

Implementação do Método das Frações Parciais para obtenção de propriedades viscoelásticas de misturas asfálticas



ARMÃO, Tiago Pereira¹; THEISEN, Klaus Machado²

¹Aluno do curso de Engenharia Civil - Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias
²Professor do curso de Engenharia Civil - Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias



Introdução

A obtenção de propriedades constitutivas em que é imposta uma carga (tensão) no ensaio e os deslocamentos resultantes (deformação) são medidos, ou seja, no caso de misturas asfálticas, propriedades como a curva de fluência $D(t)$, são de mais fácil obtenção experimental. Contudo, a obtenção das propriedades inversas, como o módulo de relaxação $E(t)$, não é trivial pois exige uma estrutura experimental mais complexa. Como solução para o problema, a inversão das propriedades obtidas experimentalmente pode ser feita através de métodos numéricos, obtendo as propriedades invertidas indiretamente. O Método das Frações Parciais (MFP), apresenta a vantagem de todos os parâmetros serem calculados diretamente, sem arbítrios e/ou métodos iterativos, fornecendo a solução exata do problema.

Objetivo:

Implementar o Método das Frações Parciais, de modo a se obter um procedimento para inversão de propriedades constitutivas viscoelásticas.

Metodologia:

No Método das Frações Parciais (MFP), considera-se $C(t)$ uma compliância qualquer e $H(t)$ o módulo correspondente à compliância $C(t)$. O modelo genérico empregado para descrever a compliância $C(t)$ é uma série de Prony, expressa pela equação 1:

$$C(t) = C_{\infty} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-t/\tau_i} \quad (1)$$

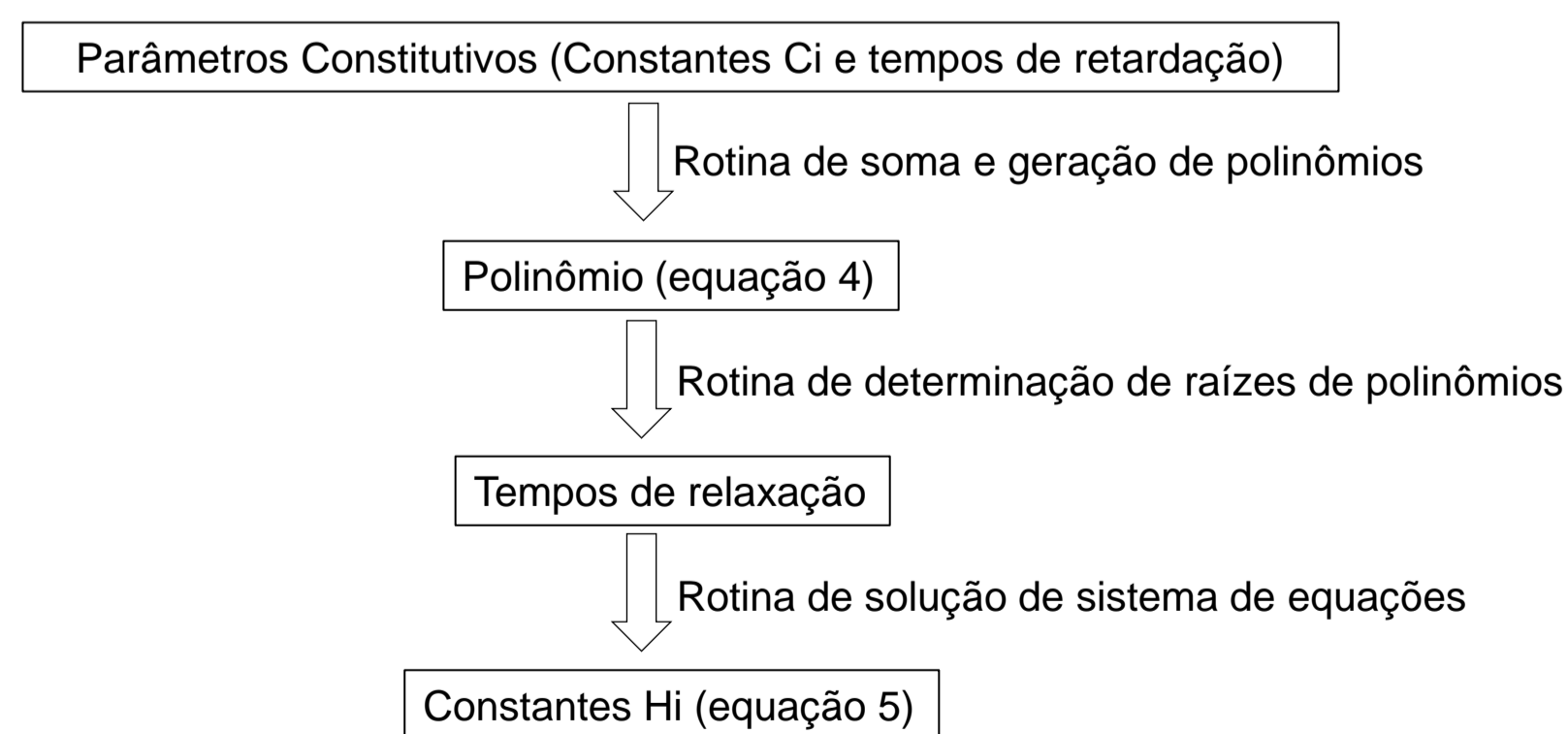
A curva a ser obtida pelo método, denominada de $H(t)$, é modelada conforme a equação 2:

$$H(t) = H_{\infty} + \sum_{i=1}^n H_i e^{-t/\rho_i} \quad (2)$$

As equações 1 e 2 relacionam-se através da equação 3, expressa no domínio tempo.

$$\int C(t-t')H(t)dt' = t \quad (3)$$

As etapas numéricas planejadas para implementação do MFP podem ser simplificadas no fluxograma que segue.



$$i\omega \left[C_{\infty} \left(\prod_{i=1}^n i\omega + \frac{1}{\tau_i} \right) - \sum_{i=1}^n C_i \frac{\prod_{j=1}^n i\omega + \frac{1}{\tau_j}}{i\omega + \frac{1}{\tau_i}} \right] = 0 \quad (4)$$

$$H_{\infty} \left(\prod_{i=1}^n i\omega - r_i \right) + \sum_{k=1}^n H_k \frac{\prod_{j=1}^n i\omega - r_j}{i\omega - r_k} = \frac{1}{C_{\infty} - \sum_{i=1}^n C_i} \prod_{j=1}^n i\omega - \frac{1}{\tau_j} \quad (5)$$

Resultados

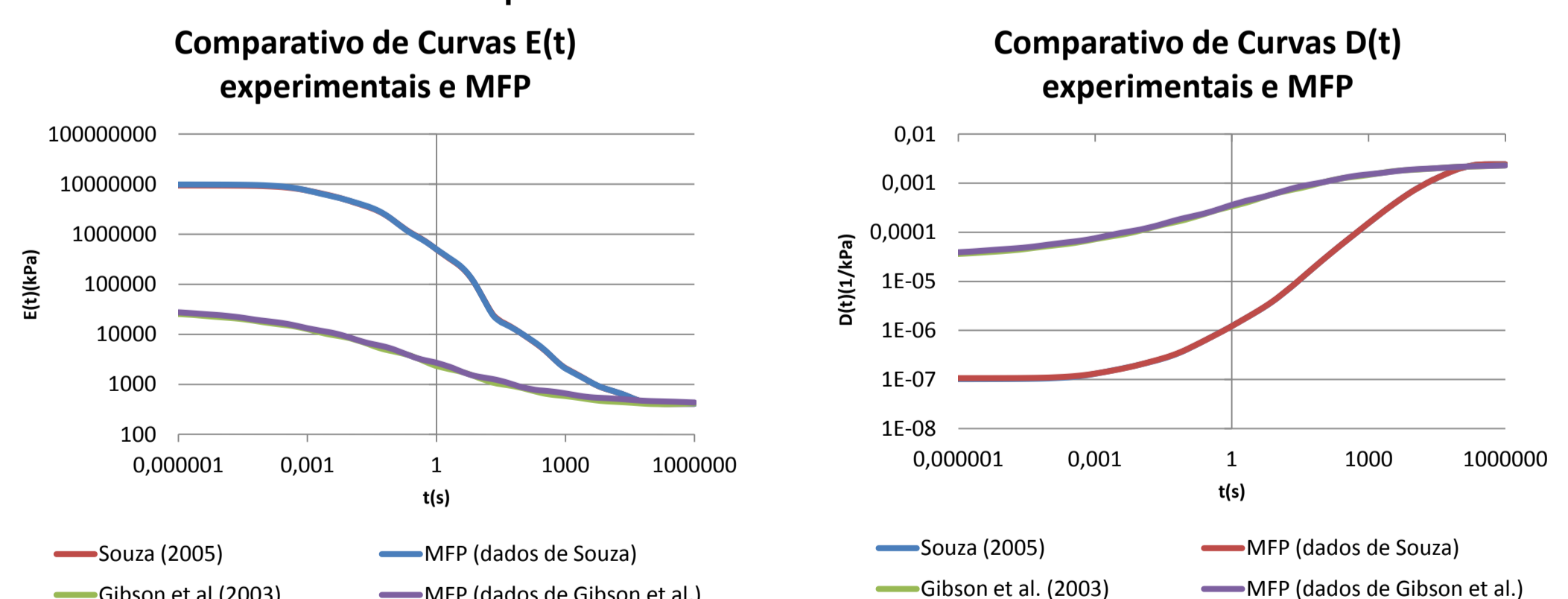
i	Souza (2005)		Resultado MFP		Erro %		Souza (2005)		Resultado MFP		Erro %	
	Ei (kPa)	pi (s)	Ei (kPa)	pi (s)	Erro Ei (%)	Erro pi (%)	Di (1/kPa)	ti (s)	Di (1/kPa)	ti (s)	Erro Di (%)	Erro ti (%)
inf	407.9	-	408.0104	-	0.03	-	2.451E-03	-	2.452E-03	-	0.03	-
1	2179000	0.00087	2887581	0.000871	32.52	0.10	3.487E-08	0.0012	2.631E-08	0.001107	-24.54	-7.68
2	2675000	0.0057	2241803	0.005703	-16.19	0.06	5.978E-08	0.0083	6.789E-08	0.008816	13.56	6.22
3	3125000	0.062	3311254	0.061979	5.96	-0.03	2.509E-07	0.17	2.455E-07	0.162893	-2.15	-4.18
4	992900	0.46	931111.2	0.456321	-6.22	-0.80	8.123E-07	1.3	8.234E-07	1.360029	1.37	4.62
5	447700	4.5	464660.8	4.470473	3.79	-0.66	2.178E-06	34	2.36E-06	32.97842	8.36	-3.00
6	15200	41	13213.0	41.20109	-13.07	0.49	1.699E-05	140	1.625E-05	141.8726	-4.37	1.34
7	9284	240	9722.678	244.5622	4.73	1.90	7.829E-05	1200	7.849E-05	1143.939	0.26	-4.67
8	1748	1900	1617.159	1941.861	-7.49	2.20	5.392E-04	7900	5.448E-04	8031.297	1.05	1.66
9	553.5	24000	563.0136	23745.186	1.72	-1.06	1.813E-03	71000	1.808E-03	71109.56	-0.26	0.15

i	Gibson et al. (2003)		Resultado MFP		Erro %		Gibson et al. (2003)		Resultado MFP		Erro %	
	Ei (kPa)	pi (s)	Ei (kPa)	pi (s)	Erro Ei (%)	Erro pi (%)	Di (1/kPa)	ti (s)	Di (1/kPa)	ti (s)	Erro Di (%)	Erro ti (%)
inf	4.13E+05	-	4.14E+05	-	0.32	-	2.41E-06	-	2.42E-06	-	0.32	-
1	2.16E+06	1.50E-07	-5.19E+04	1.13E-07	-102.40	-24.53	-6.10E-11	1.13E-07	-2.74E-09	1.62E-07	-4595.97	43.36
2	3.85E+06	2.81E-06	3.26E+06	1.88E-06	-15.15	-33.23	4.22E-09	2.11E-06	6.11E-09	3.28E-06	44.74	55.26
3	5.73E+06	5.27E-05	6.17E+06	3.02E-05	7.69	-42.74	1.17E-08	3.95E-05	1.39E-08	6.99E-05	18.65	77.01
4	6.53E+06	9.87E-04	6.48E+06	4.99E-04	-0.84	-49.42	2.37E-08	7.40E-04	3.33E-08	1.58E-03	40.55	112.95
5	5.29E+06	1.85E-02	5.86E+06	7.75E-03	10.92	-58.09	5.67E-08	1.39E-02	8.42E-08	3.62E-02	48.54	160.97
6	2.96E+06	3.47E-01	3.79E+06	1.24E-01	28.21	-64.19	1.41E-07	2.60E-01	2.10E-07	7.68E-01	49.29	195.32
7	1.23E+06	6.49E+00	1.86E+06	2.18E+00	51.34	-66.41	3.40E-07	4.87E+00	4.24E-07	1.35E+01	24.75	176.87
8	4.59E+05	1.22E+02	7.29E+05	4.71E+01	58.97	-61.33	5.96E-07	9.13E+01	5.64E-07	2.03E+02	-5.33	122.73
9	1.80E+05	2.28E+03	2.50E+05	1.17E+03	39.19	-48.75	5.77E-07	1.71E+03	4.91E-07	3.07E+03	-14.89	79.62
10	7.42E+04	4.27E+04	8.91E+04	2.68E+04	20.10	-37.19	3.53E-07	3.20E+04	3.11E-07	4.97E+04	-11.64	55.25
11	-3.21E+04	8.01E+05	3.73E+04	5.52E+05	-216.17	-31.03	1.89E-07	6.00E+05	1.66E-07	8.61E+05	-11.84	43.43
12	1.43E+04	1.50E+07	1.59E+04	1.08E+07	11.48	-27.79	9.04E-08	1.13E+07	8.19E-08	1.55E+07	-9.46	37.97

Para verificação do MFP, foram utilizados os dados das publicações de Souza(2005) e Gibson *et al.* (2003). Para os dados de Souza (2005), os erros percentuais mantiveram-se baixos, sendo máximos em 8% para τ , 25% para D , 2% para ρ e 33% para E . Contudo, para os dados de Gibson *et al.* não se obteve o mesmo sucesso, obtendo-se erros máximos de 195% para τ , 4596% para D , 66% para ρ e 216% para E e constantes E_i negativas foram encontradas. As possíveis razões para tal fato devem-se a questões numéricas de precisão de armazenamento numérico do programa utilizado.

Para testar a sensibilidade do método à precisão numérica, reduziu-se as casas decimais das constantes, e submeteu-se a matriz utilizada na rotina de solução de sistema de equações ao duplo processo de inversão no Excel2007 e no Mathematica 8. Para curvas experimentais de Souza (2005) observa-se um erro percentual entre $1 \times 10^{-14}\%$ e $7 \times 10^{-9}\%$ quando realizadas no Software Excel2007 e entre $6 \times 10^{-6}\%$ e $9 \times 10^{-3}\%$ quando realizadas no software Mathematica, e para a série de Gibson *et al.* (2003), os erros ficaram entre $3 \times 10^{-14}\%$ e $9 \times 10^8\%$ para o Software Excel2007 e entre $3 \times 10^{-6}\%$ e $2 \times 10^9\%$ para o software Mathematica, resultando em dados mais precisos em ambos os casos para o software Excel2007.

Contudo, embora tenham sido encontrados erros significativos nas constantes obtidas pelo MFP, o comportamento das curvas $E(t)$ e $D(t)$ é essencialmente o mesmo quando comparados com os dados da literatura, conforme mostra os gráficos a seguir, comprovando a eficiência das rotinas implementadas.



Conclusão:

- O MFP mostra-se significativamente dependente da precisão de armazenamento numérico do software utilizado na implementação do método;
- O MFP mostra-se sensível ao aumento no número de parâmetros da série, devido a grande variação na ordem de grandeza das constantes.
- Embora a existência de erros significativos nas constantes obtidas, os resultados aproximam-se dos resultados reais, comprovando a eficácia do método.