

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**A Base Dinâmica na
Existência de Autovalores
Duplos no Modelo de
Timoshenko para uma Viga
Uniforme Livre-Livre**

por

Eliane Bihuna

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, 21 de março de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Bihuna, Eliane

A Base Dinâmica na Existência de Autovalores Duplos no Modelo de Timoshenko para uma Viga Uniforme Livre-Livre / Eliane Bihuna.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

78 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.

Orientador: Claeysen, Julio Cesar Ruiz

Dissertação:

A Base Dinâmica na Existência de Autovalores Duplos no Modelo de Timoshenko para uma Viga Uniforme Livre-Livre

por

Eliane Bihuna

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Elba Bravo Assenjo
UNASP

Prof^a. Dr^a. Liliane Basso Barichello
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
21 de março de 2005.

Prof^a. Dr^a. Maria Cristina Varriale
Coordenador

*Aos meus pais,
Antonio e Amélia,
e às minhas irmãs,
Maria Paula e Andréia.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, por se fazer sempre presente na minha vida.

Ao Prof. Julio pela orientação.

À Sanzara pela paciência.

Aos professores, de modo especial, a Prof. Tereza e ao Prof. Leonardo, aos quais tenho grande admiração.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pela oportunidade concedida.

À minha família que sempre me deu apoio, carinho e compreensão.

Aos amigos, que no Paraná deixei, e aos que aqui encontrei, pessoas maravilhosas que me acompanharam durante toda essa caminhada. Cada um faz parte dessa conquista, pois sempre me deram apoio e incentivo, além da amizade sincera.

À todos que direta ou indiretamente me ajudaram, fica o seguinte pensamento:

“Cada pessoa que passa em nossa vida, passa sózinha, é porque nenhuma substitui outra. Cada pessoa que passa em nossa vida passa sózinha, e não nos deixa só, porque deixa um pouco de si e leva um pouquinho de nós. Essa é a mais bela responsabilidade da vida e a prova de que as pessoas não se encontram por acaso.” (Charles Chaplin).

Sumário

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELO DE TIMOSHENKO	5
2.1 Formulação Newtoniana	5
2.2 Formulação Hamiltoniana	8
2.3 Formulação Matricial	10
2.4 A Equação de Timoshenko	11
2.4.1 Forma Evolutiva	14
2.5 Condições de Contorno	14
2.5.1 Derivação das Condições de Contorno Clássicas pelo Método de Newton	17
2.6 Exemplos de Condições de Contorno Não-Clássicas	18
3 VIBRAÇÕES MODAIS	21
3.1 Resposta Dinâmica	23
3.1.1 O Caso de Raízes Simples	29
3.2 Equação Característica	30
3.3 Cálculo de h na Forma Adimensional	32
3.3.1 Cálculo de $h(\xi)$ com Raízes do Polinômio Característico	33
3.3.1.1 Se $\omega < \omega_c$	35
3.3.1.2 Se $\omega > \omega_c$	36
3.3.1.3 Se $\omega = \omega_c$	37

4	VIGA LIVRE-LIVRE	38
4.1	Introdução	38
4.2	Formulação Espectral	39
4.3	Condição Necessária e Suficiente para a Existência de Autovalores Duplos	43
4.4	Formulação Dinâmica Matricial	46
4.4.1	Cálculo da Equação Característica	50
4.4.1.1	Para $\omega < \omega_c$	51
4.4.1.2	Para $\omega > \omega_c$	52
4.4.1.3	Para $\omega = \omega_c$	52
4.4.2	Prova do Teorema com uso da Base Dinâmica	53
4.5	Exemplo de como Encontrar Autovalores Duplos	56
5	CONCLUSÕES	75
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77

Lista de Figuras

Figura 2.1	Efeitos de cisalhamento e inércia rotacional. (a) Cargas sobre um elemento; (b) Deslocamento de um elemento.	6
Figura 2.2	Condições de contorno clássicas: (a) livre; (b) apoiada; (c) deslizando; (d) fixa	16
Figura 2.3	Viga uniforme com condições de contorno não-clássicas	18
Figura 2.4	Viga uniforme com condições de contorno não-clássicas	19
Figura 4.1	Secção transversal da viga.	56
Figura 4.2	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$	60
Figura 4.3	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$	61
Figura 4.4	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$	62
Figura 4.5	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 2$ e $k_2 = 2$	63
Figura 4.6	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 5$ e $k_2 = 11$	64
Figura 4.7	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 7$ e $k_2 = 9$	65
Figura 4.8	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$	67
Figura 4.9	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$	68
Figura 4.10	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$	69
Figura 4.11	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 2$ e $k_2 = 2$	70
Figura 4.12	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 5$ e $k_2 = 11$	71
Figura 4.13	Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 7$ e $k_2 = 9$	72

Figura 4.14 Solução dinâmica para: (a) $\omega < \omega_c$; (a) $\omega = \omega_c$; (c) $\omega > \omega_c$; . . .	73
Figura 4.15 Solução dinâmica para $\omega > \omega_c$;	74
Figura 4.16 Solução dinâmica usando expansão em série de Taylor para $\omega > \omega_c$;	74

Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Viga com espessura $l = \frac{\alpha}{50}$ e diâmetro $\frac{d}{L} \approx 0.1505$ para $\mu = 5$. .	59
Tabela 4.2	Viga com espessura $l = \frac{\alpha}{50}$ e diâmetro $\frac{d}{L} \approx 0.1505$ para $\mu = \frac{81}{49} + \frac{8}{49}\sqrt{65}$	66

LISTA DE SÍMBOLOS

m	massa do elemento de viga
EI	rigidez flexural
V, u	deslocamento lateral
Z	componente deslocamento devido a curvatura
t	tempo
x	posição longitudinal
dx	elemento da secção transversal
Q	cisalhamento
M	momento
$k'GA$	rigidez de cisalhamento
ψ, Ψ	rotação
\tilde{f}, F	cargas normais
f	força externa
ρ	densidade
I	inércia
L	comprimento
A	área da secção transversal
k'	coeficiente de cisalhamento
W	trabalho
L	lagrangeano
ω	frequência
ω_c	frequência crítica

h	solução da equação analítica
h_k	solução da equação de diferenças
\mathbf{h}	resposta-impulso matricial
Δ	equação característica
P	polinômio característico
\mathcal{L}	transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	transformada inversa de Laplace

RESUMO

Considerando uma viga uniforme do tipo Timoshenko com condições de contorno livre-livre, Geist e McLaughlin em [8] apresentam uma condição necessária e suficiente que garante a existência de frequências naturais duplas. Esta condição foi obtida usando a formulação espectral, método clássico encontrado na literatura, para as equações de quarta ordem desacopladas do modelo de Timoshenko. O método clássico requer a obtenção de um vetor constante com oito componentes para que a solução deste modelo seja conhecida. Segundo Claeysen [2], [3], [4], [5], [6], a solução do modelo de Timoshenko pode ser obtida usando a base dinâmica gerada por uma resposta impulso-matricial fundamental. Este método permite encontrar a solução do modelo de Timoshenko usando as equações de segunda ordem acopladas. Além disso, para que a solução seja conhecida é necessário obter um vetor constante com quatro componentes. O objetivo deste trabalho é estudar a condição necessária e suficiente que garante a existência de frequências naturais duplas, apresentada por Geist e McLaughlin, para uma viga uniforme do tipo timoshenko com condições de contorno livre-livre e verificar se é possível obter esta mesma condição quando é utilizada a base dinâmica para obter a solução deste modelo.

ABSTRACT

Considering a uniform beam of the Timoshenko type with free-free boundary conditions, Geist and McLaughlin in [8] present a necessary and sufficient condition that guarantees the existence of double natural frequencies. This condition was gotten by using the spectral formulation, a classic method found in literature, for the equations of fourth order that are obtained by decoupling the Timoshenko model. The classic method requires the obtention of a constant vector with eight components so that the solution of this model is known. According to Claeysen [2], [3], [4], [5], [6], the solution of the Timoshenko model of Timoshenko can be obtained by using the dynamical basis generated by a fundamental matrix impulse response. This method allows to find the solution of the Timoshenko model by using the coupled equations of second order. Moreover, in order that the solution be known is necessary to get a constant vector with four components. The objective of this work is to study the necessary and sufficient condition that guarantees the existence of double natural frequencies, presented for Geist and McLaughlin, for a uniform beam of the Timoshenko type with free-free boundary conditions and to verify if it is possible to obtain this same condition when the dynamical basis is employed to get the solution of this model.

1 INTRODUÇÃO

Na indústria aeronáutica existe interesse pelos efeitos da flexibilidade de cisalhamento e da inércia rotacional no cálculo das frequências naturais nas vibrações laterais de vigas. É necessário incluir altas frequências naturais no estudo de vibrações em aeronaves e componentes aeronáuticos como asas, fuselagem e turbinas. Isto é impulsionado pelas tendências atuais no desenho com alta velocidade, materiais compostos e dimensões geométricas.

A teoria clássica de Euler-Bernoulli para vigas considera apenas os efeitos de deslocamento lateral e momento. Por volta de 1920, Timoshenko desenvolveu um modelo matemático que descreve as vibrações transversais em vigas. Este modelo adiciona os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional ao modelo de Euler-Bernoulli. Um dos primeiros trabalhos que fornece um tratamento teórico completo com resultados experimentais é dado por Traill-Nash e Collar em [16]. Han, Benaroya e Wei [10] discutem as quatro teorias clássicas para vigas de uso na engenharia: *Euler-Bernoulli*, *Rayleigh*, *Shear* e *Timoshenko*. Na sua discussão sobre o segundo espectro da equação de Timoshenko, concluem que os estudos prévios na literatura tem desprezado o fato que a forma dos modos deve incluir tanto o deslocamento quanto o ângulo de rotação. Pois, nesta forma pode ser mostrado que para duas frequências naturais distintas do modelo de Timoshenko correspondem autofunções diferentes. Mais ainda, que o momento fletor e o cisalhamento estão em fase no primeiro espectro e fora de fase no segundo.

Na literatura, na maioria das vezes, o estudo espectral, que procura soluções oscilatórias não-nulas do modelo de Timoshenko, tem sido realizado considerando as equações homogêneas de quarta ordem que decorrem ao desacoplar o sistema de duas equações de segunda ordem que governam o movimento no modelo de Timoshenko. Além disso, para obter a equação de frequência e as autofunções ou modos associados é utilizada a formulação espectral. Esta última fundamenta-se no

uso da base de soluções de Euler, aqui chamada “base clássica”, cuja forma depende das raízes do polinômio característico associado com a equação de quarta ordem.

O estado de uma viga é conhecido quando são conhecidos o deslocamento transversal, rotação total ou giro, momento e cisalhamento. As condições de contorno clássicas nos extremos de uma viga podem ser geométricas ou naturais; e se classificam como *fixa*, quando deslocamento e giro são nulos; *apoiado*, quando deslocamento e momento não são considerados; *livre*, quando momento e cisalhamento são nulos; e *deslizante*, quando cisalhamento e giro não são considerados.

As frequências experimentais de excitação para as quais a resposta é maximizada são chamadas *frequências naturais*. Para frequências suficientemente altas, Traill-Nash e Collar em [16] levantaram a possibilidade da existência de um novo espectro, quando são considerados os efeitos flexibilidade de cisalhamento e inércia rotatória, a partir de uma certa frequência denominada frequência crítica. Para este mesmo tipo de frequências, Geist e McLaughlin em [8] estudaram a existência de autovalores duplos numa viga com condições livres nos extremos, isto é, que para uma mesma frequência estejam associadas duas autofunções linearmente independentes. Para caracterizar estes autovalores é formulado um sistema de quatro equações algébricas lineares e oito incógnitas que decorrem de substituições nas condições de contorno. Com o uso desta formulação espectral obtiveram uma condição necessária e suficiente que garante a existência de um autovalor duplo para uma viga uniforme com condições de contorno do tipo livre-livre.

Neste trabalho, o estudo espectral de uma viga com extremidades livres descrita pelo modelo de Timoshenko é realizado de maneira direta segundo Claeysen [2], [3], [4], [5], [6]. As autofunções são escritas em termos de seus valores iniciais referentes a uma base dinâmica que é gerada por uma resposta matricial fundamental e permite abordar o problema sem a necessidade de desacoplá-lo. Com isto a dimensão do sistema algébrico linear que resulta das condições de contorno é quatro. Por outro lado, a não-singularidade de um dos coeficientes das condições de contorno, escritas na forma matricial, permite diminuir a dimensão do sistema para

dois. Assim, o estudo espectral depende essencialmente do comportamento de uma solução característica associada a base dinâmica que aparece no sistema algébrico linear.

Este trabalho está estruturado como descrito a abaixo.

No capítulo 2 é o equacionamento do modelo de Timoshenko através de dois métodos: *balanceamento de forças*, também chamado de *método de Newton*, e o *princípio de Hamilton*. O método do balanceamento de forças utiliza a segunda lei de Newton para equacionar o equilíbrio das forças que atuam sobre cada elemento de viga de uma secção transversal infinitesimal. O princípio de Hamilton primeiro define uma integral da equação de Lagrange e, em seguida, considera o estado estacionário desta integral em uma dada perturbação. O modelo de Timoshenko pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem acopladas, ou ainda, por um sistema desacoplado de quarta ordem. No final deste capítulo, apresentamos as condições de contorno clássicas obtidas naturalmente durante o processo da formulação hamiltoniana e dois exemplos que envolvem condições de contorno não-clássicas.

No capítulo 3 é estudado o modelo de Timoshenko na forma matricial. Antes de encontrar a solução deste modelo é feita uma revisão bibliográfica da teoria utilizada por Claeysen na obtenção de uma fórmula fechada chamada de *solução dinâmica* do sistema. Tal abordagem generaliza a forma clássica de aplicação do método espectral encontrada na literatura. Além disso, distingue-se por usa as condições de contorno apenas na obtenção da equação característica.

O capítulo 4 centra seu estudo em uma viga uniforme com condições de contorno do tipo livre-livre. Inicialmente obtém-se a solução usando a formulação espectral. Em seguida, é apresentado um resultado obtido por Geist e McLaughlin, em [8], de uma condição necessária e suficiente que garante a existência de autovalores duplos. A equação característica é calculada tanto para o método espectral como com uso da base dinâmica, sendo que para este último método foi levado em con-

siderção a frequência crítica. Aqui, o resultado apresentado por Geist e McLaughlin foi derivado com o uso da base dinâmica. Para encerrar o capítulo os autovalores duplos de uma viga com condições de contorno livre-livre são obtidos aplicando o resultado de Geist e McLaughlin.

Para finalizar, são apresentadas algumas conclusões e comentários deste estudo.

2 MODELO DE TIMOSHENKO

A teoria clássica de Euler-Bernoulli para o estudo de vigas considera apenas os efeitos do deslocamento lateral e o momento [10]. A equação do movimento de Euler-Bernoulli é dada por

$$m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = 0 \quad (2.1)$$

onde m é a massa do elemento da viga, EI a rigidez flexural (ambas consideradas constantes), $V(t, x)$ o deslocamento lateral da viga, t o tempo e x a posição longitudinal.

O modelo de Timoshenko adiciona ao modelo de Euler-Bernoulli os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional. A seguir, serão deduzidas as equações de movimento deste modelo, utilizando-se dois métodos: *balanceamento de forças* ou *formulação newtoniana* [16] e *princípio de Hamilton* [10].

Neste capítulo, além da modelagem matemática, veremos as condições de contornos clássicas, necessárias para resolver um problema de equações diferenciais, e a formulação matricial do modelo de Timoshenko. Para finalizar, tem-se dois exemplos de condições de contorno não-clássicas.

2.1 Formulação Newtoniana

Seja uma viga uniforme, inicialmente plana na direção longitudinal x . Considere um elemento dx da secção transversal, como mostra a Figura 2.1, onde $V(t, x)$ é o deslocamento lateral total da secção, $Z(t, x)$ a componente desse deslocamento devido a curvatura, Q a força de cisalhamento, M o momento, $k'GA$ a rigidez de cisalhamento e $Q/k'GA$ o ângulo de cisalhamento. Adicionando a inclinação devido a curvatura $\partial Z/\partial x = \psi$ ao ângulo de cisalhamento, tem-se o ângulo total

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \psi + \frac{Q}{k'GA}. \quad (2.2)$$

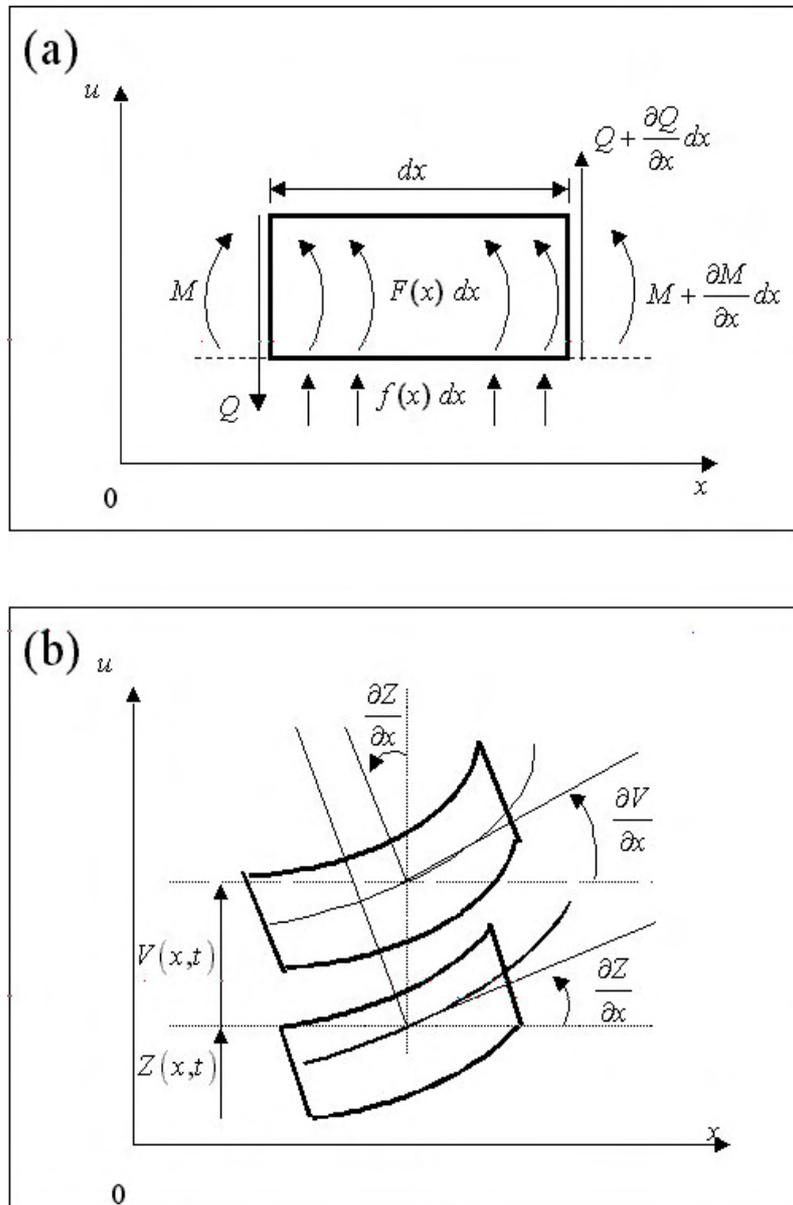


Figura 2.1: Efeitos de cisalhamento e inércia rotacional. (a) Cargas sobre um elemento; (b) Deslocamento de um elemento.

Se EI é a rigidez flexural, a fórmula da curvatura de Euler-Bernoulli é

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{M}{EI}. \quad (2.3)$$

Suponha que o cisalhamento e o momento surgem de cargas normais $\tilde{f}(t, x)$ e $F(t, x)$ aplicadas, respectivamente. As considerações de equilíbrio sobre um

elemento resultam

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{f} = 0, \quad (2.4)$$

$$Q + \frac{\partial M}{\partial x} + F = 0. \quad (2.5)$$

Derivando com respeito a x a equação (2.2) e usando (2.4) tem-se

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{k'GA} \tilde{f} = 0. \quad (2.6)$$

Usando (2.2) e (2.3) em (2.5) obtém-se

$$k'GA \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + F = 0. \quad (2.7)$$

Quando a força aplicada e a distribuição do momento são inversamente proporcionais a massa de aceleração, então

$$\tilde{f}(t, x) = -\rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + f(t, x), \quad (2.8)$$

$$F(t, x) = -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) em (2.6) decorre

$$\rho A \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial t^2} - k'GA \left(\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right) = f(t, x). \quad (2.10)$$

Usando (2.9) em (2.7) obtemos que

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - k'GA \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = 0. \quad (2.11)$$

As equações que governam o movimento do modelo de Timoshenko são dadas por (2.10) e (2.11). Estas equações estão sujeitas a condições iniciais

$$V(0, x) = v_o(x) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0, x) = v_1(x) \quad (2.13)$$

e a condições de contorno nos extremos da viga

$$B_1 V(t, 0) = b_1(t), \quad (2.14)$$

$$B_2 V(t, 0) = b_2(t). \quad (2.15)$$

Uma discussão sobre a natureza destas condições B_1 e B_2 será dada após a derivação do modelo de Timoshenko utilizando o princípio de Hamilton.

2.2 Formulação Hamiltoniana

A energia potencial devido ao momento E_{pm} de viga uniforme devido a curvatura é dada por

$$E_{pm} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.16)$$

onde $\psi(t, x)$ é o ângulo de rotação da secção transversal, E módulo de elasticidade, I inércia rotacional e L o comprimento da viga.

A energia potencial devido ao cisalhamento E_{pc} é dada por

$$E_{pc} = \frac{1}{2} \int_0^L k' GA \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right)^2 dx, \quad (2.17)$$

onde k' é o coeficiente de cisalhamento.

A energia cinética devido ao deslocamento lateral da secção transversal E_{cd} é dada por

$$E_{cd} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (2.18)$$

onde A é a área da secção transversal.

A energia cinética devido a inércia rotacional da secção transversal E_{cr} é dada por

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial t \partial x} \right)^2 dx. \quad (2.19)$$

O trabalho W de uma força não-conservativa $f(t, x)$ por unidade de comprimento é dada por

$$W = \int_0^L f(t, x) V(t, x) dx. \quad (2.20)$$

O lagrangeano inclui os efeitos de momento (2.16), deslocamento lateral (2.18), inércia rotacional (2.19) e a distorção do cisalhamento (2.17). Assuma que não existe energia cinética associado com a distorção de cisalhamento, mas somente com a rotação devido a curvatura. A equação (2.19) pode ser modificada para incluir somente o ângulo de rotação devido a curvatura, ou seja, substituimos $\frac{\partial V}{\partial x}$ por ψ .

Combinando-se a equação modificada de (2.19) com as equações (2.16), (2.17), (2.18) e (2.20), o lagrangeano é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. - k' GA \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right)^2 - f(t, x) V(t, x) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Defina-se

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} dt. \quad (2.22)$$

O princípio de Hamilton estabelece que a integral J deve assumir um valor estacionário quando V e ψ correspondem ao movimento que realiza o sistema entre os tempos t_1 e t_2 . Assim, dada uma perturbação $V + \varepsilon \tilde{V}$, $\psi + \varepsilon \tilde{\psi}$, deve-se ter que

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} (V + \varepsilon \tilde{V}, \psi + \varepsilon \tilde{\psi}) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0. \quad (2.23)$$

Substituindo (2.21) em (2.22) e ainda adicionando os incrementos $\varepsilon \tilde{V}$ e $\varepsilon \tilde{\psi}$ nas direções das variáveis V e ψ , respectivamente, segue que

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \left(\dot{V} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\dot{\psi} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\psi' + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. - k' GA \left(\left(V' + \varepsilon \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right) - (\psi + \varepsilon \tilde{\psi}) \right)^2 - f(V + \varepsilon \tilde{V}) \right] dx dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por $\dot{\cdot}$ denotamos a derivada no tempo e por $'$ a derivada no espaço.

Usando (2.23) em (2.24) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \dot{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \rho I \dot{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - EI \psi' \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \right. \\ \left. - k' GA (V' - \psi) \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} - \tilde{\psi} \right) - f \tilde{V} \right] dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho A \dot{V} \tilde{V}) &= \rho A \ddot{V} \tilde{V} + \rho A \dot{V} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{V}, \\ \frac{d}{dt}(\rho I \dot{\psi} \tilde{\psi}) &= \rho I \ddot{\psi} \tilde{\psi} + \rho I \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Usando (2.26) em (2.25) e integrando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}(-k'GA(V' - \psi)\tilde{V} - \psi'\tilde{\psi})\Big|_0^L + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-\rho A \ddot{V} + k'GA(\ddot{V} - \psi') - f \right) \tilde{V} dx + \\ \left(-\rho I \ddot{\psi} + k'GA(V' - \psi) + EI\psi'' \right) \tilde{\psi} \Big|_0^L dt = 0\end{aligned}\quad (2.27)$$

Para que a igualdade seja satisfeita é necessário que o integrando de (2.27) seja nulo. Como \tilde{V} e $\tilde{\psi}$ são arbitrários, segue que

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial t^2} - k'GA \left(\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right) &= f(t, x), \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - k'GA \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) &= 0.\end{aligned}$$

Note que estas são as equações de movimento do modelo de Timoshenko são as mesmas equações de (2.10) e (2.11). Observe que com o princípio hamiltoniano as condições de contorno surgem naturalmente na integração por partes. Assim sendo, as condições de contorno são dadas por

$$-k'GA \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \psi \right) \tilde{V} \Big|_0^L = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \tilde{\psi} \Big|_0^L = 0. \quad (2.28)$$

2.3 Formulação Matricial

O modelo de Timoshenko pode ser escrito numa forma evolutiva compacta de maneira análoga a de um oscilador harmônico, introduzindo como variável o vetor

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} V(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Usando (2.29), o sistema de equações dado pelas equações (2.10) e (2.11) pode ser reescrito como uma equação evolutiva de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (2.30)$$

em que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -k'GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & k'GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -k'GA \frac{\partial}{\partial x} & k'GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, x) = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Tem-se que \mathbf{M} é descrito por uma matriz real constante não-singular 2×2 e \mathbf{K} é uma matriz cujas componentes são operadores diferenciais espaciais de segunda ordem com coeficientes constantes, pois estamos supondo que a viga é uniforme. Aqui \mathbf{v} e \mathbf{F} são vetores 2×1 .

Na forma algébrica, o modelo de Timoshenko pode ser escrito como

$$L(D)\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (2.32)$$

onde o operador L é definido como sendo

$$L(D) = \begin{bmatrix} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k'GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & k'GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -k'GA \frac{\partial}{\partial x} & \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k'GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Aqui as componentes de $L(D)$ são operadores que incluem derivação temporal ou espacial. O símbolo D simplesmente indica que existe derivação parcial no tempo ou no espaço.

2.4 A Equação de Timoshenko

Na literatura é comum referir-se a *equação de Timoshenko* como sendo uma equação evolutiva de quarta ordem no tempo para o deslocamento V ou para o giro ψ , a qual é obtida do modelo de Timoshenko a partir de (2.10) e (2.11), supondo coeficientes constantes. Porém, isto não é muito útil uma vez que o giro aparece nas condições de contorno. Mais informações podem ser obtidas em [9].

A obtenção é como segue. Derivando com respeito a x as equações (2.10) e (2.11) tem-se que

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - k' GA \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.34)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - k' GA \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.35)$$

Derivando com respeito a x as equações (2.34) e (2.35) vem

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - k' GA \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.36)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - k' GA \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.37)$$

Para eliminar $\partial^3 \psi / \partial x^3$ em (2.36) usa a equação (2.10) em (2.35). Assim, obtém-se que

$$\frac{\rho^2}{Ek'G} \frac{\partial^4 V}{\partial t^4} + \left[\frac{\rho A}{EI} - \left(\frac{\rho}{k'G} + \frac{\rho}{EI} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = f_1, \quad (2.38)$$

onde

$$f_1 = \frac{\rho}{k'GAE} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{EI} f - \frac{1}{k'GA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (2.39)$$

De maneira análoga, para eliminar $\partial^3 V / \partial x^3$ em (2.37) usa a equação (2.11) em (2.34). Sendo assim,

$$\frac{\rho^2}{Ek'G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \left[\frac{\rho A}{EI} - \left(\frac{\rho}{k'G} + \frac{\rho}{EI} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = f_2, \quad (2.40)$$

onde,

$$f_2 = \frac{1}{EI} \frac{\partial}{\partial x} f. \quad (2.41)$$

O processo anterior, para a obtenção da equação de Timoshenko de quarta ordem torna-se mais claro e geral, usando a identidade de Cramer em (2.32). Tem-se que

$$adj(\mathbf{L})\mathbf{L}\mathbf{v} = adj(\mathbf{L})\mathbf{F}$$

ou seja,

$$\det(\mathbf{L})\mathbf{v} = \text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{F}. \quad (2.42)$$

onde

$$\text{adj}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k'GA - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -k'GA \frac{\partial}{\partial x} \\ k'GA \frac{\partial}{\partial x} & \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k'GA - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix},$$

e

$$\det(\mathbf{L}) = k'GA EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \rho A (EI + k'GI) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \rho A \left(k'GA \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right).$$

Assim, por (2.32) tem-se que

$$k'GA EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - \rho A (EI + k'GI) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \rho A \left(k'GA \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 V}{\partial t^4} \right) = F_1,$$

$$k'GA EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \rho A (EI + k'GI) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \rho A \left(k'GA \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} \right) = F_2,$$

onde

$$F_1 = \rho I \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k'GA f - EI \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$F_2 = k'GA \frac{\partial f}{\partial x}.$$

As equações anteriores podem ser reescritas como

$$\frac{\rho^2}{Ek'G} \frac{\partial^4 V}{\partial t^4} + \left[\frac{\rho A}{EI} - \left(\frac{\rho}{k'G} + \frac{\rho}{EI} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = f_1$$

$$\frac{\rho^2}{Ek'G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \left[\frac{\rho A}{EI} - \left(\frac{\rho}{k'G} + \frac{\rho}{EI} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = f_2,$$

onde f_1 e f_2 foram definidos em (2.39) e (2.41).

Deve ser observado que na equação de Timoshenko para o giro aparece o termo f_2 , que envolve derivação da força externa f . Isto não é o caso com modelo de Timoshenko. Ou seja, um desacoplamento das equações do modelo forçado envolve uma modificação dos termos não-homogêneos. Para o modelo não-forçado não é necessário fazer tal modificação.

2.4.1 Forma Evolutiva

Com a introdução das constantes

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{\rho A}{k'AG} = \frac{\rho}{k'G}, \\ \beta^2 &= \frac{\rho A}{EI}, \\ \tau^2 &= \frac{\rho AI}{EIA} = \frac{\rho}{E},\end{aligned}\tag{2.43}$$

a equação de Timoshenko (2.38) escreve-se

$$\alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^4 V(t, x)}{\partial t^4} + \left(\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 V(t, x)}{\partial x^4} = f.\tag{2.44}$$

Definindo os operadores diferenciais espaciais

$$\begin{aligned}R &= \alpha^2 \tau^2 \mathbf{I}, \\ S &= \beta^2 \mathbf{I} - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ Q &= \frac{\partial^4}{\partial x^4},\end{aligned}$$

que atuam sobre funções que satisfazem as condições de contorno do problema e onde \mathbf{I} denota o operador identidade, tem-se a equação de Timoshenko na forma evolutiva

$$R \frac{\partial^4 V}{\partial t^4} + S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + QV = f_1,\tag{2.45}$$

onde f_1 é dado em (2.39).

2.5 Condições de Contorno

O estado de uma viga é conhecido se especificamos o deslocamento transversal V , a rotação total ou giro ψ , o momento M e o cisalhamento Q . No caso de uma viga de Euler-Bernoulli, em que não se considera o cisalhamento a rotação total vem a ser V_x . As condições de contorno nos extremos da viga são de dois

tipos: *essenciais* ou *geométricas* em que V ou ψ são conhecidos ou *cinemáticas* e *não-essenciais* ou *naturais* as quais devem satisfazer as forças internas resultantes M e Q e consideradas quando conhecidas a priori. Na Mecânica, os valores das variáveis principais V e ψ ou o valor das forças associadas M e Q podem ser especificados, porém não ambos.

Normalmente, se a derivada espacial de maior ordem sobre as variáveis principais que aparecem nas equações do movimento é um número par $2m$, então, as condições geométricas envolvem derivadas de ordem zero até $m - 1$ nas variáveis principais. Como o modelo de Timoshenko possui derivadas espaciais até ordem dois, é suposto, em geral, que somente a variável principal, constituída pelo deslocamento e o ângulo de rotação, é fornecida num extremo da viga [15]. As condições geométricas são ditas *homogêneas* quando

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = 0, \quad (2.46)$$

proíbem deslocamento ou giro. Condições dependentes do tempo podem ser impostas por grandes máquinas ou através de servomecanismos.

Quando dispositivos como massas ou osciladores, entre outros, são acoplados nos extremos da viga, as condições de contorno naturais podem ser dependentes do tempo. As forças internas devem equilibrar ou acoplar as forças externas. Devido a inércia ou mesmo amortecimento, as forças externas podem envolver derivadas com respeito do tempo. Por exemplo, se um oscilador harmônico é colocado no extremo $x = L$ da viga, então, a condição espacial de contorno equilibra-se com uma força que inclui aceleração inercial e rigidez elástica, isto é, uma segunda derivada no tempo.

As condições de contorno *básicas* ou *clássicas* são vigas com extremidades do tipo *fixa*, se o giro e o deslocamento são nulos; do tipo *apoiada*, quando o deslocamento e momento são nulos; *livre* em que o momento fletor e o cisalhamento são nulos; e *deslizante*, quando a rotação e o cisalhamento são nulos. Neste trabalho somente são consideradas condições clássicas e homogêneas.

Durante o processo da formulação hamiltoniana, das condições nos extremos da viga (2.28), obtém-se, também, os tipos enunciados acima

(i) *fixa (clamped)*: sem deslocamento nem giro

$$V = 0, \quad \psi = 0, \quad (2.47)$$

(ii) *apoiada (hinged)*: sem deslocamento nem momento

$$V = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.48)$$

(iii) *livre (free)*: sem cisalhamento nem momento

$$k'GA \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \psi \right) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.49)$$

(iv) *deslizante (sliding)*: sem cisalhamento nem giro

$$k'GA \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \psi = 0. \quad (2.50)$$

Na Figura 2.2, tem-se a representação esquemática de cada uma das condições de contorno clássicas.

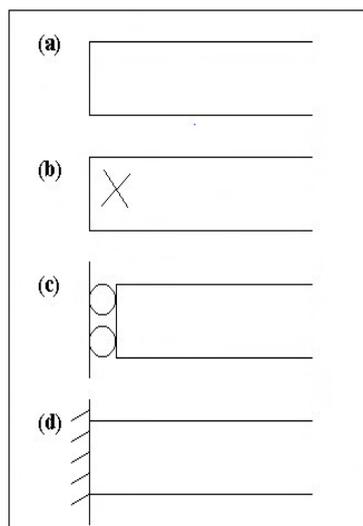


Figura 2.2: Condições de contorno clássicas: (a) livre; (b) apoiada; (c) deslizante; (d) fixa

2.5.1 Derivação das Condições de Contorno Clássicas pelo Método de Newton

Substituindo (2.3) em (2.6) e usando (2.8) considerando $f(t, x) = 0$, segue que

$$M = EI \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right). \quad (2.51)$$

Usando (2.9) e (2.2) em (2.5) tem-se que

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{Q}{k'GA} \right). \quad (2.52)$$

Derivando (2.51) com respeito a x e substituindo em (2.52) obtém-se que

$$\left(1 + \frac{\rho I}{k'GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Q = -EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \left(\frac{\rho EI}{k'G} + \rho I \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right). \quad (2.53)$$

Numa viga com extremidade fixa não há deslocamento nem giro. Então, considerando giro nulo em (2.2), obtemos uma equação para o cisalhamento e usando esta em (2.53) segue que

$$EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \left(k'GA - \frac{\rho EI}{k'G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (2.54)$$

Se uma viga tem extremidade apoiada, deslocamento e momento são nulos. Assim, em (2.51) obtém-se que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (2.55)$$

Quando a extremidade de uma viga é livre, cisalhamento e momento não são considerados. Considerando cisalhamento nulo em (2.53) resulta que

$$EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.56)$$

Supondo soluções oscilatórias do tipo $V(t, x) = e^{i\omega t} u(x)$, tem-se que, quando

(i) giro nulo ($\psi = 0$):

$$EI \frac{d^3 u}{dx^3} + \left(k'GA + \frac{\rho EI}{k'G} \omega^2 \right) \frac{du}{dx} = 0; \quad (2.57)$$

(ii) momento nulo ($M = 0$):

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\rho}{k'G}\omega^2u = 0; \quad (2.58)$$

(iii) cisalhamento nulo ($Q = 0$):

$$EI\frac{d^3u}{dx^3} + \rho I\left(1 + \frac{E}{k'G}\right)\omega^2\frac{du}{dx} = 0. \quad (2.59)$$

2.6 Exemplos de Condições de Contorno Não-Clássicas

Considere um cubo de massa m e lado com dimensão b soldado na extremidade de uma viga e uma mola de rigidez k é presa no cubo, como ilustrado na Figura 2.3.

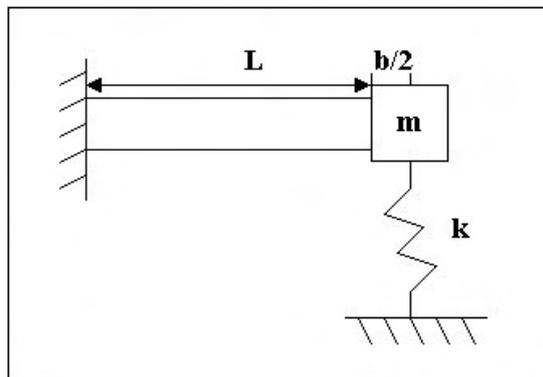


Figura 2.3: Viga uniforme com condições de contorno não-clássicas

As condições de contorno não-clássicas podem ser obtidas utilizando tanto a formulação newtoniana quanto a hamiltoniana. Ginsberg em [9], utilizando o método de Newton, obtém que as condições de contorno, incluindo os efeitos de translação e inércia rotacional, são dadas por

$$V(t, 0) = 0,$$

$$\psi(t, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
kGA \left(\frac{\partial}{\partial x} V - \psi \right) (t, L) + k \left(V + \frac{b}{2} \psi \right) (t, L) + m \left(\ddot{V} + \frac{b}{2} \ddot{\psi} \right) (t, L) &= 0, \\
EI \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, L) - kGA \frac{b}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} V - \psi \right) (t, L) + \frac{mb^2}{6} \ddot{\psi}(t, L) &= 0.
\end{aligned}$$

Note que essas condições de contorno contêm as variáveis de deslocamento e suas primeiras derivadas com respeito a x , enquanto que as condições de contorno clássicas envolvem $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$.

Neste próximo exemplo, massa, mola e oscilador também exercem forças e se acoplam na viga, como ilustrado na Figura 2.4. Esses efeitos são descritos em termos de energia cinética E_c e energia potencial E_p , respectivamente. Uma força transversal é associada com o movimento de translação de uma massa e um acoplamento é associado com a rotação. Além disso, a menos que a massa seja muito grande, os efeitos da inércia rotacional são desprezados. Como resultado, a massa atachada é tratada como partícula m localizada na posição x_m e movendo-se com velocidade $\dot{V}(t, x_m)$ em união com a viga. A energia cinética total que corresponde ao sistema é

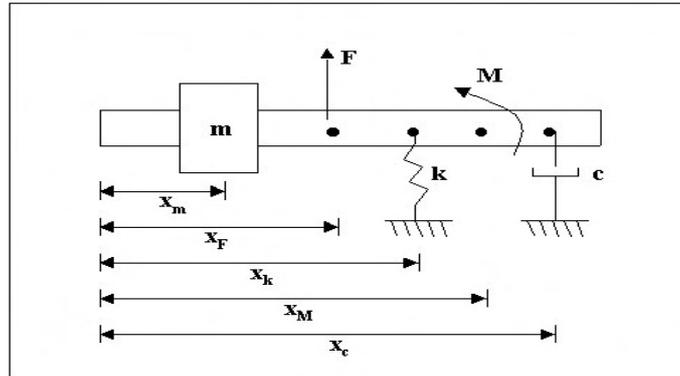


Figura 2.4: Viga uniforme com condições de contorno não-clássicas

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{V}^2 \rho A dx + \frac{1}{2} \sum m \dot{V}(t, x_m)^2. \quad (2.60)$$

Molas e amortecedores podem sofrer torsão ou extensão. A energia potencial total é obtida pela adição da energia de tensão armazenada em cada mola

é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum k V(t, x_k)^2 + \frac{1}{2} \sum k \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x_k) \right)^2. \quad (2.61)$$

As condições de contorno não-clássicas para este sistema podem ser obtidas usando o método de Hamilton, já que são conhecidas as energias potencial e cinética. Note que as equações que governam o movimento deste exemplo não correspondem ao modelo de Timoshenko, pois não está considerando os efeitos de inércia rotacional e cisalhamento.

3 VIBRAÇÕES MODAIS

Neste capítulo é considerada a forma matricial do modelo de Timoshenko e soluções oscilatórias são supostas. É feita uma revisão bibliográfica da teoria utilizada por Claeysen [2], [3], [4], [5], [6], para obtenção de uma fórmula fechada, chamada de *resposta impulso-matricial fundamental*, que gera a solução dinâmica do problema. No final deste capítulo, é introduzida a adimensionalização sugerida por Huang em [11] para obter a solução do modelo de Timoshenko. Para tanto, a frequência crítica foi considerada.

Considere o modelo de Timoshenko na forma matricial (2.30). Soluções do tipo oscilatório são da forma

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{i\omega t} \Phi(x), \quad (3.1)$$

onde

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (2.30), considerando \mathbf{F} nula, obtemos que

$$-M\omega^2\Phi(x) + K\Phi(x) = 0 \quad (3.3)$$

com M e K definidos em (2.31). Esta equação pode ser reescrita como uma equação diferencial matricial de segunda ordem com respeito a x , isto é,

$$\mathbb{M}\Phi''(x) + \mathbb{C}\Phi'(x) + \mathbb{K}\Phi(x) = 0, \quad (3.4)$$

com

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -k'GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & k'GA \\ -k'GA & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -\omega^2\rho A & 0 \\ 0 & k'GA - \omega^2\rho I \end{bmatrix},$$

onde \mathbb{M} , \mathbb{C} e \mathbb{K} são chamadas matrizes de *massa* ou *inércia*, *amortecimento* e *rigidez*, respectivamente. Em [1] e [10] mostra-se que este problema é autoadjunto.

Junto com esta equação são consideradas condições de contorno. As condições clássicas homogêneas,

(i) *fixa*

$$u = 0, \quad \Psi = 0. \quad (3.6)$$

(ii) *apoiada*

$$u = 0, \quad \frac{d\Psi}{dx} = 0, \quad (3.7)$$

(iii) *livre*

$$\frac{du}{dx} - \Psi = 0, \quad \frac{d\Psi}{dx} = 0, \quad (3.8)$$

(iv) *deslizante*

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \Psi = 0. \quad (3.9)$$

Estas condições podem ser consideradas de forma genérica para a amplitude $\Phi(x)$. Para tanto, nos extremos da viga $x = 0$ e $x = L$, assume-se que

$$B_1\Phi = \mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\Phi'(0) = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

$$B_2\Phi = \mathcal{C}\Phi(L) + \mathcal{D}\Phi'(L) = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

onde \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são matrizes constantes 2x2.

Por exemplo, para uma viga fixa-livre tem-se

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1 Resposta Dinâmica

Para calcular a equação característica é necessário calcular a solução matricial fundamental $\mathbf{h}(x)$. Isto pode ser feito através de métodos espectrais, não-espectrais e numéricos.

Formalmente, a solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} M\mathbf{y}''(x) + C\mathbf{y}'(x) + K\mathbf{y}(x) &= f(x), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}'(0) &= \mathbf{y}_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde M , C e K são matrizes arbitrárias $n \times n$ e \mathbf{y}_0 , \mathbf{y}_1 valores iniciais arbitrários. A solução pode ser obtida pelo método operacional da transformada de Laplace. Considerando $\mathbf{Y}(s)$ como sendo a transformada da função $\mathbf{y}(x)$, obtém-se

$$M(s^2\mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}'(0) - s\mathbf{y}(0)) + C(s\mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}(0)) + K\mathbf{Y}(s) = F(s).$$

Através de simplificações, decorre a equação operacional

$$\Delta(s)\mathbf{Y}(s) = M\mathbf{y}'(0) + (sM + C)\mathbf{y}(0) + F(s), \quad (3.13)$$

onde

$$\Delta(s) = s^2M + sC + K,$$

e $\mathbf{Y}(s)$, $F(s)$ são as transformadas de Laplace de $\mathbf{y}(x)$ e de $f(x)$, respectivamente.

Defina-se a *solução matricial fundamental* ou *resposta-impulso matricial*, ou a *solução dinâmica*, $\mathbf{h}(x)$ como sendo a solução do problema

$$\begin{aligned} M\mathbf{h}''(x) + C\mathbf{h}'(x) + K\mathbf{h}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad M\mathbf{h}'(0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} M\mathbf{h}''(x) + C\mathbf{h}'(x) + K\mathbf{h}(x) &= \delta(x)\mathbf{I}, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad M\mathbf{h}'(0) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Da equação operacional para $\mathbf{h}(x)$, decorre

$$\Delta(s)H(s) = \mathbf{I}, \quad (3.16)$$

ou seja, $H(s)$ é a transformada de Laplace de $\mathbf{h}(x)$ e será denominada de *matriz de transferência* do sistema (3.12).

Observe-se que uma matriz não-singular comuta com sua inversa. Então, a rigor, tem-se que a matriz de transferência comuta com o polinômio matricial $\Delta(s)$, isto é,

$$\Delta(s)H(s) = H(s)\Delta(s) = \mathbf{I}.$$

Assim, pré-multiplicando (3.13) por

$$\Delta^{-1}(s) = H(s),$$

decorre

$$\mathbf{Y}(s) = H(s)M\mathbf{y}'(0) + (sH(s)M + H(s)C)\mathbf{y}(0) + H(s)F(s).$$

Agora, com a transformada inversa de Laplace, obtém-se uma fórmula para as soluções de (3.12), em termos da solução matricial fundamental $\mathbf{h}(x)$ é dada por

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{h}(x)M\mathbf{y}'(0) + (\mathbf{h}'(x)M + \mathbf{h}(x)C)\mathbf{y}(0) + \int_0^x \mathbf{h}(x-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (3.17)$$

Definindo

$$\mathbf{h}_0(x) = \mathbf{h}'(x)M + \mathbf{h}(x)C$$

$$\mathbf{h}_1(x) = \mathbf{h}(x)M.$$

a solução acima escreve-se

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{h}_0(x)\mathbf{y}(0) + \mathbf{h}_1(x)\mathbf{y}'(0) + \int_0^x \mathbf{h}_1(x-\tau)M^{-1}f(\tau)d\tau. \quad (3.18)$$

Estas relações mostram que, para conhecer a *solução* do sistema (3.12), é suficiente determinar a base dinâmica \mathbf{h}, \mathbf{h}' ou a base fundamental normalizada $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1$.

A resposta-impulso $\mathbf{h}(x)$ pode, em princípio, ser descrita por uma série de Taylor e aproximada de maneira polinomial. Isto é, escrevendo

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{h}_j \frac{x^j}{j!}, \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}^{(j)}(0)$, e substituindo em (3.14), obtém-se a equação recursiva

$$\begin{aligned} M\mathbf{h}_{j+2} + C\mathbf{h}_{j+1} + K\mathbf{h}_j &= 0, \\ M\mathbf{h}_1 &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}_0 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Porém, sob o ponto de vista numérico, o truncamento da série pode acarretar erros numéricos, como foi discutido por Moler e Van Loan [14], para o caso da resposta-impulso associada a um sistema de primeira ordem (exponencial de uma matriz).

Por outro lado, o método espectral, isto é, a determinação de soluções do tipo exponencial $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \mathbf{v}(x)$ para o sistema não forçado

$$M\mathbf{y}'' + C\mathbf{y}' + K\mathbf{y} = 0,$$

conduz à resolução do problema de autovalor

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K) \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \neq 0. \quad (3.21)$$

Este procedimento equivale a determinar as raízes (autovalores de (3.21)) do *polinômio característico*

$$P(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i} \quad (3.22)$$

e, posteriormente, achar os autovetores ou modos \mathbf{v} .

Como

$$H(s) = \Delta(s)^{-1} = \frac{\text{adj } \Delta(s)}{P(s)},$$

os pólos de $H(s)$ são os autovalores de (3.21), portanto, em número finito. Segue-se que a integral de Bromwich para a transformada inversa de Laplace, pode ser reduzida a uma integral de contorno limitado

$$\mathbf{h}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} H(s) e^{sx} ds, \quad (3.23)$$

onde Γ é uma circunferência que encerra os autovalores de (3.21).

Entretanto, as fórmulas (3.23) e (3.19) não são muito adequadas para a obtenção das propriedades analíticas da resposta-impulso; tão pouco são apropriadas

numericamente. Pois, o caso da aplicação de (3.23) requer o conhecimento da matriz de transferência $H(s)$, e, para o caso de (3.19), a dificuldade consiste em gerar as matrizes \mathbf{h}_j para j muito grande.

Aqui será utilizada a fórmula não-espectral obtida por Claeysen [3], [4], [5]. Uma simples derivação da mesma é dada a seguir.

Teorema 3.1. *Sejam \mathcal{M} , \mathcal{C} , \mathcal{K} matrizes $n \times n$ e \mathcal{M} não-singular. Considere-se o polinômio $P(s) = \det[s^2\mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K}] = \sum_{k=0}^{2n} b_k s^{2n-k}$. Então,*

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-i-1)}(x) \mathbf{h}_{2n-j}, \quad (3.24)$$

onde os b_i são os coeficientes do polinômio característico $P(s)$, $h(x)$ é a solução que satisfaz um problema de valor inicial

$$b_0 h^{(2n)}(x) + b_1 h^{(2n-1)}(x) + \dots + b_{2n-1} h'(x) + b_{2n} h(x) = 0, \quad (3.25)$$

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad \dots, \quad h^{(2n-2)}(0) = 0, \quad b_0 h^{(2n-1)}(0) = 1.$$

e $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}^{(k)}(0)$ satisfaz o problema matricial em diferenças

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{h}_{j+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{j+1} + \mathcal{K}\mathbf{h}_j &= 0, \\ \mathcal{M}\mathbf{h}_1 &= I, \quad \mathbf{h}_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Demonstração. Seja $R(s) = s^2\mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K}$. Segue que, a matriz adjunta de $R(s)$ dada por $B(s) = \text{adj}(R(s))$ é um polinômio matricial em s de ordem menor que $2n - 1$. Então, para $B_k = B^{(k)}(0)$, tem-se

$$B_{2n-1} = B_{2n} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Considere-se

$$P(s) = \det(R(s)) = \sum_{k=0}^{2n} b_k s^{2n-k}, \quad (3.28)$$

o polinômio característico do problema (3.21).

Tem-se

$$B(s)R(s) = R(s)B(s) = \det(R(s))\mathbf{I} = P(s)\mathbf{I}. \quad (3.29)$$

Como $B(s)$ e $R(s)$ comutam, bem como suas derivadas, é possível escrever

$$\frac{d^j}{ds^j} [R(s)B(s)] = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} R^{(i)}(s)B^{(j-i)}(s) = P^{(j)}(s)\mathbf{I}. \quad (3.30)$$

Substituindo

$$R^{(i)}(0) = \begin{cases} \mathcal{K}, & i = 0, \\ \mathcal{C}, & i = 1, \\ 2\mathcal{M}, & i = 2, \\ 0, & i > 2, \end{cases} \quad (3.31)$$

e

$$P^{(j)}(0) = \begin{cases} j! b_{2n-j}, & j = 0 : 2n, \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (3.32)$$

em (3.30), para $s = 0$, e utilizando as condições (3.27), obtém-se

$$\begin{cases} \mathcal{K}B_j + j\mathcal{C}B_{j-1} + j(j-1)\mathcal{M}B_{j-2} = j!b_{2n-j}\mathbf{I}, & j = 2 : 2n, \\ B_{2n-1} = B_{2n} = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Fazendo uma substituição de variável,

$$A_j = \frac{B_{2n-j}}{(2n-j)!}, \quad (3.34)$$

tem-se que $B_j = j! A_{2n-j}$. Substituindo este resultado em (3.33), decorre o problema matricial em diferenças

$$\begin{cases} \mathcal{M}A_{j+2} + \mathcal{C}A_{j+1} + \mathcal{K}A_j = b_j\mathbf{I}, & j = 0 : 2n-2, \\ A_0 = A_1 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.35)$$

A seguir, definindo

$$A_j = \sum_{i=0}^{j-1} b_i \mathbf{h}_{j-i-1}, \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}^{(k)}(0)$, de (3.35), obtém-se

$$\mathcal{K}A_j + \mathcal{C}A_{j+1} + \mathcal{M}A_{j+2} = b_j\mathbf{I}.$$

Portanto, A_j definido em (3.36) é solução de (3.35).

Agora, como $B^{(k)}(0) = \mathbf{0}$, para $k \geq 2n$, a série de Taylor de $B(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} B(s) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{B_{2n-k}}{(2n-k)!} s^{2n-k} = \sum_{k=1}^{2n} A_k s^{2n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=0}^{k-1} b_i s^{2n-k} \mathbf{h}_{k-i-1} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-i-1} \mathbf{h}_{2n-j}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Deste modo, a matriz de transferência é caracterizada como

$$H(s) = \frac{B(s)}{P(s)} = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{s^{j-1-i}}{P(s)} \mathbf{h}_{2n-j} \quad (3.38)$$

A resposta-impulso $\mathbf{h}(x)$ é obtida, a seguir, com a utilização da integral de Bromwich para determinar a transformada inversa de Laplace de $H(s)$. Mais precisamente,

$$\mathbf{h}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{B(s)}{P(s)} e^{st} ds = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} s^{j-i-1} \frac{e^{sx}}{P(s)} ds \right) \mathbf{h}_{2n-j}. \quad (3.39)$$

A expressão

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} s^j \frac{e^{st}}{P(s)} ds$$

corresponde a j -ésima derivada da função

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{sx}}{P(s)} ds,$$

que é a solução do problema de valor inicial

$$b_0 h^{(2n)}(x) + b_1 h^{(2n-1)}(x) + \dots + b_{2n-1} h'(x) + b_{2n} h(x) = 0, \quad (3.40)$$

$$h(0) = 0, h'(0) = 0, \dots, h^{(2n-2)}(0) = 0, b_0 h^{(2n-1)}(0) = 1.$$

Assim,

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-i-1)}(t) \mathbf{h}_{2n-j} \quad (3.41)$$

onde:

- b_i são os coeficientes do polinômio característico (3.22);
- $h(x)$ é a função que satisfaz o problema de valor inicial (3.40);
- \mathbf{h}_k satisfaz o problema matricial em diferenças (3.26).

□

Conclui-se que, para o cálculo da resposta-impulso matricial, é necessário considerar três equações características: uma algébrica (polinômio característico), uma analítica (equação diferencial para $h(x)$) e uma discreta (equação em diferenças para \mathbf{h}_k , que corresponde a k -ésima derivada de $\mathbf{h}(x)$ na origem).

3.1.1 O Caso de Raízes Simples

Quando todas as raízes s_k de $p(s)$ forem distintas, a fórmula para $h(x)$ pode ser simplificada. Aqui, $h(x)$ é obtida de

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{e^{s_k x}}{p'(s_k)}$$

e, com a introdução dos polinômios

$$q_j(s) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-1-i}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (3.42)$$

decorre

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \sum_{k=0}^{2n} \frac{s_k^{j-1-i} e^{s_k x} \mathbf{h}_{2n-j}}{p'(s_k)}.$$

Deste modo,

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{k=0}^{2n} E_k e^{s_k x}, \quad H(s) = \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{s - s_k}, \quad (3.43)$$

onde

$$E_k = \frac{1}{p'(s_k)} \sum_{j=1}^{2n} q_j(s_k) \mathbf{h}_{2n-j}. \quad (3.44)$$

Para o caso de raízes simples, a derivada de $h(x)$ em $x = 0$ conduz à resposta-impulso discreta

$$\mathbf{h}_j = \sum_{k=0}^{2n} E_k s_k^j. \quad (3.45)$$

Note que para a obtenção dessa resposta é necessário considerar três equações características: uma algébrica, polinômio característico; uma analítica, equação diferencial para $h(x)$; e uma discreta, equação de diferenças para \mathbf{h}_k , que corresponde a k -ésima derivada de $\mathbf{h}(x)$ na origem.

3.2 Equação Característica

Na literatura, a obtenção de soluções não nulas do problema de contorno (3.4), (3.5), (3.10) e (3.11) tem sido realizada na maioria das vezes com a forma desacoplada da equação de Timoshenko de quarta ordem homogênea e com o uso do método espectral de Euler. Este processo tem limitado a abrangência das condições de contorno e obrigado a realizar uma análise em função da natureza das raízes do polinômio característico do sistema. Com o uso de uma base matricial fundamental ou dinâmica, descrita em [2] e [6] o estudo torna-se mais geral e sistemático.

Seja $\mathbf{h}(x)$ a solução do problema de valor inicial

$$\mathbb{M}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}\mathbf{h}(x) = 0, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}, \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula 2×2 , \mathbb{M} é uma matriz não-singular e \mathbf{I} é a matriz identidade. Então, a solução geral de (3.4) é da forma

$$\Phi(x) = \mathbf{h}(x)c_1 + \mathbf{h}'(x)c_2 \quad (3.48)$$

onde c_1 e c_2 são vetores constantes. No caso de utilizar valores iniciais, a seguinte forma para as soluções resulta mais conveniente

$$\Phi(x) = \mathbf{h}_0(x)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(x)\dot{\Phi}(0), \quad (3.49)$$

onde

$$\mathbf{h}_0(x) = \mathbf{h}'(x)\mathbb{M} + \mathbf{h}(x)\mathbb{C}, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{h}_1(x) = \mathbf{h}(x)\mathbb{M}. \quad (3.51)$$

são soluções matriciais da equação (3.4) com os valores iniciais

$$\mathbf{h}_0(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}'_0(0) = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{h}_1(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'_1(0) = \mathbf{I}. \quad (3.53)$$

Considerando a solução na forma (3.49), para satisfazer as condições de contorno (3.10) e (3.11) devemos ter que

$$\mathcal{A}[\mathbf{h}_0(0)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(0)\dot{\Phi}(0)] + \mathcal{B}[\mathbf{h}'_0(0)\Phi(0) + \mathbf{h}'_1(0)\dot{\Phi}(0)] = \mathbf{0}, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{C}[\mathbf{h}_0(L)\Phi(0) + \mathbf{h}_1(L)\dot{\Phi}(0)] + \mathcal{D}[\mathbf{h}'_0(L)\Phi(0) + \mathbf{h}'_1(L)\dot{\Phi}(0)] = \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

Utilizando os valores iniciais (3.52) e (3.53), decorre

$$\mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

$$[\mathcal{D}\mathbf{h}'_0(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_0(L)]\Phi(0) + [\mathcal{D}\mathbf{h}'_1(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_1(L)]\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.57)$$

Matricialmente,

$$\mathcal{G}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

onde \mathcal{G} é uma matriz 2×2 com blocos de ordem 2×2 e \mathbf{d} o vetor 2×1 com linhas sendo blocos de ordem 2×1

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{D}\mathbf{h}'_0(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_0(L) & \mathcal{D}\mathbf{h}'_1(L) + \mathcal{C}\mathbf{h}_1(L) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \dot{\Phi}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Para obter soluções não-nulas da equação (3.58) é necessário e suficiente que o determinante

$$\Delta = \det(\mathcal{G}) \quad (3.60)$$

seja nulo. A equação que resulta de $\Delta = 0$ é chamada de *equação característica*.

Supondo que \mathcal{A} é uma matriz não-singular, a equação característica pode ser simplificada. Pois, de (3.56) segue que $\Phi(0)$ pode ser escrito em função de $\dot{\Phi}(0)$, ou seja,

$$\Phi(0) = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\dot{\Phi}(0). \quad (3.61)$$

Utilizando (3.52), (3.53) e (3.61) em (3.57), temos que

$$[\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})]\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

Portanto a equação característica é dada por

$$\Delta(L) = \det(\mathbf{D}) = 0, \quad (3.63)$$

onde \mathbf{D} é a matriz 2×2 definida por

$$\mathbf{D} = [\mathcal{C}(\mathbf{h}_1(L) - \mathbf{h}_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) + \mathcal{D}(\mathbf{h}'_1(L) - \mathbf{h}'_0(L)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})]. \quad (3.64)$$

Por um raciocínio análogo, discute-se o caso em que a matriz \mathcal{B} seja não-singular.

3.3 Cálculo de \mathbf{h} na Forma Adimensional

Para facilitar o estudo do modelo de Timoshenko não forçado, considere a adimensionalização sugerida por Huang em [11],

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad b^2 = \frac{\rho A}{EI} L^4 w^2, \quad s^2 = \frac{EI}{k' G A L^2} \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{I}{A L^2}, \quad (3.65)$$

onde b é um número proporcional as frequências de vibrações, s^2 é inversamente proporcional a rigidez de cisalhamento, a qual tende a zero com a flexibilidade de cisalhamento, e r^2 é proporcional a inércia rotacional.

Utilizando (3.65), a equação matricial (3.4) na forma adimensional é dado por

$$\mathcal{M}\Phi''(\xi) + \mathcal{C}\Phi'(\xi) + \mathcal{K}\Phi(\xi) = 0, \quad (3.66)$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L s^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} b^2 s^2 & 0 \\ 0 & -L(1 - b^2 r^2 s^2) \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Para determinar $\mathbf{h}(x)$ devemos encontrar o seu polinômio característico (3.22). Como $n = 2$, tem-se que

$$P(\lambda) = \det [\lambda^2 \mathcal{M} + \lambda \mathcal{C} + \mathcal{K}] = \sum_{k=0}^4 b_k \lambda^{4-k}. \quad (3.68)$$

Resolvendo (3.68), obtém-se que os coeficientes o do polinômio característico de (3.66) são

$$b_0 = Ls^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = Lb^2s^2(r^2 + s^2), \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -Lb^2s^2(1 - b^2r^2s^2). \quad (3.69)$$

Assim, o polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = Ls^2(\lambda^4 + b^2(r^2 + s^2)\lambda^2 - b^2(1 - b^2r^2s^2)). \quad (3.70)$$

Seja \mathbf{h}_k a solução da equação matricial de diferenças dada por

$$\mathcal{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathcal{K}\mathbf{h}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2 \quad (3.71)$$

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}_1 = \mathbf{I}. \quad (3.72)$$

Assim, de forma recursiva, usando as condições iniciais dada em (3.72) e a equação de diferenças (3.71), tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= \mathcal{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ls^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}_2 &= -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\mathcal{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} \\ -\frac{1}{Ls^2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{h}_3 &= \mathcal{M}^{-1}[(\mathcal{C}\mathcal{M}^{-1})^2 - \mathcal{K}\mathcal{M}^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1+b^2s^4}{s^2} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2r^2}{Ls^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Com o auxílio do software simbólico Maple, substituindo (3.69) e (3.73) em (3.24), segue que a resposta impulso-matricial para o caso geral é

$$\mathbf{h}(\xi) = \begin{bmatrix} Ls^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h(\xi) - L(1 - b^2r^2s^2)h(\xi) & L \frac{\partial}{\partial \xi} h(\xi) \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} h(\xi) & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h(\xi) + b^2s^2h(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

3.3.1 Cálculo de $\mathbf{h}(\xi)$ com Raízes do Polinômio Característico

Considere o problema de valor inicial (3.40) quando $n = 2$,

$$Ls^2 h^{(iv)} + Lb^2s^2(r^2 + s^2)h''(\xi) - Lb^2s^2(1 - b^2r^2s^2)h(\xi) = 0, \quad (3.75)$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad Ls^2 h'''(0) = 1, \quad (3.76)$$

onde b_k são os coeficientes do polinômio característico de (3.68).

A solução $h(\xi)$ pode ser obtida usando a base de Euler ou a transformada de Laplace. Neste trabalho, será usado o método operacional, isto é, a transformada de Laplace.

Pela propriedade da derivada da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}^{(n)}[h(\xi)] = S^n H(S) - \sum_{j=1}^n S^{n-j} h^j(0), \quad (3.77)$$

onde $H(S)$ é a transformada de Laplace de $h(\xi)$.

Substituindo (3.77) em (3.75) e usando as condições iniciais (3.76), temos que

$$H(S) = \frac{1}{P(S)}, \quad (3.78)$$

onde $P(S)$ é igual ao polinômio característico dado em (3.68) com $S = \lambda$, que pode ser reescrito como

$$P(\lambda) = Ls^2 (\lambda^4 + g^2 \lambda^2 - R^4), \quad (3.79)$$

onde

$$g^2 = b^2(r^2 + s^2), \quad (3.80)$$

$$R^4 = b^2(1 - b^2 r^2 s^2). \quad (3.81)$$

As quatro raízes do polinômio característico (3.79) são

$$\lambda_{1,2} = \pm\epsilon \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm\delta i, \quad (3.82)$$

com

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{g^4 + 4R^4}}, \quad (3.83)$$

$$\delta = \sqrt{g^2 + \epsilon^2}. \quad (3.84)$$

De (3.83) e (3.84), seguem as seguintes relações

$$\delta^2 - \epsilon^2 = b^2(r^2 + s^2), \quad (3.85)$$

$$\epsilon^2 \delta^2 = b^2(1 - b^2 r^2 s^2). \quad (3.86)$$

Deve ser observado que as raízes $\lambda_{3,4}$ são sempre imaginárias puras, pois δ é sempre positivo. As raízes $\lambda_{1,2}$ podem ser reais ou imaginárias conforme o valor de ϵ . Observe que ϵ é real se e somente se $\sqrt{g^4 + 4R^4} > g^2$, se e somente se $b^2 r^2 s^2 < 1$, se e somente se a frequência ω é menor que a frequência crítica ω_c . Analogamente, tem-se que ϵ é imaginário puro se e somente se $\sqrt{g^4 + 4R^4} < g^2$, se e somente se $b^2 r^2 s^2 > 1$, se e somente se a frequência ω é maior que a frequência crítica ω_c .

OBSERVAÇÃO

A frequência crítica ω_c é definida por $\sqrt{k'GA/\rho I}$. Esta expressão é obtida fazendo $b^2 r^2 s^2 = 1$ e usando a definição de cada um dos parâmetros envolvidos, dada em (3.65), onde considera-se $\omega = \omega_c$. E ainda, o termo frequência crítica ω_c é uma abuso de linguagem, pois nem sempre ω_c pertence ao espectro de frequência.

3.3.1.1 Se $\omega < \omega_c$

Substituindo-se as raízes $\lambda_{1,2} = \pm\epsilon$ e $\lambda_{3,4} = \pm\delta i$ em (3.78) tem-se que

$$H(S) = \frac{1}{Ls^2(S - \lambda_1)(S - \lambda_2)(S - \lambda_3)(S - \lambda_4)} = \frac{1}{Ls^2(S^2 - \epsilon^2)(S^2 + \delta^2)}. \quad (3.87)$$

Usando frações parciais, segue que

$$H(S) = \frac{1}{Ls^2(\epsilon^2 + \delta^2)} \left[\frac{1}{S^2 - \epsilon^2} - \frac{1}{S^2 + \delta^2} \right]. \quad (3.88)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, tem-se que a solução de (3.75) é

$$h(\xi) = \frac{\delta \sinh(\epsilon\xi) - \epsilon \sin(\delta\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta}. \quad (3.89)$$

Substituindo (3.89) em (3.74), segue que a resposta impulso-matricial é

$$\mathbf{h}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{A_1 \sin(\delta\xi) + A_2 \sin(\epsilon\xi)}{s^2(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} & \frac{\cosh(\epsilon\xi) - \cos(\delta\xi)}{s^2(\epsilon^2 + \delta^2)} \\ \frac{-\cosh(\epsilon\xi) + \cos(\delta\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 + \delta^2)} & -\frac{A_3 \sin(\delta\xi) + A_4 \sinh(\epsilon\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\epsilon - s^2\epsilon(\delta^2 + b^2r^2); & A_3 &= \epsilon(b^2s^2 - \delta^2); \\ A_2 &= \delta - \delta s^2(\epsilon^2 + b^2r^2); & A_4 &= -\delta(b^2s^2 + \epsilon^2). \end{aligned}$$

3.3.1.2 Se $\omega > \omega_c$

As raízes de (3.79) são $\lambda_{1,2} = \pm\epsilon i$ e $\lambda_{3,4} = \pm\delta i$. Substituindo-se ϵ por ϵi em (4.61) tem-se que

$$h(\xi) = \frac{\delta \sinh(\epsilon\xi i) - \epsilon \sin(\delta\xi)}{Ls^2((\epsilon i)^2 + \delta^2)\delta\epsilon i}. \quad (3.91)$$

Pelas relações trigonométricas

$$\cosh(xi) = \cos(x), \quad (3.92)$$

$$\sinh(xi) = i \sin(x). \quad (3.93)$$

Usando essas relações (3.91) segue que

$$h(\xi) = \frac{\epsilon \sin(\delta\xi) - \delta \sin(\epsilon\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 - \delta^2)\epsilon\delta}. \quad (3.94)$$

Substituindo (3.94) em (3.74), tem-se que a resposta impulso-matricial é

$$\mathbf{h}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{B_1 \sin(\epsilon\xi) + B_2 \sin(\delta\xi)}{s^2(\epsilon^2 - \delta^2)\epsilon\delta} & -\frac{\cos(\epsilon\xi) - \cos(\delta\xi)}{s^2(\epsilon^2 - \delta^2)} \\ \frac{\cos(\epsilon\xi) - \cos(\delta\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 - \delta^2)} & \frac{B_3 \sin(\epsilon\xi) + B_4 \sin(\delta\xi)}{Ls^2(\epsilon^2 - \delta^2)\epsilon\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= \delta + s^2\delta(\epsilon^2 - b^2r^2); & B_3 &= \delta(\epsilon^2 - b^2s^2); \\ B_2 &= -\epsilon - \epsilon s^2(\delta^2 - b^2r^2); & B_4 &= -\epsilon(\delta^2 - b^2s^2). \end{aligned}$$

3.3.1.3 Se $\omega = \omega_c$

As raízes de (3.79) são $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_{3,4} = \pm\delta i$. Substituindo $\epsilon = 0$ em (3.89), tem-se uma indeterminação, fazendo o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se que

$$h(\xi) = \frac{\delta\xi - \sin(\delta\xi)}{Ls^2\delta^3}. \quad (3.96)$$

Substituindo (3.96) em (3.74), tem-se que a resposta impulso-matricial é

$$h(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{C_1 \sin(\delta\xi) + C_2 \xi}{\delta^3 s^2} & \frac{1 - \cos(\delta\xi)}{\delta^2 s^2} \\ \frac{-1 + \cos(\delta\xi)}{\delta^2 L s^2} & \frac{C_3 \sin(\delta\xi) + C_4 \xi}{\delta^3 L s^2} \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

onde

$$C_1 = 1 + s^2(\delta^2 - b^2 r^2);$$

$$C_3 = \delta^2 - b^2 s^2;$$

$$C_2 = -\delta(1 - b^2 r^2 s^2);$$

$$C_4 = b^2 s^2 \delta.$$

4 VIGA LIVRE-LIVRE

4.1 Introdução

Nas indústrias aeronáutica e metal-mecânica existe interesse no estudo de frequências naturais de estruturas elásticas e no cálculo de parâmetros estruturais, estes últimos são os chamados problemas inversos, considerando os efeitos da flexibilidade de cisalhamento e da inércia rotacional.

Um primeiro tratamento teórico bastante completo e com resultados experimentais sobre o assunto foi dado por Traill-Nash and Collar para vigas uniformes em [16]. O estudo foi realizado com a equação de Timoshenko e variadas condições clássicas de contorno. Determinaram a equação característica do problema de contorno tanto para baixas como para altas frequências, introduzindo uma frequência de corte. A forma das autofunções ou modos associados foi obtida em termos da natureza das raízes do polinômio característico da equação diferencial modal associada. Foi levantado por Traill-Nash e Collar a possibilidade que para certo tipo de vigas (apoiada e livre) existam dois espectros de frequências separados acima de uma certa frequência crítica. Ou seja, podem existir duas frequências diferentes que possuam a mesma autofunção. Isto tem sido denominado o *segundo espectro de frequências* da equação de Timoshenko.

Han, Benaroya e Wei [10] discutem as quatro teorias clássicas para vigas de uso na engenharia: *Euler-Bernoulli*, *Rayleigh*, *Shear* e *Timoshenko*. Na sua discussão sobre o segundo espectro da equação de Timoshenko, concluem que os estudos prévios na literatura tem desprezado o fato que a forma dos modos deve incluir tanto o deslocamento quanto o ângulo de rotação. Pois, nesta forma pode ser mostrado que para duas frequências naturais distintas do modelo de Timoshenko correspondem autofunções diferentes. Mais ainda, o momento fletor e o cisalhamento estão em fase no primeiro espectro e fora de fase no segundo.

Quando uma viga estrutural é excitada por uma força lateral harmônica, a resposta da viga depende da frequência da força. As frequências experimentais para as quais esta resposta é maximizada ou apresenta "um pico" são denominadas as frequências naturais da viga [12] e [13]. Conhecidas estas frequências, considera-se a determinação da rigidez ou densidade de massa da viga. A capacidade de decidir quando uma frequência é simples é importante em argumentos de natureza perturbativa, pois, duas frequências muito próximas podem acarretar um defeito ou mal condicionamento no problema no sentido de poder determinar somente uma autofunção. Geist e McLaughlin [8] tem discutido este problema e obtido condições para que os autovalores associados com frequências sejam simples, isto é, tem caracterizado em termos dos parâmetros estruturais os autovalores duplos, isto é, quando possuem duas autofunções linearmente independente associadas a um autovalor. Neste trabalho, as condições necessárias e suficientes obtidas por Geist e McLaughlin serão derivadas com o uso da base dinâmica.

4.2 Formulação Espectral

Considere-se o modelo de Timoshenko

$$\rho A \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial t^2} - k' GA \left(\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right) = f(t, x), \quad (4.1)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - k' GA \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = 0. \quad (4.2)$$

para uma viga livre-livre em que as forças de cisalhamento e os momentos são nulos nos extremos, isto é,

$$V_x(t, 0) - \psi(t, 0) = 0, \quad \psi_x(0) = 0, \quad (4.3)$$

$$V_x(t, L) - \psi(t, L) = 0, \quad \psi_x(L) = 0.$$

As frequências de oscilação e autofunções

$$V(t, x) = e^{i\omega t} u(x), \quad (4.4)$$

$$\psi(t, x) = e^{i\omega t} \Psi(x),$$

para o sistema não-forçado associado com o modelo de Timoshenko, são obtidas resolvendo o sistema de equações

$$\begin{aligned} \rho A \omega^2 u(x) - k' G A \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{d\Psi(x)}{dx} \right) &= 0, \\ \rho I \omega^2 \Psi(x) + EI \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + k' G A \left(\frac{du(x)}{dx} - \Psi(x) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

sujeito as condições de contorno

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(0) - \Psi(0) &= 0, \quad \frac{d\Psi}{dx}(0) = 0, \\ \frac{du}{dx}(L) - \Psi(L) &= 0, \quad \frac{d\Psi}{dx}(L) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando a adimensionalização dada em (3.65), obtém-se o problema espacial de contorno

$$u'' + b^2 s^2 u - L \psi' = 0, \quad (4.7)$$

$$L s^2 \psi'' - L(1 - b^2 r^2 s^2) \Psi + u' = 0, \quad (4.8)$$

e

$$u'(0) - L \Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = 0, \quad (4.9)$$

$$u'(1) - L \Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0. \quad (4.10)$$

Este problema apresenta acoplamento para as variáveis u e Ψ tanto nas equações (4.7) e (4.8) quanto nas condições de contorno (4.9) e (4.10). Por simples derivação e substituição, as equações podem ser desacopladas para a amplitude de deslocamento u e para o giro Ψ

$$L s^2 u^{(iv)} + L \alpha \gamma u'' - L \alpha \beta u = 0, \quad (4.11)$$

$$L s^2 \Psi^{(iv)} + L \alpha \gamma \Psi'' - L \alpha \beta \Psi = 0, \quad (4.12)$$

onde $\alpha = b^2 s^2$, $\beta = (1 - b^2 r^2 s^2)$ e $\gamma = r^2 + s^2$. Porém, o acoplamento entre u e Ψ continua através das condições de contorno (4.9) e (4.10).

Se $\phi_1(\xi)$, $\phi_2(\xi)$, $\phi_3(\xi)$ e $\phi_4(\xi)$ denotam uma base de soluções de (4.11) e (4.12), então

$$u(\xi) = c_1 \phi_1(\xi) + c_2 \phi_2(\xi) + c_3 \phi_3(\xi) + c_4 \phi_4(\xi), \quad (4.13)$$

$$\Psi(\xi) = d_1 \phi_1(\xi) + d_2 \phi_2(\xi) + d_3 \phi_3(\xi) + d_4 \phi_4(\xi). \quad (4.14)$$

As oito constantes devem ser obtidas utilizando as equações (4.7) e (4.8) e as condições de contorno do problema (4.9) e (4.10). Para satisfazer as condições de contorno, deve-se ter

$$\begin{aligned}
c_1\phi_1'(0) + c_2\phi_2'(0) + c_3\phi_3'(0) + c_4\phi_4'(0) - d_1L\phi_1(0) - d_2L\phi_2(0) - d_3L\phi_3(0) - d_4L\phi_4(0) &= 0, \\
d_1\phi_1'(0) + d_2\phi_2'(0) + d_3\phi_3'(0) + d_4\phi_4'(0) &= 0, \\
c_1\phi_1'(1) + c_2\phi_2'(1) + c_3\phi_3'(1) + c_4\phi_4'(1) - d_1L\phi_1(1) - d_2L\phi_2(1) - d_3L\phi_3(1) - d_4L\phi_4(1) &= 0, \\
d_1\phi_1'(1) + d_2\phi_2'(1) + d_3\phi_3'(1) + d_4\phi_4'(1) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) & -L\phi_1(0) & -L\phi_2(0) & -L\phi_3(0) & -L\phi_4(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) \\ \phi_1'(1) & \phi_2'(1) & \phi_3'(1) & \phi_4'(1) & -L\phi_1(1) & -L\phi_2(1) & -L\phi_3(1) & -L\phi_4(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1'(1) & \phi_2'(1) & \phi_3'(1) & \phi_4'(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Substituindo as soluções u e Ψ de (4.13) e (4.14) em (4.7), decorre

$$\begin{aligned}
c_1 (\phi_1''(\xi) + b^2 s^2 \phi_1(\xi)) + c_2 (\phi_2''(\xi) + b^2 s^2 \phi_2(\xi)) + c_3 (\phi_3''(\xi) + b^2 s^2 \phi_3(\xi)) + \\
+ c_4 (\phi_4''(\xi) + b^2 s^2 \phi_4(\xi)) - d_1 L \phi_1'(\xi) - d_2 L \phi_2'(\xi) - d_3 L \phi_3'(\xi) + d_4 L \phi_4'(\xi) = 0,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

O método de Euler consiste em escolher a base de soluções em termos das raízes do polinômio característico das equações de (4.11) e (4.12) que são equações de quarta ordem do tipo

$$P(\lambda) = Ls^2 (\lambda^4 + g^2 \lambda^2 - R^4),$$

onde

$$\begin{aligned} g^2 &= b^2(r^2 + s^2), \\ R^4 &= b^2(1 - b^2r^2s^2). \end{aligned}$$

As quatro raízes desse polinômio característico são $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ definidas em (3.82). Duas dessas raízes $\lambda_{3,4}$ são sempre imaginárias puras, pois δ é sempre positivo. As outras duas raízes $\lambda_{1,2}$ podem ser reais ou imaginárias conforme o valor de ϵ ; são *reais* quando frequência ω é menor que a frequência crítica ω_c e *imaginárias* quando a frequência é maior que a frequência crítica.

Considere o caso em que todas as raízes são imaginárias, isto é, $\lambda_{1,2} = \pm\epsilon i$ e $\lambda_{3,4} = \pm\delta i$, que ocorre quando a $b^2r^2s^2 > 1$, e a base de Euler tal que

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \cos(\epsilon\xi), & \phi_2(\xi) &= \sin(\epsilon\xi), \\ \phi_3(\xi) &= \cos(\delta\xi), & \phi_4(\xi) &= \sin(\delta\xi). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Substituindo (4.18) em (4.13) e (4.14) tem-se que a solução através da formulação espectral é

$$u(\xi) = c_1 \cos(\epsilon\xi) + c_2 \sin(\epsilon\xi) + c_3 \cos(\delta\xi) + c_4 \sin(\delta\xi), \tag{4.19}$$

$$\Psi(\xi) = d_1 \cos(\epsilon\xi) + d_2 \sin(\epsilon\xi) + d_3 \cos(\delta\xi) + d_4 \sin(\delta\xi). \tag{4.20}$$

Pela independência linear das funções base e observando que a segunda derivada de cada função base é uma função do mesmo tipo, substituindo (4.18) na equação (4.17), tem-se que os coeficientes do deslocamento em função dos coeficientes do giro são dados por

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{L\epsilon}{-\epsilon^2 + b^2s^2}d_2, & c_2 &= -\frac{L\epsilon}{-\epsilon^2 + b^2s^2}d_1 \\ c_3 &= \frac{L\delta}{-\delta^2 + b^2s^2}d_4, & c_4 &= -\frac{L\delta}{-\delta^2 + b^2s^2}d_3. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Substituindo essas constantes em (4.15) tem-se um sistema que depende somente das constantes d_k . Matricialmente, vem $\mathbf{C}\mathbf{d} = 0$ onde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{b^2 s^2}{\epsilon^2 - b^2 s^2} & 0 & \frac{b^2 s^2}{\delta^2 - b^2 s^2} & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \delta \\ \frac{b^2 s^2}{\epsilon^2 - b^2 s^2} \cos(\epsilon) & \frac{b^2 s^2}{\epsilon^2 - b^2 s^2} \sin(\epsilon) & \frac{b^2 s^2}{\delta^2 - b^2 s^2} \cos(\delta) & \frac{b^2 s^2}{\delta^2 - b^2 s^2} \sin(\delta) \\ -\epsilon \sin(\epsilon) & \epsilon \cos(\epsilon) & -\delta \sin(\delta) & \delta \cos(\delta) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Cuja equação característica é dada por

$$\det(\mathbf{C}) = 2(1 - \cos(\epsilon) \cos(\delta)) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2 r^2 (r^2 - s^2)^2)}{(b^2 r^2 s^2 - 1)^{1/2}} \sin(\epsilon) \sin(\delta) = 0. \quad (4.23)$$

OBSERVAÇÃO

Para o caso em que $b^2 r^2 s^2 < 1$ a base de Euler contém as funções hiperbólicas $\cosh \epsilon$ e $\sinh \epsilon$. O argumento para obter as constantes c_i em função das d_j é o mesmo.

4.3 Condição Necessária e Suficiente para a Existência de Autovalores Duplos

No artigo [8], Geist e McLaughlin apresentam o seguinte resultado que garante a existência de autovalores duplos:

Teorema 4.1. *Supondo que $\mu = \frac{E}{k'G} = \frac{s^2}{r^2}$ e $\chi = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}$. Então uma dada viga tem um autovalor duplo diferente de zero se e somente se existem inteiros positivos k_1 e k_2 tais que*

$$r^2 = \frac{\frac{2}{(1+\mu)\pi^2}}{\left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right) \left(\chi - \frac{\left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2}{\left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2} \right)}; \quad (4.24)$$

um autovalor duplo ocorre quando o parâmetro de autovalor escalar $b^2 = (\rho AL^4/EI)\omega^2$ satisfaz

$$b^2 = \pi^4 \left[\chi \left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2 - \left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2 \right]. \quad (4.25)$$

Demonstração. O problema de autovalor descrito pelas equações (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10), equivale a resolver o problema algébrico $\mathbf{C}\mathbf{d} = 0$ com \mathbf{C} dada em (4.22). Realizando várias operações sobre as linhas da matriz \mathbf{C} , obtém-se uma matriz equivalente a esta dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\varrho} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varrho}(\cos(\epsilon) - \cos(\delta)) & -\frac{1}{\zeta}\sin(\epsilon) - \frac{1}{\varrho}\sin(\delta) \\ 0 & 0 & \epsilon\left(-\frac{1}{\varrho}\sin(\epsilon) - \frac{1}{\zeta}\sin(\delta)\right) & \delta(-\cos(\epsilon) + \cos(\delta)) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde

$$\varrho = -\frac{\delta^2 - b^2 s^2}{\epsilon^2 - b^2 s^2}, \quad \zeta = \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Essa matriz pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varrho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varrho}(\cos(\epsilon) - \cos(\delta)) & -\frac{1}{\zeta}\sin(\epsilon) - \frac{1}{\varrho}\sin(\delta) \\ \epsilon\left(-\frac{1}{\varrho}\sin(\epsilon) - \frac{1}{\zeta}\sin(\delta)\right) & \delta(-\cos(\epsilon) + \cos(\delta)) \end{bmatrix}.$$

Afirmamos existe um autovalor duplo se e somente se a dimensão do núcleo de \mathbf{C} é 2.

Como as duas primeiras linhas de (4.26) são linearmente independentes segue que a dimensão do núcleo de \mathbf{C} é 2 se e somente se as últimas duas linhas são nulas. Isto ocorre quando

$$\cos \epsilon = \cos \delta, \quad (4.28)$$

$$\varrho \sin \epsilon = -\zeta \sin \delta. \quad (4.29)$$

Note que

$$\begin{aligned} \cos \epsilon &= \cos \left(\frac{\epsilon - \delta}{2} + \frac{\epsilon + \delta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\epsilon - \delta}{2} \right) \cos \left(\frac{\epsilon + \delta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\epsilon - \delta}{2} \right) \sin \left(\frac{\epsilon + \delta}{2} \right), \\ \cos \delta &= \cos \left(\frac{\delta - \epsilon}{2} + \frac{\delta + \epsilon}{2} \right) = \cos \left(\frac{\delta - \epsilon}{2} \right) \cos \left(\frac{\delta + \epsilon}{2} \right) - \sin \left(\frac{\delta - \epsilon}{2} \right) \sin \left(\frac{\delta + \epsilon}{2} \right). \end{aligned}$$

Usando a relação (4.28) e o fato de que coseno é uma função par e seno ímpar, segue que

$$\sin\left(\frac{\epsilon - \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\epsilon + \delta}{2}\right) = 0.$$

Portanto, devem existir inteiros k_2 e q tais que $\frac{\epsilon - \delta}{2} = k_2\pi$ ou $\frac{\epsilon + \delta}{2} = q\pi$. Assim, $\epsilon = 2k_2\pi + \delta$. Substituindo ϵ na relação (4.29), segue que $\sin \delta = 0$, pois, $\varrho \neq -\zeta$. Portanto, deve existir um inteiro k_1 tal que $\delta = k_1\pi$.

Conclui-se que a dimensão do espaço nulo da matriz \mathbf{C} é 2 se, e somente se, existem inteiros k_1 e k_2 tais que

$$\delta = k_1\pi \quad \text{e} \quad \epsilon = 2k_2\pi + \delta. \quad (4.30)$$

Supondo que a dimensão do núcleo de \mathbf{C} é 2, ou seja, ϵ e δ são escolhido como em (4.30). Existem $\mathbf{d}_1 = (1, 0, \varrho, 0)^T$ e $\mathbf{d}_2 = (0, 1, 0, -\tau)^T$ tais que $\mathbf{C}\mathbf{d}_i = \mathbf{0}$, com $i = 1, 2$. Os autovetores \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 são linearmente independentes e estão associados a b . Logo, b é um autovalor duplo.

Reciprocamente, se b é um autovalor duplo, existem \mathbf{d}_1 e $\mathbf{d}_2 \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ linearmente independentes tais que $\mathbf{C}\mathbf{d}_i = \mathbf{0}$, com $i = 1, 2$. Isso ocorre se e somente se a dimensão do núcleo de \mathbf{C} é 2 se e somente se ϵ e δ são como em (4.30).

Como $\omega > \omega_c$, as raízes do polinômio característico são $\pm\epsilon i$ e $\pm\delta i$. Substituindo ϵ por ϵi em (3.85) e (3.86), segue que

$$\delta^2 + \epsilon^2 = b^2(r^2 + s^2), \quad (4.31)$$

$$\delta^2\epsilon^2 = b^2(b^2r^2s^2 - 1). \quad (4.32)$$

Escolhendo ϵ e δ como em (4.30), tem-se que

$$\delta^2 + \epsilon^2 = 2\pi^2((k_1 + k_2)^2 + k_2^2), \quad (4.33)$$

$$\delta^2\epsilon^2 = \pi^4((k_1 + k_2)^2 - k_2^2)^2. \quad (4.34)$$

De (4.31), usando a definição de μ e a equação (4.33), segue que

$$r^2 = \frac{2\pi^2}{(1 + \mu)b^2}((k_1 + k_2)^2 + k_2^2). \quad (4.35)$$

Usando a definição de χ e (4.31), tem-se que

$$r^2 s^2 = \frac{\pi^4 \chi}{b^4} \left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2. \quad (4.36)$$

Substituindo (4.36) em (4.32) resulta (4.25). Usando (4.25) em (4.35) obtém-se (4.24).

Assumindo ϵ e δ como em (4.30), obtemos que (4.24) e (4.25) são equivalentes, pois de (4.24) temos que

$$\chi \left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2 - \left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2 = \frac{2}{\pi^2 r^2 (1 + \mu)} \left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2. \quad (4.37)$$

Substituindo-se a definição de μ dada no enunciado do teorema e (4.30) no lado direito de (4.37), temos que

$$\chi \left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2 - \left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2 = \frac{\delta^2 + \epsilon^2}{\pi^4 (r^2 + s^2)}. \quad (4.38)$$

Usando (4.31) em (4.38), obtém-se (4.25).

Reciprocamente, de (4.25) tem-se que

$$\chi - \frac{\left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2}{\left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2} = \frac{b^2}{\pi^4 \left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2} \quad (4.39)$$

Usando (4.30) e (4.31) em (4.39) obtém-se

$$\chi - \frac{\left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2}{\left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2} = \left(\frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + k_2^2} \right) \left(\frac{2r^2}{\pi^2 (r^2 + s^2)} \right) \frac{1}{r^2}. \quad (4.40)$$

Utilizando-se μ , definido no teorema, em (4.40) tem-se que

$$\chi - \frac{\left((k_1 + k_2)^2 - k_2^2 \right)^2}{\left((k_1 + k_2)^2 + k_2^2 \right)^2} = \left(\frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + k_2^2} \right) \left(\frac{2}{\pi^2 (1 + \mu)} \right) \frac{1}{r^2}.$$

Isolando-se r^2 nesta equação, obtém-se (4.24).

Portanto, as equações (4.24) e (4.25) são equivalentes. \square

4.4 Formulação Dinâmica Matricial

Considere o modelo de Timoshenko (4.1) e (4.2) na forma matricial evolutiva

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F},$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são matrizes reais 2×2 , com coeficientes constantes, pois estamos supondo que a viga é uniforme; \mathbf{M} é não-singular; \mathbf{v} e \mathbf{F} são vetores 2×1 , dados em (2.31). As condições de contorno do tipo livre-livre dada em (4.3), na forma matricial podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\Phi'(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{A}\Phi(L) + \mathcal{B}\Phi'(L) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{4.41}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{4.42}$$

Introduzindo soluções oscilatórias, definida em (4.4), na forma matricial (3.1) obtém-se (3.3) que pode ser reescrita como em (3.4). Usando a adimensionalização introduzida em (3.65), tem-se que o modelo de Timoshenko, na sua forma adimensional, é dado por

$$\mathcal{M}\Phi''(\xi) + \mathcal{C}\Phi'(\xi) + \mathcal{K}\Phi(\xi) = 0,\tag{4.43}$$

onde \mathcal{M}, \mathcal{C} e \mathcal{K} foram definidas em (3.67), cujas condições de contorno livre-livre são

$$B_1\Phi = \mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\Phi'(0) = \mathbf{0},\tag{4.44}$$

$$B_2\Phi = \mathcal{A}\Phi(1) + \mathcal{B}\Phi'(1) = \mathbf{0},\tag{4.45}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de (4.43) na forma normal é dada em (3.49). Como para uma viga uniforme com condições de contorno livre-livre tem-se que as matrizes \mathcal{C} e \mathcal{D} de (3.11) são iguais a \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente, usando as equações (3.56) e (3.57) obtém-se

$$\mathcal{A}\Phi(0) + \mathcal{B}\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0},\tag{4.46}$$

$$[\mathcal{B}\mathbf{h}'_0(1) + \mathcal{A}\mathbf{h}_0(1)]\Phi(0) + [\mathcal{B}\mathbf{h}'_1(1) + \mathcal{A}\mathbf{h}_1(1)]\dot{\Phi}(0) = \mathbf{0},\tag{4.47}$$

Matricialmente,

$$\mathcal{G}\mathbf{d} = 0 \quad (4.48)$$

onde

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hat{\mathcal{B}} & \hat{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \dot{\Phi}(0) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} &= \mathcal{B}\mathbf{h}'_1(1) + \mathcal{A}\mathbf{h}_1(1), \\ \hat{\mathcal{B}} &= \mathcal{B}\mathbf{h}'_0(1) + \mathcal{A}\mathbf{h}_0(1), \end{aligned}$$

Tem-se que b é um autovalor duplo se, e somente se, para esse valor o sistema (4.48) possui duas soluções $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^2$ que são linearmente independentes. Como as condições de contorno (4.44) e (4.45) implicam que \mathcal{G} possui duas linhas independentes, segue que a dimensão do núcleo de \mathcal{G} deve ser igual a 2.

Por outro lado, o sistema (4.70) pode ser simplificado uma vez que \mathcal{B} é uma matriz não-singular. De (4.46) segue que

$$\dot{\Phi}(0) = -\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\Phi(0). \quad (4.50)$$

Substituindo (4.50) em (4.47), temos que

$$[\mathcal{A}(\mathbf{h}_0(1) - \mathbf{h}_1(1)\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}) + \mathcal{B}(\mathbf{h}'_0(1) - \mathbf{h}'_1(1)\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A})]\Phi(0) = \mathbf{0} \quad (4.51)$$

Note que para condições de contorno livre-livre a matriz \mathcal{B} é igual a matriz identidade. Assim, o sistema (4.51) fica

$$[\mathcal{A}\mathbf{h}_0(1) - \mathcal{A}\mathbf{h}_1(1)\mathcal{A} + \mathbf{h}'_0(1) - \mathbf{h}'_1(1)\mathcal{A}]\Phi(0) = \mathbf{0}. \quad (4.52)$$

Decorre

$$\mathbf{D}\Phi(0) = 0, \quad (4.53)$$

onde

$$\mathbf{D} = [\mathcal{A}\mathbf{h}_0(1) - \mathcal{A}\mathbf{h}_1(1)\mathcal{A} + \mathbf{h}'_0(1) - \mathbf{h}'_1(1)\mathcal{A}], \quad (4.54)$$

é a matriz 2x2.

Para determinar a matriz \mathbf{D} , utilizamos a representação obtida em (3.74) para $\mathbf{h}(\xi)$, ou seja

$$\mathbf{h}(\xi) = \begin{bmatrix} Ls^2 h''(\xi) - L(1 - b^2 r^2 s^2)h(\xi) & Lh'(\xi) \\ -h'(\xi) & h''(\xi) + b^2 s^2 h(\xi) \end{bmatrix}.$$

Sendo

$$\mathbf{h}'(\xi) = \begin{bmatrix} Ls^2 h'''(\xi) - L(1 - b^2 r^2 s^2)h'(\xi) & Lh''(\xi) \\ -h''(\xi) & h'''(\xi) + b^2 s^2 h'(\xi) \end{bmatrix},$$

obtem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0(\xi) &= \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}(\xi)\mathcal{C} \\ &= \begin{bmatrix} Ls^2(h'''(\xi) + b^2 r^2 h'(\xi)) & L^2(h(\xi) - b^2 r^2 s^2 h(\xi)) \\ b^2 s^2 h(\xi) & Ls^2 h'''(\xi) + L(b^2 s^4 + 1)h'(\xi) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(\xi) &= \mathbf{h}(\xi)\mathcal{M} \\ &= \begin{bmatrix} Ls^2 h''(\xi) - L(1 - b^2 r^2 s^2)h(\xi) & L^2 s^2 h'(\xi) \\ -h'(\xi) & Ls^2 (h''(\xi) + s^2 h(\xi)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'_0(\xi) &= -\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{C}\mathbf{h}'(\xi) - \mathcal{K}\mathbf{h}(\xi))\mathcal{M} + \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{C} \\ &= \begin{bmatrix} b^2 s^2 L((1 - b^2 r^2 s^2)h(\xi) - s^2 h''(\xi)) & L^2(1 - b^2 r^2 s^2)h'(\xi) \\ b^2 s^2 h'(\xi) & L(1 - b^2 r^2 s^2)(h''(\xi) + b^2 s^2 h(\xi)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'_1(\xi) &= \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{M} \\ &= \begin{bmatrix} -L(1 - b^2 r^2 s^2)h'(\xi) + Ls^2 h'''(\xi) & L^2 s^2 h''(\xi) \\ -h''(\xi) & Ls^2 (h'''(\xi) + b^2 s^2 h'(\xi)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Substituindo-se em (4.54) segue que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -Lb^2 s^4 (h''(1) - r^2 h(1)) & -L^2 b^2 s^4 h'(1) \\ b^2 s^2 h'(1) & Lb^2 s^2 ((1 - b^2 r^2 s^2)h(1) - r^2 h''(1)) \end{bmatrix}.$$

O determinante de \mathbf{D} é

$$\det(\mathbf{D}) = L^2 r^2 b^6 s^6 (-1 + b^2 s^2 r^2) h(1)^2 - L^2 b^4 s^6 (1 - b^2 s^2 r^4 - b^2 r^4) h''(1) h(1) + b^4 S^6 L^2 r^2 h''(1)^2 + b^4 S^6 L^2 h'(1)^2.$$

O sistema (4.53) possuirá soluções não-nulas quando o determinante de \mathbf{D} for nulo para as frequências ω que estão embutidas no parâmetro b e na função $h(\xi)$ que é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} Ls^2 h^{(iv)}(\xi) + Lb^2 s^2 (r^2 + s^2) h''(\xi) - Lb^2 s^2 (1 - b^2 r^2 s^2) h(\xi) &= 0, \\ h(0) = h'(0) = h''(0) &= 0, \quad Ls^2 h'''(0) = 1. \end{aligned}$$

Simplificando o determinante acima, obtém-se a equação característica reduzida

$$\Delta(1) = 0 \tag{4.59}$$

onde

$$\Delta(1) = h''(1)^2 + \left(b^2 (r^2 + s^2) - \frac{1}{r^2} \right) h(1) h''(1) - b^2 (1 + b^2 r^2 s^2) h(1)^2 + \frac{1}{r^2} h'(1)^2. \tag{4.60}$$

O valor b será um autovalor duplo, se e somente se, a dimensão do espaço nulo da matriz \mathcal{G} é igual a 2, ou seja, \mathbf{D} deve ser a matriz nula.

4.4.1 Cálculo da Equação Característica

Para determinar a equação característica (4.59), é substituída a solução $h(\xi)$ na forma espectral, obtida na seção (4.3), do capítulo anterior. Para tanto, são considerados três casos.

4.4.1.1 Para $\omega < \omega_c$

Substituindo

$$h(\xi) = \frac{\delta \sinh(\epsilon \xi) - \epsilon \sin(\delta \xi)}{L s^2 (\epsilon^2 + \delta^2) \epsilon \delta}. \quad (4.61)$$

na equação característica reduzida (4.60), segue que

$$\Delta(1) = -2 \cosh(\epsilon) \cos(\delta) + \check{c}_1 \cosh^2(\epsilon) + \check{c}_2 \cos^2(\delta) + \check{c}_3 \sinh(\epsilon) \sin(\delta) + \check{c}_4 \quad (4.62)$$

onde

$$\begin{aligned} \check{c}_1 &= -\frac{r^2(\epsilon^4 + b^2 s^2 \epsilon^2 + b^2 r^2 \epsilon^2 - b^2 + b^4 r^2 s^2)}{\epsilon^2}; \\ \check{c}_2 &= -\frac{r^2(\delta^4 - b^2 s^2 \delta^2 - b^2 r^2 \delta^2 - b^2 + b^4 r^2 s^2)}{\delta^2}; \\ \check{c}_3 &= -\frac{(b^2 r^4 (\epsilon^2 - \delta^2) + b^2 r^2 s^2 (\epsilon^2 - \delta^2) - (\epsilon^2 - \delta^2) - 2r^2 (b^2 - b^4 s^2 r^2 + \epsilon^2 \delta^2))}{\epsilon \delta}; \\ \check{c}_4 &= -\frac{(-2\epsilon^2 \delta^2 + 2\delta^2 \epsilon^2 b^2 r^2 s^2 + \delta^2 b^4 r^4 s^2 + \delta^2 \epsilon^4 r^2 - b^2 \delta^2 r^2 - \epsilon^2 b^4 r^4 s^2 + 2\delta^2 b^2 r^4 \epsilon^2 - \epsilon^2 \delta^4 r^2 + b^2 r^2 \epsilon^2)}{\epsilon^2 \delta^2}. \end{aligned}$$

Com a finalidade de simplificar estes coeficientes, lembre que o polinômio característico do modelo de Timoshenko é dado em (3.79). As raízes desse polinômio para o caso em que $b^2 r^2 s^2 < 1$ são $\pm \epsilon$ e $\pm \delta i$ dadas em (3.82). Substituindo estas raízes no polinômio característico, tem-se que

$$\epsilon^4 + b^2 s^2 \epsilon^2 + b^2 r^2 \epsilon^2 - b^2 + b^4 r^2 s^2 = 0, \quad (4.63)$$

$$\delta^4 - b^2 s^2 \delta^2 - b^2 r^2 \delta^2 - b^2 + b^4 r^2 s^2 = 0. \quad (4.64)$$

Usando (4.63) em \check{c}_1 ; (4.64) em \check{c}_2 ; (3.85) e (3.86) em \check{c}_3 ; (4.63) e (4.64) em \check{c}_4 , para $b \neq \frac{1}{rs}$, decorre

$$\begin{aligned} \check{c}_1 &= 0, & \check{c}_2 &= 0, \\ \check{c}_3 &= \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2 r^2 (r^2 - s^2)^2)}{(1 - b^2 r^2 s^2)^{1/2}}, & \check{c}_4 &= 2. \end{aligned}$$

Logo a equação característica (4.62) é igual a

$$\Delta(1) = 2(1 - \cosh \epsilon \cos \delta) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2 r^2 (r^2 - s^2)^2)}{(1 - b^2 r^2 s^2)^{1/2}} \sinh \epsilon \sin \delta. \quad (4.65)$$

4.4.1.2 Para $\omega > \omega_c$

Substituindo ϵ por ϵi na equação característica (4.62), obtém-se que

$$\Delta(1) = 2(1 - \cosh(\epsilon i) \cos \delta) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2r^2(r^2 - s^2)^2)}{(1 - b^2r^2s^2)^{1/2}} \sinh(\epsilon i) \sin \delta. \quad (4.66)$$

Usando as relações trigonométricas (3.92) e (3.93) tem-se que a equação característica é dada por

$$\Delta(1) = 2(1 - \cos \epsilon \cos \delta) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2r^2(r^2 - s^2)^2)}{(b^2r^2s^2 - 1)^{1/2}} \sin \epsilon \sin \delta. \quad (4.67)$$

Observe que está equação característica é mesma que (4.23), obtida usando a formulação espectral.

4.4.1.3 Para $\omega = \omega_c$

Quando $b^2r^2s^2 = 1$, as raízes do polinômio característica (3.79) são $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_{3,4} = \pm \delta i$. Substituindo $\epsilon = 0$ em (4.65) tem-se uma indeterminação. Deve-se fazer o limite de (4.65) quando $\epsilon \rightarrow 0$. Para isso, observe que por (3.83) tem-se que

$$1 - b^2r^2s^2 = -\epsilon^2(\epsilon^2 + g^2).$$

Usando a definição de g^2 dada em (4.18) decorre

$$\sqrt{1 - b^2r^2s^2} = i\epsilon\sqrt{\epsilon^2 + b^2(r^2 + s^2)}. \quad (4.68)$$

Substituindo (4.68) em (4.65) tem-se

$$\Delta(1) = 2(1 - \cosh \epsilon \cos \delta) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2r^2(r^2 - s^2)^2)}{\epsilon(\epsilon^2 + b^2(r^2 + s^2))^{1/2}} \frac{\sinh \epsilon}{i} \sin \delta.$$

Pelas relações trigonométricas

$$\Delta(1) = 2(1 - \cosh \epsilon \cos \delta) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2r^2(r^2 - s^2)^2)}{\epsilon(\epsilon^2 + b^2(r^2 + s^2))^{1/2}} \sin \epsilon \sin \delta.$$

Fazendo o limite de $\Delta(1)$ ao $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se que

$$\Delta(1) = \frac{3r^2 - s^2 + b^2r^2(r^2 - s^2)^2}{(r^2 + s^2)^{1/2}} \sin \delta. \quad (4.69)$$

4.4.2 Prova do Teorema com uso da Base Dinâmica

Note que, na seção (4.3), na demonstração do Teorema 4.1 foi utilizado o método espectral. Vejamos o que ocorre utilizando a base dinâmica.

Considerando a base dinâmica, capítulo anterior, vimos que existe uma solução diferente de zero para o modelo de Timoshenko se e somente se $\det(\mathbf{D}) = 0$ em (3.63), onde \mathbf{D} é uma matriz 2×2 .

Agora em vez de utilizar \mathbf{D} definida em (4.54), considere a matriz \mathcal{G} definida em (4.49), ou seja,

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hat{\mathcal{B}} & \hat{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} &= \mathcal{B}\mathbf{h}'_1(1) + \mathcal{A}\mathbf{h}_1(1), \\ \hat{\mathcal{B}} &= \mathcal{B}\mathbf{h}'_0(1) + \mathcal{A}\mathbf{h}_0(1), \end{aligned}$$

Substituindo a solução dinâmica (3.94) em (4.55), (4.57), (4.56) e (4.57) com $\xi = 1$, segue que as matrizes $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$ são

$$\hat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \cos \epsilon + \hat{b}_2 \cos \delta & \hat{b}_3 \sin \epsilon + \hat{b}_4 \sin \delta \\ \hat{b}_5 \sin \epsilon + \hat{b}_6 \sin \delta & \hat{b}_7 \cos \epsilon + \hat{b}_8 \cos \delta \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= -\frac{b^2 r^2 - \epsilon^2}{\epsilon^2 - \delta^2}; & \hat{b}_5 &= -\frac{\epsilon}{L s^2 (\epsilon^2 - \delta^2)}; \\ \hat{b}_2 &= \frac{b^2 r^2 - \delta^2}{\epsilon^2 - \delta^2}; & \hat{b}_6 &= \frac{\delta}{L s^2 (\epsilon^2 - \delta^2)}; \\ \hat{b}_3 &= \frac{L b^2 s^2}{\epsilon (\epsilon^2 - \delta^2)}; & \hat{b}_7 &= \frac{\epsilon^2 - b^2 s^2}{\epsilon^2 - \delta^2}; \\ \hat{b}_4 &= -\frac{L^2 b^2 s^2}{\delta (\epsilon^2 - \delta^2)}; & \hat{b}_8 &= -\frac{\delta^2 - b^2 s^2}{\epsilon^2 - \delta^2}. \end{aligned}$$

e

$$\hat{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \sin \epsilon + \hat{a}_2 \sin \delta & \hat{a}_3 \cos \epsilon + \hat{a}_4 \cos \delta \\ \hat{a}_7 \cos \epsilon - \hat{a}_7 \cos \delta & \hat{a}_5 \sin \epsilon + \hat{a}_6 \sin \delta \end{bmatrix},$$

com

$$\hat{a}_1 = -\frac{b^2 s^2 (\epsilon^2 - b^2 r^2)}{\epsilon (\epsilon^2 - \delta^2)}; \quad \hat{a}_4 = \frac{L[-b^2(r^2 + s^2) + \delta^2]}{\epsilon^2 - \delta^2};$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_2 &= -\frac{bs^2(b^2r^2-\delta^2)}{\delta(\epsilon^2-\delta^2)}; & \hat{a}_5 &= -\frac{-\epsilon^2(1-b^2r^2s^2)+b^2s^2-b^4s^4r^2}{s^2\epsilon(\epsilon^2-\delta^2)}; \\ \hat{a}_3 &= \frac{L[b^2(r^2+s^2)-\epsilon^2]}{\epsilon^2-\delta^2}; & \hat{a}_6 &= -\frac{\delta^2(1-b^2r^2s^2)-b^2s^2+b^4s^4r^2}{s^2\delta(\epsilon^2-\delta^2)}; \\ \hat{a}_7 &= -\frac{b^2}{L(\epsilon^2-\delta^2)}\end{aligned}$$

Afirmamos que existe um autovalor duplo se e somente a dimensão do espaço nulo de \mathcal{G} é 2.

Se existirem k_1 e $k_2 \in \mathbb{N}$ tais que ϵ e δ são escolhidos como em (4.30), assumindo estes valores e usando as relações trigonométricas em (4.70), tem-se que

$$\begin{bmatrix} 0 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -L \cos(k_1\pi) & \cos(k_1\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(k_1\pi) \end{bmatrix}, \quad (4.71)$$

que é uma matriz equivalente por linhas a matriz (4.70).

Como \mathcal{B} é não-singular e ainda é igual a matriz identidade, o sistema (4.48) pode ser simplificado. De (4.46) segue que

$$\dot{\Phi}(0) = -\mathcal{A}\Phi(0). \quad (4.72)$$

Decorre

$$\mathbf{D}\Phi(0) = 0, \quad (4.73)$$

onde a matriz \mathbf{D} é definida em (4.54). Substituindo a solução dinâmica (3.94) nesta matriz tem-se que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{b^2s^2[(\epsilon\delta^2+b^2r^2\epsilon)\sin\delta-(\delta\epsilon^2-b^2r^2\delta)\sin\epsilon]}{\epsilon\delta(\epsilon^2-\delta^2)} & -\frac{Lb^2s^2(\cos\delta-\cos\epsilon)}{\epsilon^2-\delta^2} \\ \frac{b^2(\cos\delta-\cos\epsilon)}{L(\epsilon^2-\delta^2)} & -\frac{b^2[(-\epsilon-r^2\epsilon\delta^2+b^2r^2s^2\epsilon)\sin\delta-(\delta+r^2\delta\epsilon^2-b^2r^2s^2\delta)\sin\epsilon]}{\epsilon\delta(\epsilon^2-\delta^2)} \end{bmatrix}.$$

Note que escolhendo ϵ e δ como em (4.30) e usando as relações trigonométricas segue que \mathbf{D} é uma matriz nula. Logo a matriz \mathcal{G} tem posto 2.

Seja $\mathbf{d} = (\Phi(0), \dot{\Phi}(0))^T$, com $\Phi(0) = (d_1, d_2)^T$ e $\dot{\Phi}(0) = (d_3, d_4)^T$. Pela quarta linha de (4.71), tem-se que

$$\cos(k_1\pi)d_4 = 0 \Rightarrow d_4 = 0.$$

Pela primeira linha de (4.71) tem-se que d_1 é qualquer. Assim, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, 0)^T$.

Como $\dot{\Phi}(0) = (d_3, 0)^T$, por (4.72) tem-se

$$\begin{pmatrix} d_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

decorre

$$d_2 = \frac{d_3}{L}.$$

Logo, $\mathbf{d} = (d_1, d_3/L, d_3, 0)^T$. Se $d_1 \neq 0$ e $d_3 = 0$ tem-se que $\mathbf{d}_1 = (d_1, 0, 0, 0)^T$. Se $d_1 = 0$ e $d_3 \neq 0$ segue que $\mathbf{d}_2 = (0, d_3/L, d_3, 0)^T$. Note que \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 são dois vetores linearmente independentes que satisfazem o sistema $\mathcal{G}\mathbf{d}_i = 0$, com $i = 1, 2$. Portanto, b é um autovalor duplo.

Reciprocamente, se b é um autovalor duplo, existem \mathbf{d}_1 e $\mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^4$ linearmente independentes tais que $\mathcal{G}\mathbf{d}_i = 0$, com $i = 1, 2$. Como $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ são diferentes de zero e pertencem ao núcleo de \mathcal{G} tem-se que a dimensão de \mathcal{G} é 2. Isso ocorre se e somente se escolher ϵ e δ como em (4.30), pois, dessa forma, a matriz \mathcal{G} se reduz a (4.71). Como $\cos(k_1\pi)$ é sempre diferente de zero e a terceira e quarta linha de (4.71) são múltiplas da primeira e segunda linha, respectivamente, então (4.71) é equivalente por linhas à

$$\begin{bmatrix} 0 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Com a escolha de ϵ e δ como em (4.30), segue que (4.24) e (4.25) são equivalentes através do mesmo processo descrito na seção anterior.

Portanto, é possível aplicar o Teorema 4.1 usando a base dinâmica para resolver o problema de vibrações em uma viga uniforme com condições de contorno livre-livre.

4.5 Exemplo de como Encontrar Autovalores Duplos

Nesta seção será calculado um conjunto de parâmetros que resultam uma viga com autovalores duplos. As fórmulas aqui utilizadas para o cálculo dos parâmetros encontram-se no artigo [8] de Geist e McLaughlin .

Suponha que a seção transversal de uma viga tem raio α e a espessura l , como mostrado na Figura 4.1. Suponha também que a viga é construída com um material isotrópico cujo coeficiente de Poisson ν é $1/3$.

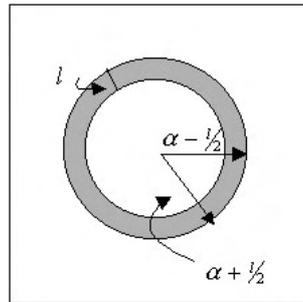


Figura 4.1: Seção transversal da viga.

O momento de inércia é

$$I = \int_{\alpha-l/2}^{\alpha+l/2} \int_0^{2\pi} (z \sin \theta)^2 z dz d\theta = \pi \left(\alpha^3 l + \alpha \frac{l^3}{4} \right). \quad (4.76)$$

Como os raios maior e menor da seção transversal são $\alpha + l/2$ e $\alpha - l/2$, respectivamente, tem-se que a área é

$$A = \pi \alpha l. \quad (4.77)$$

O coeficiente de cisalhamento k' (ver [10]), que depende da forma do tubo, e a proporção E/G podem ser expressos em termos do coeficiente de Poisson por

$$k' = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu} = \frac{8}{15}, \quad (4.78)$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) = \frac{8}{3}. \quad (4.79)$$

No teorema 4.1, μ e χ foram definidos como

$$\mu = \frac{E}{k'G} = \frac{s^2}{r^2} = 5, \quad (4.80)$$

$$\chi = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} = \frac{5}{9}. \quad (4.81)$$

Usando (4.76) e (4.77) na definição de r^2 dada em (3.65) segue

$$r^2 = \frac{I}{AL^2} = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{l^2}{8} \right).$$

Supondo que a espessura da viga é $\alpha/50$, r^2 pode ser escrito somente em termos α e L , isto é,

$$r^2 = \frac{10001 \alpha^2}{20000 L^2}. \quad (4.82)$$

A proporção α/L pode ser obtida escolhendo inteiros k_1 e k_2 , pois pelo teorema 4.1 tem que r^2 é dado pela equação (4.24). Escolhendo $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$, tem-se que

$$r^2 = \frac{75}{2684\pi^2} \approx 0.00283125. \quad (4.83)$$

De (4.82) e (4.83) segue que

$$\frac{\alpha}{L} = \sqrt{\frac{20000}{10001} \frac{75}{2684\pi^2}} \approx 0.07524589071. \quad (4.84)$$

Pelo teorema 4.1, usando (4.25) resulta que um autovalor duplo é

$$b^2 = 2684 \frac{\pi^4}{9} \approx 170.4393018. \quad (4.85)$$

Por (4.80) tem-se que

$$s^2 = \mu r^2 \approx 0.01415627. \quad (4.86)$$

Note que as raízes $\pm\epsilon i$ e $\pm\delta i$ do polinômio característico (3.79) podem ser escritas em função do parâmetro da frequência b . Para isto ficar mais claro, defina

$$a^2 = \frac{r^2 + s^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2 - s^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{b^2}}, \quad (4.87)$$

$$B^2 = \frac{r^2 + s^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 - s^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{b^2}}. \quad (4.88)$$

Assim,

$$\epsilon = ba \quad e \quad \delta = bB. \quad (4.89)$$

Essas relações podem ser facilmente obtidas usando as definições de g^2 e R^4 dadas em (3.80) e (3.81), respectivamente, em (3.83) e (3.84). Substituindo (4.89) na equação característica (4.67) segue que

$$\Delta(1) = 2(1 - \cos(ba) \cos(bB)) + \frac{b(3r^2 - s^2 + b^2 r^2 (r^2 - s^2)^2)}{(b^2 r^2 s^2 - 1)^{1/2}} \sin(ba) \sin(bB). \quad (4.90)$$

Os zeros de $\Delta(1)$, com possível exceção de $b = 1/rs$, são proporcionais às frequências da viga. A figura (4.4) mostra que $b = 1/rs$ não é uma frequência natural da viga, pois o $\lim_{b \rightarrow 1/rs} \Delta(1)$ existe. Por esta figura tem-se que o autovalor definido pela equação (4.84) corresponde a sétima frequência natural. Denotamos $1/rs$ por b_c .

No exemplo anterior, foi usado o teorema (4.1) assumindo $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$. Na tabela 4.1, encontram-se os resultados obtidos fazendo a mesma consideração do exemplo anterior para outros valores de k_i , $i = 1, 2$. As figuras 4.2 a 4.7 referem-se aos valores da tabela 4.1. Denotamos por $\Gamma = \left| \lim_{b \rightarrow b_c} \Delta(1) \right|$. O sinal de - na

Tabela 4.1: Viga com espessura $l = \frac{\alpha}{50}$ e diâmetro $\frac{d}{L} \approx 0.1505$ para $\mu = 5$.

k_1	k_2	r^2	s^2	b^2	b	b_c	Γ
1	1	0.034541	0.172706	476.22222	21.822516	12.947209	-
1	2	0.00637	0.178513	6710.4041	81.917056	70.168441	3.441812
1	3	0.002831	0.014156	29049.556	170.43930	157.95595	8.333568
2	2	0.008635	0.043177	7619.5556	87.290066	51.788836	2.419172
5	11	0.000210	0.001048	5916195.3	2432.3230	2133.2299	-
7	9	0.000351	0.001753	3162764.9	1778.4164	1275.7733	22.505793

tabela indica que Γ é uma indeterminação. Nestes casos, a equação característica é dada pela equação (4.69).

OBSERVAÇÃO

Nas figuras (4.2) a (4.13) são plotadas as componentes $h_{ij}(\xi)$, $i, j = 1, 2$, da resposta impulso-matricial fundamental, dada em (3.95), versus ξ e também a equação de freqüências (4.90) versus a freqüência b ; também é feito um zoom na região próxima ao autovalor duplo previsto pelo teorema, pois graficamente um autovalor duplo é caracterizado por tangenciar o eixo das freqüências; e, ainda, com a finalidade de verificar se quando a freqüência assume o valor b_c o limite da equação de característica (4.90) existe é feito um zoom na região em que se encontra a freqüência b_c .

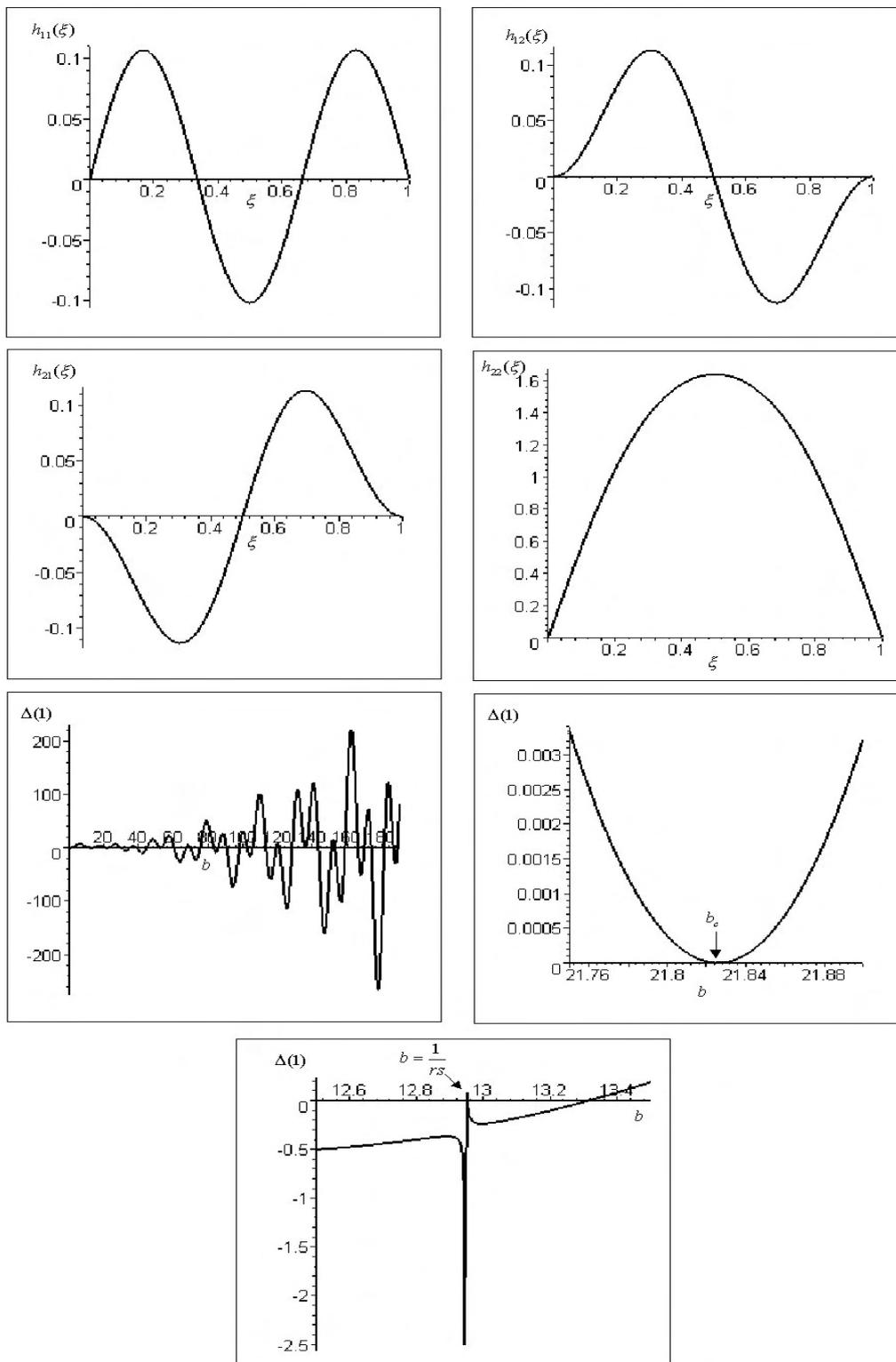


Figura 4.2: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de freqüência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$.

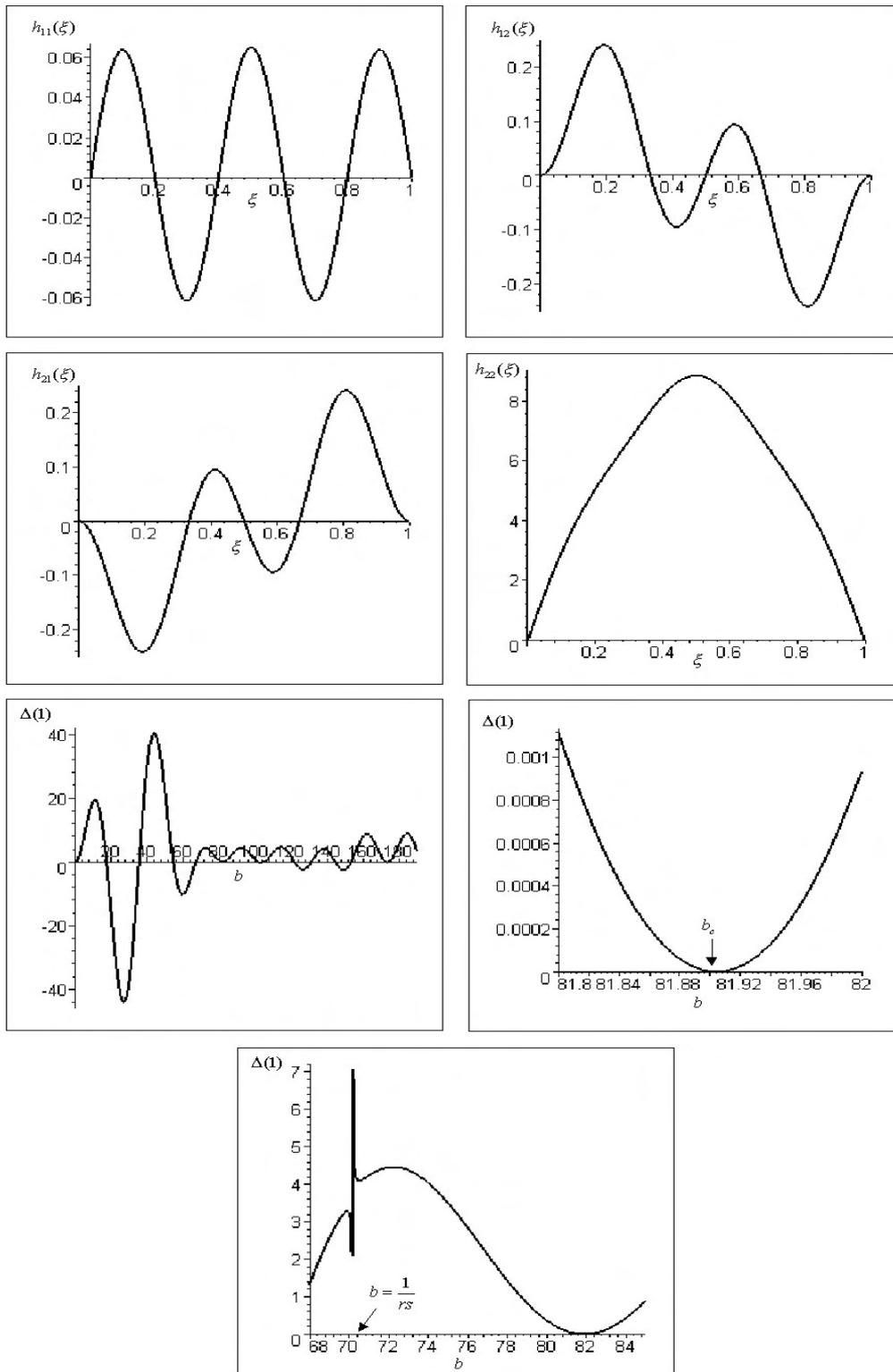


Figura 4.3: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$.

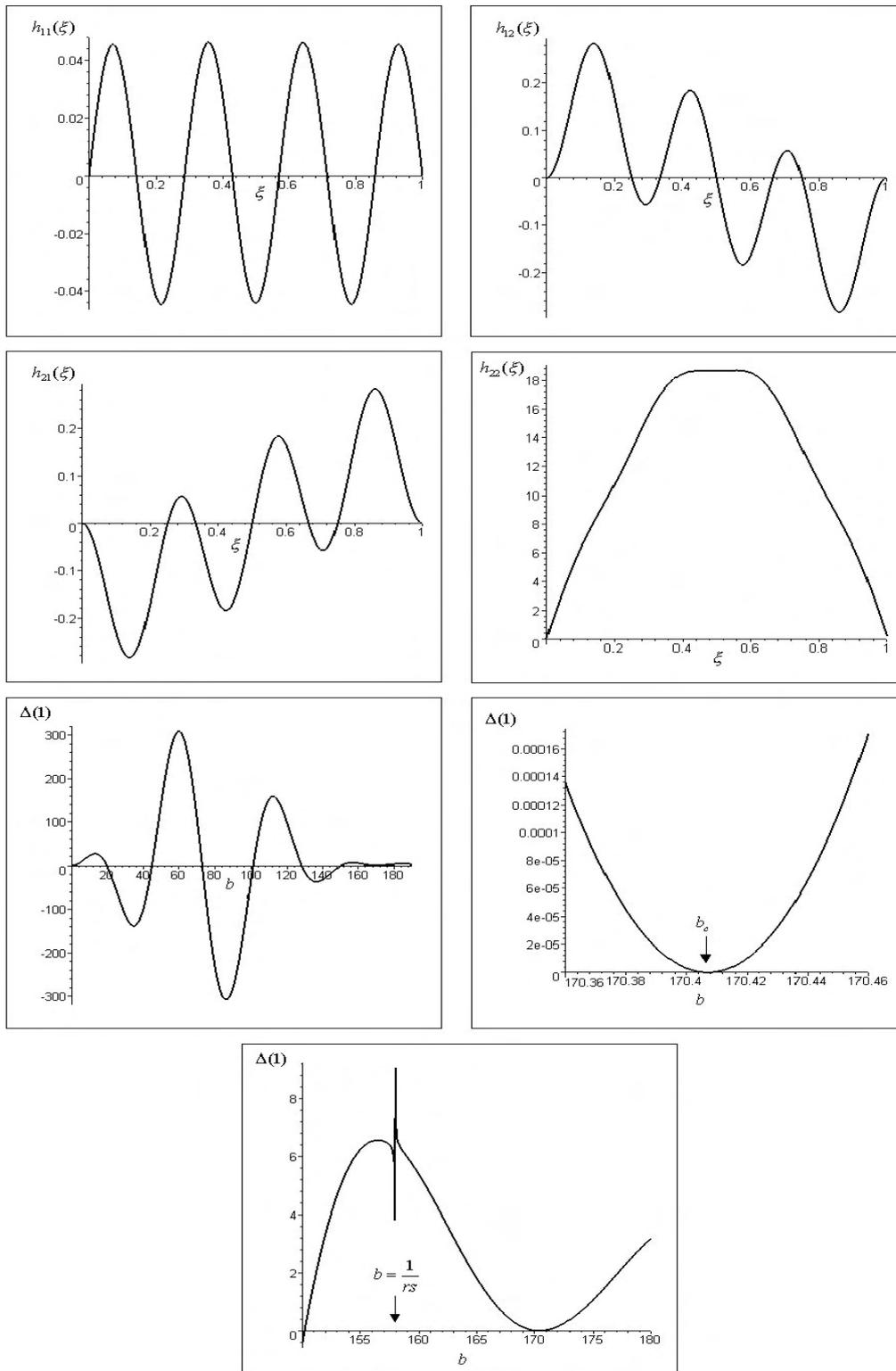


Figura 4.4: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$.

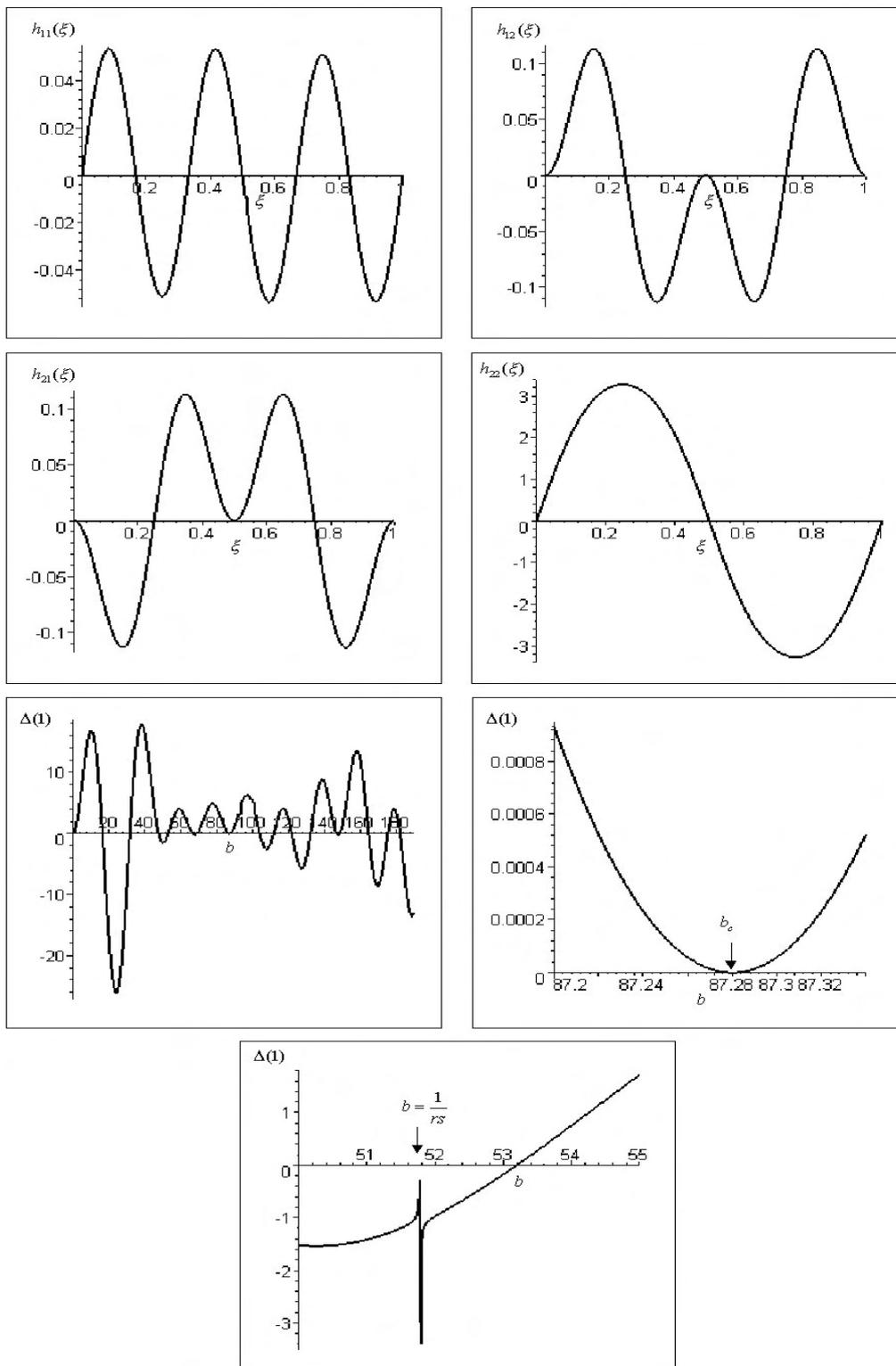


Figura 4.5: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 2$ e $k_2 = 2$.

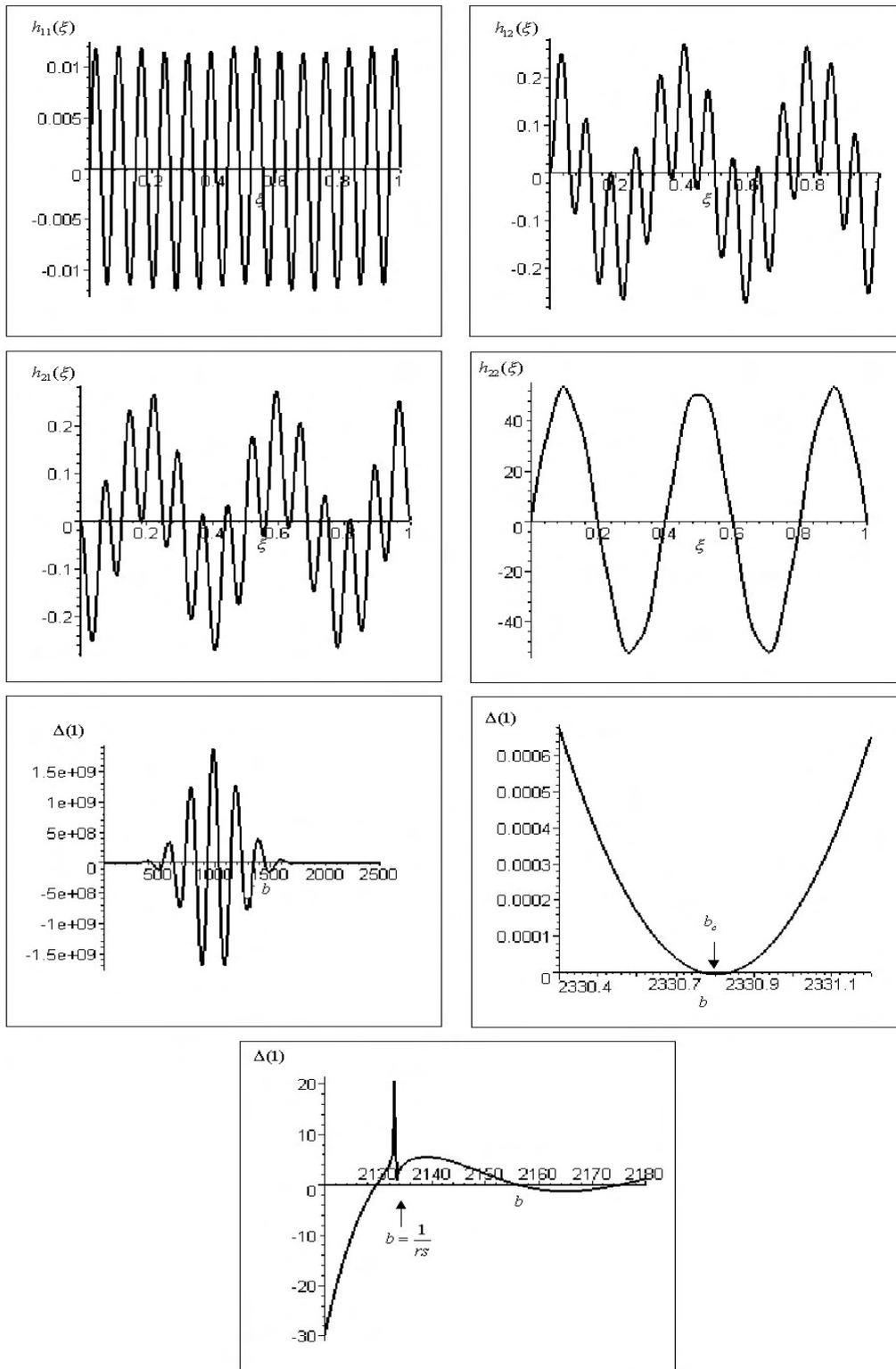


Figura 4.6: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 5$ e $k_2 = 11$.

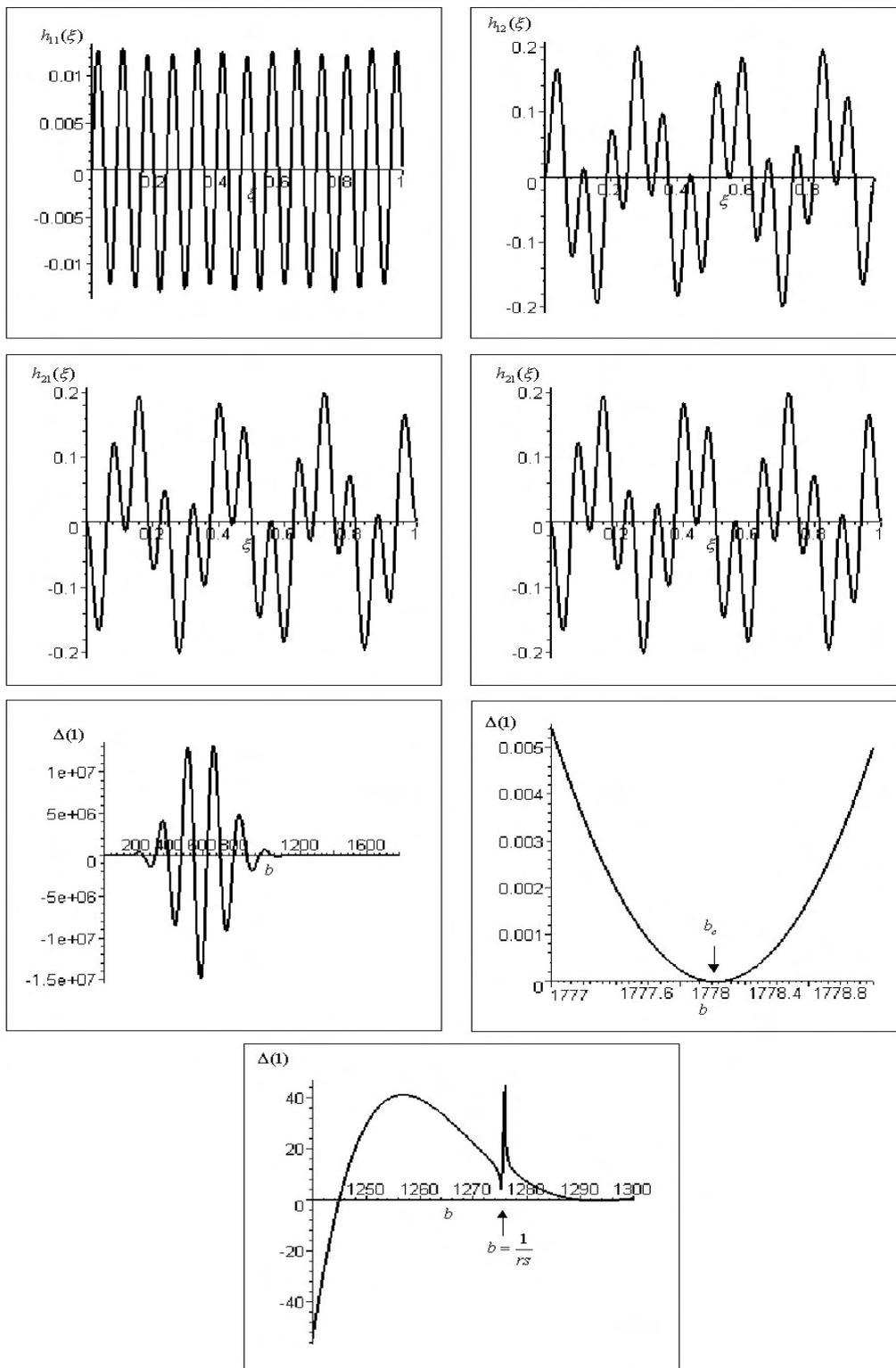


Figura 4.7: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 7$ e $k_2 = 9$.

Tabela 4.2: Viga com espessura $l = \frac{\alpha}{50}$ e diâmetro $\frac{d}{L} \approx 0.1505$ para $\mu = \frac{81}{49} + \frac{8}{49}\sqrt{65}$.

k_1	k_2	r^2	s^2	b^2	b	b_c	Γ
1	1	0.025925	0.277452	959.10490	30.969419	22.384892	2.064782
1	2	0.006481	0.019245	9974.6909	99.873374	89.539567	-
1	3	0.003023	0.008977	41121.622	202.78467	191.95045	19.531007
2	2	0.006481	0.019245	15345.678	123.87767	89.539567	-
5	11	0.000216	0.000643	8661460.5	2943.0359	2681.0732	-
7	9	0.000313	0.000929	5356385.1	2314.3865	1854.8158	-

O teorema 4.1 mostra que uma viga tem uma autovalor duplo se e somente se existem inteiros positivos k_1 e k_2 tal que (4.24) vale. Se k_1 e k_2 são fixos, então r , que pode ser obtido em função do raio pela equação (4.82), e b que é o parâmetro da frequência, são fixos. Podemos nos perguntar se uma viga pode ter dois autovalores duplos. Isso é equivalente a perguntar se é possível selecionar dois pares distintos de inteiros que geram o mesmo r^2 quando substituído em (4.24). Geist e McLaughlin em [8] supõem que

$$\mu = \frac{81}{49} + \frac{8}{49}\sqrt{65}. \quad (4.91)$$

Para este valor de μ usando a definição de χ dada no teorema 4.1 tem-se que $\chi = 49/65$. Geist e Joyce escolhem $(k_1, k_2) = (1, 2)$ e $(k_1, k_2) = (2, 2)$ que resultam o mesmo valor de r^2 e citam que um esquema para encontrar dois autovalores duplos é apresentado em [7].

A tabela 4.5, mostra os resultados obtidos assumindo μ como (4.91). As figuras de 4.8 a 4.13 ilustram os gráficos das componentes da solução dinâmica e da equação característica para os k_i 's da tabela (4.5).

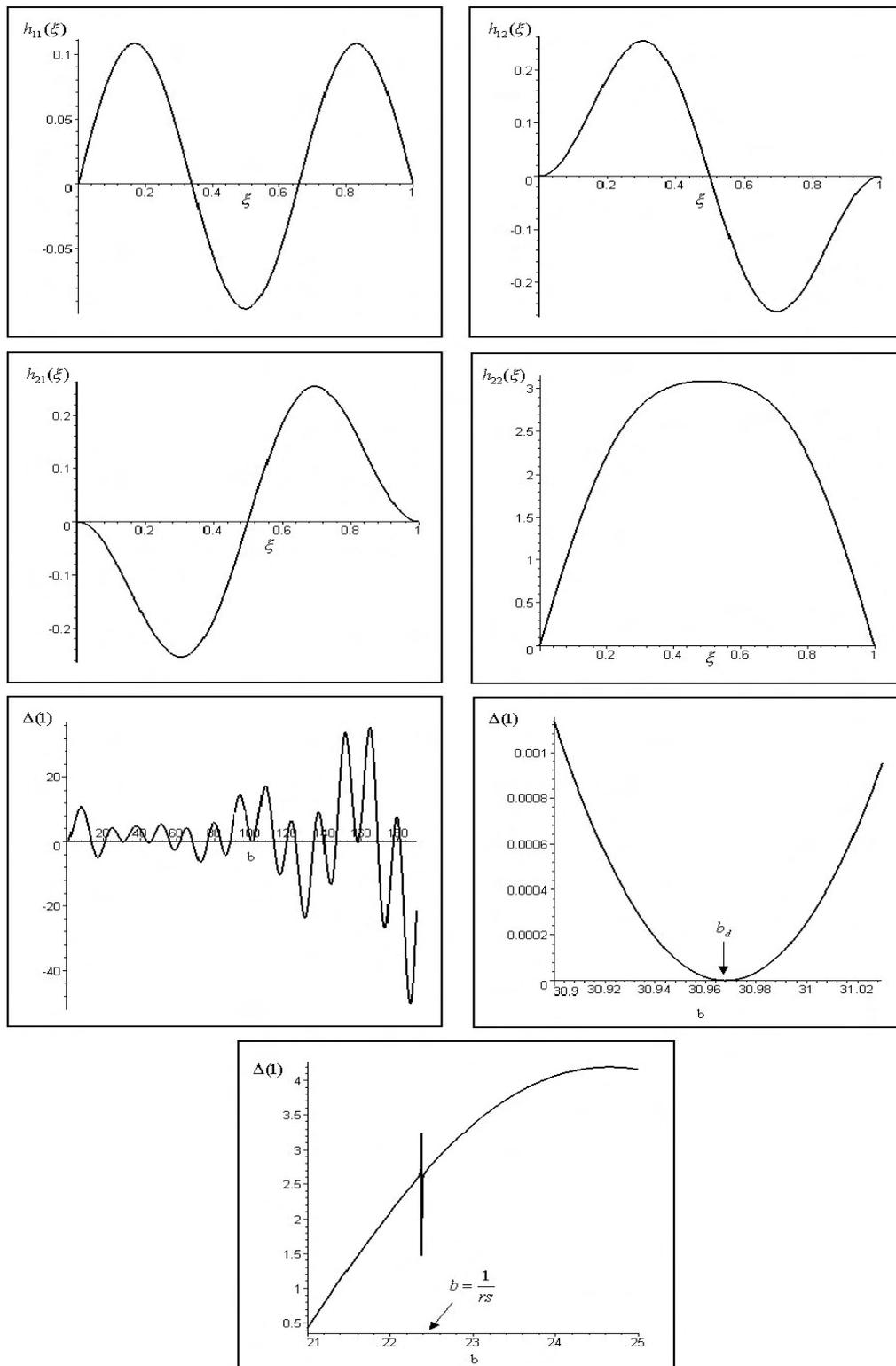


Figura 4.8: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$.

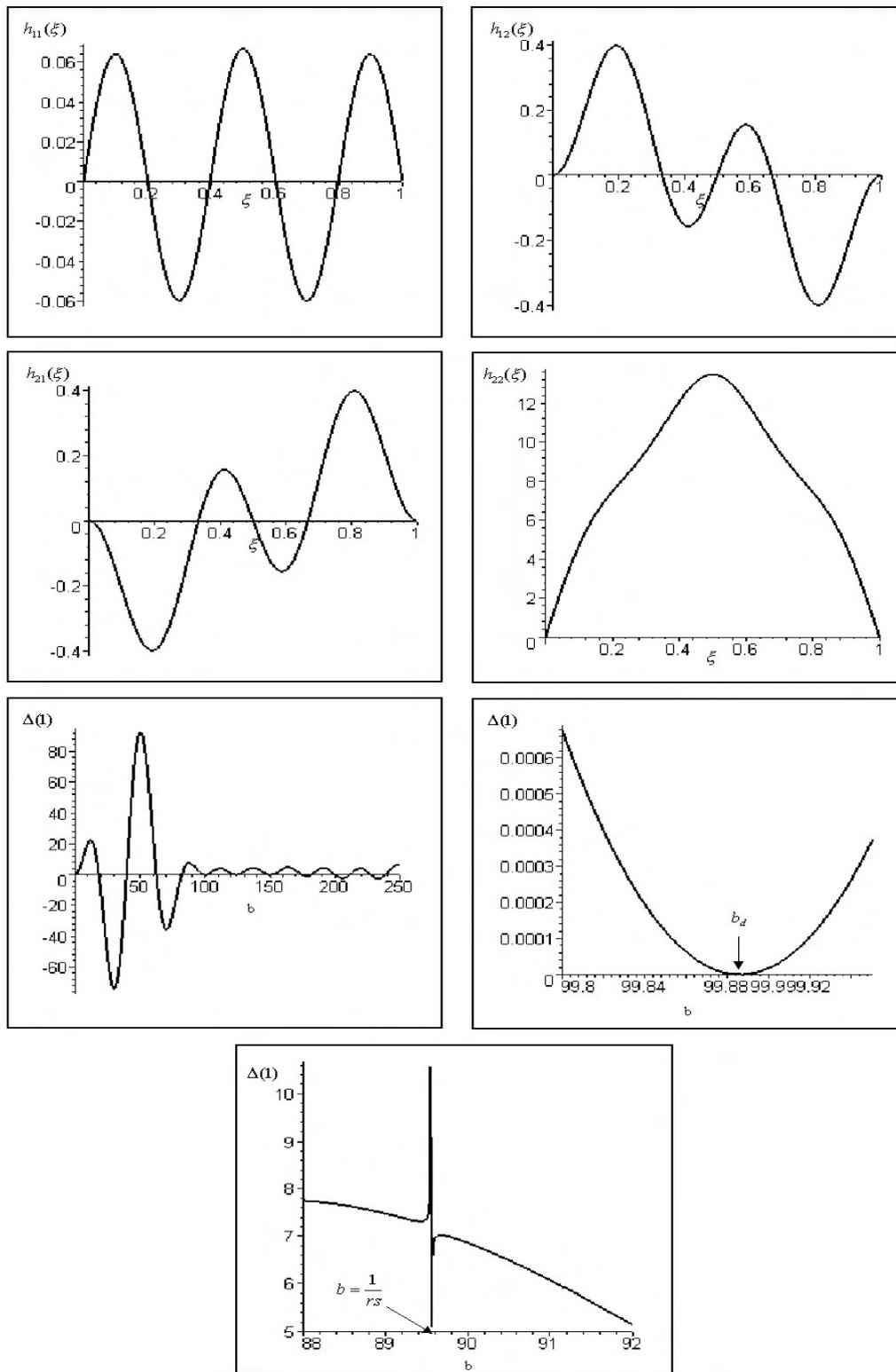


Figura 4.9: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$.

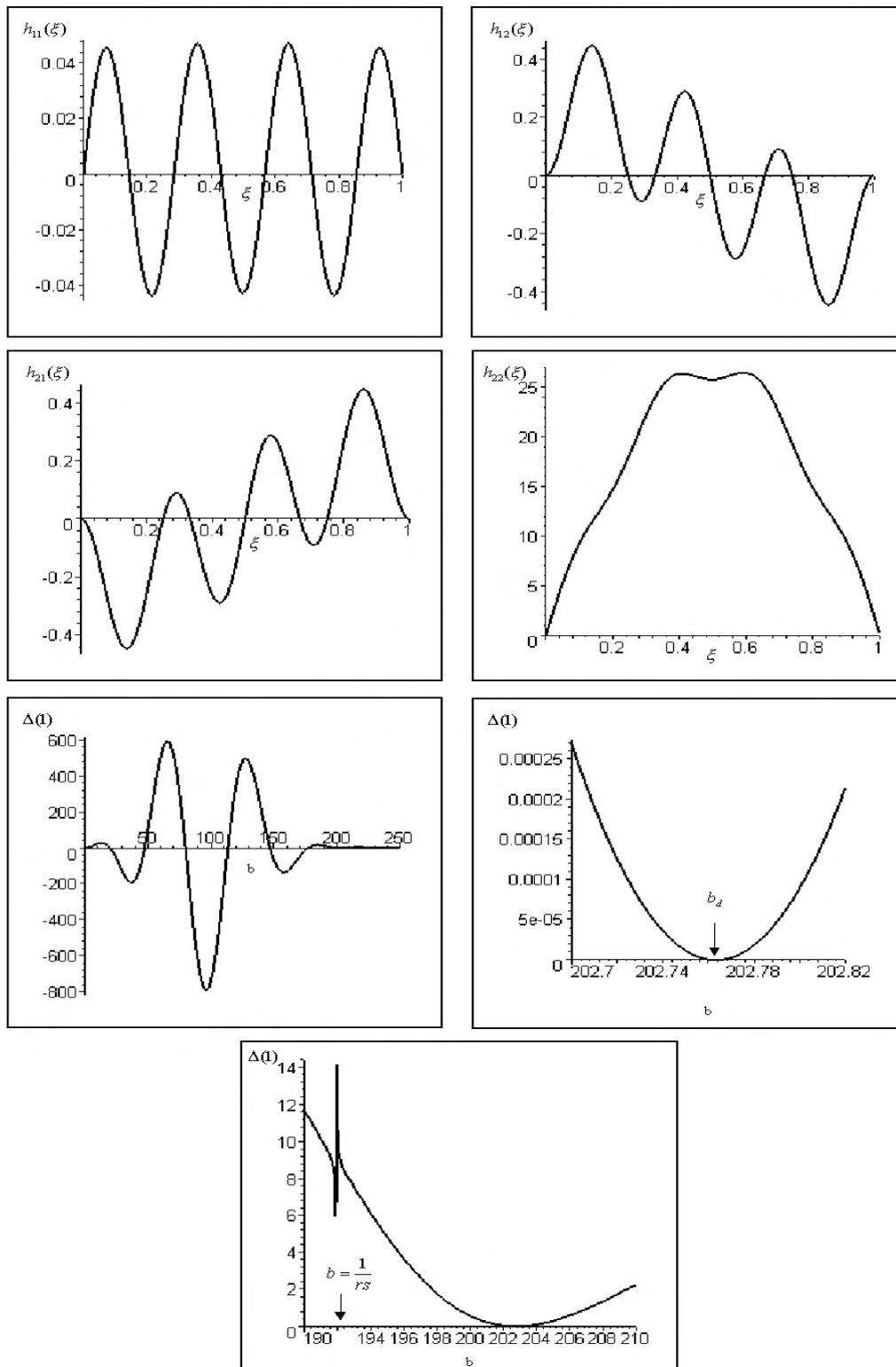


Figura 4.10: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$.

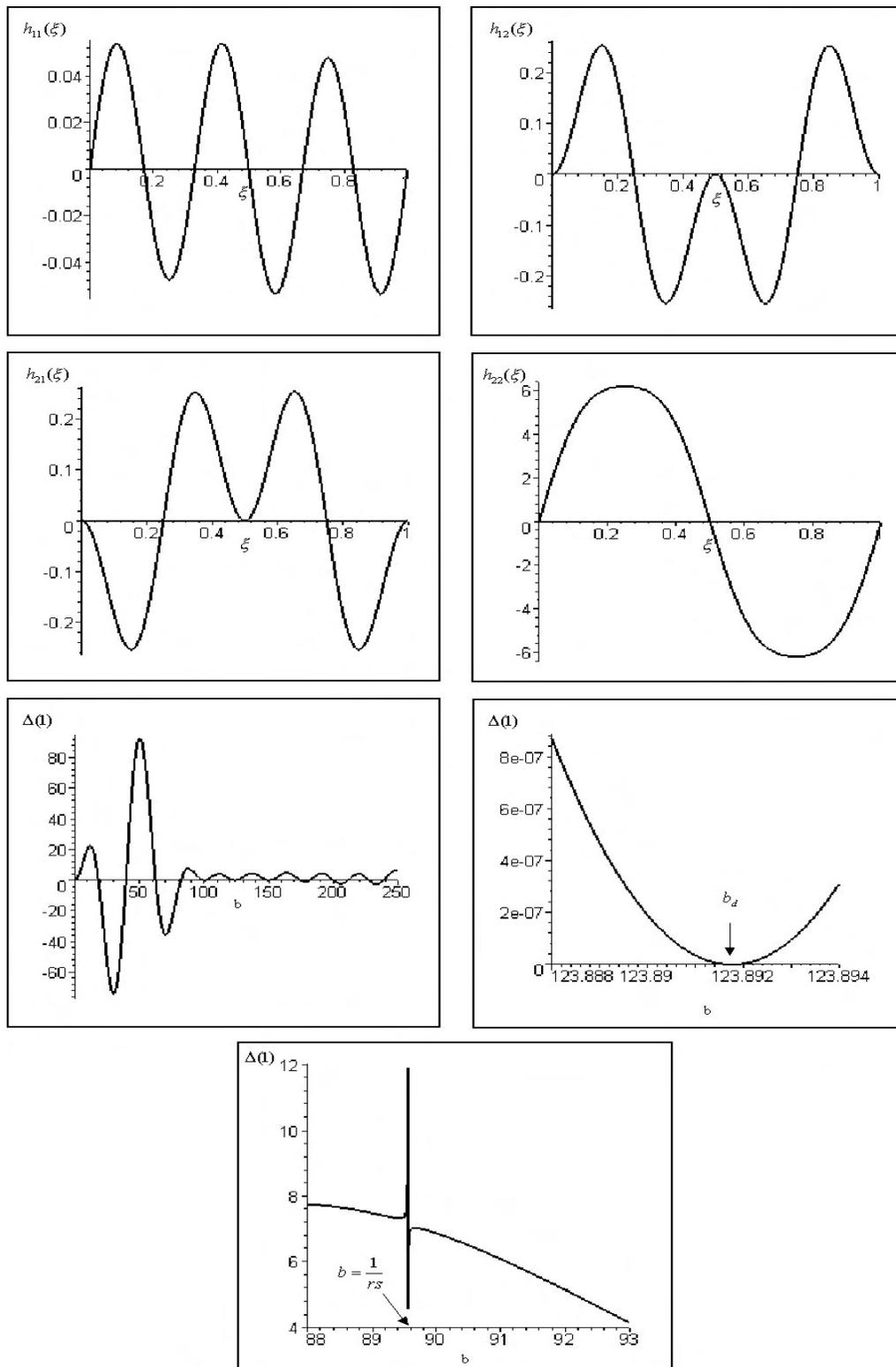


Figura 4.11: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 2$ e $k_2 = 2$.

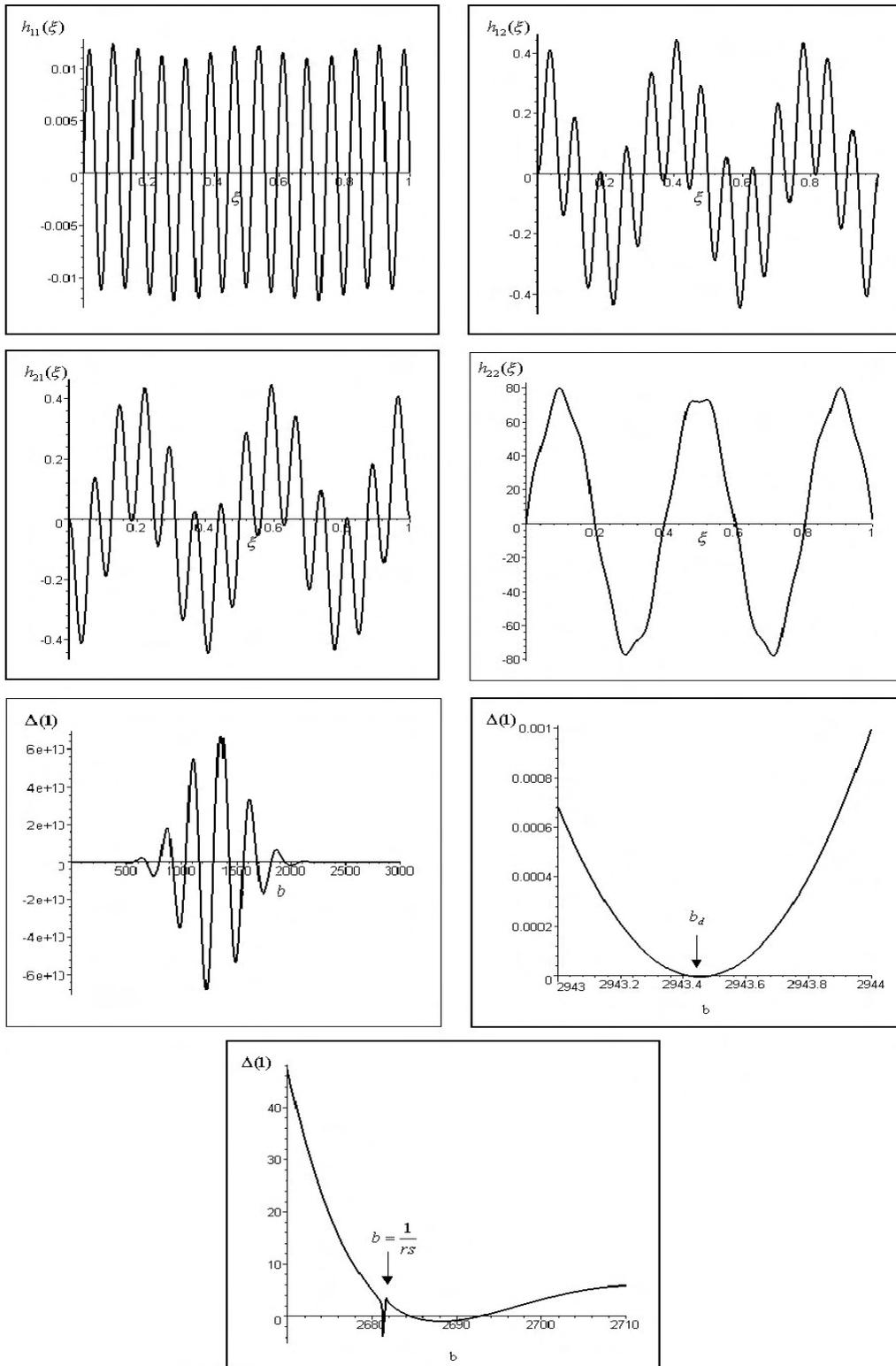


Figura 4.12: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 5$ e $k_2 = 11$.

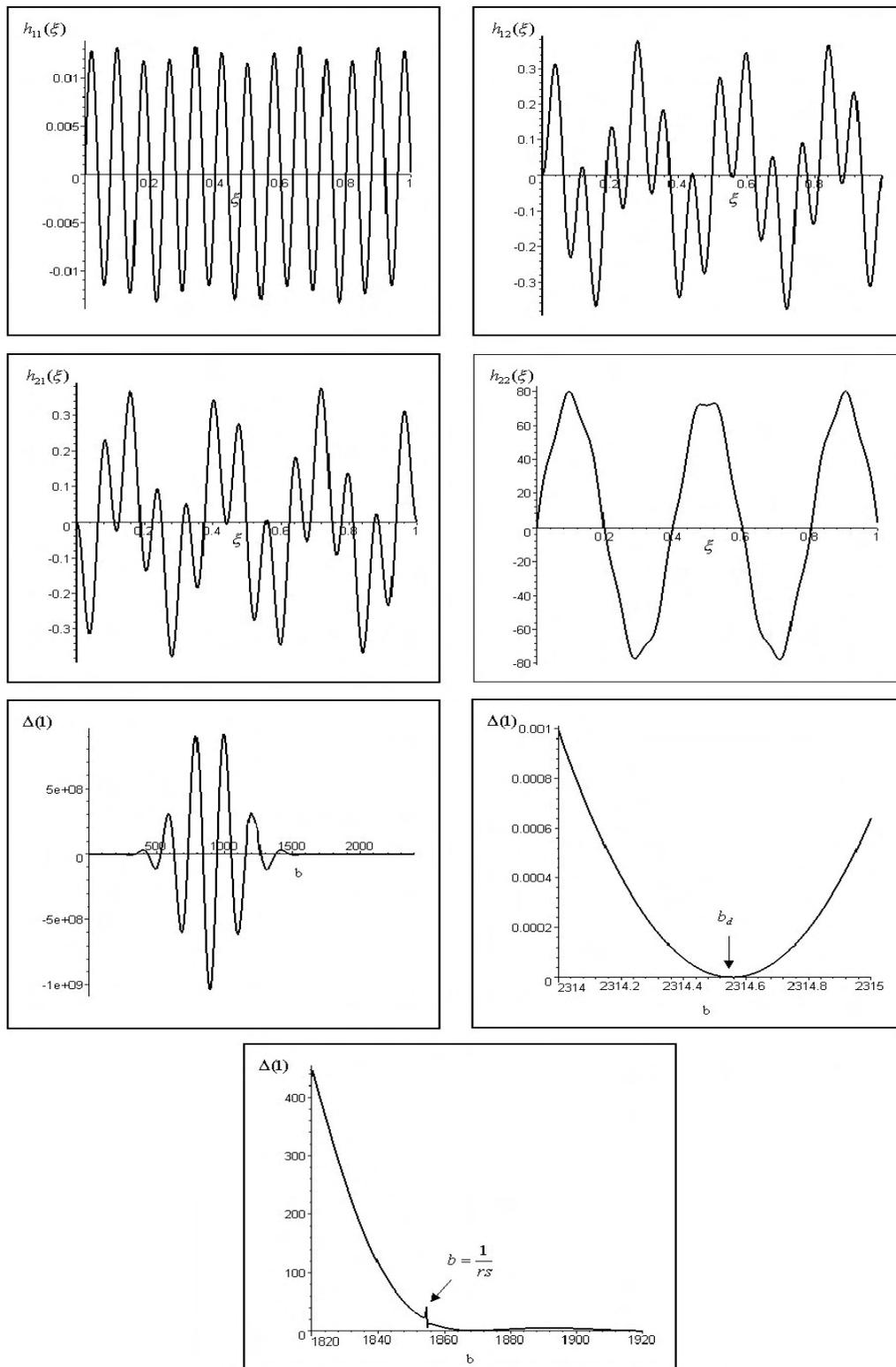


Figura 4.13: Gráficos das componentes da solução dinâmica e equação de frequência para $k_1 = 7$ e $k_2 = 9$.

Supondo que a viga do primeiro exemplo, para $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$, tenha comprimento L igual a 1 m e seja de aço, cujo módulo de Young E é 206 GPa e densidade ρ é $7,85\text{ g/cm}^3$. Assumindo estes valores e usando as expressões (4.79), (4.84), (4.76) e (4.77) calcula-se G , α , I e A , respectivamente. Com estes valores obtém-se a frequência crítica ω_c e o valor do parâmetro b associado. Com estas informações, usando as equações (3.89), (3.96) e (3.94) que são para os casos em que $\omega < \omega_c$, $\omega = \omega_c$ e $\omega > \omega_c$, respectivamente, graficamente, temos que a solução dinâmica esta ilustrada na figuras 4.14.

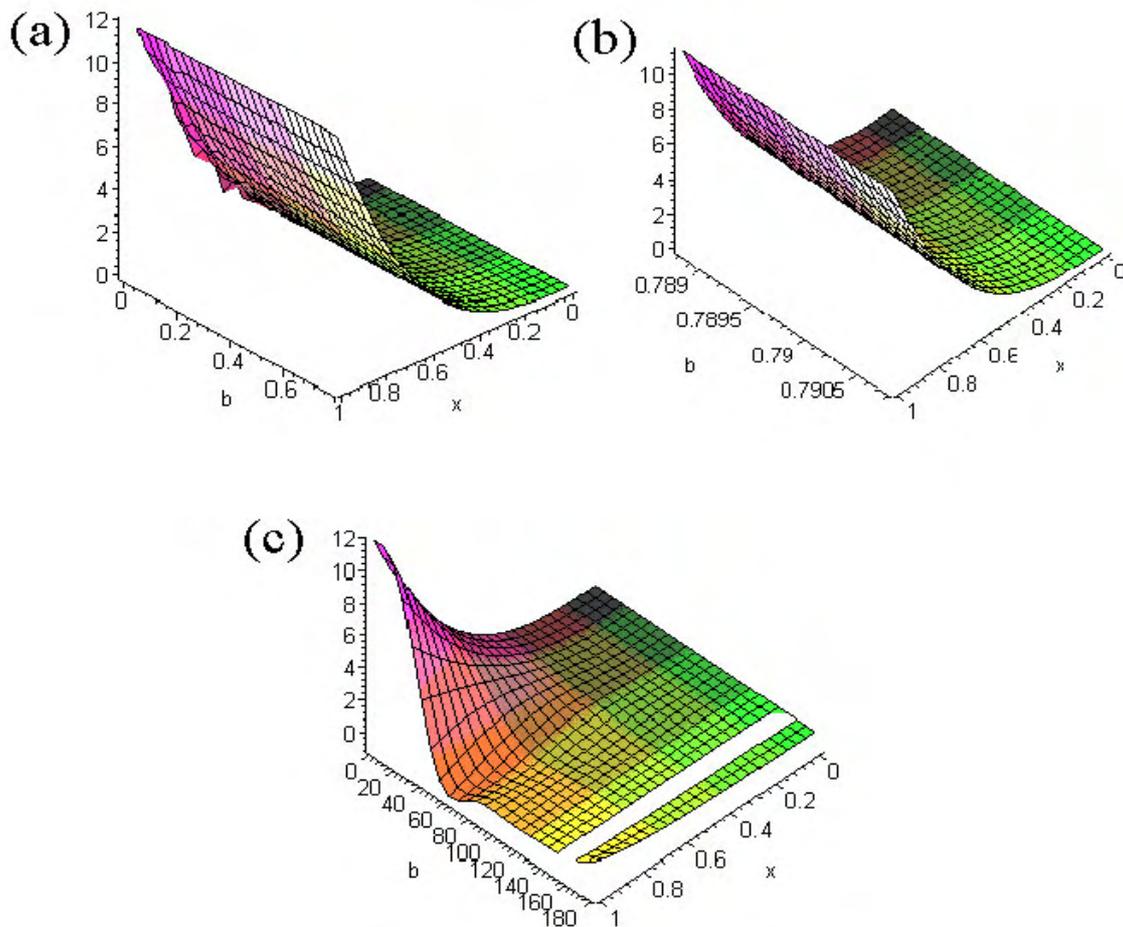


Figura 4.14: Solução dinâmica para: (a) $\omega < \omega_c$; (a) $\omega = \omega_c$; (c) $\omega > \omega_c$;

Note que na figura 4.14 aparece uma falha no gráfico. Fazendo um zoom na região em que se apresenta a falha, podemos observar melhor na figura 4.15 que a solução dinâmica não está definida nesta região.

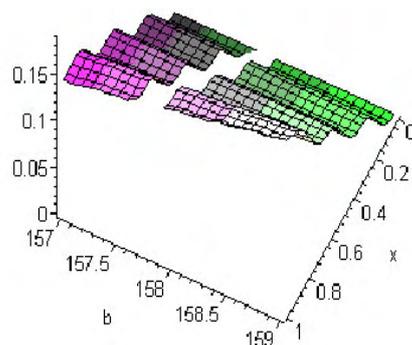


Figura 4.15: Solução dinâmica para $\omega > \omega_c$;

Observe que a solução dinâmica no caso em que $\omega > \omega_c$, dada pela equação (3.94), matematicamente não tem motivo para se apresentar esta falha. Como isso ocorreu devido a overflow do Maple, um maneira resolver este problema é usar a expansão em série de Taylor. Considerando apenas os três primeiros termos da expansão em série de Taylor, graficamente o resultado está ilustrado na figura 4.16.

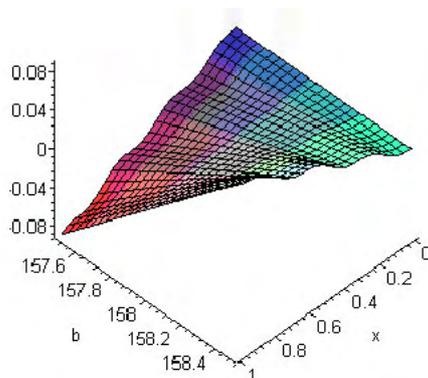


Figura 4.16: Solução dinâmica usando expansão em série de Taylor para $\omega > \omega_c$;

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi utilizada a base dinâmica na derivação de uma condição necessária e suficiente para que uma viga uniforme de Timoshenko com condições de contorno do tipo livre-livre possua um autovalor duplo. Esta base é definida a partir de condições iniciais e portanto é evitado o uso de expressões cuja validade depende da natureza das raízes $\pm\epsilon$ e $\pm i\delta$ do polinômio característico associado a equação de quarta ordem que provém do desacoplamento das equações que governam o modelo de Timoshenko para o cálculo das autofunções.

Com o uso da base de Euler, construída em termos das raízes do polinômio característico, a determinação das autofunções ou modos para esse tipo de viga requer a resolução de um sistema algébrico linear homogêneo com quatro equações algébricas. A introdução da base dinâmica e uso direto das condições de contorno permite reduzir o problema a resolução de um sistema de ordem dois.

As componentes do sistema são não-lineares com respeito da frequência e sua obtenção requer o cálculo das raízes de uma equação transcendente no caso do uso da base de Euler. Com o uso da base dinâmica tem-se o estudo alternativo dos zeros da derivada de uma solução fundamental que depende da frequência.

Uma vantagem de usar a base dinâmica é que quando o parâmetro ϵ igual a zero é raiz do polinômio característico não é preciso resolver novamente o problema escolhendo uma nova base para que haja solução não-nula, basta tomar o limite da solução dinâmica quando ϵ tende a zero. O mesmo procedimento é usado para obter a equação característica.

A equação de frequência obtida pelas formulações espectral e dinâmica coincidem no caso em que a frequência é maior que a frequência crítica.

A mesma condição necessária e suficiente que garante a existência de um autovalor duplo numa viga livre-livre obtida por Geist e Joyce em [8] com o uso

da base de Euler, foi derivada de maneira mais simples com o uso da base dinâmica. As simulações realizadas com vigas que obedecem esta condição apresentam variação no cálculo da resposta que gera a base dinâmica, o que será objeto de um posterior estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] BENAROYA, H. *Mechanical vibration: analysis, uncertainties, and control*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [2] CLAEYSSSEN, J., GALLICCHIO, E., AND TAMAGNA, A. *Sistemas vibratórios amortecidos*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [3] CLAEYSSSEN, J. C. R. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Sound and Vibration* 1, 140 (1990), 73–84.
- [4] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND SODER, R. A. A dynamical basis for computing modes of euler-bernoulli and timoshenko beams. *Sound and Vibration* (2002).
- [5] CLAEYSSSEN, J. C. R., SUAZO, G. C., AND JUNG, C. A direct approach to seconder-order matrix non-classical vibrating equations. *Appl. Num. Math.* 39 (1999), 65–78.
- [6] CLAEYSSSEN, J. R., AND COSTA, S. N. J. Modes for the coupled timoshenko model with a restrained end. setembro/2004 (*submetido*).
- [7] GEIST, B. *The asymptotic expansion of the eigenvalues of he Timoshenko beam*. PhD thesis, Rensselaer Polytecnic Institut, 1994.
- [8] GEIST, B., AND MCLAUGHLIN, J. R. Double eigenvalues for the uniform timoshenko beam. *Appl. Math. Lett.* 10, 3 (1997), 129–134.
- [9] GINSBERG, J. H. *Mechanical and structural vibration: theory and applications*. John Willey, USA, 2001.
- [10] HAN, S. M., BENAROYA, H., AND WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using for engineering theories. *Sound and Vibration* 5, 225 (1999), 935–988.

- [11] HUANG, T. C. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Appl. Mech.* (1961), 579–584.
- [12] INMAN, D. *Vibration, with control, measurement, and stability*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [13] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [14] MOLER, C., AND LOAN, C. V. Nineteen dubious ways of computing the exponential of a matrix. *SIAM Reviews* (1978), 801–836.
- [15] R.D.COOK. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley, 1981.
- [16] TRAILL-NASH, R. W., AND COLLAR, A. R. The effects of shear flexibility and rotatory inertial on the bending vibrations of beams. *Mech. and Appl. Math* 9, 2 (1953), 186–222.