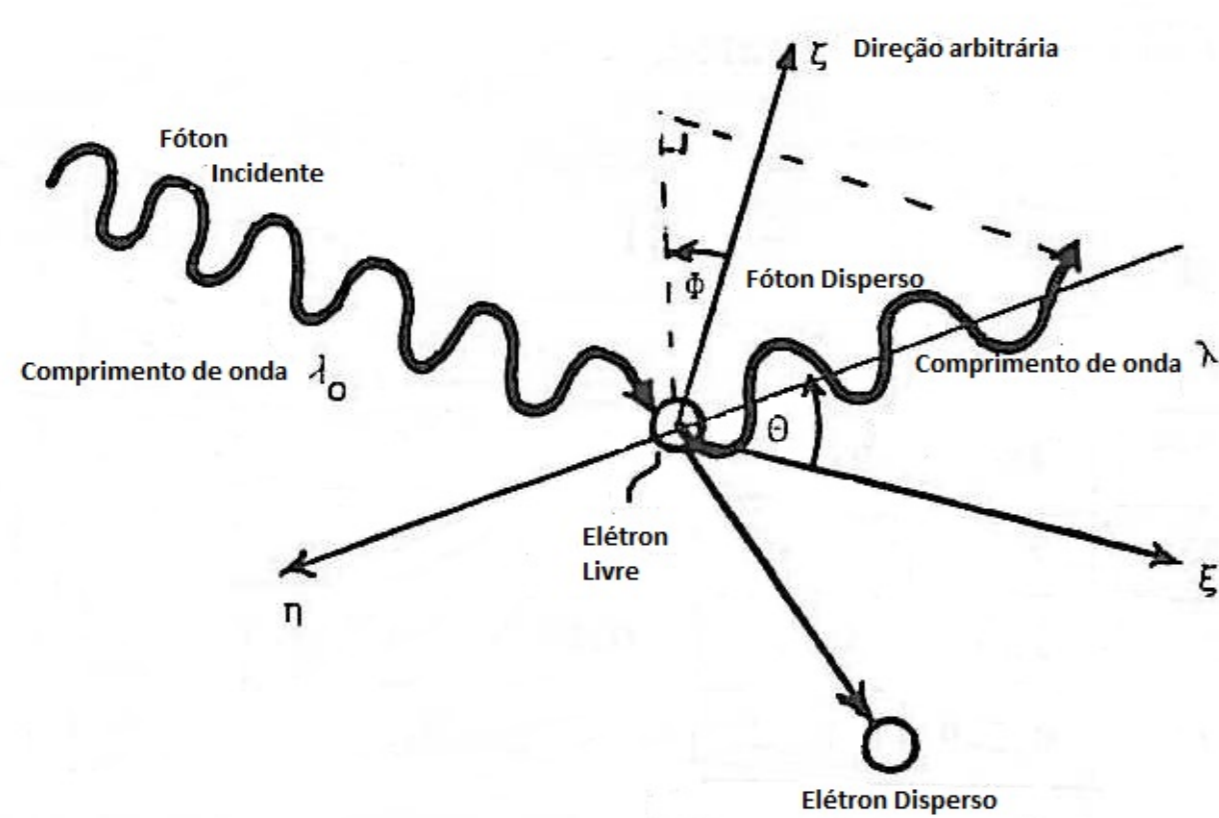


## Motivação:

Tratamento de problemas de transporte de fótons com aplicações no cálculo de doses em radioterapia.

Na modelagem do transporte de fótons para tratamento de câncer por radioterapia, em faixas de baixa energia (1-10 MeV), predomina o espalhamento Compton.

**Espalhamento Compton:** consiste em uma colisão entre o fóton e um elétron livre onde o fóton sobrevive e altera sua direção.



**Figura 1:** Espalhamento Compton: uma colisão elástica entre um fóton e um elétron. A direção do fóton sofre uma alteração formando o ângulo  $\theta$  e a relação da mudança do comprimento de onda é dada por  $\lambda - \lambda_0 = 1 + \cos\theta$  [4].

Neste caso, as interações das partículas seguem a lei de espalhamento de Klein-Nishina, cuja formulação matemática determina dependência dos limites de integração com respeito ao comprimento de onda caracterizando uma equação integral de Volterra.

## Equação Integral

Uma equação integral, de acordo com [1], é da forma:

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\phi(s)ds = f(x) \quad (1)$$

onde  $\phi(x)$  é uma função desconhecida e  $K(x, s)$  é o núcleo da equação. As características da equação dependem das propriedades do núcleo.

## Equação Integral de Fredholm

$K(x, s)$  contínuo em  $a \leq x \leq b$  e  $a \leq s \leq b$  ou, se descontínuo e a integral dupla

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| dx ds$$

for finita, a equação (1) é chamada equação integral de Fredholm[1].

Um caso especial da equação de Fredholm é chamado equação integral de Volterra.

## Equação Integral de Volterra

$K(x, s)$  é definido tal que  $K(x, s) = 0$  quando  $s > x$ . A equação (1), de acordo com [2], assume a forma:

$$\phi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\phi(s)ds = f(x). \quad (2)$$

Assim como as equações de Fredholm, as equações integrais de Volterra podem ser resolvidas pelo método de aproximações sucessivas.

## Solução por Aproximações Sucessivas

Para este método clássico [1] assume-se que

$$\int_a^b |K^2(x, s)| ds < C_1$$

e

$$\int_a^b |f^2(x)| < \infty.$$

Para aproximações de ordem zero temos

$$\phi_0(x) = f(x)$$

e a equação (1) torna-se

$$\phi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\phi_0(s)ds. \quad (3)$$

Na forma geral temos:

$$\phi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\phi_n(s)ds. \quad (4)$$

Se as aproximações sucessivas tendem a um limite, este limite é a solução para a equação (1), caso contrário, o método não tem significado.

Verificando detalhadamente o método temos, de modo geral:

$$\phi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, s)f(s)ds, \quad (5)$$

onde

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_r(x, t)K_{m-r}(t, s)dt,$$

e  $r < m$ .

Assumindo que as aproximações sucessivas convergem e, convergem para o limite da equação (5), a solução da equação (1) na forma de uma série finita será:

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s)f(s)ds. \quad (6)$$

O estudo da velocidade de convergência das aproximações sucessivas e o resultado para uma convergência uniforme encontra-se em [1].

## Abordagem Alternativa: Soluções por Polinômios de Chebyshev

A integração numérica de  $f(x)$  é baseada na aproximação por polinômios de Chebyshev [3]:

$$f(x) = \sum_{r=0}^N a_r T_r(x), \quad (7)$$

onde

$$a_r = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_r(x_j)$$

e

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), j = 0, \dots, N.$$

$T_r(x)$  é o  $r$ -ésimo polinômio de Chebyshev,  $x_j$  são os pontos para a quadratura de Clenshaw e Curtis e  $\sum^N$  é tal que o primeiro e o último termo do somatório serão considerados pela metade.

As integrais são derivadas a partir de:

$$\int_{-1}^x T_n(t)dt = \begin{cases} \frac{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} & \text{se } n \geq 2 \\ \frac{1}{4}[T_2(x) - 1] & \text{se } n = 1 \\ T_1(x) + 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (8)$$

e

$$\int_{-1}^x f(t)dt = \sum_{j=0}^N a_j \int_{-1}^x T_j(t)dt = \sum_{r=0}^{N+1} C_r T_r(x) \quad (9)$$

onde

$$C_0 = \sum_{j=0, j \neq 1}^N \frac{(-1)^{j+1} a_j}{j^2 - 1} - \frac{1}{4} a_1;$$

$$C_k = \frac{a_{k-1} - a_{k+1}}{2k}, k = 1, 2, \dots, N-2;$$

$$C_{N-1} = \frac{a_{N-2} - \frac{1}{2} a_N}{2(N-1)};$$

$$C_N = \frac{a_{N-1}}{2N};$$

$$C_{N+1} = \frac{\frac{1}{2} a_N}{2(N+1)}.$$

Alocando em matrizes, temos:

$$[\int_{-1}^x f(t)dt] = B[f], \quad (10)$$

onde  $B$  é matriz quadrada de ordem  $(N+1)$  e  $[f]$  é dada por  $f_j = f(-\cos\frac{j\pi}{N}), j = 0, \dots, N$ .

## Conclusões

Este estudo foi essencial para o entendimento do que são as equações integrais de Volterra e alguns resultados clássicos sobre esta teoria. A partir daí, foram estudadas soluções através de métodos clássicos (aproximações sucessivas) e, abordagens alternativas em expansão de Chebyshev. Na continuação do projeto, pretende-se aplicar a técnica da expansão por polinômios de Chebyshev na equação integral específica associada ao problema de radioterapia.

## Referências

- [1] S. G. Mikhlin, "Integral Equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology", Pergamon Press; London; 1957.
- [2] F. G. Tricomi "Integral Equations", Interscience Publishers; Grã - Bretanha; 1957.
- [3] S. E. El-gendi, "Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations", The Computer Journal, 282-287, 1969.
- [4] J. Wood, "Computational Methods In Reactor Shielding", Pergamon Press, USA, 1982.