

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Metodologia para a alocação ótima discreta de sensores e atuadores piezoelétricos na simulação do controle de vibrações em estruturas de materiais compósitos laminados

Sérgio Luiz Schulz

Porto Alegre
2012

SÉRGIO LUIZ SCHULZ

**METODOLOGIA PARA A ALOCAÇÃO ÓTIMA DISCRETA
DE SENSORES E ATUADORES PIEZOELÉTRICOS NA
SIMULAÇÃO DO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM
ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS
LAMINADOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

2012

SÉRGIO LUIZ SCHULZ

Metodologia para a alocação ótima discreta de sensores e atuadores piezoelétricos na simulação do controle de vibrações em estruturas de materiais compósitos laminados

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, Área de Concentração: Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 14 de setembro de 2012

Prof. Armando Miguel Awruch
Dr. pela COPPE
orientador

Prof. Herbert Martins Gomes
Dr. pela UFRGS
co-orientador

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Domingos Alves Rade (FEMEC/UFU)
Dr. pela Université de Franche-Comté

Prof. Eduardo Andre Perondi (PROMEC/UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Inácio Benvegno Morsch (PPGEC/UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho à memória de meu tio, Valter Schulz, Agrônomo e professor do Departamento de Ciência do Solo e Engenharia Agrícola da Universidade Estadual de Ponta Grossa

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Armando Miguel Awruch, orientador deste trabalho, pela confiança em mim depositada, e ao Prof. Herbert Martins Gomes, co-orientador, pelo generoso compartilhamento de conhecimentos.

Agradeço aos meus pais, Alfredo e Relindes Mariana, pelas diversas manifestações de apoio.

Agradeço aos professores da banca examinadora pelas valiosas críticas e sugestões ao aprimoramento do trabalho.

Agradeço à Universidade Estadual de Ponta Grossa, onde sou professor assistente desde 1997, pela sua política de capacitação docente que permitiu meu afastamento em tempo integral com vencimentos plenos; e aos colegas do departamento de Engenharia Civil que tornaram viável minha saída.

Não há nada de nobre em ser superior a outro homem.
A verdadeira nobreza está em ser superior ao que tu
eras anteriormente.

Provérbio hindu

RESUMO

SCHULZ, S.L. Metodologia para a alocação ótima discreta de sensores e atuadores piezoelétricos na simulação do controle de vibrações em estruturas de materiais compósitos laminados. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O principal objetivo do controle de vibrações é a sua redução ou minimização, através da modificação automática da resposta estrutural. Em muitas situações isto é necessário para promover a estabilidade estrutural, e para alcançar o alto desempenho mecânico necessário em diversas áreas técnicas, tais como a engenharia aeroespacial, civil e mecânica, bem como a biotecnologia, inclusive em escala micro e nano mecânica. Uma alternativa é o uso de estruturas inteligentes, que são o resultado da combinação de sensores e atuadores integrados em uma estrutura mecânica, e um método de controle adequado. O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de rotinas computacionais para a simulação, via método dos elementos finitos, do controle ativo de estruturas inteligentes de cascas, placas e vigas delgadas de material compósito laminado com camadas de material piezoelétrico como sensores e/ou atuadores. Caracterizam esta pesquisa a utilização do elemento GPL-T9 de três nós e seis graus de liberdade mecânicos por nó, mais um grau de liberdade elétrico por camada piezoelétrica, assim como a avaliação de dois métodos de controle, o Proporcional-Integral-Derivativo (PID) e o Regulador Quadrático Linear ou *Linear Quadratic Regulator* (LQR), incluindo o LQR Modal, e a otimização da localização de pastilhas piezoelétricas através de um Algoritmo Genético (AG). Várias aplicações são apresentadas e os resultados obtidos são comparados aos disponíveis na literatura especializada.

Palavras-chave: *elementos finitos; estruturas inteligentes; atuadores e sensores piezoelétricos; controle ativo de vibrações; algoritmos genéticos.*

ABSTRACT

SCHULZ, S.L. Metodologia para a alocação ótima discreta de sensores e atuadores piezoelétricos na simulação do controle de vibrações em estruturas de materiais compósitos laminados. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The main objective of vibration control is its reduction or even its minimization by the automatic modification of the structural response. Sometimes this is necessary to increase structural stability and to attain a high mechanical behavior in several areas such as aerospace, civil and mechanical engineering, biotechnology, including macro, micro and nanomechanical scales. An alternative is to use a smart structure, which results of the combinations of integrated sensors and actuators in a mechanical structure and a suitable control method. Development of a computational code to simulate, using finite elements, the active control in smart structures such as slender shells, plates and beams of composite materials with embedded piezoelectric layers acting as actuators and sensors is the main objective of this work. This research is characterized by the use of the GPL-T9 element with three nodes and six mechanical degrees of freedom and one electrical degree of freedom per piezoelectric layer, by the evaluation of two control methods, the Proportional Integral Derivative (PID) and the Linear Quadratic Regulator (LQR), including the Modal LQR, and, finally by the optimization of piezoelectric patches placement using a Genetic Algorithm (GA). Several examples are presented and compared with those obtained by other authors.

Key-words: *finite elements; smart structures; piezoelectric sensors and actuators; active vibration control; genetic algorithms.*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	30
2 MATERIAIS COMPÓSITOS	36
2.1 CLASSIFICAÇÕES DOS MATERIAIS COMPÓSITOS	36
2.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS.....	38
2.2.1 Relação tensão-deformação em materiais compósitos	38
2.2.2 Material ortotrópico sob estado plano de tensões.....	42
2.2.3 Rotação da relação tensão-deformação	44
2.2.4 Teoria clássica de laminação	49
3 PIEZOELETRICIDADE E MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS	57
3.1 O EFEITO PIEZOELÉTRICO	57
3.2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS	62
3.3 LAMINADO PIEZOELÉTRICO.....	64
4 FORMULAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS	69
4.1 FORMULAÇÃO INCREMENTAL LAGRANGEANA DO MOVIMENTO	69
4.1.1 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)	69
4.1.2 Equação incremental do princípio dos trabalhos virtuais	73
4.1.3 Consideração do material piezoelétrico	74
4.2 ELEMENTO FINITO GPL-T9 PARA PLACAS E CASCAS DELGADAS	77
4.2.1 Deslocamentos e deformações incrementais dos elementos finitos	77
4.2.2 Discretização espacial pelo método dos elementos finitos	83
4.2.3 Consideração do material piezoelétrico	88

5 TEORIA DE CONTROLE	93
5.1 SISTEMAS DE CONTROLE.....	93
5.2 DESEMPENHO DE SISTEMAS REALIMENTADOS	95
5.3 AÇÕES BÁSICAS DE CONTROLE; CONTROLE PID	97
5.4 MODELO DE ESPAÇO DE ESTADOS	99
5.5 REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR	101
5.5.1 Teoria da estabilidade de Lyapunov	101
5.5.2 Teoria do regulador quadrático linear (<i>linear quadratic regulator</i>) – LQR.....	104
5.5.3 Consideração de forças mecânicas externas não controladas e das tensões elétricas como ação de controle	106
5.6 CONTROLE LQR MODAL.....	108
6 ALGORITMOS GENÉTICOS	113
6.1 FUNDAMENTAÇÃO E TERMINOLOGIA BIOLÓGICA.....	113
6.2 TERMINOLOGIA COMPUTACIONAL	115
6.3 OPERADORES GENÉTICOS E DEMAIS COMPONENTES DE UM ALGORITMO	115
6.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	117
7 APLICAÇÕES	118
7.1 ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR E NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PLACA LAMINADA ENGASTADA SOB CARGA DISTRIBUÍDA EM TODA A SUA SUPERFÍCIE	118
7.2 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE CASCA CILÍNDRICA LAMINADA SOB CARGA CONCENTRADA.....	119
7.3 ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PLACA LAMINADA SOB CARGA DISTRIBUÍDA EM TODA A SUA SUPERFÍCIE.....	120

7.4 ANÁLISE ESTÁTICA ELETROMECAÂNICA DE VIGA <i>BIMORPH</i> ENGASTADA-LIVRE	123
7.5 VIGA <i>BIMORPH</i> ENGASTADA-LIVRE COM CONTROLE PID.....	124
7.6 VIGA <i>BIMORPH</i> ENGASTADA-LIVRE CONTROLADA PELO LQR E PELO LQR MODAL	127
7.6.1 Controle LQR.....	128
7.6.2 Controle LQR Modal	131
7.7 PLACA APOIADA APOIADA, CONTROLADA PELO LQR E PELO LQR MODAL.....	135
7.7.1 Controle LQR.....	137
7.7.2 Controle LQR Modal	139
7.8 CASCA ESFÉRICA APOIADA CONTROLADA PELO LQR E PELO LQR MODAL.....	142
7.8.1 Controle LQR.....	144
7.8.2 Controle LQR Modal	146
7.9 OTIMIZAÇÃO, VIA ALGORITMO GENÉTICO E CONTROLE LQR MODAL, DA ATIVAÇÃO DE DUAS PASTILHAS PIEZOELÉTRICAS EM VIGA <i>BIMORPH</i> ENGASTADA-LIVRE SOB CARGA CONCENTRADA	150
7.10 OTIMIZAÇÃO, VIA ALGORITMO GENÉTICO E CONTROLE LQR MODAL, DO POSICIONAMENTO DE OITO PASTILHAS PIEZOELÉTRICAS EM PLACA APOIADA.....	153
7.11 OTIMIZAÇÃO, VIA ALGORITMOS GENÉTICOS E CONTROLE LQR MODAL, DO POSICIONAMENTO DE OITO PASTILHAS PIEZOELÉTRICAS EM CASCA ESFÉRICA APOIADA.....	156
8 CONCLUSÕES	160
REFERÊNCIAS.....	164
APÊNDICE A – Método da matriz de transição de estado.....	169
APÊNDICE B – Fatores úteis de conversão de unidades.....	173

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: compostos reforçados com fibras; laminados	37
Figura 2: classificação hierárquica de materiais compósitos	38
Figura 3: direções principais de propriedades mecânicas em uma lâmina	42
Figura 4: tensões em um elemento	42
Figura 5: sistemas de eixos, global e local, e tensões coplanares em um ponto P genérico de uma lâmina.....	43
Figura 6: geometria de deformação de uma placa no plano $x-z$	50
Figura 7: laminado de N lâminas	52
Figura 8: variação de tensões e deformações ao longo da espessura de um laminado	53
Figura 9: convenção de sinais para os esforços normais e de momento.....	53
Figura 10: notações para as lâminas de um laminado.....	53
Figura 11: laminados simétricos com número ímpar e par de lâminas	56
Figura 12: estrutura cristalina (a) centrossimétrica e (b) não centrossimétrica	57
Figura 13: orientações da polarização da célula unitária: (a) no estado inicial; (b) devida a um campo elétrico forte; (c) após a remoção do campo elétrico.....	58
Figura 14: acoplamento entre domínios físicos	60
Figura 15: lâmina piezoelétrica	64
Figura 16: elemento estrutural laminado com camada piezoelétrica fixada à sua superfície.....	65
Figura 17: flexão provocada por duas camadas de atuadores piezoelétricos laminares fixadas em um substrato, submetidas a polaridades opostas	65
Figura 18: coordenadas da camada piezoelétrica k	67
Figura 19: movimento de um corpo em um sistema de coordenadas estacionário	70
Figura 20: elemento finito triangular, plano e delgado, de três nós	78
Figura 21: graus de liberdade nodais (a) de membrana e (b) de flexão do elemento finito triangular	78
Figura 22: sistemas de eixos, local e global, do elemento finito triangular de três nós	87
Figura 23: sistema de controle.....	93

Figura 24: controle em malha aberta	94
Figura 25: controle em malha fechada	95
Figura 26: desempenho em regime transitório.....	96
Figura 27: resposta no tempo de um sistema (a) estável e (b) assintoticamente estável	102
Figura 28: diagrama força distribuída $q \times$ deflexão vertical w_c do nó central da placa quadrada laminada engastada sob carga distribuída – análise estática não linear.....	119
Figura 29: casca cilíndrica laminada.....	120
Figura 30: diagrama força concentrada $P \times$ deflexão vertical w_C do nó central da casca cilíndrica laminada (0/90/0) sob carga concentrada – análise não linear geométrica.....	120
Figura 31: diagrama força concentrada $P \times$ deflexão vertical w_C do nó central da casca cilíndrica laminada (90/0/90) sob carga concentrada – análise não linear geométrica.....	121
Figura 32: diagrama força concentrada $P \times$ deflexão vertical w_C do nó central da casca cilíndrica laminada (45/-45) sob carga concentrada – análise não linear geométrica.....	121
Figura 33: esquema da discretização de $\frac{1}{4}$ da placa quadrada.....	122
Figura 34: deflexão vertical w_A , ao longo do tempo, do nó central da placa quadrada laminada sob carga distribuída – análise dinâmica não linear.....	123
Figura 35: viga piezoelétrica de PVDF.....	123
Figura 36: deflexão vertical w , ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga controlada pelo PID	125
Figura 37: diferença, ao longo do tempo, entre o <i>setpoint</i> e a deflexão vertical w de um dos nós da extremidade da viga, controlada pelo PID.....	126
Figura 38: sinal de controle (tensão elétrica) desenvolvido ao longo do tempo na viga <i>bimorph</i>	126
Figura 39: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga <i>bimorph</i> – comportamento não controlado e com controle LQR, com diferentes valores de x_r	128
Figura 40: variação da ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da viga <i>bimorph</i> com diferentes valores de x_r	129
Figura 41: atenuação da PSD da deflexão $w(t)$ de um dos nós da extremidade da viga <i>bimorph</i> – não controlada e controlada pelo LQR, com diferentes valores de x_r	129

Figura 42: atenuações da PSD da ação de controle $u(t)$, no controle LQR da viga <i>bimorph</i> com diferentes valores de xr	130
Figura 43: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga <i>bimorph</i> com os dois primeiros modos controlados pelo LQR Modal, com diferentes valores de xrm	131
Figura 44: variação da ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR Modal dos dois primeiros modos de vibração da viga <i>bimorph</i> com diferentes valores de xrm	132
Figura 45: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga <i>bimorph</i> com os dois e com os quatro primeiros modos controlados pelo LQR Modal, com $xrm = 0,000001$	132
Figura 46: variação da ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR Modal da viga com $xrm = 0,000001$ e diferentes valores de $nmode$	133
Figura 47: atenuações da PSD da deflexão vertical de um dos nós da extremidade da viga <i>bimorph</i> , controlada pelo LQR com $xrm = 0,000001$	134
Figura 48: atenuações da PSD da ação de controle, no controle LQR da viga <i>bimorph</i> com $xrm = 0,000001$	134
Figura 49: vista de topo da placa quadrada apoiada	135
Figura 50: comportamento amortecido e não controlado, ao longo do tempo, da deflexão vertical do nó central da placa	136
Figura 51: deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR	137
Figura 52: ações de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da placa apoiada ..	137
Figura 53: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da placa, controlada pelo LQR	138
Figura 54: atenuações da PSD das ações de controle, na placa controlada pelo LQR ..	138
Figura 55: deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal	139
Figura 56: ações de controle, ao longo do tempo, na placa controlada pelo LQR Modal	140
Figura 57: ações de controle, no intervalo $0 - 0,0001$ s, na placa controlada pelo LQR Modal	140
Figura 58: ações de controle, no intervalo $0,0001$ s – $0,01$ s, na placa controlada pelo LQR Modal	141
Figura 59: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal	141

Figura 60: atenuações das ações de controle, na placa controlada pelo LQR Modal...	142
Figura 61: geometria da casca esférica.....	142
Figura 62: comportamento amortecido e não controlado, ao longo do tempo, da deflexão vertical do nó central da casca esférica.....	144
Figura 63: deflexão vertical do nó central da casca esférica, ao longo do tempo, controlada pelo LQR.....	144
Figura 64: ações de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da casca esférica ..	145
Figura 65: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da casca esférica, controlada pelo LQR.....	145
Figura 66: atenuações das ações de controle, no controle LQR da casca esférica	146
Figura 67: deflexão vertical do nó central da casca esférica, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal.....	147
Figura 68: ações de controle, ao longo do tempo, no controle LQR Modal da casca esférica.....	147
Figura 69: ações de controle, no intervalo 0 – 0,0001 s, no controle LQR Modal da casca esférica	148
Figura 70: ações de controle, no intervalo 0,0001 s – 0,0035 s, no controle LQR Modal da casca esférica	148
Figura 71: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da casca esférica, controlada pelo LQR Modal.....	149
Figura 72: atenuações da PSD das ações de controle, no controle LQR Modal da casca esférica	149
Figura 73: vista superior das possíveis posições de pastilhas piezoelétricas ativáveis na viga <i>bimorph</i>	151
Figura 74: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga <i>bimorph</i> , controlada pelo LQR com todas as pastilhas ativadas e com apenas duas pastilhas ativadas nas posições “1” e “2” definidas na otimização	152
Figura 75: ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da viga com todas as pastilhas ativadas e com apenas duas pastilhas ativadas nas posições “1” e “2” definidas na otimização	152
Figura 76: (a) esquematização dos quadrantes; (b) numeração das pastilhas no primeiro quadrante.....	153
Figura 77: deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético	154

Figura 78: ações de controle, ao longo do tempo, na placa controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético.....	154
Figura 79: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético.....	155
Figura 80: atenuações da PSD das ações de controle, ao longo do tempo, na placa controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético .	155
Figura 81: pastilhas piezoelétricas posicionadas conforme melhor índice de controlabilidade, segundo Roy e Chakraborty (2009b)	157
Figura 82: deflexão vertical do nó central da casca esférica, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas	157
Figura 83: ações de controle, ao longo do tempo, na casca esférica controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas	158
Figura 84: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da casca esférica, controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas	158
Figura 85: atenuações da PSD das ações de controle, na casca esférica controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas	159
Figura 86: representação gráfica do método retentor de amostras de ordem zero.....	171

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: propriedades típicas de materiais piezoelétricos.....	59
Tabela 2: exemplos de domínios físicos e de variáveis de estados associadas	59
Tabela 3: pseudocódigo para o algoritmo genético binário.....	117
Tabela 4: deflexão vertical w_c do nó central da placa quadrada laminada engastada sob carga distribuída – análise estática linear	118
Tabela 5: deflexão vertical w de um dos nós da extremidade livre da viga <i>bimorph</i> sob carregamento elétrico.....	124
Tabela 6: primeiras frequências naturais da viga <i>bimorph</i>	127
Tabela 7: métricas no controle LQR da viga <i>bimorph</i>	131
Tabela 8: primeiras frequências naturais da placa apoiada	136
Tabela 9: métricas no controle LQR da placa apoiada	139
Tabela 10: métricas no controle LQR Modal da placa apoiada.....	141
Tabela 11: primeiras frequências naturais da casca apoiada	143
Tabela 12: métricas no controle LQR da casca esférica apoiada.....	145
Tabela 13: métricas no controle LQR Modal da casca esférica	150
Tabela 14: métricas na alocação ótima de pastilhas piezoelétricas na placa apoiada.	156
Tabela 15: métricas na alocação ótima de pastilhas piezoelétricas na casca apoiada.	159
Tabela 16: fatores de conversão de unidades.....	174

LISTA DE SÍMBOLOS

A	área do elemento
$[A]$	matriz de rigidez extensional do laminado; matriz do modelo de espaço de estados modais
$[A_m]$	matriz do modelo de espaço de estados modais
A_p	área da superfície da lâmina piezoelétrica
0A	área superficial do corpo na configuração 0C
b	largura da viga; comprimento da casca cilíndrica
$[B]$	matriz de acoplamento entre flexão e extensão do laminado
$[B_b]$	matriz relação deformação-deslocamento de flexão
$[B_m]$	matriz relação deformação-deslocamento de membrana
$[B_u]$	matriz do modelo de espaço de estados modais
$[B_{u_m}]$	matriz do modelo de espaço de estados modais
$[B_\phi]$	matriz das derivadas das funções de interpolação elétricas
$[c]$	matriz de amortecimento
c_{ijkl}^E	tensor de constantes elásticas sob campo elétrico constante
c_k	constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais
$[c_{uu}]$	matriz de amortecimento
C	coulomb
$[C]$	matriz de rigidez completa do laminado; matriz para a determinação do vetor das variáveis observáveis
$[C_m]$	matriz do modelo de espaço de estados modais
C_{ij}	elementos da matriz constitutiva do material
${}^tC_{ijrs}$	tensor de propriedades do material na configuração t

C_{ijkl}^E	tensor de constantes elásticas sob campo elétrico constante
${}^f\mathbb{C}$	configuração final
${}^0\mathbb{C}$	configuração inicial
$[C^i]$	matriz constitutiva do material
d_{ikl}	constantes piezoelétricas
D	deslocamento elétrico
$[D]$	matriz de rigidez à flexão do laminado; matriz para a determinação do vetor das variáveis observáveis
$[D_b]$	matriz constitutiva incremental de flexão
$[D_m]$	matriz constitutiva incremental de membrana; matriz do modelo de espaço de estados modais
$[D_{mb}]$	matriz constitutiva incremental de acoplamento membrana-flexão
e_{ikl}	constantes piezoelétricas
$[e^1]$	matriz de acoplamento piezoelétrico no sistema local de coordenadas
$e(t)$	sinal de erro
δe_{ij}	tensor de deformações correspondente aos deslocamentos virtuais
${}_t\Delta e_{ij}$	deformação incremental linear referenciada à configuração t
$\{\Delta e_m\}$	incrementos de deformação linear de membrana
$\{\Delta e_b\}$	incrementos de deformação linear de flexão (curvaturas)
E	campo elétrico
t_0E_k	campo elétrico Lagrangeano
t_0E_l	gradiente linear de campo elétrico
E_1	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young na direção principal 1
E_2	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young na direção principal 2

E_3	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young na direção principal 3
f_i^B	forças por unidade de volume
${}^0 f_i^S$	forças de superfície sobre o corpo na configuração ${}^0 C$
$f(x, t)$	função não linear
$[F]$	matriz de influência das ações de controle
$\{ {}^t F \}$	vetor de forças internas
$\{ {}^t F_b \}$	vetor de forças internas de flexão no tempo t
${}^t F_{ij}$	tensor gradiente de deformação
$[F_l]$	matriz de influência que indica a incidência das forças externas mecânicas não controladas
$\{ {}^t F_m \}$	vetor de forças internas de membrana no tempo t
$[F_p]$	matriz de influência dos elementos piezoelétricos que recebem as tensões elétricas
$\{ {}^t F_\phi \}$	vetor de forças elétricas internas
$[G]$	matriz de ganho
$[G_G]$	matriz geométrica do elemento
$[G_m]$	matriz de ganho no espaço modal
G_{12}	módulo de elasticidade transversal no plano 1-2
G_{23}	módulo de elasticidade transversal no plano 2-3
G_{31}	módulo de elasticidade transversal no plano 3-1
$[G^*]$	matriz de ganho para a ação de controle $\{v\}$
$[G_{dr}^*]$	matriz de ganho para anular os efeitos das forças mecânicas externas, para a ação de controle $\{v\}$
h	espessura das lâminas do laminado; espessura da viga

h_k	espessura da camada piezoelétrica k
h_{p_i}	espessura das lâmina piezoelétrica inferior
h_{p_s}	espessura das lâmina piezoelétrica superior
H	espessura do laminado
$[H]$	matriz de interpolação completa; matriz Hamiltoniana
$[H_b]$	função de interpolação de flexão
$[H_m]$	função de interpolação de membrana no elemento
$[I]$	matriz identidade
J	funcional associado ao sistema dinâmico
J_m	funcional que se deseja minimizar no controle modal
k	passo do método retentor de amostras de ordem zero
$[K_b]$	matriz de rigidez devida aos esforços de flexão
$[K_{bm}]$	matriz de rigidez devida aos esforços de flexão-membrana
K_d	ganho derivativo
K_i	ganho integral
$[K_L]$	matriz de rigidez linear
$[K_m]$	matriz de rigidez devida aos esforços de membrana
$[K_{mb}]$	matriz de rigidez devida aos esforços de membrana-flexão
$[{}^tK_{NL}]$	matriz de rigidez não linear geométrica
K_p	ganho proporcional
$[{}^tK]$	matriz de rigidez total
$[{}^tK_{uu}]$	matriz de rigidez
$[K_{u\phi}]$	matriz de rigidez eletromecânica

$[K_{\phi\phi}]$	a matriz de rigidez elétrica
l	medida do lado da placa quadrada
l_{i-j}	comprimento do lado $i - j$
L	comprimento da viga; comprimento da casca
L_i	coordenadas de área
L_t	atraso de transporte
$\{M\}$	esforços internos de momento, por unidade de comprimento, no laminado
$[M]$	matriz de massa
$\{^tM\}$	vetor de momentos de flexão no elemento
$\{^tMN\}$	vetor de forças internas de acoplamento dos efeitos de flexão e de membrana no elemento
M_o	máximo sobrepasso
$[M_{uu}]$	matriz de massa
$\{_{t-\Delta t} \Delta M\}$	momentos de flexão incrementais
nd	número de dipolos elétricos
n_i	vetor das normais à superfície
$nmode$	número de modos que serão controlados
np	número de camadas piezoelétricas
$npts$	número discreto de análises feitas ao longo do tempo
N	número de lâminas do laminado
$\{N\}$	esforços internos normais no laminado
$\{^tN\}$	vetor de forças internas de membrana no elemento
$[^tN]$	forças internas de membrana
$\{^tNM\}$	vetor de forças internas de acoplamento dos efeitos de membrana e de flexão no elemento

$\{p\}$	densidade volumétrica dos momentos de dipolo elétricos
P	força concentrada nodal
$\{P\}$	vetor de polarização
$[P]$	matriz utilizada na função de Lyapunov U
q	distribuição superficial de cargas elétricas ou mecânicas (pressão)
$\{q\}$	vetor de deslocamentos
$\{\dot{q}\}$	vetor de velocidades
$\{\ddot{q}\}$	vetor de acelerações
q_i	cargas elétricas no elemento piezoelétrico inferior
q_s	cargas elétricas no elemento piezoelétrico superior
$[Q]$	matriz de rigidez reduzida; matriz utilizada na função de Lyapunov U
$[Q_m]$	matriz-peso modal
$[\hat{Q}_m]$	matriz-peso modal utilizando-se um número truncado de modos
$[\bar{Q}]$	matriz de rigidez transformada
$[Q]_k$	matriz dos coeficientes elásticos da camada piezoelétrica k
r	raio da casca cilíndrica
\Re	trabalho virtual das cargas mecânicas externas
$[R]$	matriz de transformação auxiliar; matriz utilizada na função de Lyapunov U
$[R_m]$	matriz-peso modal
$[\hat{R}_m]$	matriz-peso modal utilizando-se um número truncado de modos
$\{{}^{t+\Delta t}R\}$	vetor de forças nodais externas
$\{{}^{t+\Delta t}R_b\}$	vetor de forças nodais externas referente aos esforços de flexão

$\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_m \}$	vetor de forças nodais externas referente aos esforços de membrana
$\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_\phi \}$	vetor de cargas elétricas nodais externas
s_{ijkl}^E	tensor de flexibilidade sob campo elétrico constante
$\{ \mathbf{S} \}$	vetor de deformação mecânica
$[\mathbf{S}]$	matriz de flexibilidade reduzida da lâmina ortotrópica sob estado plano de tensões; matriz de Ricatti
$[\bar{\mathbf{S}}]$	matriz de flexibilidade reduzida transformada
S_{ij}	componentes dos tensores mecânicos de tensão e de deformação; segundo tensor de Piola-Kirchhoff
$[\mathbf{S}^1]$	matriz de flexibilidade
$[\mathbf{S}^*]$	solução da Equação de Ricatti para a ação de controle $\{v\}$
${}_t \Delta S_{ij}$	tensão incremental referenciada à configuração t
t	tempo; espessura da casca
T_c	temperatura de Curie
t_f	tempo final
t_i	tempo inicial
t_p	espessura da lâmina piezoelétrica
t_r	tempo de subida
t_s	tempo de acomodação
Δt	intervalo de tempo
T	período de amostragem; indicação de matriz transposta; temperatura
$\{ \mathbf{T} \}$	vetor de tensão mecânica
$[\mathbf{T}]$	matriz de transformação
T_{ij}	componentes dos tensores mecânicos de tensão
$[\mathbf{T}_{gl}]$	matriz de transformação global-local

$[T_r]$	matriz de transformação ou rotação
$[T_\theta]$	matriz de transformação do sistema de coordenadas global para o local
${}^{t+\Delta t} \mathfrak{S}$	trabalho realizado pelas cargas externas
$\{u\}$	vetor de ações de controle
$\{u_{bi}\}^e$	vetor de deslocamentos nodais de flexão do elemento
\ddot{u}_i	acelerações
$\{u_{mi}\}^e$	vetor de deslocamentos nodais de membrana do elemento
u_x	deslocamentos na direção x (ou 1)
u_{xi}	grau de liberdade nodal de translação
u_y	deslocamentos na direção y (ou 2)
u_{yi}	grau de liberdade nodal de translação
$u(t)$	sinal de controle
$\{u^*\}$	ação de controle pela estratégia da rejeição das perturbações
δu	deslocamento virtual
$\{\Delta u\}$	vetor de incremento de deslocamentos nodais
Δu_i	incrementos de deslocamento no plano neutro do elemento
$\{{}_{t-\Delta t} \Delta u_b\}$	vetor de deslocamentos incrementais de flexão na configuração $t - \Delta t$
U	função de Lyapunov
$[U]$	matriz cujas colunas consistem de autovetores
v	volume
$\{v\}$	vetor de tensões elétricas controladas
$\{v^x\}$	vetor-posição de um ponto P qualquer da lâmina nas direções 0- x - y - z
$\{v^1\}$	vetor-posição de um ponto P qualquer da lâmina nas direções 0-1-2-3

0V	volume do corpo na configuração 0C
w	deslocamentos na direção z (ou 3)
w_A	deslocamento do nó central da casca ou placa
w_c	deslocamento transversal do nó central da placa ou casca
w_C	deslocamento transversal do nó central da placa
w_i	deslocamentos transversais nodais
Δw	incrementos de deslocamento no plano neutro do elemento
$\{x\}$	vetor de variáveis de estado
$\{\dot{x}\}$	vetor das derivadas das variáveis de estado
$\{x_m\}$	vetor de variáveis de estado modal
x_{rms}^q	valor quadrático médio das variáveis de estado
x_{rms}^v	valor quadrático médio das ações de controle
$x^g-y^g-z^g$	sistema de eixos global
x_i	coordenada nodal
$x^l-y^l-z^l$	sistema de eixos local
$\{x(t)\}$	solução da equação diferencial associada às variáveis de estado
xq	valor a ser preenchido na diagonal da matriz-peso $[Q]$
xqm	valor a ser preenchido na diagonal da matriz-peso $[\hat{Q}_m]$
xr	valor a ser preenchido na diagonal da matriz-peso $[R]$
xrm	valor a ser preenchido na diagonal da matriz-peso $[\hat{R}_m]$
$\{y\}$	vetor das variáveis observáveis
y_i	coordenada nodal
$y(\infty)$	valor da saída no regime permanente

z	cota
z_k	distância da face superior da lâmina k à superfície média do laminado; coordenada da camada k
\bar{z}_k	distância da superfície média da lâmina k até a superfície de média do laminado
z_{k-1}	coordenada da camada k
z_{mk}	distância entre o plano médio da lâmina piezoelétrica k e o plano médio do laminado
α_R	constante de Rayleigh
β_R	constante de Rayleigh
γ_{ij}	distorções
ε_i	deformações normais
ε_{kl}	componentes dos tensores mecânicos de deformação
ε_{ik}^S	constantes dielétricas (permissividade) sob deformação mecânica constante
ε_{ik}^T	constante dielétrica sob tensão mecânica constante
${}^t_0\varepsilon_{ij}$	tensor de deformações de Green-Lagrange
$\{\varepsilon^o\}$	deformações de membrana
ζ	razão de amortecimento
$\{\eta\}$	vetor de variáveis modais
$\{\dot{\eta}\}$	vetor de derivadas das variáveis modais
$\{\Delta\eta\}$	incrementos de deformação não linear
${}_t\Delta\eta_{ij}$	parcela não linear da deformação incremental referenciada à configuração t
θ	orientação dos eixos principais das lâminas do laminado; ângulo entre o eixo x , do sistema de coordenadas global $0-x-y-z$, e o eixo 1, do sistema de coordenadas local do compósito laminado
θ_{xi}	rotações nodais em torno do eixo x
θ_{yi}	rotações nodais em torno do eixo y

θ_{zi}	grau de liberdade nodal de rotação
$\{\kappa\}$	curvaturas da superfície de referência
λ	autovalores; multiplicador de Lagrange
λ_{xx}	cosseno do ângulo formado entre o eixo x^l e x^g
$\Delta\lambda$	incremento de carga inicial
$[A]$	matriz dos cossenos dos ângulos entre os eixos locais e globais; matriz diagonal em que cada termo é um autovalor
ν_{ij}	coeficiente de Poisson
ξ	permissividade elétrica absoluta; razão de amortecimento
ξ_0	permissividade elétrica no vácuo
ξ_{ik}^S	constantes dielétricas (permissividade) sob deformação mecânica constante
$[\Xi]$	matriz que relaciona as variáveis de estado às variáveis de estado modais
ρ	densidade de mudança de volume livre
ρ_p	densidade de mudança de volume
${}^t\rho$	massa específica do corpo na configuração t
${}^0\rho$	massa específica do corpo na configuração 0
σ_i	tensões normais
${}^t{}_i\zeta$	densidade superficial de cargas
τ_{ij}	tensões cisalhantes; tensor de Cauchy
ϕ	potencial elétrico
$\{\phi\}$	vetor com os autovetores da estrutura
ϕ_k	voltagem na camada piezoelétrica k ; autovalores
$\delta\phi_i$	potencial elétrico virtual
$\Delta\phi_{p_i}$	valor incremental do potencial elétrico na lâmina inferior

$\Delta\phi_s$	valor incremental do potencial elétrico na lâmina superior
$\{\Delta\phi\}_s$	voltagem no sensor
$[\Phi]$	matriz cujas colunas são os autovetores obtidos através da solução do problema de autovalores e autovetores
$[\Phi(t, \tau)]$	matriz de transição de estado
$[\Phi_{11}], [\Phi_{12}]$	autovetores com partes reais positivas da matriz Hamiltonina
$[\Phi_{21}], [\Phi_{22}]$	autovetores com partes reais negativas da matriz Hamiltonina
χ	tensor de suscetibilidade elétrica
$\psi_x(x, y)$	inclinações da normal à superfície média na direção x
$\psi_y(x, y)$	inclinações da normal à superfície média na direção y
ω	frequências naturais da estrutura
$[\Omega]$	matriz diagonal cujas componentes são os quadrados dos autovalores do sistema

1 INTRODUÇÃO

As vibrações mecânicas ocorrem em amplitudes que variam de metros, na engenharia civil, a nanômetros, em estruturas de precisão. Sua limitação, minimização ou controle é importante nos seguintes casos, dentre vários:

- a) para evitar o colapso em edifícios na ocasião de terremotos, instabilidade em pontes sob ação de ventos fortes ou fadiga estrutural em partes de máquinas e mecanismos;
- b) para proporcionar conforto a usuários de edifícios sob ação de ventos fortes, e de automóveis e aeronaves, atuando na suspensão mecânica e na redução de ruídos;
- c) para permitir a operacionabilidade de dispositivos técnicos ou científicos de precisão, tais como leitores óticos em computadores e telescópios.

Algumas maneiras de reduzir as vibrações mecânicas são: o enrijecimento, o amortecimento e o isolamento.

Enrijecimento consiste em deslocar a frequência de ressonância da estrutura além da banda de frequência da excitação. *Amortecimento* consiste da redução dos picos da ressonância dissipando a energia de vibração. *Isolamento* consiste em impedir a propagação dos distúrbios a partes sensíveis dos sistemas.

O amortecimento pode ser alcançado *passivamente*, com fluidos amortecedores, correntes parasitas ou de Foucault, elastômeros ou elementos histeréticos, ou por transferência da energia cinética para *absorvedores dinâmicos de vibração*. Pode-se ainda utilizar transdutores como conversores de energia, para transformar energia de vibração em energia elétrica que é dissipada em redes elétricas, ou armazenada (colheita de energia). Recentemente, dispositivos *semi-ativos* (também chamados semi-passivos) têm se tornado disponíveis; eles consistem de dispositivos passivos com propriedades controláveis. O fluido amortecedor magneto-reológico é um exemplo famoso; transdutores piezoelétricos com redes elétricas comutáveis são outros. Quando alta precisão é necessária, *controle ativo* pode ser utilizado; isto envolve um conjunto de sensores (de deformação, aceleração, velocidade, força,...), um conjunto de atuadores (de força, inércia, deformação,...) e um algoritmo de controle (do tipo malha fechada ou do tipo retro-alimentado) (PREUMONT; SETO, 2008, p. 2, grifos do autor, tradução nossa).

Portanto, para o controle ativo da vibração em estruturas é necessária a sua integração com dispositivos transdutores. Para melhor compreensão do assunto é útil, entretanto, fazer as seguintes distinções.

“Estruturas adaptativas ou adaptáveis” (*adaptive structures*) e “estruturas sensoras” (*sensory structures*) são aquelas que possuem atuadores e sensores nelas distribuídos, respectivamente; a integração de estruturas adaptáveis e também sensoras com um sistema de controle do tipo malha fechada resulta em “estruturas controladas” (*controlled structures*).

Se nas estruturas controladas os componentes servem também de suporte ao carregamento, elas são chamadas de “estruturas ativas” (*active structures*).

O termo “estruturas inteligentes” (*intelligent structures*) teria sido empregado pela primeira vez por Crawley e De Luis (1987), e é reservado àquelas “que incorporam atuadores e sensores que são altamente integrados na estrutura e têm função estrutural, e também controle lógico, condicionamento de sinais e dispositivos eletrônicos para amplificação de força altamente integrados” (WADA; FANSON; CRAWLEY, 1990, tradução nossa).

Esta relação de termos descritivos “não é de modo algum exaustiva e demonstra o sempre crescente volume de vocabulário necessário para descrever a fusão de materiais ativos, controles e estruturas em sistemas compostos” (CLARK; SAUNDERS; GIBBS, 1998, tradução nossa).

Paralelamente ao desenvolvimento dos dispositivos transdutores e das técnicas de controle ao longo do século XX, houve também o desenvolvimento de materiais estruturais que atendem às propriedades desejadas na indústria automobilística e aeroespacial, na engenharia civil e mesmo nas aplicações médicas. Em décadas recentes, o acoplamento dos novos materiais estruturais às estruturas inteligentes possibilitou diversas aplicações de alto desempenho nessas áreas.

Materiais compósitos são amplamente usados em uma variedade de estruturas, incluindo veículos militares e aeroespaciais, aplicações em infraestrutura civil bem como em equipamentos esportivos. Estruturas de laminados compósitos consistem de várias camadas de diferentes lâminas reforçadas por fibras, unidas para obter propriedades estruturais desejadas. As propriedades estruturais desejadas são alcançadas pela variação da espessura e das propriedades do material das lâminas, e da sequência de empilhamento. Com a disponibilidade de materiais funcionais e a exequibilidade de incorporá-los ou uni-los em compósitos

estruturais, novos conceitos de estruturas inteligentes têm emergido para aplicações estruturais potencialmente de alto desempenho. Aplicações desta classe de estruturas podem ser encontradas no monitoramento da integridade estrutural, isolamento e controle de vibrações, aplicações médicas, detecção de danos, controle de ruído e forma (LEE; REDDY; ROSTAM-ABADI, 2006, tradução nossa).

A crescente necessidade de estruturas mais leves requer desenvolvimento de novos tipos de materiais. Um grande número de aplicações, como estruturas espaciais [...] requer propriedades mecânicas altamente específicas, isto é, razão entre propriedades mecânicas e densidade. Laminados reforçados por fibras, que têm alta resistência e rigidez em direções desejadas e baixas resistências em outras direções oferecem tal combinação superior de características. O material pode também alcançar as exigências específicas das estruturas pois suas propriedades podem ser adaptadas pelo ajuste da natureza dos constituintes, suas proporções, orientação das fibras, sequência de camadas etc., e este fato faz com que este material seja um dos mais avançados materiais estruturais na atualidade. [...] O comportamento de estruturas feitas de compósitos laminados pode ser ainda aperfeiçoado. Uma das características inerente a sistemas naturais evidente ao observador é que eles são capazes de reconhecer o caráter e intensidade de estímulos externos, e de reagir apropriadamente a fim de apresentar o melhor desempenho ou proteger sua integridade. Para um sistema artificial exibir um comportamento similar é necessário que seja provido com um material inteligente – uma estrutura inteligente é obtida desta maneira. Em anos recentes o estudo de estruturas inteligentes tem atraído muitos projetos de pesquisa, devido ao seu benefício em potencial a uma vasta gama de aplicações, como controle de forma, supressão de vibrações, atenuação de ruído, detecção de danos etc. (MARINKOVIC; KÖPPE; GABBERT, 2004, tradução nossa).

Fica evidente o caráter interdisciplinar da pesquisa e do desenvolvimento de estruturas inteligentes, pois envolvem ciência dos materiais, controle, eletrônica, mecânica estrutural e processamento de sinais. Destacam-se na literatura as seguintes referências, dentre muitas, tratando de aspectos introdutórios e/ou avançados acerca dos materiais piezoelétricos, estruturas inteligentes e suas aplicações.

O histórico do desenvolvimento e a abordagem dos aspectos físicos dos materiais piezoelétricos, incluindo análise termodinâmica e cristalográfica, são apresentados por Cady (1946) e Ikeda (1990). Gautschi (2002) trata com profundidade as propriedades, características e aplicações de sensores piezoelétricos, em particular. Chopra (2002) faz uma revisão do estado da arte das estruturas inteligentes e sistemas integrados, incluindo uma longa bibliografia. Leo (2007) apresenta fundamentos para a análise e projeto de sistemas de engenharia que incorporam materiais inteligentes, incluindo materiais piezoelétricos, ligas com memória de forma (*shape memory alloys*) e polímeros eletroativos (*electroactive polymers*). Gaudenzi (2009) apresenta uma introdução às estruturas inteligentes e aplicações: sensores e atuadores; monitoração da integridade estrutural; mudança de forma; controle de vibrações; e conversão de energia de vibração disponível no ambiente em energia elétrica (*vibration based energy harvesting*). Preumont e Seto (2008) tratam do amortecimento ativo (*active damping*) de estruturas,

com ênfase em aplicações do controle ativo de vibrações na engenharia civil. Uma extensa revisão da literatura sobre controle de estruturas, incluindo aplicações na engenharia aeroespacial e civil, é feita por Meirovitch (1990).

A determinação das matrizes-peso $[Q]$ e $[R]$ do método LQR, de modo a minimizar o custo mantendo ainda a estabilidade e desempenho do controle, constitui por si própria um amplo campo de pesquisas. Ang, Wang e Quek (2002) desenvolvem um método em que a matriz $[R]$ é função das propriedades do material piezoelétrico, e $[Q]$ é função da matriz de massa, de rigidez e dos autovetores do sistema, constituindo uma matriz diagonal. Ning (2004) emprega um algoritmo genético para otimizar o posicionamento e também o número de pastilhas piezoelétricas. Roy e Chakraborty (2009a) otimizam os valores das matrizes-peso empregando um algoritmo genético. Os mesmos autores, em trabalho posterior, apresentam o número e a localização ótima de pastilhas piezoelétricas, em aplicações de casca esférica e de casca cilíndrica, como sendo função do índice de controlabilidade (ROY; CHAKRABORTY, 2009b). No presente trabalho tais matrizes $[Q]$ e $[R]$ foram arbitradas como diagonais, e o seu preenchimento recebeu um estudo parametrizado.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se consolidado como uma ferramenta eficiente na modelagem de sistemas complexos. No presente trabalho, foi empregado o elemento finito GPL-T9 (QUN; MU; WENQI, 1998), plano e triangular, com três nós e seis graus de liberdade mecânicos por nó (três componentes de deslocamentos e três componentes de rotação), desenvolvido para a análise não linear geométrica de estruturas de cascas. Acrescentou-se ao elemento GPL-T9 mais um grau de liberdade elétrico por camada piezoelétrica, possibilitando a análise do acoplamento eletromecânico (BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2001; GAO; SHEN, 2003; ISOLDI et al., 2008).

Assim, o desenvolvimento de rotinas computacionais para a simulação do controle ativo de estruturas inteligentes de cascas, placas e vigas delgadas de material compósito laminado com camadas de material piezoelétrico como sensores e/ou atuadores, bem como a otimização do posicionamento de um número discreto de pastilhas piezoelétricas, são os principais objetivos deste trabalho. Caracterizam esta pesquisa:

- a) a discretização espacial é feita via Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento GPL-T9 de três nós e seis graus de liberdade mecânicos por nó, mais um grau de liberdade elétrico por camada piezoelétrica;
- b) a solução do sistema de equações lineares é feita pelo Método dos Gradientes Conjugados com pré-condicionamento diagonal;
- c) a análise estática não linear geométrica é feita com o Método dos Deslocamentos Generalizados;
- d) são avaliados dois métodos de controle: o Proporcional-Integral-Derivativo (PID) e o Regulador Quadrático Linear ou *Linear Quadratic Regulator* (LQR), bem como seu método derivado, o LQR Modal;
- e) a discretização temporal é feita pelo esquema implícito de Newmark, exceto no controle LQR e LQR Modal, onde é empregado o Método da Matriz de Transição de Estado com o Retentor de Amostras de Ordem Zero, o qual não exige a solução de um sistema linear de equações a cada intervalo de tempo;
- f) no controle LQR e LQR Modal a solução da Equação de Ricatti é obtida a partir dos autovetores complexos da Equação Hamiltoniana; para considerar o efeito das forças mecânicas externas não controladas o ganho é calculado pela estratégia conhecida como “rejeição das perturbações”; e tensões elétricas, aplicadas em elementos atuadores piezoelétricos, são tomadas como ação de controle;
- g) a otimização do posicionamento de pastilhas piezoelétricas é feita utilizando um algoritmo genético;
- h) as rotinas são escritas em Fortran 90 e executadas em computadores padrão IBM-PC com sistema operacional Windows®.

Como principais contribuições desta pesquisa podem ser destacados:

- a) o desenvolvimento de ferramenta computacional que possibilita estudos voltados ao controle de estruturas inteligentes com geometrias complexas,

e visando o desempenho do controle com a diminuição da energia gasta e do uso de material piezoelétrico, através da sua alocação ótima;

- b) problemas que apresentam forças mecânicas externas de longa duração, e não apenas perturbações iniciais, são enfrentados empregando a estratégia da “rejeição das perturbações”.

O texto desta tese é composto por oito capítulos. Nos Capítulos 2, 3 e 4 são tratados os materiais compósitos, os materiais piezoelétricos e a formulação através do método dos elementos finitos, respectivamente. A teoria de controle é detalhada no Capítulo 5, e o Capítulo 6 versa sobre a otimização via algoritmo genético. No Capítulo 7 são discutidas aplicações, cujos resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura especializada. Finalmente, no Capítulo 8 são apresentadas conclusões e sugestões para próximos trabalhos.

Nesta Tese pretende-se fazer um trabalho autocontido para facilitar sua leitura. Por conseguinte, os Capítulos 2, 3, 4 e 5 contêm uma revisão dos textos de Mendonça (2005) e Jones (1999); Leo (2007); Bathe (1996) e Isoldi (2008); Bazanella e Silva (2005) e Kwon e Bang (2000), respectivamente. Deve ainda ser salientado que:

- a) no âmbito das pesquisas realizadas previamente pelo PPGE/UFRRGS, o elemento finito GPL-T9 foi adotado por Teixeira (2001) e Isoldi (2008);
- b) todos os códigos computacionais – para a análise modal, estática e dinâmica, com e sem linearidade geométrica, com e sem acoplamento eletromecânico; para o controle PID, LQR e LQR Modal; para a otimização via algoritmo genético – foram desenvolvidos pelo autor, aproveitando as partes cedidas por Isoldi (2008) dos códigos que ele gerou no seu doutoramento, de forma que o presente trabalho diferencia-se do dele por terem sido incluídas a teoria do controle e a otimização, bem como suas aplicações.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Um material compósito, de acordo com Mendonça (2005), “é um conjunto de dois ou mais materiais diferentes, combinados em escala macroscópica, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta”.

A criteriosa combinação dos materiais componentes possibilita aperfeiçoar o desempenho do compósito quanto, dentre muitas propriedades, a redução de peso; a resistência à corrosão e à abrasão; a resistência estática e à fadiga; a rigidez; ao isolamento térmico, elétrico ou acústico.

A incorporação de fibras para melhorar as propriedades dos materiais já era utilizada na antiguidade (MOURA; MORAIS; MAGALHÃES, 2005). O desenvolvimento dos materiais compósitos possibilitou conquistas tecnológicas recentes em áreas tão diversas quanto a aeroespacial, a bioengenharia e a construção civil.

2.1 CLASSIFICAÇÕES DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

Jones (1999) apresenta quatro tipos de materiais compósitos:

- a) materiais compósitos fibrosos, que consistem de fibras em uma matriz;
- b) materiais compósitos laminados, que consistem de camadas de vários materiais;
- c) materiais compósitos com partículas distribuídas em uma matriz;
- d) materiais compósitos que consistem em uma combinação de alguns ou todos os tipos anteriores.

Simplificadamente, os materiais compósitos podem ser classificados como compósitos reforçados com fibras e como compósitos reforçados com partículas.

Na Figura 1 (a) é mostrada uma lâmina composta por uma matriz reforçada com fibras em uma direção. Como tais lâminas geralmente apresentam boas propriedades mecânicas apenas na direção das fibras é conveniente combinar lâminas de diferentes orientações em laminados, tal como mostrado na Figura 1 (b), possibilitando assim melhor resposta às solicitações.

Nos compostos reforçados com fibras, elas podem ser contínuas, longas ou curtas; e quanto à sua disposição, paralelas, unidirecionais ou bidirecionais, ou ainda aleatoriamente orientadas.

Nos compostos reforçados com partículas, elas não possuem dimensões predominantes tal como as fibras (MENDONÇA, 2005).

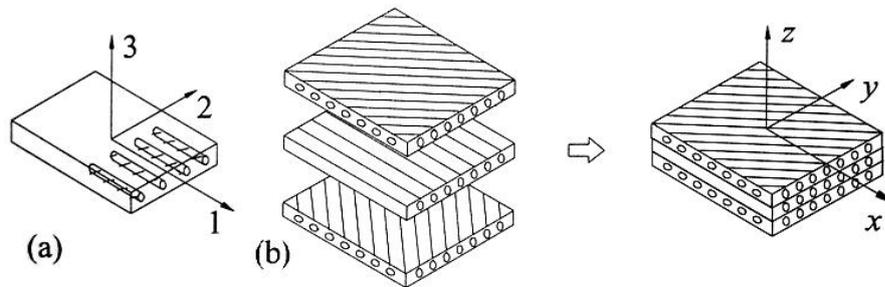


Figura 1: compostos reforçados com fibras; laminados (baseada em MENDONÇA, 2005)

Os compósitos podem ainda ser classificados, em função da sua origem, como naturais (origem vegetal ou animal) e sintéticos (industrializados).

Levy Neto e Pardini (2006) apresentam a classificação dos materiais compósitos, mostrada na Figura 2.

As matrizes sintéticas usualmente são poliméricas, cerâmicas ou metálicas. Os reforços fibrosos podem ser sintéticos (fibras de carbono, poliméricas, cerâmicas) ou naturais (fibras de sisal, coco, juta) (LEVY NETO E PARDINI, 2006).

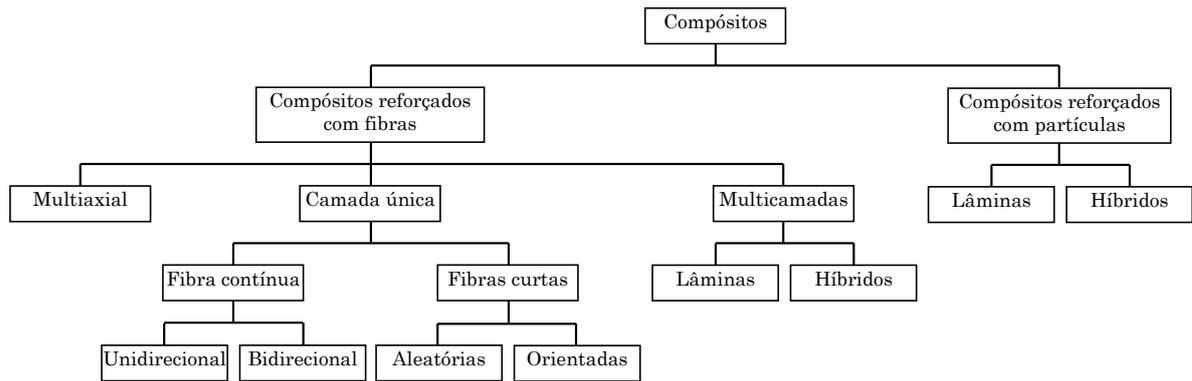


Figura 2: classificação hierárquica de materiais compósitos (baseada em LEVY NETO E PARDINI, 2006)

2.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

Enquanto a maioria dos materiais comuns da engenharia são homogêneos e isotrópicos, os materiais compósitos são frequentemente não homogêneos (ou heterogêneos) e não isotrópicos (ortotrópicos; anisotrópicos). Devido à heterogeneidade dos materiais compósitos, eles são estudados a partir de dois pontos de vista: micromecânico e macromecânico.

A abordagem micromecânica considera a interação dos materiais constituintes na escala microscópica, objetivando determinar seu efeito nas propriedades do material compósito; na abordagem macromecânica pressupõe-se que o material é homogêneo e os efeitos dos materiais constituintes são detectados apenas como propriedades macroscópicas aparentes médias do material compósito (JONES, 1999). Estas propriedades são obtidas diretamente de ensaios com corpos de prova ou, de modo aproximado, a partir das propriedades termomecânicas dos componentes da lâmina, as fibras e a matriz (MENDONÇA, 2005).

Neste trabalho é adotada a abordagem macromecânica, devido à sua imediata aplicação ao estudo da mecânica estrutural.

2.2.1 Relação tensão-deformação em materiais compósitos

A relação tensão-deformação para um material elástico linear é dada por (MENDONÇA, 2005)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

ou, em forma compacta,

$$\{\sigma^1\} = [C^1] \{\varepsilon^1\}, \quad (2.2)$$

onde σ_i e τ_{ij} (com $i, j = 1, 2, 3$) são as tensões normais e cisalhantes, respectivamente; C_{ij} (com $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) são os elementos da matriz constitutiva do material $[C^1]$; e ε_i e γ_{ij} (com $i, j = 1, 2, 3$) são as deformações normais e as distorções, respectivamente, definidas por

$$\{\varepsilon^1\} = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right\}^T, \quad (2.3)$$

sendo u_x , u_y e w os deslocamentos nas direções x , y e z (ou direções 1, 2 e 3), respectivamente. O sobrescrito T indica a forma transposta do vetor; o sobrescrito “1” refere-se ao sistema de coordenadas definido pelos eixos 1-2-3, tal como ilustrado na Figura 1 (a); e “*sim.*” indica a simetria da matriz.

A matriz $[C^1]$ possui vinte e uma constantes independentes e é não-singular, podendo ser invertida, resultando a seguinte relação deformação-tensão:

$$\{\varepsilon^1\} = [C^1]^{-1} \{\sigma^1\} \Rightarrow \{\varepsilon^1\} = [S^1] \{\sigma^1\}, \quad (2.4)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde $[S^1] = [C^1]^{-1}$ é a matriz de flexibilidade.

Ocorrendo dois planos ortogonais de simetria de propriedades do material, existirá necessariamente simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois; um material com essa característica de simetria é dito ortotrópico e sua relação tensão-deformação apresenta nove constantes independentes,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}; \quad (2.6)$$

nesse caso a relação deformação-tensão é dada por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

A matriz de flexibilidade de um material ortotrópico, empregando constantes de engenharia, é dada por

$$[S^1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde E_1 , E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade longitudinais ou módulos de Young, nas direções principais 1, 2 e 3, respectivamente; G_{12} , G_{23} e G_{31} são os módulos de elasticidade transversal nos planos 1-2, 2-3 e 3-1, respectivamente; e $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$ são os seis valores de coeficientes de Poisson.

Apesar de terem sido definidas doze constantes de engenharia para o material ortotrópico, devido à simetria da matriz de flexibilidade ($S_{ij} = S_{ji}$) existem apenas nove constantes independentes, pois

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j). \quad (2.9)$$

Sendo a matriz de rigidez a inversa da matriz de flexibilidade, suas componentes podem ser encontradas através da álgebra matricial, resultando em

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{s}; C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{s}; C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{s}; \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{s}; C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{s}; C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{s}; \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}; C_{55} = \frac{1}{S_{55}}; C_{66} = \frac{1}{S_{66}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

com

$$s = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}. \quad (2.11)$$

Os coeficientes não nulos da matriz de rigidez de um material ortotrópico, a partir das constantes de engenharia, são

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta_C}; C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta_C}; C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta_C}; \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta_C} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta_C}; C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta_C} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta_C}; \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta_C} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta_C}; C_{44} = G_{23}; C_{55} = G_{31}; C_{66} = G_{12}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\Delta_C = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}. \quad (2.13)$$

2.2.2 Material ortotrópico sob estado plano de tensões

Seja a lâmina apresentada na Figura 3, submetida a um estado plano de tensões no Plano 1-2 tal como esquematizado na Figura 4. Desta forma tem-se que

$$\sigma_3 = 0, \tau_{23} = 0 \text{ e } \tau_{31} = 0, \quad (2.14)$$

e

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0 \text{ e } \tau_{12} \neq 0 \quad (2.15)$$

nas relações tensão-deformação definidas anteriormente.

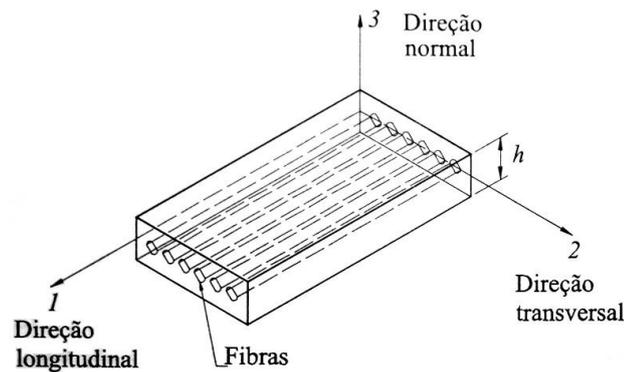


Figura 3: direções principais de propriedades mecânicas em uma lâmina (MENDONÇA, 2005)

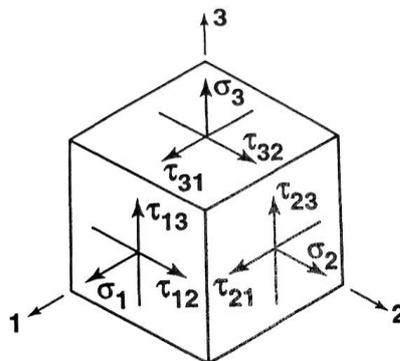


Figura 4: tensões em um elemento (JONES, 1999)

Impondo as condições dadas pelas equações (2.14) e (2.15) na Equação (2.5), para materiais ortotrópicos as deformações fora do Plano 1-2 ficam definidas por

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \gamma_{23} = 0 \text{ e } \gamma_{31} = 0, \quad (2.16)$$

e as demais resultam

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

ou, em forma matricial condensada,

$$\{\varepsilon^1\} = [S]\{\sigma^1\}, \quad (2.18)$$

onde $[S]$ é a matriz de flexibilidade reduzida da lâmina ortotrópica sob estado plano de tensões, em relação aos eixos principais.

A partir da inversão da Equação (2.17) obtém-se a relação tensão-deformação reduzida,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

ou

$$\{\sigma^1\} = [Q]\{\varepsilon^1\}, \quad (2.20)$$

onde os termos Q_{ij} da matriz de rigidez reduzida $[Q]$ são dados por

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \text{ e } Q_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad (2.21)$$

ou ainda, em constantes de engenharia,

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \text{ e } Q_{66} = G_{12}. \quad (2.22)$$

Verifica-se que o comportamento de uma lâmina ortotrópica sob estado plano de tensões depende de apenas quatro constantes elásticas: E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} , além da relação de reciprocidade

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (2.23)$$

No caso particular do material isotrópico ocorrem as seguintes simplificações:

$$E_1 = E_2 = E, \nu_{12} = \nu_{21} = \nu \text{ e } G_{12} = G; \quad (2.24)$$

logo,

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{E}, S_{12} = -\frac{\nu}{E} \text{ e } S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) = \frac{1}{G}, \quad (2.25)$$

e os elementos da matriz de rigidez reduzida ficam

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \text{ e } Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G. \quad (2.26)$$

2.2.3 Rotação da relação tensão-deformação

Os laminados são compostos pelo empilhamento de diversas lâminas, cada qual com uma orientação das fibras diferente das demais. A análise do laminado deve ser feita a partir de um sistema de coordenadas que, no caso mais geral, não coincide com o sistema principal de nenhuma das lâminas. Por isso, devem ser considerados dois sistemas de coordenadas: um global, 0- x - y - z ; e um local, para cada lâmina, 0-1-2-3, orientado nas suas direções principais. Em lâminas reforçadas por fibras unidirecionais, o Eixo 1 é orientado ao longo das fibras, e o Eixo 3, na direção normal à lâmina. Na Figura 5 são mostrados, no plano de uma lâmina, os sistemas de eixos global 0- x - y e local 0-1-2.

As relações tensão-deformação mostradas anteriormente foram obtidas em relação ao eixo principal da lâmina; para um sistema qualquer de eixos de referência, as seguintes considerações devem ser feitas.

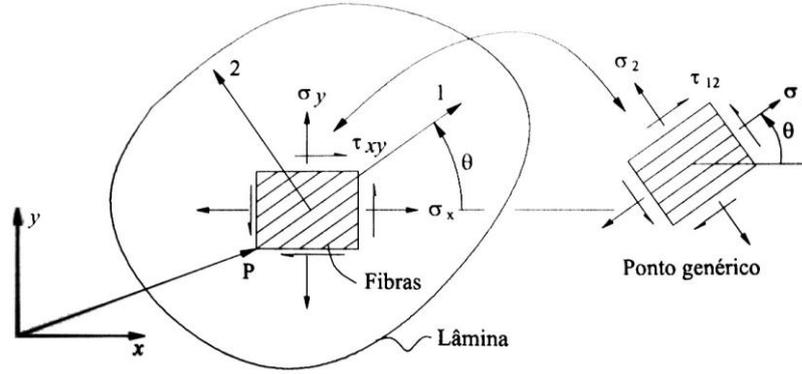


Figura 5: sistemas de eixos, global e local, e tensões coplanares em um ponto P genérico de uma lâmina (MENDONÇA, 2005)

Seja a matriz de transformação ou rotação $[T_r]$ definida como a matriz que exprime a rotação plana de componentes do sistema de eixos 0- x - y - z para o sistema 0-1-2-3, através de um ângulo θ em torno do eixo z , conforme a Figura 5:

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \quad (2.27)$$

um vetor-posição em um ponto P qualquer da lâmina, com componentes $\{v^x\} = \{v_x \ v_y\}^T$ nas direções 0- x - y - z , tem suas componentes $\{v^1\} = \{v_1 \ v_2\}^T$ nas direções 0-1-2-3 calculadas por

$$\{v^1\} = [T_r]^T \{v^x\}, \quad (2.28)$$

onde os índices x e 1 referem-se aos sistemas de eixos 0- x - y - z (ou x - y) e 0-1-2-3 (ou 1-2), respectivamente.

Verifica-se que as componentes de tensões planas se transformam em uma rotação em torno do eixo z por

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ou

$$[\sigma^x] = [T_r][\sigma^1][T_r]^T, \quad (2.30)$$

e que a expressão da transformação plana das tensões fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.32)$$

ou ainda

$$[\sigma^x] = [T]^{-1} [\sigma^1]. \quad (2.33)$$

A matriz $[T]$ é a matriz de transformação,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

cuja inversa é obtida facilmente substituindo θ por $-\theta$.

Para a transformação das deformações procede-se da mesma maneira, porém a deformação de cisalhamento $\gamma/2$ deve ser empregada no lugar de γ ; então

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

ou

$$\{\varepsilon^{x/2}\} = [T]^{-1} \{\varepsilon^{1/2}\}, \quad (2.36)$$

onde os índices $x/2$ e $1/2$ são usados para destacar o uso da metade da deformação de cisalhamento (MENDONÇA, 2005, p. 91).

Definindo a matriz $[R]$ por

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

de modo que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \text{ e } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}, \quad (2.38)$$

conclui-se que

$$\{\varepsilon^1\} = [R]\{\varepsilon^{1/2}\} \text{ e } \{\varepsilon^x\} = [R]\{\varepsilon^{x/2}\}; \quad (2.39)$$

tal matriz é útil para se encontrar as seguintes relações:

$$\{\sigma^1\} = [Q]\{\varepsilon^1\} = [Q][R]\{\varepsilon^{1/2}\} = [Q][R][T]\{\varepsilon^{x/2}\} = [Q][R][T][R]^{-1}\{\varepsilon^x\}. \quad (2.40)$$

Transformando $\{\sigma^1\}$ obtém-se:

$$[T]\{\sigma^x\} = [Q][R][T][R]^{-1}\{\varepsilon^x\} \Rightarrow \{\sigma^x\} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1}\{\varepsilon^x\}; \quad (2.41)$$

entretanto verifica-se que

$$[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T}, \quad (2.42)$$

portanto

$$\{\sigma^x\} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T}\{\varepsilon^x\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon^x\} \quad (2.43)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.44)$$

As componentes da matriz $[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-T}$, chamada de matriz de rigidez transformada, são:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta; \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta); \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta; \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta; \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta; \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A Equação (2.42) é útil para as seguintes considerações, a partir das equações (2.36) e (2.37):

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon^{1/2}\} &= [T] \{\varepsilon^{x/2}\} \\
[R]^{-1} \{\varepsilon^1\} &= [T][R]^{-1} \{\varepsilon^x\} \Rightarrow \{\varepsilon^1\} = [R][T][R]^{-1} \{\varepsilon^x\};
\end{aligned} \tag{2.46}$$

portanto, as deformações se transformam por

$$\{\varepsilon^1\} = [T]^{-T} \{\varepsilon^x\}. \tag{2.47}$$

A relação deformação-tensão pode ser obtida a partir da inversão da Equação (2.43):

$$\{\varepsilon^x\} = [T]^T [Q]^{-1} [T] \{\sigma^x\}; \tag{2.48}$$

definindo a matriz de flexibilidade reduzida por $[S]$, de modo que

$$[S] = [Q]^{-1}, \tag{2.49}$$

conclui-se que

$$\{\varepsilon^x\} = [T]^T [S][T] \{\sigma^x\} = [\bar{S}] \{\sigma^x\}, \tag{2.50}$$

onde $[\bar{S}]$ é a matriz de flexibilidade reduzida transformada, cujas componentes são

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta; \\
\bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta); \\
\bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (-2S_{12} + 2S_{22} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta; \\
\bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta; \\
\bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (-2S_{12} + 2S_{22} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta; \\
\bar{S}_{66} &= (2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

2.2.4 Teoria clássica de laminação

O conjunto de hipóteses de tensões e deformações que definem o comportamento mecânico de um laminado é chamado de teoria clássica de laminação, onde as teorias de Kirchhoff do estudo de placas, e de Kirchhoff-Love do estudo de cascas, têm papel preponderante. Conforme Mendonça (2005), estas hipóteses são:

- a) o laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas, sem deslizamento ou descolamento, e a camada de resina que é usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento, de modo que os deslocamentos são contínuos através das lâminas;
- b) o laminado é considerado delgado, ou seja, é uma placa ou casca de parede relativamente fina em relação a uma das dimensões da superfície e pode ser utilizada a hipótese das seções planas, segundo a qual uma linha originalmente reta e perpendicular à superfície que define a geometria da estrutura, a chamada superfície de referência, permanece reta e perpendicular a essa superfície quando o laminado for estendido e flexionado. Os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, isto é, têm comprimentos constantes.

A partir destas hipóteses podem ser deduzidas as seguintes relações entre as componentes de deslocamento u_x , u_y e w de um ponto qualquer C , e as componentes u_x^o e u_y^o de um ponto situado sobre a superfície de referência, como indicado na Figura 6. A hipótese das seções planas implica que os deslocamentos nas direções x e y do ponto C sejam, respectivamente,

$$u_x(x, y, z) = u_x^o(x, y) + z\psi_x(x, y) \text{ e } u_y(x, y, z) = u_y^o(x, y) + z\psi_y(x, y), \tag{2.52}$$

onde $\psi_x(x, y)$ e $\psi_y(x, y)$ são as inclinações da reta normal à superfície média nas direções x e y no ponto (x, y) da superfície de referência.

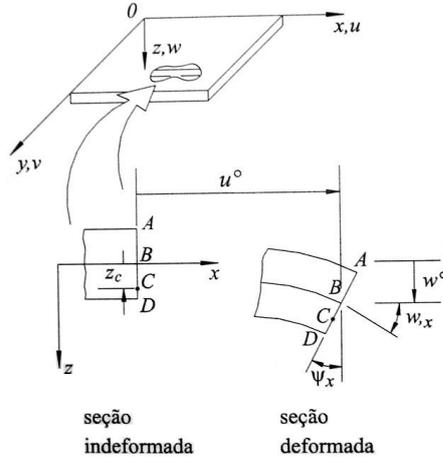


Figura 6: geometria de deformação de uma placa no plano x - z (MENDONÇA, 2005)

Como superfícies planas e perpendiculares à superfície de referência permanecem planas após a deformação e sofrem apenas uma rotação, tem-se que

$$\psi_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \text{ e } \psi_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}; \quad (2.53)$$

portanto, as três componentes de deslocamento se relacionam com os deslocamentos e rotações da superfície de referência por

$$u_x(x, y, z) = u_x^0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad u_y(x, y, z) = u_y^0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad (2.54)$$

e, como consequência da inextensividade do segmento normal,

$$w(x, y, z) = w(x, y). \quad (2.55)$$

As relações deformação-deslocamento na hipótese de pequenas deformações e rotações são

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \text{ e } \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad (2.66)$$

substituindo os deslocamentos da Equação (2.54) obtém-se

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u_x^o(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}; \\
\varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial u_y^o(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}; \\
\gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x^o(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^o(x, y)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Cada uma destas equações pode ser desmembrada em dois termos com significados físicos: as deformações de membrana $\{\varepsilon^o\}$, relacionadas aos deslocamentos resultantes do comportamento de membrana (u_x^o, u_y^o, w) ,

$$\{\varepsilon^o\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x^o}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y^o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x^o}{\partial y} + \frac{\partial u_y^o}{\partial x} \end{Bmatrix}; \tag{2.68}$$

e as curvaturas da superfície de referência $\{\kappa\}$, decorrentes do comportamento de flexão,

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{2.70}$$

Alternativamente, a Equação (2.67) pode ser representada por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \text{ ou } \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^o\} + z \{\kappa\}. \tag{2.71}$$

Seja um laminado de espessura H com N lâminas (lâmina l_1 , lâmina l_2 , ... , lâmina l_N), cada qual com espessura h e orientação θ dos eixos principais, tal como mostrado na Figura 7. Substituindo a equação da variação de deformação através da espessura em um laminado, Equação (2.71), na relação tensão-deformação de uma lâmina, Equação (2.43), as tensões na k -ésima lâmina (lâmina l_k) são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (2.72)$$

ou

$$\{\sigma^{x^k}\} = [\bar{Q}]^k \{ \{\varepsilon^o\} + z \{\kappa\} \}. \quad (2.73)$$

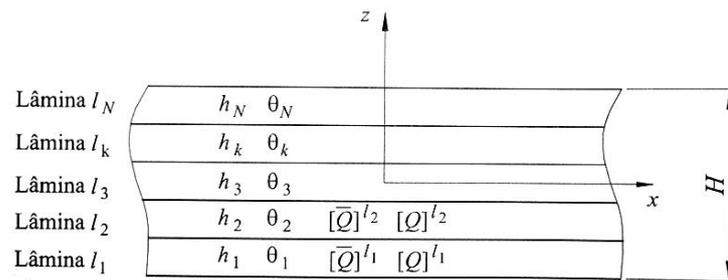


Figura 7: laminado de N lâminas (MENDONÇA, 2005)

Observa-se que os valores de $\{\varepsilon^o\}$ e $\{\kappa\}$ são constantes ao longo da espessura do laminado, sendo, portanto, independentes do número k de ordem da lâmina; porém cada lâmina apresenta propriedades elásticas próprias $[Q_{ij}^k]$ e desenvolve tensões próprias $\{\sigma^{x^k}\}$ de acordo com suas propriedades e também sua cota z . Embora as deformações variem de forma contínua e linear ao longo de z , as tensões podem apresentar perfil descontínuo em função da mudança das propriedades elásticas de cada lâmina. Isto é exemplificado, na Figura 8, para um laminado com 4 camadas.

Os esforços internos no laminado, forças por unidade de comprimento $\{N\} = \{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\}^T$ e momentos por unidade de comprimento $\{M\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T$, são obtidos pela integração das tensões em cada lâmina através da espessura do laminado:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{ou} \quad \{N\} = \int_{-H/2}^{H/2} \{\sigma\} dz \quad (2.74)$$

e

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{ou} \quad \{M\} = \int_{-H/2}^{H/2} \{\sigma\} z dz . \quad (2.75)$$



Figura 8: variação de tensões e deformações ao longo da espessura de um laminado (baseada em JONES, 1999)

Na Figura 9 é mostrada a convenção de sinais (positivos) para os esforços e, na Figura 10, as notações para as N lâminas de um laminado, onde z_k é a distância da face superior da lâmina k à superfície média do laminado.

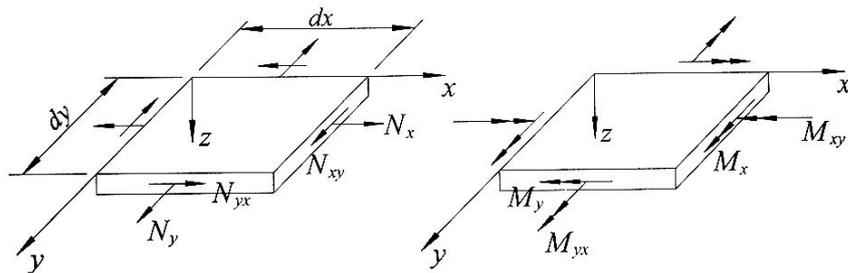


Figura 9: convenção de sinais para os esforços normais e de momento (MENDONÇA, 2005)

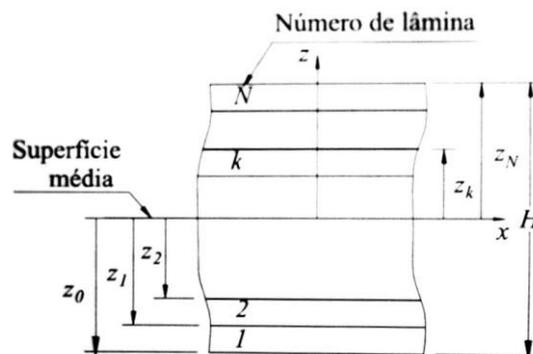


Figura 10: notações para as lâminas de um laminado (MENDONÇA, 2005)

As integrais das equações (2.74) e (2.75) podem ser substituídas por um somatório de integrais ao longo da espessura de cada lâmina:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad (2.76)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (2.77)$$

Empregando as relações tensão-deformação dadas pela Equação (2.72) obtém-se

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\}; \quad (2.78)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\}. \quad (2.79)$$

ou, desenvolvendo,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (2.80)$$

ou ainda

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

e

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.82)$$

onde

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad \text{e} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (2.83)$$

Porém, como a espessura do k -ésimo laminado, h_k , é dada por

$$h_k = z_k - z_{k-1}, \quad (2.84)$$

verifica-se que

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k, \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k \bar{z}_k \quad \text{e} \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \left(h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right), \quad (2.85)$$

onde \bar{z}_k é a distância da superfície média da lâmina k até a superfície de média do laminado, dada por

$$\bar{z}_k = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}. \quad (2.86)$$

A Equação (2.80) pode ainda ser escrita em forma compacta, como

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}. \quad (2.87)$$

A matriz $[C]$ é a matriz de rigidez completa do laminado; $[A]$ é chamada de matriz de rigidez extensional; $[D]$ é a matriz de rigidez à flexão; e $[B]$ é a matriz de acoplamento entre flexão e extensão. As matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ são simétricas.

No caso particular de um laminado simétrico, ou seja, em que lâminas são empilhadas de tal forma que ocorra simetria de propriedades mecânicas (material constituinte) e geométricas (orientações, espessuras, cotas) em relação à superfície de referência, ocorre a ausência do acoplamento membrana-flexão. Citando Mendonça (2005):

Considere os dois tipos possíveis de laminados simétricos: os laminados simétricos com número ímpar e os com número par de lâminas, ilustrados na figura 6.5 [Figura 11 do presente trabalho]. A simetria do laminado (a) significa que $[\bar{Q}^i] = [\bar{Q}^i]$, $h_1 = h_3$, o que implica $\bar{z}_1 = -\bar{z}_3$ e $\bar{z}_2 = 0$. No laminado (b), tem-se $[\bar{Q}^i] = [\bar{Q}^i]$, $h_1 = h_4$, $h_2 = h_3$, $\bar{z}_1 = -\bar{z}_4$ e $\bar{z}_2 = -\bar{z}_3$. Em ambos os casos essas relações implicam $[B] = 0$.

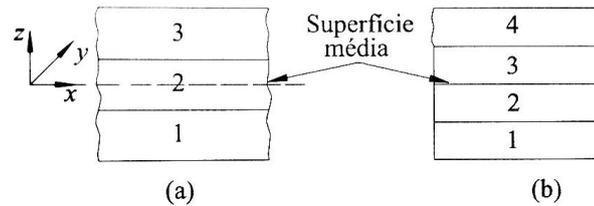


Figura 11: laminados simétricos com número ímpar e par de lâminas (MENDONÇA, 2005)

No Sistema Internacional de Unidades, as componentes da Equação (2.87) são dadas em: $\{N\}$ e $[A]$, N/m; $\{M\}$ e $[B]$, Nm/m; $\{\varepsilon^o\}$, m/m; $\{\kappa\}$, 1/m; e $[D]$, Nm.

Segundo Gaudenzi (2009), apenas vinte das trinta e duas classes de cristais podem ser piezoelétricas; e na maioria dos casos os materiais piezoelétricos são também ferroelétricos, pelo que a altas temperaturas uma transformação ocorre da fase piezoelétrica para uma fase não-piezoelétrica com alta simetria. A temperatura abaixo da qual a fase piezoelétrica é presente é conhecida como temperatura de Curie T_c .

Segundo Kaltembacher (2007), materiais piezoelétricos podem ser subdivididos nas seguintes três categorias: cristais isolados, como quartz; cerâmicas piezoelétricas como titanato de bário (BaTiO_3) ou titanato zirconato de chumbo (PZT); e polímeros como PVDF (fluoreto de polivinilideno). Os cristais e as cerâmicas mostram fraco efeito piezoelétrico, e são principalmente utilizados em aplicações como sensores.

Esses materiais exibem uma estrutura cristalina e a sua propriedade-chave é a ferroeletricidade [...]. Um material piezoelétrico cerâmico é subdividido em grãos consistindo de células unitárias com diferentes orientações da estrutura cristalina. As células unitárias consistem de íons carregados positiva e negativamente, e a posição dos seus centros de carga relativamente entre si é de principal importância para as propriedades eletromecânicas. Chamaremos este material de *polarizável*, se uma carga externa, por exemplo um campo elétrico, pode deslocar esses centros em relação uns aos outros. Consideremos BaTiO_3 ou PZT, que tem uma estrutura policristalina com grãos tendo diferentes estruturas cristalinas. Acima da temperatura de Curie T_c – para BaTiO_3 $T_c \approx 120^\circ\text{C} - 130^\circ\text{C}$ e para PZT $T_c \approx 250^\circ\text{C} - 350^\circ\text{C}$, esses materiais têm estrutura perovskita. A forma cúbica de uma célula unitária tem lado a_0 e os centros das cargas positivas e negativas coincidem (veja figura 9.3) [Figura 12 no presente trabalho]. Entretanto, abaixo de T_c a célula unitária se deforma para a estrutura paralelepípedica mostrada na figura 9.3 [Figura 12 no presente trabalho]; por exemplo, BaTiO_3 à temperatura ambiente muda sua dimensão por $(c_0 - a_0)/a_0 \approx 1\%$. Nessa fase ferroelétrica, os centros das cargas positivas e negativas diferem e a célula unitária tem uma polarização espontânea. Como os dipolos unitários estão distribuídos aleatoriamente, chamamos isto de estado de depolarização térmica ou estado virgem. Esse estado pode ser modificado por um carregamento elétrico ou mecânico com amplitude significativa. Na prática, um campo elétrico forte $E \approx 2\text{ kV/mm}$ irá comutar as células unitárias de modo que uma polarização espontânea vai ser mais ou menos orientada na direção do campo elétrico externamente aplicado como mostrado na figura 9.4 [Figura 13 no presente trabalho]. Quando o campo elétrico externo é desligado a cerâmica vai exibir ainda polarização residual remanescente no sentido macroscópico (ver figura 9.4) [Figura 13 no presente trabalho]. Chamamos isto de *polarização irreversível* ou *residual* e o processo de *polarização* (KALTEMBACHER, 2007, p. 245-247, grifos do autor, tradução nossa).

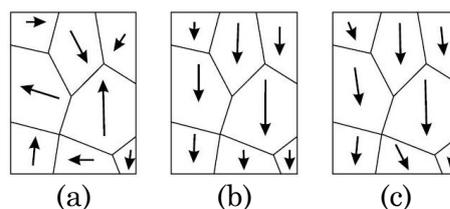


Figura 13: orientações da polarização da célula unitária: (a) no estado inicial; (b) devida a um campo elétrico forte; (c) após a remoção do campo elétrico (KALTEMBACHER, 2007, p. 246)

O óxido de cálcio e titânio (CaTiO_3) é chamado de perovskita e apresenta, tal como o titanato de bário (BaTiO_3), uma estrutura cristalina do tipo ABO_3 , também conhecida como “estrutura perovskita”. Tal estrutura é um caso particular dos materiais do tipo $\text{A}_m\text{B}_n\text{X}_p$, com dois cátions aqui representados por A e B (CALLISTER, 2007).

Valores típicos de constantes mecânicas e piezoelétricas para piezocerâmicas (PZT) e piezopolímeros (PVDF), bem como as suas unidades no S.I., são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: propriedades típicas de materiais piezoelétricos

Propriedade	Unidade no S.I.	Material		
		PZT	PVDF	
Densidade	kg/m^3	7600	1800	
Módulo de Young, $1/s^E$	GPa	50	2,5	
Constante dielétrica ϵ^T/ϵ_0	adimensional	1800	10	
Constantes piezoelétricas	$e_{31} = d_{31}/s^E$	C/m^2	- 7,5	0,025
	d_{33}	$10^{-12} \text{ C/N ou m/V}$	300	- 25
	d_{31}	$10^{-12} \text{ C/N ou m/V}$	- 150	uniaxial: 15 biaxial: 3
	d_{32}	$10^{-12} \text{ C/N ou m/V}$		uniaxial: 3 biaxial: 3
	d_{15}	$10^{-12} \text{ C/N ou m/V}$	500	0

Fonte: PREUMONT (2006), p. 120.

Materiais inteligentes (*smart materials*) convertem energia entre múltiplos domínios físicos. Um domínio é uma quantidade física que pode ser descrita por um conjunto de duas variáveis de estado (LEO, 2007), tal como o domínio mecânico, cujas variáveis de estado são as tensões e as deformações em um material. Outros exemplos de domínios físicos são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2: exemplos de domínios físicos e de variáveis de estados associadas

Domínio	Elétrico	Térmico	Magnético	Químico
Variáveis de estado	Campo elétrico Deslocamento elétrico	Temperatura Entropia	Campo magnético Fluxo magnético	Concentração Fluxo volumétrico

Fonte: Leo (2007), p. 2.

Quando uma mudança em uma variável de estado em um domínio físico causa mudança em uma variável de estado de outro domínio físico, diz-se que ocorre um acoplamento entre esses dois domínios distintos. Uma representação visual do acoplamento entre três

domínios físicos é mostrada na Figura 14. Materiais piezoelétricos, portanto, convertem energia entre os domínios elétrico e mecânico.

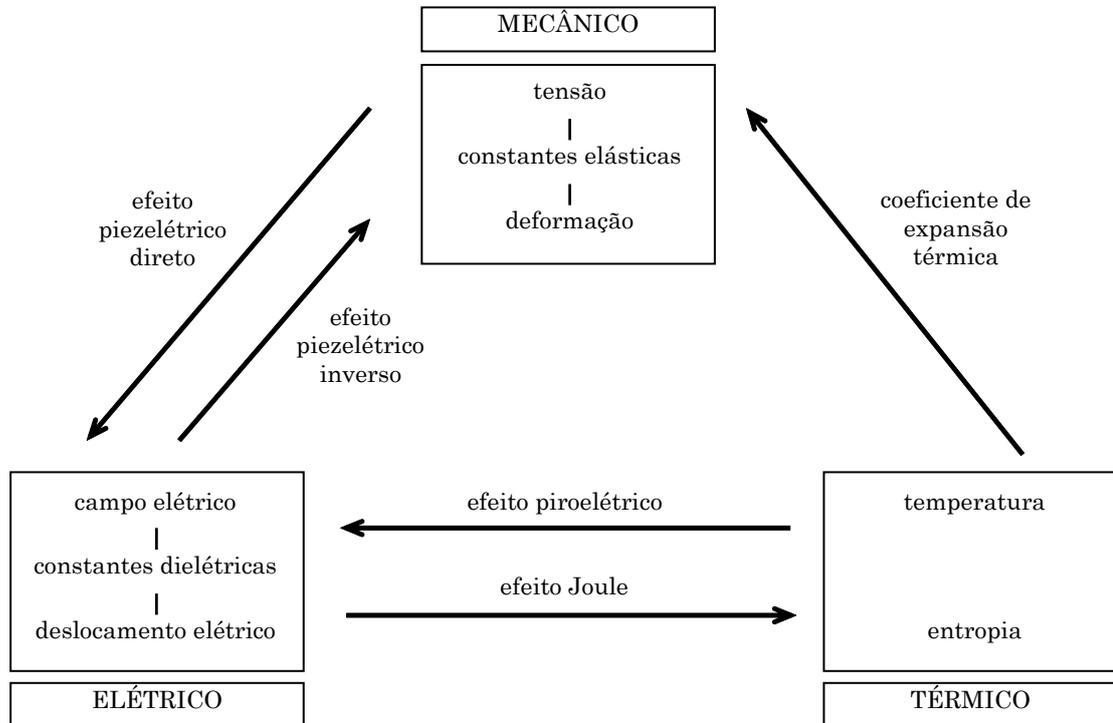


Figura 14: acoplamento entre domínios físicos (baseada em LEO, 2007)

Quando um campo elétrico E é aplicado a um material, há três possibilidades de respostas, determinadas pelas suas propriedades elétricas (CHEE, 2000); a corrente elétrica pode fluir:

- livremente no material, devido à presença de partículas carregadas livres – elétrons livres, no caso dos metais – que se movem facilmente sob influência do campo elétrico;
- somente sob certas condições, quando alguns elétrons dentro do material recebem energia suficiente para se libertar da energia de ligação local. É o caso dos semicondutores;
- sob nenhuma hipótese, pois não há partículas carregadas livres dentro do material. É o caso dos isolantes ou dielétricos.

Embora os materiais dielétricos não conduzam corrente, eles podem ser polarizados sob a influência de um campo elétrico externo aplicado. [...] Alguns

dielétricos são feitos de moléculas polares em que, devido à geometria, uma extremidade tem carga ligeiramente mais positiva enquanto a outra tem carga ligeiramente mais negativa, embora a molécula como um todo seja neutra. Tais moléculas possuem um momento de dipolo e são também conhecidas como dipolos elétricos. Entretanto, como as moléculas estão orientadas aleatoriamente, macroscopicamente o material é também neutro. Mas quando um campo elétrico externo é aplicado, todas as moléculas polares irão se alinhar na direção do campo e o material é dito estar polarizado. Para dielétricos que são compostos por moléculas não polares, não há momentos de dipolo intrínsecos. Mas a aplicação de um campo elétrico externo modifica a distribuição de cargas em cada molécula de modo que momentos de dipolo são induzidos. Em outras palavras, quer as moléculas sejam ou não polares, a presença de um campo externo irá polarizar o material ao alinhar os dipolos elétricos (CHEE, 2000, p. 2-3, tradução nossa).

Define-se o vetor de polarização $\{P\}$ como a densidade volumétrica dos momentos de dipolo elétricos $\{p\}$:

$$\{P\} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{nd} \{p_i\}}{\Delta v}, \quad (3.1)$$

onde nd é o número de dipolos elétricos e v é o volume.

Quando um material dielétrico é polarizado, os dipolos elétricos alinhados produzem uma densidade de mudança de volume ρ_p , que afeta o campo elétrico e está relacionada à polarização por

$$\rho_p = -P_{i,i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.2)$$

O teorema da divergência de Gauss precisa ser modificado para incorporar ρ_p (CHEE, 2000) e define-se o deslocamento elétrico D , como segue:

$$E_{i,i} = \frac{1}{\xi_0} (\rho + \rho_0) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3.3)$$

$$D_{i,i} = \rho; \quad D_i = \xi_0 E_i + P_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.4)$$

onde ρ é a densidade de mudança de volume livre, e ξ_0 é a permissividade elétrica no vácuo,

$$\xi_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{F}{m} \text{ ou } \frac{C^2}{Nm^2}. \quad (3.5)$$

A relação entre o campo elétrico e a polarização é tomada como linear e envolve o tensor de suscetibilidade elétrica χ :

$$P_i = \xi_0 \chi_{ij} E_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.6)$$

O tensor de suscetibilidade elétrica é simétrico e para um material anisotrópico tem no máximo seis valores independentes.

O deslocamento elétrico é função do campo elétrico e depende também de uma propriedade do material, a permissividade elétrica absoluta ξ . A partir da Equação (3.5) chega-se a

$$D_i = \xi_0 (1 + \chi_{ij}) E_j = \xi_{ij} E_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.7)$$

3.2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS

As equações constitutivas de um material piezoelétrico genérico são, empregando a notação ANSI/IEEE Std 176-1987 (1988),

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

e

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3); \quad (3.9)$$

entretanto, é usual encontrar-se na literatura o emprego de outras variáveis para descrever estas equações constitutivas, alternativamente dadas como

$$S_{ij} = C_{ijkl}^E \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (3.10)$$

e

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \xi_{ik}^S E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.11)$$

onde T_{ij} (ou S_{ij}) são as componentes dos tensores mecânicos de tensão; e S_{kl} (ou ϵ_{kl}) são as componentes dos tensores mecânicos de deformação; c_{ijkl}^E (ou C_{ijkl}^E) são as constantes

elásticas sob campo elétrico constante; e_{ikl} são constantes piezoelétricas; ε_{ik}^S (ou ξ_{ik}^S) são as constantes dielétricas (permissividade) sob deformação mecânica constante; D_i é o deslocamento elétrico (carga por unidade de área); e E_k é o campo elétrico (tensão elétrica por unidade de comprimento).

As equações (3.8) e (3.9) podem ser ainda escritas como

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3); \quad (3.12)$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.13)$$

onde s_{ijkl}^E é o tensor de flexibilidade (*compliance tensor*) sob campo elétrico constante, relacionado com as constantes elásticas c_{ijkl}^E por $s_{ijkl}^E = (c_{ijkl}^E)^{-1}$; d_{ikl} são constantes piezoelétricas; e ε_{ik}^T é a constante dielétrica sob tensão mecânica constante.

Para a representação vetorial dos tensores apresentados anteriormente devem ser utilizados os seguintes vetores de tensão mecânica, $\{T\}$, e deformação, $\{S\}$,

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} \text{ e } \{S\} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix}; \quad (3.14)$$

dessa maneira, as equações (3.8), (3.9), (3.12) e (3.13) podem ser escritas na forma matricial como

$$\{T\} = [c^E] \{S\} - [e] \{E\}; \quad (3.15)$$

$$\{D\} = [e]^T \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\}; \quad (3.16)$$

$$\{S\} = [s^E] \{T\} + [d] \{E\}; \quad (3.17)$$

$$\{D\} = [d]^T \{T\} + [\varepsilon^T] \{E\}, \quad (3.18)$$

observando-se ainda que

$$[e] = [c^E][d] \text{ e } [\varepsilon^S] = [\varepsilon^T] - [d]^T [c^E][d]. \quad (3.19)$$

Adicionalmente as seguintes relações constitutivas podem ser empregadas (LEO, 2007):

$$\begin{aligned} \{S\} &= [s^D]\{T\} + [g]\{D\}; \{E\} = -[g]^T\{T\} + [\beta^T]\{D\}; \\ \{T\} &= [c^D]^T\{S\} - [h]\{D\}; \{E\} = -[h]^T\{S\} + [\beta^S]\{D\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde as matrizes auxiliares são definidas por

$$\begin{aligned} [g] &= [d][\beta^T]; [s^D] = [s^E] - [d][\beta^T][d]^T; \\ [h] &= [c^D][g]; [\beta^S] = [\beta^T] + [g]^T [c^D][g]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3 LAMINADO PIEZOELÉTRICO

Seja uma lâmina piezoelétrica de pequena espessura t_p e área de superfície A_p , onde as direções 1 e 2 estão no seu plano médio, tal como ilustrado na Figura 15.

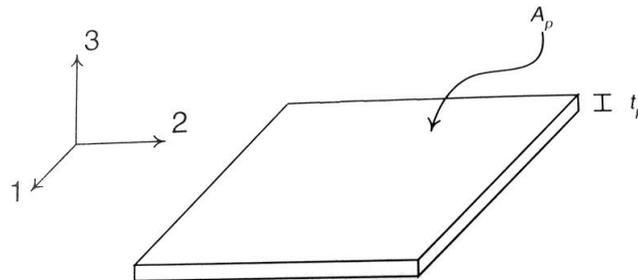


Figura 15: lâmina piezoelétrica (baseada em LEO, 2007)

Submetendo esta lâmina a um campo elétrico na direção 3 (da sua espessura), as tensões e deformações que ocorrem no plano 1-2 são usadas para gerar extensão e flexão. Em uma das aplicações práticas, tais lâminas piezoelétricas são empregadas em estruturas de materiais compósitos multilaminares, como mostrado nas figuras 16 e 17 (a), como atuadores que geram flexão tal como ilustrado na Figura 17 (b), e podem então intervir no comportamento do substrato, ou mesmo, pelo efeito direto, serem usados como sensores de modo que a energia captada possa ser utilizada para monitoramento e ações de controle realimentado.

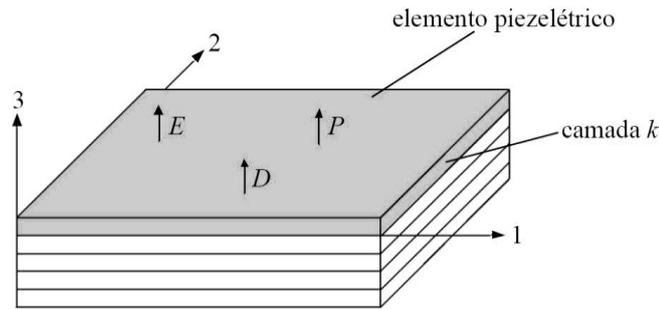


Figura 16: elemento estrutural laminado com camada piezoelétrica fixada à sua superfície (ISOLDI, 2008)

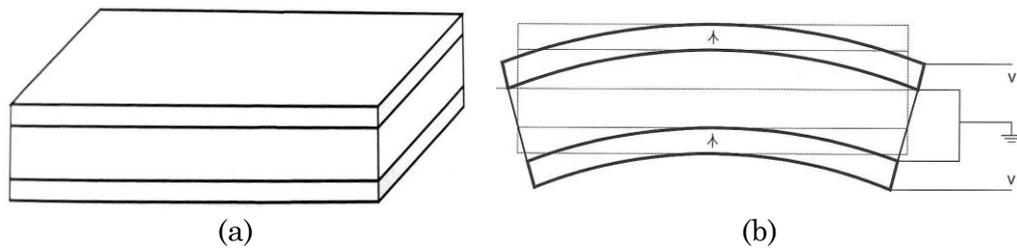


Figura 17: flexão provocada por duas camadas de atuadores piezoelétricos laminados fixadas em um substrato, submetidas a polaridades opostas (baseada em LEO, 2007)

Seja a porção de uma estrutura laminada e delgada do tipo placa, casca ou viga, com um elemento piezoelétrico fixado à sua superfície (Figura 16). Conjuntamente com as hipóteses da Teoria Clássica de Laminação, apresentadas anteriormente, é necessário considerar que:

- a) por hipótese, o campo elétrico e o deslocamento elétrico são uniformes através da espessura, paralelos entre si e normais ao plano médio do elemento piezoelétrico:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{Bmatrix}; \quad (3.22)$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{Bmatrix}; \quad (3.23)$$

- b) a piezoelectricidade é linear na camada piezoelétrica k e os eixos piezoelétricos principais são paralelos aos eixos de ortotropia estrutural;

c) a direção da polarização é a direção 3.

Desta maneira, as formas explícitas das equações (3.17) e (3.18) são

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}; \quad (3.24)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

e as equações constitutivas para a camada piezoelétrica k , a partir da Equação (2.19) e das equações alternativas (3.10) e (3.11), ficam

$$\{S^1\} = [Q]_k \{\varepsilon^1\} - \{e^1\} (E_3)_k \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{Bmatrix} (E_3)_k; \quad (3.26)$$

$$(D_3)_k = \{e^1\}_k^T \{\varepsilon^1\} + (\xi_{33})_k (E_3)_k \Rightarrow (D_3)_k = \{e_{31} \quad e_{32} \quad e_{36}\}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} + (\xi_{33})_k (E_3)_k, \quad (3.27)$$

onde $[Q]_k$ é a matriz dos coeficientes elásticos da camada k .

Às propriedades mecânicas da lâmina piezoelétrica deve ser adicionado o acoplamento elétrico. O campo elétrico E_k está relacionado à tensão elétrica ϕ_k através da espessura da camada h_k ,

$$(E_3)_k = E_k = -\frac{\phi_k}{h_k}; \quad (3.28)$$

Substituindo as equações (2.33), (2.35) e (2.38) na equação constitutiva (3.26) obtêm-se as tensões na camada piezoelétrica k referenciada aos eixos globais x - y ,

$$\{S^x\} = [T]_k^{-1} \{S^1\} = [T]_k^{-1} [Q]_k [T]_k^{-T} \{\varepsilon^x\} - [T]_k^{-1} \{e^1\}_k^T E_k, \quad (3.29)$$

a qual, se for considerada ainda a Equação (2.44), transforma-se em

$$\{S^x\} = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon^x\} + [T]_k^{-1} \{e^1\}_k^T \frac{\phi_k}{h_k}. \quad (3.30)$$

Como as forças e momentos resultantes que atuam no laminado são obtidas pela integração das tensões através da espessura, aplicando a Equação (3.30) nas equações (2.76) e (2.77) obtém-se

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{np} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} [I_3] \\ z[I_3] \end{bmatrix} [T]_k^{-1} \{e^1\}_k^T \frac{\phi_k}{h_k} dz, \quad (3.31)$$

onde np é o número de camadas piezoelétricas; z_k e z_{k-1} são coordenadas da camada k como ilustrado na Figura 18; e a matriz $[I_3]$ é uma matriz identidade que pode ser definida a partir da matriz de constantes dielétricas $[\varepsilon_{ik}^S]$ como segue:

$$[I_3] = [\varepsilon_{ik}^S] [\varepsilon_{ik}^S]^{-1}. \quad (3.32)$$

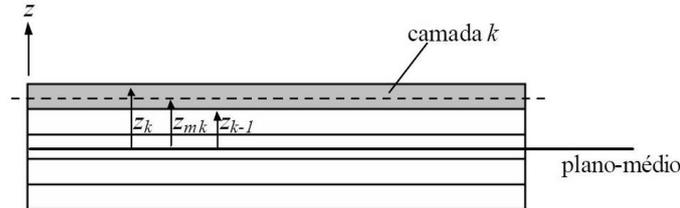


Figura 18: coordenadas da camada piezoelétrica k (ISOLDI, 2008)

Se todos os termos constantes forem colocados fora da integral, a Equação (3.31) fica

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{h_k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} [I_3] \\ z[I_3] \end{bmatrix} dz [T]_k^{-1} \{e^1\}_k^T \phi_k \\ \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{np} \begin{bmatrix} [I_3] \\ z_{mk}[I_3] \end{bmatrix} [T]_k^{-1} \{e^1\}_k^T \phi_k, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde z_{mk} , também mostrado na Figura 18, é a distância entre o plano médio da lâmina piezoelétrica k e o plano médio do laminado.

A Equação constitutiva (3.27), sendo trabalhada de modo semelhante, conduz a

$$D_k = \{e^1\}_k [T]_k^{-T} \{\varepsilon^x\} - \xi_k \frac{\phi_k}{h_k} = \{e^1\}_k [T]_k^{-T} \left[[I_3] \quad z [I_3] \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \xi_k \frac{\phi_k}{h_k}, \quad (3.34)$$

que deve ser integrada ao longo da espessura:

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} D_k dz = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{e^1\}_k [T]_k^{-T} \left[[I_3] \quad z [I_3] \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{matrix} \right\} dz - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \xi_k \frac{\phi_k}{h_k} dz. \quad (3.35)$$

Como o deslocamento elétrico é considerado uniforme através da espessura, pode ser utilizado um valor médio; então,

$$D_k = \{e^1\}_k [T]_k^{-T} \left[[I_3] \quad z_{mk} [I_3] \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \xi_k \frac{\phi_k}{h_k}. \quad (3.36)$$

Portanto, as equações constitutivas integradas sobre a espessura de uma estrutura laminada com camadas piezoelétricas são

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{matrix} \right\} + \sum_{k=1}^{np} \begin{bmatrix} [I_3] \\ z_{mk} [I_3] \end{bmatrix} [T]_k^{-1} \left\{ \begin{matrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{matrix} \right\}_k \phi_k; \quad (3.37)$$

$$D_k = \{e_{31} \quad e_{32} \quad e_{36}\}_k [T]_k^{-T} \left[[I_3] \quad z_{mk} [I_3] \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \xi_k \frac{\phi_k}{h_k}. \quad (3.38)$$

4 FORMULAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS

4.1 FORMULAÇÃO INCREMENTAL LAGRANGEANA DO MOVIMENTO

Objetivando a abordagem de problemas que envolvam não linearidade geométrica, aquela onde não podem ser desprezadas as modificações da geometria do corpo quando carregado, as seguintes considerações devem ser feitas.

Seja a análise do movimento de um corpo em relação a um sistema de eixos de referência, com o intuito de determinar as configurações por ele assumidas para diferentes tempos e cargas, desde uma configuração inicial 0C , correspondente ao tempo $t = 0$, até uma configuração final fC , correspondente ao tempo $t = t_f$. Por hipótese, são conhecidas todas as variáveis do problema em cada instante genérico t , e são requeridos os valores destas variáveis no tempo $t + \Delta t$. Assim, diferentes configurações são determinadas sucessivamente; tal descrição do movimento é conhecida como descrição Lagrangeana.

A descrição Lagrangeana pode ser do tipo Lagrangeana total e Lagrangeana atualizada. Na descrição Lagrangeana total todas as variáveis são referidas à configuração inicial, correspondente ao tempo $t = 0$; na descrição Lagrangeana atualizada adota-se como referência a última configuração determinada: a configuração no tempo $t + \Delta t$ é obtida tendo como referência a configuração no tempo t .

4.1.1 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Seja um corpo em equilíbrio, em um sistema (estacionário) de coordenadas cartesianas x_1 , x_2 e x_3 , tal como mostrado na Figura 19 em três sucessivas posições, nos instantes 0, t (qualquer) e $t + \Delta t$, sofrendo deslocamentos finitos, podendo ocorrer grandes deslocamentos, rotações e/ou deformações. Na configuração 0C , por exemplo, o corpo apresenta área superficial 0A e volume 0V ; um ponto P genérico, a ele pertencente, tem coordenadas $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$; sofre forças de superfície ${}^0f_i^S$ ($i = 1, 2, 3$) (não mostradas); etc.

Nas demais configurações, observa-se que os sobrescritos esquerdos dessas características são alterados para t e $t + \Delta t$.

Adotando-se a abordagem Lagrangiana, é necessário identificar qual é a configuração de referência, que é mostrada como um subscrito esquerdo no seguinte equacionamento (caso seja diferente da configuração atual).

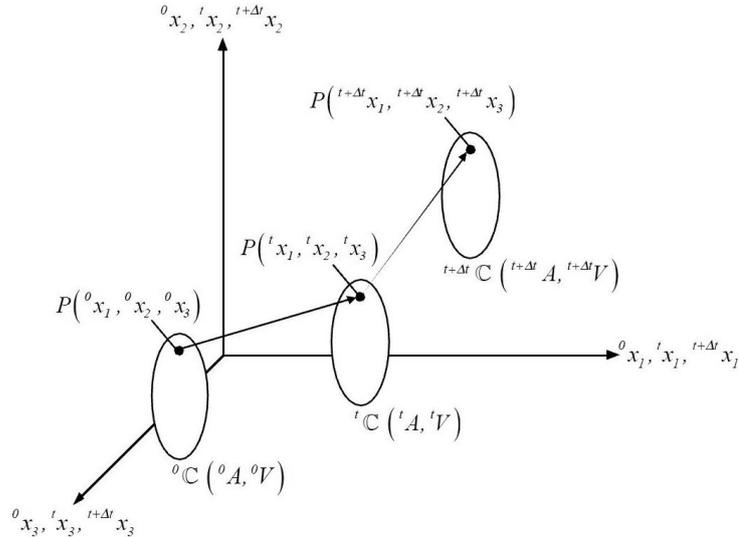


Figura 19: movimento de um corpo em um sistema de coordenadas estacionário (ISOLDI, 2008)

A equação básica do princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao corpo na configuração correspondente ao tempo $t + \Delta t$, quando ele sofre um deslocamento virtual δu , é

$$\int_{t+\Delta t V} \tau_{ij} \delta e_{ij}^{t+\Delta t} e_{ij}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

onde τ_{ij} é o tensor de Cauchy; δe_{ij} é o tensor de deformações correspondente aos deslocamentos virtuais, dado por

$$\delta e_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j^{t+\Delta t}} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i^{t+\Delta t}} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (4.2)$$

e \mathfrak{R} é o trabalho virtual das cargas mecânicas externas atuantes sobre o corpo,

$${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^{t+\Delta t} dV + \int_{t+\Delta t A} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S dA \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3)$$

onde f_i^B são forças por unidade de volume, e $\delta u_i^S = \delta u_i$ calculado na superfície ${}^{t+\Delta t} A$.

Como a configuração referente ao tempo $t + \Delta t$ é inicialmente desconhecida, a Equação (4.1) precisa ser reescrita de modo que as grandezas envolvidas sejam referenciadas a uma configuração conhecida, o que é feito substituindo o tensor de Cauchy pelo segundo tensor de Piola-Kirchhoff, S_{ij} , cujas componentes no instante t referenciadas à configuração 0 relacionam-se com as componentes do tensor de Cauchy por

$${}^tS_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0x_{i,k} {}^t\tau_{kl} {}^0x_{j,l} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (4.4)$$

onde

$${}^0x_{i,k} = \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^t x_k} \quad (4.5)$$

e ${}^0\rho$ e ${}^t\rho$ são as massas específicas do corpo nas configurações 0 e t .

Sendo o tensor gradiente de deformação ${}^tF_{ij}$ definido como

$${}^tF_{ij} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \Rightarrow [{}^tF] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t x_{1,1} & {}^t x_{1,2} & {}^t x_{1,3} \\ {}^t x_{2,1} & {}^t x_{2,2} & {}^t x_{2,3} \\ {}^t x_{3,1} & {}^t x_{3,2} & {}^t x_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

demonstra-se que ${}^0\rho$ e ${}^t\rho$ estão relacionadas por

$$\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} = \det [{}^tF] = \begin{vmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t x_{1,1} & {}^t x_{1,2} & {}^t x_{1,3} \\ {}^t x_{2,1} & {}^t x_{2,2} & {}^t x_{2,3} \\ {}^t x_{3,1} & {}^t x_{3,2} & {}^t x_{3,3} \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

O tensor de deformações utilizado conjuntamente com o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é o tensor de deformações de Green-Lagrange, sendo suas componentes cartesianas no tempo t referenciadas à configuração inicial 0 dadas por

$${}^t_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.8)$$

Para empregar a formulação Lagrangeana atualizada, a Equação (4.1) precisa ser reescrita como

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4.9)$$

onde o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ é relacionado ao tensor de tensor de tensões de Cauchy por

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}_{i,k} {}^{t+\Delta t}\tau_{kl} {}^t\mathbf{x}_{j,l} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (4.10)$$

onde

$$\frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} = \det \left[\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}}{{}^t\mathbf{F}} \right], \quad (4.11)$$

sendo o tensor gradiente de deformação na descrição Lagrangeana atualizada dado por

$$\left[\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}}{{}^t\mathbf{F}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^tx_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^tx_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^tx_3} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^tx_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^tx_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^tx_3} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^tx_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^tx_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^tx_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial {}^t\Delta u_1}{\partial {}^tx_1} & \frac{\partial {}^t\Delta u_1}{\partial {}^tx_2} & \frac{\partial {}^t\Delta u_1}{\partial {}^tx_3} \\ \frac{\partial {}^t\Delta u_2}{\partial {}^tx_1} & 1 + \frac{\partial {}^t\Delta u_2}{\partial {}^tx_2} & \frac{\partial {}^t\Delta u_2}{\partial {}^tx_3} \\ \frac{\partial {}^t\Delta u_3}{\partial {}^tx_1} & \frac{\partial {}^t\Delta u_3}{\partial {}^tx_2} & 1 + \frac{\partial {}^t\Delta u_3}{\partial {}^tx_3} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O tensor de deformação de Green-Lagrange correspondente aos deslocamentos virtuais, na descrição Lagrangeana atualizada, é

$$\delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}u_{k,i} {}^{t+\Delta t}u_{k,j} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.13)$$

Numa análise dinâmica é necessário incluir um termo adicional à esquerda da Equação (4.9), referente às forças de inércia, dado por

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.14)$$

sendo as acelerações \ddot{u}_i definidas como

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.15)$$

4.1.2 Equação incremental do princípio dos trabalhos virtuais

Para obter-se a equação incremental dos trabalhos virtuais de um domínio contínuo, as tensões ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ devem ser expressas da seguinte maneira (QUN; MU; WENQI, 1998; BATHE, 1996):

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^t\tau_{ij} + {}_t\Delta S_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.16)$$

onde ${}^t\tau_{ij} = {}^tS_{ij}$ e ${}_t\Delta S_{ij}$ é a tensão incremental referenciada à configuração t .

As deformações devem ser definidas por

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} + {}_t\Delta\varepsilon_{ij} = {}_t\Delta\varepsilon_{ij} = {}_t\Delta e_{ij} + {}_t\Delta\eta_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (4.17)$$

sendo ${}^t\varepsilon_{ij} = 0$ e ${}_t\Delta e_{ij}$ a deformação incremental linear referenciada à configuração t , dada por

$${}_t\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t\Delta u_{i,j} + {}_t\Delta u_{j,i}) \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.18)$$

A parcela não linear da deformação incremental, ${}_t\Delta\eta_{ij}$, referenciada à configuração t , é

$${}_t\Delta\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_t\Delta u_{k,i} {}_t\Delta u_{k,j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.19)$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.17) na Equação (4.9), a equação incremental do princípio dos trabalhos virtuais fica

$$\int_V {}_t\Delta S_{ij} \delta {}_t\Delta\varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_V {}^t\tau_{ij} \delta {}_t\Delta\eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_V {}^t\tau_{ij} \delta {}_t\Delta e_{ij} {}^t dV \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.20)$$

Admitindo a aproximação $\delta {}_t\Delta\varepsilon_{ij} \equiv \delta {}_t\Delta e_{ij}$, a relação constitutiva

$${}_t\Delta S_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}_t\Delta e_{rs} \quad (i, j, r, s = 1, 2, 3) \quad (4.21)$$

pode ser estabelecida, onde ${}^tC_{ijrs}$ é o tensor de propriedades do material na configuração t ; dessa maneira, a equação do PTV pode ser expressa por

$$\int_{{}^tV} {}^tC_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta_t \Delta e_{ij} {}^t dV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t \Delta \eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t \Delta e_{ij} {}^t dV, \quad (4.22)$$

com $(i, j, r, s = 1, 2, 3)$, ou de forma compacta,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 - I_4, \text{ sendo} \\ I_1 &= \int_{{}^tV} {}^tC_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta_t \Delta e_{ij} {}^t dV; \quad I_2 = \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t \Delta \eta_{ij} {}^t dV; \\ I_3 &= {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}; \quad I_4 = \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t \Delta e_{ij} {}^t dV. \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.1.3 Consideração do material piezoelétrico

O campo elétrico pode ser definido como

$${}^tE_i = -\frac{\partial^t\phi}{\partial^t x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.24)$$

onde ϕ é o potencial elétrico e o gradiente é avaliado na configuração deformada. Multiplicando a Equação (4.24) por ${}^tF_{ij}$ e utilizando a regra da cadeia, obtém-se o campo elétrico Lagrangeano tE_k ,

$${}^tE_k = -\frac{\partial^t\phi}{\partial^t x_i} \frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_k} = {}^tE_k {}^tF_{ik}, \quad (4.25)$$

cujas relação inversa é

$${}^tE_k = {}^tE_k \left({}^tF_{ik} \right)^{-1}. \quad (4.26)$$

Seja um corpo dielétrico em sua configuração deformada tC sob uma distribuição superficial de cargas elétricas q . Definindo-se a densidade superficial de cargas ${}^t\zeta$ como

$${}^t\zeta = \lim_{{}^t dA \rightarrow 0} \frac{{}^t dq}{{}^t dA}, \quad (4.27)$$

os deslocamentos elétricos podem ser expressos por

$${}^tD_i {}^t n_i = -{}^t\zeta, \quad (4.28)$$

onde n_i é o vetor das normais à superfície. Esta medida é definida na configuração deformada; para a obtenção de uma medida Lagrangeana, o seguinte procedimento deve ser feito.

Multiplicando ambos os lados da igualdade da Equação (4.28) por ${}^t dA$,

$${}^tD_i {}^t n_i {}^t dA = -{}^t\zeta {}^t dA, \quad (4.29)$$

e empregando a fórmula de Nanson (HOLZAPFEL, 2000), que relaciona um elemento de área diferencial na configuração corrente com um elemento de área diferencial na configuração de referência de modo que

$${}^t n_i {}^t dA = \left(\det \left[{}^t F \right] \right) \frac{\partial {}^0 x_k}{\partial {}^t x_i} {}^0 n_k {}^0 dA = \left(\det \left[{}^t F \right] \right) \left({}^t F_{ik} \right)^{-1} {}^0 n_k {}^0 dA, \quad (4.30)$$

chega-se a

$$-{}^t\zeta {}^t dA = \left(\det \left[{}^t F \right] \right) \left({}^t F_{ik} \right)^{-1} {}^tD_i {}^0 n_k {}^0 dA; \quad (4.31)$$

portanto, a medida Lagrangeana de deslocamentos elétricos é

$${}^tD_k = \left(\det \left[{}^t F \right] \right) \left({}^t F_{ik} \right)^{-1} {}^tD_i, \quad (4.32)$$

de modo que

$$-{}^t\zeta {}^t dA = {}^tD_k {}^0 n_k {}^0 dA. \quad (4.33)$$

Para aplicar o princípio dos deslocamentos virtuais a materiais piezoelétricos (CARDOSO, 2005; GAO E SHEN, 2003; ISOLDI, 2008; MARINKOVIC, KÖPPE E GABBERT, 2005; YI, LING E YING, 2000), é necessário incluir termos elétricos à Equação (4.9):

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} {}^t dV - \int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t} D_i \delta {}^{t+\Delta t} E_i {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{S} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.34)$$

Aqui são tratados os vetores deslocamento elétrico ${}^{t+\Delta t}D_i$ e campo elétrico ${}^{t+\Delta t}E_i$, ambos na descrição Lagrangeana atualizada; e o trabalho ${}^{t+\Delta t}\mathfrak{S}$ realizado pelas cargas externas, dado por

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{S} = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} + \int_{{}^{t+\Delta t}A} {}^{t+\Delta t}\zeta_i \delta\phi_i {}^{t+\Delta t}dA \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.35)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\zeta_i$ é a densidade de carga elétrica na superfície A no instante $t + \Delta t$ e $\delta\phi_i$ é o potencial elétrico virtual na configuração $t + \Delta t$.

Para obter a formulação incremental do PTV, o deslocamento elétrico e o campo elétrico devem ser tomados como sendo

$${}^{t+\Delta t}D_i = {}^tD_i + {}_t\Delta D_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4.36)$$

$${}^{t+\Delta t}E_i = {}^tE_i + {}_t\Delta E_i = {}_t\Delta E_i = {}_t\Delta E_i^{(l)} + {}_t\Delta E_i^{(nl)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.37)$$

onde tD_i é o deslocamento elétrico no instante t referenciado à configuração t ; ${}_t\Delta D_i$ é o deslocamento elétrico incremental em relação à configuração t ; ${}^tE_i = 0$; ${}_t\Delta E_i^{(l)}$ e ${}_t\Delta E_i^{(nl)}$ são as parcelas linear e não-linear dos incrementos de campo elétrico, respectivamente.

Considerando apenas a piezoeletricidade linear, a Equação (4.37) fica

$${}^{t+\Delta t}E_i \equiv {}_t\Delta E_i^{(l)} = {}_t\Delta E_i = -\Delta\phi_i = -\frac{\partial\Delta\phi}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.38)$$

Substituindo as equações (4.16), (4.17), (4.36) e (4.38) na (4.34), a equação incremental do princípio dos trabalhos virtuais de um contínuo piezoeletrico fica

$$\begin{aligned} & \int_{{}^tV} {}_t\Delta S_{ij} \delta {}_t\Delta \varepsilon_{ij} {}^t dV - \int_{{}^tV} {}_t\Delta D_i \delta {}_t\Delta E_i {}^t dV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_t\Delta \eta_{ij} {}^t dV = \\ & {}^{t+\Delta t}\mathfrak{S} + \int_{{}^tV} {}^tD_i \delta {}_t\Delta E_i {}^t dV - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_t\Delta e_{ij} {}^t dV, \end{aligned} \quad (4.39)$$

com $(i, j, k = 1, 2, 3)$.

As equações constitutivas incrementais do contínuo piezoeletrico, considerando-se as equações (4.11), (3.10) e (3.11), ficam

$${}^t\Delta S_{ij} = C_{ijrs} {}^t\Delta e_{rs} - {}^t e_{ji} {}^t\Delta E_i \quad (i, j, r, s = 1, 2, 3); \quad (4.40)$$

$${}^t\Delta D_i = {}^t e_{ij} {}^t\Delta e_{ij} + {}^t \xi_{ij} {}^t\Delta E_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.41)$$

as quais, quando substituídas na Equação (4.39), fornecem a equação incremental linearizada do PTV:

$$\begin{aligned} & \int_V {}^t C_{ijrs} {}^t\Delta e_{rs} \delta {}^t\Delta e_{ij} {}^t dV - \int_V {}^t e_{ji} {}^t\Delta E_i \delta {}^t\Delta e_{ij} {}^t dV - \\ & \int_V {}^t e_{ij} {}^t\Delta e_{ij} \delta {}^t\Delta E_i {}^t dV - \int_V {}^t \xi_{ij} {}^t\Delta E_i \delta {}^t\Delta E_i {}^t dV + \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t\Delta \eta_{ij} {}^t dV = \\ & {}^{t+\Delta t} \mathfrak{S} + \int_V {}^t D_i \delta {}^t\Delta E_i {}^t dV - \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t\Delta e_{ij} {}^t dV, \end{aligned} \quad (4.42)$$

com $(i, j, r, s = 1, 2, 3)$.

4.2 ELEMENTO FINITO GPL-T9 PARA PLACAS E CASCAS DELGADAS

4.2.1 Deslocamentos e deformações incrementais dos elementos finitos

Em placas e cascas delgadas a espessura do sólido é pequena em relação às demais dimensões, e as seguintes considerações são feitas:

- a) o plano médio da placa não sofre deformações devidas à ação de flexão;
- b) a componente de tensão normal ao plano médio da placa é nula;
- c) as partículas do material que originalmente pertencem a uma reta perpendicular à superfície média da placa continuam pertencendo a esta reta, mesmo com a deformação da placa; as deformações de cisalhamento são desprezíveis e a referida reta mantém-se perpendicular à superfície média da placa durante a deformação;
- d) os esforços de membrana e os esforços de flexão, atuando simultaneamente, no regime linear produzem deformações independentes que podem ser tratadas com o princípio da superposição dos efeitos.

Seja o elemento finito triangular de 3 nós de placas e cascas, plano e delgado, mostrado na Figura 20, em um sistema de coordenadas local.

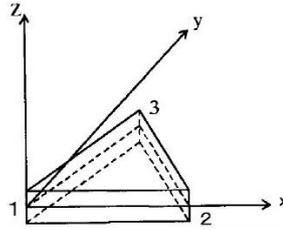


Figura 20: elemento finito triangular, plano e delgado, de três nós (QUN; MU; WENQI, 1998)

Os incrementos de deslocamentos a qualquer tempo neste elemento podem ser expressos por (QUN; MU; WENQI, 1998):

$$\Delta u_i^z = \Delta u_i - \Delta w_{,i} z ; \quad (4.43)$$

$$\Delta w^z = \Delta w , \quad (4.44)$$

onde Δu_i e Δw são os incrementos de deslocamento no plano neutro do elemento; z é a coordenada na direção z ; e $i = 1, 2$ representam as direções x e y , respectivamente.

Substituindo tais incrementos nas deformações incrementais dadas nas equações (4.18) e (4.19), tem-se

$$\Delta e_{ij}^z = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) - \Delta w_{,ij} z \quad (i, j = 1, 2); \quad (4.45)$$

$$\Delta \eta_{ij}^z = \frac{1}{2} (\Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta w_{,i} \Delta w_{,j}) - \Delta w_{,ij} z \quad (i, j = 1, 2). \quad (4.46)$$

A Figura 21 mostra os graus de liberdade nodais de membrana e de flexão (apenas no nó 3) do elemento finito triangular.

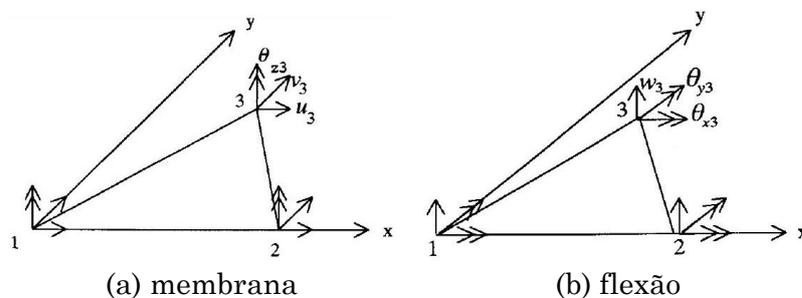


Figura 21: graus de liberdade nodais (a) de membrana e (b) de flexão do elemento finito triangular (baseada em QUN; MU; WENQI, 1998)

O vetor de deslocamentos nodais de membrana $\{u_{mi}\}^e$, considerando inclusive a rotação no plano da superfície média do elemento (*drilling*), é

$$\{u_{mi}\}^e = \{u_{xi} \quad u_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.47)$$

onde $u_{xi} = u_i$ e $u_{yi} = v_i$ são os dois graus de translação e θ_{zi} é o grau de liberdade de rotação.

Os deslocamentos de membrana, em função de seus valores nodais, são dados por

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [H_m] \{u_m\}^e, \quad (4.48)$$

onde $[H_m]$ é a função de interpolação de membrana no elemento,

$$[H_{mi}] = \begin{bmatrix} L_i & 0 & H_{u\theta_i} \\ 0 & L_i & H_{v\theta_i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.49)$$

sendo

$$\begin{aligned} H_{u\theta_i} &= \frac{1}{2} L_i (b_m L_j - b_j L_m) \quad (i \rightarrow j \rightarrow m); \\ H_{v\theta_i} &= \frac{1}{2} L_i (c_m L_j - c_j L_m) \quad (i \rightarrow j \rightarrow m); \\ b_i &= y_j - y_m \quad \text{e} \quad c_i = x_m - x_j \quad (i, j, m = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.50)$$

com L_i representando as coordenadas de área, e x_i e y_i as coordenadas nodais e a notação “ $i \rightarrow j \rightarrow m$ ” se refere à ordem a ser seguida da permutação dos índices.

O vetor de deslocamentos nodais de flexão de cada elemento, $\{u_{bi}\}^e$, é

$$\{u_{bi}\}^e = \{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}^T \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.51)$$

onde w_i são os deslocamentos transversais, e θ_{xi} e θ_{yi} são as rotações nodais em torno dos eixos x e y , respectivamente.

Os deslocamentos transversais são dados por

$$w = [H_b] \{u_b\}^e, \quad (4.52)$$

onde a função de interpolação de flexão, $[H_b]$, é

$$[H_{bi}] = [H_i \quad H_{xi} \quad H_{yi}] \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.53)$$

sendo

$$\begin{aligned} H_i &= L_i - 2F_i + (1 - r_j)F_j + (1 + r_m)F_m; \\ H_{xi} &= \frac{1}{2} [b_m L_i L_j - b_j L_m L_i + (b_j - b_m)F_i + (r_j b_j + b_m)F_j + (r_m b_m + b_j)F_m]; \\ H_{yi} &= \frac{1}{2} [c_m L_i L_j - c_j L_m L_i + (c_j - c_m)F_i + (r_j c_j + c_m)F_j + (r_m c_m + c_j)F_m]; \\ F_i &= L_i \left(L_i - \frac{1}{2} \right) (L_i - 1); r_i = \frac{1}{l_{j-m}^2} (l_{i-m}^2 - l_{i-j}^2) \quad (i, j, m = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.54)$$

com

$$l_{i-j} = \sqrt{x_{i-j}^2 + y_{i-j}^2}, \quad x_{i-j} = x_i - x_j \text{ e } y_{i-j} = y_i - y_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.55)$$

onde l_{i-j} é o comprimento do lado $i - j$.

Os incrementos de deformação linear da Equação (4.34) devem ser desmembrados em incrementos de deformação linear de membrana, $\{\Delta e_m\}$, e de flexão (curvaturas), $\{\Delta e_b\}$, dados por

$$\{\Delta e_m\} = \begin{Bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta u_{x,x} \\ \Delta u_{y,y} \\ \Delta u_{x,y} + \Delta u_{y,x} \end{Bmatrix}; \quad (4.56)$$

$$\{\Delta e_b\} = \begin{Bmatrix} \Delta \kappa_x \\ \Delta \kappa_y \\ \Delta \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta w_{,xx} \\ \Delta w_{,yy} \\ 2\Delta w_{,xy} \end{Bmatrix}. \quad (4.57)$$

Substituindo a Equação (4.38) em (4.46) obtém-se o vetor de incrementos de deformações de membrana em função dos deslocamentos nodais de membrana:

$$\{\Delta e_m\} = \begin{Bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B_m] \{\Delta u_m\}^e, \quad (4.58)$$

onde $[B_m]$ é a matriz relação deformação-deslocamento de membrana, definida por

$$[B_m] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} 2b_i & 0 & b_i(b_m L_j - b_j L_m) \\ 0 & 2c_i & c_i(c_m L_j - c_j L_m) \\ 2c_i & 2b_i & (c_i b_m + b_i c_m)L_j - (c_i b_j + b_i c_j)L_m \end{bmatrix} \quad (i, j, m = 1, 2, 3), \quad (4.59)$$

e A é a área do elemento.

De modo análogo, substituindo a Equação (4.51) na Equação (4.57) determina-se o vetor de incrementos de deformações de flexão em função dos deslocamentos nodais de flexão:

$$\{\Delta e_b\} = \begin{Bmatrix} \Delta \kappa_x \\ \Delta \kappa_y \\ \Delta \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [B_b] \{\Delta u_b\}^e, \quad (4.60)$$

onde $[B_b]$ é a matriz relação deformação-deslocamento de flexão,

$$[B_{b_i}] = - \begin{bmatrix} H_{i,xx} & H_{xi,xx} & H_{yi,xx} \\ H_{i,yy} & H_{xi,yy} & H_{yi,yy} \\ 2H_{i,xy} & 2H_{xi,xy} & 2H_{yi,xy} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.61)$$

A equação incremental dos trabalhos virtuais (4.23) pode ser desenvolvida como segue.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{^tV} {}^tC_{ijrs} {}^t\Delta e_{rs} \delta {}^t\Delta e_{ij} {}^t dV \\ I_1 &= \int_{^tA} \delta \{\Delta e_m\}^T [D_m] \{\Delta e_m\} {}^t dA + \int_{^tA} \delta \{\Delta e_m\}^T [D_{mb}] \{\Delta e_b\} {}^t dA + \\ &\quad \int_{^tA} \delta \{\Delta e_b\}^T [D_{bm}] \{\Delta e_m\} {}^t dA + \int_{^tA} \delta \{\Delta e_b\}^T [D_b] \{\Delta e_b\} {}^t dA, \end{aligned} \quad (4.62)$$

com

$$[D_m] = [T_\theta]^T [A] [T_\theta], \quad [D_b] = [T_\theta]^T [D] [T_\theta], \quad \text{e} \quad [D_{mb}] = [D_{bm}] = [T_\theta]^T [B] [T_\theta], \quad (4.63)$$

onde $[D_m]$, $[D_b]$ e $[D_{mb}]$ são as matrizes constitutivas incrementais de membrana; flexão e acoplamento membrana-flexão, respectivamente; as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ são componentes da matriz de rigidez completa $[C]$ do compósito laminado, estabelecidas na Equação (2.87); e $[T_\theta]$ é a matriz de transformação do sistema de coordenadas global para o local, definida por

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Nesta matriz, θ é o ângulo entre o eixo x , do sistema de coordenadas global 0- x - y - z , e o eixo 1, do sistema de coordenadas local do compósito laminado, definido pelas suas direções principais, tal como ilustrado na Figura 5.

O termo não-linear da Equação (4.23) fica

$$I_2 = \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \Delta \eta_{ij} {}^t dV = \int_{t_A} \delta \{\Delta \eta\}^T [{}^t N] \{\Delta \eta\} {}^t dA, \quad (4.65)$$

onde $[{}^t N]$ são as forças internas de membrana, dadas por

$$[{}^t N] = [D_m][B_m]\{{}^t u_m\} + [D_{mb}][B_b]\{{}^t u_b\} = \begin{bmatrix} {}^t N_{xx} & {}^t N_{xy} \\ {}^t N_{yx} & {}^t N_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

e os incrementos de deformação não linear $\{\Delta \eta\}$ são

$$\{\Delta \eta\} = \begin{Bmatrix} \Delta w_{,x} \\ \Delta w_{,y} \end{Bmatrix} = [G_G]\{\Delta u_b\}^e, \quad (4.67)$$

sendo $[G_G]$ a matriz geométrica do elemento:

$$[G_G] = - \begin{bmatrix} H_{i,x} & H_{xi,x} & H_{yi,x} \\ H_{i,y} & H_{xi,y} & H_{yi,y} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

O trabalho virtual das forças externas, no tempo $t + \Delta t$, e o trabalho virtual das forças internas no tempo t valem, respectivamente, a partir da Equação (4.23):

$$I_3 = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}A} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S {}^{t+\Delta t}dA; \quad (4.69)$$

$$I_4 = \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\Delta e_{ij} {}^t dV = \int_{{}^tA} \delta \{\Delta e_m\}^T \{ {}^tN \} {}^t dA + \int_{{}^tA} \delta \{\Delta e_b\}^T \{ {}^tNM \} {}^t dA + \int_{{}^tA} \delta \{\Delta e_m\}^T \{ {}^tMN \} {}^t dA + \int_{{}^tA} \delta \{\Delta e_b\}^T \{ {}^tM \} {}^t dA, \quad (4.70)$$

com

$$\begin{aligned} \{ {}^tN \} &= [D_m][B_m]\{ {}^tu_m \} = \{ {}^tN_{xx} \quad {}^tN_{yy} \quad {}^tN_{xy} \}^T; \\ \{ {}^tNM \} &= [D_{mb}][B_b]\{ {}^tu_b \} = \{ {}^tNM_{xx} \quad {}^tNM_{yy} \quad {}^tNM_{xy} \}^T; \\ \{ {}^tMN \} &= [D_{bm}][B_m]\{ {}^tu_m \} = \{ {}^tMN_{xx} \quad {}^tMN_{yy} \quad {}^tMN_{xy} \}^T; \\ \{ {}^tM \} &= [D_b][B_b]\{ {}^tu_b \} = \{ {}^tM_{xx} \quad {}^tM_{yy} \quad {}^tM_{xy} \}^T, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde $\{ {}^tN \}$, $\{ {}^tNM \}$, $\{ {}^tMN \}$ e $\{ {}^tM \}$ são os vetores correspondentes, respectivamente, às forças internas de membrana, ao acoplamento dos efeitos de membrana e de flexão/flexão e membrana, e aos momentos de flexão no elemento.

4.2.2 Discretização espacial pelo método dos elementos finitos

Para o caso dos problemas estáticos considerando a não linearidade geométrica, as equações incrementais de equilíbrio são discretizadas pelo método dos elementos finitos como

$$[{}^tK]\{\Delta u\} = \{ {}^{t+\Delta t}R \} - \{ {}^tF \}, \quad (4.72)$$

onde $\{\Delta u\}$ é o vetor de incremento de deslocamentos nodais, dado por

$$\{\Delta u\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\Delta u_1\} \\ \{\Delta u_2\} \\ \{\Delta u_3\} \end{array} \right\}; \quad \{\Delta u_i\} = \{ \Delta u_{xi} \quad \Delta u_{yi} \quad \Delta w_i \quad \Delta \theta_{xi} \quad \Delta \theta_{yi} \quad \Delta \theta_{zi} \}^T, \quad (4.73)$$

com $(i = 1, 2, 3)$; $\{ {}^{t+\Delta t}R \}$ é o vetor de forças nodais externas; $\{ {}^tF \}$ é o vetor de forças internas; e $[{}^tK]$ é a matriz de rigidez total corresponde à soma da matriz de rigidez linear, $[K_L]$, com a matriz de rigidez não linear geométrica, $[{}^tK_{NL}]$:

$$[{}^tK] = [K_L] + [{}^tK_{NL}]. \quad (4.74)$$

Para a determinação da matriz de rigidez linear considerando ambos os efeitos de membrana e flexão, em elementos de placas e cascas delgadas laminadas tem-se o sistema acoplado (JEYACHANDRABOSE; KIRKHOPE, 1985)

$$\begin{bmatrix} [K_m] & [K_{mb}] \\ [K_{bm}] & [K_b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta u_m\} \\ \{\Delta u_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ {}^{t+\Delta t}R_m \} - \{ {}^tF_m \} \\ \{ {}^{t+\Delta t}R_b \} - \{ {}^tF_b \} \end{Bmatrix}, \quad (4.75)$$

sendo as matrizes de rigidez devidas aos esforços de membrana $[K_m]$, de acoplamento membrana-flexão $[K_{mb}]$ e $[K_{bm}]$, e de flexão $[K_b]$, definidas por

$$\begin{aligned} [K_m] &= \int_{{}^tA} [B_m]^T [D_m] [B_m] {}^t dA; \\ [K_{mb}] &= \int_{{}^tA} [B_m]^T [D_{mb}] [B_b] {}^t dA; \\ [K_{bm}] &= \int_{{}^tA} [B_b]^T [D_{bm}] [B_m] {}^t dA = [K_{mb}]^T; \\ [K_b] &= \int_{{}^tA} [B_b]^T [D_b] [B_b] {}^t dA. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Isoldi (2008) apresenta, em seu anexo B, a forma explícita das matrizes de rigidez do elemento finito.

Os vetores de forças nodais externas referentes aos esforços de membrana, $\{ {}^{t+\Delta t}R_m \}$, e de flexão, $\{ {}^{t+\Delta t}R_b \}$, ficam

$$\begin{aligned} \{ {}^{t+\Delta t}R_m \} &= \int_{{}^tA} [H_m]^T \begin{Bmatrix} \{ {}^{t+\Delta t}R_x \} \\ \{ {}^{t+\Delta t}R_y \} \end{Bmatrix} {}^t dA; \\ \{ {}^{t+\Delta t}R_b \} &= \int_{{}^tA} [H_b]^T \{ {}^{t+\Delta t}R_z \} {}^t dA, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde $\{ {}^{t+\Delta t}R_x \}$, $\{ {}^{t+\Delta t}R_y \}$ e $\{ {}^{t+\Delta t}R_z \}$ são os vetores das forças nodais externas nas direções x , y e z , respectivamente; e os vetores de forças internas de membrana $\{ {}^tF_m \}$ e de flexão $\{ {}^tF_b \}$, no tempo t , são dados por

$$\begin{aligned}\{ {}^t F_m \} &= \int_{{}^t A} [B_m]^T \{ {}^t N \} {}^t dA + \int_{{}^t A} [B_m]^T \{ {}^t NM \} {}^t dA; \\ \{ {}^t F_b \} &= \int_{{}^t A} [B_b]^T \{ {}^t M \} {}^t dA + \int_{{}^t A} [B_b]^T \{ {}^t MN \} {}^t dA.\end{aligned}\quad (4.78)$$

Deve ser observado que, para o cálculo dos vetores das forças internas de membrana $\{ {}^t N \}$ e do acoplamento dos efeitos de flexão e de membrana $\{ {}^t MN \}$, da Equação (4.71), são empregados os deslocamentos totais de membrana em um instante de tempo t (BATHE; HO, 1981); porém, o cálculo dos vetores correspondentes aos momentos de flexão, $\{ {}^t M \}$, precisa ser feito por incrementos,

$$\{ {}^t M \} = \{ {}^{t+\Delta t} M \} + \{ {}_{t-\Delta t} \Delta M \}, \quad (4.79)$$

onde os momentos de flexão incrementais $\{ {}_{t-\Delta t} \Delta M \}$ são definidos por

$$\{ {}_{t-\Delta t} \Delta M \} = [D_b][B_b]\{ {}_{t-\Delta t} \Delta u_b \}, \quad (4.80)$$

sendo $\{ {}_{t-\Delta t} \Delta u_b \}$ o vetor de deslocamentos incrementais de flexão na configuração $t - \Delta t$. Isto se estende, evidentemente, também ao vetor de acoplamento dos efeitos de membrana e de flexão $\{ {}^t NM \}$.

A matriz de rigidez não linear geométrica é dada por

$$[{}^t K_{NL}] = \int_{{}^t A} [G_G]^T [{}^t N] [G_G] {}^t dA. \quad (4.81)$$

Para a análise dinâmica é necessário incluir o efeito das forças de inércia e, para uma abordagem mais realista, também o efeito das forças de amortecimento:

$$[M]\{ {}^{t+\Delta t} \ddot{u} \} + [c]\{ {}^{t+\Delta t} \dot{u} \} + [{}^t K]\{ \Delta u \} = \{ \{ {}^{t+\Delta t} R \} - \{ {}^t F \} \}. \quad (4.82)$$

A matriz de massa $[M]$ pode ser calculada a partir das funções de interpolação do elemento finito:

$$[M] = \sum_{k=1}^n h_k \rho_k \int_A [H]^T [H] dA. \quad (4.83)$$

Na Equação (4.83), n é o número total de lâminas que compõem o compósito laminado; h_k e ρ_k são a espessura e a massa específica da k -ésima lâmina, respectivamente; e a matriz de interpolação completa $[H]$ é dada por

$$[H] = \begin{bmatrix} L_i & 0 & H_{u\theta_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_i & H_{v\theta_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_i & H_{xi} & H_{yi} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.84)$$

Neste trabalho a matriz de massa foi calculada através da regra de quadratura gaussiana, empregando três pontos de integração.

A matriz de amortecimento $[c]$ pode ser determinada a partir das matrizes de massa e de rigidez,

$$[c] = \alpha_R [M] + \beta_R [K], \quad (4.85)$$

onde as constantes de Rayleigh α_R e β_R são calculadas a partir dos autovalores do sistema e das razões de amortecimento (adimensionais) de cada modo de vibração, as quais são arbitradas ou definidas pelo usuário (BATHE, 1996; CLOUGH; PENZIEN, 1993; GROEHS, 2001).

Para a análise estática ou dinâmica linear, as seguintes simplificações são feitas:

$$[{}^t K] \equiv [K_L], \quad \{{}^t F\} = \{0\}, \quad \text{e} \quad \{\Delta u\} \equiv \{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \\ \{u_3\} \end{Bmatrix}, \quad (4.86)$$

ou seja, a matriz de rigidez não linear geométrica e o vetor de forças internas não são utilizados; e as incógnitas do problema são os deslocamentos nodais totais $\{u\}$, e não mais os incrementos de deslocamentos nodais.

Todas as equações de equilíbrio incrementais apresentadas anteriormente foram referidas ao sistema local de coordenadas do elemento. Para a montagem de todas as matrizes e vetores é necessária uma transformação para o sistema global de coordenadas, como segue.

Seja o elemento finito plano triangular da Figura 22, com três nós (i, j e k), num sistema de eixos local x^l - y^l - z^l , e um sistema de eixos global x^g - y^g - z^g .

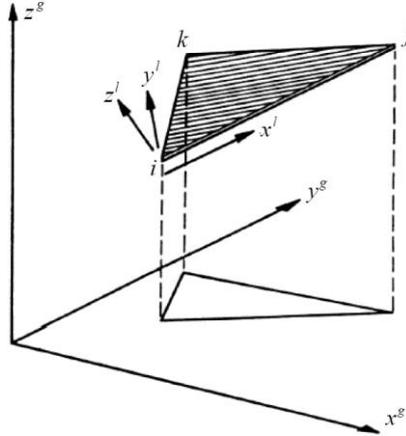


Figura 22: sistemas de eixos, local e global, do elemento finito triangular de três nós (baseada em ZIENKIEWICZ, 2000)

Organizando a matriz $[A]$ dos cossenos dos ângulos entre os eixos locais e globais

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} &= \frac{x_2^g - x_1^g}{l_{1-2}}; \lambda_{xy} = \frac{y_2^g - y_1^g}{l_{1-2}}; \lambda_{xz} = \frac{z_2^g - z_1^g}{l_{1-2}}; \lambda_{zx} = \frac{x_c}{2A}; \lambda_{zy} = \frac{y_c}{2A}; \lambda_{zz} = \frac{z_c}{2A}; \\ \lambda_{yx} &= \lambda_{zy}\lambda_{xz} - \lambda_{xy}\lambda_{zz}; \lambda_{yy} = \lambda_{xx}\lambda_{zz} - \lambda_{zx}\lambda_{xz}; \lambda_{yz} = \lambda_{zx}\lambda_{xy} - \lambda_{xx}\lambda_{zy}; \\ l_{1-2} &= \sqrt{(x_2^g - x_1^g)^2 + (y_2^g - y_1^g)^2 + (z_2^g - z_1^g)^2}; \\ x_c &= (y_2^g - y_1^g)(z_3^g - z_1^g) - (z_2^g - z_1^g)(y_3^g - y_1^g); \\ y_c &= (x_2^g - x_1^g)(z_3^g - z_1^g) - (z_2^g - z_1^g)(x_3^g - x_1^g); \\ z_c &= (x_2^g - x_1^g)(y_3^g - y_1^g) - (y_2^g - y_1^g)(x_3^g - x_1^g); \\ 2A &= \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

sendo λ_{xx} o cosseno do ângulo formado entre o eixo x^l e x^g , e assim sucessivamente, a matriz de transformação global-local $[T_{gl}]$ fica

$$[T_{gl}] = \begin{bmatrix} [T_\lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [T_\lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [T_\lambda] \end{bmatrix}, \text{ com } [T_\lambda] = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [A] \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

Definida deste modo, a matriz de transformação global-local deve ser utilizada como nos seguintes exemplos:

$$\{u^l\}_e = [T_{gl}] \{u^g\}_e; \{R^g - F^g\}_e = [T_{gl}]^T \{R^l - F^l\}_e; [K^g]_e = [T_{gl}]^T [K^l]_e [T_{gl}]. \quad (4.90)$$

4.2.3 Consideração do material piezoelétrico

Incorporando até duas lâminas de material piezoelétrico ao elemento finito descrito anteriormente, podendo ser utilizadas como atuadores e/ou sensores e então aplicadas ao monitoramento e controle de vibrações, tal elemento passa a ter adicionalmente um grau de liberdade elétrico por camada piezoelétrica (ϕ), além dos seis graus de liberdade mecânicos ($u_x, u_y, w, \theta_x, \theta_y$ e θ_z). Por hipótese, o potencial elétrico é tomado como constante sobre o elemento (BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2001).

Sendo a formulação Lagrangeana total dos deslocamentos elétricos dada por

$${}^{t+\Delta t}{}_0\phi = {}^t{}_0\phi + \Delta\phi, \quad (4.91)$$

considerando a Equação (4.25) é possível avaliar o incremento de campo elétrico, como segue:

$${}^{t+\Delta t}{}_0E_k = -\frac{\partial({}^t{}_0\phi + \Delta\phi)}{\partial {}^0x_k} = -\frac{\partial {}^t{}_0\phi}{\partial {}^0x_k} - \frac{\partial \Delta\phi}{\partial {}^0x_k} = {}^tE_l - c_k, \quad (4.92)$$

onde tE_l é o gradiente linear de campo elétrico e “ c_k é linear com respeito ao incremento de campo elétrico. Como o gradiente é linear com respeito ao potencial elétrico, existe apenas uma componente linear de incremento” (ISOLDI, 2008, p. 174).

Considerando as equações (3.22), (4.37) e (4.92), o campo elétrico incremental é dado por

$$\{\Delta E\} = \begin{Bmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta \phi_{,x} \\ \Delta \phi_{,y} \\ \Delta \phi_{,z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \Delta \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta \phi}{h_p} \end{Bmatrix}, \quad (4.93)$$

e o campo elétrico no elemento finito é

$$\{-\Delta E\} = [B_\phi] \{\Delta \phi\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/h_{p_i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/h_{p_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \phi_{p_i} \\ \Delta \phi_{p_s} \end{Bmatrix}, \quad (4.94)$$

onde $[B_\phi]$ é a matriz das derivadas das funções de interpolação elétricas; h_{p_i} e h_{p_s} são as espessuras das lâminas piezoelétricas inferior e superior, respectivamente; e $\Delta \phi_{p_i}$ e $\Delta \phi_{p_s}$ são os valores incrementais dos potenciais elétricos nas lâminas inferior e superior, respectivamente.

Dessa maneira, a equação incremental de equilíbrio dinâmico no seu caso mais geral, empregando a análise não linear geométrica, considerando amortecimento e possuindo camadas piezoelétricas, fica, discretizada pela técnica dos elementos finitos,

$$\begin{bmatrix} [M_{uu}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ {}^{t+\Delta t} \ddot{u} \} \\ \{ {}^{t+\Delta t} \ddot{\phi} \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [c_{uu}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ {}^{t+\Delta t} \dot{u} \} \\ \{ {}^{t+\Delta t} \dot{\phi} \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [{}^t K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \Delta u \} \\ \{ \Delta \phi \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ {}^{t+\Delta t} R_u \} - \{ {}^t F_u \} \\ \{ {}^{t+\Delta t} R_\phi \} - \{ {}^t F_\phi \} \end{Bmatrix}, \quad (4.95)$$

onde:

- a) as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez, $[M_{uu}]$, $[c_{uu}]$ e $[{}^t K_{uu}]$ respectivamente, devem ser calculadas levando em consideração as camadas piezoelétricas que estiverem presentes em cada elemento;

b) a matriz de rigidez elétrica $[K_{\phi\phi}]$ é definida por

$$[K_{\phi\phi}] = - \int_{V} [{}^t B_{\phi}]^T \begin{bmatrix} [\xi_i] & [0] \\ [0] & [\xi_s] \end{bmatrix} [{}^t B_{\phi}]^t dV = - \begin{bmatrix} \frac{A_i \xi_{33i}}{h_i} & 0 \\ 0 & \frac{A_s \xi_{33s}}{h_s} \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

onde A são as áreas da superfície, h são as espessuras e ξ_{33} são as constantes dielétricas dos elementos piezoelétricos, e os subscritos i e s referem-se às camadas piezoelétricas inferior e superior, respectivamente;

c) a matriz de acoplamento elástico-elétrico ou de rigidez eletromecânica

$[K_{u\phi}] = [K_{u\phi}]^T$ é dada por

$$[K_{u\phi}] = \int_{V} \begin{bmatrix} [{}^t B_m] & [{}^t B_m] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [e^1]_i & [0] \\ [0] & [e^1]_s \end{bmatrix} [{}^t B_{\phi}]^t dV + \int_{V} z \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [{}^t B_b] & [{}^t B_b] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [e^1]_i & [0] \\ [0] & [e^1]_s \end{bmatrix} [{}^t B_{\phi}]^t dV, \quad (4.97)$$

sendo z a coordenada cartesiana normal ao elemento e $[e^1]$ é a matriz de acoplamento piezoelétrico no sistema local de coordenadas,

$$[e^1] = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{e^1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{36} \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

d) a determinação do vetor de forças mecânicas internas $\{{}^t F_u\}$ precisa considerar o efeito das camadas piezoelétricas a partir das equações (4.78) e (3.37);

e) o vetor de cargas elétricas nodais externas $\{{}^{t+\Delta t} R_{\phi}\}$, de acordo com Marinkovic, Köppe e Gabbert (2004), é calculado por

$$\left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_\phi \right\} = \int_{t+\Delta t}^A \begin{Bmatrix} q_i \\ q_s \end{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} dA, \quad (4.99)$$

sendo q_i e q_s as cargas elétricas no elemento piezoelétrico inferior e superior, respectivamente;

f) o vetor de forças elétricas internas $\left\{ {}^t \mathbf{F}_\phi \right\}$ é dado por (MARINKOVIC; KÖPPE; GABBERT, 2005; YI; LING; YING, 2000):

$$\left\{ {}^t \mathbf{F}_\phi \right\} = \int_{t_V} \left[{}^t \mathbf{B}_\phi \right]^T \begin{Bmatrix} \left\{ {}^t \mathbf{D} \right\}_i \\ \left\{ {}^t \mathbf{D} \right\}_s \end{Bmatrix} {}^t dV, \quad (4.100)$$

onde os vetores deslocamento elétrico $\left\{ {}^t \mathbf{D} \right\}_i$ e $\left\{ {}^t \mathbf{D} \right\}_s$ das camadas piezoelétricas inferior e superior, respectivamente, são dados em uma formulação Lagrangeana atualizada, segundo ISOLDI (2008), por

$$\left\{ {}^t \mathbf{D} \right\} = \det \left[{}^{t+\Delta t} {}^t \mathbf{F} \right] \left[{}^{t+\Delta t} {}^t \mathbf{F} \right]^{-1} \left\{ {}^t \mathbf{D} \right\}, \quad (4.101)$$

onde $\left\{ {}^t \mathbf{D} \right\}$ é calculado a partir da Equação (3.38), como sendo

$$\left\{ {}^t \mathbf{D} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \left\{ e_{31} \quad e_{32} \quad e_{36} \right\}_k \left[\mathbf{T} \right]_k^T \left[\left[\mathbf{I}_3 \right] \quad z_{mk} \left[\mathbf{I}_3 \right] \right] \begin{Bmatrix} {}^t \mathcal{E}^0 \\ {}^t \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} - \xi_k \frac{{}^t \phi_k}{h_k} \end{array} \right\}. \quad (4.102)$$

No caso de uma análise sem amortecimento, a Equação (4.82) pode ser desmembrada em

$$\left[\mathbf{M}_{uu} \right] \left\{ {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \right\} + \left[{}^t \mathbf{K}_{uu} \right] \left\{ \Delta \mathbf{u} \right\} + \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right] \left\{ \Delta \phi \right\} = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_u \right\} - \left\{ {}^t \mathbf{F}_u \right\}; \quad (4.103)$$

$$\left[\mathbf{K}_{\phi u} \right] \left\{ \Delta \mathbf{u} \right\} + \left[\mathbf{K}_{\phi\phi} \right] \left\{ \Delta \phi \right\} = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_\phi \right\} - \left\{ {}^t \mathbf{F}_\phi \right\}. \quad (4.104)$$

Isolando $\left\{ \Delta \phi \right\}$ em (4.104), obtém-se a partir de (4.103),

$$\begin{aligned}
[M_{uu}] \{ {}^{t+\Delta t} \ddot{u} \} + \left[[{}^t K_{uu}] - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] \right] \{ \Delta u \} = \\
\{ {}^{t+\Delta t} R_u \} - \{ {}^t F_u \} - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} \left\{ \{ {}^{t+\Delta t} R_\phi \} - \{ {}^t F_\phi \} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Ainda no caso de uma análise não amortecida, se não há atuador – e portanto a carga elétrica externa aplicada é nula – a tensão elétrica no sensor pode ser calculada, a partir da Equação (4.104), por

$$\{ \Delta \phi \}_s = - [K_{\phi\phi}]_s^{-1} \left\{ \{ {}^t F_\phi \} + [K_{\phi u}]_s \{ \Delta u \}_s \right\}, \tag{4.106}$$

onde o subscrito s refere-se ao emprego exclusivo de elemento(s) piezoelétrico(s) sensor(es).

Já no caso da análise linear não amortecida, as equações (4.103) a (4.106) ficam

$$[M_{uu}] \{ \ddot{u} \} + [K_{uu}] \{ u \} + [K_{u\phi}] \{ \phi \} = \{ R_u \}; \tag{4.107}$$

$$[K_{\phi u}] \{ u \} + [K_{\phi\phi}] \{ \phi \} = \{ R_\phi \}; \tag{4.108}$$

$$[M_{uu}] \{ \ddot{u} \} + \left[[K_{uu}] - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] \right] \{ u \} = \{ R_u \} - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} \{ R_\phi \}; \tag{4.109}$$

$$\{ \phi \}_s = - [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s \{ u \}_s. \tag{4.110}$$

5 TEORIA DE CONTROLE

5.1 SISTEMAS DE CONTROLE

Um sistema de controle, conforme Bazanella e Silva Jr. (2005), pode ser representado esquematicamente como mostrado na Figura 23.

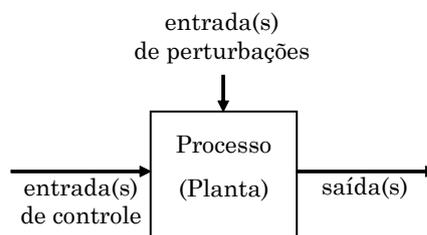


Figura 23: sistema de controle (baseada em BAZANELLA E SILVA JR., 2005)

O termo *sistema* é usado para descrever uma série de componentes que interagem em torno de uma condição limite imaginária, e somente a entrada e a saída são de interesse, ou seja, não há a necessidade de explorar as interações detalhadas entre os componentes (BOLTON, 1995, grifo do autor).

O sistema a ser controlado é chamado de processo ou planta; o sinal aplicado na(s) entrada(s) de controle é chamado de sinal de controle; e o sinal de saída do processo é chamado de variável controlada (variável cujo comportamento deseja-se controlar). O sistema controlado está geralmente sujeito ainda a sinais externos chamados de perturbações, que são sinais de entrada cujos valores não podem ser controlados.

O objetivo de um sistema de controle é, através da aplicação de sinais adequados à entrada de controle, fazer com que o sinal de saída apresente um comportamento preestabelecido, e que seja minimizado o efeito das perturbações.

As estratégias de controle podem ser controle em malha aberta e controle em malha fechada.

No controle em malha aberta aplica-se um sinal de controle predeterminado esperando-se que, ao final de certo período de tempo, a variável controlada atinja determinado valor

ou comportamento. O sinal de entrada é geralmente escolhido ou adotado com base em experiências anteriores.

São subsistemas de um sistema de controle de malha aberta:

- a) elemento de controle: determina a ação que deve ser tomada;
- b) elemento de correção: age de forma a levar o sinal de saída ao valor determinado;
- c) processo ou planta: sistema no qual uma variável é controlada.

Os subsistemas elemento de controle e elemento de correção são geralmente componentes de um sistema chamado de controlador.

Na Figura 24 é mostrado o diagrama básico de um controle em malha aberta.

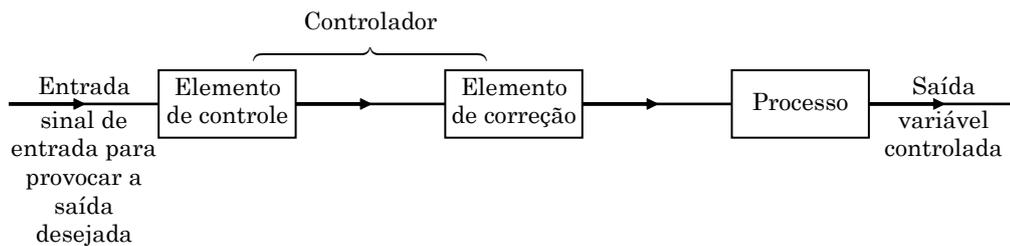


Figura 24: controle em malha aberta (baseada em BOLTON, 1995)

No controle em malha fechada, as informações sobre o comportamento da saída do processo são utilizadas para determinar o sinal de controle que está sendo aplicado a cada intervalo de tempo. Para tornar o sistema mais preciso e fazer com que ele reaja às perturbações externas, o sinal de saída é comparado com um sinal de referência chamado de *set-point*; a diferença entre esses dois sinais, chamada de sinal de erro, é utilizada para determinar o sinal de controle. Tal procedimento sobre o sistema é chamado de realimentação.

São subsistemas de um sistema de controle de malha fechada:

- a) elemento de comparação: determina o sinal de erro, efetuando a diferença ou soma entre o sinal de referência e o sinal de saída;

- b) elemento de controle: decide qual ação tomar quando recebe um sinal de erro. Geralmente é chamado de atuador;
- c) elemento de correção: provoca uma mudança no processo de forma a corrigir o erro;
- d) processo ou planta: sistema no qual uma variável é controlada;
- e) elemento de medida: gera um sinal a partir da variável controlada e fornece um sinal realimentando o elemento de comparação.

Os elementos de controle e de correção são frequentemente chamados de controlador. Quando ocorre diferença entre o sinal de referência e o sinal de saída, a realimentação é chamada de negativa; caso contrário, é chamada de realimentação positiva.

Na Figura 25 é mostrado o diagrama básico de um controle em malha fechada.

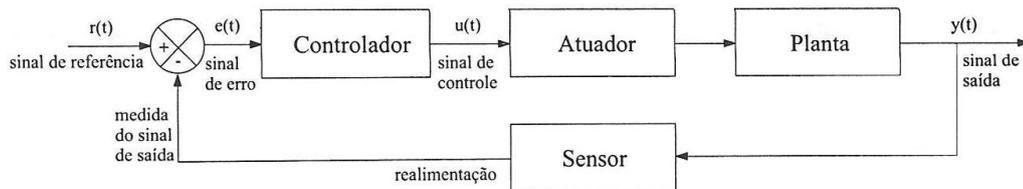


Figura 25: controle em malha fechada (BAZANELLA E SILVA JR., 2005)

5.2 DESEMPENHO DE SISTEMAS REALIMENTADOS

O desempenho de um sistema de controle pode ser analisado em função da resposta temporal a uma dada entrada. Para possibilitar a comparação do desempenho de dois sistemas distintos, empregam-se geralmente entradas padrão do tipo salto ou rampa.

A resposta de um sistema estável à aplicação de uma dada entrada pode ser dividida em duas partes: a resposta transitória e a resposta em regime permanente. Conforme Bazanella e Silva Jr. (2005):

A resposta transitória é um período de tempo que decorre logo após a aplicação de uma nova entrada ao sistema em que se dão grandes variações na saída do processo. É o tempo que o sistema demora para se acomodar (ou reagir) à nova entrada. Por outro lado, a resposta em regime permanente caracteriza o comportamento da saída do sistema um longo tempo após a aplicação de um dado sinal de entrada.

O desempenho em regime transitório de sistemas realimentados é avaliado geralmente pela resposta temporal a uma entrada do tipo degrau. Uma resposta típica a um degrau unitário, conforme Bazanella e Silva Jr. (2005), é mostrada na Figura 26.

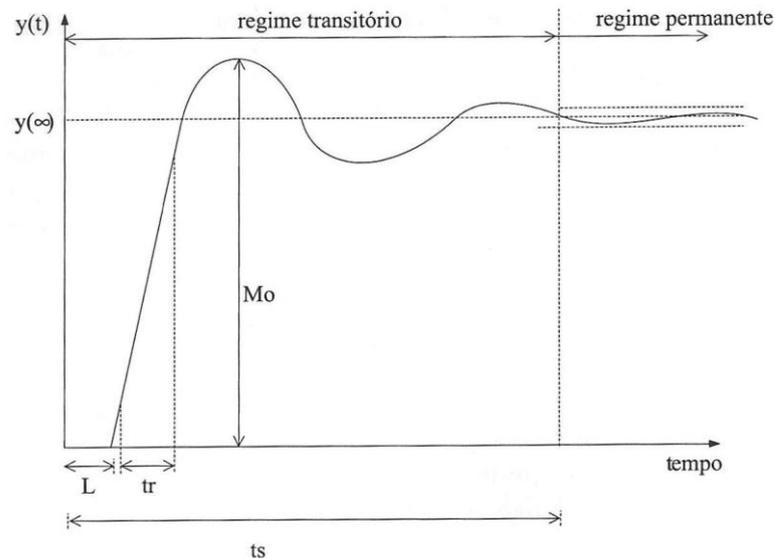


Figura 26: desempenho em regime transitório (Bazanella e Silva Jr., 2005)

Para medir o desempenho do sistema em regime transitório são empregadas as seguintes grandezas:

- a) máximo sobrepasso (M_o): é a máxima diferença entre a saída e o seu valor no regime permanente, $y(\infty)$, durante o período transitório. Geralmente é dado em porcentagem:

$$M_o \% = \frac{M_o - y(\infty)}{y(\infty)} 100. \quad (5.1)$$

No caso em que a saída não ultrapassa o valor de regime permanente, o máximo sobrepasso é, por definição, igual a zero. Sobrepassos muito grandes são geralmente inaceitáveis e, além disso, quanto maior seu valor, menor é a estabilidade relativa, ou seja, o sistema está sujeito a apresentar comportamento instável;

- b) tempo de subida (t_r): é o tempo transcorrido para a resposta ir de 10% a 90% do seu valor final. É um indicativo da rapidez da reação do sistema à

aplicação de uma função salto em sua entrada. A redução excessiva do tempo de subida de um sistema durante a sintonia dos parâmetros de um controlador pode ocasionar um alto sobrepasso;

- c) tempo de acomodação (t_s): é o tempo necessário para que a resposta entre e permaneça dentro de uma faixa percentual (2% a 5%) em torno do valor de regime permanente;
- d) atraso de transporte (L_t): é o tempo decorrente para que uma variação no sinal de entrada seja efetivamente observado na variável controlada. Geralmente, quanto maior o atraso de transporte, mais difícil é o controle do processo. São causas de ocorrência do atraso de transporte: atraso na operação do atuador; atraso na medida da variável de processo.

5.3 AÇÕES BÁSICAS DE CONTROLE; CONTROLE PID

O controlador realiza operações matemáticas sobre um sinal de erro $e(t)$ com a finalidade de produzir um sinal de controle $u(t)$. Estas operações são chamadas de ações de controle. As ações básicas de controle são a ação proporcional, a ação integral e a ação derivativa.

- a) ação de controle proporcional: Corresponde ao caso em que o sinal de controle aplicado a cada instante à planta é proporcional à amplitude do valor do sinal de erro,

$$u(t) = K_p e(t). \quad (5.2)$$

Deste modo, se em um instante o valor de saída do processo é menor que o valor de referência, ou seja, $e(t) > 0$, o controle a ser aplicado será positivo e proporcional ao módulo de $e(t)$. K_p é uma constante chamada de ganho proporcional. “O controlador é apenas um amplificador com ganho constante. Um grande erro em algum instante de tempo acarreta um valor alto na saída do controlador nesse instante de tempo” (BOLTON, 1995).

- b) ação de controle integral: consiste em aplicar um controle $u(t)$ proporcional à integral do sinal $e(t)$,

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (5.3)$$

K_i é uma constante chamada de ganho integral e tem unidade do inverso do tempo (s^{-1} no S.I.).

- c) ação de controle derivativa: consiste na aplicação de um sinal de controle $u(t)$ proporcional à derivada do sinal de erro,

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (5.4)$$

K_d é uma constante chamada de ganho derivativo e tem a unidade de tempo (s no S.I.). “O controle derivativo é insensível a sinais de erro constantes ou de variação lenta, e conseqüentemente não é usado sozinho, mas combinado com outras formas de controle” (BOLTON, 1995).

A combinação das ações básicas de controle proporcional, integral e derivativa para gerar um sinal de controle origina o controlador proporcional-integral-derivativo – PID. Citando Bazanella e Silva Jr. (2005):

O controlador PID é capaz de eliminar erros de regime permanente, através da ação integral, bem como antecipar o comportamento do processo, graças à ação derivativa. A ação proporcional, por sua vez, faz com que o sistema reaja ao erro presente, conferindo ao sistema uma reação imediata e, portanto, rápida à ação de perturbações ou variações de referência de magnitudes significativas.

O sinal de controle gerado pelo controlador PID pode ser expresso por

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (5.5)$$

“Apesar de sua estrutura relativamente simples, os controladores PID têm-se revelado suficientes para o controle adequado de uma grande gama de processos” (BAZANELLA E SILVA JR., 2005).

Dependendo da aplicação, entretanto, não é necessária a utilização de uma ou mais dessas ações de controle. A partir de uma estrutura PID quatro configurações de controles são geralmente empregadas: apenas o controle proporcional (P); o proporcional-integral (PI); o proporcional-derivativo (PD); e o próprio proporcional-integral-derivativo (PID).

“A redução de estabilidade relativa resultante do controle integral pode ser resolvida, até certo ponto, pela ação do controle PI” (BOLTON, 1995).

5.4 MODELO DE ESPAÇO DE ESTADOS

Seja o sistema dinâmico de segunda ordem

$$[M]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = [F]\{u\}, \quad (5.6)$$

onde $[M]$, $[c]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente; $[F]$ é a matriz de influência das ações de controle; $\{q\}$ é o vetor de deslocamentos e $\{\dot{q}\}$ e $\{\ddot{q}\}$ são os vetores de velocidades e acelerações, respectivamente; e $\{u\}$ é o vetor de ações de controle.

Com o objetivo de escrever a equação anterior em primeira ordem introduz-se o seguinte vetor, chamado de vetor de variáveis de estado,

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}, \quad (5.7)$$

e calcula-se a sua derivada:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ -[M]^{-1}[c]\{\dot{q}\} - [M]^{-1}[K]\{q\} + [M]^{-1}[F]\{u\} \end{Bmatrix} \\ \{\dot{x}\} &= \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}[F] \end{bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_u]\{u\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A equação de saída do sistema pode ser colocada na forma

$$\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}, \quad (5.9)$$

onde $\{y\}$ é o vetor das variáveis observáveis, obtido através da combinação das variáveis de estado e das ações de controle. As matrizes $[C]$ e $[D]$, no sistema *full state feedback*, valem, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula; nesse caso,

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Se não há perturbações externas ou ação de controle, a Equação (5.8) fica reduzida a

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\}, \quad (5.11)$$

cuja solução $\{x(t)\}$ pode ser encontrada assumindo que é do tipo

$$\{x(t)\} = ce^{\lambda t} \{\phi\}; \quad (5.12)$$

onde c é uma constante; substituindo a Equação (5.12) na (5.11) tem-se

$$c(\lambda[I] - [A])e^{\lambda t} \{\phi\} = \{0\} \quad \text{ou} \quad (\lambda[I] - [A])\{\phi\} = \{0\}. \quad (5.13)$$

Para que exista uma solução não trivial é necessário que

$$|\lambda[I] - [A]| = \{0\}, \quad (5.14)$$

cujas soluções λ são chamadas de autovalores e os correspondentes vetores $\{\phi\}$ são os autovetores. Para um i -ésimo autovalor λ_i , a Equação (5.13) pode ser reescrita como

$$\lambda_i \{\phi_i\} = [A]\{\phi_i\}, \quad (5.15)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \lambda_1 \{\phi_1\} &= [A]\{\phi_1\} \\ \lambda_2 \{\phi_2\} &= [A]\{\phi_2\} \\ &\vdots \\ \lambda_n \{\phi_n\} &= [A]\{\phi_n\} \Rightarrow [A][U] = [U][A], \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde $[U]$ é uma matriz cujas colunas consistem de autovetores e $[A]$ é uma matriz diagonal em que cada termo é um autovalor:

$$[U] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}] \text{ e } [A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Se os autovalores são distintos, pode ser estabelecida a seguinte relação:

$$[A] = [U]^{-1} [A][U]. \quad (5.18)$$

5.5 REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR

5.5.1 Teoria da estabilidade de Lyapunov

Seja um sistema não linear do tipo

$$\{\dot{x}\} = f(\{x\}, t); \{x(t_0)\} = \{x_0\}, \quad (5.19)$$

onde $\{x\}$ é um vetor e $f(\{x\}, t)$ representa a função não linear. Tal sistema é considerado estável na teoria da estabilidade de Lyapunov, com relação ao estado de equilíbrio, se para qualquer valor $\eta > 0$ existe um número $\delta(\eta, t_0) > 0$ para o qual

$$\|\{x(t)\}\| < \eta \text{ para todo } t > t_0 \text{ e } \|\{x(t_0)\}\| < \delta. \quad (5.20)$$

“A condição acima implica que a magnitude de $\{x(t)\}$ se mantém dentro de um valor finito e pequeno na presença de uma perturbação inicial pequena. Esta definição inclui também movimentos oscilatórios puros não amortecidos” (KWON; BANG, 2000, tradução nossa).

Um sistema é estável assintoticamente se, além de satisfazer a condição de estabilidade,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\{x(t)\}\| = 0. \quad (5.21)$$

Para este tipo de sistema, o vetor de estados converge para o ponto de equilíbrio, assumido aqui como zero. Na Figura 27 (a) é mostrada a resposta no tempo de um sistema estável; na Figura 27 (b), a resposta no tempo de um sistema estável assintoticamente.

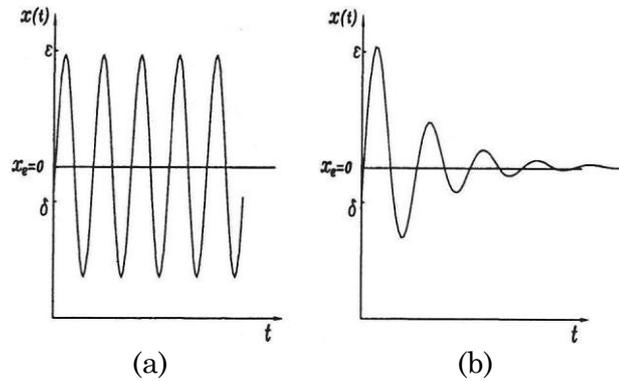


Figura 27: resposta no tempo de um sistema (a) estável e (b) assintoticamente estável (KWON; BANG, 2000)

A segunda teoria da estabilidade de Lyapunov utiliza uma função de energia não negativa para um dado sistema. Se a função de energia diminui, então o sistema é estável na direção de um ponto de equilíbrio.

Seja um sistema linear de primeira ordem dado por

$$\{\dot{x}\} = [A] \{x\}, \quad (5.22)$$

onde $\{x\}$ é um vetor de dimensão $n \times 1$. Escolhendo a função de Lyapunov

$$U = \{x\}^T [P] \{x\} \quad (5.23)$$

para estabelecer a condição de estabilidade do sistema, e derivando-a com relação ao tempo, encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{dU}{dt} = \{\dot{x}\}^T [P] \{x\} + \{x\}^T [P] \{\dot{x}\} \\ \dot{U} &= \{x\}^T \left[[A]^T [P] + [P][A] \right] \{x\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Fazendo

$$-[Q] = [A]^T [P] + [P][A], \quad (5.25)$$

de modo que $[Q]$ seja uma matriz positivo-definida que satisfaça as propriedades

$$\{x\}^T [Q] \{x\} > 0 \text{ para } \{x\} \neq \{0\} \text{ e } [Q] = [Q]^T, \quad (5.26)$$

a partir da Equação (5.24) verifica-se que

$$\dot{U} = -\{x\}^T [Q] \{x\} < 0. \quad (5.27)$$

Portanto, o sistema linear da Equação (5.22) é estável se e somente se existe uma matriz positivo-definida $[P]$ que satisfaça a condição da Equação (5.25) para uma dada matriz positivo-definida $[Q]$.

Considere-se agora a análise da estabilidade de um sistema linearizado de vários graus de liberdade, não amortecido, descrito por

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = [F] \{u\}. \quad (5.28)$$

Se não há forças externas, a solução do problema das vibrações livres não amortecidas é

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^n c_k \{\phi_k\} e^{i\omega_k t}, \quad (5.29)$$

onde c_k são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais.

Para analisar a estabilidade deste sistema é necessário considerar o fato que a energia total, soma da energia cinética com a potencial, é um indicador da estabilidade; portanto sugere-se que a função de Lyapunov seja

$$U = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}. \quad (5.30)$$

Observa-se nas análises típicas do método dos elementos finitos que $U \geq 0$, pois as matrizes de massa e de rigidez são simétricas e positivo-definidas. Derivando a função de Lyapunov encontra-se

$$\dot{U} = \{\dot{q}\}^T [[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\}] = \{\dot{q}\}^T [F] \{u\}; \quad (5.31)$$

sem forças externas,

$$\dot{U} = 0 \text{ ou } \dot{U} = \text{constante}. \quad (5.32)$$

A análise do sistema amortecido, dado pela Equação (5.6), conduz ao seguinte resultado:

$$\dot{U} = \{\dot{q}\}^T \{-[c]\{\dot{q}\} + [F]\{u\}\}; \quad (5.33)$$

se não ocorrem perturbações externas, então

$$\dot{U} = -\{\dot{q}\}^T [c]\{\dot{q}\}. \quad (5.34)$$

Se a matriz de amortecimento $[c]$ for positivo-definida, então o sistema é estável assintoticamente.

5.5.2 Teoria do regulador quadrático linear (*linear quadratic regulator*) – LQR

A teoria do regulador quadrático linear origina-se da teoria do controle ótimo (ATHANS; FALB, 1966; KWON; BANG, 2000), e consiste em encontrar-se a entrada de controle $u(t)$ que minimiza o funcional J dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\{x\}^T [Q]\{x\} + \{u\}^T [R]\{u\} \right) dt, \quad (5.35)$$

associado ao sistema dinâmico da Equação (5.8) com condições iniciais $\{x(0)\}$, onde a matriz-peso $[Q]$ é positivo-definida ou semipositivo-definida; a matriz-peso $[R]$ é positivo-definida; e o limite superior infinito do funcional significa que interessa o comportamento estacionário do sistema.

Pode ser demonstrado que o sinal de controle ótimo é função do multiplicador de Lagrange λ :

$$\{u\} = -[R]^{-1} [B_u]^T \{\lambda\}. \quad (5.36)$$

Como os valores de $\{\lambda\}$ são conhecidos somente na fase estacionária, pois $\{\lambda(\infty)\} = 0$, seu cálculo não é imediato; uma alternativa é considerar

$$\{\lambda\} = [S]\{x\}, \quad (5.37)$$

onde $[S]$ é chamada matriz de Ricatti. Desta maneira, a entrada de controle ótima pode ser escrita como

$$\{u\} = -[G]\{x\}, \quad (5.38)$$

onde $[G]$ é a matriz de ganho

$$[G] = \left[[R]^{-1} [B_u]^T [S] \right]. \quad (5.39)$$

Portanto, uma vez encontrada a matriz de Ricatti o ganho é automaticamente calculado. A matriz de Ricatti é a solução da equação algébrica de Ricatti (*algebraic Ricatti equation* – ARE) (BITTANTI; LAUB; WILLEMS, 1991; DATTA, 2004; POTTER, 1966),

$$[S][A] + [A]^T [S] - [S][B_u][R]^{-1} [B_u]^T [S] + [Q] = [0], \quad (5.40)$$

solução esta que pode ser calculada a partir dos autovalores complexos da matriz Hamiltoniana $[H]$ definida por

$$[H] = \begin{bmatrix} [A] & -[B_u][R]^{-1} [B_u]^T \\ -[Q] & -[A]^T \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Também pode ser demonstrado que há dois conjuntos de autovalores de $[H]$: um com partes reais negativas e outro com partes reais positivas. Se os autovetores correspondentes forem arranjados na forma

$$[\Phi^H] = \left[\begin{array}{c} [\Phi_{11}^H], [\Phi_{12}^H] \\ [\Phi_{21}^H], [\Phi_{22}^H] \end{array} \right], \quad (5.42)$$

de modo que $[[\Phi_{11}^H], [\Phi_{12}^H]]$ sejam os autovetores com partes reais positivas e $[[\Phi_{21}^H], [\Phi_{22}^H]]$ os autovetores com partes reais negativas, a solução da equação algébrica de Ricatti é

$$[S] = [\Phi_{22}^H][\Phi_{12}^H]^{-1}. \quad (5.43)$$

5.5.3 Consideração de forças mecânicas externas não controladas e das tensões elétricas como ação de controle

Para o caso da presença de forças mecânicas externas não controladas $\{w\}$, a equação do movimento em variáveis de estado fica reescrita como

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[F] \end{bmatrix} \{u\} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[F_l] \end{bmatrix} \{w\} \\ \{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_u]\{u\} + [B_l]\{w\}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde $[F_l]$ é a matriz de influência que indica a incidência das forças externas mecânicas não controladas nos graus de liberdade da estrutura.

Grande parte dos problemas práticos da engenharia envolve forças mecânicas externas que não são controladas. Para tratar do efeito dessas forças, pode-se calcular o ganho pela estratégia “disturbance rejection” (CLARK; SAUNDERS; GIBBS, 1998) fazendo

$$[B_u]\{u'\} + [B_l]\{w\} = 0 \quad (5.45)$$

e utilizar o conceito de pseudo-inversa, chegando ao resultado

$$\{u'\} = -\left[[B_u]^T [B_u] \right]^{-1} [B_u]^T [B_l] \{w\} = -[G_{dr}]\{w\}, \quad (5.46)$$

sendo $[G_{dr}]$ a matriz de ganho para anular os efeitos das forças mecânicas externas. Somando os dois efeitos (minimização da vibração da estrutura e anulação das forças mecânicas externas), tem-se a ação de controle dada por

$$\{u^*\} = \{u\} + \{u'\} = -[G]\{x\} - [G_{dr}]\{w\}. \quad (5.47)$$

Para o caso da análise numérica de uma estrutura de materiais compósitos, com tensão elétrica controlada e sendo aplicada a alguns ou todos os elementos da estrutura através de atuadores piezoelétricos, tem-se, a partir da Equação (5.8),

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[F][K_{u\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[F_p] \end{bmatrix} \{v\} \\ &+ \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[F_l] \end{bmatrix} \{w\} \\ \{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_u^*]\{v\} + [B_l]\{w\}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde $[F_p]$ é a matriz de influência, na qual são especificados os elementos piezoelétricos que recebem as tensões elétricas; e $\{v\}$ é o vetor de tensões elétricas controladas (canais independentes em Volts), aplicadas a algumas regiões contíguas ou não de elementos piezoelétricos, dado por

$$\{v\} = -[G^*]\{x\} - [G_{dr}^*]\{w\}, \quad (5.49)$$

onde $[G^*]$ é a matriz de ganho

$$[G^*] = \left[[R]^{-1} [B_u^*]^T [S^*] \right]; \quad (5.50)$$

$[S^*]$ é solução da Equação de Ricatti

$$[S^*][A] + [A]^T [S^*] - [S^*][B_u^*][R]^{-1}[B_u^*]^T [S^*] + [Q] = [0]; \quad (5.51)$$

e $[G_{dr}^*]$ é a matriz de ganho para anular os efeitos das forças mecânicas externas,

$$[G_{dr}^*] = \left[\left[[B_u^*]^T [B_u^*] \right]^{-1} [B_u^*]^T [B_l] \right]. \quad (5.52)$$

5.6 CONTROLE LQR MODAL

Para o caso do controle modal parte-se da aproximação

$$\{q\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (5.53)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\Phi] & [0] \\ [0] & [\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ \{\dot{\eta}\} \end{Bmatrix} \\ \{x\} &= [\Xi] \{x_m\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde $\{x_m\}$ é o vetor de variáveis de estado modal composto pelos vetores de variáveis modais $\{\eta\} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}^T$ e das suas derivadas $\{\dot{\eta}\} = \{\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dots, \dot{\eta}_n\}^T$. $[\Phi]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores obtidos através da solução do problema de autovalores e autovetores

$$[[K] - [M][\Phi][\Omega]][\Phi] = [0], \quad (5.55)$$

sendo $[\Omega]$ uma matriz diagonal

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \omega_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

cujas componentes $\{\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2\}$ são os quadrados dos autovalores do sistema. A matriz $[\Phi]$ é organizada na forma $[\Phi] = [\{\Phi\}_1, \{\Phi\}_2, \dots, \{\Phi\}_n]$ de modo que $\{\Phi_i\} = \{\phi_{1_i}, \phi_{2_i}, \dots, \phi_{n_i}\}^T$ é o autovetor correspondente ao autovalor ω_i^2 . Ao aplicar a transformação de variáveis (5.53) à equação do movimento, chega-se a

$$[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\Phi]\{\dot{\eta}\} + [K][\Phi]\{\eta\} = [F]\{u\}. \quad (5.57)$$

Levando em conta a propriedade de ortogonalidade da matriz $[\Phi]$ e assumindo que haja amortecimento proporcional, pré-multiplicando a equação anterior por $[\Phi]^T$ tem-se

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T [c][\Phi]\{\dot{\eta}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{\eta\} = [\Phi]^T [F]\{u\}, \quad (5.58)$$

e então

$$[I]\{\ddot{\eta}\} + [A]\{\dot{\eta}\} + [\Omega]\{\eta\} = \left[[\Phi]^T [M][\Phi] \right]^{-1} [\Phi]^T [F]\{u\}, \quad (5.59)$$

sendo $[I]$ uma matriz identidade e $[A]$ uma matriz diagonal cujas componentes são $\{2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, 2\xi_3\omega_3, \dots, 2\xi_n\omega_n\}$,

$$[A] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & & & \\ & 2\xi_2\omega_2 & & & \\ & & 2\xi_3\omega_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

onde ξ_i é a razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibração. O sistema fica desacoplado e, desta forma, as equações no espaço de estados (5.8) e (5.9) ficam

$$\begin{aligned} \{\dot{x}_m\} &= [A_m]\{x_m\} + [B_{u_m}]\{u\} \\ \{y\} &= [C_m]\{x_m\} + [D_m]\{u\}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

onde as matrizes $[A_m]$, $[B_{u_m}]$, $[C_m]$ e $[D_m]$ assumem a forma

$$\begin{aligned} [A_m] &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Omega] & -[A] \end{bmatrix}; [B_{u_m}] = \begin{bmatrix} [0] \\ [[\Phi]^T [M][\Phi]]^{-1} [\Phi]^T [F] \end{bmatrix}; \\ [C_m] &= [-[\Omega] \quad -[A]]; [D_m] = \begin{bmatrix} [[\Phi]^T [M][\Phi]]^{-1} [\Phi]^T [F] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Para o caso de controle ótimo, define-se o funcional linear o qual se deseja minimizar para obter o controle do sistema como

$$J_m = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\{x_m\}^T [Q_m] \{x_m\} + \{u\}^T [R_m] \{u\} \right) dt; \quad (5.63)$$

comparando-o com o funcional (5.35) e levando em conta a inversa da relação (5.54), de modo que

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ \{\dot{\eta}\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\Phi]^{-1} & [0] \\ [0] & [\Phi]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} \\ \{x_m\} &= [\Xi]^{-1} \{x\}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

conclui-se que as matrizes-peso modais $[Q_m]$ e $[R_m]$ se relacionam à matrizes-peso $[Q]$ e $[R]$, respectivamente, por

$$[Q_m] = [\Phi]^T [Q] [\Phi]^{-1} \text{ e } [R_m] = [\Phi]^T [R] [\Phi]^{-1}. \quad (5.65)$$

As forças de atuação ficam definidas pela relação

$$\{u\} = -[G_m] \{x_m\} = -[G_m] \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ \{\dot{\eta}\} \end{Bmatrix}, \quad (5.66)$$

onde $[G_m]$ é a matriz de ganho no espaço modal,

$$[G_m] = [R_m]^{-1} [B_{u_m}]^T [S_m], \quad (5.67)$$

obtida resolvendo-se a Equação de Ricatti com as matrizes no espaço modal $[A_m]$ e $[B_{u_m}]$ dadas anteriormente:

$$[S_m][A_m] + [A_m]^T [S_m] - [S_m][B_{u_m}][R_m]^{-1}[B_{u_m}]^T [S_m] + [Q_m] = [0]. \quad (5.68)$$

Quando se leva em consideração a presença das forças mecânicas externas não controladas $\{w\}$, a equação do movimento em variáveis de estado modais fica

$$\begin{aligned} \{\dot{x}_m\} &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Omega] & -[A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ \{\dot{\eta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [[\Phi]^T [M] [\Phi]]^{-1} [\Phi]^T [F] \end{bmatrix} \{u\} \\ &+ \begin{bmatrix} [0] \\ [[\Phi]^T [M] [\Phi]]^{-1} [\Phi]^T [F_l] \end{bmatrix} \{w\} \\ \{\dot{x}_m\} &= [A_m] \{x_m\} + [B_{u_m}] \{u\} + [B_{l_m}] \{w\}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

devido as forças de atuação ser calculadas por

$$\{u\} = -[G_m] \{x_m\} - [G_{d_{r_m}}] \{w\}, \quad (5.70)$$

onde a matriz de ganho modal referente ao método da rejeição das perturbações, $[G_{d_{r_m}}]$, é dada por

$$[G_{dr_m}] = \left[\left[[B_{u_m}]^T [B_{u_m}] \right]^{-1} [B_{u_m}]^T [B_{l_m}] \right]. \quad (5.71)$$

Para se obter as acelerações modais como saída do sistema, deve ser acrescida à Equação (5.61) a parcela referente às forças não controladas,

$$\{y\} = [C_m] \{x_m\} + [D_m] \{u\} + [E_m] \{w\}, \quad (5.72)$$

sendo a matriz $[E_m]$ dada por

$$[E_m] = \left[\left[[\Phi]^T [M] [\Phi] \right]^{-1} [\Phi]^T [F_l] \right]. \quad (5.73)$$

Adicionalmente, ao se considerar as tensões elétricas como força de controle, a equação do movimento em variáveis de estado modais fica

$$\begin{aligned} \{\dot{x}_m\} &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\mathcal{Q}] & -[\mathcal{A}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} [0] \\ \left[[\Phi]^T [M] [\Phi] \right]^{-1} [\Phi]^T [F] [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [F_p] \end{bmatrix} \{v\} \\ &+ \begin{bmatrix} [0] \\ \left[[\Phi]^T [M] [\Phi] \right]^{-1} [\Phi]^T [F_l] \end{bmatrix} \{w\} \\ \{\dot{x}_m\} &= [A_m] \{x\} + [B_{u_m}^*] \{v\} + [B_{l_m}] \{w\}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

com a ação de controle dada indiretamente pela transformação das forças de controle $\{u\}$ em tensões elétricas $\{v\}$ aplicadas

$$\{v\} = -[G_m^*] \{x_m\} - [G_{dr_m}^*] \{w\}, \quad (5.75)$$

a partir das matrizes de ganho calculadas por

$$[G_m^*] = \left[[R]^{-1} [B_{u_m}^*]^T [S_m^*] \right] \text{ e } [G_{dr_m}^*] = \left[\left[[B_{u_m}^*]^T [B_{u_m}^*] \right]^{-1} [B_{u_m}^*]^T [B_{l_m}] \right], \quad (5.76)$$

sendo $[S_m^*]$ a solução da Equação de Ricatti

$$\begin{bmatrix} S_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_m^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{u_m}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{u_m}^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_m^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Assumindo que no sistema a ser controlado haja modos predominantes ou mais importantes, situação comum em diversos problemas práticos da Engenharia, a solução poderá ser truncada utilizando apenas estes modos principais, bastando tomar apenas as primeiras colunas de $\begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}$ correspondentes a estes modos. Gera-se assim uma aproximação com uma matriz não mais quadrada, $\begin{bmatrix} \hat{\Phi} \end{bmatrix}$, de modo que

$$\{q_i\} = \sum_{j=1}^{nmode} \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{ij} \end{bmatrix} \{\eta_j\} \text{ ou } \{\hat{q}\} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi} \end{bmatrix} \{\hat{\eta}\}, \quad (5.78)$$

onde $nmode$ é o número de modos retidos. Novamente, assumindo controle *full state feedback* as matrizes $\begin{bmatrix} \hat{C}_m \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \hat{D}_m \end{bmatrix}$ ficam definidas da mesma forma que $\begin{bmatrix} C_m \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} D_m \end{bmatrix}$, sendo as dimensões das matrizes $\begin{bmatrix} \hat{A}_m \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \hat{B}_m \end{bmatrix}$ reduzidas na proporção da quantidade de modos considerados.

6 ALGORITMOS GENÉTICOS

Algoritmos genéticos são algoritmos de busca baseados nos princípios da genética populacional, onde sistemas de indivíduos interagindo com um ambiente evoluem através de reprodução, seleção e mutação. Conceitos da mecânica da seleção natural, tais como a sobrevivência do mais apto, tiveram importante papel no desenvolvimento destes algoritmos. Historicamente, foram desenvolvidos por John Holland e equipe na Universidade de Michigan (1975) e posteriormente popularizados por David Goldberg da mesma Universidade (GOLDBERG, 1989; HOLLAND, 1975).

Os algoritmos genéticos podem também ser entendidos como técnicas de otimização de problemas e diferenciam-se de outros métodos de otimização porque trabalham com um conjunto de parâmetros codificados e não diretamente com estes parâmetros; fazem uma busca sobre um conjunto de indivíduos numa população e não sobre simples indivíduos; usam uma função objetivo a ser maximizada ou minimizada, e não gradientes como outros métodos, como fonte de informação para procura; e usam regras de transição que são probabilísticas e não determinísticas.

6.1 FUNDAMENTAÇÃO E TERMINOLOGIA BIOLÓGICA

Um dos principais conceitos biológicos aplicado aos algoritmos genéticos é o da hereditariedade, pelo qual as características de adaptação ao meio são passadas de pais para filhos.

Jean Baptiste Lamarck (1844) acreditava que as características de adaptação de um indivíduo eram adquiridas durante a sua vida e depois passadas aos seus filhos. Charles Darwin, com a publicação do tratado “A Origem das Espécies” (1858), acreditava que a evolução de determinada população ocorre devido à seleção natural, a qual escolhe indivíduos melhores adaptados ao ambiente. A diversidade de indivíduos provém do fato de haver mutações e recombinações. Gregor Mendel (1866) acredita que cada característica de um indivíduo é condicionada por dois fatores que se separam na reprodução, passando-se apenas um fator por gameta para os filhos. Weismann, em 1893, constatou que organismos superiores possuem dois tipos de células: as

germinativas e as somáticas. Não é possível que informações adquiridas pelas células somáticas sejam passadas aos descendentes através das células germinativas. As informações podem ser passadas através dos materiais genéticos contidos nos DNAs na reprodução, os quais transcrevem informações aos RNAs para a produção de proteínas para funcionamento das células; jamais um RNA irá transcrever uma informação para o DNA.

Os cromossomos são estruturas nucleoprotéicas formadas por uma cadeia de DNA. Cada espécie possui um número característico de cromossomos; quando são arranjados aos pares, provenientes de cada um dos pais, os indivíduos são chamados de diploides (o ser humano possui 23 pares de cromossomos). Os cromossomos que não se apresentam desta forma são chamados de haploides.

Os genes são blocos funcionais de DNA, que são responsáveis pela codificação de uma proteína em específico (G,T,C,A). Cada gene está localizado em uma posição em particular de um cromossomo. Em organismos diploides, o correspondente par genético no mesmo *locus* recebe o nome de “alelo”. É possível pensar o gene como o definidor das características do indivíduo, por exemplo, cor dos olhos (1ª Lei de Mendel para genes recessivos e dominantes).

O genótipo caracteriza um conjunto de genes de um indivíduo. Dois organismos de uma mesma espécie podem ter o mesmo genótipo, mas não a mesma carga genética (problema dos gêmeos univitelinos e/ou atualmente dos clones); já o fenótipo é a representação final do potencial do genótipo de certo indivíduo que lhe somará um conjunto de aptidões únicas.

Nos processos de cópia do material genético dos pais para filhos há chances de haver erros de uma forma aleatória quando em um ambiente de entropia positiva (exemplos, raios solares, radicais livres etc.). Tal fenômeno é chamado mutação. Taxas de mutação ocorrem em maior frequência em indivíduos não adaptados ao ambiente e em menor frequência em indivíduos em harmonia (adaptados) com o ambiente.

Seleção é o processo pelo qual indivíduos de uma população são selecionados de acordo com seu grau de adaptação ao meio; recombinação é forma pela qual o material genético de indivíduos são misturados a fim de produzirem filhos com características mistas de ambos os pais.

6.2 TERMINOLOGIA COMPUTACIONAL

- a) cromossomo (haploide): geralmente corresponde a uma cadeia de bits que representa um candidato à solução de um problema e os alelos são iguais posições em duas cadeias de bits (se são cadeias de número binários podem assumir os valores 0 ou 1);
- b) gene: corresponde a um único bit, ou então a um pequeno bloco de bits adjacentes que codificam um elemento particular da solução candidata. Para a grande parte das aplicações empregam-se organismos haplóides com apenas um cromossomo e considera-se genes referentes a apenas 1 bit, sendo assim, o número de indivíduos candidatos possíveis a determinado problema é da ordem de 2^n sendo “ n ” o número de genes que contém um cromossomo;
- c) genótipo: equivale à solução potencial para um problema que está codificada na forma de um ou mais cromossomos;
- d) fenótipo: decodificação de um ou mais cromossomos no espaço de solução;
- e) mutação: processo, sujeito a uma probabilidade, em que ocorre modificação dos genes de um indivíduo que vai compor a próxima geração;
- f) seleção: processo de escolha dos indivíduos que servirão como pais para a próxima geração.

6.3 OPERADORES GENÉTICOS E DEMAIS COMPONENTES DE UM ALGORITMO

- a) codificação: forma de transformar a variável de interesse em códigos manipuláveis. Pode-se empregar números binários para representar níveis. Quanto mais números mais níveis podem ser definidos. Consiste na digitalização das variáveis de interesse. Os números binários são os cromossomos haploides. Como se trabalha geralmente com diversas variáveis de interesse, é comum concatenar cromossomos de cada uma das variáveis num só cromossomo;

- b) seleção: mecanismo para seleção de indivíduos (cromossomos) para reprodução de acordo com sua adaptação (valor da função objetivo). Pode-se empregar a seleção por probabilidade de sobrevivência do melhor adaptado, ou seja, quem possui maior função objetivo associada (*Roulette Wheel*);
- c) recombinação (*crossover*): método pelo qual o material genético de dois indivíduos serão misturados para originar os filhos. Pode-se empregar a recombinação de todos os indivíduos aos pares para criar os filhos por recombinação. Ela pode se dar em mais de um ponto;
- d) mutação: mecanismo pelo qual o material genético de um indivíduo sofre modificações aleatórias (mudança de códigos binários de 1 para 0 e vice-versa) com uma certa probabilidade de forma a preservar a diversidade (evitar o alcance de máximos/mínimos locais). Pode-se fazer a mutação bit a bit do cromossomo ou a mutação por inversão dos bits de todo o cromossomo;
- e) amostragem: critérios de formação de novas populações a partir dos pais e filhos sob certos critérios;
- f) função objetivo: geralmente será dada em função das variáveis de interesse ainda não codificadas de forma que cada indivíduo será composto pelas variáveis correspondentes codificadas (cromossomos) e associada a ele haverá uma função objetivo;
- g) elitismo: processo pelo qual indivíduos de maior desempenho são automaticamente selecionados. Evita-se que modificações sejam feitas neste indivíduo pelos operadores genéticos. É utilizado quando se quer que os melhores indivíduos não desapareçam da população pela manipulação dos operadores genéticos. Geralmente escolhe-se aleatoriamente um indivíduo da geração formada e troca-se pelo melhor indivíduo da geração anterior;
- h) escalonamento da função de aptidão: nas primeiras gerações haverá indivíduos com função de aptidão bem maiores que outros, de forma que sua “linhagem” dominará as futuras gerações. Nas gerações futuras haverá

pequena variabilidade em torno da aptidão média, de forma que praticamente todos terão mesma aptidão e iguais chances de gerar descendentes;

- i) critério de parada para o algoritmo: pode ser pelo tempo de execução; número de gerações; valor de aptidão mínimo e/ou médio; verificação se a diversidade atingiu valor estacionário; verificação se as últimas iterações não apresentaram melhoria nas aptidões.

6.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação segue o pseudo-código apresentado na Tabela 3. Como se trata de um problema de minimização, a função de custo foi adotada como

$$\text{função de custo} = \frac{1}{1 + J_m} \quad (6.1)$$

a partir da métrica J_m , ou seja, a partir do funcional que se deseja minimizar na análise modal, tal como definido na Equação (5.63).

Tabela 3: pseudocódigo para o algoritmo genético binário

<p>Inicialize a contagem das gerações Inicialize o tamanho da população m, probabilidade de mutação pm, probabilidade de recombinação pc, número de cromossomos individuais nc, e limites permitidos para cada cromossomo, $Pmax(nc)$ e $Pmin(nc)$ Inicialize randomicamente a primeira população Laço sobre o número de gerações Enquanto a condição de parada não for satisfeita (diversidade da população e número máximo iterações) Calcule a função de custo para cada indivíduo a partir da métrica J_m (dada pelo programa que executa o controle LQR Modal) Selecione indivíduos para reprodução baseando-se na função de custo (método da roleta) Execute a recombinação com probabilidade pc Execute mutações com probabilidade pm Execute o elitismo do indivíduo que apresenta melhor função de custo Atualize a população Escreva a última população</p>

7 APLICAÇÕES

7.1 ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR E NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PLACA LAMINADA ENGASTADA SOB CARGA DISTRIBUÍDA EM TODA A SUA SUPERFÍCIE

Seja uma placa quadrada laminada, com laminação simétrica 0/90/90/0, engastada em todas as bordas e submetida a uma carga distribuída $q = 2 \text{ psi} = 13,79 \text{ kPa}$ em toda a sua superfície, de lado $l = 12'' = 304,8 \text{ mm}$ e espessura $h = 0,096'' = 2,438 \text{ mm}$. Suas propriedades mecânicas são: módulos de elasticidade longitudinal $E_1 = 1,8282 \times 10^6 \text{ psi} = 12,61 \text{ GPa}$; $E_2 = 1,8315 \times 10^6 \text{ psi} = 12,63 \text{ GPa}$; módulos de elasticidade transversal $G_{12} = G_{23} = 3,125 \times 10^5 \text{ psi} = 2,155 \text{ GPa}$; coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,23949$.

Apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizada, em duas simulações: com 32 elementos e 25 nós, e com 200 elementos e 121 nós. Os valores encontrados da deflexão vertical w_c do nó central da placa, na análise estática linear, são mostrados na Tabela 4, juntamente com o resultado obtido por Liao e Reddy (1987), que utilizaram quatro elementos de casca de 9 nós.

Tabela 4: deflexão vertical w_c do nó central da placa quadrada laminada engastada sob carga distribuída – análise estática linear

Autor	w_c (mm)
Liao e Reddy (1987)	10,43
Presente trabalho, 32 elementos	10,37
Presente trabalho, 200 elementos	10,40

Embora se perceba na Tabela 4 boa concordância entre os resultados do presente trabalho e os resultados dos autores Liao e Reddy (1987), verifica-se que tais deflexões verticais não podem ser consideradas infinitesimais e, portanto, a placa com estas propriedades físicas, geométricas e de carregamento exigem uma análise não linear.

Para a análise estática não linear foi utilizado o Método dos Deslocamentos Generalizados (YANG; SHIEH, 1990) com incremento de carga inicial $\Delta\lambda = 0,01$, e o

comportamento da deflexão vertical do mesmo nó é mostrado na Figura 28, onde é possível fazer uma comparação com os resultados de Liao e Reddy (1987) e observar uma boa concordância. A solução dos sistemas de equações lineares foi feita com o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal (SAAD, 2003; ISOLDI, 2008).

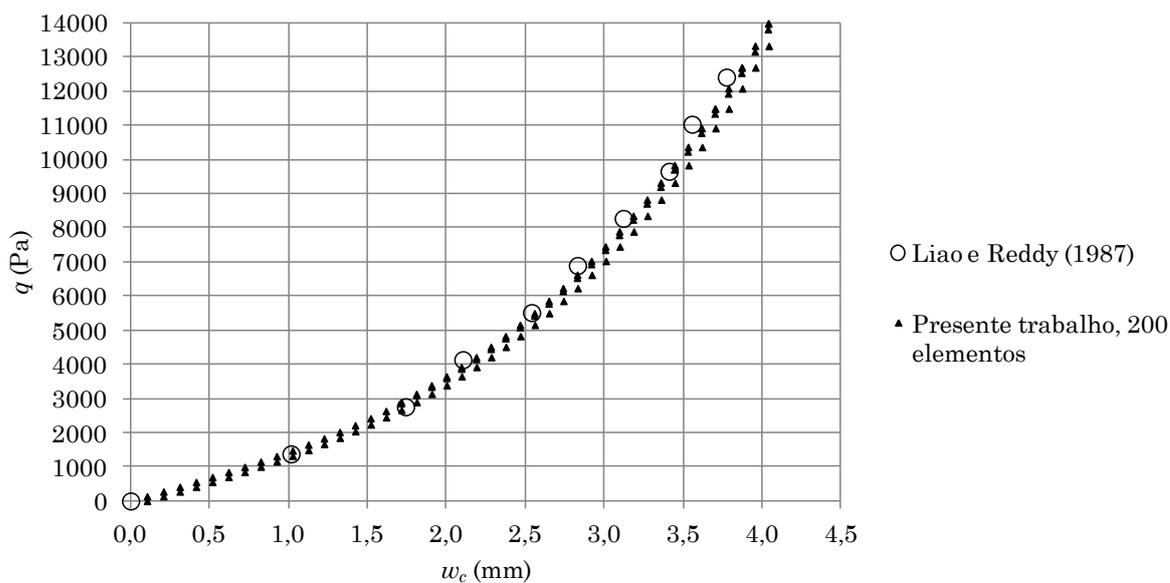


Figura 28: diagrama força distribuída $q \times$ deflexão vertical w_c do nó central da placa quadrada laminada engastada sob carga distribuída – análise estática não linear

7.2 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE CASCA CILÍNDRICA LAMINADA SOB CARGA CONCENTRADA

Seja uma casca cilíndrica laminada de raio $R=2,54$ m, comprimento $L=0,254$ m, espessura total $t=12,6$ mm e ângulo $\beta=0,2$ rad, conforme a Figura 29, sob carga concentrada aplicada no seu centro. Suas propriedades físicas são $E_1=32,99$ GPa; $E_2=11$ GPa; módulos de elasticidade transversal $G_{12}=G_{23}=6,6$ GPa; coeficiente de Poisson $\nu_{12}=0,25$. A casca foi discretizada com 128 elementos e 81 nós. Duas condições de contorno das bordas longitudinais e carregamento foram considerados: engaste com $P=88960$ N, e apoio ($u_x=u_y=w=\theta_y=\theta_z=0$) com $P=26690$ N. Também três esquemas de laminação foram empregados: (a) 0/90/0; (b) 90/0/90; (c) 45/-45. Como

incremento de carga inicial foi usado $\Delta\lambda = 0,01$. Os resultados das análises (deflexão transversal w_C do nó central da casca) são mostrados nas figuras 30, 31 e 32, podendo ser comparados com os apresentados por Yeom e Lee (1989), que usaram elementos de casca degenerados de 9 nós. Nestas figuras observa-se boa concordância entre os resultados, exceto no caso 45/-45, onde foi necessário refinar a malha, utilizando 512 elementos, para que os resultados ficassem mais condizentes.

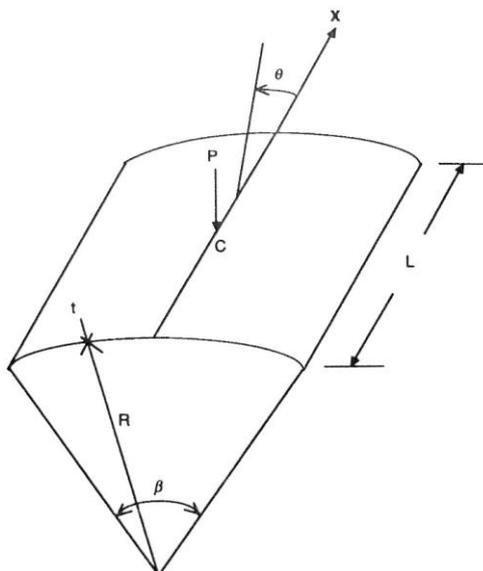


Figura 29: casca cilíndrica laminada (baseada em YEOM; LEE, 2008)

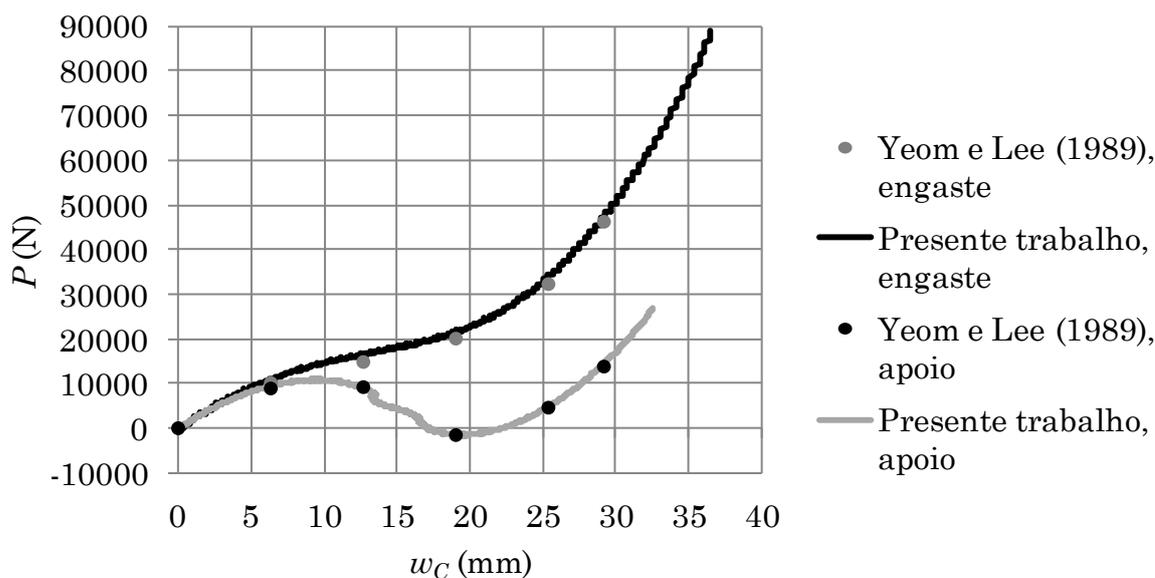


Figura 30: diagrama força concentrada $P \times$ deflexão vertical w_C do nó central da casca cilíndrica laminada (0/90/0) sob carga concentrada – análise não linear geométrica

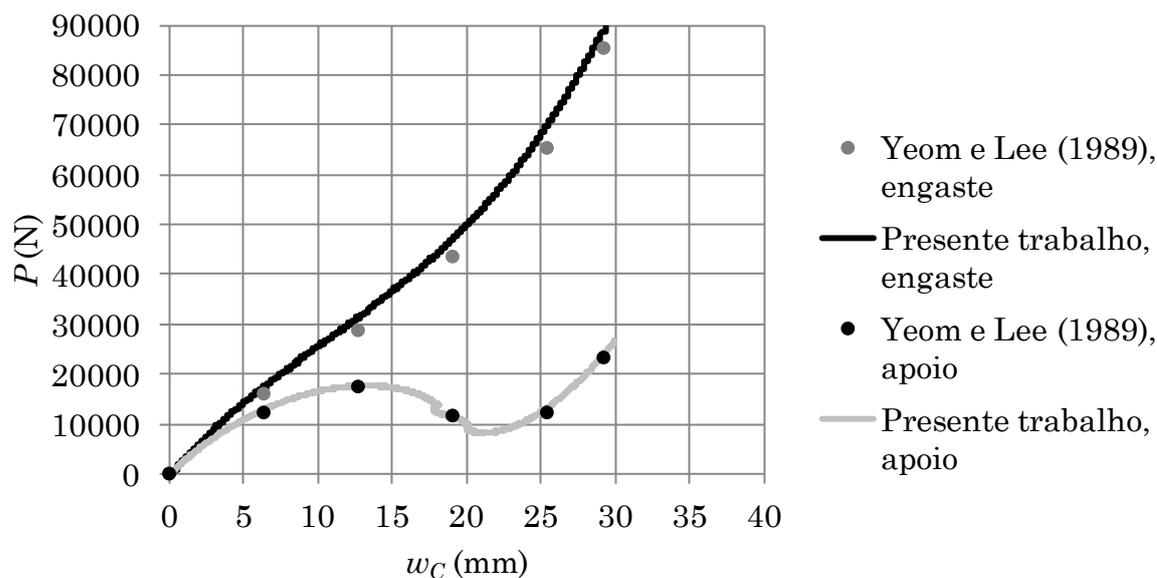


Figura 31: diagrama força concentrada $P \times$ deflexão vertical w_C do nó central da casca cilíndrica laminada (90/0/90) sob carga concentrada – análise não linear geométrica

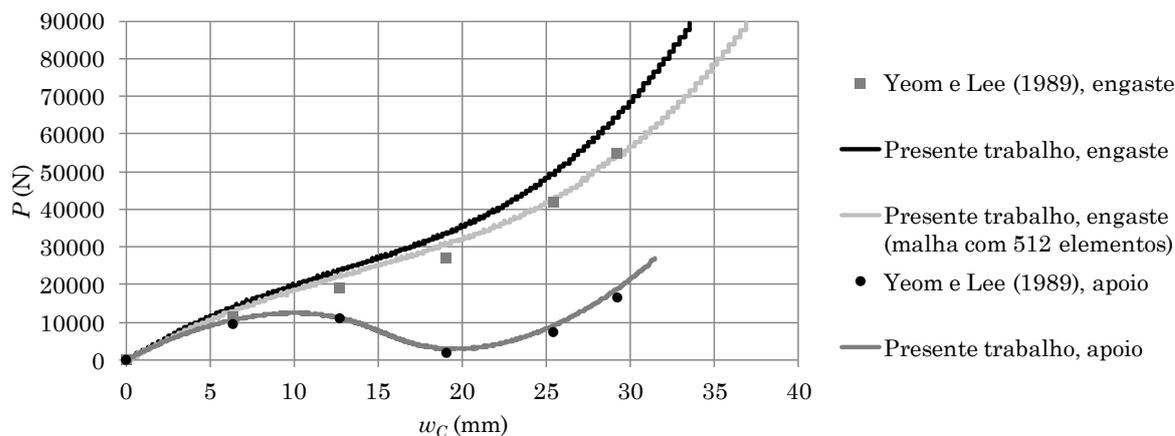


Figura 32: diagrama força concentrada $P \times$ deflexão vertical w_C do nó central da casca cilíndrica laminada (45/-45) sob carga concentrada – análise não linear geométrica

7.3 ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE PLACA LAMINADA SOB CARGA DISTRIBUÍDA EM TODA A SUA SUPERFÍCIE

Seja uma placa quadrada laminada com duas camadas de mesma espessura $h = 6,35$ mm e esquema de laminação 45/-45, de lado $l = 2,438$ m, e sob carga distribuída sobre toda a sua superfície $q = 490,5$ Pa, atuando durante todo o tempo da análise (função degrau). Suas propriedades são: módulos de Young $E_1 = 1724,35$ GPa; $E_2 = 68,97$ GPa; módulos de elasticidade transversal $G_{12} = G_{23} = 34,49$ GPa; coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,25$; massa específica $\rho = 2498,61$ kg/m³.

Apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura foi modelado, com 50 elementos e 36 nós; e como condições de contorno foram considerados $u_y = \theta_x = \theta_z = 0$ no lado \overline{AB} , $u_x = w = \theta_x = \theta_z = 0$ na borda \overline{BC} , $u_y = w = \theta_y = \theta_z = 0$ na borda \overline{CD} , e $u_x = \theta_y = \theta_z = 0$ no lado \overline{AD} , tal como esquematizado na Figura 33. A discretização temporal foi feita com o esquema implícito de Newmark (BATHE, 1996), com intervalo de tempo $\Delta t = 0,001$ s, e o resultado da deflexão vertical w_A do nó central (ponto A da Figura 33) é mostrado na Figura 34, podendo ser comparado com o obtido por To e Wang (1999), que usaram 32 elementos triangulares híbridos de casca laminada. Pode ser observada uma boa concordância entre os resultados do presente trabalho e aquele reportado por To e Wang (1999).

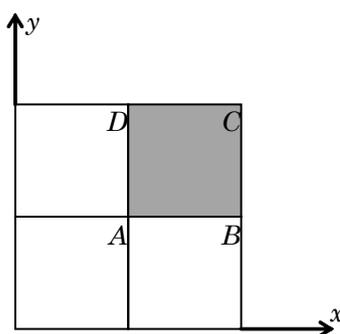


Figura 33: esquema da discretização de $\frac{1}{4}$ da placa quadrada

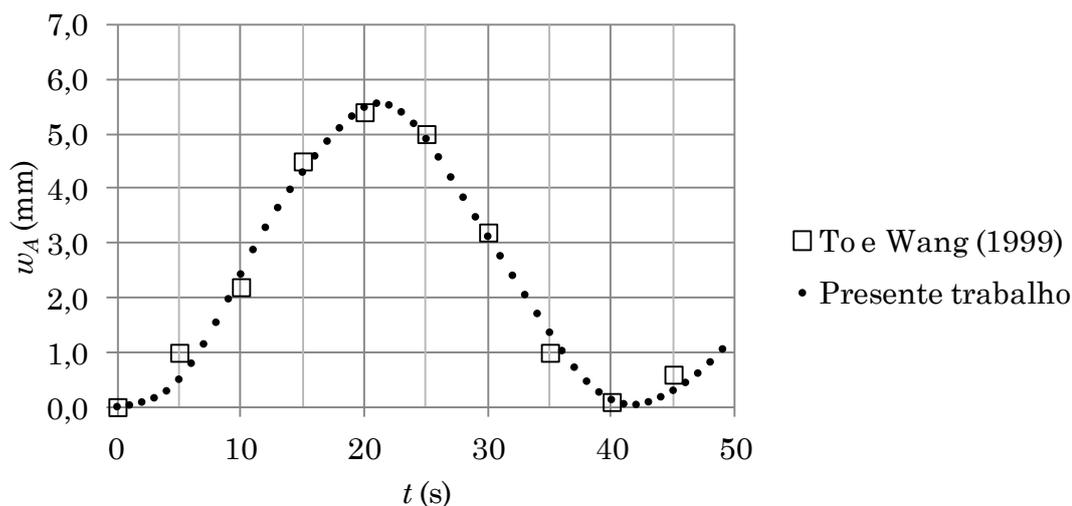


Figura 34: deflexão vertical w_A , ao longo do tempo, do nó central da placa quadrada laminada sob carga distribuída – análise dinâmica não linear

7.4 ANÁLISE ESTÁTICA ELETROMECCÂNICA DE VIGA *BIMORPH* ENGASTADA-LIVRE

Seja a viga engastada-livre composta por duas camadas idênticas de PVDF (viga *bimorph*), cada qual com comprimento $L = 10$ cm, largura $b = 5$ mm e espessura $h = 0,5$ mm, dispostas tal como ilustrado na Figura 35 (a).

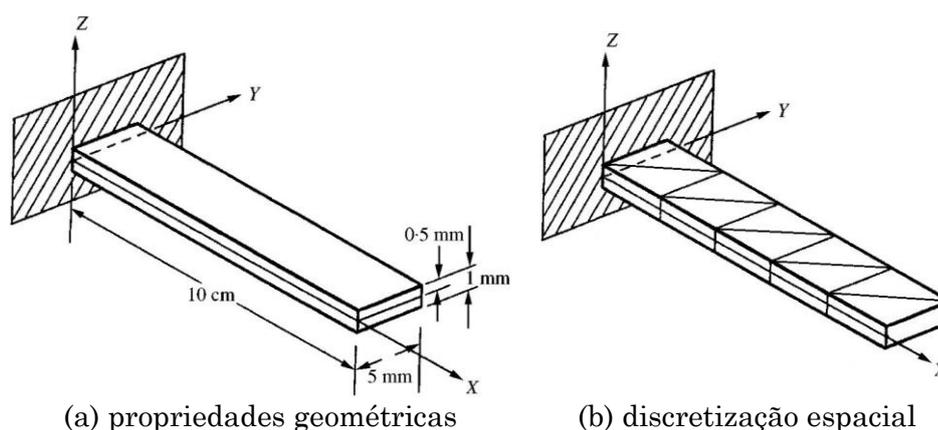


Figura 35: viga piezoelétrica de PVDF (baseada em SZE; YAO, 2000)

As suas propriedades são: módulos de elasticidade longitudinais $E_1 = E_2 = 2$ GPa; coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,29$ (implicando módulo de elasticidade transversal

$G_{12} = 0,7752$ GPa); massa específica $\rho = 1800$ kg/m³; constantes piezoelétricas $e_{31} = e_{32} = 0,046$ C/m² e $e_{36} = 0$; constante dielétrica $\xi_{33} = 106,2 \times 10^{-12}$ F/m (SZE; YAO, 2000).

A discretização da viga foi feita com 10 elementos finitos triangulares, como representado na Figura 35 (b), totalizando 12 nós. Como condições de contorno, além do engaste em uma das extremidades, forçou-se a simetria nos contornos longitudinais, definindo $\theta_x = \theta_z = 0$.

A análise estática eletromecânica, via método dos elementos finitos, foi feita a partir da Equação (4.109),

$$\left[[K_{uu}] - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] \right] \{u\} = \{R_u\} - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} \{R_\phi\}. \quad (7.1)$$

Foi aplicado como único carregamento externo uma tensão elétrica de 0,5 V em cada camada (porém com sinais contrários para gerar a flexão), obtendo-se $w = 3,138 \times 10^{-7}$ m para a deflexão vertical de cada nó da extremidade livre. Na Tabela 5 são mostrados também os resultados de outros autores: Lima Jr. (1999) analisou esta viga empregando 10 elementos de viga de Euler-Bernoulli, 10 elementos de viga de Timoshenko e 20 elementos trilineares de 8 nós; Piefort (2001) utilizou 10 elementos retangulares de casca; Sze e Yao (2000) utilizaram 10 elementos piezoelétricos de membrana com 4 nós.

Tabela 5: deflexão vertical w de um dos nós da extremidade livre da viga *bimorph* sob carregamento elétrico

Autor	w ($\times 10^{-7}$ m)
Lima Jr. (1999) (Euler-Bernoulli)	3,45
Lima Jr. (1999) (Timoshenko)	3,7
Lima Jr. (1999) (Trilinear)	3,34
Piefort (2001)	3,3
Sze e Yao (2000)	3,45
Presente trabalho	3,138

7.5 VIGA *BIMORPH* ENGASTADA-LIVRE COM CONTROLE PID

Seja a viga engastada-livre *bimorph* da seção 7.4. Atenuando sua vibração pelo controlador PID, definindo como *setpoint* a deflexão de um dos nós da sua extremidade

livre com o valor conhecido de $w = -3,138 \times 10^{-7}$ m, deseja-se verificar se a tensão elétrica fornecida é de 0,5 V. Para tal foram consideradas:

- as constantes $K_p = 10$ e $K_d = K_i = 0,1$ (arbitradas) para a Equação (5.5);
- a equação de equilíbrio dinâmico no caso linear, a partir das Equações (4.82) e (4.86), como

$$[M]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R\}, \quad (7.2)$$

com discretização temporal feita pelo esquema implícito de Newmark com intervalo de tempo $\Delta t = 0,01$ s;

- as razões de amortecimento $\zeta_1 = 1 \times 10^{-3}$ e $\zeta_2 = 2 \times 10^{-3}$ para determinar a matriz de amortecimento a partir dos autovalores da estrutura, calculados com uma biblioteca de rotinas do Fortran (dgvcsf).

A Figura 36 mostra a deflexão vertical de um dos nós da extremidade livre da viga ao longo de 3 s, verificando-se que o valor desejado (*setpoint*) é atingido, o que é confirmado na Figura 37, onde é mostrado o gráfico ao longo do tempo da diferença entre o *setpoint* e a deflexão vertical, sendo que tal diferença tende a zero. Na Figura 38 é mostrada a variação da tensão elétrica desenvolvida na viga ao longo do tempo, sendo que é alcançada a tensão esperada de 0,5 V quando ocorre a deflexão vertical definida no *setpoint*.

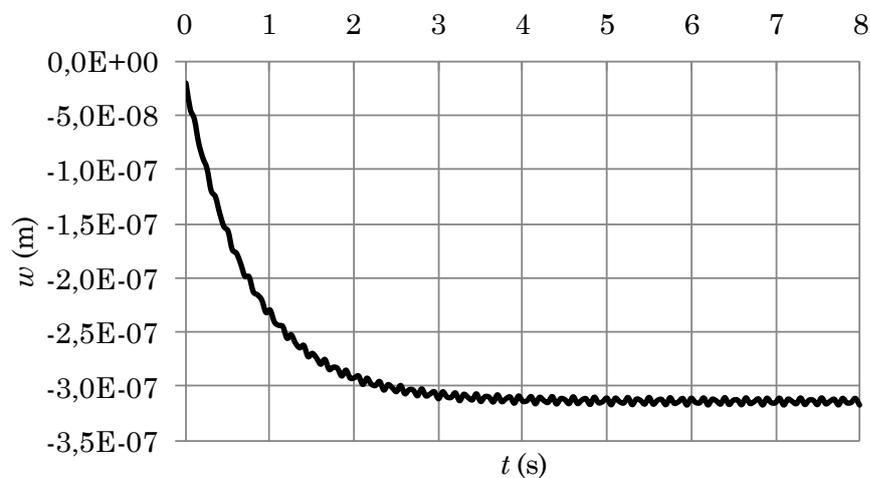


Figura 36: deflexão vertical w , ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga controlada pelo PID

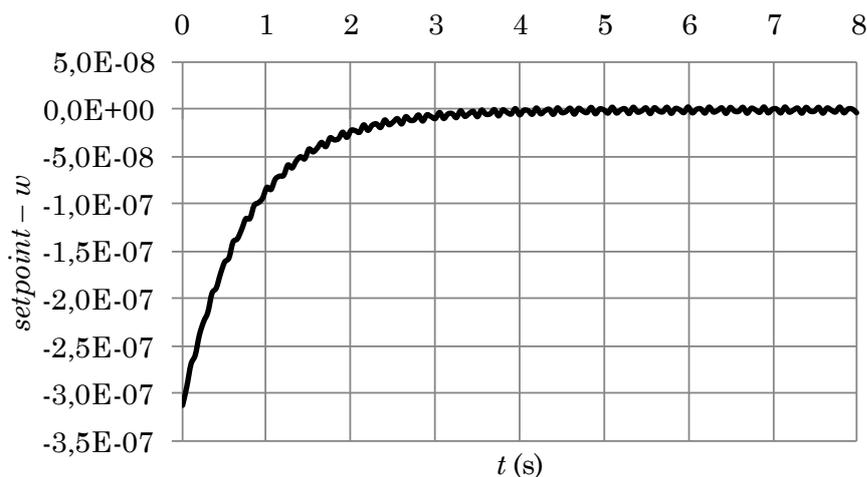


Figura 37: diferença, ao longo do tempo, entre o *setpoint* e a deflexão vertical w de um dos nós da extremidade da viga, controlada pelo PID

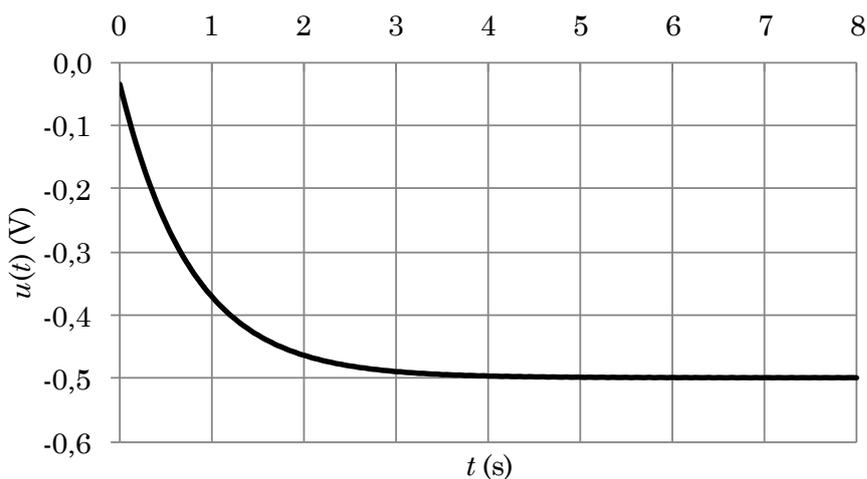


Figura 38: sinal de controle (tensão elétrica) desenvolvido ao longo do tempo na viga *bimorph*

Nas figuras 36 e 37 observam-se componentes de alta frequência não amortecidas. Presume-se que uma melhor sintonia dos parâmetros K_p , K_d e K_i possa suavizar a resposta. Tal comportamento não se faz presente no sinal de controle, dado na Figura 38, concluindo-se que o ganho derivativo deve ser baixo.

7.6 VIGA *BIMORPH* ENGASTADA-LIVRE CONTROLADA PELO LQR E PELO LQR MODAL

Seja a viga *bimorph* engastada-livre da seção 7.4. Desejando fazer o controle LQR e o controle LQR Modal considerando o efeito de forças mecânicas externas não controladas pelo método da rejeição das perturbações, foram adicionadas à viga forças concentradas transversais aplicadas em cada nó da extremidade livre, de módulo $P = 5 \times 10^{-3}$ N cada, com sentido para baixo, atuando durante todo o tempo da análise (função degrau). Também caracterizam a análise:

- a) foram utilizadas razões de amortecimento $\zeta_1 = 1 \times 10^{-3}$ e $\zeta_2 = 2 \times 10^{-3}$; intervalo de tempo $\Delta t = 0,001$ s; tempo inicial t_i e final t_f iguais a, respectivamente, 0 e 8 s;
- b) a solução da matriz de Ricatti foi obtida a partir dos autovetores complexos da matriz Hamiltoniana $[H]$ (Equação 5.42) e sua inversão (Equação 5.43), os quais foram calculados empregando bibliotecas de rotinas do Fortran (devcrg e dlincg), respectivamente;
- c) a discretização temporal foi feita pelo método da Matriz de Transição de Estado (*State Transition Matrix*) com o Retentor de Amostras de Ordem Zero (*Zero Order Hold*), descrito no Apêndice A.
- d) como ação de controle, foi considerada uma única tensão elétrica que é distribuída igualmente em toda a camada atuadora superior da viga e, com sinal trocado, em toda a camada atuadora inferior.

As seis primeiras frequências naturais de vibração da viga são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6: primeiras frequências naturais da viga *bimorph*

i	ϕ_i (rad/s)	ϕ_i (Hz)
1	112,5	17,90
2	718,0	114,3
3	2074	330,1
4	2445	389,1
5	4267	679,1
6	7516	1196

7.6.1 Controle LQR

Para o controle LQR, as matrizes $[Q]$ e $[R]$ do funcional (5.35) foram arbitradas como diagonais e preenchidas, respectivamente, com valores $xq = 1$ e xr assumindo valores 0,1, 0,01 e 0,001, objetivando estudar suas influências no desempenho do controlador projetado. Na Figura 39 é mostrado um gráfico com o resultado obtido da deflexão vertical de um dos nós da extremidade livre da viga ao longo do tempo, $w(t)$, para os diversos valores de xr ; as correspondentes ações de controle $v(t)$ são mostradas na Figura 40. Na Figura 39 ainda é sobreposto o resultado da análise dinâmica amortecida não controlada.

Observa-se na Figura 39 que, à medida que é empregado um valor menor para xr , o controle é mais rápido, porém a intensidade da ação de controle pode aumentar consideravelmente, ainda que por breve intervalo de tempo. Valores menores que 0,001 testados para xr (0,0001; 0,00001 etc.) causaram instabilidade numérica.

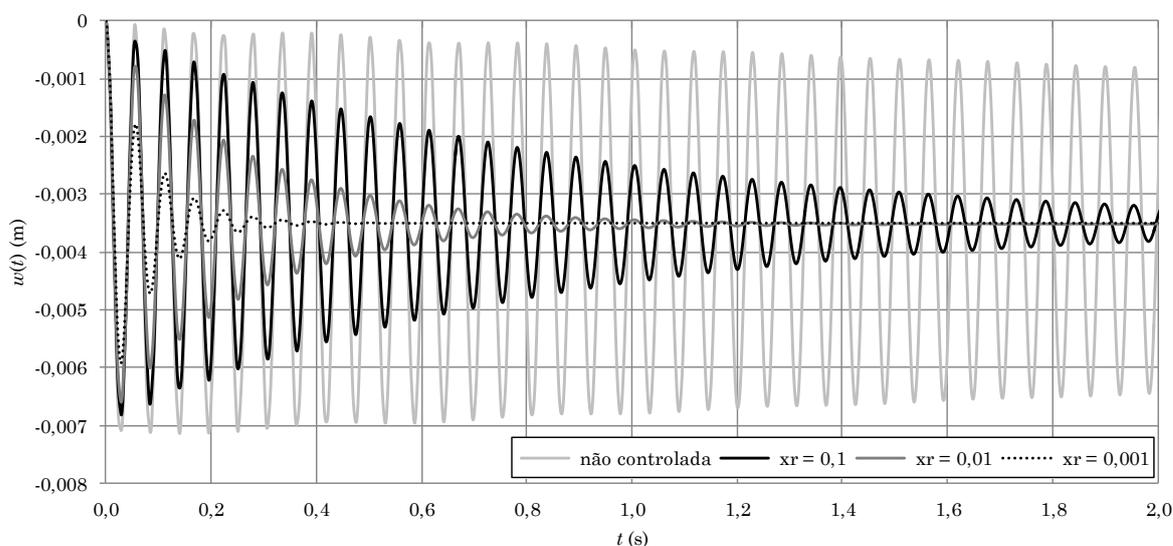


Figura 39: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga *bimorph* – comportamento não controlado e com controle LQR, com diferentes valores de xr

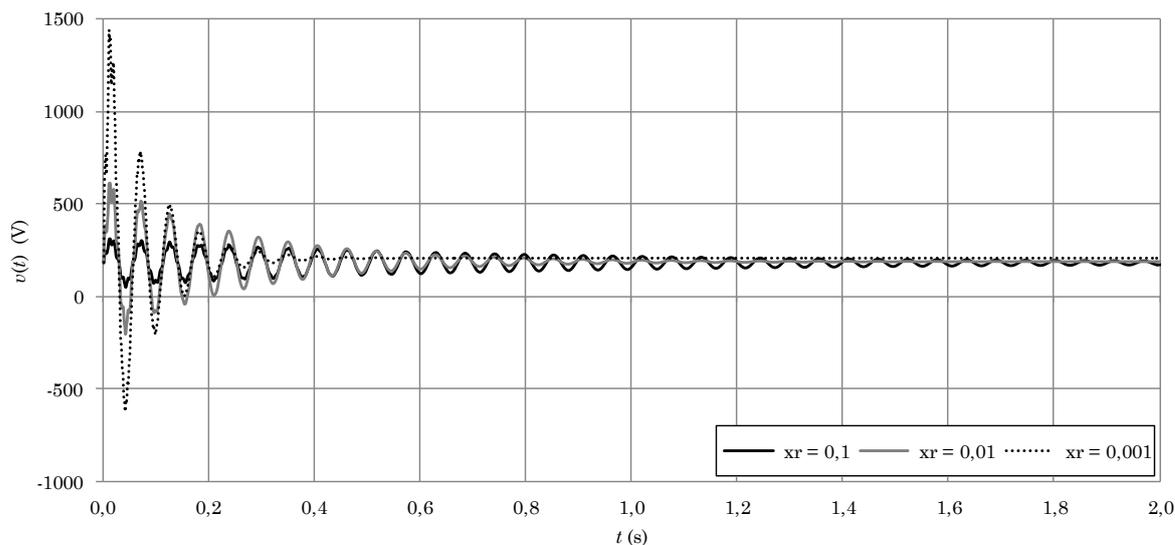


Figura 40: variação da ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da viga *bimorph* com diferentes valores de xr

Na Figura 41 é mostrada a atenuação da densidade espectral de potência (*power spectral density*, PSD) do mesmo nó e grau de liberdade (deflexão vertical de um dos nós da extremidade livre), onde é sobreposto o resultado do comportamento amortecido não controlado ao do controlado pelo LQR; na Figura 42 é mostrada a correspondente atenuação da PSD da ação de controle.

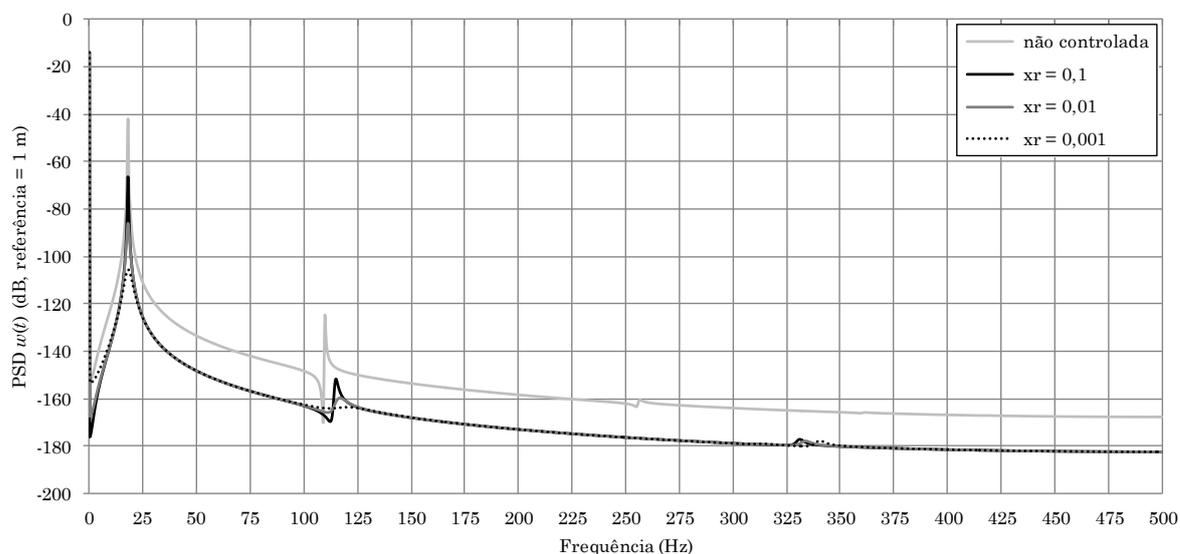


Figura 41: atenuação da PSD da deflexão $w(t)$ de um dos nós da extremidade da viga *bimorph* – não controlada e controlada pelo LQR, com diferentes valores de xr

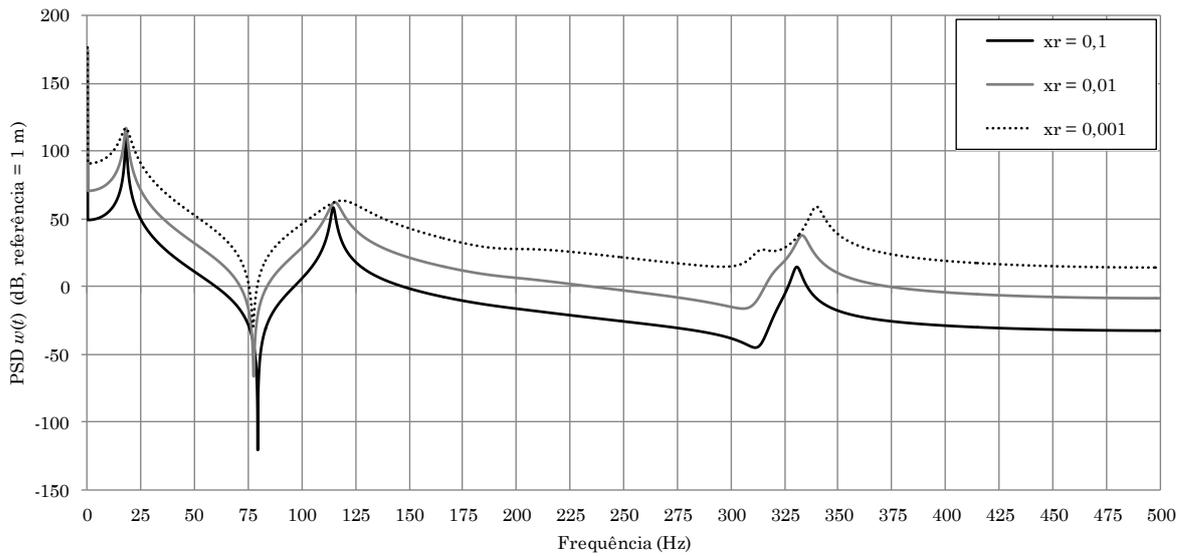


Figura 42: atenuações da PSD da ação de controle $u(t)$, no controle LQR da viga *bimorph* com diferentes valores de xr

As três primeiras frequências naturais da viga são, conforme a Tabela 6, 112,5 rad/s (17,90 Hz); 718 rad/s (114,3 Hz); e 2074 rad/s (330,1 Hz). Na Figura 41, na posição da primeira frequência natural verificam-se atenuações da PSD da deflexão, com relação ao comportamento não controlado, de aproximadamente 25 dB, 45 dB e 65 dB, em função dos valores arbitrados para xr como 0,1, 0,01 e 0,001, respectivamente.

Para melhor capacitar uma análise do desempenho do controlador, podem ser consideradas como métricas o valor quadrático médio (*root mean square* – RMS) das variáveis de estado, x_{rms}^q , e o valor RMS das ações de controle, x_{rms}^v , definidos por

$$x_{rms}^q = \sqrt{\frac{1}{npts} \sum_{i=1}^{npts} \{q(i)\} \cdot \{q(i)\}}; x_{rms}^v = \sqrt{\frac{1}{npts} \sum_{i=1}^{npts} \{v(i)\} \cdot \{v(i)\}}. \quad (7.2)$$

Nesta equação $npts$ é o número discreto de análises feitas ao longo do tempo, dado por

$$npts = \frac{t_f - t_i}{\Delta t}; \quad (7.3)$$

e $\{q(i)\}$ e $\{v(i)\}$ são, respectivamente, os vetores das variáveis de estado e das ações de controle, calculados na i -ésima análise. Adicionalmente, pode servir como métrica o próprio valor do funcional J (Equação 5.35).

Os valores encontrados de J , x_{rms}^q e x_{rms}^v são mostrados na Tabela 7, e corroboram a observação feita anteriormente: para que a atenuação da vibração aconteça de maneira mais rápida, é demandado um valor maior de tensão elétrica.

Tabela 7: métricas no controle LQR da viga *bimorph*

Valores de xq e xr	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J
1 e 0,1	0,02030	19,30	23787
1 e 0,01	0,01148	36,65	4680
1 e 0,001	0,00653	66,43	1240

7.6.2 Controle LQR Modal

Para o controle modal truncado, as matrizes-peso $[\hat{Q}_m]$ e $[\hat{R}_m]$ a serem utilizadas no funcional (5.63) foram arbitradas como diagonais e preenchidas com valores $xqm = 1$ e xrm variando com valores 0,01, 0,0001 e 0,000001. Foram controlados: o primeiro modo de vibração ($nmode = 1$); os dois primeiros modos de vibração ($nmode = 2$); e os três primeiros modos de vibração ($nmode = 3$). Como razões de amortecimento (Equação 5.60) foram consideradas $\xi_1 = \zeta_1 = 1 \times 10^{-3}$ e $\xi_2 = \zeta_3 = \zeta_2 = 2 \times 10^{-3}$. Na Figura 43 é mostrado o resultado das deflexões verticais de um dos nós da extremidade livre da viga, ao longo do tempo, para três casos de xrm e $nmode = 2$ e, adicionalmente, o comportamento não controlado amortecido; na Figura 44 estão as correspondentes variações da ação de controle $u(t)$.

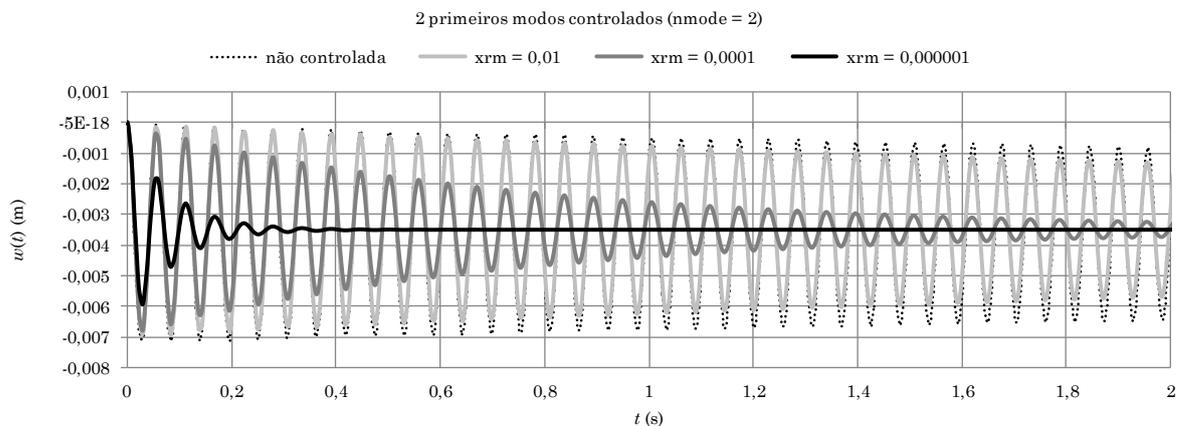


Figura 43: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga *bimorph* com os dois primeiros modos controlados pelo LQR Modal, com diferentes valores de xrm

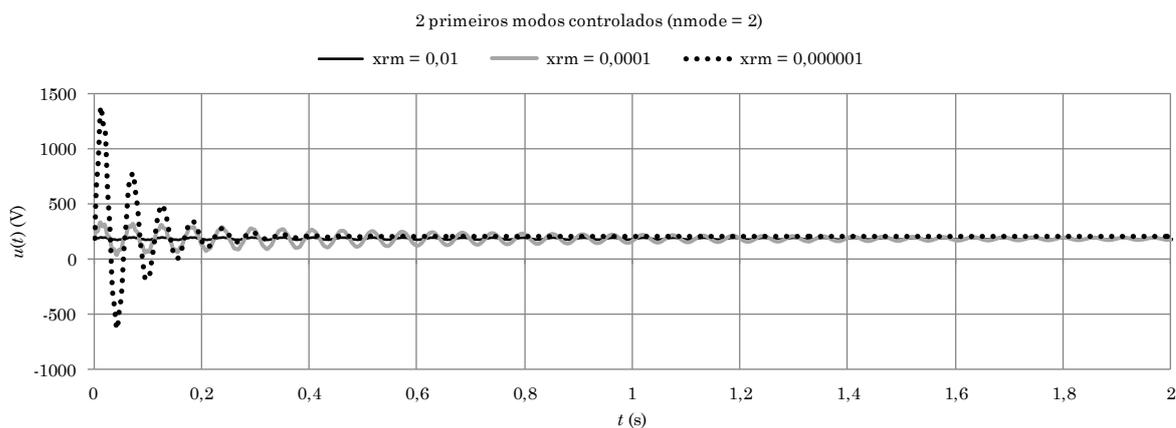


Figura 44: variação da ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR Modal dos dois primeiros modos de vibração da viga *bimorph* com diferentes valores de xrm

Nas figuras 45 e 46 são mostradas as curvas da deflexão de um dos nós da extremidade livre da viga e da correspondente ação de controle, respectivamente, sendo sobrepostos os resultados da análise com $nmode = 1$, $nmode = 2$ e $nmode = 3$, somente para o caso $xrm = 0,000001$. Na Figura 45 é sobreposto, ainda, o resultado da análise amortecida e não controlada.

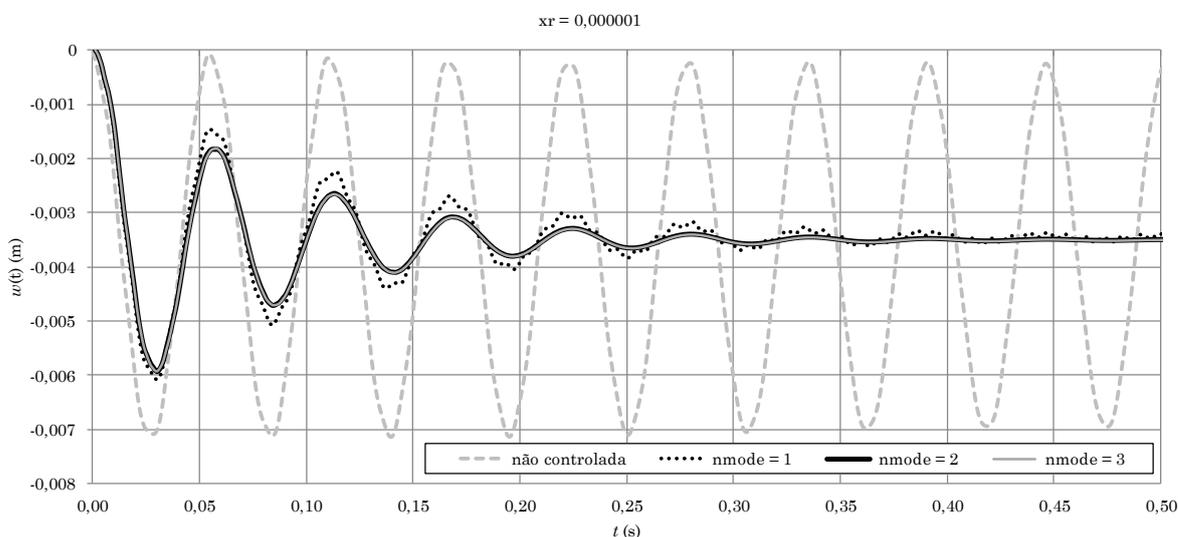


Figura 45: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga *bimorph* com os dois e com os quatro primeiros modos controlados pelo LQR Modal, com $xrm = 0,000001$

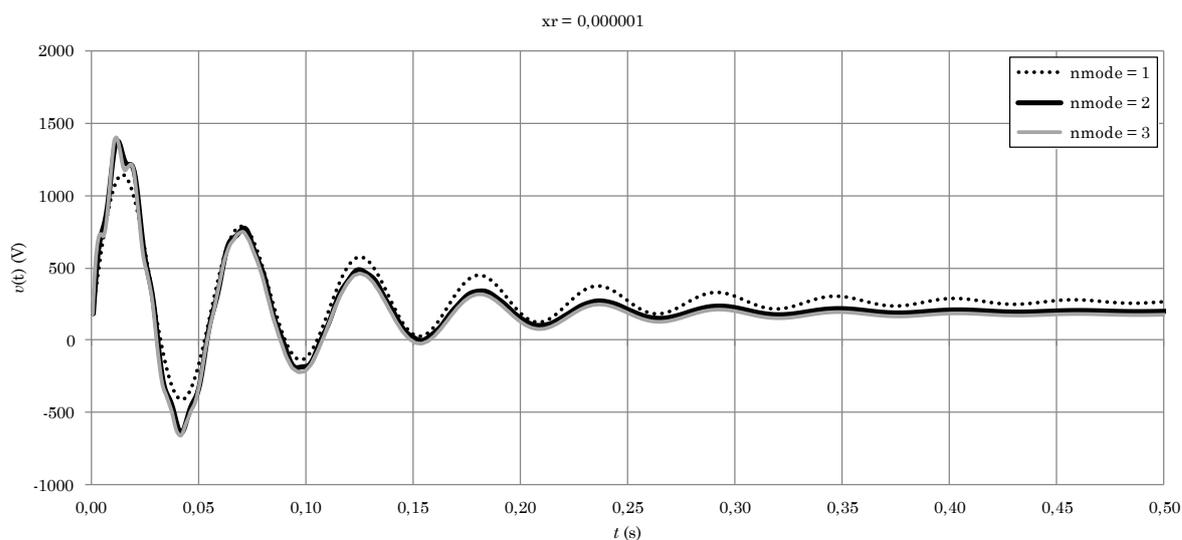


Figura 46: variação da ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR Modal da viga com $x_{rm} = 0,000001$ e diferentes valores de $nmode$

Observa-se nestes dois últimos gráficos uma proximidade entre as curvas referentes à análise com os dois e com os três primeiros modos controlados. Nesse caso o diagrama da atenuação da PSD é útil para verificar se o aumento do número de modos controlados está produzindo efetivamente melhores resultados. As figuras 47 e 48 apresentam os gráficos da atenuação da PSD da deflexão vertical de um dos nós da extremidade livre da viga e da correspondente ação de controle, respectivamente, sobrepondo-se em cada um deles os resultados da análise com os dois e com os três primeiros modos controlados, somente para o caso $x_{rm} = 0,000001$.

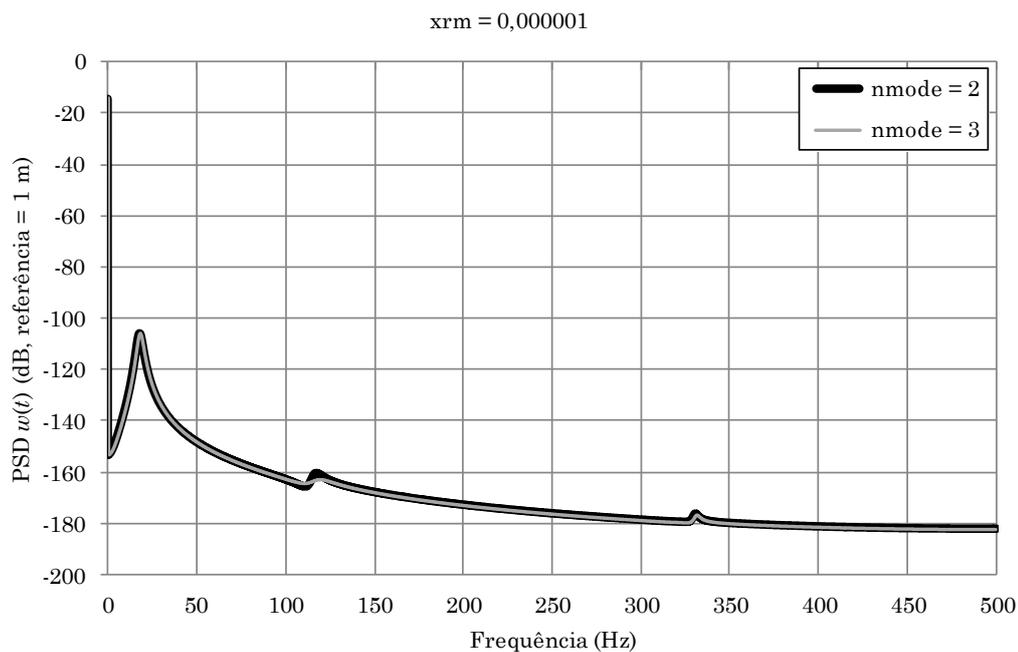


Figura 47: atenuações da PSD da deflexão vertical de um dos nós da extremidade da viga *bimorph*, controlada pelo LQR com $x_{rm} = 0,000001$

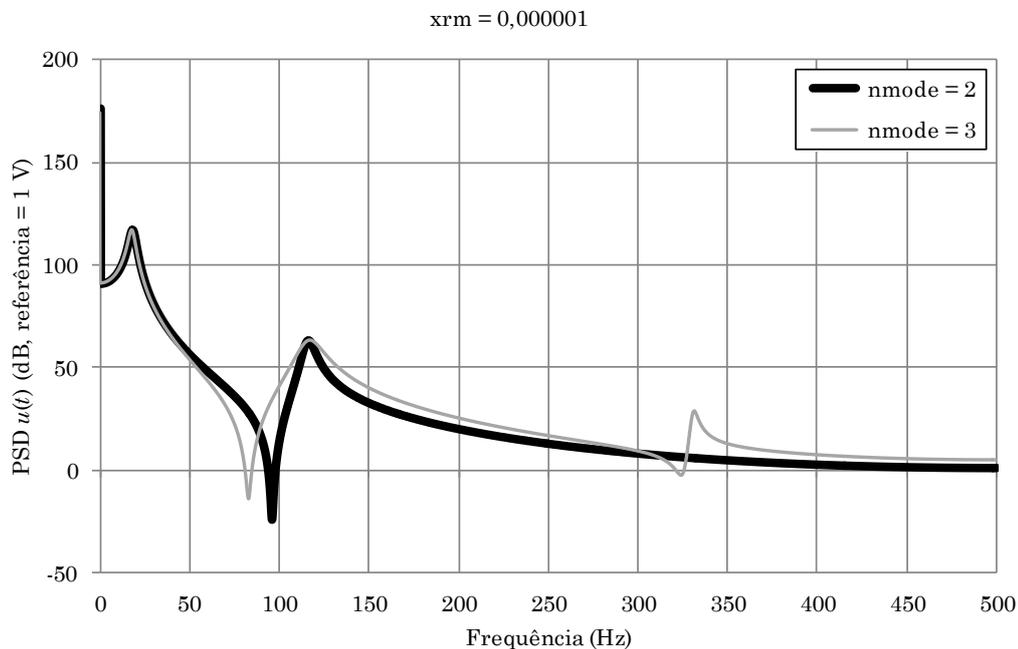


Figura 48: atenuações da PSD da ação de controle, no controle LQR da viga *bimorph* com $x_{rm} = 0,000001$

7.7 PLACA QUADRADA APOIADA, CONTROLADA PELO LQR E PELO LQR MODAL

Seja uma placa quadrada de lado 0,1 m, apoiada nas quatro bordas, constituída de quatro camadas laminares de grafite-epoxi na sequência 0/90/90/0, cada qual com espessura 1,5 mm. Dezesesseis pastilhas piezoelétricas atuadoras de espessura 0,5 mm, são distribuídas simetricamente, ocupando as mesmas posições da superfície superior e inferior da placa; como esquematizado na Figura 49 (a), as pastilhas ficam nas posições “12”; “19”; “45”; “46”; “55”; “56”; “82”; “89”. O carregamento é impulsivo, consistindo de uma carga concentrada de 10 N aplicada no nó central da placa durante os primeiros 14,04 μ s do tempo total de análise, 0,01053 s. Como intervalo de tempo foi considerado 3,51 μ s e as propriedades do compósito são $E_1 = 172,5$ GPa; $E_2 = 6,9$ GPa; $G_{12} = G_{23} = 3,45$ GPa; $\nu_{12} = 0,25$; $\rho = 1600$ kg/m³. Os elementos piezoelétricos têm propriedades $E_1 = E_2 = 63$ GPa; $G_{12} = 24,6$ GPa; $\nu_{12} = 0,28$; $\rho = 7600$ kg/m³; $e_{31} = e_{32} = 10,62$ C/m²; $\xi_{33} = 0,1555 \times 10^{-7}$ F/m.

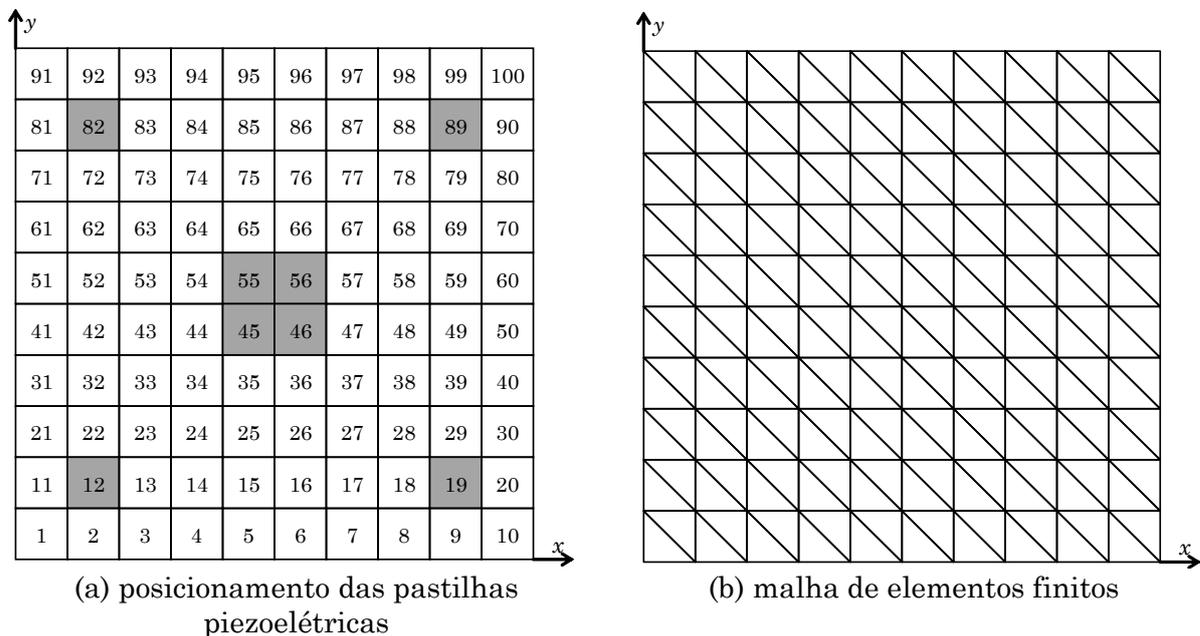


Figura 49: vista de topo da placa quadrada apoiada

A placa foi discretizada com 200 elementos e 121 nós, como representado na Figura 49 (b), totalizando 522 graus de liberdade. Roy e Chakraborty (2009a) resolveram este problema empregando cem elementos finitos de oito nós, o mesmo intervalo de tempo e um algoritmo genético para otimizar as matrizes $[Q]$ e $[R]$ no controle LQR Modal.

Naquele trabalho, oito pastilhas foram aplicadas na superfície superior como elementos sensores e oito na superfície inferior como elementos atuadores, e os autores justificam tal posicionamento como sendo “determinado baseando-se nos modos de vibração” (ROY; CHAKRABORTY, 2009a, p. 1397).

Foi necessário encontrar, por tentativas, as razões de amortecimento. Na Figura 50 é mostrado o comportamento amortecido e não controlado, ao longo do tempo, da deflexão vertical do nó central da placa, w_c , sendo superpostos os resultados de Roy e Chakraborty (2009a) e do presente trabalho com razões de amortecimento $\zeta_1 = 0,009$ e $\zeta_2 = 0,0049$.

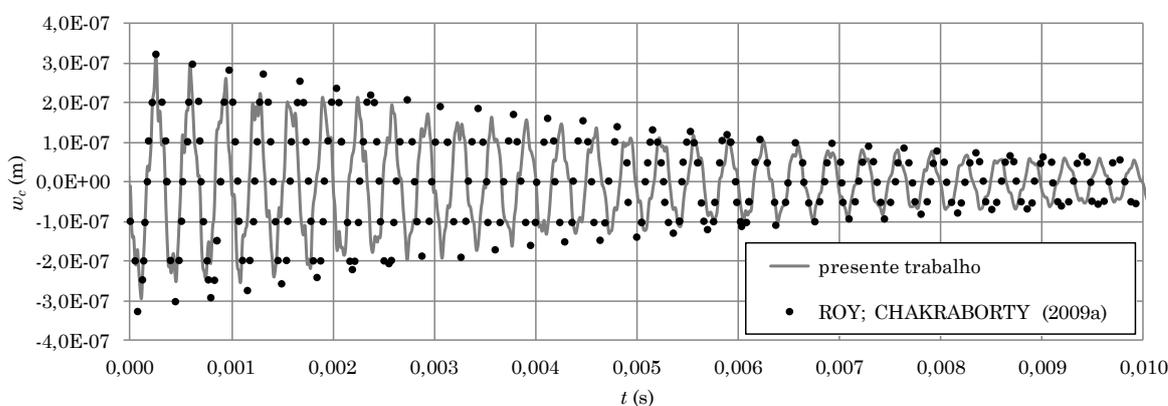


Figura 50: comportamento amortecido e não controlado, ao longo do tempo, da deflexão vertical do nó central da placa

As dez primeiras frequências naturais da placa são apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8: primeiras frequências naturais da placa apoiada

i	ϕ (rad/s)	ϕ (Hz)
1	18887	3006
2	35671	5677
3	68037	10828
4	72470	11534
5	78344	12469
6	103358	16450
7	124179	19764
8	148970	23709
9	151627	24132
10	157934	25136

7.7.1 Controle LQR

Para o controle LQR da placa, as matrizes $[Q]$ e $[R]$ do funcional (5.35) foram arbitradas como diagonais e preenchidas, respectivamente, com valores $xq = 1$ e xr assumindo valores 0,001 e também 0,0001. A Figura 51 mostra a deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR, sendo sobreposto o resultado obtido por Roy e Chakraborty (2009a) e também o comportamento não controlado e amortecido; e a Figura 52 apresenta as correspondentes ações de controle. As figuras 53 e 54 mostram as atenuações da PSD, e na Tabela 9 são apresentadas as métricas calculadas.

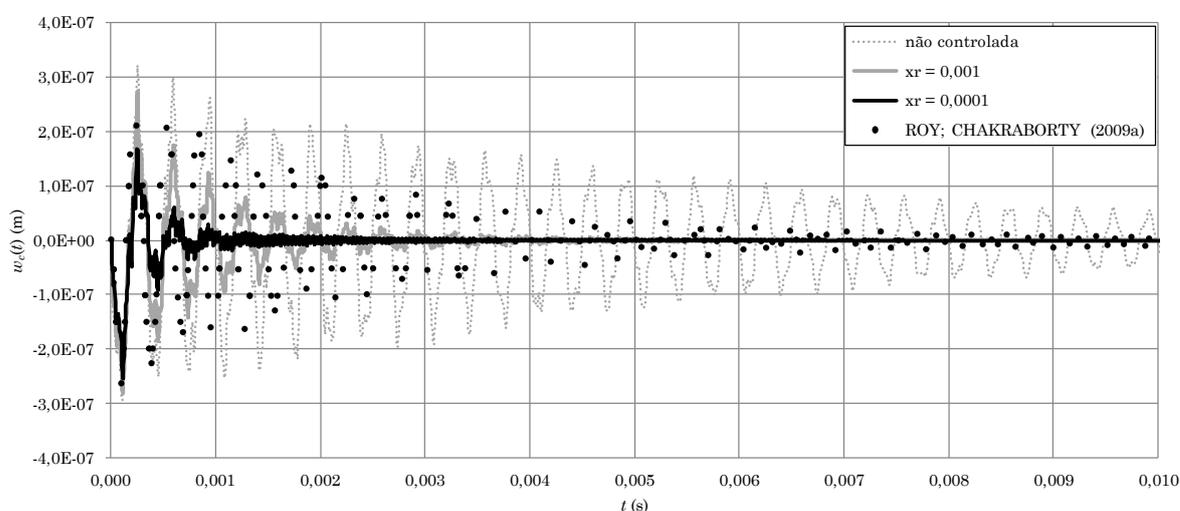


Figura 51: deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR

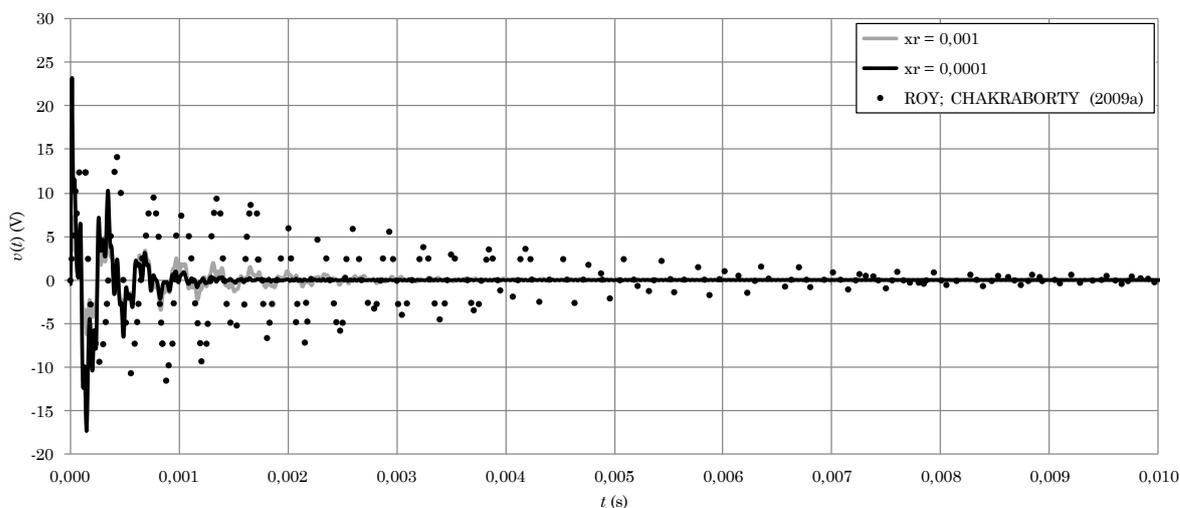


Figura 52: ações de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da placa apoiada

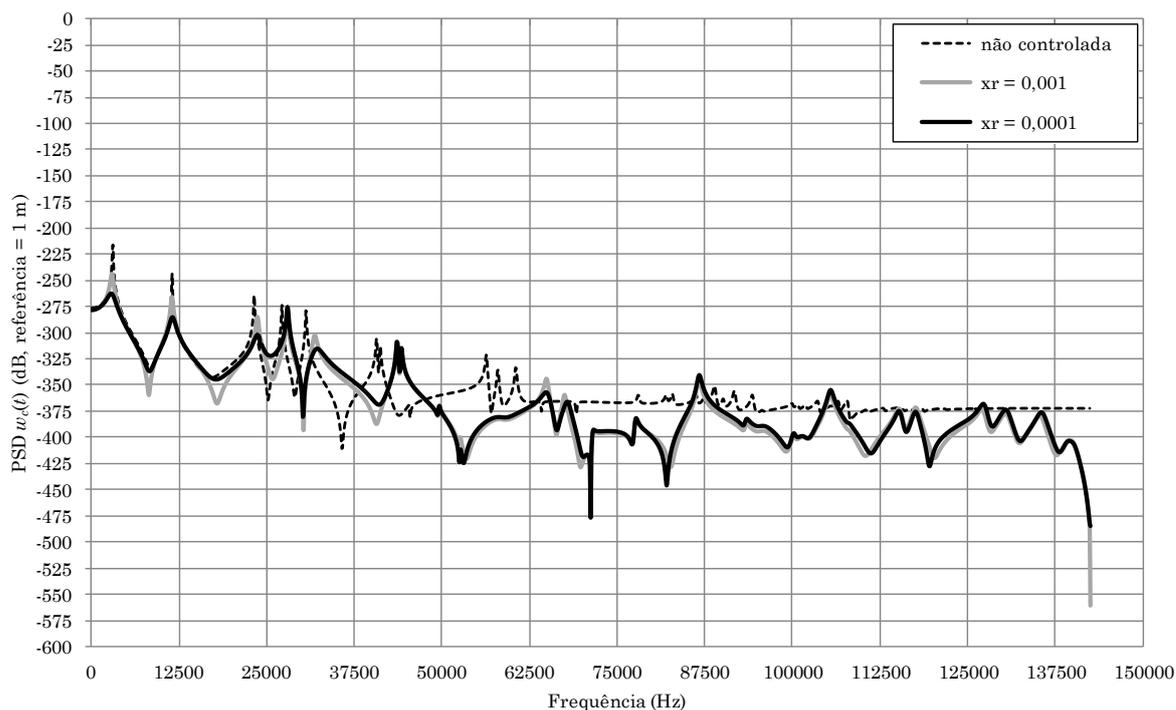


Figura 53: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da placa, controlada pelo LQR

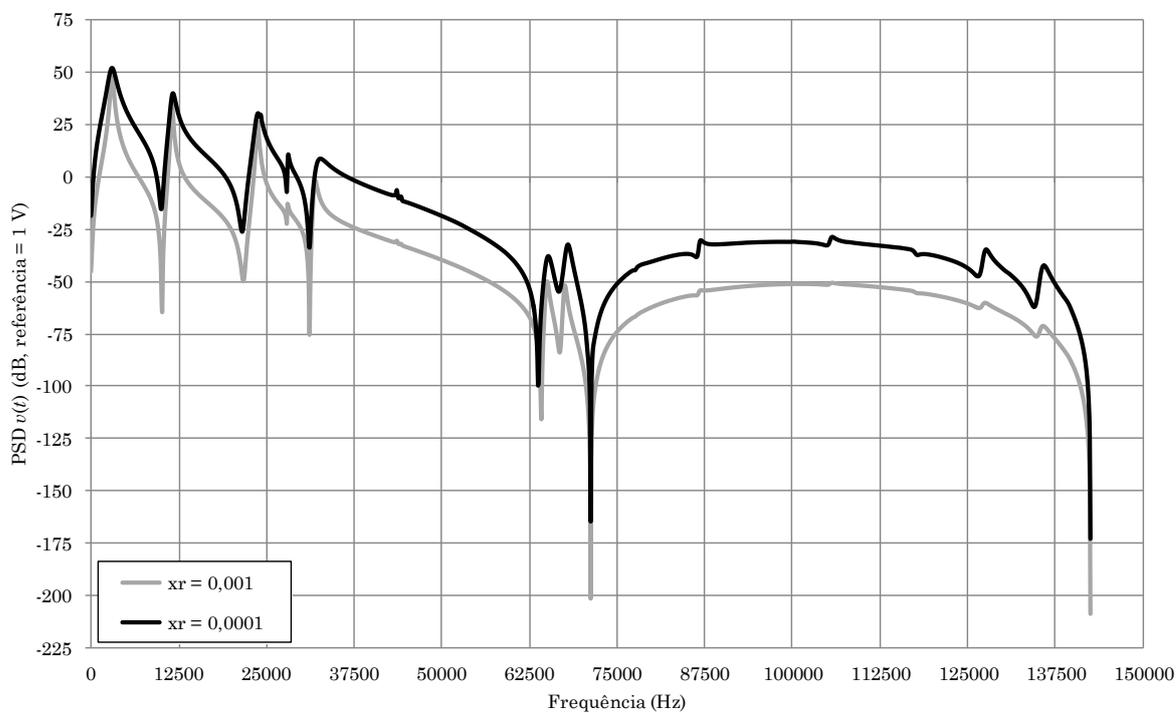


Figura 54: atenuações da PSD das ações de controle, na placa controlada pelo LQR

Tabela 9: métricas no controle LQR da placa apoiada

Valores de xq e xr	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J
1 e 0,001	$1,245 \times 10^{-5}$	0,8553	27,67
1 e 0,0001	$0,8871 \times 10^{-5}$	1,684	37,44

7.7.2 Controle LQR Modal

Para o controle modal truncado, as matrizes-peso $[\hat{Q}_m]$ e $[\hat{R}_m]$ a serem utilizadas no funcional (5.63) foram arbitradas como diagonais e preenchidas com valores $xqm = 1$, e xrm assumindo valores 0,01 e também 0,0001. Como razões de amortecimento (Equação 5.60), foram consideradas: $\xi_1 = \zeta_1 = 0,009$; $\xi_2 = \zeta_2 = 0,0049$; $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = \xi_8 = \xi_1$. Na Figura 55 é mostrada a deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, tendo sido controlados os oito primeiros modos de vibração ($nmode = 8$); na Figura 56 estão as correspondentes variações da ação de controle $u(t)$.

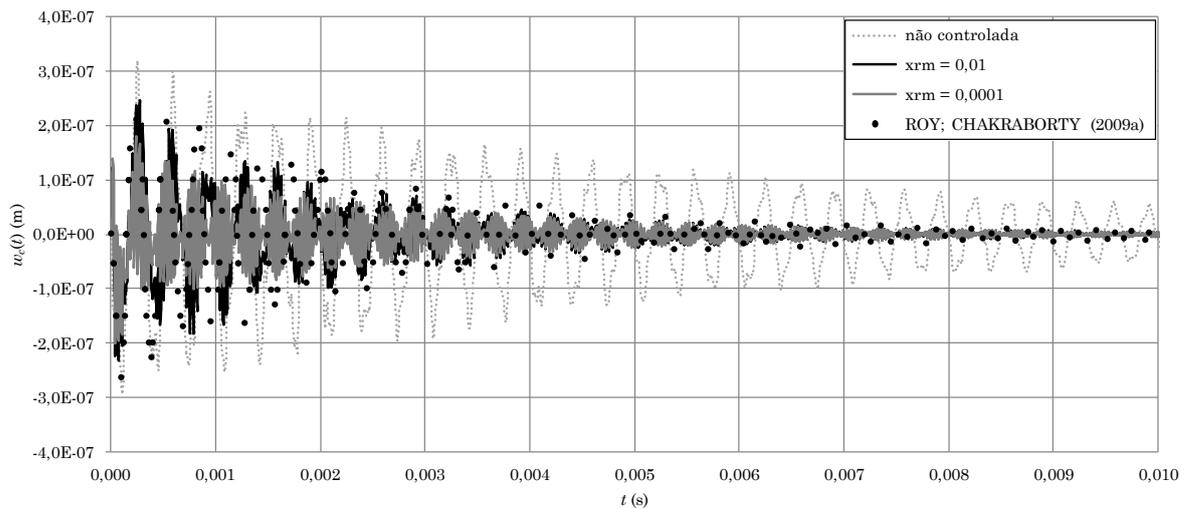


Figura 55: deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal

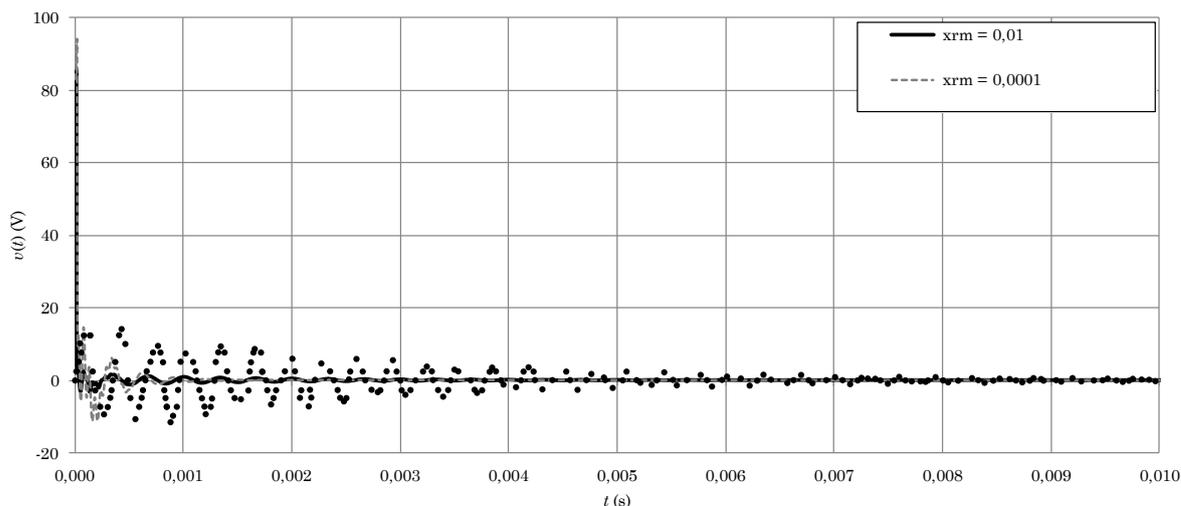


Figura 56: ações de controle, ao longo do tempo, na placa controlada pelo LQR Modal

Pode ser observado em ambas as figuras 52 e 56 que são desenvolvidas tensões elétricas significativamente maiores que as reportadas por Roy e Chakraborty (2009a), porém deve ser ressaltado que elas são função dos valores atribuídos às matrizes-peso. Para uma melhor visualização do comportamento das ações de controle, nas figuras 57 e 58 são apresentados os resultados nos intervalos $0 - 0,0001$ s e $0,0001 - 0,01$ s, respectivamente. As métricas calculadas são fornecidas na Tabela 10, e as figuras 59 e 60 apresentam, respectivamente, os gráficos da atenuação da PSD da deflexão vertical do nó central da placa e da correspondente ação de controle.

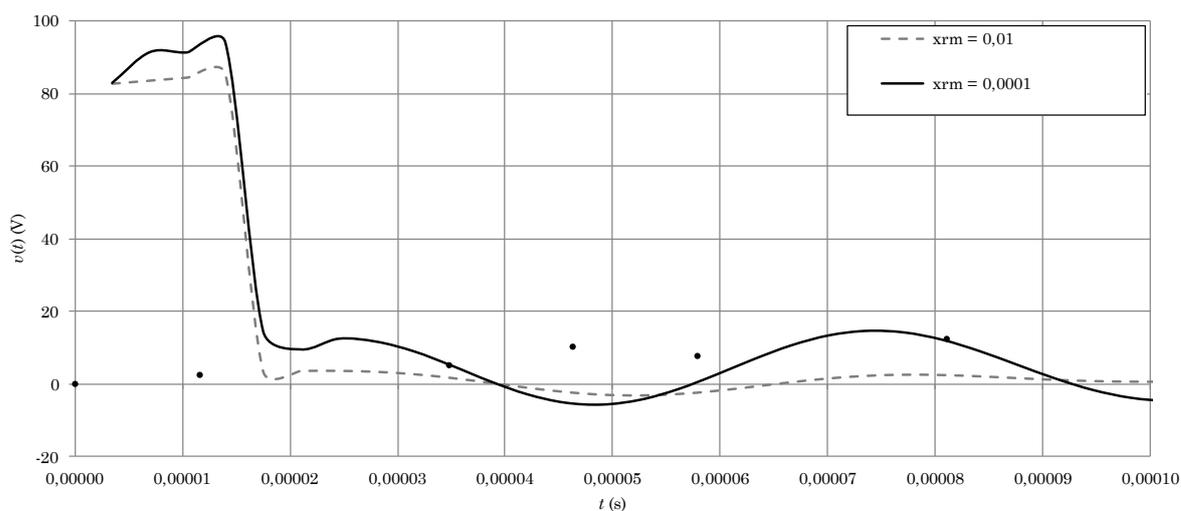


Figura 57: ações de controle, no intervalo $0 - 0,0001$ s, na placa controlada pelo LQR Modal

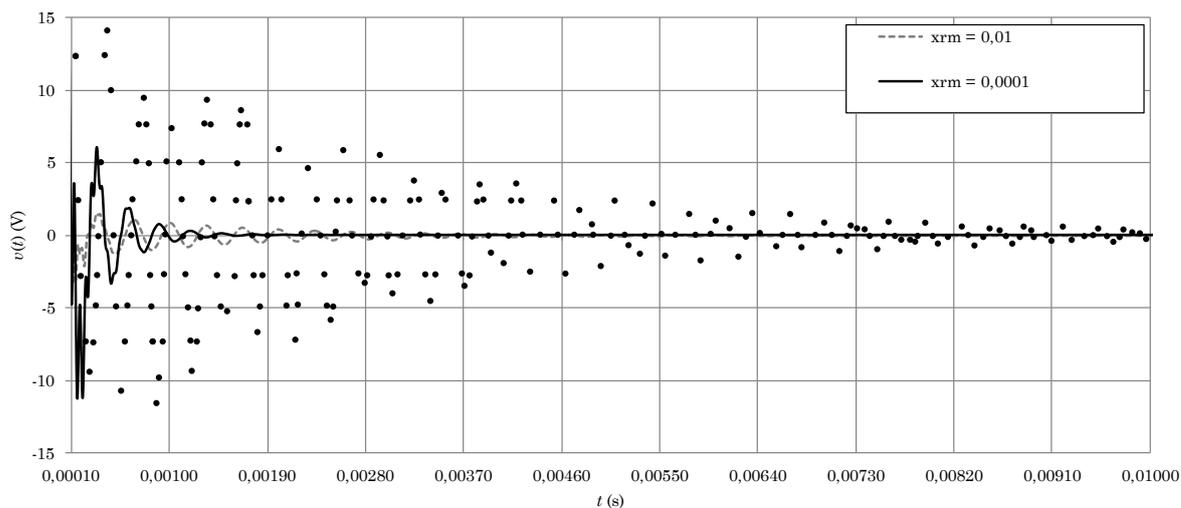


Figura 58: ações de controle, no intervalo 0,0001 s – 0,01 s, na placa controlada pelo LQR Modal

Tabela 10: métricas no controle LQR Modal da placa apoiada

Valores de x_{qm} e x_{rm}	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J_m
1 e 0,01	$3,128 \times 10^{-5}$	3,095	$5,416 \times 10^{-4}$
1 e 0,0001	$3,064 \times 10^{-5}$	3,511	$8,86 \times 10^{-5}$

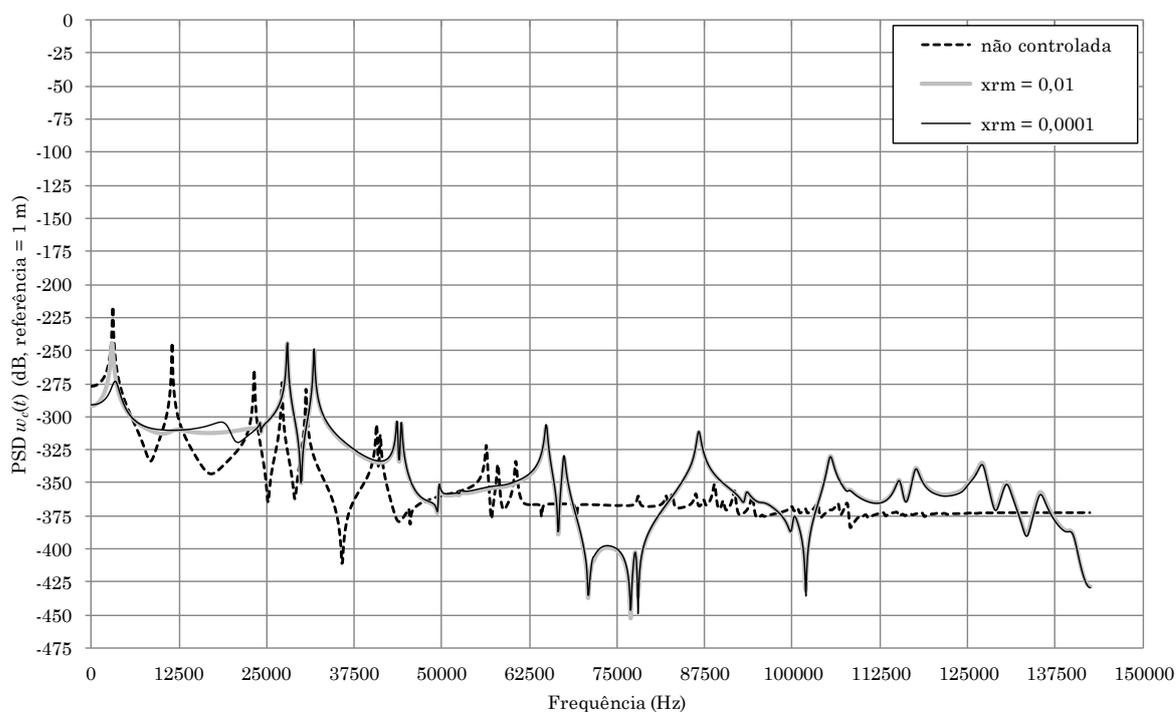


Figura 59: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da placa, controlada pelo LQR Modal

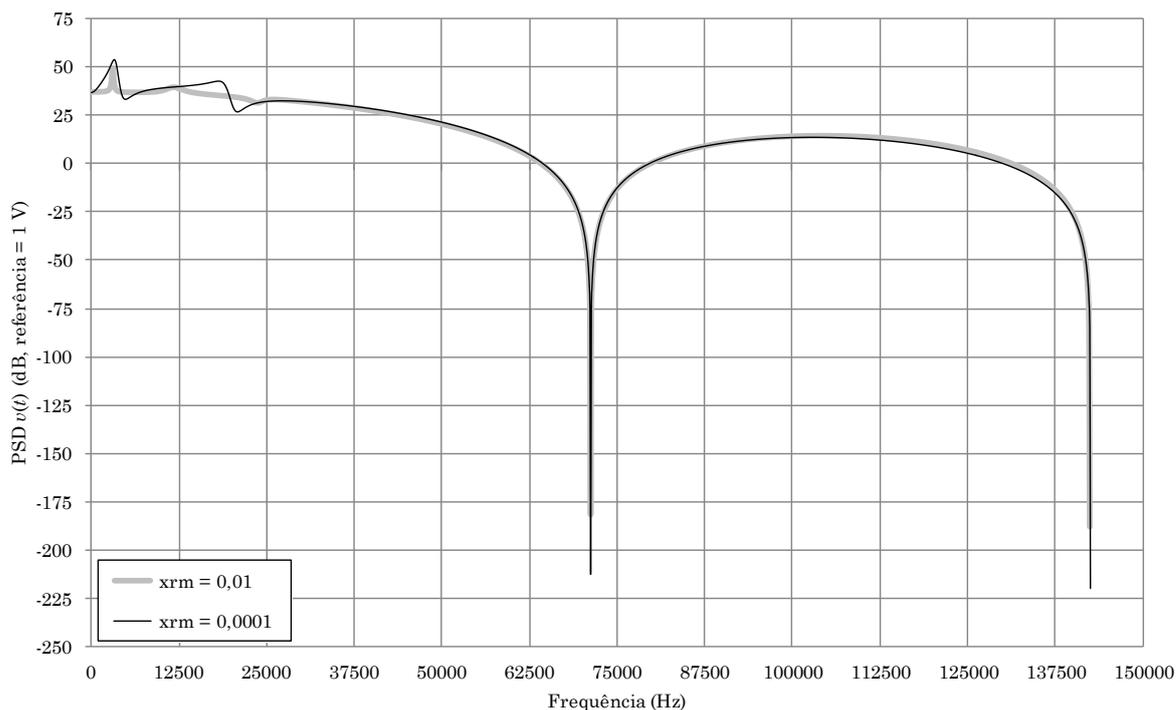


Figura 60: atenuações das ações de controle, na placa controlada pelo LQR Modal

7.8 CASCA ESFÉRICA APOIADA CONTROLADA PELO LQR E PELO LQR MODAL

Seja uma casca esférica, apoiada nas quatro bordas, de raio $R = 0,12$ m e cuja projeção no plano x - y é um quadrado de lado $a = 0,04$ m, tal como representado na Figura 61.

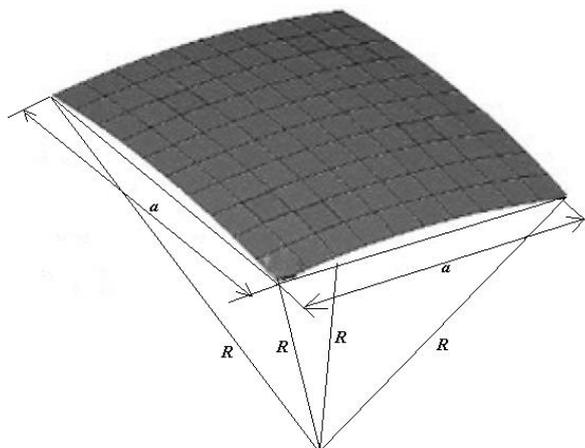


Figura 61: geometria da casca esférica

A casca é constituída de quatro camadas laminares com sequência 0/90/90/0, cada qual com espessura 0,75 mm. Dezesseis pastilhas piezoelétricas atuadoras, de espessura 0,5 mm, são distribuídas simetricamente, ocupando as mesmas posições da superfície superior e inferior da casca; tal distribuição é idêntica à da placa tratada na aplicação da Seção 7.7, Figura 49 (a). O carregamento é impulsivo, consistindo numa carga concentrada de 20 N aplicada no nó central da casca durante os primeiros 4,65751 μs do tempo total de análise, 0,0034929 s. Como intervalo de tempo foi tomado 1,1643 μs , e as propriedades do compósito são $E_1 = 172,5 \text{ GPa}$; $E_2 = 6,9 \text{ GPa}$; $G_{12} = G_{23} = 3,45 \text{ GPa}$; $\nu_{12} = 0,25$; $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$. Para os elementos piezoelétricos, $E_1 = E_2 = 63 \text{ GPa}$; $G_{12} = 24,6 \text{ GPa}$; $\nu_{12} = 0,28$; $\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$; $e_{31} = e_{32} = 10,62 \text{ C/m}^2$; $\xi_{33} = 0,1555 \times 10^{-7} \text{ F/m}$.

Tal como a placa apoiada da Seção 7.7, a casca esférica foi discretizada com 200 elementos e 121 nós, apresentando 522 graus de liberdade. Roy e Chakraborty (2009b) resolveram este problema empregando o mesmo intervalo de tempo, com elementos finitos de oito nós e um algoritmo genético para otimizar as matrizes $[Q]$ e $[R]$ no controle LQR Modal, controlando os oito primeiros modos de vibração. Na Tabela 11 são apresentadas as primeiras frequências naturais de vibração da casca.

Tabela 11: primeiras frequências naturais da casca apoiada

i	ϕ_i (rad/s)	ϕ_i (Hz)
1	92513	14724
2	124073	19747
3	215005	34219
4	237282	37765
5	246295	39199
6	323197	51438
7	389377	61971
8	459505	73132
9	481824	76685
10	482120	76732

Foi necessário encontrar, por tentativas, as razões de amortecimento da casca. Na Figura 62 é mostrado o comportamento amortecido e não controlado, ao longo do tempo, da deflexão vertical do nó central da casca, w_c , sendo sobreposto o resultado de Roy e Chakraborty (2009b) ao do presente trabalho com razões de amortecimento $\zeta_1 = 0,006$ e $\zeta_2 = 0,3$.

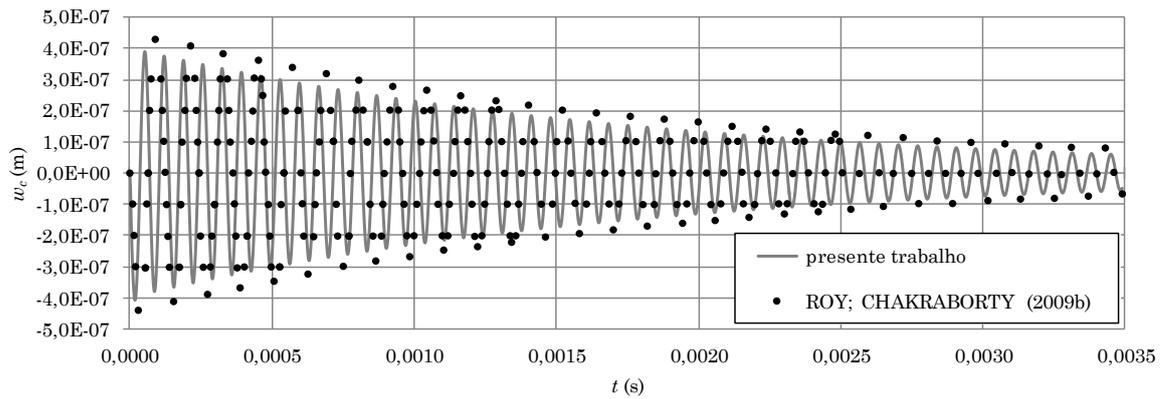


Figura 62: comportamento amortecido e não controlado, ao longo do tempo, da deflexão vertical do nó central da casca esférica

7.8.1 Controle LQR

Para o controle LQR da casca, as matrizes $[Q]$ e $[R]$ do Funcional (5.35) foram arbitradas como diagonais e preenchidas, respectivamente, com valores $xq = 100$ e xr assumindo valores 1 e também 0,1. A Figura 63 mostra a deflexão vertical do nó central da casca, ao longo do tempo, controlada pelo LQR, sendo sobrepostos ainda os resultados de Roy e Chakraborty (2009b) e o comportamento amortecido e não controlado; e a Figura 64 apresenta as correspondentes ações de controle. As figuras 65 e 66 apresentam os gráficos da atenuação da PSD da deflexão vertical do nó central da casca e da correspondente ação de controle, respectivamente; e na Tabela 12 são apresentadas as métricas calculadas.

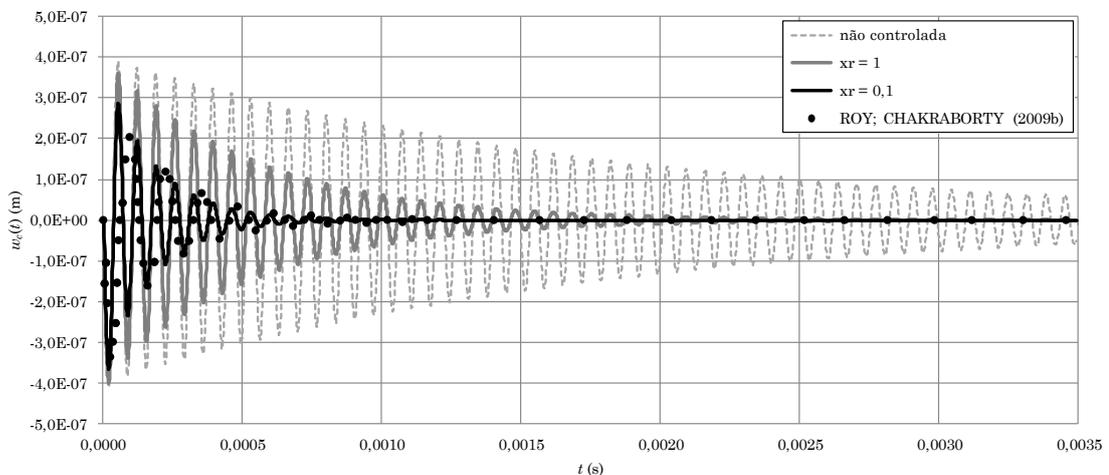


Figura 63: deflexão vertical do nó central da casca esférica, ao longo do tempo, controlada pelo LQR

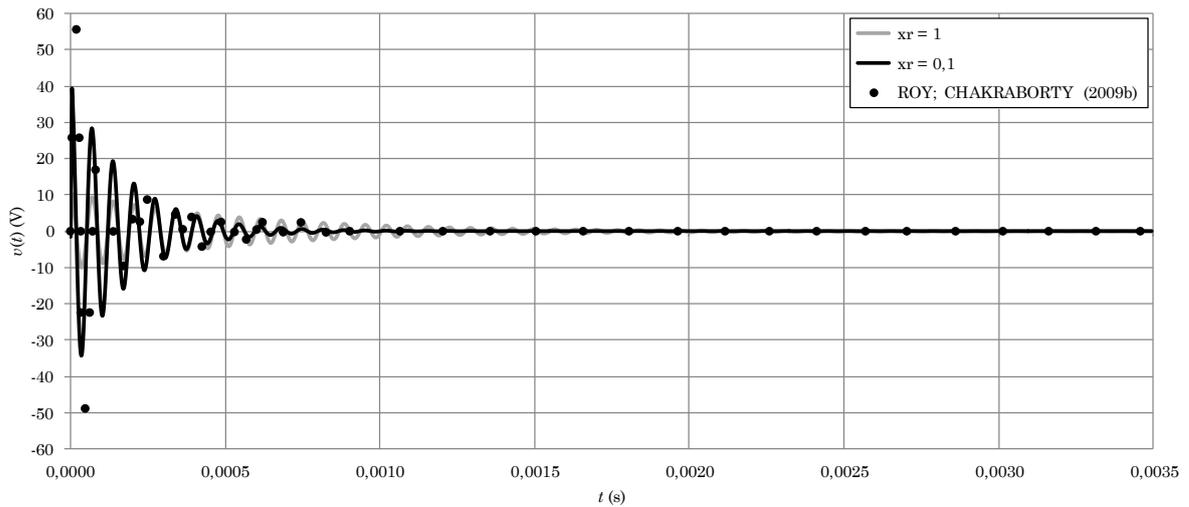


Figura 64: ações de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da casca esférica

Tabela 12: métricas no controle LQR da casca esférica apoiada

Valores de xq e xr	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J
100 e 1	$4,867 \times 10^{-5}$	2,070	2147
100 e 0,1	$2,837 \times 10^{-5}$	4,617	567,8

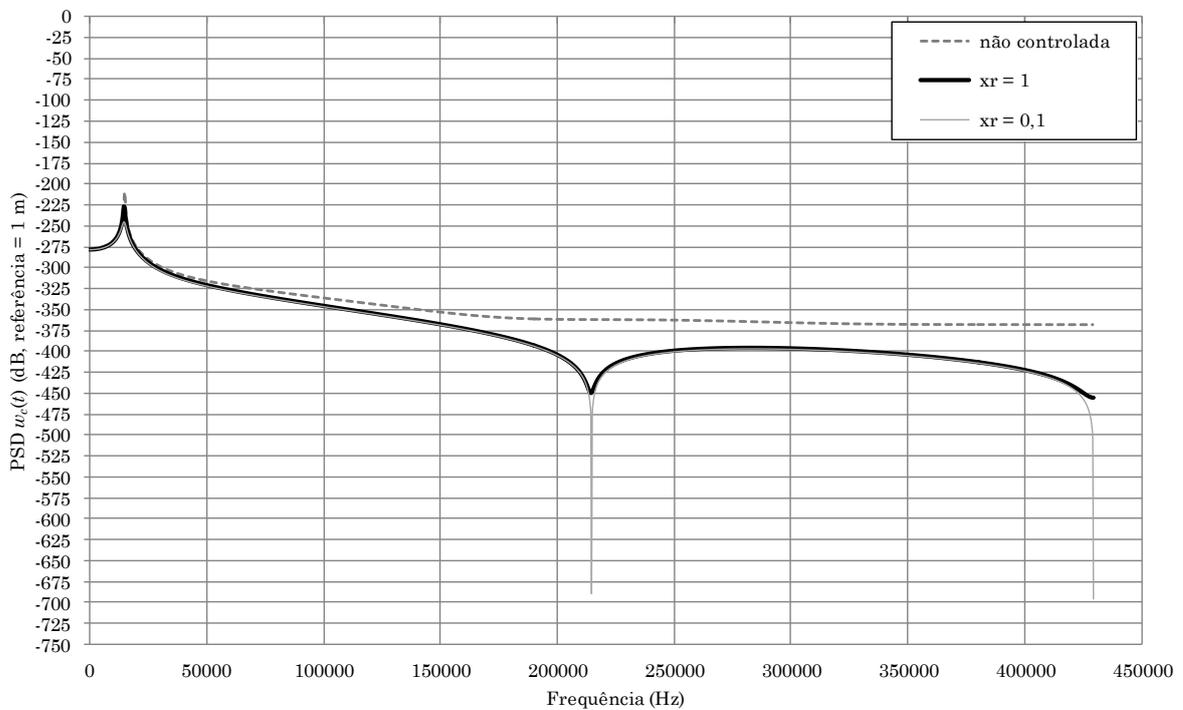


Figura 65: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da casca esférica, controlada pelo LQR

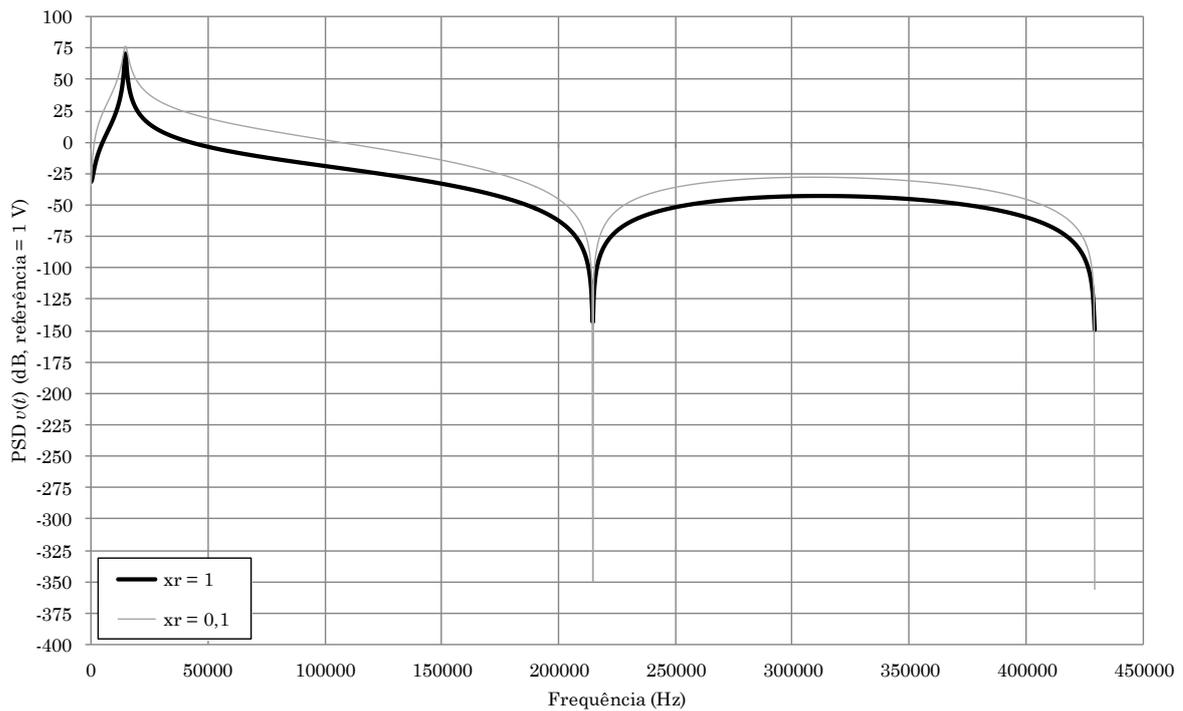


Figura 66: atenuações das ações de controle, no controle LQR da casca esférica

7.8.2 Controle LQR Modal

Para o controle modal truncado, as matrizes-peso $[\hat{Q}_m]$ e $[\hat{R}_m]$ a serem utilizadas no funcional (5.63) foram arbitradas como diagonais e preenchidas com valores $x_{qm} = 1$, e x_{rm} assumindo valores 0,1 e também 0,01. Foram consideradas como razões de amortecimento $\xi_1 = \zeta_1 = 0,006$, $\xi_2 = \zeta_2 = 0,3$ e $\xi_3 = \zeta_3 = \xi_4 = \zeta_4 = \xi_5 = \zeta_5 = \xi_6 = \zeta_6 = \xi_7 = \zeta_7 = \xi_8 = \zeta_8 = 0,001$. Na Figura 67 é mostrada a deflexão vertical do nó central da casca, ao longo do tempo, tendo sido controlados os oito primeiros modos de vibração ($nmode = 8$); na Figura 68 estão as correspondentes variações da ação de controle $u(t)$.

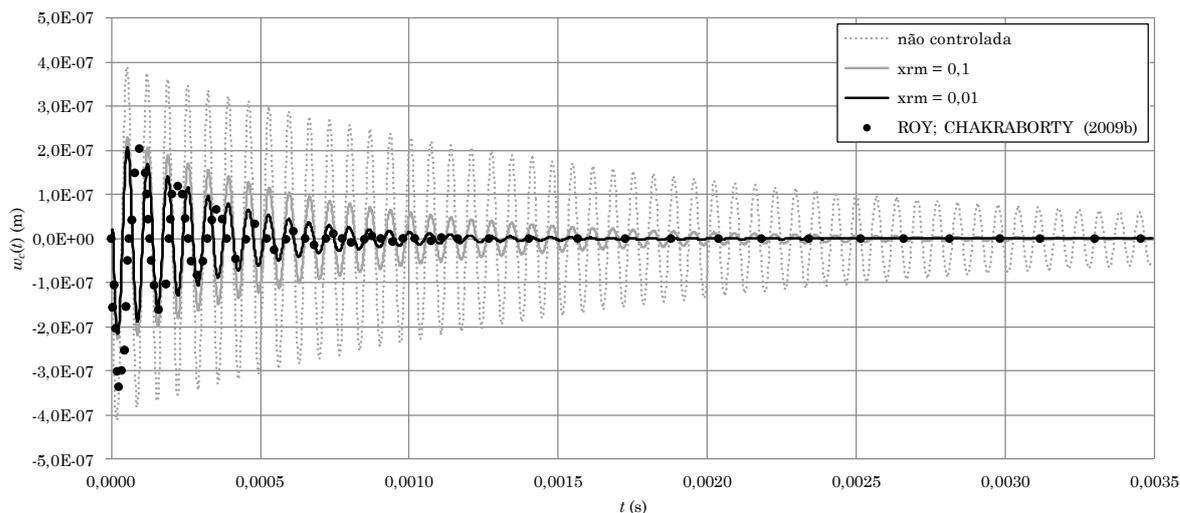


Figura 67: deflexão vertical do nó central da casca esférica, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal

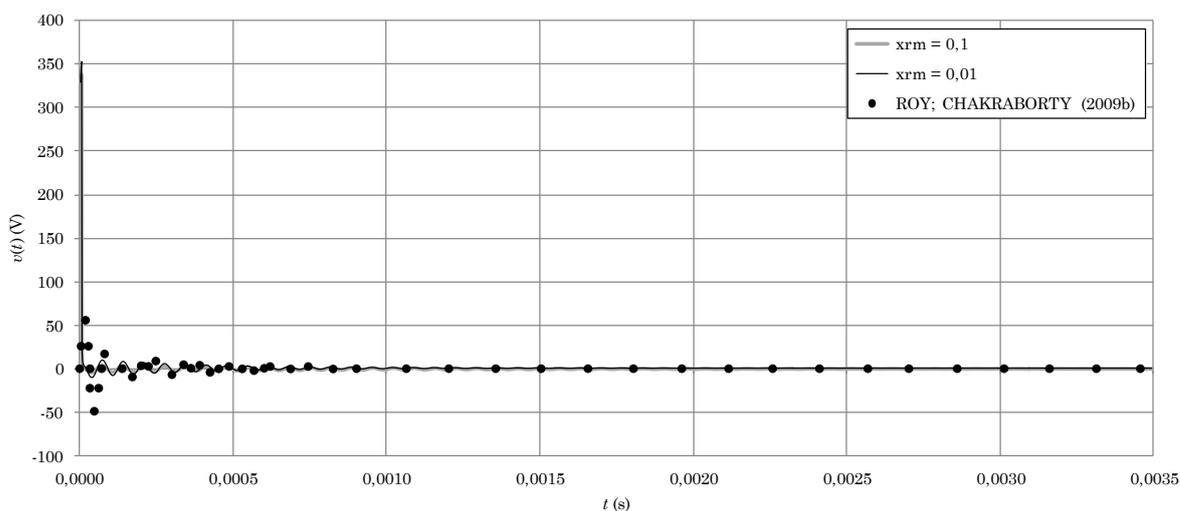


Figura 68: ações de controle, ao longo do tempo, no controle LQR Modal da casca esférica

Em relação aos valores reportados por Roy e Chakraborty (2009b), a ordem de grandeza das ações de controle obtidas no presente trabalho é elevada; para melhor visualizar o seu comportamento, as figuras 69 e 70 apresentam os resultados nos intervalos $0 - 0,0001$ s e $0,0001$ s – $0,0035$ s, respectivamente. As figuras 71 e 72 mostram as atenuações da PSD do deslocamento e das ações de controle, e as métricas calculadas são fornecidas na Tabela 13.

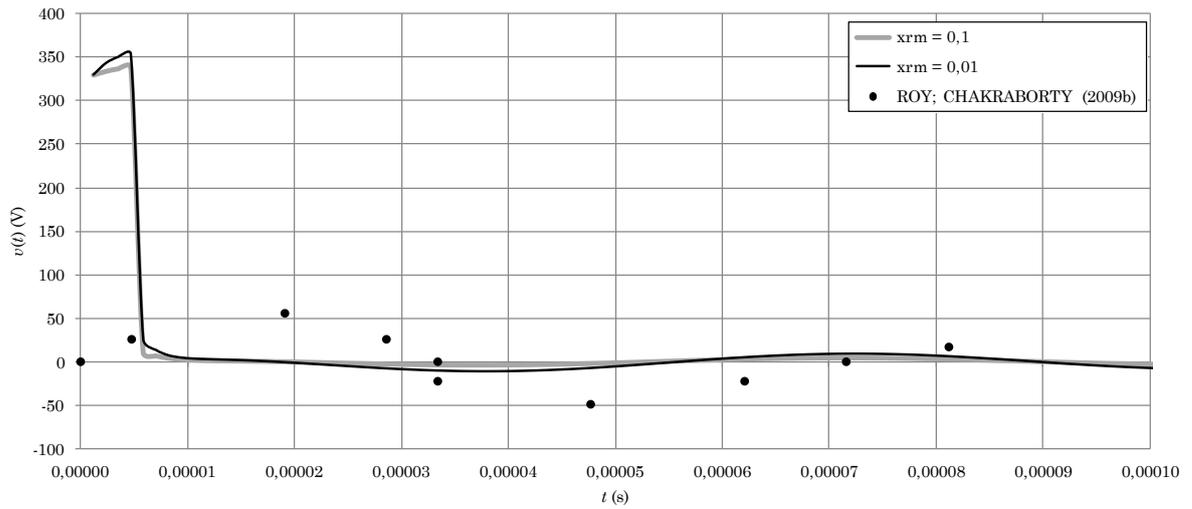


Figura 69: ações de controle, no intervalo 0 – 0,0001 s, no controle LQR Modal da casca esférica

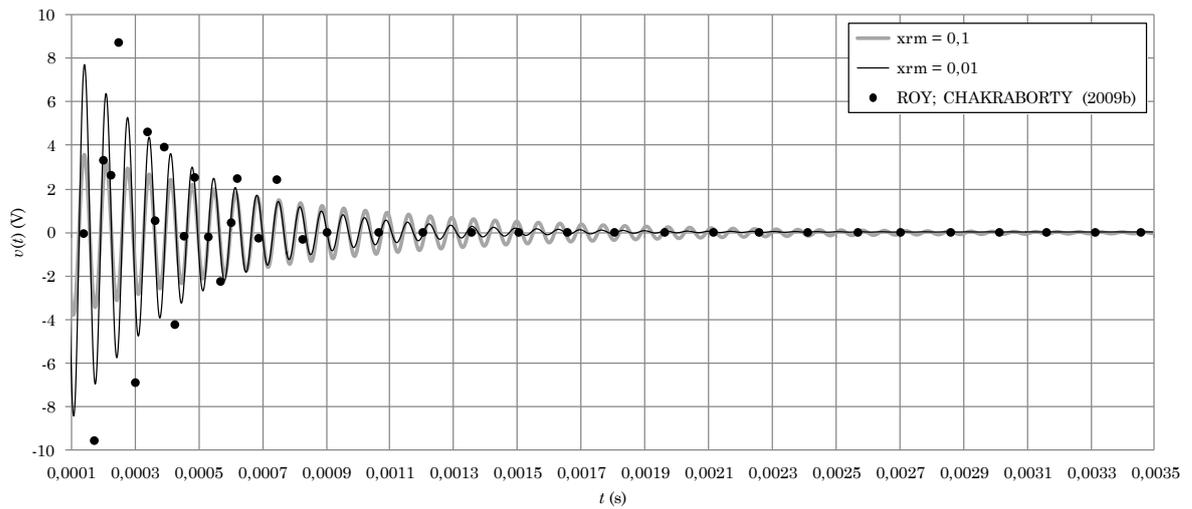


Figura 70: ações de controle, no intervalo 0,0001 s – 0,0035 s, no controle LQR Modal da casca esférica

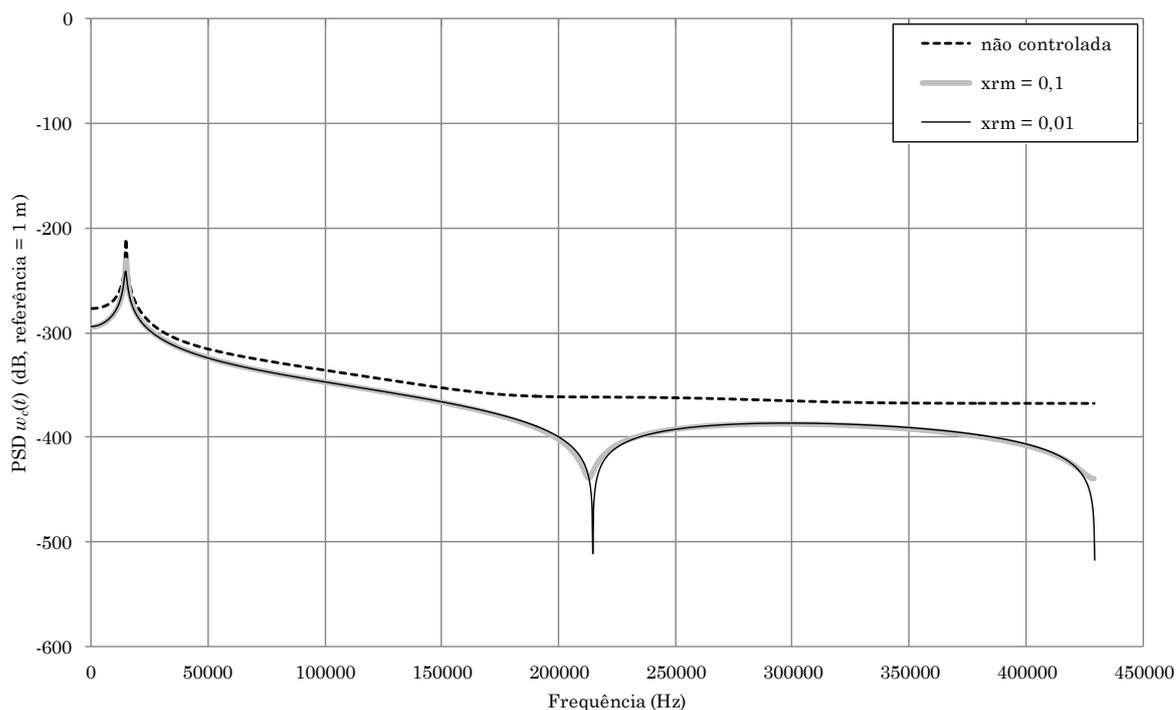


Figura 71: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da casca esférica, controlada pelo LQR Modal

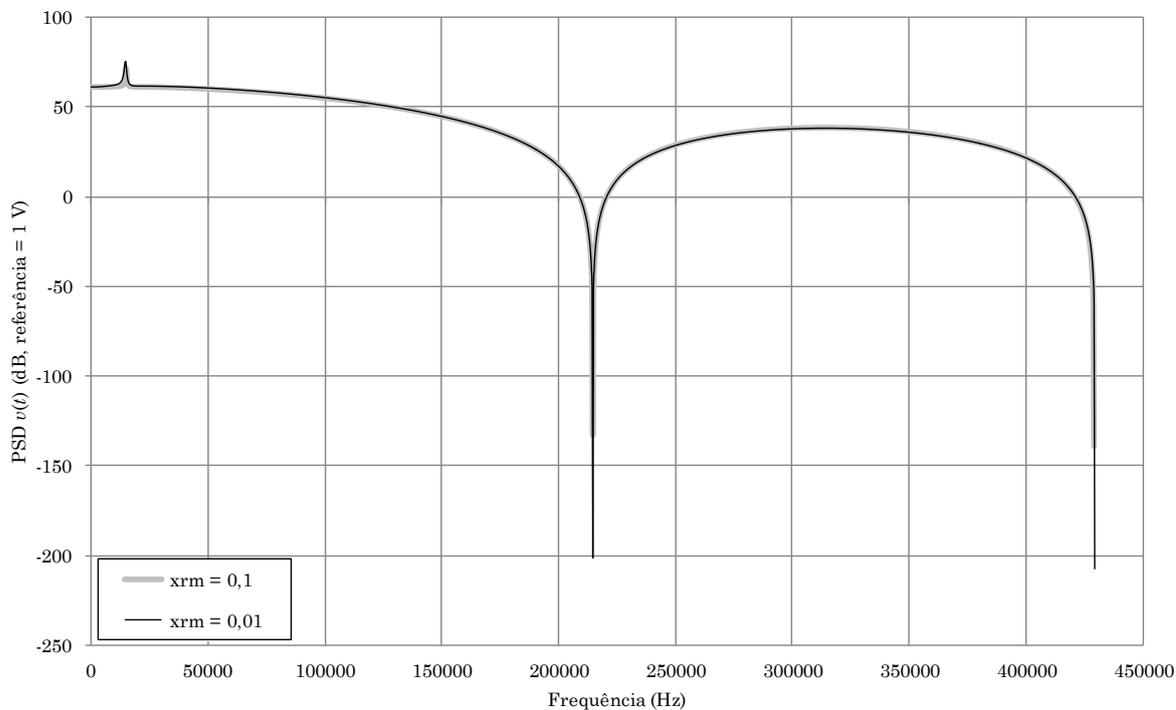


Figura 72: atenuações da PSD das ações de controle, no controle LQR Modal da casca esférica

Tabela 13: métricas no controle LQR Modal da casca esférica

Valores de x_{qm} e x_{rm}	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J_m
1 e 0,1	$3,483 \times 10^{-5}$	12,25	$2,628 \times 10^{-2}$
1 e 0,01	$2,498 \times 10^{-5}$	12,69	$2,856 \times 10^{-3}$

7.9 OTIMIZAÇÃO, VIA ALGORITMO GENÉTICO E CONTROLE LQR MODAL, DA ATIVAÇÃO DE DUAS PASTILHAS PIEZOELÉTRICAS EM VIGA *BIMORPH* ENGASTADA-LIVRE SOB CARGA CONCENTRADA

O programa para análise estrutural via elementos finitos desenvolvido neste trabalho permite a discretização espacial utilizando elementos triangulares de material compósito, onde foi acrescentada a possibilidade de haver camadas piezoelétricas (superior e inferior) que podem atuar como sensores e atuadores, ou ambas como atuadores, ou ainda apenas contribuir para a massa e a rigidez da estrutura, em função de estarem ou não presentes, e ativadas ou não eletricamente.

Um problema típico de otimização consiste em distribuir ou ativar um determinado número “n” de pastilhas piezoelétricas sobre a estrutura de modo que promovam criteriosamente o melhor controle de vibrações. Como na prática tais pastilhas são retangulares, neste trabalho o programa de otimização via algoritmo genético foi preparado a ativar pares contíguos de elementos triangulares que contém camada piezoelétrica. Adicionalmente, a tensão elétrica é aplicada com sinais contrários aos elementos piezoelétricos superiores e inferiores, de modo a promover flexão na estrutura.

Para testar o desempenho do programa de otimização na ativação de duas pastilhas piezoelétricas na viga engastada-livre *bimorph* apresentada na Seção 7.6, as seguintes considerações foram feitas:

- a) a viga é composta por 10 elementos triangulares, portanto das 5 pastilhas possíveis apenas 2 são ativáveis;
- b) devido ao tipo estrutural (viga) e condições de apoio (engaste em uma extremidade, livre na outra), o controle de vibrações é sabidamente mais eficaz quanto mais próximo do engaste as duas pastilhas ativadas estiverem, o que corresponde, na Figura 73, que assumam as posições “1” e “2”. O programa impede automaticamente a superposição de pastilhas em qualquer posição;

- c) o número de variáveis é 2 (correspondente ao número de pastilhas), cada uma com limites inferior e superior iguais a 1 e 8, respectivamente, sendo o número de bits por variável igual a 3, pois $2^3 > 8$ (número de posições possíveis). Quando as posições “6”, “7” ou “8” são arbitradas aleatoriamente, o programa as substitui pela posição “5” antes de seguir a análise;
- d) as probabilidades de *crossover* e de mutação foram tomadas como 90% e 1%, respectivamente, e a tolerância do desvio padrão foi considerada $0,5 \times 10^{-4}$.

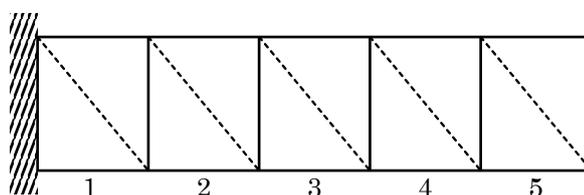


Figura 73: vista superior das possíveis posições de pastilhas piezoelétricas ativáveis na viga *bimorph*

Na simulação, feita com número de indivíduos e número de gerações iguais a 20 e 10, respectivamente, obteve-se o resultado esperado na 2ª geração: as pastilhas “1” e “2” foram ativadas, utilizando-se o controle LQR Modal com os quatro primeiros modos controlados, e como função de custo o valor da métrica J_m .

Nas figuras 74 e 75 são mostradas, respectivamente, a deflexão vertical ao longo do tempo de um dos nós da extremidade livre da viga *bimorph* e a correspondente variação da ação de controle, sendo sobrepostos, em cada uma delas, os resultados do controle LQR com todas as pastilhas ativadas e do controle com apenas duas das cinco pastilhas ativadas nas posições “1” e “2”, definidas na otimização.

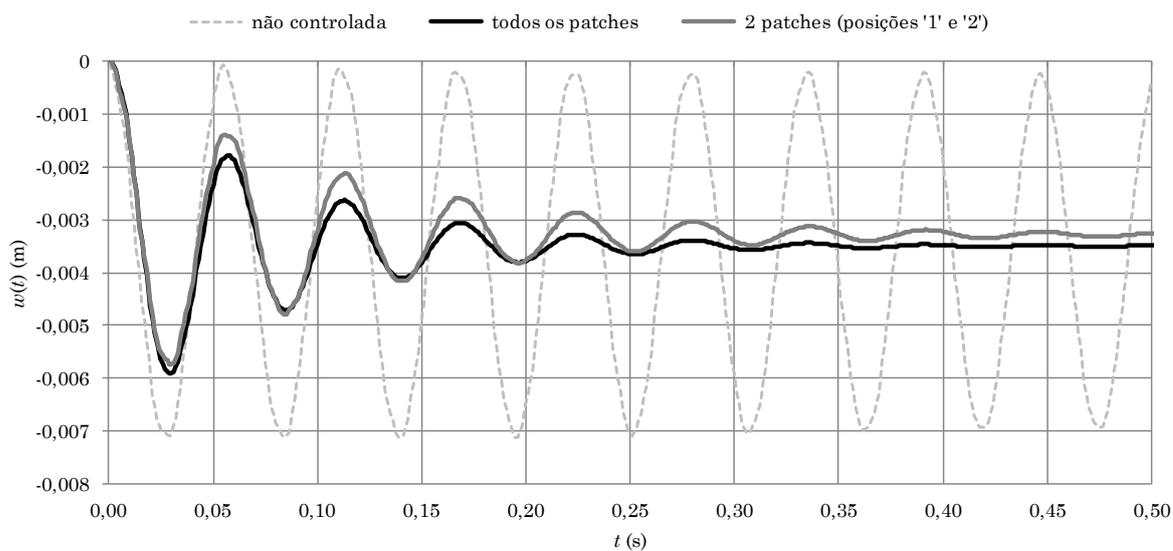


Figura 74: deflexão vertical, ao longo do tempo, de um dos nós da extremidade da viga bimorph, controlada pelo LQR com todas as pastilhas ativadas e com apenas duas pastilhas ativadas nas posições “1” e “2” definidas na otimização

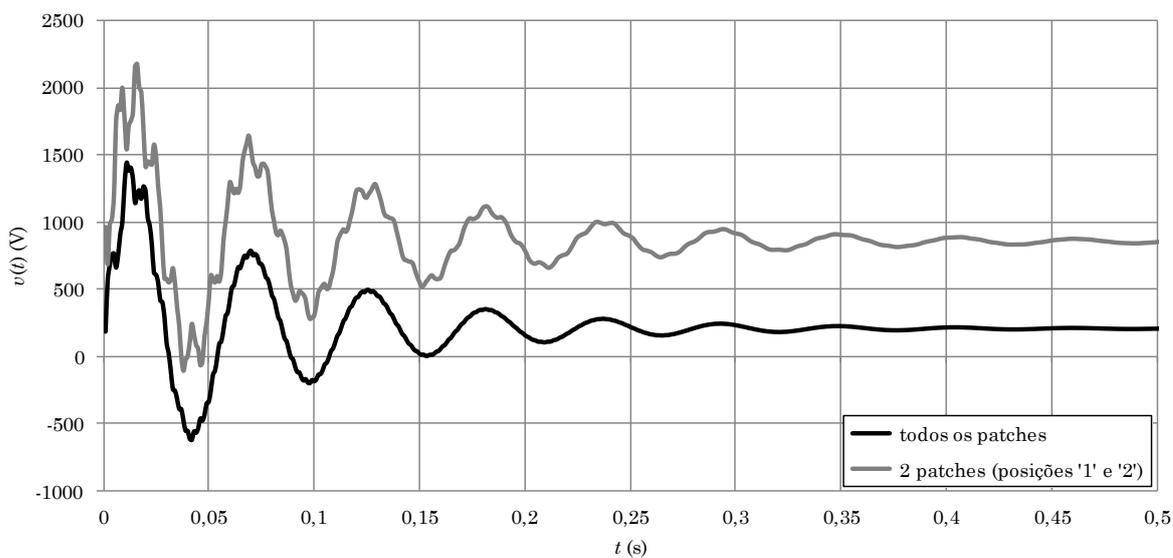


Figura 75: ação de controle, ao longo do tempo, no controle LQR da viga com todas as pastilhas ativadas e com apenas duas pastilhas ativadas nas posições “1” e “2” definidas na otimização

7.10 OTIMIZAÇÃO, VIA ALGORITMO GENÉTICO E CONTROLE LQR MODAL, DO POSICIONAMENTO DE OITO PASTILHAS PIEZOELÉTRICAS EM PLACA APOIADA

Para a otimização do posicionamento de oito pastilhas piezoelétricas na placa da aplicação tratada na Seção 7.7, levando em consideração a sua geometria e as condições de apoio e de carregamento, foi imposta uma condição de simetria na distribuição das pastilhas; tal como esquematizado na Figura 76, a otimização é feita a partir da escolha de pares de pastilhas que estão no 1º quadrante (pastilhas “1” a “25”). Por exemplo, selecionar as pastilhas “7” e “25”, destacados na Figura 76 (b), equivale a selecionar as pastilhas “12”, “19”, “45”, “46”, “55”, “56”, “82” e “89”, tal como mostrado na Figura 49 (a). Desta maneira, o número de variáveis é 2 (correspondente ao número de pastilhas), cada uma com limites inferior e superior iguais a 1 e 8, respectivamente; e o número de bits por variável é a 5, uma vez que $2^5 > 25$ (número de posições possíveis). Tal como na otimização da viga *bimorph* (aplicação da Seção 7.6), quando as pastilhas “26”, ... , “32” são selecionadas, o programa as substitui pela pastilha “25” antes de seguir a análise; também as probabilidades de *crossover* e de mutação foram tomadas como 90% e 1%, respectivamente, e a tolerância do desvio padrão foi considerada $0,5 \times 10^{-4}$.

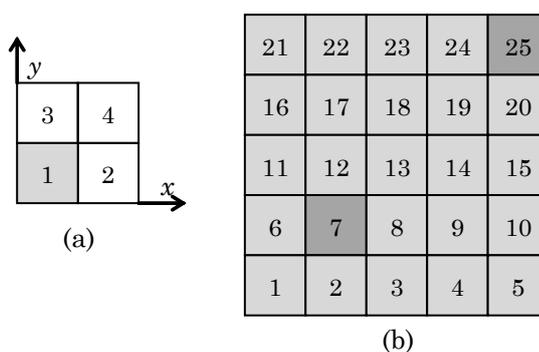


Figura 76: (a) esquematização dos quadrantes; (b) numeração das pastilhas no primeiro quadrante

Na simulação, empregando o controle LQR Modal dos oito primeiros modos de vibração, com $x_{qm} = 1$ e $x_{rm} = 0,01$, e feita com 20 indivíduos e 10 gerações, obteve-se como resultado o par de pastilhas “24” e “25” apresentando menor função de custo (métrica $J_m = 8,368 \times 10^{-5}$, como pode ser observado na Tabela 11), já na 1ª geração.

Nas figuras 77 e 78 são mostradas, respectivamente, a deflexão vertical ao longo do tempo do nó central da placa, e a correspondente variação da ação de controle, sendo sobrepostos, em cada uma delas, os resultados do controle LQR Modal com $xqm = 1$ e diversos valores de xrm ; e o resultado de Roy e Chakraborty, embora este seja referente às pastilhas ocupando as posições “7” e “25”. As figuras 79 e 80 mostram as atenuações da PSD, e na Tabela 14 são apresentadas as métricas calculadas.

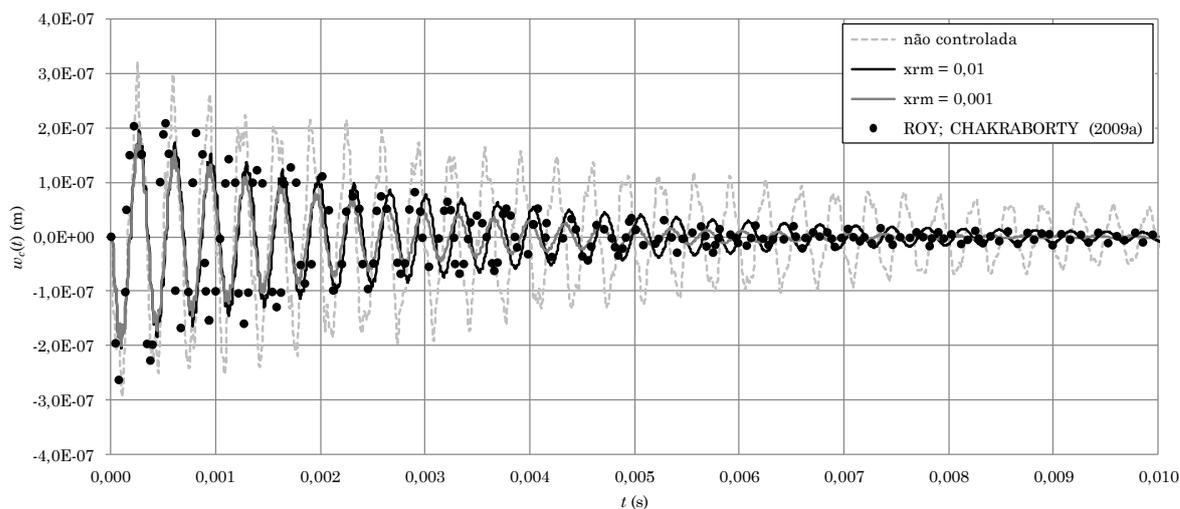


Figura 77: deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético

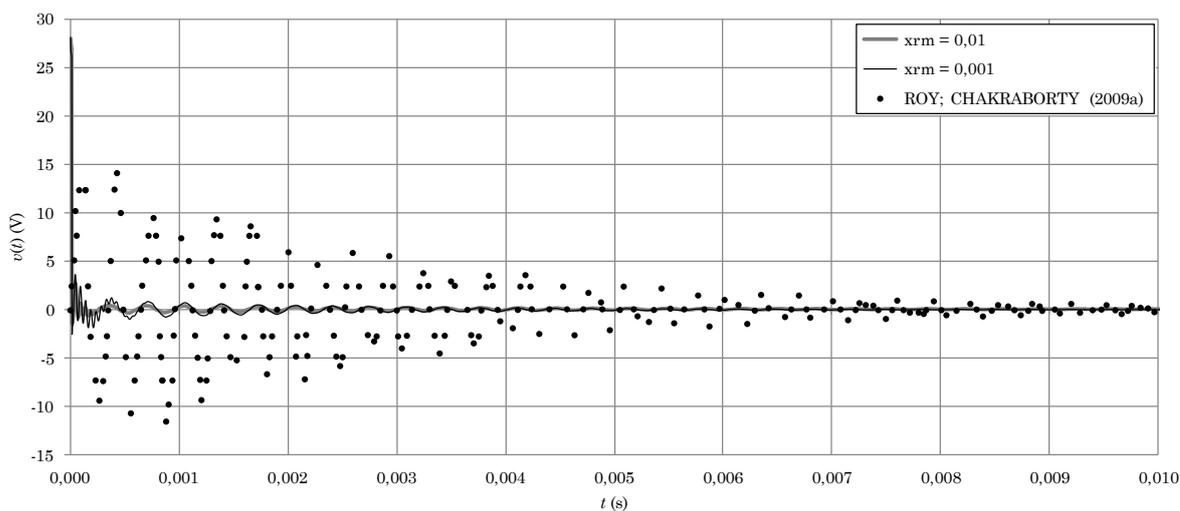


Figura 78: ações de controle, ao longo do tempo, na placa controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético

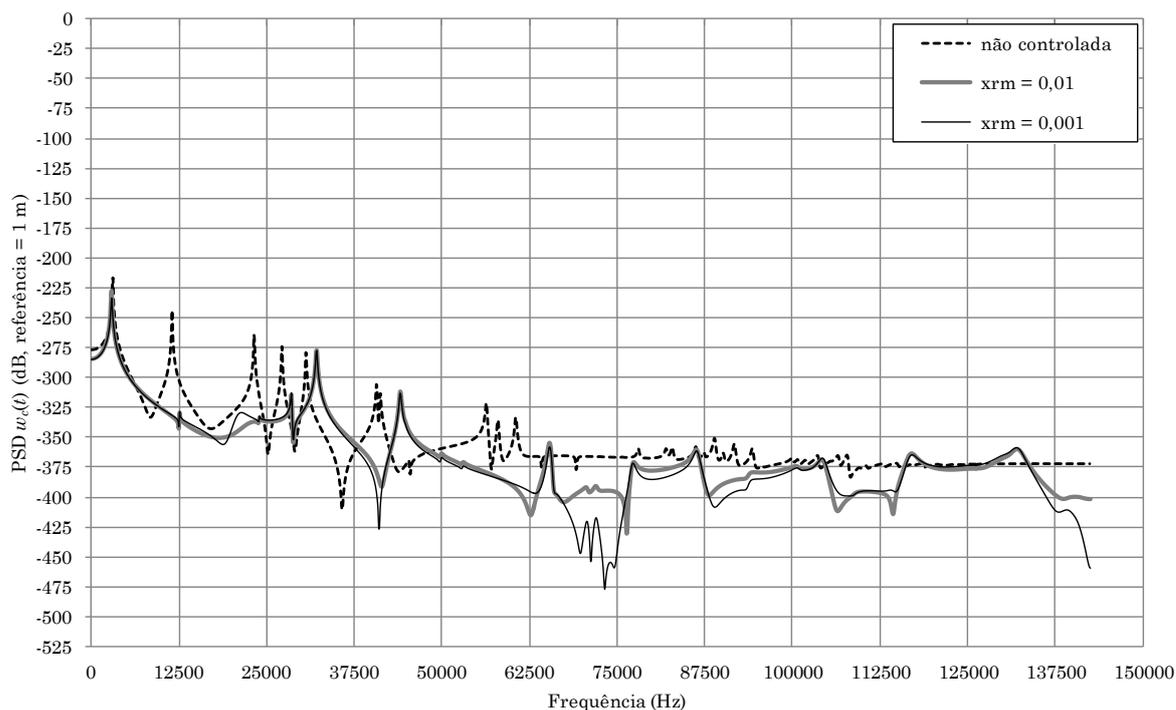


Figura 79: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da placa, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético

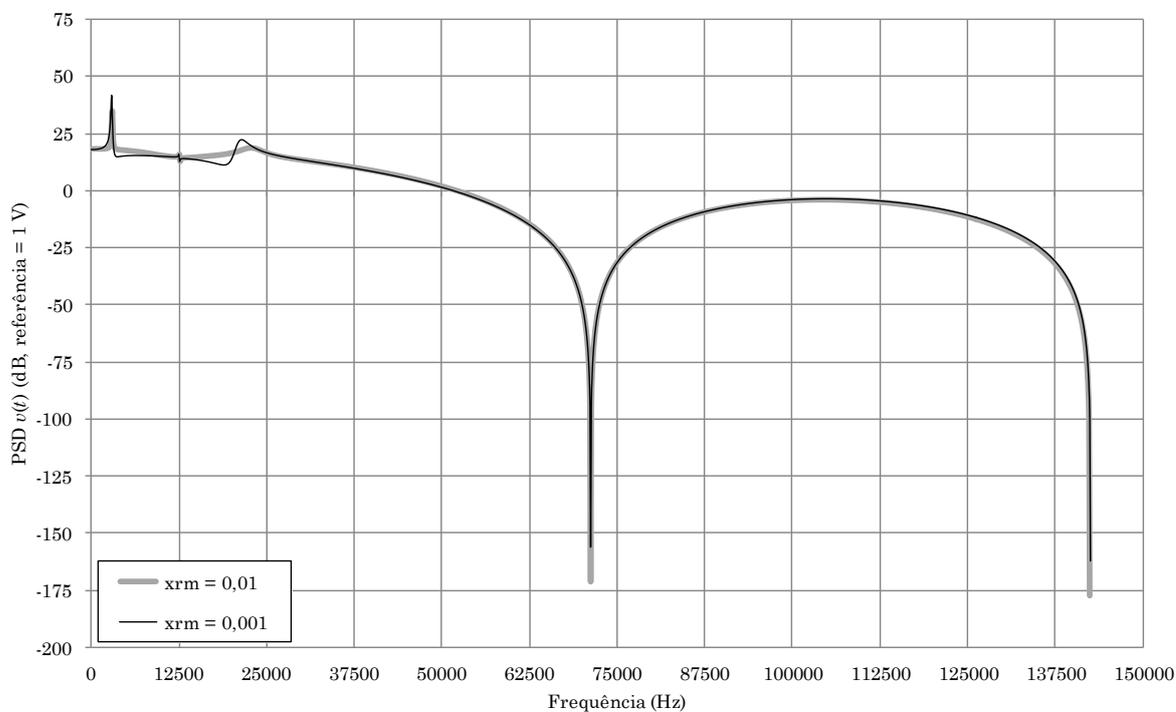


Figura 80: atenuações da PSD das ações de controle, ao longo do tempo, na placa controlada pelo LQR Modal – posicionamento otimizado pelo algoritmo genético

Tabela 14: métricas na alocação ótima de pastilhas piezoelétricas na placa apoiada

Posição	Valores de xqm e xrm	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J_m
Roy e Chakraborty (2009a) (7 e 25)	1 e 0,01	$3,128 \times 10^{-5}$	3,095	$5,416 \times 10^{-4}$
Otimizada pelo AG (24 e 25)	1 e 0,01	$1,488 \times 10^{-5}$	1,020	$8,368 \times 10^{-5}$
Otimizada pelo AG (24 e 25)	1 e 0,001	$1,271 \times 10^{-5}$	1,031	$7,004 \times 10^{-5}$

7.11 OTIMIZAÇÃO, VIA ALGORITMO GENÉTICO E CONTROLE LQR MODAL, DO POSICIONAMENTO DE OITO PASTILHAS PIEZOELÉTRICAS EM CASCA ESFÉRICA APOIADA

Para a otimização do posicionamento de oito pastilhas piezoelétricas na casca esférica apoiada da aplicação apresentada na Seção 7.8, foi empregado esquema semelhante ao da aplicação da Seção 7.10. Foi feito o controle LQR Modal dos oito primeiros modos de vibração, tendo sido arbitrados $xqm = 1$ e $xrm = 0,01$. Com 20 indivíduos e 10 gerações, obteve-se como resultado o par de pastilhas “24” e “25” apresentando menor função de custo (métrica $J_m = 3,839 \times 10^{-4}$) já na 1ª geração. Uma análise posterior, feita com 30 indivíduos e 10 gerações, confirmou o resultado, ao custo de 50% a mais de tempo de processamento.

Roy e Chakraborty (2009b) apresentam o resultado de um estudo do índice de controlabilidade da estrutura (WANG; WANG, 2001), que conduz a um número de doze pastilhas a serem posicionadas assimetricamente tal como ilustrado na Figura 81, sendo seis como atuadoras na camada inferior e seis como sensoras na mesma posição da camada superior. Na Figura 82 são confrontados os resultados de Roy e Chakraborty (2009b) com os do presente trabalho levando em consideração as pastilhas alocadas nas posições:

- a) otimizadas pelo algoritmo genético (“24” e “25”, do 1º quadrante);
- b) alegadas como sendo de melhor controlabilidade (conforme Figura 81);
- c) iniciais e não otimizadas (“7” e “25”, do 1º quadrante), para efeito de comparações.

Nesses três casos foram empregados os mesmos parâmetros, $xqm = 1$ e $xrm = 0,01$. Na Tabela 15 são mostradas as métricas calculadas.

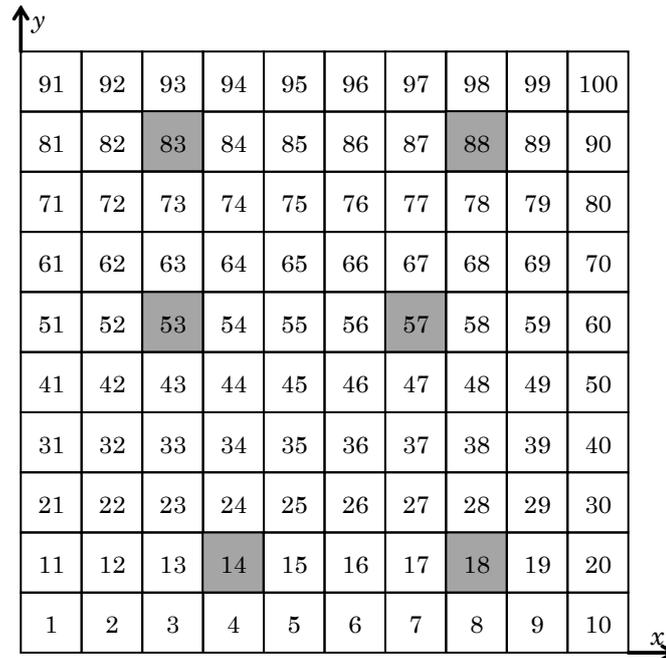


Figura 81: pastilhas piezoelétricas posicionadas conforme melhor índice de controlabilidade, segundo Roy e Chakraborty (2009b)

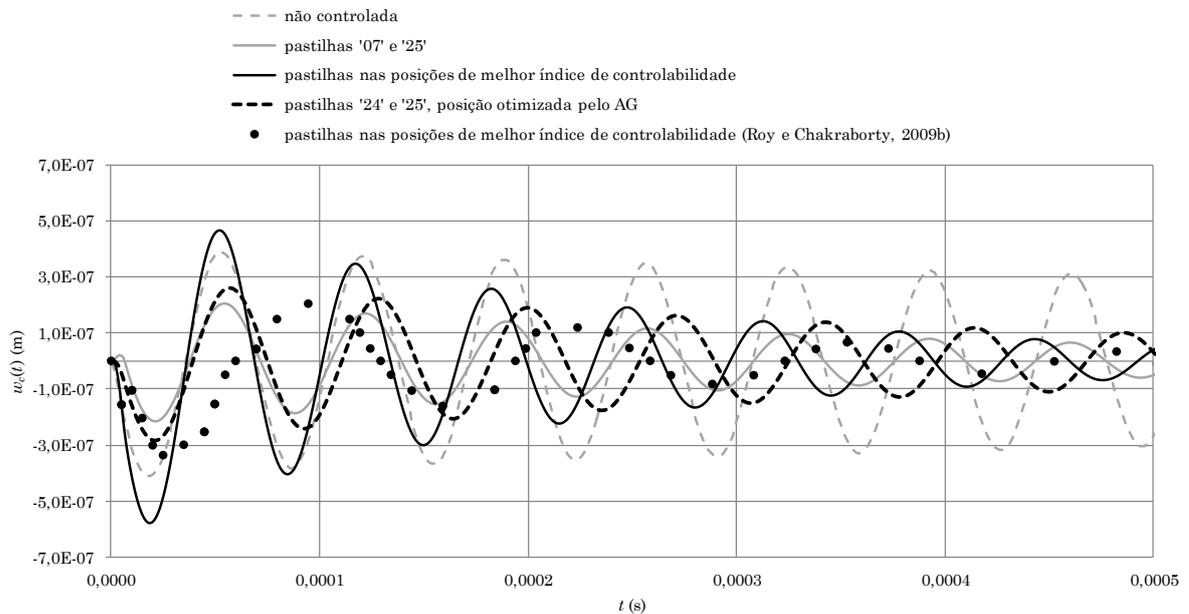


Figura 82: deflexão vertical do nó central da casca esférica, ao longo do tempo, controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas

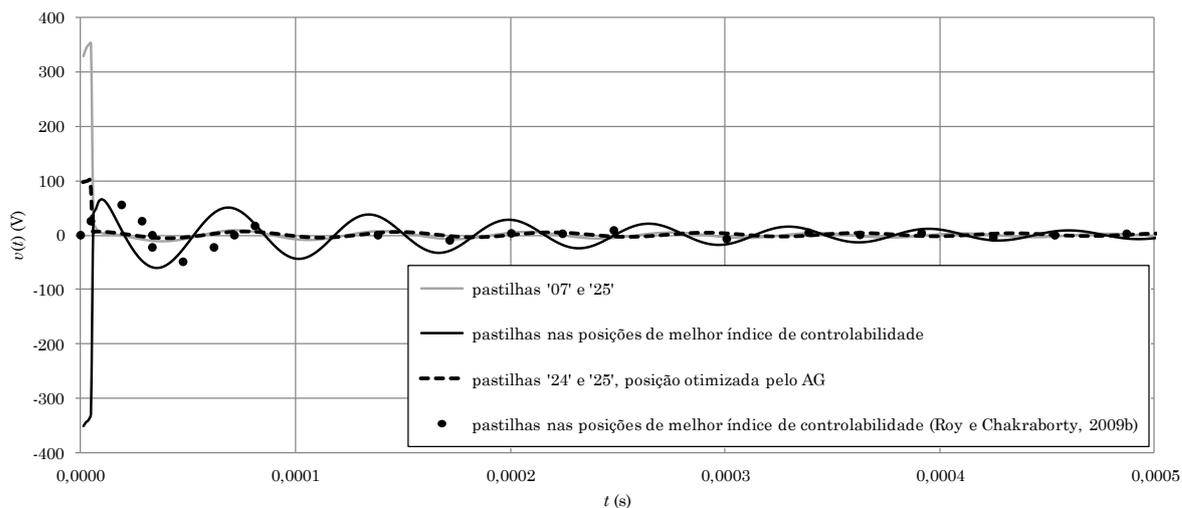


Figura 83: ações de controle, ao longo do tempo, na casca esférica controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas

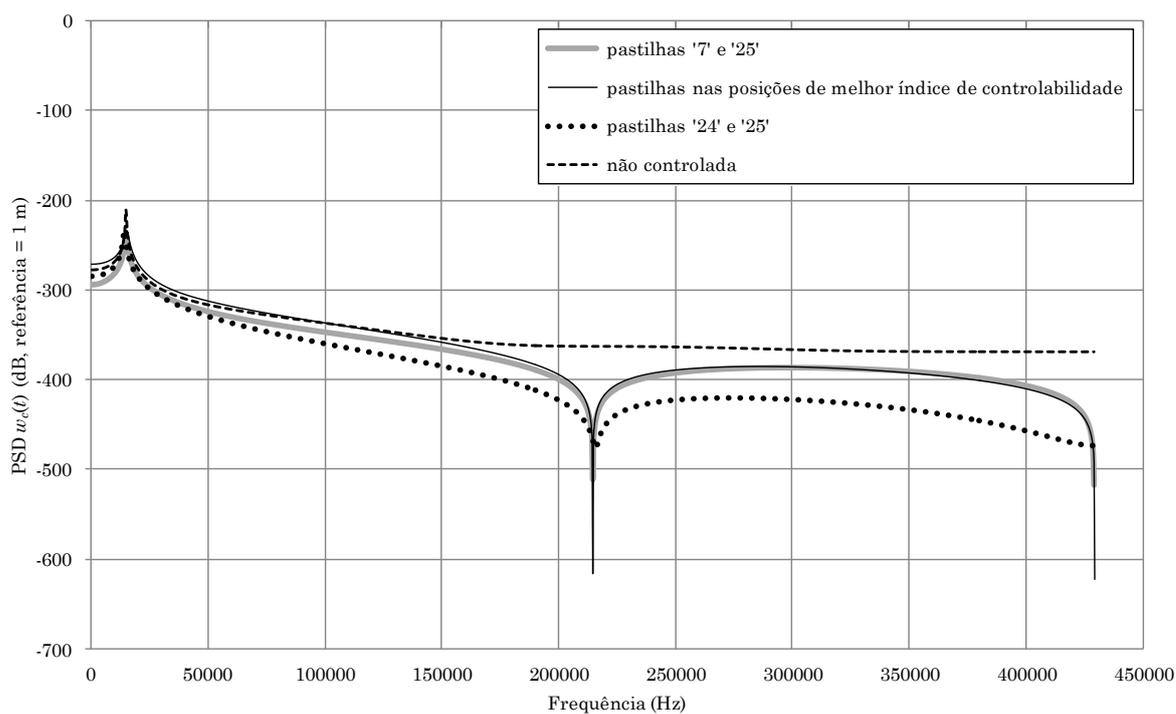


Figura 84: atenuações da PSD da deflexão vertical do nó central da casca esférica, controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas

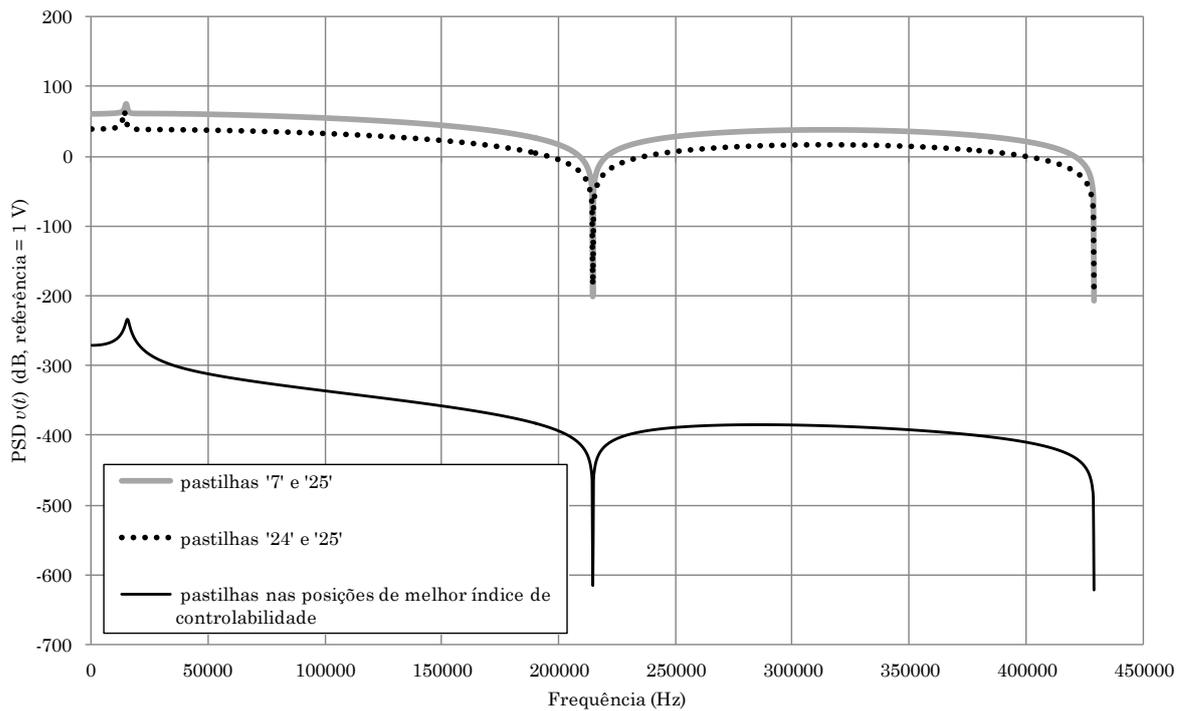


Figura 85: atenuações da PSD das ações de controle, na casca esférica controlada pelo LQR Modal – posicionamentos otimizados e não otimizados das pastilhas piezoelétricas

Tabela 15: métricas na alocação ótima de pastilhas piezoelétricas na casca apoiada

Posição	x_{rms}^q	x_{rms}^v	J_m
Roy e Chakraborty (2009b) (7 e 25)	$2,498 \times 10^{-5}$	12,69	$2,856 \times 10^{-3}$
Melhor índice de controlabilidade (ROY; CHAKRABORTY, 2009b)	$4,403 \times 10^{-5}$	15,07	$4,213 \times 10^{-3}$
Otimizada pelo AG (24 e 25)	$1,321 \times 10^{-5}$	4,155	$3,839 \times 10^{-4}$

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram desenvolvidas ferramentas computacionais para a simulação do controle ativo de estruturas inteligentes de cascas, placas e vigas delgadas de material compósito laminado, com camadas de material piezoelétrico como sensores e/ou atuadores. Também foi tratado o problema da otimização discreta combinatorial do posicionamento de pastilhas piezoelétricas.

A discretização espacial foi feita pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento GPL-T9 de três nós e seis graus de liberdade mecânicos por nó, mais um grau de liberdade elétrico por camada piezoelétrica. Para a solução do sistema de equações lineares foi empregado o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal. A análise estática não linear geométrica foi feita com o método dos deslocamentos generalizados.

Foram empregados dois métodos de controle: o Proporcional-Integral-Derivativo (PID) e o Regulador Quadrático Linear (LQR), bem como seu método derivado, o LQR Modal. A discretização temporal foi feita pelo esquema implícito de Newmark, exceto no controle LQR e LQR Modal, onde foi utilizado o Método da Matriz de Transição de Estado com o Retentor de Amostras de Ordem Zero. No controle LQR e LQR Modal a solução da Equação de Ricatti foi obtida a partir dos autovetores complexos da Equação Hamiltoniana. As tensões elétricas aplicadas nos elementos atuadores piezoelétricos foram consideradas diretamente como ações de controle, através de modificações no algoritmo LQR. Para considerar o efeito das forças mecânicas externas não controladas, acrescentou-se ao algoritmo de controle a estratégia conhecida como “Rejeição das Perturbações”; tal estratégia permitiu a formulação de um termo adicional à matriz de ganho, de forma a levar em conta forças externas (perturbações) aplicadas na estrutura, além das condições iniciais de contorno do problema (valores iniciais das variáveis de estado).

Em termos das simulações numéricas estáticas e dinâmicas, sem ou com controle, das estruturas de cascas, placas e vigas delgadas de material compósito laminado, com ou sem camadas de material piezoelétrico, estas apresentaram resultados condizentes com aqueles reportados na literatura referenciada. Isto indica a validade do modelo aqui

implementado, ainda que não sejam ressaltadas as suas grandes potencialidades em aplicações mais complexas em termos de geometria e configurações de alocação das pastilhas piezoelétricas.

Fez-se um estudo da influência que os parâmetros que definem as matrizes $[Q]$ e $[R]$ têm sobre a efetividade do controlador projetado, obtendo-se o comportamento esperado de que um controle mais rápido acontece às custas de um dispêndio maior de energia elétrica.

A otimização do posicionamento de uma quantidade fixa de pastilhas piezoelétricas, visando minimizar as variáveis de estado e a energia gasta no controle, foi feita utilizando um algoritmo genético, o qual mostrou comportamento adequado: diminuição das análises para encontrar posicionamentos ótimos em poucas gerações e também tratamento em codificação binária do problema de otimização combinatorial discreta do posicionamento. A métrica baseada no valor do funcional quadrático de Lyapunov, J_m , mostrou-se eficiente como componente da função objetivo a ser utilizada na procura da alocação das pastilhas.

Ao final, três exemplos foram apresentados relacionados à alocação ótima das pastilhas de material piezoelétrico. O primeiro foi relacionado à validação da metodologia e do algoritmo desenvolvido, onde se utilizou o conhecido problema da otimização do posicionamento de uma quantidade discreta de pastilhas piezoelétricas numa viga *bimorph* engastada-livre. Como esperado, os resultados obtidos mostraram o posicionamento próximo ao engaste como sendo o melhor, resultado este também verificado por outros autores.

O segundo exemplo tratou do posicionamento também de uma quantidade discreta de pastilhas de material piezoelétrico numa placa de material laminado. Neste caso, foi obtida uma solução ótima que diferia daquela indicada na literatura. A solução encontrada indicou o posicionamento ótimo como sendo o centro da placa. Um último exemplo, bem semelhante ao anterior, só que aplicado a uma casca esférica, também foi investigado, levando a resultados similares aos anteriores (melhor posicionamento com pastilhas próximas ao centro da casca).

Gráficos das variáveis de estado e tensões elétricas aplicadas ao longo do tempo claramente indicam a superioridade destas soluções obtidas em relação àquelas

indicadas pela literatura. Gráficos da atenuação/amplificação das densidades espectrais de potência dos deslocamentos e das tensões elétricas aplicadas corroboraram as conclusões anteriores. Isto possibilitou a avaliação do ganho em termos da atenuação da vibração e quão efetivo foi o controle individualmente para cada um dos modos de vibração das estruturas. Em particular, estes últimos gráficos possibilitaram a demonstração da adequação do posicionamento encontrado neste trabalho com respeito àqueles indicados na literatura através da confrontação das soluções apresentadas.

A experiência até aqui obtida com o controle ativo de vibrações em estruturas com o LQR nos motiva a estender a teoria de controle a estruturas com não linearidade geométrica, e, concomitantemente, investigar métodos para definir os valores iniciais que compõem as matrizes $[Q]$ e $[R]$, bem como a pertinência da avaliação do índice de controlabilidade para a distribuição das pastilhas piezoelétricas. São ainda sugestões para trabalhos futuros:

- a) diminuir o tempo da análise no controle LQR e LQR Modal, otimizando as rotinas que operam com números complexos no Método da Matriz de Transição de Estado, ou mesmo estudar a substituição deste método por outro mais eficiente;
- b) investigar aplicações de atenuação acústica com a ferramenta desenvolvida;
- c) investigar e implementar o regulador quadrático linear gaussiano (*linear quadratic gaussian* – LQG);
- d) investigar e implementar outras teorias de laminação diferentes das aqui utilizadas, de forma a incluir efeitos higrotérmicos, falhas dos materiais compósitos (função de estado limite de Tsai Wu) e perda de aderência entre camadas (delaminação);
- e) investigar e implementar a resposta não linear dos materiais piezoelétricos, bem como a consideração dos limites máximos de tensão elétrica que lhes é aplicável (*breakdown voltage*);

- f) investigar técnicas que permitam a otimização contínua da alocação das pastilhas piezoelétricas, possibilitando formatos de pastilhas independentes da malha de elementos finitos;
- g) investigar técnicas que permitam processos de coleta de energia;
- h) investigar e implementar técnicas de controle robusto.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE. **ANSI/IEEE Std 176-1987**: IEEE standard on piezoelectricity. New York, 1988.
- ANG, K. K.; WANG, S. Y.; QUEK, S. T. Weighted energy linear quadratic regulator vibration control of piezoelectric composite plates. **Smart Materials and Structures**, v. 11, n. 1, p. 98-106, feb. 2002.
- ATHANS, M.; FALB, P. L. **Optimal control**: an introduction to the theory and its applications. New York: McGraw-Hill, 1966.
- BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 37, n. 9, p. 713-738, sept. 2001.
- BANDYOPADHYAY, B.; MANJUNATH, T. C.; UMAPATHY, M. **Modeling, control and implementation of smart structures**. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2nd ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BATHE, K.-J.; HO, L.-W. A simple and effective element for analysis of general shell structures. **Computers & Structures**, v. 13, n. 5-6, p. 673-681, oct./dec. 1981.
- BAZANELLA, A. S.; SILVA JR., J. M. G. **Sistemas de controle**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005.
- BITTANTI, S.; LAUB, A. J.; WILLEMS, J. C. (ed.). **The Riccati equation**. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- BOLTON, W. **Engenharia de controle**. São Paulo: Makron Books, 1995.
- CADY, W. G. **Piezoelectricity**: an introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals. New York: McGraw-Hill, 1946.
- CALLISTER JR., W. D. **Ciência e engenharia de materiais**: uma introdução. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- CARDOSO, E. L. **Otimização topológica de atuadores piezelétricos considerando não-linearidade geométrica**. 2005. 170 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.
- CHEE, C. Y. K. **Static shape control of laminated composite plate smart structure using piezoelectric actuators**. 2000. 280 f. Tese (Doutorado), The University of Sydney, Sydney, Austrália, 2000.

CHOPRA, I. Review of state of art of smart structures and integrated systems. **AIAA Journal**, v. 40, n. 11, p. 2145-2187, 2002.

CLARK, R. L.; SAUNDERS, W. R.; GIBBS, G. P. **Adaptive structures: dynamics and control**. New York: John Wiley & Sons, 1998.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 2nd ed. Singapore: McGraw-Hill, 1993.

COLLA, E. L. Piezoelectric technology for active vibration control. In: SETTER, N. (org.). **Piezoelectric materials in devices: extended reviews on current and emerging piezoelectric materials, technology, and applications**. Lausanne, Switzerland: Ceramics Laboratory EPFL, 2002. p. 123-154.

CRAWLEY, E. F.; DE LUIS, J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. **AIAA Journal**, v. 25, n. 10, p. 1373-1385, 1987.

DATTA, B. N. **Numerical methods for linear control systems**. San Diego, California: Elsevier Academic, 2004.

GAO, J.-X.; SHEN, Y.-P. Active control of geometrically nonlinear transient vibration of composite plates with piezoelectric actuators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 264, n. 4, p. 911-928, 17 July 2003.

GAUDENZI, P. **Smart structures: physical behaviour, mathematical modelling and applications**. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2009.

GAUTSCHI, G. **Piezoelectric sensorics**. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1989.

GROEHS, A. G. **Mecânica vibratória**. 2. ed. São Leopoldo: Unisinos, 2001.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. Ann Arbor, Michigan: the University of Michigan Press, 1975.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering**. Chichester, England: John Wiley, 2000.

IKEDA, T. **Fundamentals of piezoelectricity**. Oxford, U. K.: Oxford University, 1990.

ISOLDI, L. A. **Análise estática e dinâmica de estruturas delgadas de materiais compostos laminados incluindo materiais piezoelétricos**. 2008. 195 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

ISOLDI, L. A. et al. Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of composite laminates shells with triangular finite element. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 30, n. 1, p. 83-92, jan./mar. 2008.

JEYACHANDRABOSE, C.; KIRKHOPE, J. Explicit formulation for a high precision triangular laminated anisotropic thin plate finite element. **Computers & Structures**, v. 20, n. 6, p. 991-1007, 1985.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2nd ed. New York: Taylor & Francis, 1999.

KALTENBACHER, M. **Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators**. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007.

KWON, Y. W.; BANG, H. **The finite element method using MATLAB**. 2nd ed. Boca Raton, Florida: CRC, 2000.

LEE, S. J.; REDDY, J. N.; ROSTAM-ABADI, F. Nonlinear finite element analysis of laminated composite shells with actuating layers. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, n. 1, p. 1-21, nov. 2006.

LEO, D. J. **Engineering analysis of smart material systems**. New York: John Wiley & Sons, 2007.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais: ciência e tecnologia**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

LIAO, C. L.; REDDY, J. N. **An incremental total lagrangian formulation for general anisotropic shell-type structures**. Blacksburg, Virginia: Virginia Tech, 1987.

LIMA JR., J. J. **Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas**. 1999. 209 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

MARINKOVIC, D.; KÖPPE, H.; GABBERT, U. Finite element development for generally shaped piezoelectric active laminates part I - linear approach. **FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanical Engineering**, v. 2, n. 1, p. 11-24, 2004.

MARINKOVIC, D.; KÖPPE, H.; GABBERT, U. Finite element development for generally shaped piezoelectric active laminates part II - geometrically nonlinear approach. **FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanical Engineering**, v. 3, n. 1, p. 1-16, 2005.

MEIROVITCH, L. **Dynamics and control of structures**. New York: John Wiley & Sons, 1990.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compostos e estruturas sanduíche**. Barueri: Manole, 2005.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric transducers for vibration control and damping**. London: Springer-Verlag, 2006.

MOHEIMANI, S. O. R.; HALIM, D.; FLEMING, A. J. **Spatial control of vibration: theory and experiments**. London: World Scientific, 2003.

MONNER, H. P. Smart materials for active noise and vibration reduction. In: NOVEM - NOISE AND VIBRATION: EMERGING METHODS, 2005, Saint-Raphael, França. **Anais...** Saint-Raphael, França: 2005, p. 1-17.

MOURA, M. F. S. F.; MORAIS, A. B.; MAGALHÃES, A. G. **Materiais compósitos**. Porto: Publindústria, 2005.

NING, H. H. Optimal number and placements of piezoelectric patch actuators in structural active vibration control. **Engineering Computations**, v. 21, n. 6, p. 651-665, 2004.

PIEFORT, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. 2001. 126 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique, 2001.

POTTER, J. E. Matrix quadratic solutions. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 14, n. 3, p. 496-501, 1966.

PREUMONT, A. **Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems**. Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2006.

PREUMONT, A.; SETO, K. **Active control of structures**. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

QUN, Z.; MU, L.; WENQI, K. Geometric non-linear analysis of space shell structures using generalized conforming flat shell elements – for space shell structures. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 10, p. 941-957, oct. 1998.

ROY, T.; CHAKRABORTY, D. Optimal vibration control of smart fiber reinforced composite shell structures using improved genetic algorithm. **Journal of Sound and Vibration**, v. 319, n. 1-2, p. 15-40, jan. 2009.

ROY, T.; CHAKRABORTY, D. GA-LQR based optimal vibration control of smart FRP composite structures with bonded PZT patches. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 28, n. 11, p. 1383-1404, june 2009.

SAAD, Y. **Iterative methods for sparse linear systems**. 2nd ed. Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

SZE, K. Y.; YAO, L. Q. Modelling smart structures with segmented piezoelectric sensors and actuators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 235, n. 3, p. 495-520, 17 aug. 2000.

TEIXEIRA, P. R. F.. **Simulação numérica da integração de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método dos elementos finitos**. 2001. 237 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

TO, C. W. S.; WANG, B. Hybrid strain based geometrically nonlinear laminated composite triangular shell finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 33, n. 2, p. 83-124, sept. 1999.

WADA, B. K.; FANSON, J. L.; CRAWLEY, E. F. Adaptive structures. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 1, n. 2, p. 157-174, apr. 1990.

WANG, Q.; WANG, C. A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 242, n. 3, p. 507-518, may 2001.

YANG Y.-B.; SHIEH, M.-S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

YEOM, C. H.; LEE, S. W. An assumed strain finite element model for large deflection composite shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, n. 8, p. 1749-1768, aug. 1989.

YI, S.; LING, S. F.; YING, M. Large deformation finite element analysis of composite structures integrated with piezoelectric sensors and actuators. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 35, n. 1, p. 1-15, apr. 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C. **Finite element method: solid mechanics**. 5th ed. Oxford, U. K.: Butterworth-Heinemann, 2000. v. 2.

APÊNDICE A – Método da matriz de transição de estado

Pode ser demonstrado que a solução da Equação (5.8) é

$$\{x(t)\} = e^{[A]t} \{x(0)\} + \int_0^t e^{[A](t-\tau)} [B_u] \{u(\tau)\} d\tau, \quad (\text{A.1})$$

sendo que $e^{[A]t}$ pode ser determinado pela expansão em série de Taylor

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{[A]^2 t^2}{2!} + \frac{[A]^3 t^3}{3!} + \dots, \quad (\text{A.2})$$

ou ainda a partir da Equação (5.18),

$$e^{[A]t} = [U]^{-1} e^{[A]t} [U], \quad (\text{A.3})$$

onde

$$e^{[A]t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Assumindo que a solução $\{x(t)\}$ é do tipo

$$\{x(t)\} = [\Phi(t, \tau)] \{x(\tau)\}, \quad (\text{A.5})$$

onde $[\Theta(t, \tau)]$ é a matriz de transição de estado que relaciona as variáveis de estado em diferentes instantes de modo que $\{x(t)\} > \{x(\tau)\}$ para $t > \tau$, e substituindo-a na Equação (5.11), tem-se

$$[\dot{\Theta}(t, \tau)] = [A][\Theta(t, \tau)], \quad (\text{A.6})$$

com condição inicial

$$\{x(\tau)\} = [\Theta(\tau, \tau)] \{x(\tau)\} \Rightarrow [\Theta(\tau, \tau)] = [I]. \quad (\text{A.7})$$

Se a matriz $[A]$ é constante, então

$$[\Theta(t, \tau)] = e^{[A](t-\tau)}, \quad (\text{A.8})$$

e a Equação (A.1) fica

$$\{x(t)\} = [\Theta(t, \tau)]\{x(\tau)\} + \int_{\tau}^t [\Theta(t, \xi)][B_u]\{u(\xi)\} d\xi, \quad (\text{A.9})$$

“A *matriz de transição de estado* é uma ferramenta útil para compreender um sistema linear de primeira ordem. Ela também representa a propagação da condição inicial que pode ser a perturbação devida a um distúrbio externo” (KWON; BANG, 2000, p. 447, grifo do autor, tradução nossa).

Para resolver numericamente a Equação (A.9) uma opção é utilizar o método retentor de amostras de ordem zero (*zero order hold*), em que a variável de controle é considerada constante durante um intervalo de tempo ou período de amostragem T :

$$kT < t < (k+1)T \Rightarrow u(t) = u(k) = \text{constante}, \quad (\text{A.10})$$

onde $u(k)$ é a magnitude ou amplitude do sinal de controle entre os passos k e $(k+1)$, tal como ilustrado na Figura 86.

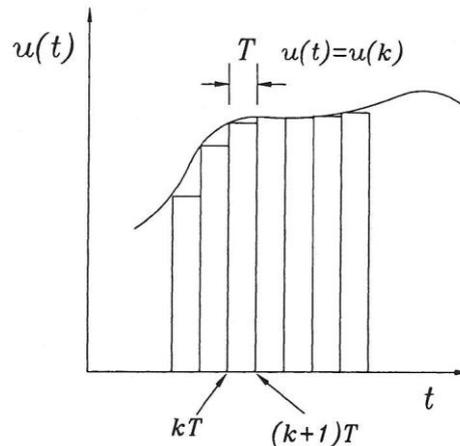


Figura 86: representação gráfica do método retentor de amostras de ordem zero (KWON; BANG, 2000)

Se a resposta é conhecida no passo k , para o passo $(k+1)$ deve ser empregada a Equação (A.9):

$$\{x((k+1)T)\} = [\Theta((k+1)T, kT)]\{x(kT)\} + \int_0^T [\Theta(\xi, 0)][B_u]\{u(k)\} d\xi. \quad (\text{A.11})$$

A integral da Equação (A.11) pode ser escrita como

$$\int_0^T [\Theta(\xi, 0)] [B_u] \{u(k)\} d\xi = [A]^{-1} [e^{[A]T} - [I]] \{u(k)\}; \quad (\text{A.12})$$

além disso,

$$[\Theta((k+1)T, kT)] = e^{[A]T}, \quad (\text{A.13})$$

portanto, a Equação (A.11) fica

$$\{x((k+1)T)\} = e^{[A]T} \{x(kT)\} + [A]^{-1} [e^{[A]T} - [I]] [B_u] \{u(k)\}, \quad (\text{A.14})$$

ou

$$\{x(k+1)\} = e^{[A]T} \{x(k)\} + [A]^{-1} [e^{[A]T} - [I]] [B_u] \{u(k)\} = [II] \{x(k)\} + [I] \{u(k)\}, \quad (\text{A.15})$$

onde foi feita a notação simplificada $(k+1)T \equiv k+1$ e $kT \equiv k$.

Chega-se assim a uma relação de recorrência para a determinação da resposta temporal:

$$\begin{aligned} \{x(1)\} &= [II] \{x(0)\} + [I] \{u(0)\} \\ \{x(2)\} &= [II] \{x(1)\} + [I] \{u(1)\} = [II]^2 \{x(0)\} + [II][I] \{u(0)\} + [I] \{u(1)\} \\ \{x(3)\} &= [II]^3 \{x(0)\} + [II]^2 [I] \{u(0)\} + [II][I] \{u(1)\} + [I] \{u(2)\} \\ &\vdots \\ \{x(n)\} &= [II]^n \{x(0)\} + \sum_{j=0}^{n-1} [II]^j [I] \{u(n-1-j)\}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

com

$$[II] = e^{[A]T} \text{ e } [I] = [A]^{-1} [e^{[A]T} - [I]] [B_u] = [A]^{-1} [[II] - [I]] [B_u]. \quad (\text{A.17})$$

Melhores resultados são obtidos quando se emprega pequenos intervalos de tempos (KWON; BANG, 2000); portanto, juntamente como o fato de que não é necessário resolver um sistema de equações a cada intervalo de tempo, este método apresenta características típicas de esquemas explícitos de discretização temporal (BATHE, 1996).

APÊNDICE B – Fatores úteis de conversão de unidades

Devido ao fato de ser comum encontrar-se na bibliografia exemplos e aplicações em unidades inglesas, foi elaborada uma lista de fatores de conversão de unidades úteis, apresentada na Tabela 16.

Tabela 16: fatores de conversão de unidades

Grandeza	Unidade	Equivalência no S.I.
Força	1 kip = 1000 lb	4,448 kN
Massa	1 slug = 32,17 lb · s ²	14,59 kg
Massa específica	$1 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} = 1 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}^3}$	$515,24 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
	$1 \frac{\text{slug}}{\text{in}^3} = 1 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{in}^3}$	$10,684 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Momento de uma força	1 lb · ft	1,356 N · m
Pressão	1 ksi = 1000 psi	6,895 MPa