Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Classificação dos Espaços Homaloidais de Grau 2

por

Leandro Colau Merlo

Porto Alegre, março de 2004

Dissertação submetida por Leandro Colau Merlo* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Ivan Edgardo Pan Perez

Banca Examinadora:
Dr. Leonardo Prange Bonorino
Dr. Luis Gustavo Doninelli Mendes
Dr. Gérard Gonzalez-Springberg

Data da Defesa: 15 de março de 2004.

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq

Aos meus pais Rui e Fani,
aos meus irmãos Alex e Franciele
e a minha querida Cíntia.

Agradecimentos

.

Agradeço ao professor Ivan Pan pela valiosa orientação e amizade.

A todos professores que contribuíram para minha formação, em especial ao professor Marcos Sebastiani.

Aos professores da banca, Leonardo Prange Bonorino, Luis Gustavo Doninelli Mendes e Gérard Gonzalez-Sprinberg, que através de suas sugestões e conselhos enriqueceram este trabalho.

Aos ex-colegas da graduação e aos colegas da Pós pela amizade e companheirismo. Principalmente ao Rodriguinho pelas suas dicas na elaboração da dissertação.

À Cíntia pela paciência, companheirismo e ajuda na digitação.

À Rosane, secretária do programa, pela disponibilidade e ajuda.

Resumo

Seja S o espaço vetorial das formas quadráticas em três variáveis complexas. Um espaço homaloidal de grau dois é um subespaço vetorial de dimensão três do espaço S, tal que a transformação racional associada a uma base qualquer deste subespaço define uma transformação birracional do plano projetivo.

A ação natural de $Gl(3, \mathbb{C})$ na grassmanniana $Gr(3, S)$ deixa estáveis, o subconjunto dos espaços homaloidais de grau dois, denotado $\mathcal{H}$, e seu fecho Zariski $\overline{\mathcal{H}}$.

Neste trabalho descrevemos as órbitas da ação natural em $\overline{\mathcal{H}}$ e obtemos uma classificação das transformações birracionais quadráticas do plano projetivo.

Abstract

Let S be the vector space of quadratic forms in three complex variables. A homaloidal space of degree two is a three dimensional vector subspace of S, such that the rational transformation associated to any of its basis is a biratinal transformation of the complex projective plane.

The natural action of $Gl(3, \mathbb{C})$ in the grassmannian $Gr(3, S)$ leave invariants, the subset of all homaloidal spaces of degree two, denoted $\mathcal{H}$, and its Zariski closure $\overline{\mathcal{H}}$.

In this work we describe the orbits of the natural action in $\overline{\mathcal{H}}$ and we obtain a classification of the quadratic birational transformations of the plane.

Conteúdo

Introdução

Um subespaço vetorial Λ, do espaço S das formas quadráticas nas variáveis x_0, x_1 e x_2, será chamado *espaço homaloidal de grau* 2 se para qualquer base $\{f_0, f_1, f_2\}$ de Λ a aplicação racional $\mathcal{T}_\Lambda : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ dada por

$$x \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : f_2(x))$$

é birracional. O conjunto de tais subespaços constitui um subconjunto $\mathcal{H}$ da grassmanniana $Gr(3, S)$.

Na literatura clássica sobre o tema encontra-se três exemplos de espaços homaloidais de grau 2: o genérico, o tangente e o osculador (ver [6], cap. III e [7], cap. I). Demonstra-se que a menos de mudança de coordenadas lineares estes são os únicos exemplos possíveis; e afirma-se que o tangente e o osculador são casos limites do primeiro, que por esta razão é chamado genérico. A prova deste fato parece estar implícita em argumentações de degeneração de coeficientes, consideradas "evidentes" sem, no entanto, ter sido explicitada ([6]).

Por outro lado a ação natural (contravariante) de $Gl(3)$ em S induz uma ação na grassmanniana que deixa $\mathcal{H}$ estável (proposição 2.9).

O objetivo desta dissertação é descrever as órbitas de $Gl(3)$ em $\mathcal{H}$ e o grafo de incidências entre elas, obtendo entre outras coisas o resultado clássico supracitado, como um corolário. Nossa apresentação esta baseada num trabalho manuscrito de Thierry Vust ([1]).

O primeiro capítulo desta monografia destina-se a apresentar as noções básicas de geometria algébrica e ações de grupos algébricos, indispensáveis ao desenvolvimento dos resultados que serão apresentados.

No segundo capítulo, desenvolvemos a teoria necessária sobre espaços homaloidais de grau 2 para demonstrarmos os seguintes resultados (ver teorema 2.17):

a) o fecho de Zariski de $\mathcal{H}$ é uma variedade projetiva irredutível de dimensão 6.

b) a ação de $Gl(3)$ em $\overline{\mathcal{H}}$ possui 5 órbitas: $\mathcal{G}en$, $\mathcal{T}an$, $\mathcal{O}sc$, $\mathcal{L}in$ e $\mathcal{S}ing$; cujas dimensões são respectivamente 6, 5, 4, 2 e 2 (ver proposição 2.14).

Além disso o grafo de incidências entre as órbitas acima é :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}en \arrow[d, dash] & \\
 & \mathcal{T}an \arrow[d, dash] & \\
 & \mathcal{O}sc \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathcal{L}in & & \mathcal{S}ing.
\end{tikzcd}$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções de Geometria Algébrica

Esta seção será dedicada a introduzir as noções básicas de geometria algébrica necessárias para abordar o objetivo principal desta monografia. Aqui, a maior parte dos resultados serão lembrados sem demonstração, e neste caso, quando não indicarmos a bibliografia explicitamente, as demonstrações e maiores detalhes podem ser encontrados nos capítulos I ou II de [2].

Definição 1.1. O conjunto $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}$ visto sem a estrutura de espaço vetorial é dito *espaço afim de dimensão* n e é denotado por $\mathbb{A}^n$.
Um conjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é dito um *fechado afim* se existe um número finito de polinômios $f_0, ..., f_s \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ tais que

$$X = V(f_0, ..., f_s) := \{x \in \mathbb{A}^n : f_i(x) = 0,\ i = 0, ..., s\}.$$

Os fechados afins de $\mathbb{A}^n$ são os fechados de uma topologia em $\mathbb{A}^n$ chamada *topologia de Zariski* de $\mathbb{A}^n$.

Definição 1.2. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão $n + 1$. Definimos o *espaço projetivo* $\mathbb{P}(V)$ associado a V como sendo o quociente de $V \setminus \{0\}$ módulo a seguinte relação de equivalência

$$u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{tal que} \quad u = cv.$$

A classe de equivalência de $v \in V \setminus \{0\}$ em $\mathbb{P}(V)$ será denotada por $[v]$, e a aplicação canônica de $V \setminus \{0\}$ em $\mathbb{P}(V)$ por $[\ ]_V$ ou simplesmente por $[\ ]$

quando isso não causar confusão. Se $V = \mathbb{C}^{n+1}$ denotamos o espaço $\mathbb{P}(V)$ por $\mathbb{P}^n$ e o denominamos *espaço projetivo complexo de dimensão n*. Neste caso denotaremos a classe do elemento $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ por $(x_0 : ... : x_n)$. $x_0, ..., x_n$ são ditas coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$.

É imediato ver que o espaço $\mathbb{P}(V)$ parametriza os subespaços vetoriais de dimensão 1 de V.

Seja $T : V \to W$ é uma aplicação entre espaços vetoriais complexos, para a qual existe uma função $\alpha : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$T(cv) = \alpha(c)T(v), \quad \forall c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \, \forall v \in V \setminus \{0\},$$

e seja $B_T = \{[v]_V : T(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(V)$. Então fica bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} \ : \mathbb{P}(V) \setminus B_T & \longrightarrow & \mathbb{P}(W). \\ [v]_V & \longmapsto & [T(v)]_W \end{array}$$

Definição 1.3. A aplicação racional $\mathcal{T} : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(W)$ é chamada *projetivização* de T, e o conjunto B_T é dito *conjunto de pontos base* de $\mathcal{T}$.

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então T satisfaz as hipóteses necessárias para projetivização e o conjunto B_T coincide com $[kerT]_V$. No caso em que T é um isomorfismo linear, então $B_T = \emptyset$, e a projetivização T é uma bijeção. Quando $B_T \neq \emptyset$ e T é sobrejetora, então sua projetivização costuma ser denotada por π e é chamada de projeção de $\mathbb{P}(V)$ em $\mathbb{P}(W)$ com centro B_T.

Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão $n+1$. Fixada uma base ordenada $B = \{v_0, ..., v_n\}$ de V, podemos enxergar os elementos de $\mathbb{P}(V)$ como elementos de $\mathbb{P}^n$ através da correspondência

$$[\alpha_0 v_0 + ... + \alpha_n v_n] \mapsto (\alpha_0 : ... : \alpha_n).$$

Dito de outra forma, cada elemento $[v] \in \mathbb{P}(V)$ é visto como sendo um elemento $x \in \mathbb{P}^n$, onde x é a imagem de $[v]$ pela projetivização do isomorfismo linear que leva cada $v_i \in B$ no correspondente e_i da base canônica de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Definição 1.4. Escolher coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}(V)$ consiste em identifcar os elementos de $\mathbb{P}(V)$ com os elementos de $\mathbb{P}^n$ através do procedimento descrito acima.

A escolha de coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}(V)$ permite, sem perda de generalidade, reduzir nosso estudo a $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.5. Um conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é dito *fechado projetivo*, ou simplesmente *fechado*, se existe um número finito de polinômios homogêneos $f_0, ..., f_s \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ tais que

$$X = V(f_0, ..., f_s) := \{x \in \mathbb{P}^n : f_i(x) = 0,\ i = 0, ..., s\}.$$

A exemplo do que ocorre para os fechados afins em $\mathbb{A}^n$, os fechados projetivos de $\mathbb{P}^n$ são os fechados de uma topologia em $\mathbb{P}^n$ chamada *topologia de Zariski* de $\mathbb{P}^n$. A partir de agora consideraremos apenas esta topologia em $\mathbb{P}^n$.

Se $E \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é um subespaço vetorial de dimenção $k + 1$, então sua projeção $[E] \subset \mathbb{P}^n$, também denotada por $\mathbb{P}(E)$, será chamada de *espaço k-linear*. Dizendo de outra forma, um conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é um espaço k-linear se e somente se X é definido como os zeros de um conjunto LI formado por $n - k$ polinômios lineares $L_1, ..., L_{n-k} \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

As *retas* de $\mathbb{P}^n$ são os espaços 1-lineares.

Exemplo 1.6. Dado $i \in \{0, ..., n\}$, defina

$$\mathbb{A}^n_i = \{(x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}.$$

Note que $\mathbb{A}^n_i$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^n$ através da aplicação

$$(x_0 : ... : x_n) \longmapsto (x_0/x_i : ... : 1 : ... : x_n/x_i).$$

Isso mostra que sempre podemos considerar $\mathbb{A}^n$ como um subconjunto aberto de $\mathbb{P}^n$ e que a topologia de Zariski de $\mathbb{A}^n$ é a topologia de Zariski de $\mathbb{P}^n$ induzida em $\mathbb{A}^n$. Os abertos $\mathbb{A}^n_i$ são chamados de cartas locais de $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.7. Um conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é dito *variedade quase projetiva* , ou simplesmente *variedade*, se X é um aberto de um fechado projetivo. Neste caso dizemos que o conjunto $Y \subset X$ é *subvariedade* de X se Y é uma variedade como subconjunto de $\mathbb{P}^n$.

Uma subvariedade $Y \subset X$ é chamada *hipersuperfície* de X se $Y = X \cap V(f)$ para algum $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

Os fechados projetivos e os fechados afins são claramente variedades.

Definição 1.8. Dada uma variedade X e dada uma família $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos de X, escreveremos

$$\begin{array}{c} X_\alpha \\ | \\ X_\beta \end{array}$$

para dizer que $X_\beta \subset \overline{X}_\alpha$ na topologia de Zariski induzida em $\overline{X}$. Esta representação é chamada de *grafo de incidências* da família $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Definição 1.9. Um subconjunto X de um espaço topológico Y é dito *redutível* se existem fechados distintos X_1 e X_2 de X tais que $X = X_1 \cup X_2$. Caso contrário X é dito *irredutível.*

Um conjunto irredutível é claramente conexo, porém a recíproca não é verdadeira.

As duas próximas proposições que seguem decorrem diretamente das definições.

Proposição 1.10. *Seja X um subconjunto de um espaço topológico Y. Então são equivalentes:*

i) X é irredutível;
ii) $\bar{X}$ é irredutível;
iii) Qualquer aberto não vazio de X é denso em X;
iv) Quaisquer dois abertos não vazios de X tem interseção não vazia.

Proposição 1.11. *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se Z é um conjunto irredutível de X então $\varphi(Z)$ é um conjunto irredutível de Y.*

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade, prova-se que X se escreve, de forma única, como uma união finita de variedades irredutíveis $X_1, ..., X_k$, onde $X_i \nsubseteq X_j$ se $i \neq j$. Neste caso, cada X_i é chamada *componente irredutível* de X.

Proposição 1.12. *O produto cartesiano de um número finito de conjuntos irredutíveis também é irredutível.*

Definição 1.13. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é *regular em* $p \in X$ se existe uma vizinhança aberta U de p em X e existem polinômios homogêneos $g, h \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ tais que h não se anula em U e $f|U = (\frac{g}{h})$.

Dizemos que f é *regular em* X se for regular em todos pontos de X.

Definição 1.14. Se X e Y são variedades, com $Y \subset \mathbb{P}^m$, dizemos que uma aplicação $\mathcal{T} : X \to Y$ é *regular* se para cada ponto $p \in X$ existe uma vizinhança aberta U de p em X e existem $f_0, ..., f_m$, funções regulares em U, tais que

$$\mathcal{T}(x) = (f_0(x) : ... : f_m(x)) \quad \forall x \in U$$

onde pelo menos uma f_i não se anula nos pontos de U.

Abaixo apresentamos o enunciado de algumas proposições, cuja demonstração pode ser encontrada nos capítulos I ou II de [2].

Proposição 1.15. *Se X é uma variedade irredutível então $\mathcal{T} : X \to \mathbb{P}^m$ é uma aplicação regular se para cada ponto $p \in X$ existe uma vizinhança aberta U de p em X e existem $F_0, ..., F_s \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau, tais que*

$$\mathcal{T}(x) = (F_0(x) : ... : F_m(x)) \quad \forall x \in U,$$

onde pelo menos um F_i não se anula em p.

Proposição 1.16. *As aplicações regulares são contínuas.*

Proposição 1.17. *Se duas aplicações regulares definidas em uma variedade irredutível coincidem em um aberto então elas são iguais.*

Proposição 1.18. *Se $\mathcal{T} : X \to Y$ é uma aplicação regular e $\mathcal{T}(X)$ é denso em Y, então $\mathcal{T}(X)$ contém um aberto de Y.*

Definição 1.19. Uma aplicação regular $\mathcal{T} : X \to Y$ é dita *isomorfismo* se é uma bijeção com inversa regular. Neste caso X e Y são ditas isomorfas. Uma variedade X é chamada *variedade afim* quando for isomorfa a um fechado afim, e é chamada *variedade projetiva* quando for isomorfa a um fechado projetivo.

Vejamos alguns exemplos de aplicações regulares.

Exemplo 1.20. Dados inteiros positivos m e n, definimos os conjuntos

$$I = \{(i_0, ..., i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1} : i_0 + ... + i_n = m\}$$

e

$$J = \{0, ..., m\} \times \{0, ..., n\}.$$

Para $M = card(I) - 1$ e $N = card(J) - 1$, indexemos as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^M$ e $\mathbb{P}^N$ pelos elementos de I e J respectivamente. Sejam

$$v_m : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^M \quad \text{e} \quad s : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

as aplicações cujas respectivas funções coordenadas, v_α e s_β , são dadas por

$$v_\alpha(x_0 : ... : x_n) = x_0^{i_0} ... x_n^{i_n} \qquad se \quad \alpha = (i_o, ..., i_n);$$

$$s_\beta((x_0 : ... : x_m)(y_0 : ... : y_n)) = x_i y_j \quad se \quad \beta = (i, j).$$

As aplicações s e v_m são chamadas respectivamente de *mergulho de Segre* de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ em P^N e de m-ésimo *mergulho de Veronese* de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^M$. Prova-se que as aplicações s e v_m são isomorfismos com suas respectivas imagens, e as variedades $S_{m,n} = s(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n)$ e $V_{m,n} = v_m(\mathbb{P}^n)$ são chamadas de *variedade de Segre* e de *variedade de Varonese* respectivamente.

Definição 1.21. Se X é uma variedade irredutível e $\mathcal{O}_X$ é o conjunto formado pelas funções regulares em alguma vizinhança U de X. Então o conjunto $\mathbb{C}(X)$ definido como o quociente de $\mathcal{O}_X$ módulo a relação de equivalência

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, U \text{ aberto de X tal que } f|U = g|U$$

é dito *corpo de frações de* X .

O conjunto $\mathbb{C}(X)$ é de fato um corpo e além disso é uma extensão algébrica de $\mathbb{C}$.

Definição 1.22. A *dimensão* de uma variedade irredutível X, denotada por $dim\, X$, pode ser definida como o grau de transcendência de $\mathbb{C}(X)$ sobre $\mathbb{C}$. Se X não é irredutível então a dimensão de X é definida como o supremo das dimensões das componentes irredutíveis de X.
Se Y é uma subvariedade de X, definimos a codimensão de Y em X como

$$codim_X Y := dim\, X - dim\, Y.$$

As variedades de dimensão 1 são também chamadas de *curvas*.

Observe que se X é irredutível e $U \subset X$ é um aberto então

$$\mathbb{C}(U) \approx \mathbb{C}(X)$$

e portanto

$$dim\, U = dim\, X.$$

Temos ainda, que se X e Y são variedades isomorfas então

$$\mathbb{C}(X) \approx \mathbb{C}(Y)$$

e conseqüentemente

$$dim\, X = dim\, Y.$$

Abaixo seguem alguns resultados úteis.

Proposição 1.23. *Se X e Y são variedades irredutíveis então*

$$dim\, X \times Y = dim\, X + dim\, Y.$$

Proposição 1.24. *Se Y é uma hipersuperfície de X então toda componente irredutível de Y tem codimensão 1 em X.*

Proposição 1.25. (Teorema da dimensão das fibras) *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação regular e sobrejetora entre variedades irredutíveis. Então $dim\, X \geq dim\, Y$ e*

$i)$ Dado $y \in Y$ temos

$$dim\, F \geq dim\, X - dim\, Y$$

para toda componente irredutível F de $f^{-1}(y)$;

$ii)$ Existe um aberto $U \subset Y$ tal que

$$dim\, f^{-1}(y) = dim\, X - dim\, Y$$

para todo $y \in U$.

Lembramos que o gráfico de uma aplicação $f : X \to Y$ é o conjunto

$$Graf(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Com isso temos o seguinte:

Corolário 1.26. *Seja X uma variedade irredutível e seja $f : X \to Y$ uma aplicação, onde Y é um conjunto que contém uma variedade irredutível V satisfazendo*

$$V \subset Im(f) \subset \overline{V}.$$

Se o gráfico $Graf(f)$ da aplicação f é uma variedade, então existe um aberto $U \subset V$ tal que

$$dim\, f^{-1}(y) = dim\, X - dim\, V$$

para todo $y \in U$.

Demonstração:

Sejam p_1 e p_2 as projeções de $Graf(f)$ em X e em Y respectivamente. Temos o seguinte o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & Graf(f) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Como $Graf(f)$ é uma variedade, segue que p_1 e p_2 são aplicações regulares. É imediato verificar que p_1 é uma bijeção entre $Graf(f)$ e X. Logo, da proposição 1.11, segue que $Graf(f)$ é irredutível. Pelo teorema da dimensão das fibras aplicado a p_2 segue que existe um aberto $U \subset V$ tal que

$$dim\, {p_2}^{-1}(y) = dim\, Graf(f) - dim\, V.$$

Por outro lado, aplicando o teorema da dimensão das fibras à p_1 obtemos

$$dim\, f^{-1}(y) = dim\, {p_2}^{-1}(y)$$

e

$$dim\, Graf(f) = dim\, X.$$

Isso prova o corolário. ■

Definição 1.27. Seja $X = V(f_1, ..., f_s) \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Dado $P \in X$ definimos o *espaço tangente projetivo de X em P* como sendo o conjunto

$$T_pX = \{x \in \mathbb{P}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p)x_i = 0 \quad k = 1, ..., s\}.$$

Observe que se X é irredutível então

$$dim\, T_p X \geq dim\, X.$$

Definição 1.28. Seja X uma variedade irredutível. Dizemos que $P \in X$ é um *ponto singular* de X se

$$dim\, T_p X > dim\, X.$$

Caso contrário, dizemos que P é um *ponto liso* de X.

Se X é uma variedade qualquer, dizemos que $P \in X$ é um *ponto singular* de X, se P é ponto singular das componentes irredutíveis que o contém.

A variedade X é dita *lisa* se todos seus pontos são lisos, caso contrário, é dita *singular*.

Definição 1.29. Sejam X e Y variedades irredutíveis. Chamamos de *aplicação racional* de X em Y, e denotamos por $\mathcal{T} : X \dashrightarrow Y$, à uma aplicação regular $\mathcal{T} : U \to Y$, onde U é um aberto não vazio de X.

O conjunto $B_{\mathcal{T}}$ formado pelos pontos de X onde $\mathcal{T}$ não esta definida é dito *conjunto de pontos base* de $\mathcal{T}$ e o conjunto $\mathcal{T}(X \setminus B_{\mathcal{T}})$ é chamado de *imagem* de $\mathcal{T}$.

Dizemos que a aplicação racional $\mathcal{T} : X \dashrightarrow Y$ é *birracional* quando existir uma aplicação racional $\mathcal{T}^* : Y \dashrightarrow X$ tal que

$$\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T} = Id \quad \text{e} \quad \mathcal{T} \circ \mathcal{T}^* = Id$$

nos pontos onde a composição está bem definida. Neste caso as variedades X e Y são ditas *birracionais.*

Segue que se X e Y são birracionais então $dim\, X = dim\, Y$.

As aplicações birracionais de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^n$ são também chamadas de *transformações de Cremona.*

As projeções são exemplos imediatos de aplicações racionais.

Proposição 1.30. *O conjunto dos pontos base uma aplicação racional tem codimensão maior ou igual a 2.*

Definição 1.31. Seja V um espaço vetorial complexo de dimenção n. A grassmanniana $Gr(k, V)$ é definida como sendo o conjunto formado pelos subespaços vetoriais de V que tem dimensão k.

No caso $V = \mathbb{C}^n$ denotaremos $Gr(k, V)$ por $Gr(k, n)$.

É possível provar, (ver [5], pág. 64 e pág. 138) que o conjunto $Gr(k, V)$ é uma variedade projetiva de dimensão $k(n - k)$.

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade irredutível de dimensão k, então como consequência do teorema de Bézout (ver [4], teorema 5.16) existe um inteiro positivo d e um aberto $U \subset Gr(n - k, n + 1)$ tal que

$$card(\mathbb{P}(L) \cap X) = d \quad \forall L \in U.$$

Definição 1.32. Nas condições acima, o número d é chamado de *grau de X* e será denotado por $deg\, X$.

Proposição 1.33. *([5],pág.231 - 233) Se $S_{m,n}$ e $V_{m,n}$ são respectivamente a variedade de Segre e a variedade de Veronese , então*

$$deg\, V_{m,n} = m^n \quad e \quad deg\, S_{m,n} = \binom{m+n}{n}.$$

Proposição 1.34. *([4], proposição 3.17 e corolário 5.6) Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível de dimensão k e seja E um $(n - k - 1)$-espaço linear disjunto de X. Se $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^k$ é a projeção de centro E, então $\pi|_X$ é uma aplicação regular e existe um aberto $U \subset \mathbb{P}^k$ tal que*

$$card\, (\pi|_X)^{-1}(u) = deg\, X \quad \forall u \in U.$$

Vejamos mais um exemplo de variedade projetiva.

Considere os espaços projetivos $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^{n-1}$, com coordenadas homogêneas $x_0, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ respectivamente. Tome $P_0 = (1 : 0 : ... : 0) \in \mathbb{P}^n$ e seja $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^n)$ a variedade dada pelas equações

$$x_i y_j = x_j y_i \quad i, j = 1, ..., n.$$

É imediato verificar que o conjunto $E := P_0 \times \mathbb{P}^{n-1}$ está contido em $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^n)$.

Definição 1.35. A aplicação $\sigma : \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^n$, definida pela restrição a $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^n)$ da projeção na primeira coordenada $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$, é chamada explosão de $\mathbb{P}^n$ com centro P_0.

Proposição 1.36. *Com as notações acima temos que:*
i) A variedade $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^n)$ é irredutível;
ii) A aplicação σ define um isomorfismo entre $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^n) \setminus E$ e $\mathbb{P}^n \setminus P_0$;
iii) A subvariedade E parametriza o conjunto das retas em $\mathbb{P}^n$ que passam por P_0 através da aplicação

$$\rho(P_0, (y_1 : ... : y_n)) = V(y_1 x_1 - x_0, ..., y_n x_n - x_0).$$

Agora apresentaremos algumas definições e resultados específicos de $\mathbb{P}^2$.

Lema 1.37. *Sejam $P(x_0, : x_1 : x_2)$, $Q(y_0 : y_1 : y_2)$ e $R(z_0 : z_1 : z_2)$ três pontos distintos em $\mathbb{P}^2$. Então P, Q e R são colineares se e somente se*

$$det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Definição 1.38. Um conjunto $K \subset \mathbb{P}^2$ é chamado *cônica* se for um fechado definido pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2. Dizemos que K é uma *cônica não degenerada* quando o polinômio que a define é irredutível.

Lema 1.39. *Um polinômio $q = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j$ é irredutível se e somente se*

$$det \begin{pmatrix} 2a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dada uma cônica não degenerada K e dado um ponto $P \in K$ é possível provar que existe uma aplicação regular $f : \mathbb{C} \to K$ onde cada função coordenada f_i tem grau ≤ 2 e $f(0) = P$. Chamaremos as aplicações com a propriedade acima de *parametrizações locais de K em P.*

Prova-se que, se f e g são parametrizações locais de K em P e $X = V(h) \subset \mathbb{P}^2$ é uma curva por P, então a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de $h(f(t))$ coincide com a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de $h(g(t))$.

Isso nos permite dar a seguinte:

Definição 1.40. Se K é uma cônica não degenerada e $X = V(h)$ é uma curva por $P \in K$, definimos a multiplicidade de interseção de K com X em P, denotada por $I(K, X)_P$, como sendo a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de $h(f(t))$, onde f é uma parametrização local de K em P.

1.2 Ações

Nesta seção definiremos o conceitos de grupo algébrico e de ação de um grupo (algébrico) em um conjunto; além disso, apresentaremos alguns resultados referentes a certas ações específicas que serão utilizadas mais adiante.

Definição 1.41. Um *grupo algébrico* é uma variedade afim com estrutura de grupo de forma que as operações

$$\begin{array}{ll} \mu : G \times G \to G, & \mu(g, h) = g.h; \\ \iota : G \to G, & \iota(g) = g^{-1} \end{array}$$

são regulares.

Exemplo 1.42. O grupo $Gl(n)$ das matrizes complexas $n \times n$ com determinante não nulo é um grupo algébrico irredutível de dimensão n^2. $Gl(n)$ é chamado de *grupo geral linear.*

Definição 1.43. Uma *ação* de um grupo G em um conjunto X é uma aplicação $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ que satisfaz:

i) $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x) \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X$;

ii) $\varphi(e, x) = x \quad \forall x \in X$, se e é o elemento neutro de G.

Quando G é um grupo algébrico e φ é uma aplicação regular dizemos que a ação é *algébrica.*

Neste trabalho, quando tivermos uma ação (algébrica) φ de um grupo G em um conjunto X diremos que G age (algebricamente) em X e denotaremos $\varphi(g,x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

Exemplo 1.44. Seja $Gl(n)$ o grupo das matrizes complexas $n \times n$ com determinante não nulo. Como cada elemento de $\mathbb{C}^n$ pode ser representado por uma matriz $n \times 1$, temos uma ação de $Gl(n)$ em $\mathbb{C}^n$ dada pelo produto de matrizes.

Esta ação é claramente algébrica e é chamada de ação natural de $Gl(n)$ em $\mathbb{C}^n$.

Definição 1.45. Sejam $Y \subset X$ conjuntos não vazios e seja G um grupo que age em X. Definimos o *estabilizador* de Y em G como o conjunto

$$G_Y := \{g \in G : g \cdot y \in Y,\ \forall y \in Y\}.$$

Se $G_Y = G$ dizemos que Y é *estável* ou G*-estável*.

Os subconjuntos $\{0\}$ e $\mathbb{C}^n - \{0\}$ são estáveis pela ação natural de $Gl(n)$ em $\mathbb{C}^n$.

Definição 1.46. Se G é um grupo que age em um conjunto X. Definimos a *órbita* de $x \in X$ em G como o conjunto

$$o(x) := \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Quando $X = o(x)$, para algum $x \in X$, dizemos que a ação de G em X é *transitiva*.

Proposição 1.47. *Seja G é um grupo que age algebricamente em uma variedade X e seja Y um subconjunto de X. Valem:*

i) Se Y é uma variedade, então o conjunto

$$G \cdot Y := \{g \cdot y : g \in G,\ y \in Y\}$$

contém um aberto de $\overline{G \cdot Y}$;

ii) Se G e Y são irredutíveis, então o conjunto $G \cdot Y$ também é irredutível;

iii) Se Y é estável então $\overline{Y}$ é estável.

Demonstração:

i) Seja φ a ação de G em X. Pela proposição 1.18, basta observar que a restrição $\varphi|_{G\times Y}$ é regular e que sua imagem é o conjunto $G \cdot Y$.

ii) Suponhamos que G e Y são irredutíveis, então pela proposição 1.12 temos $G \times Y$ irredutível, e como φ é regular e portanto contínua (proposição 1.16), segue da proposição 1.11, que

$$G \cdot Y = \varphi(G \times Y)$$

é irredutível.

iii) Sejam $g \in G$ e $x \in \overline{Y}$ e seja U uma vizinhança de $g \cdot x$. Devemos mostrar que U contém pontos de Y. Como a ação é algébrica temos, novamente pela proposição 1.16, que a aplicação

$$g^{-1} \cdot : X \to X, \quad x \mapsto g^{-1} \cdot x$$

é contínua. Assim $g^{-1} \cdot U$ é uma vizinhança de x. Por hipótese

$$Y \cap g^{-1} \cdot U \neq \emptyset$$

donde segue que $Y \cap U \neq \emptyset$. ■

Corolário 1.48. *Se G é um grupo algébrico irredutível que age algebricamente em uma variedade X e se $Y = o(x)$ é a órbita de um elemento $x \in X$, então $\overline{Y}$ é uma variedade irredutível e G-estável. Além disso, existe um aberto de $\overline{Y}$ contido em Y.*

Definição 1.49. Seja G um grupo que age nos conjuntos X e Y. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é *equivariante* ou *G-equivariante* se

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \quad \forall g \in G, \, \forall x \in X.$$

Se $f : X \dashrightarrow Y$ é uma aplicação racional e o conjunto U, dos pontos onde f está bem definida, é G-estável, dizemos que f é equivariante se f for equivariante como aplicação de U em Y.

O seguinte resultado é imediato da definição.

Proposição 1.50. *Nas condições da definição acima temos que $f(U)$ é um conjunto estável. Além disso, se U é uma união de órbitas $o_1, ..., o_n$ então $f(U)$ é união das órbitas $f(o_1), ..., f(o_n)$.*

Dados X e Y conjuntos e dado G um grupo que age em X, introduzimos uma operação de G no conjunto $\mathcal{F}(X, Y)$, das funções $f : X \to Y$, da seguinte forma: dados $g \in G$ e $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ definimos o elemento $g \cdot f \in \mathcal{F}(X, Y)$ como sendo a função que satisfaz:

$$g \cdot f(x) := f(g^{-1} \cdot x) \quad \forall x \in X$$

onde g^{-1} é o inverso de g em G e a operação do segundo membro da igualdade é dada pela ação de G em X.

Esta operação claramente define uma ação de G em $\mathcal{F}(X, Y)$.

Definição 1.51. A ação de G em $\mathcal{F}(X, Y)$ obtida pelo método descrito acima é chamada de *ação contravariante* da ação de G em X.

Dado um inteiro positivo n, seja $S^n \subset \mathcal{F}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ o subespaço vetorial, formado pelas funções polinomiais $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ homogêneas de grau n.

Proposição 1.52. *A ação contravariante de $Gl(3)$ em $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ obtida a partir da ação natural de $Gl(3)$ em $\mathbb{C}^3$ deixa S^n estável para todo n.*

Demonstração:

Pela linearidade da ação natural de $Gl(3)$ em $\mathbb{C}^3$ o resultado é evidente para S^1. Observando que se $f, h \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ e $g \in Gl(3)$ vale:

$$g \cdot (fh) = (g \cdot f)(g \cdot h),$$

a proposição segue por indução em n. ∎

A partir de agora, a única a ação de $Gl(3)$ em S^n considerada, será a ação contravariante.

Proposição 1.53. *O espaço vetorial S^{n*}, dual de S^n, é estável pela ação contravariante de $Gl(3)$ em $\mathcal{F}(S^n, \mathbb{C})$, obtida a partir da ação de $Gl(3)$ em S^n.*

Demonstração:

Seja $\varphi \in S^{n*}$ e seja $g \in Gl(3)$, devemos mostrar que $g \cdot \varphi$ é linear. Sejam $f, h \in S^n$ e seja $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} g \cdot \varphi(f+h) &= \varphi(g^{-1} \cdot (f+h)) = \varphi(g^{-1} \cdot f + g^{-1} \cdot h) \\ &= \varphi(g^{-1} \cdot f) + \varphi(g^{-1} \cdot h) = g \cdot \varphi(f) + g \cdot \varphi(h) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g \cdot \varphi(\alpha f) &= \varphi(g^{-1} \cdot (\alpha f)) = \varphi(\alpha(g^{-1} \cdot f)) \\ &= \alpha\varphi(g^{-1} \cdot f) = \alpha(g \cdot \varphi)(f). \end{aligned}$$

■

O lema abaixo mostra como a ação contravariantte de $Gl(3)$ em S^* se comporta nos elementos

$$x_i x_j^* \in S^*, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Lema 1.54. *Dado $g = (g_{rs})_{0 \leq r,s \leq 2} \in Gl(3)$ então*

$$g \cdot (x_i x_j)^* = \sum_{r \leq s} \alpha_{rs}^{ij}(g)(x_r x_s)^*$$

onde

$$\alpha_{rs}^{ij}(g) = \begin{cases} g_{ir}g_{js} + g_{jr}g_{is} & \text{se } r < s; \\ g_{ir}g_{jr} & \text{se } r = s. \end{cases}$$

Demonstração:

Por simplicidade escrevemos $(x_i x_j)^* = \varphi_{ij}$. Seja $g = (g_{rs}) \in Gl(3)$. Todo elemento de S^* pode ser escrito como combinação linear dos φ_{ij}, logo

$$g \cdot \varphi_{ij} = \sum_{r \leq s} \alpha_{rs}^{ij}(g)(\varphi_{rs}).$$

Para calcular $\alpha_{kl}^{ij}(g)$ observe que

$$\alpha_{kl}^{ij}(g) = \sum_{r \leq s} \alpha_{rs}^{ij}(g)\varphi_{rs}(x_k x_l) = g \cdot \varphi_{ij}(x_k x_l) = \varphi_{ij}(g^{-1} \cdot x_k x_l).$$

Por outro lado

$$g^{-1} \cdot x_k x_l = \sum_{r,s} g_{kr} g_{ls} x_k x_l$$

pois dado $p = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{C}^3$ temos

$$\begin{aligned}
g^{-1} \cdot x_k x_l(p) &= x_k x_l(g \cdot p) \\
&= x_k x_l(\sum_m g_{0m} p_m, \sum_m g_{1m} p_m, \sum_m g_{2m} p_m) \\
&= \sum_{r,s} g_{kr} g_{ls} p_r p_s \\
&= \sum_{r,s} g_{kr} g_{ls} x_r x_s(p).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl}^{ij}(g) &= \varphi_{ij}(\sum_{r,s} g_{kr} g_{ls} x_k x_l) \\
&= \begin{cases} g_{ik} g_{jl} + g_{jk} g_{il} & \text{se } k < l; \\ g_{ik} g_{jk} & \text{se } k = l. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Espaços Homaloidais

2.1 Definições e Exemplos

Nesta seção daremos os primeiros conceitos, e apresentaremos alguns exemplos, da teoria desenvolvida para caracterização dos espaços homaloidais de grau 2.

Começaremos fixando algumas notações. Se V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, denotamos por V^* seu espaço dual. Se $W \subset V$ é um subespaço vetorial, denotamos por W^o o anulador de W em V^* dado por

$$\{f \in V^* : f(w) = 0, \quad \forall w \in W\}.$$

Um fechado $X \subset \mathbb{P}^n$ constituído pelos zeros de polinômios homogêneos $f_0, ..., f_s \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ será denotado por

$$V(f_0, ..., f_s) \quad \text{ou} \quad (f_0 = ... = f_s = 0).$$

Se X é um subconjunto qualquer de $\mathbb{P}^n$, denotaremos respectivamente por $\overline{X}$ e por ∂X o fecho e a fronteira de X em $\mathbb{P}^n$, na topologia de Zariski.

Se K é uma cônica não degenerada e X é uma curva de $\mathbb{P}^2$, denotaremos a multiplicidade de interseção de K com X em um ponto $P \in K \cap X$ por $I(K, X)_P$.

$S^2 = S$ e S^1 representarão respectivamente, o $\mathbb{C}$-espaço vetorial formado pelas funções polinomiais $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ homogêneas de grau 2 e o $\mathbb{C}$-espaço vetorial formado pelas funções lineares de $\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{C}$.

Dados $i, j \in \{0, 1, 2\}$ denotaremos por $x_i x_j$ o elemento de S que leva $(p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{C}^3$ em $p_i p_j \in \mathbb{C}$, e por x_i a projeção de $\mathbb{C}^3$ na i-ésima coordenada.

É imediato verificar que o conjunto de funções

$$\{x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$$

é uma base do espaço S, chamada *base canônica de* S.

Abaixo apresentaremos alguns tipos especiais de subespaços vetoriais de S. Para tal fixemos uma cônica não degenerada K, uma reta l de $\mathbb{P}^2$ e três pontos não colineares P, Q e R de $\mathbb{P}^2$ de tal forma que $P \in K$, $P \in l$ e $Q \notin l$, fixemos também um elemento não nulo h de S^1 e definimos:

$$S[P, Q, R] := \{q \in S : q(P) = q(Q) = q(R) = 0\} \tag{2.1}$$

$$S[P \in l, Q] := \{q \in S : q(P) = q(Q) = 0\ , I(V(q), l)_P \geq 2\}. \tag{2.2}$$

$$S[P \in K] := \{q \in S : I(V(q), K)_P \geq 3\}. \tag{2.3}$$

$$hS^1 := \{hl : l \in S^1\}. \tag{2.4}$$

$$Sing[P] := \{q \in S : q \text{ é singular em } P\}. \tag{2.5}$$

A verificação de que os conjuntos acima definidos são subespaços vetoriais de S é imediata.

Os conjuntos formados pelos espaços definidos respectivamente em 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5, quando os pontos P, Q e R, a reta l, a cônica K e forma h variam, serão denotados por $\mathcal{G}en$, $\mathcal{T}an$, $\mathcal{O}sc$, $\mathcal{L}in$ e $\mathcal{S}ing$.

Dado um subespaço $\Lambda \neq 0$ de S, temos associado a ele uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} T_\Lambda & : \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \Lambda^* \\ & x & \longmapsto & \varphi_x^\Lambda \end{array}$$

onde φ_x^Λ é o funcional linear definido por:

$$\varphi_x^\Lambda(f) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \in \Lambda; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, para quaisquer que sejam o ponto $x \in \mathbb{C}^3$ e o subespaço $\Lambda \subset S$, temos

$$\varphi_{cx}^{\Lambda} = c^2 \varphi_x^{\Lambda} \quad \forall c \in \mathbb{C}\,,$$

portanto faz sentido considerar o conjunto

$$\mathcal{B}_\Lambda := \{[x] \in \mathbb{P}^2 : \varphi_x^{\Lambda} \equiv 0\};$$

a projetivização de T_Λ, dada por

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_\Lambda & : \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^*) \\ & [x] & \longmapsto & [\varphi_x] \end{array}$$

está bem definida nos pontos $[x] \in \mathbb{P}^2 - \mathcal{B}_\Lambda$ ou seja, nos pontos $[x]$ tais que $T_\Lambda(x) \neq 0$.

Vejamos como $\mathcal{T}_\Lambda$ se escreve em coordenadas.

Se $\{f_0, ..., f_m\}$ é uma base de Λ e $\{f_0^*, ..., f_m^*\}$ é sua base dual, então dado $\varphi \in \Lambda^*$ temos

$$\varphi = \alpha_0 f_0^* + ... + \alpha_m f_m^*$$

onde $\alpha_i = \varphi(f_i), \quad \forall i = 0, ..., m$. Em particular

$$\varphi_x^{\Lambda} = f_0(x) f_0^* + ... + f_m(x) f_m^*.$$

Agora se $\mathcal{I} : \mathbb{P}(\Lambda^*) \to \mathbb{P}^m$ é a identificação de $\mathbb{P}(\Lambda^*)$ com $\mathbb{P}^m$ obtida a partir da projetivização do isomorfismo linear $I : \Lambda^* \to \mathbb{C}^{m+1}$, que leva cada f_i^* da base de Λ^* no vetor e_i da base canônica de $\mathbb{C}^{m+1}$, então

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_\Lambda(x) = (f_0(x) : ... : f_m(x)) \quad \forall x \in \mathbb{P}^n.$$

Do que foi feito acima concluímos que $\mathcal{T}_\Lambda$ é, de fato, uma aplicação racional, cujos pontos base são os pontos de $\mathcal{B}_\Lambda$.

No que segue faremos abuso de linguagem denotando a aplicação $\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_\Lambda$ simplesmente por $\mathcal{T}_\Lambda$.

Exemplo 2.1. A aplicação $\mathcal{T}_S : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}(S^*) = \mathbb{P}^5$ coincide, a menos de isomorfismo, com o mergulho de Veronese:

$$\mathcal{T}_S(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Segue dai que $X = \mathcal{T}_S(\mathbb{P}^2)$ é uma variedade irredutível, lisa e de grau 4 (ver proposição 1.33).

Definição 2.2. Um subespaço vetorial $\Lambda \subset S$ é dito *espaço homaloidal de grau 2* quando a aplicação racional $\mathcal{T}_\Lambda$ associada a ele é birracional. Denotaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto formado por tais espaços.

Observe que, no caso da definição acima, segue da birracionalidade de $\mathcal{T}_\Lambda$ que $dim\,\Lambda = 3$. Dai segue que:

i) $\mathcal{H}$ é um subconjunto da variedade grassmanniana $Gr(3, S)$.

ii) Λ é um espaço homaloidal de grau 2 se e somente se a aplicação racional $\mathcal{T}_\Lambda$, quando vista em coordenadas, é uma transformação de Cremona.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3. Sejam $P_0 = (1 : 0 : 0)$, $P_1 = (0 : 1 : 0)$ e $P_2 = (0 : 0 : 1)$. Neste caso temos que $\{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2\}$ é uma base de $S[P_0, P_1, P_2]$. Portanto a aplicação $\mathcal{T}_{S[P_0,P_1,P_2]}$ e sua inversa são ambas dadas em coordenadas por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2).$$

Logo, neste caso, $\mathcal{T}_{S[P_0,P_1,P_2]}$ é birracional e portanto o espaço $S[P_0, P_1, P_2]$ é homaloidal.

Exemplo 2.4. No caso em que $P_0 = (1 : 0 : 0)$, $P_1 = (0 : 1 : 0)$ e $l = (x_1 = 0)$ temos que $\{x_0x_1, x_1x_2, x_2^2\}$ é uma base de $S[P_0 \in l, P_1]$. Assim $\mathcal{T}_{S[P_0 \in l, P_1]}$ e sua inversa são dadas em coordenadas por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 : x_0x_2 : x_2^2).$$

e

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2)$$

respectivamente. E portanto $S[P_0 \in l, P_1]$ é homaloidal.

Exemplo 2.5. Sejam $P_0 = (1:0:0)$ e $q_0 = x_0x_1 - x_2^2$ então

$$(q_0 = 0) = \{(1 : t^2 : t) \in \mathbb{P}^2 : t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0:1:0)\}.$$

Dado $q = \sum_{i \le j} a_{ij}x_ix_j \in S$, para que $I(q, q_0)_{P_0} \geq 3$, devemos ter zero com multiplicidade maior ou igual a 3 na equação

$$q(1 : t^2 : t) = 0$$

ou seja

$$a_{00} = a_{02} = 0 \quad e \quad a_{01} = -a_{22}.$$

Desta forma $\{x_0x_1 - x_2^2, x_1^2, x_1x_2\}$ é base de $S[P_0 \in q_0]$ e conseqüentemente $\mathcal{T}_{S[P_0 \in q_0]}$ e sua inversa são dadas a menos identificações por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 - x_2^2 : x_1^2 : x_1x_2)$$

e

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 + x_2^2 : x_1^2 : x_1x_2)$$

respectivamente. Logo $S[P_0 \in q_0]$ é homaloidal.

Exemplo 2.6. Seja $h \in S^1$ não nulo. Então $\{hx_0, hx_1, hx_2\}$ é claramente uma base do espaço hS^1, logo a menos de isomorfismo

$$\mathcal{T}_{hS^1}(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : x_1 : x_2).$$

Deste modo todos os elementos do conjunto

$$\mathcal{L}in = \{hS^1 : h \in S^1 \text{ }, h \neq 0\}$$

são espaços homaloidais.

Exemplo 2.7. Se $P = (1:0:0)$, então $\{x_1^2, x_2^2, x_1x_2\}$ é uma base de $Sing[P]$ e a menos de identificações podemos escrever

$$\mathcal{T}_{Sing[P]}(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Porém $\mathcal{T}_{Sing[P]}$ não é birracional, visto que sua imagem é uma variedade de dimensão 1, a saber

$$(x_0x_2 - x_1^2 = 0).$$

Desta forma $Sing[P]$ não é espaço homaloidal.

Passaremos, agora, ao estudo das ações que serão utilizadas neste trabalho.

Seja $Gl(3)$ o grupo geral linear formado pelas matrizes complexas 3×3 com determinante não nulo.

De acordo com a proposição 1.52 a ação natural de $Gl(3)$ em $\mathbb{C}^3$ induz, através da ação contravariante, uma ação de $Gl(3)$ em S e esta, por sua vez, induz uma ação de $Gl(3)$ em S^*, novamente através da ação contravariante (proposição 1.53). Segue da linearidade destas ações, que estão bem definidas ações de $Gl(3)$ em $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}(S)$ e $\mathbb{P}(S^*)$, por projetivização. Analogamente definimos a ação contravariante de $Gl(3)$ em S^1.

Considerando em S a ação contravariante, então dados $\Lambda \subset S$, um subespaço vetorial de dimensão k , e $g \in Gl(3)$, temos que o conjunto

$$g \cdot \Lambda := \{g \cdot f : f \in \Lambda\}$$

também é um subespaço vetorial de dimensão k. Portanto, fixando $1 \leq k \leq 5$, não é difícil verificar que a operação de $Gl(3)$ em $Gr(k, S)$ definida pela igualdade acima é, de fato, uma ação.

Estas ações são claramente algébricas.

A partir de agora, salvo menção do contrário, as ações mencionadas acima serão as únicas consideradas naqueles conjuntos. E em seus subconjuntos utilizaremos sempre a ação induzida por restrição, quando esta fizer sentido.

2.2 Lemas e Proposições

Esta seção tem por objetivo apresentar alguns resultados da teoria de espaços homaloidais. Aqui, com exceção da proposição 2.8, os demais resultados estão relacionados com as ações de $Gl(3)$ em S, S^* ou $\mathcal{H}$.

Proposição 2.8. *Sejam V e W subespaços vetoriais de S tais que $W \subset V$. Seja W^0 o anulador de W em V^* e seja $\pi : \mathbb{P}(V^*) \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*)$ a projeção natural de centro $\mathbb{P}(W^0)$. Denotemos por X e Y as imagens de $\mathcal{T}_V$ e $\mathcal{T}_W$ respectivamente. Então:*

$i)$ O diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X} \arrow[r, hook] \arrow[dd, dashed, "\pi|_X"] & \mathbb{P}(V^*) \arrow[dd, dashed, "\pi"] \\
\mathbb{P}^2 \arrow[ur, dashed, "\mathcal{T}_V"] \arrow[dr, dashed, "\mathcal{T}_W"'] & & \\
 & \overline{Y} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(W^*)
\end{tikzcd}$$

é comutativo;

ii) Se $\mathcal{T}_W$ é birracional e $deg \bar{X} > 1$ temos $\mathbb{P}(W^0) \cap \bar{X} \neq \emptyset$.

Demonstração:

$i)$ Seja p a projeção natural de V^* sobre W^*. Claramente $ker(p) = W^0$. Seja $\{f_0, ..., f_{s+t}\}$ uma base de V de tal modo que $\{f_0, ..., f_s\}$ é base de W. Assim, dado $x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, temos:

$$\varphi_x^V = f_0(x) f_0^* + ... + f_{s+t}(x) f_{s+t}^*$$

e portanto

$$P(\varphi_x^V) = f_0(x) f_0^* + ... + f_s(x) f_s^* = \varphi_x^W$$

logo, $T_W = p \circ T_V$ e passando ao projetivo obtemos o desejado.

$ii)$ Suponha por absurdo que $\mathbb{P}(W^0) \cap \bar{X} = \emptyset$. Como $\mathcal{T}_W$ é birracional, segue de $i)$ que $\pi|_{\bar{X}}$ é uma aplicação regular com inversa racional. O resultado é consequência da proposição 1.34. ■

A seguinte proposição garante que a ação de $Gl(3)$ em $\mathcal{H}$, dada pela restrição da ação de $Gl(3)$ em $Gr(3, S)$, está bem definida.

Proposição 2.9. *$\mathcal{H}$ é estável pela ação de $Gl(3)$ em $Gr(3, S)$.*

Demonstração:

Sejam $\Lambda \in \mathcal{H}$ e $g \in Gl(3)$. Sabemos que $dim\, \Lambda = 3$, logo basta provar que $\mathcal{T}_{g \cdot \Lambda}$ é uma aplicação birracional. Para isso, seja $T_{g-1} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear associada à matriz g^{-1} e seja $\mathcal{T}_{g-1} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ sua projetivização. Claramente $\mathcal{T}_{g-1}$ é isomorfismo.

Agora se $\{f_0, f_1, f_2\}$ é uma base de Λ então $\{g \cdot f_0, g \cdot f_1, g \cdot f_2\}$ é uma base de $g \cdot \Lambda$. Logo, dado $x \in \mathbb{P}^2$ temos que, a menos de isomorfismo

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{g\cdot\Lambda}(x) &= (g \cdot f_0(x) : g \cdot f_1(x) : g \cdot f_2(x)) \\
&= (f_0 \circ \mathcal{T}_{g-1}(x) : f_1 \circ \mathcal{T}_{g-1}(x) : f_2 \circ \mathcal{T}_{g-1}(x)) \\
&= \mathcal{T}_\Lambda \circ \mathcal{T}_{g-1}(x).
\end{aligned}$$

Desta forma, como $\mathcal{T}_\Lambda$ é birracional e $\mathcal{T}_{g-1}$ é isomorfismo, concluímos a demonstração. ■

Proposição 2.10. *Seja $\Lambda \subset S$ um espaço vetorial não nulo e seja $G \subset Gl(3)$ um subgrupo. Se Λ é estável pela ação de G em S então $\mathcal{T}_\Lambda$ é G-equivariante e $\overline{\mathcal{T}_\Lambda(\mathbb{P}^2)}$ é estável pela ação de G em $\mathbb{P}(\Lambda^*)$.*

Demonstração:
Seja $g \in G$. Por hipótese temos $g.\Lambda = \Lambda$. Assim, para qualquer $x \in \mathbb{C}^3$, vem que

$$\varphi^\Lambda_{g\cdot x} = g \cdot \varphi^\Lambda_x$$

onde $g \cdot \varphi^\Lambda_x$ é a ação contravariante no dual de Λ. Logo

$$\mathcal{T}_\Lambda([g \cdot x]) = [\varphi^\Lambda_{g\cdot x}] = [g \cdot \varphi^\Lambda_x] = g \cdot \mathcal{T}_\Lambda([x])$$

e portanto $\mathcal{T}_\Lambda$ é G-equivariante. O restante é consequência das proposições 1.47 e 1.50. ■

Lema 2.11. *Seja Λ um subespaço vetorial de S e seja G_Λ o seu estabilizador. Então para qualquer reta $r \subset \mathbb{P}^2$ temos*

$$g \cdot \mathcal{T}_\Lambda|_r(P) = \mathcal{T}_\Lambda|_{g\cdot r}(g \cdot P) \quad \forall g \in G_\Lambda,\ \forall P \in r.$$

Demonstração:
Seja $\mathcal{B}_\Lambda$ o conjunto de pontos base de $\mathcal{T}_\Lambda$. Para os pontos P pertencentes ao aberto $(r - \mathcal{B}_\Lambda)$ de r, o resultado segue de $\mathcal{T}_\Lambda$ ser G_Λ-equivariante (ver

proposição 2.10). Agora, observe que pela proposição 1.30, temos que as restrições $\mathcal{T}_\Lambda|_r$ e $\mathcal{T}_\Lambda|_{g\cdot r}$ estão bem definidas em todos os pontos de r e $g \cdot r$ respectivamente. Desta forma, pela proposição 1.17, o resultado se estende para os pontos $P \in r \cap \mathcal{B}_\Lambda$. ■

Lema 2.12. *Sejam $P, Q, R \in \mathbb{P}^2$ três pontos não colineares, seja l um elemento não nulo de S^1 e sejam respectivamente r e K uma reta e uma cônica não degenerada de $\mathbb{P}^2$ tais que*

$$P \in r, \quad P \in K \quad e \quad Q \notin r.$$

Então dado $g \in Gl(3)$, vale:

$$g \cdot S[P, Q, R] = S[g \cdot P, g \cdot Q, g \cdot R];$$

$$g \cdot S[P \in r, Q] = S[g \cdot P \in g \cdot r, g \cdot Q];$$

$$g \cdot S[P \in K] = S[g \cdot P \in g \cdot K];$$

$$g \cdot (lS^1) = (g \cdot l)S^1;$$

$$g \cdot Sing[P] = Sing[g \cdot P].$$

Demonstração:

Seja $g \in Gl(3)$. A operação de g em $\mathbb{P}^2$ dada pela ação natural de $Gl(3)$ é equivalente a uma mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^2$. Além disso, dados $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $P \in \mathbb{P}^2$, vale que

$$g \cdot f(g \cdot P) = f(P).$$

Assim concluímos a demostração do lema do fato que as propriedades geométricas de $\mathbb{P}^2$ como multiplicidade de interseção, tangência, colinearidade e singularidade são invariantes por mudanças de coordenadas. ■

Proposição 2.13. *Os conjuntos $\mathcal{G}en$, $\mathcal{T}an$, $\mathcal{O}sc$, $\mathcal{L}in$ e $\mathcal{S}ing$ são órbitas em $Gr(3, S)$.*

Demonstração:

A demostração desta proposição segue do lema 2.12 acima e do fato que se dois espaços Λ e Λ' pertencem ao mesmo conjunto dentre $\mathcal{G}en, \mathcal{T}an, \mathcal{O}sc, \mathcal{L}in$ e $\mathcal{S}ing$; então existe uma mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^2$ que transforma Λ em Λ'.

■

Proposição 2.14. *A dimensão de cada um dos conjuntos* $\mathcal{G}en, \mathcal{T}an, \mathcal{O}sc, \mathcal{L}in$ *e* $\mathcal{S}ing$ *é respectivamente* 6, 5, 4, 2 *e* 2.

Demonstração:

Para cada ponto $P = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ e cada ponto $q = (a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$ defina a reta

$$r(P) := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : \sum_i a_i x_i = 0\}$$

e a cônica

$$C(q) := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j = 0\}.$$

Sejam

$U := \{(P, Q, R) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 : P, Q$ e R são não colineares $\}$,

$V := \{(P, Q, R) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 : P \in r(R), Q \notin r(R)\}$ e

$W := \{(P, q) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5 : C(q)$ é cônica não degenerada e $P \in C(q)\}$.

Observe que U e V são os conjuntos formados pelos pontos

$$((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1 : z_2))$$

que satisfazem respectivamente

$$det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

e

$$\begin{aligned} z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0, \\ z_0y_0 + z_1y_1 + z_2y_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Daí segue que U é um aberto de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ e V é um aberto de uma hipersuperfície de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Já W é o conjunto formado pelos pontos

$$((x_0 : x_1 : x_2), (a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}))$$

tais que

$$\sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \text{e} \quad det \begin{pmatrix} 2a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \neq 0,$$

e portanto é um aberto de uma hipersuperfície de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$.
Assim concluímos que

$$dim\, U = 6, \quad dim\, V = 5 \quad \text{e} \quad dim\, W = 6.$$

Para cada ponto $P = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ associamos o subespaço $L(P) \subset S^1$ gerado pela forma $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Portanto, para cada ponto $P \in \mathbb{P}^2$ fica bem definido o subespaço $L(P)S^1 \subset S$ definido por

$$\{lh : l \in L(P),\ h \in S^1\} \subset S.$$

Consideremos as aplicações:

$$\begin{array}{ll} \mu : U \to \mathcal{G}en, & \mu(P,Q,R) := S[P,Q,R]; \\ \nu : V \to \mathcal{T}an, & \nu(P,Q,R) := S[P \in r(R), Q]; \\ \omega : W \to \mathcal{O}sc, & \omega(P,q) := S[P \in C(q)]; \\ \ell : \mathbb{P}^2 \to \mathcal{L}in, & \ell(P) := L(P).S^1; \\ \sigma : \mathbb{P}^2 \to \mathcal{S}ing, & \sigma(P) := Sing[P]. \end{array}$$

É evidente que as aplicações acima são sobrejetoras. Observe, ainda, que ν, ℓ e σ são, de fato, bijeções, logo a dimensão de cada uma de suas fibras é 0. Já as aplicações μ e ω não são injetoras. No entanto, dado um ponto $S[P,Q,R] \in \mathcal{G}en$, sua imagem inversa por μ é um conjunto finito formado por todas permutações do ponto (P,Q,R), desta forma a dimensão de cada fibra de μ também é 0. No caso de ω, temos que a imagem inversa de $S[P_o \in C(q_o)]$ é o conjunto

$$\{(P_o, q) : C(q) \in S[P_o \in q_o]\}$$

que é isomorfo a um aberto de $\mathbb{P}(S[P_o \in q_o])$, portanto a dimensão de cada fibra de ω é 2.

Por outro lado, o gráfico de cada uma das aplicações acima é uma variedade. Por exemplo, o gráfico de μ

$$Graf(\mu) = \{((P,Q,R), s[P,Q,R]) : (P,Q,R) \in U\} \subset U \times \mathcal{G}en$$

é uma variedade, pois (P,Q,R) satisfaz as equações e diferenças que definem U, e $S[P,Q,R]$ é dado por equações algébricas que dependem algebricamente de P, Q e R.
Agora, pelo corolário 1.48 estamos nas hipóteses do corolário 1.26, donde segue o teorema. ■

Sejam P_0 e P_1 os pontos de $\mathbb{P}^2$ dados respectivamente por $(1:0:0)$ e $(0:1:0)$, e seja $l \subset \mathbb{P}^2$ a reta de equação $(x_1 = 0)$. Denotemos, respectivamente, por $S[P_0], S[P_0,P_1]$ e $S[P_0 \in l]$ os conjuntos

$$\{q \in S : q(P_0) = 0\}$$

$$\{q \in S : q(P_0) = q(P_1) = 0\}$$

$$\{q \in S : q(P_0) = 0, \text{ e } l \text{ é tangente a } V(q)\}.$$

Lembre que $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ é a variedade obtida na explosão de $\mathbb{P}^2$ no ponto P_0.

Sejam Y_1 e Y_2 as variedades dadas, respectivamente, pelas equações

$$y_0y_3 - y_1y_2 = 0 \quad \text{e} \quad y_1y_3 - y_2^2 = 0,$$

onde y_0, y_1, y_2 e y_3 são coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^3$. Observe que Y_1 é uma quádrica lisa e que Y_2 é o cone quadrático de vértice $R = (1:0:0:0)$.

Para simplificar a notação, daqui por diante escreveremos

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{S[P_0]}, \quad \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{S[P_0,P_1]} \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{S[P_0 \in l]}.$$

Lema 2.15. *Com as notações acima, valem:*

i) $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$ *é uma variedade irredutível de grau 3, isomorfa a* $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$*;*

ii) $\overline{\mathcal{T}_1(\mathbb{P}^2)}$ *é uma variedade irredutível de grau 2, isomorfa a* Y_1*;*

iii) $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ *é uma variedade irredutível de grau 2, isomorfa a* Y_2*.*

Demonstração:
i) Sejam $s : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$, o mergulho de Segre, e $\pi : \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^4$, a projeção de centro $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)$, dadas respectivamente por:

$$((x_0 : x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \mapsto (x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_1 : x_2y_2)$$

e

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_5).$$

Lembrando que

$$\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) = \{((x_0 : x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) : x_1y_2 = x_2y_1\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

definimos a aplicação $\mathcal{I} : \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^4$ pondo $\mathcal{I} := \pi \circ s|_{\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)}$, que em coordenadas é dada por:

$$((x_0 : x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \mapsto (x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_2)$$

e portanto é regular.

Vejamos que $\mathcal{I}$ é um isomorfismo de $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$ com sua imagem. De fato, sabemos que s é um isomorfismo com sua imagem, por outro lado, segue da equação que define $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$ que a restrição de π a $s(\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2))$ também é um isomorfismo com sua imagem.

Agora provaremos que $\mathcal{I}(\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2))$ é isomorfo a $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$.
É fácil ver que o conjunto

$$\{x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$$

é uma base de $S[P_0]$, logo tomando coordenadas podemos escrever

$$\mathcal{T}_0(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Denotemos por Y_0 o fecho da imagem de $\mathcal{T}_0$ em $\mathbb{P}^4$.
Seja $E = P_0 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$ e seja $\sigma : \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^2$ a explosão de centro

P_0. Então $\mathcal{I}$ restrita ao conjunto $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E$ é igual a composição $\mathcal{T}_0 \circ \sigma$. Logo

$$\mathcal{I}(\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E) \subset Y_0$$

donde segue que

$$\mathcal{I}(\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)) = Y_0.$$

Como Y_0 está contido na variedade de Segre, imagem de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, temos que seu grau é 3 (ver proposição 1.33).
O fato de $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$ ser irredutível, lisa e de grau 3, segue diretamente do isomorfismo acima.

ii) A menos de identificações temos

$$\mathcal{T}_1(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2 : x_2^2)$$

donde verifica-se facilmente que sua imagem está contida em Y_1.
Agora considere o aberto $U := Y_1 \cap (y_3 \neq 0)$ de Y_1. Seja R um ponto arbitrário de U, podemos supor $R = (y_0 : y_1 : y_2 : 1)$ com $y_0 = y_1y_2$. Tomando $P = (y_1 : y_2 : 1)$, temos $T_1(P) = R$. Assim concluímos que U está contido em $T_1(\mathbb{P}^2)$. Logo

$$Y_1 = \overline{U} \subset \overline{\mathcal{T}_1(\mathbb{P}^2)} \subset Y_1.$$

O grau de $\overline{\mathcal{T}_1(\mathbb{P}^2)}$ segue do isomorfismo.

iii) Este caso é análogo ao caso *ii*. ■

Lema 2.16. *Mantendo as notações acima, sejam G_0 e G_1 os estabilizadores de $\{P_0\}$ e $\{P_0, P_1\}$ respectivamente e seja G_2 o maior subgrupo de $Gl(3)$ que estabiliza $\{P_0\}$ e l. Então*

i) $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$ *é uma variedade G_0-estável formada pelas órbitas*

$$Z_1 = o([x_0x_2{}^*]) \quad e \quad Z_2 = o([x_1^{2^*}]);$$

ii) $\overline{\mathcal{T}_1(\mathbb{P}^2)}$ *é uma variedade G_1-estável formada pelas órbitas*

$$Z_1' = o([x_0x_1{}^*]), \quad Z_2' = o([x_0x_2{}^*]) \quad e \quad Z_3' = o([x_2^{2^*}])$$

com

$$Z_1' \subset \overline{Z_2'} \subset \overline{Z_3'};$$

iii) $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ *é uma variedade* G_2*-estável formada pelas órbitas*

$$Z_1'' = o([x_0 x_1{}^*]), \quad Z_2'' = o([x_2^{2*}]), \quad Z_3'' = o([x_0 x_1{}^* + x_2^{2*}]) \quad e \quad Z_4'' = o([x_1^{2*}])$$

com

$$Z_1'',\ Z_2'' \subset \overline{Z_3''} \subset \overline{Z_4''}.$$

Demonstração:

$i)$ Dado $g \in Gl(3)$ temos

$$g \cdot f(P_0) = f(P_0), \quad \forall f \in S \Longleftrightarrow g \in G_0.$$

Em particular,

$$g \cdot f \in S[P_0], \quad \forall f \in S[P_0] \Longleftrightarrow g \in G_0.$$

Segue dai que G_0 é o estabilizador de $S[P_0]$. Assim, pela proposição 2.10, $\mathcal{T}_0$ é G_0-equivariante e $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$ é estável pela ação de G_0.

Seja $\sigma : \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^2$ a explosão de centro P_0 e seja $E = P_0 \times \mathbb{P}^1$. Consideremos a bijeção entre E e o conjunto F_{P_0}, das retas por P_0, dada por

$$\rho : E \longrightarrow F_{P_0}, \quad \rho(P_0, (a_1 : a_2)) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0).$$

Temos uma ação de G_0 em $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$, induzida pela ação natural de $Gl(3)$ em $\mathbb{P}^2$ da seguinte forma: para $g \in G_0$ e $u \in \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$ o ponto $g \cdot u$ é dado por

$$g \cdot u = \begin{cases} \sigma^{-1}(g \cdot \sigma(u)) & \text{se } u \in \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E; \\ \rho^{-1}(g \cdot \rho(u)) & \text{se } u \in E. \end{cases}$$

Como as G_0-órbitas em $\mathbb{P}^2$ são os conjuntos $\{P_0\}$ e $\mathbb{P}^2 \setminus \{P_0\}$, temos que as G_0-órbitas em $\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$ são os conjuntos

$$E \quad \text{e} \quad \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E.$$

Seja $\mathcal{I} : \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^4$ o morfismo definido na demostração do lema 2.15. Mostraremos que $\mathcal{I}$ é G_0-equivariante. Fixando as coordenadas usadas na demostração do lema 2.15, é imediato verificar que dado $u \in \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2)$ temos

$$\mathcal{I}(u) = \begin{cases} \mathcal{T}_0(\sigma(u)) & \text{se } u \in \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E; \\ \mathcal{T}_0|_{\rho(u)}(P_0) & \text{se } u \in E. \end{cases}$$

Seja $g \in G_0$. Assim, para $u \in \mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(g \cdot u) &= \mathcal{T}_0(g \cdot \sigma(u)) \\ &= g \cdot \mathcal{T}_0(\sigma(u)) \\ &= g \cdot \mathcal{I}(u) \end{aligned}$$

e para $u \in E$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(g \cdot u) &= \mathcal{T}_0|_{\rho(g \cdot u)}(P_0) \\ &= \mathcal{T}_0|_{g \cdot \rho(u)}(P_0) \\ &= g \cdot \mathcal{T}_0|_{\rho(u)}(P_0) \\ &= g \cdot \mathcal{I}(u), \end{aligned}$$

onde, na terceira iqualdade, usamos o lema 2.11.
Desta forma temos que o conjunto $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$, visto em coordenadas, é formado pelas G_0-órbitas (ver 1.50)

$$\mathcal{I}(E) = o(0:1:0:0:0) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(\mathcal{B}l_{P_0}(\mathbb{P}^2) \setminus E) = o(0:0:1:0:0),$$

ou seja, as G_0-órbitas em $\overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)} \subset \mathbb{P}(S[P_0]^*)$, são

$$Z_1 = o([x_0 x_2{}^*]) \quad \text{e} \quad Z_2 = o([x_1^{2*}]).$$

Provaremos diretamente o item *iii*, pois o item *ii* é analogo.

De forma semelhante ao que fizemos em *i*) prova-se que $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ é G_2-estável.

Fixemos coordenadas em $\mathbb{P}(S[P_0 \in l]^*)$ de modo que

$$\mathcal{T}_2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 x_1 : x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2).$$

É imediato verificar que

$$\{P_0\}, \quad l \setminus \{P_0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}^2 \setminus l$$

são G_2-órbitas em $\mathbb{P}^2$. Como $\mathcal{T}_2$ está bem definida em $\mathbb{P} \setminus \{P_0\}$ e é G_2-equivariante temos que

$$R_1 := \mathcal{T}_2(l \setminus \{P_0\}) = (0:0:0:1) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2 \setminus l) = Y_2 \cap (y_1 \neq 0)$$

são órbitas em Y_2, correspondendo respectivamente a $o([x_2^{2*}])$ e a $o([x_1^{2*}])$. No entanto, existem outras órbitas em Y_2, pois

$$(Y_2 \cap (y_1 \neq 0)) \cup \{R_1\} \neq Y_2.$$

Observe que G_2 é constituído pelas matrizes invertíveis do tipo

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Desta forma, dado $g = (g_{ij}) \in G_2$, verificamos com o auxílio do lema 1.54, que em $\mathbb{P}(S^*)$

$$g \cdot [x_0 {x_1}^*] = [2g_{00}g_{01}x_0^{2*} + g_{00}g_{11}x_0{x_1}^* + g_{00}g_{21}x_0{x_2}^*]$$

$$g \cdot [x_2^{2*}] = [{g_{02}}^2 x_0^{2*} + g_{02}g_{12}x_0{x_1}^* + g_{02}g_{22}x_0{x_2}^* + {g_{22}}^2 x_2^{2*}].$$

Seja $\pi : \mathbb{P}(S^*) \to \mathbb{P}(S[P_0 \in l]^*)$ a projeção de centro $S[P_0 \in l]^0$ (o anulador de $S[P_0 \in l]$ em S^*). Como $\pi([x_0{x_1}^*])$ e $\pi([x_0{x_1}^* + x_2^{2*}])$ pertencem a $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ (que é G_2-estável) segue que, dado $g = (g_{ij}) \in G_2$, em $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ vale

$$g \cdot [x_0{x_1}^*] = [x_0{x_1}^*]$$

$$g \cdot [x_0{x_1}^* + x_2^{2*}] = [g_{00}g_{11}x_0{x_2}^* + {g_{22}}^2 x_2^{2*}].$$

Desta forma temos em $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ também as órbitas de $[x_0{x_1}^*]$ e $[x_0{x_1}^* + x_2^{2*}]$, que em coordenadas são dadas respectivamente por

$$R = (1:0:0:0) \quad \text{e} \quad Y_2 \cap (y_1 \neq 0) \setminus \{R, R_1\}.$$

Donde segue o resultado do lema. ■

2.3 Resultado Principal

Com o que foi feito nas seções anteriores, estamos em condições de provar o principal resultado desta monografia, a saber, o seguinte:

Teorema 2.17. *Se $\mathcal{H}$ é o conjunto formado pelos espaços homaloidais de grau 2 e $\overline{\mathcal{H}}$ é o fecho de $\mathcal{H}$ na topologia de Zariski induzida em $Gr(3, S)$, então :*

i) O conjunto $\mathcal{H}$ é formado pela união das órbitas $\mathcal{G}en$, $\mathcal{T}an$, $\mathcal{O}sc$ e $\mathcal{L}in$;

ii) O conjunto $\overline{\mathcal{H}}$ é uma variedade projetiva irredutível de dimensão 6 e o conjunto $\overline{\mathcal{H}} - \mathcal{H}$ coincide com a órbita $\mathcal{S}ing$. Além disso, temos o seguinte grafo de incidências

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}en \arrow[d, dash] & . \\ & \mathcal{T}an \arrow[d, dash] & \\ & \mathcal{O}sc \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathcal{L}in & & \mathcal{S}ing. \end{tikzcd}$$

Demonstração:
Nesta demonstração manteremos as notações dos lemas 2.15 e 2.16.

i) Sejam $\Lambda \in \mathcal{H}$ e $X = \mathcal{T}_S(\mathbb{P}^2)$. Então X é uma variedade irredutível, lisa, de grau 4 (ver exemplo 2.1) e $\mathcal{T}_\Lambda : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^*)$ é uma aplicação birracional por hipótese. Seja Λ^o o anulador de Λ em S^*. Pela proposição 2.8.*ii* temos

$$\mathbb{P}(\Lambda^o) \cap X \neq \emptyset.$$

Como $\mathcal{T}_S : \mathbb{P}^2 \to T_S(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(S^*)$ é um isomorfismo equivariante pela ação de $Gl(3)$ temos que a ação deste grupo em X é transitiva. Desta forma, a menos da ação de $Gl(3)$, podemos supor

$$\mathcal{T}_S(P_0) = [(x_0^2)^*] \in \mathbb{P}(\Lambda^o).$$

Segue daí que o funcional $(x_0^2)^*$ pertence a Λ^o, donde concluímos que Λ está contido no subespaço vetorial de gerado por

$$\{x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$$

que é precisamente o espaço $S[P_0]$.

Seja $Y = \overline{\mathcal{T}_0(\mathbb{P}^2)}$ e seja Λ_0^o o anulador de Λ em $S[P_0]^*$. Do lema 2.15.i e da proposição 2.8.ii temos que

$$\mathbb{P}(\Lambda_0^o) \cap Y \neq \emptyset.$$

Pelo lema 2.16.i, G_0 deixa Y estável com duas órbitas

$$Z_1 = o([x_0{x_2}^*]) \quad \text{e} \quad Z_2 = o([{x_1^2}^*]).$$

Assim a menos da ação de G_0 podemos supor que

$$[{x_1^2}^*] \in \mathbb{P}(\Lambda_0^o) \quad \text{quando} \quad \mathbb{P}(\Lambda_0^o) \cap Z_2 \neq \emptyset$$

e que

$$[x_0{x_2}^*] \in \mathbb{P}(\Lambda_0^o) \quad \text{quando} \quad \mathbb{P}(\Lambda_0^o) \cap Z_1 \neq \emptyset.$$

Daí, segue como fizemos antes, que $\Lambda \subset S[P_0, P_1]$ no primeiro caso e que $\Lambda \subset S[P_0 \in l]$ no segundo.

Suponha que $\Lambda \subset S[P_0, P_1]$. Sejam $Y' = \overline{\mathcal{T}_1(\mathbb{P}^2)}$ e Λ_1^o o anulador de Λ em $S[P_0, P_1]^*$. O lema 1.54.ii juntamente com a proposição 2.8.ii afirmam que

$$Y' \cap \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \neq \emptyset.$$

Seja $P_2 = (0 : 0 : 1)$. Pelo lema 2.16.ii, Y' é estável pela ação de G_1 e suas órbitas são

$$Z_1' = o([(x_0x_1)^*]), \quad Z_2' = o([(x_0x_2)^*]) \quad \text{e} \quad Z_3' = o([(x_2^2)^*]).$$

Assim, a menos da ação de G_1, podemos supor, que

$$[x_0{x_1}^*] \in \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \quad \text{se} \quad Z_1' \cap \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \neq \emptyset$$

$$[x_0{x_2}^*] \in \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \quad \text{se} \quad Z_2' \cap \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \neq \emptyset$$

$$[{x_2^2}^*] \in \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \quad \text{se} \quad Z_3' \cap \mathbb{P}(\Lambda_1^o) \neq \emptyset$$

donde obtemos, respectivamente (ver exemplos 2.3 , 2.4 e 2.6)

$$\Lambda = x_2 S^1 \in \mathcal{L}in, \quad \Lambda = S[P_0 \in l, P_1] \in \mathcal{T}an \quad \text{e} \quad \Lambda = S[P_0, P_1, P_2] \in \mathcal{G}en.$$

Suponha, agora, que $\Lambda \in S[P_0 \in l]$. Sejam $Y'' = \overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{P}^2)}$ e Λ_2^o o anulador de Λ em $S[P_0 \in l]^*$. Pelo lema 2.15.*iii* e pela proposição 2.8.*ii* temos

$$Y'' \cap \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \neq \emptyset.$$

Pelo lema 2.16.*iii*, Y'' é estável pela ação de G_2 e suas órbitas são :

$$Z_1'' = o([x_0 {x_1}^*]), \quad Z_2'' = o([x_2^{2^*}]), \quad Z_3'' = o([x_0 {x_1}^* + x_2^{2^*}]) \quad \text{e} \quad Z_4'' = o([x_1^{2^*}]).$$

Desta forma, a menos da ação de G_2, podemos supor que

$$[x_0 {x_1}^*] \in \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \quad \text{se} \quad Z_1'' \cap \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \neq \emptyset$$
$$[x_2^{2^*}] \in \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \quad \text{se} \quad Z_2'' \cap \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \neq \emptyset$$
$$[x_0 {x_1}^* + x_2^{2^*}] \in \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \quad \text{se} \quad Z_3'' \cap \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \neq \emptyset$$
$$[x_1^{2^*}] \in \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \quad \text{se} \quad Z_4'' \cap \mathbb{P}(\Lambda_2^o) \neq \emptyset.$$

Entretanto, o primeiro caso não pode acontecer, pois teríamos $\Lambda = Sing[P_0]$ que não pertence a $\mathcal{H}$ (ver exemplo 2.7). Os demais casos correspondem respectivamente a (ver exemplos 2.6 , 2.5 e 2.4)

$$\Lambda = x_1 S^1 \in \mathcal{L}in, \quad \Lambda = S[P_0 \in q_0] \in \mathcal{O}sc \quad \text{e} \quad \Lambda = S[P_0 \in l, P_1] \in \mathcal{T}an.$$

ii) Pelo lema 2.16.*iii*, temos

$$Z_1'',\ Z_2'' \subset \overline{Z_3''} \subset \overline{Z_4''},$$

e como vimos em i as inclusões acima corespondem, em coordenadas, a

$$Sing[P_0], x_1 S^1 \subset \overline{o(S[P_0 \in q_0])} \subset \overline{o(S[P_0 \in l, P_1])},$$

onde $o(S[P_0 \in q_0])$ e $o(S[P_0 \in l, P_1])$ são respectivamente G_2-órbitas de $S[P_0 \in q_0]$ e $S[P_0 \in l, P_1]$ em $Gr(3, S)$. Assim, usando a ação de $Gl(3)$, obtemos

$$\mathcal{S}ing\,, \mathcal{L}in \subset \overline{\mathcal{O}sc} \subset \overline{\mathcal{T}an}.$$

Por outro lado, da inclusão $\overline{Z_2'} \subset \overline{Z_3'}$ (lema 2.16.ii) segue, como acima, que

$$\overline{\mathcal{T}an} \subset \overline{\mathcal{G}en}.$$

E portanto, obtemos o grafo de incidências do enunciado.

Agora, usando o item i e o grafo de incidências entre $\mathcal{G}en$, $\mathcal{T}an$, $\mathcal{O}sc$ e $\mathcal{L}in$, temos que com a topologia de Zariski em $Gr(3, S)$ vale:

$$\overline{\mathcal{G}en} = \overline{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{H}} - \mathcal{H} = \mathcal{S}ing.$$

Deste modo, pelo corolário 1.48 e pela proposição 2.14, temos $\overline{\mathcal{H}}$ é irredutível com dimensão 6. ■

Como conseqüência imediata do teorema acima apresentaremos uma classificação das transformações de Cremona de grau 2 do plano projetivo. Para tal considere as aplicações $\mathcal{T}_G, \mathcal{T}_T, \mathcal{T}_O : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ dadas respectivamente por

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2).$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 : x_1x_2 : x_2^2).$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 - x_2^2 : x_1^2 : x_1x_2)$$

(ver exemplos 2.3 , 2.4 e 2.5).

Com as notações acima, temos:

Corolário 2.18. *A menos de isomorfismos lineares $\mathcal{T}_G, \mathcal{T}_T$ e $\mathcal{T}_O$ são as únicas transformações birracionais quadráticas de $\mathbb{P}^2$.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{T} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ uma aplicação birracional de grau 2. Então existem $f_0, f_1, f_2 \in S$, linearmente independentes e sem fatores em comum, tal que

$$\mathcal{T}(x) = (f_0(x) : f_1(x) : f_2(x)).$$

Portanto o subespaço Λ, gerado por f_0, f_1 e f_2, é homaloidal. Além disso, temos por hipótese que Λ não pertence nem a $\mathcal{L}in$ e nem a $\mathcal{S}ing$, donde temos pelo teorema acima, que Λ pertence, ou a $\mathcal{G}en$ ou a $\mathcal{T}an$ ou a $\mathcal{O}sc$. De acordo com a proposição 2.13, o resultado segue dos exemplos 2.3 , 2.4 e 2.5.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] T. Vust, *Transformations de Cremona quadratiques en* $\mathbb{P}^2$, "trabalho manuscrito", (1998).

[2] I. R. Shavarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, (1984).

[3] P. Griffits e J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley and Songs, (1978).

[4] D. Mumford, *Algebraic Geometry I - Complex Projective varieies*, Springer-Verlag, (1976).

[5] J. Harris, *Algebraic Geometry - A first course*, Springer-Verlag, (1995).

[6] H. Hudson, *Cremona Transformations in Plane and Space*, Cambridge, (1994).

[7] L. Godeaux, *Algebraic Geometry I - Transformations Birationnelles - Géométrie Projective Hypersplaciale*, Masson & C^{IE} Éditeurs, Paris.