mesmas. Uma preocupação dos indivíduos, em geral, é com a renda pós-aposentadoria. Os fatores que influenciam a mesma estão presentes no dia-a-dia por intermédio da renda do trabalho, do consumo presente e da possibilidade de uma poupança. O modelo do ciclo da vida apregoa que os indivíduos poupam para garantir o consumo futuro.

Os modelos econômicos enfatizam que o indivíduo é o responsável pelas decisões sobre quanto consumir hoje e quanto poupar. O modelo de Samuelson e Merton propõe que, para o indivíduo maximizar seu consumo ao longo da vida, ele necessita, além da decisão sobre o próprio consumo, decidir quanto de sua riqueza ele investirá, considerando que um percentual da mesma deverá ser aplicado em investimentos de risco.

O consumo depende da renda e das preferências de cada indivíduo. Estabelecer o valor do consumo para um indivíduo é uma tarefa complexa, pois depende das características individuais de cada um. Dessa forma, o objetivo desse estudo foi contribuir com uma análise sobre o valor a ser poupado para gerar uma renda de aposentadoria, que leve em consideração a renda atual do indivíduo e que ele possa escolher as características desse plano de acumulação conforme suas necessidades e possibilidades.

Para essa análise foram utilizados os resultados da matemática atuarial, que é a responsável por apresentar as bases para o cálculo, tanto de prêmios de seguro, quanto de contribuições para a renda pós-aposentadoria. A matemática atuarial apresenta modelos que indicam os valores a serem poupados para a obtenção da renda, mas a prática atuarial demonstra que esses modelos, algumas vezes, estão distanciados da realidade. A abordagem tradicional é probabilística, mas os parâmetros adotados são determinísticos. Os atuários buscam minimizar este distanciamento por meio de uma abordagem estocástica, dando lugar de destaque às incertezas quanto à taxa de juro e à taxa de mortalidade. A prática desses modelos parece estar ainda num estágio inicial dependendo de uma popularização dos métodos computacionais.

Como apresentado na introdução desse estudo, as instituições financeiras, que operacionalizam planos de previdência privada, utilizam modelos tradicionais, onde a contribuição e a renda são constantes e as taxas de juro real usadas variam de 6% a 12% ao ano. Em geral, a aplicação do fundo acumulado se dá em ativos livres de risco, mas algumas já oferecem aos clientes a possibilidade de aplicar em fundos mais agressivos, com algum percentual investido em ativos com risco. A partir da simulação realizada nesse estudo constata-se que os planos tradicionais terão dificuldade em gerar o fundo esperado. Para contornar essa situação o indivíduo deve buscar alternativas, que vão desde o aumento do valor poupado até a aplicação em investimentos com risco.

Algumas dessas alternativas foram consideradas na elaboração dos modelos, entre elas a possibilidade de uma contribuição crescente e, também, de uma renda crescente. Para todos os modelos foi calculado o valor da contribuição inicial e do fundo esperado. Uma vez que o resultado pretendido é a geração de uma renda futura, não se tem como determinar a ocorrência da mesma, ou seja, o alcance do valor estipulado previamente, na data da aposentadoria. Para verificar o desempenho do fundo no mercado financeiro, ao longo do período de acumulação foi realizada uma simulação contemplando dois cenários distintos e considerando, em cada um, a possibilidade de se investir somente em ativos livres de risco ou considerar algum percentual desse investimento em ativos de risco.

Este estudo procurou mostrar as dificuldades existentes em modelos que pressupõem o longo prazo. Ficou evidenciado que num cenário de incertezas, como o caso brasileiro, é prudente e preferível utilizar parâmetros conservadores, ou seja, taxas de juro real menores. Pôde-se constatar que os planos calculados com taxa de juro de 12% ao ano ficaram aquém do resultado desejado e, também, que a aplicação em ativos de risco aumenta consideravelmente o valor do fundo. Os modelos tradicionais apresentados aos poupadores, simulados nesse estudo, demonstraram uma probabilidade de ocorrência em torno de 20%, levando a constatação de que é de 80% a chance de que o fundo acumulado não consiga respaldar a renda futura, nos moldes previstos inicialmente.

Todos os valores calculados nesse estudo tratam-se de valores puros, ou seja, valores onde não estão presentes parcelas referentes a taxas e/ ou impostos. Uma extensão deste estudo seria a consideração do peso das taxas de administração e carregamento e dos impostos no valor da contribuição. Outra, a simulação dos modelos para outros cenários possíveis. Ainda, uma extensão seria a formulação do modelo atuarial seguindo a abordagem estocástica, de modo a aproximá-lo melhor da realidade.

Todo e qualquer estudo sobre a renda pós-aposentadoria é relevante, pois atinge diretamente cada indivíduo e, conseqüentemente, a economia de uma nação.

REFERÊNCIAS

ABECIP – Associação Brasileira de Crédito e Poupança. Pesquisa: 85% dos aplicadores têm caderneta. **Novidades ABECIP**, 2003. Disponível em: http://www.abecip.org/. Acesso em: 03 mar. 2004.

ALÉM, Ana Cláudia; GIAMBIAGI, Fabio. O aumento do investimento: o desafio de elevar a poupança privada no Brasil. **Macroeconomia: textos para discussão**, n. 60, 1997. Disponível em: http://www.bndes.gov.br/conhecimento/td/Td 60.pdf. Acesso em: 17 dez. 2003.

ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PREVIDÊNCIA PRIVADA. 2003. **ANAPP.** Disponível em: http://www.anapp.com.br/site/. Acesso em: 10 out. 2004.

BELTRÃO, Kaizô Iwakami,; PINHEIRO, Sonoe Sugahara. Estimativa de mortalidade para a população coberta pelos seguros privados: estatística e comparação com tábuas do mercado. **Estudos Funenseg**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 2, out. 2002.

BODIE, Zvi; MERTON, Robert C. **Finanças**. Tradução James Sunderland Cook. Porto Alegre: Bookman, 2002. Tradução de: Finance.

BOOTH Philip *et al.* **Modern actuarial theory and practice**. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1999.

BOWERS JUNIOR, Newton L. *et al.* **Actuarial mathematics**. 2nd ed. Schaumburg: Society of Actuaries, 1997.

BRASIL, Gilberto. **O abc da matemática atuarial e princípios gerais de seguros**. Porto Alegre: Sulina, 1985.

BRASIL. Ministério da Previdência Social. **Previdência Social**. 2003. Disponível em: http://www.mpas.gov.br/previdenciasocial.asp. Acesso em: 10 out. 2004.

BREALEY, Richard A.; MYERS, Stewart C. **Principle of corporate finance**. 6th ed. New York: McGraw Hill, 2000.

CAMARANO, Ana Amélia. **Envelhecimento da população brasileira**: uma contribuição demográfica. IPEA, Rio de Janeiro, jan. 2002. Texto para discussão n. 858. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 10 jul. 2004.

CONTADOR, Claudio R. Reforma da previdência privada e os desafios para o crescimento econômico. **Estudos Funenseg**. Rio de Janeiro, v. 2, n. 7, out. 2003.

COPELAND, Thomas E.; WESTON, John Fred. **Financial theory and corporate policy**. 3rd ed. Reading: Addison-Wesley, 1988.

CORSEUIL, Carlos H.; FOGUEL, Miguel N. **Uma sugestão de deflatores para rendas obtidas a partir de algumas pesquisas domiciliares do IBGE.** IPEA, Rio de Janeiro, jul. 2002. Texto para discussão n. 897. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 05 jan. 2004.

______.; SANTOS, Daniel D. **Determinantes da renda do trabalho no setor formal da economia brasileira.** IPEA, Rio de Janeiro, jun. 2002. Texto para discussão n. 885. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 05 jan. 2004.

DAYKIN, C. Risk management and regulation of defined contribution schemes. *In*: Seminar for Social Security Actuaries and Statisticians: ACTUARIAL ASPECTS OF PENSION REFORM, 2002, Moscow. **[Electronic proceedings] …** International Social Security Association, 2002. Disponível em: http://www.issa.int/pdf/moscou02/2daykin.pdf. Acesso em: 22 jan. 2004.

______.; PENTIKAINEN, T.; PESONEM, M. **Practical risk theory for actuaries**. London: Chapman and Hall, 1994.

DEUD, Cláudia Augusta Ferreira. **Alteração na metodologia de cálculo da tábua de expectativa de sobrevida para 2002 e seus reflexos no regime geral de previdência social.** Brasília, DF: Câmara dos Deputados, Área Previdência e Direito Previdenciário, Estudos, jul. 2004. Disponível em: http://www2.camara.gov.br/publicacoes/estnotec/tema15. Acesso em: 10 out. 2004.

FAMÁ, Rubens. Conceito de taxa de risco e sua aplicação no capital *Asset Pricing Model*.: um estudo exploratório para o mercado brasileiro. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE FINANÇAS, 2., 2002, Rio de Janeiro. **Anais ...** Rio de Janeiro: IBEMEC, 2002.

FAMA, Eugene F. **Foundation of finance:** portfolio decisions and securities prices. New York: Basic Books, c1976.

______. The information in the term structure. **Journal of Financial Economics**, Amsterdam, v. 13, n. 4, p. 509 – 529, Dec. 1984.

FORTUNA, Eduardo. **Mercado financeiro:** produtos e serviços. 14. ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2001.

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. **IBGE.** 1996. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 out. 2004.

______. **Pesquisas:** Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios. Síntese de indicadores. 2002. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 out. 2004.

HUEBNER, Solomon Stephen. Human life values: role of life insurance. *In:* ______. **Life insurance handbook**. 2nd ed., Homewood: Richard D. Irwin, 1964.

ISSLER, João Victor; ROCHA, Fernando de Paula. Consumo, restrição de liquidez e bem-estar no Brasil. **Brazilian Journal of Applied Economics**, São Paulo, v. 4, n. 4, dez. 2000. Disponível em: http://www.fipe.com/publicacoes/ea_volumes.asp?v=4&n=4&versao=. Acesso em:10 out. 2003.

IYER, Subramanian. Matemática atuarial de sistemas de previdência social. Tradução Paulo Estevão Tavares Cavalcante. *In*: BRASIL. Ministério da Previdência Social. **Publicações**: Coleção Previdência Social. Brasília, DF, v. 16, 2002. Série traduções. Tradução de: Actuarial mathematics of social security pensions. Disponível em: http://www.mpas.gov.br/docs/volume16.pdf. Acesso em: 20 jan. 2004.

KAZMIER, Leonard J. **Estatística aplicada a economia e administração.** Tradução: Carlos Augusto Crusius, revisão técnica Jandyra Maria Guimarães Fachel. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982. Tradução de: Schaum’s out line of theory and problems of business statistics.

KUSHNER, Harold J.; DUPUIS, Paul. **Numerical methods for stochastic control problems in continuous time:** applications of mathematics, stochastic modelling and applied probability. 2nd ed. New York: Springer–Verlag, 2001.

LEAL, Ricardo Pereira Câmara. **Cuidados ao escolher um fundo de previdência privada**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPEAD. CEFIN. Relatórios, 2001. Disponível em: http://www.coppead.ufrj.br/papers/cuidados.pdf. Acesso em: 04 ago. 2003.

MEDICI, André Cezar. A mensuração da subjetividade: notas sobre a variável renda nas PNADs. *In*: SAWYER, D. O. (org.). **PNDAs em foco – anos 80.** Abep, 1988. p. 121 – 151.

MENDONÇA, Helder Ferreira de. Mecanismos de transmissão monetária e a determinação da taxa de juros: uma aplicação da regra de Taylor ao caso brasileiro. **Economia e Sociedade**, Campinas, v. 17, jun. 2001. p. 65-81.

MERTON, Robert C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case**. Review of Economics and Statistics**, Amsterdam, v. 51, n. 3, Aug. 1969. p. 247–257.

______. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. **Journal of Economic Theory**, New York, v. 3, n. 4, Dec. 1971. p. 373–413.

______. Theory of finance from the perspective of continuous time. **Journal of Financial and Quantitative Analysis,** Seattle, v. 10, n. 4, Nov. 1975. p. 659 – 674.

______. **Continuous-time finance**. Cambridge: Basil Blackwell, 1990.

MODIGLIANI, Franco. Life cycle, individual thrift and the wealth of nations. **American Economic Review,** Pittsburgh, v, 76, n. 3, 1986. p. 297 – 313.

NERI, Marcelo; CARVALHO, Kátia; NASCIMENTO, Mabel. **Ciclo da vida e motivações financeiras com especial atenção aos idosos brasileiros**. IPEA, Rio de Janeiro, dez. 1999.Texto para discussão n. 691. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 04 fev. 2004.

OLIVEIRA, Francisco E. B. de; BELTRÃO, Kaizô I.; DAVID, Antonio C. de. **Previdência, poupança e crescimento econômico:** interações e perspectivas. IPEA, Rio de Janeiro, nov. 1998.Texto para discussão n. 607. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 17 dez. 2003.

PEREIRA, Francisco; MIRANDA, Rogério B.; SILVA, Marly M. **Os fundos de pensão como geradores de poupança interna**. IPEA, Rio de Janeiro, maio 1997. Texto para discussão n. 480. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 20 ago. 2003.

PINHEIRO, Maurício M. S. **Dívida mobiliária federal e impactos fiscais:** 1995/99**.** IPEA, Rio de Janeiro, jan. 2000. Texto para Discussão n. 700. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 28 jan. 2004.

PURCAL, T. Sachi. **Optimal consumption, portfolio selection and life insurance for financial planning**. Sidney: University of New South Wales, School of Actuarial Studies, 1999. Disponível em: http://wwwdocs.fce.unsw.edu.au/actuarial/research/papers/1999/karlruhe_paper.pdf. Acesso em: 01 jun. 2004.

______; PIGGOTT, J. Modelling optimal retirement planning: a simulation approach and an application to Japan. In: International Forum of the Collaboration Projects, 2. 2001, Tokyo. **[Proceedings…]** Tokyo: 2001.

______. **A stochastic control model for individual asset-liability management.** Sidney: University of New South Wales, Faculty of Commerce and Economics , Research Centre, Centre for Pensions and Superannuation. Publications. Mar. 2003. Disponível em: http://www2.fce.unsw.edu.au/nps/servlet/portalservice?GI_ID=System.LoggedOutInheritableArea&maxWnd=_ResearchCentre_CPS_Publications2003. Acesso em: 01 jun. 2004.

REIS, Eustáquio J. *et al*. Renda permanente e poupança precaucional: evidências empíricas para o Brasil no passado recente. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Rio de Janeiro, v. 28, n. 2, ago. 1998. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/pub/ppe/ppe282.html. Acesso em: 17 dez. 2003.

RICHARD, S. F. Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived individual in a continuous time model. **Journal of Financial Economics**. Amsterdam, v. 2, n. 2, p. 187 – 203, Jun. 1975.

ROCHA, Sônia. **Os impactos do Plano Real**. IPEA, Rio de Janeiro, dez. 1996. Texto para discussão n. 439. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em:17 dez. 2003.

______. **Pobreza e desigualdade no Brasil:** o esgotamento dos efeitos distributivos do Plano Real. IPEA, Rio de Janeiro, abr. 2000. Texto para discussão n. 721. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 17 dez. 2003.

ROSS, Stephen A. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, Burlington, v. 13, n. 3, p. 341 – 360, Dec., 1976.

______.; WESTERFIELD, Randolph W., JAFFE, Jeffrey F. **Administração financeira**. 2. ed. Tradução Antônio Zoratto Sanvicente. São Paulo: Atlas, 2002. Tradução de: Corporate finance, fifth edition.

SAMUELSON, P. A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. **Review of Economics and Statistics**. Cambridge, v. 51, n. 3, p. 239 – 246, Aug. 1969.

SANSON, João Rogério. Uma abordagem axiomática simplificada das preferências do consumidor. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 22., 1994, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: ANPEC, 1994. Volume 1. Versão revisada de outubro de 2001.

SILVA, Enid R., SCHWARZER, Helmut. **Proteção social, aposentadorias, pensões e gênero no Brasil**. IPEA, Rio de Janeiro, dez. 2002. Texto para discussão n. 934. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 5 jan. 2004.

WAGNER, Harvey M. **Principles of operations research**: with applications to managerial decisions. 2nd ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1985.

ANEXO A

Tábua de Mortalidade elaborada por Beltrão e Pinheiro (2002).

Probabilidade Específica de Morte ajustada e intervalo de confiança para 95% para a população do plano Previdência Privada por sexo e idade individual – 1998

	PLANO PP					
IDADE	HOMENS			MULHERES		
	q_x	lim_inf	lim_sup	q_x	lim_inf	lim_sup
20	0,000665	0,000297	0,001033	0,000136	-0,000100	0,000372
21	0,000749	0,000427	0,001071	0,000174	-0,000062	0,000411
22	0,000815	0,000506	0,001124	0,000196	-0,000038	0,000429
23	0,000863	0,000558	0,001167	0,000198	-0,000029	0,000425
24	0,000892	0,000596	0,001188	0,000187	-0,000021	0,000395
25	0,000906	0,000613	0,001199	0,000172	-0,000018	0,000362
26	0,000907	0,000626	0,001187	0,000161	-0,000011	0,000332
27	0,000897	0,000629	0,001165	0,000157	-0,000007	0,000320
28	0,000880	0,000625	0,001136	0,000162	0,000003	0,000320
29	0,000860	0,000616	0,001103	0,000174	0,000014	0,000334
30	0,000838	0,000614	0,001061	0,000193	0,000032	0,000353
31	0,000817	0,000608	0,001027	0,000216	0,000055	0,000378
32	0,000801	0,000605	0,000996	0,000244	0,000077	0,000411
33	0,000790	0,000609	0,000970	0,000276	0,000107	0,000444
34	0,000787	0,000614	0,000960	0,000311	0,000136	0,000487
35	0,000793	0,000627	0,000960	0,000351	0,000168	0,000533
36	0,000811	0,000646	0,000975	0,000395	0,000200	0,000589
37	0,000840	0,000673	0,001008	0,000444	0,000236	0,000652
38	0,000884	0,000717	0,001051	0,000498	0,000285	0,000711
39	0,000942	0,000769	0,001115	0,000558	0,000331	0,000786
40	0,001016	0,000834	0,001198	0,000625	0,000383	0,000867
41	0,001108	0,000918	0,001297	0,000699	0,000447	0,000952
42	0,001219	0,001016	0,001421	0,000782	0,000510	0,001053
43	0,001350	0,001133	0,001567	0,000873	0,000587	0,001160
44	0,001504	0,001267	0,001742	0,000975	0,000672	0,001277
45	0,001683	0,001422	0,001943	0,001087	0,000755	0,001419
46	0,001889	0,001613	0,002165	0,001212	0,000860	0,001563
47	0,002124	0,001819	0,002430	0,001350	0,000960	0,001740
48	0,002392	0,002067	0,002718	0,001503	0,001086	0,001920
49	0,002697	0,002323	0,003070	0,001673	0,001223	0,002124
50	0,003041	0,002630	0,003451	0,001862	0,001378	0,002346
51	0,003429	0,002980	0,003878	0,002071	0,001543	0,002599
52	0,003866	0,003371	0,004361	0,002303	0,001723	0,002883
53	0,004357	0,003815	0,004899	0,002559	0,001932	0,003186
54	0,004908	0,004308	0,005507	0,002843	0,002157	0,003530
55	0,005524	0,004855	0,006194	0,003158	0,002409	0,003907
56	0,006214	0,005472	0,006956	0,003506	0,002705	0,004308
57	0,006985	0,006139	0,007831	0,003892	0,002978	0,004806
58	0,007845	0,006973	0,008716	0,004319	0,003381	0,005257
59	0,008802	0,007847	0,009758	0,004790	0,003793	0,005788
60	0,009868	0,008853	0,010882	0,005312	0,004222	0,006402
61	0,011051	0,009945	0,012156	0,005888	0,004686	0,007091

62	0,012363	0,011219	0,013506	0,006525	0,005239	0,007811
63	0,013815	0,012541	0,015089	0,007228	0,005850	0,008606
64	0,015420	0,014010	0,016829	0,008003	0,006464	0,009541
65	0,017189	0,015580	0,018798	0,008857	0,007140	0,010575
66	0,019135	0,017452	0,020818	0,009798	0,007991	0,011606
67	0,021271	0,019423	0,023118	0,010834	0,008815	0,012853
68	0,023607	0,021628	0,025587	0,011973	0,009948	0,013998
69	0,026157	0,023966	0,028348	0,013224	0,011019	0,015428
70	0,028930	0,026456	0,031404	0,014596	0,012049	0,017143
71	0,031935	0,029279	0,034592	0,016100	0,013405	0,018795
72	0,035180	0,032290	0,038070	0,017746	0,014810	0,020683
73	0,038668	0,035483	0,041854	0,019545	0,016185	0,022905
74	0,042403	0,039006	0,045801	0,021508	0,017781	0,025235
75	0,046382	0,042614	0,050151	0,023645	0,019432	0,027858
76	0,050601	0,046608	0,054594	0,025969	0,021358	0,030580
77	0,055050	0,050673	0,059427	0,028490	0,023130	0,033850
78	0,059715	0,054772	0,064659	0,031218	0,025261	0,037175
79	0,064579	0,058703	0,070455	0,034164	0,026971	0,041357
80	0,069618	0,062803	0,076433	0,037336	0,029405	0,045268
81	0,074807	0,066557	0,083058	0,040743	0,030888	0,050598
82	0,080115	0,070136	0,090094	0,044390	0,031290	0,057491
83	0,085508	0,073952	0,097064	0,048283	0,033699	0,062866
84	0,090951	0,077208	0,104695	0,052422	0,035589	0,069255
85	0,096407	0,081244	0,111571	0,056808	0,038018	0,075598
86	0,101839	0,084812	0,118866	0,061436	0,039920	0,082952
87	0,107209	0,081151	0,133268	0,066301	0,030003	0,102599
88	0,112483	0,080840	0,144127	0,071393	0,022025	0,120760
89	0,117629	0,078618	0,156640	0,076697	0,009916	0,143478
90	0,122616	0,073950	0,171282	0,082196	-0,000381	0,164774

ANEXO B

Série do CDB nominal, IGP-DI e CDB real para o período 1970 a 2003.

Ano	CDB nominal	IGP DI inflação	CDB real
70	26,6895	19,2672	6,2232
71	25,2329	19,4790	4,8158
72	21,9118	15,7342	5,3378
73	21,4601	15,5344	5,1289
74	27,3185	34,5560	-5,3788
75	31,3734	29,3276	1,5819
76	35,6744	46,2734	-7,2460
77	44,2461	38,7896	3,9315
78	45,9327	40,8053	3,6415
79	51,1069	77,2450	-14,7469
80	55,3553	110,2298	-26,1021
81	93,9376	95,1982	-0,6458
82	103,2828	99,7262	1,7808
83	152,4537	211,0200	-18,8304
84	269,2849	223,8090	14,0440
85	266,9868	235,1279	9,5065
86	71,5123	65,0428	3,9199
87	405,9572	415,9547	-1,9377
88	1011,4587	1037,5258	-2,2916
89	2208,9052	1782,8523	22,6281
90	1790,5976	1476,7089	19,9078
91	540,3565	480,2263	10,3632
92	1597,8968	1157,8363	34,9855
93	2951,7185	2708,1695	8,6729
94	1145,7883	1093,8543	4,3501
95	51,9515	14,7738	32,3922
96	26,4364	9,3264	15,6504
97	22,7593	7,4841	14,2116
98	28,0380	1,7139	25,8806
99	25,2689	19,9882	4,4010
2000	17,1128	9,8007	6,6595
2001	17,7937	10,4022	6,6950
2002	18,0381	26,4118	-6,6241
2003	19,5011	7,6630	10,9955

ANEXO C

Série IBOVESPA nominal e real para o período 1970 a 2003.

Ano	IBOVESPA nominal	IBOVESPA real
70	54,6500	29,6668
71	113,0100	78,2824
72	-44,4200	-51,9762
73	4,8100	-9,2824
74	36,6300	1,5414
75	34,8100	4,2392
76	24,0300	-15,2067
77	40,9500	1,5566
78	4,4700	-25,8053
79	56,6100	-11,6421
80	44,1900	-31,4131
81	113,8100	9,5348
82	63,9000	-17,9377
83	759,2100	176,2555
84	441,5700	67,2498
85	401,5300	49,6533
86	41,2600	-14,4101
87	34,8700	-73,8601
88	2549,4900	132,9169
89	1762,5100	-1,0804
90	308,2700	-74,1062
91	2315,9600	316,3824
92	1015,6500	-11,3040
93	5437,2000	97,1818
94	1059,6500	-2,8650
95	-1,2600	-13,9699
96	63,7500	49,7808
97	44,8300	34,7455
98	-33,4600	-34,5812
99	151,9200	109,9540
0	-10,7200	-18,6890
1	-11,0200	-19,4038
2	-17,0000	-34,3416
3	97,3300	83,2849

ANEXO D

Série do fator atuarial para a idade 30 anos

x	qx	px	lx	Soma	t	vt
20	0,000665	0,999335	999,335	57433,57174	0	1,0000
21	0,000749	0,999251	998,5864981	56434,23674	1	0,9434
22	0,000815	0,999185	997,7726501	55435,65024	2	0,8900
23	0,000863	0,999137	996,9115723	54437,87759	3	0,8396
24	0,000892	0,999108	996,0223272	53440,96602	4	0,7921
25	0,000906	0,999094	995,1199309	52444,94369	5	0,7473
26	0,000907	0,999093	994,2173572	51449,82376	6	0,7050
27	0,000897	0,999103	993,3255442	50455,60641	7	0,6651
28	0,00088	0,99912	992,4514177	49462,28086	8	0,6274
29	0,00086	0,99914	991,5979095	48469,82944	9	0,5919
30	0,000838	0,999162	990,7669504	47478,23154	10	0,5584
31	0,000817	0,999183	989,9574938	46487,46458	11	0,5268
32	0,000801	0,999199	989,1645379	45497,50709	12	0,4970
33	0,00079	0,99921	988,3830979	44508,34255	13	0,4688
34	0,000787	0,999213	987,6052404	43519,95946	14	0,4423
35	0,000793	0,999207	986,8220695	42532,35421	15	0,4173
36	0,000811	0,999189	986,0217568	41545,53215	16	0,3936
37	0,00084	0,99916	985,1934985	40559,51039	17	0,3714
38	0,000884	0,999116	984,3225874	39574,31689	18	0,3503
39	0,000942	0,999058	983,3953556	38589,9943	19	0,3305
40	0,001016	0,998984	982,3962259	37606,59895	20	0,3118
41	0,001108	0,998892	981,3077309	36624,20272	21	0,2942
42	0,001219	0,998781	980,1115167	35642,89499	22	0,2775
43	0,00135	0,99865	978,7883662	34662,78347	23	0,2618
44	0,001504	0,998496	977,3162685	33683,99511	24	0,2470
45	0,001683	0,998317	975,6714452	32706,67884	25	0,2330
46	0,001889	0,998111	973,8284018	31731,00739	26	0,2198
47	0,002124	0,997876	971,7599903	30757,17899	27	0,2074
48	0,002392	0,997608	969,4355404	29785,419	28	0,1956
49	0,002697	0,997303	966,8209728	28815,98346	29	0,1846
50	0,003041	0,996959	963,8808702	27849,16249	30	0,1741
51	0,003429	0,996571	960,5757227	26885,28162	31	0,1643
52	0,003866	0,996134	956,8621369	25924,7059	32	0,1550
53	0,004357	0,995643	952,6930886	24967,84376	33	0,1462
54	0,004908	0,995092	948,0172709	24015,15067	34	0,1379
55	0,005524	0,994476	942,7804235	23067,1334	35	0,1301
56	0,006214	0,993786	936,921986	22124,35298	36	0,1227
57	0,006985	0,993015	930,3775859	21187,43099	37	0,1158
58	0,007845	0,992155	923,0787737	20257,0534	38	0,1092

Continua...

x	qx	px	lx	Soma	t	vt
Continuação.						
59	0,008802	0,991198	914,9538344	19333,97463	39	0,1031
60	0,009868	0,990132	905,9250699	18419,0208	40	0,0972
61	0,011051	0,988949	895,913692	17513,09573	41	0,0917
62	0,012363	0,987637	884,837511	16617,18203	42	0,0865
63	0,013815	0,986185	872,6134808	15732,34452	43	0,0816
64	0,01542	0,98458	859,1577809	14859,73104	44	0,0770
65	0,017189	0,982811	844,3897178	14000,57326	45	0,0727
66	0,019135	0,980865	828,2323206	13156,18354	46	0,0685
67	0,021271	0,978729	810,6149909	12327,95122	47	0,0647
68	0,023607	0,976393	791,4788028	11517,33623	48	0,0610
69	0,026157	0,973843	770,7760918	10725,85743	49	0,0575
70	0,02893	0,97107	748,4775394	9955,081337	50	0,0543
71	0,031935	0,968065	724,5749092	9206,603798	51	0,0512
72	0,03518	0,96482	699,0843639	8482,028889	52	0,0483
73	0,038668	0,961332	672,0521697	7782,944525	53	0,0456
74	0,042403	0,957597	643,5551416	7110,892355	54	0,0430
75	0,046382	0,953618	613,705767	6467,337213	55	0,0406
76	0,050601	0,949399	582,6516415	5853,631446	56	0,0383
77	0,05505	0,94495	550,5766686	5270,979805	57	0,0361
78	0,059715	0,940285	517,6989828	4720,403136	58	0,0341
79	0,064579	0,935421	484,2665002	4202,704153	59	0,0321
80	0,069618	0,930382	450,552835	3718,437653	60	0,0303
81	0,074807	0,925193	416,8483291	3267,884818	61	0,0286
82	0,080115	0,919885	383,4525252	2851,036489	62	0,0270
83	0,085508	0,914492	350,6642667	2467,583964	63	0,0255
84	0,090951	0,909049	318,771001	2116,919697	64	0,0240
85	0,096407	0,903593	288,0392451	1798,148696	65	0,0227
86	0,101839	0,898161	258,7056164	1510,109451	66	0,0214
87	0,107209	0,892791	230,970046	1251,403835	67	0,0202
88	0,112483	0,887517	204,9898423	1020,433789	68	0,0190
89	0,117629	0,882371	180,8770921	815,4439466	69	0,0179
90	0,122616	0,877384	158,6986666	634,5668545	70	0,0169
91	0,161474	0,838526	133,072881	475,8681879	71	0,0160
92	0,200333	0,799667	106,413995	342,7953069	72	0,0151
93	0,239191	0,760809	80,960677	236,3813115	73	0,0142
94	0,278050	0,721950	58,449565	155,4206348	74	0,0134
95	0,316908	0,683092	39,926405	96,97106965	75	0,0126
96	0,355767	0,644233	25,721911	57,04466433	76	0,0119
97	0,394625	0,605375	15,571392	31,32275304	77	0,0113
98	0,433484	0,566516	8,821444	15,75136129	78	0,0106
99	0,472342	0,527658	4,654702	6,929916944	79	0,0100
100	0,511201	0,488799	2,275215	2,275214543	80	0,0095

t	vt*l30	vtl65	vtl31	vtl32	vtl33	vtl34	vtl35	vtl36	vtl37
0	990,7670	844,3897	989,9575	989,1645	988,3831	987,6052	986,8221	986,0218	985,1935
1	933,9222	781,3512	933,1741	932,4369	931,7031	930,9642	930,2092	929,4278	928,6062
2	880,3529	721,4445	879,6574	878,9651	878,2681	877,5559	876,8187	876,0436	875,2184
3	829,8655	664,5409	829,2124	828,5548	827,8829	827,1875	826,4562	825,6777	824,8388
4	782,2759	610,5269	781,6555	781,0216	780,3655	779,6757	778,9412	778,1498	777,2876
5	737,4109	559,3060	736,8128	736,1939	735,5431	734,8502	734,1036	733,2902	732,3963
6	695,1064	510,7967	694,5225	693,9086	693,2549	692,5506	691,7832	690,9399	690,0072
7	655,2099	464,9310	654,6307	654,0141	653,3496	652,6257	651,8301	650,9502	649,9711
8	617,5762	421,6538	616,9944	616,3675	615,6846	614,9341	614,1039	613,1803	612,1483
9	582,0702	380,9193	581,4788	580,8345	580,1265	579,3433	578,4720	577,4984	576,4075
10	548,5649	342,6901	547,9571	547,2892	546,5503	545,7283	544,8098	543,7807	542,6257
11	516,9407	306,9336	516,3105	515,6135	514,8380	513,9715	513,0007	511,9110	510,6865
12	487,0854	273,6197	486,4278	485,6962	484,8788	483,9629	482,9349	481,7798	480,4804
13	458,8942	242,7175	458,2040	457,4328	456,5688	455,5990	454,5092	453,2834	451,9050
14	432,2679	214,1915	431,5404	430,7252	429,8104	428,7823	427,6258	426,3254	424,8636
15	407,1136	188,0000	406,3446	405,4815	404,5116	403,4206	402,1938	400,8147	399,2651
16	383,3439	164,0908	382,5297	381,6147	380,5855	379,4281	378,1271	376,6652	375,0241
17	360,8771	142,4006	360,0139	359,0429	357,9511	356,7236	355,3446	353,7963	352,0599
18	339,6357	122,8530	338,7197	337,6897	336,5317	335,2307	333,7701	332,1320	330,2973
19	319,5469	105,3580	318,5752	317,4828	316,2554	314,8775	313,3320	311,6012	309,6649
20	300,5426	89,8120	299,5121	298,3541	297,0542	295,5963	293,9634	292,1367	290,0961
21	282,5585	76,0997	281,4662	280,2398	278,8644	277,3240	275,6007	273,6756	271,5286
22	265,5341	64,0954	264,3772	263,0796	261,6264	260,0006	258,1845	256,1591	253,9044
23	249,4124	53,6658	248,1883	246,8173	245,2836	243,5703	241,6595	239,5324	237,1687
24	234,1399	44,6728	232,8465	231,3996	229,7833	227,9807	225,9740	223,7441	221,2715
25	219,6665	36,9766	218,3015	216,7767	215,0761	213,1830	211,0793	208,7467	206,1659
26	205,9448	29,2508	204,5063	202,9020	201,1160	199,1314	196,9308	194,4962	191,8092
27	192,9305	22,0669	191,4170	189,7321	187,8598	185,7838	183,4869	180,9521	178,1618
28	180,5820	15,8383	178,9925	177,2263	175,2677	173,1009	170,7095	168,0772	
29	168,8609	10,7873	167,1946	165,3469	163,3027	161,0467	158,5634		
30	157,7307	6,9516	155,9877	154,0592	151,9308	149,5881			
31	147,1582	4,2249	145,3388	143,3310	141,1208				
32	137,1121	2,4129	135,2179	133,1329					
33	127,5641	1,2896	125,5970						
34	118,4878	0,6419							
35		0,2960							

vtl38	vtl39	vtl40	vtl41	vtl42	vtl43	vtl44	vtl45
984,3226	983,3954	982,3962	981,3077	980,1115	978,7884	977,3163	975,6714
927,7315	926,7889	925,7620	924,6335	923,3853	921,9965	920,4448	918,7060
874,3291	873,3604	872,2958	871,1182	869,8080	868,3441	866,7038	864,8629
823,9249	822,9205	821,8096	820,5736	819,1926	817,6451	815,9084	813,9568
776,3401	775,2921	774,1260	772,8232	771,3633	769,7249	767,8837	765,8128
731,4076	730,3076	729,0785	727,7012	726,1556	724,4186	722,4649	720,2679
688,9694	687,8099	686,5106	685,0524	683,4138	681,5706	679,4980	677,1680
648,8772	647,6515	646,2759	644,7300	642,9912	641,0358	638,8377	636,3680
610,9920	609,6942	608,2359	606,5954	604,7508	602,6771	600,3471	597,7314
575,1832	573,8074	572,2598	570,5196	568,5633	566,3652	563,8976	561,1300
541,3277	539,8678	538,2260	536,3805	534,3068	531,9788	529,3679	526,4437
509,3092	507,7604	506,0193	504,0630	501,8668	499,4037	496,6450	493,5588
479,0193	477,3767	475,5312	473,4593	471,1355	468,5330	465,6215	462,3692
450,3554	448,6143	446,6597	444,4675	442,0123	439,2656	436,1973	432,7753
423,2210	421,3771	419,3090	416,9927	414,4015	411,5069	408,2786	404,6850
397,5255	395,5745	393,3893	390,9448	388,2141	385,1685	381,7783	378,0109
373,1835	371,1220	368,8159	366,2397	363,3665	360,1682	356,6140	352,6731
350,1151	347,9395	345,5091	342,7986	339,7813	336,4283	332,7105	328,5972
328,2448	325,9520	323,3949	320,5484	317,3852	313,8778	309,9973	305,7147
307,5019	305,0895	302,4041	299,4200	296,1111	292,4503	288,4101	283,9628
287,8203	285,2869	282,4717	279,3501	275,8965	272,0850	267,8895	
269,1386	266,4828	263,5379	260,2797	256,6840	252,7259		
251,3988	248,6206	245,5469	242,1547	238,4207			
234,5478	231,6480	228,4478	224,9252				
218,5359	215,5168	212,1935					
203,3177	200,1826						
188,8515							

vtl46	vtl47	vtl48	vtl49	vtl50
973,8284	971,7600	969,4355	966,8210	963,8809
916,7547	914,5618	912,0953	909,3216	906,2035
862,7942	860,4672	857,8505	854,9090	851,6039
811,7615	809,2930	806,5179	803,3999	799,8995
763,4839	760,8659	757,9244	754,6222	750,9185
717,7981	715,0231	711,9077	708,4137	704,5004
674,5500	671,6110	668,3148	664,6230	660,4930
633,5953	630,4856	627,0028	623,1066	618,7542
594,7978	591,5121	587,8364	583,7304	579,1510
558,0303	554,5627	550,6891	546,3689	541,5598
523,1723	519,5180	515,4424	510,9054	505,8638
490,1113	486,2664	481,9863	477,2300	471,9562
458,7419	454,7040	450,2170	445,2417	439,7371
428,9661	424,7330	420,0393	414,8464	409,1153
400,6915	396,2635	391,3645	385,9578	380,0063
373,8335	369,2118	364,1111	358,4965	
348,3130	343,5011	338,2043		
324,0576	319,0606			
301,0006				

	Total
vtl30	14947,05
vtl31	14793,66
vtl32	14631,93
vtl33	14461,33
vtl34	14281,32
vtl35	14091,34
vtl36	13890,79
vtl37	13679,05
vtl38	13455,49
vtl39	13219,44
vtl40	12970,21
vtl41	12707,08
vtl42	12429,32
vtl43	12136,16
vtl44	11826,81
vtl45	11500,47
vtl46	11156,28
vtl47	10793,4
vtl48	10410,94
vtl49	10007,99
vtl50	9583,643
vtl65	8521,797

Fator C	Fator R
1,753978925	0,570132278
1,735979224	0,57604376
1,717000225	0,582411106
1,696981121	0,589281747
1,675858071	0,596709243
1,653564393	0,604754193
1,63003051	0,613485449
1,605184144	0,622981484
1,578950019	0,63333227
1,551250177	0,644641344
1,522003681	0,657028635
1,491126672	0,670633836
1,458532438	0,685620678
1,424131344	0,702182425
1,387830766	0,720548949
1,349535263	0,740995828
1,309146625	0,763856379
1,266563919	0,789537729
1,221683534	0,818542587
1,174399456	0,851499032
1,124603552	0,889202242