

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS
CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

por

Eduardo Lenz Cardoso

Tese de Doutorado

Porto Alegre, Fevereiro de 2005

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ATUADORES PIEZELÉTRICOS
CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

por

Eduardo Lenz Cardoso

Mestre em Engenharia

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

Prof. Dr. Luiz Eloy Vaz

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Fevereiro de 2005

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer aos professores Jun Sérgio Ono Fonseca, Rogério José Marzack, Emílio Carlos Nelli Silva, Eduardo Bittencourt, Luiz Eloy Vaz e Ignácio Iturrioz, por todas as discussões que permitiram o desenvolvimento deste trabalho e por toda a orientação e material bibliográfico.

Gostaria de agradecer também ao governo dinamarquês, pela oportunidade de participar da disciplina "Advanced Topics in Structural Optimization: Topology Design - Theory and Practice" na Universidade Técnica da Dinamarca. Em especial, gostaria de agradecer aos Professores Pierre Dusynx, Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund pelas discussões sobre parametrizações constitutivas, métodos de controle de gradiente e métodos de programação matemática.

Ao colega Pablo Muñoz-Rojas meus agradecimentos por todas as discussões sobre problemas não-lineares, análise de sensibilidade e métodos de otimização, por toda a bibliografia disponibilizada e pela companhia nas estadas em São Paulo, Dinamarca e Joinville.

Aos meus amigos e aos colegas do Grupo de Mecânica Aplicada, GMAp, por todos os momentos de alegria e descontração.

A minha mãe e minha irmã, que sempre me apoiaram e que permitiram que o sonho de seguir a carreira acadêmica se concretizasse.

A minha esposa Jaqueline, o meu amor e o mais sincero agradecimento por todos os momentos que passamos juntos.

Por fim, gostaria de agradecer à UFRGS, ao PROMEC e à CAPES, por todo o apoio e infraestrutura para o desenvolvimento desta tese.

A mente que se abre
a uma nova idéia jamais
volta ao seu tamanho original
Albert Einstein (1879 - 1955)

Resumo

Este trabalho aborda o projeto otimizado de transdutores eletro-mecânicos baseados no fenômeno da piezeletricidade e submetidos a não-linearidade geométrica. Para este fim, é proposta uma formulação de equilíbrio para descrever o movimento finito de um corpo piezelétrico e a sua discretização por meio do método dos Elementos Finitos. Problemas de equilíbrio com pontos limites podem ser corretamente simulados com a abordagem de solução proposta, pois questões como a imposição de comprimento de arco em problemas acoplados são discutidas. Diferentes métodos de controle de arco são discutidos e é proposta a consideração do método dos Deslocamentos Generalizados como um tipo de controle de comprimento de arco da família das restrições ortogonais.

A formulação de otimização proposta consiste na maximização de componentes do vetor de estado de alguns pontos da estrutura (portas de saída) com restrição de volume e valores de algumas posições do vetor de estado. A análise de sensibilidade proposta, baseada na abordagem adjunta, é suficientemente geral para permitir o projeto de atuadores e sensores e permite a aplicação de condições de contorno essenciais não-homogêneas, como é o caso da diferença de potencial. O método das Assíntotas Móveis Generalizadas (GMMA) é utilizado conjuntamente com a tradicional Programação Linear Sequencial (SLP) para a solução do problema de otimização e suas implementações são discutidas em detalhes.

Resultados mostrando a influência da não-linearidade geométrica e/ou rigidez externa não-linear no projeto de transdutores piezelétricos são apresentados e discutidos.

Abstract

”Topology Optimization of Piezoelectric Actuators Considering Geometric Nonlinearities ”

This work proposes a methodology to the optimum design of piezoelectric actuators subjected to geometric nonlinearities. To achieve this goal, an equilibrium formulation describing the finite movement of a piezoelectric body and its discretization using the Finite Element Method are discussed. Equilibrium paths with limit and snap-back points can be tracked with the proposed formulation, as questions as of imposition of appropriated arc-length measures in coupled problems are discussed. Different kinds of arc-length controls are discussed and it is proposed that the Method of Generalized Displacements can be seen as an orthogonal arc-length method.

The optimization problem consists in the maximization of components of the displacement vector, with volume and displacement constraints. The sensitivity analysis is general enough to be used in the design of actuators and sensors and takes into account the necessary modifications to consider non-homogeneous essential boundary conditions, like electric potentials. The Generalized Method of Moving Assymptotes (GMMA) as well as the Sequential Linear Programming (SLP) are used to solve de optimization problem and its computational implementation are discussed.

Results obtained with the proposed formulation are shown and the influence of the geometric nonlinearities are discussed.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Organização do Texto	2
1.2	Contribuições	3
2	UMA BREVE REVISÃO DOS CONCEITOS DA PIEZELETRICIDADE	4
2.1	Problemas Acoplados	6
2.1.1	Relações Termodinâmicas	6
2.2	Trabalho Externo	11
2.3	Notação Utilizada para a Descrição dos Tensores Constitutivos	12
2.3.1	Problemas Planos	13
2.3.1.1	Estado Plano de Deformações	13
2.3.1.2	Estado Plano de Tensões	15
3	DESCRIÇÃO FINITA DO MOVIMENTO DE UM SÓLIDO PIEZELÉTRICO	17
3.1	Descrição Lagrangiana do Movimento	18
3.1.1	Movimento Finito	19
3.1.2	Medidas de deformação	19
3.1.3	Medidas de campo elétrico	20
3.1.4	Medidas de tensão	21
3.1.5	Medidas de deslocamento elétrico	22
3.1.6	Princípio da Indiferença do Referencial	23
3.1.7	Invariância com Respeito ao Sistema de Coordenadas	25
3.1.8	Análise de Conjugação entre as medidas Lagrangianas Elétricas	26
3.2	Equações incrementais	27
3.2.1	Variação com respeito a uma componente de deslocamento	29
3.2.2	Variação com respeito ao potencial elétrico	30
3.2.3	Equações incrementais acopladas	31

3.3	Equações infinitesimais	32
3.4	Aproximação por Elementos Finitos	33
4	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	39
4.1	Equações de Equilíbrio na Forma Incremental	39
4.2	Solução das Equações de Equilíbrio na Forma Incremental	41
4.2.1	Comprimento de Arco Cilíndrico	41
4.2.2	Comprimento de Arco - Método de Crisfield-Ramm Modificado	43
4.2.3	Método dos Deslocamentos Generalizados (GDC)	46
4.2.4	Tratamento de Pontos Limites	50
4.2.4.1	Determinação analítica do sinal de $\delta\lambda_1^i$	51
4.2.5	Equações de Restrição e Problemas Acoplados	54
4.2.6	Métodos de Comprimento de Arco e Sequência de Otimização	55
5	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	57
5.1	Revisão Histórica	57
5.2	Otimização Topológica	60
5.2.1	Instabilidade de Tabuleiro	66
5.2.2	Problemas com Não-Linearidade Geométrica	67
6	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	70
6.1	Introdução	71
6.2	Algoritmos de Solução Dual	73
6.2.1	Condições de Karush-Kuhn-Tucker	74
6.2.2	Dualidade	74
6.2.3	Separabilidade	77
6.3	Aproximações Convexas Separáveis	78
6.3.1	Método das Assíntotas Móveis Generalizadas	79
6.3.1.1	Implementação	83
6.3.2	Programação Linear Seqüencial	85
7	PROJETO DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS	86
7.1	Definição de Transdutor	86
7.1.1	Sensores e Atuadores	87
7.2	Atuadores Piezelétricos	88
7.3	Projeto de Mecanismos Flexíveis	90

7.3.1	Projeto de Atuadores Piezelétricos Utilizando Otimização Topológica . . .	91
7.3.1.1	Maximização do Deslocamento de Saída	92
7.3.1.2	Energia Mútua	94
7.3.2	Comparação entre as abordagens	96
7.4	Análise de Sensibilidade	98
7.4.1	Sensibilidade de uma Componente do Vetor de Estados	99
7.4.1.1	Abordagem direta	100
7.4.1.2	Abordagem adjunta	101
7.4.1.3	Sensibilidade de Uma Componente do Vetor de Estados para o Caso de Condições de Contorno Essenciais Não-Homogêneas	102
7.4.2	Derivada do Volume	103
7.4.3	Derivada da Flexibilidade	104
7.4.4	Rigidez Externa	104
7.4.5	Restrições de Igualdade	106
8	RESULTADOS	107
8.1	Problemas de análise	107
8.2	Problemas Minimização de Flexibilidade NLG	111
8.3	Projeto de Atuadores Piezelétricos Considerando a Não-Linearidade Geométrica	120
8.4	Projeto de Um Atuador Flexitensional do Tipo "Moonie"	122
8.4.1	Estudo da Existência de Extremos Locais	122
8.4.2	Rigidez Externa Não-Linear	123
8.4.3	Influência da Fração de Volume	126
8.5	Projeto de um Atuador do Tipo Ponte	126
9	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	132
9.1	Aspectos Conclusivos	132
9.2	Sugestão para trabalhos futuros	134
	BIBLIOGRAFIA	135
A	DEFINIÇÃO DE ALGUMAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	155
B	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO POR MEIO DA LINEARIZAÇÃO DIRETA	159

C	RELAÇÃO ENTRE A MATRIZ TANGENTE ACOPLADA E A DERIVADA DO RESÍDUO	163
D	IMPOSIÇÃO DE SIMETRIAS	165
E	DETERMINAÇÃO DO VALOR DA CARGA CRÍTICA DE UMA COLUNA COM INSERTOS PIEZELÉTRICOS	169

Lista de Símbolos

a	Escalar genérico	
a_0, a_1 e a_2	Coefficientes de uma equação de segundo grau	
b_i	Vetor força de corpo	$\left[\frac{N}{m^3}\right]$
b_i	Valor superior das aproximações das restrições GMMA	
c_k	Incremento linear de campo elétrico	$\left[\frac{V}{m}\right]$
c_v	Calor específico por unidade de massa	$\left[\frac{J}{Kg^\circ C}\right]$
$\hat{\mathbf{c}}$	Vetor posição relativa entre dois observadores O e \hat{O}	$[m]$
det	Determinante	
d	Fator de penalização associado as variáveis fictícias	
d	Escalar utilizado na equação de restrição do comprimento de arco	
\mathbf{d}^k	Direção de busca no espaço dual na iteração k do método dos gradientes conjugados	
da	Mudança no valor da variável a	
${}^t d\mathbf{X}$	Vetor posição relativa entre dois pontos na configuração t	$[m]$
e_{ijk}	Tensor de propriedades piezelétricas	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$
esp_i	Espessura do i -ésimo elemento finito	$[m]$
f	Função de restrição do comprimento de arco	
$f_0(\rho)$	Função objetivo	
$\tilde{f}_0(\rho)$	Aproximação da função objetivo	
$f_i(\rho)$	Função de restrição	
$\tilde{f}_i(\rho)$	Aproximação da função de restrição	
$h(\mathbf{x}, \mu)$	Função de restrição do comprimento de arco	
$h(\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d)$	Função indicadora	
k	Escalar utilizado na equação de restrição do comprimento de arco	
$l(\mu)$	Função dual	

ne	Número de elementos finitos	
nen	Número de nós de um elemento finito	
${}^t p$	Ponto material na configuração t	
p_i	Vetor de constantes pirlétricas	$[Cm^{-2}K^{-1}]$
p_{ij}^k	Coefficiente utilizado na aproximações GMMA, função j , variável i , ponto k	
q_{ij}^k	Coefficiente utilizado na aproximações GMMA, função j , variável i , ponto k	
q	Carga elétrica	$[C]$
${}^t q$	Ponto material na configuração t	
r_i	Fator de ajuste da aproximação GMMA	
s	Entropia	$[\frac{J}{K}]$
s_{ij}	Fator de ajuste das assíntotas móveis	
sgn	Função sinal	
t_i	Vetor tração superficial	$[\frac{N}{m^2}]$
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos	$[m]$
u_{out}	Deslocamento de saída	$[m]$
u_{lat}	Deslocamento lateral	$[m]$
w	Fator de ajuste para a função Obj	
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de estado generalizadas	
\mathbf{z}	Vetor de variáveis fictícias	
A_i	Área do i -ésimo elemento finito	$[m^2]$
\mathbf{A}_1^{ne}	Operador de localização das matrizes e vetores locais para o sistema global de elementos finitos	
\mathbf{B}	Densidade de fluxo magnético	$[\frac{Wb}{m^2}]$
\mathbf{B}_u	Matriz de derivadas das funções de interpolação $\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_u^0 + \mathbf{B}_u^1$	
\mathbf{B}_u^0	Matriz de derivadas das funções de interpolação	
\mathbf{B}_u^1	Matriz de derivadas das funções de interpolação (correção de coordenadas)	
B_ϕ	Matriz de derivadas das funções de interpolação	
\mathbf{C}	Vetor utilizado na equação de restrição do comprimento de arco	
${}^t_0 \mathbf{C}$	Tensor de Cauchy-Green à direita	$[\frac{m}{m}]$

C_{ijkl}	Tensor de propriedades elásticas	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
D	Matriz diagonal utilizada na equação de restrição do comprimento de arco	
tD_i	Vetor deslocamento elétrico na configuração deformada	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$
t_0D_i	Vetor deslocamento elétrico Lagrangiano	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$
DI^k	Gradiente da função dual	
E_{ij}	Tensor deformação de Green	$\left[\frac{m}{m}\right]$
F	Vetor de forças internas generalizadas	
F_{ext}	Vetor de forças externas	$[N]$
F_{int}	Vetor de forças internas	$[N]$
${}^t_0\mathbf{F}$	Tensor gradiente de deformação	$\left[\frac{m}{m}\right]$
\mathbf{Fk}_i	Força da mola i	$[N]$
$Flex$	Flexibilidade	$[Nm]$
G	Matriz de derivadas das funções de interpolação	
$\mathbf{G}_{\mathcal{L}}$	Matriz Hessiana da função de Lagrange	
G	Funcional de energia de Gibbs	$\left[\frac{J}{m^3}\right]$
GSP	Parâmetro de Rigidez Generalizado	
H	Deslocamento generalizado	
H	Campo magnético	$\left[\frac{A}{m^2}\right]$
I	Matriz Identidade	
I_d	Número desejado de iterações de correção do resíduo	
I_{ef}	Número efetivo de iterações de correção do resíduo	
L	Funcional de Lagrange	
Li	Vetor de localização	
N	Matriz cujas colunas são os vetores gradientes das restrições	
\mathbf{K}_{σ}	Matriz de rigidez geométrica	$\left[\frac{N}{m}\right]$
\mathbf{K}_{uu}	Matriz de rigidez elástica	$\left[\frac{N}{m}\right]$
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	Matriz de rigidez dielétrica	$\left[\frac{C}{V}\right]$
\mathbf{K}_k	Matriz global com a contribuição das molas externas	$\left[\frac{N}{m}\right]$
$\mathbf{K}_{u\phi}$	Matriz de acoplamento piezelétrico	$\left[\frac{N}{V}\right]$
\mathbf{K}_t	Matriz de rigidez tangente do problema acoplado	
K_i	Rigidez da mola i	$[N/m]$
K_s, K_{out}	Rigidez no ponto de saída	$[N/m]$

L_{ij}	Assíntotas inferiores	
M_{ijkl}	Tensor de propriedades eletrestrictivas	$[m^2V^{-2}]$
$N_{\alpha i}^u$	Função de interpolação de deslocamentos para o nó α , componente i	
N_{α}^c	Função de interpolação para o campo de diferença de po- tencial, nó α	
Obj	Função objetivo baseada em energia mútua	
P_i	Vetor polarização elétrica	$[Cm^{-2}]$
\mathbf{P}_{ext}	Vetor de forças externas generalizadas	
Q	Calor	$[J]$
Q_{ext}	Vetor de cargas elétricas externas	$[C]$
Q_{int}	Vetor de cargas elétricas internas	$[C]$
$\widehat{\mathbf{Q}}(t)$	Tensor ortogonal próprio que relaciona as bases de dois diferentes observadores O e \widehat{O}	
$\widetilde{\mathbf{Q}}$	Tensor ortogonal próprio que relaciona diferentes siste- mas de coordenadas de um mesmo observador	
\mathbf{R}	Vetor resíduo	
${}^t_0\mathbf{S}$	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff	$[\frac{N}{m^2}]$
$\widehat{\mathbf{S}}$	Matriz com componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff	$[\frac{N}{m^2}]$
\vec{S}	Vetor com componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff	$[\frac{N}{m^2}]$
T	Temperatura	$[K]$
T_0	Temperatura de referência	$[K]$
${}^t_t\mathbf{T}$	Tensor tensão de Cauchy	$[\frac{N}{m^2}]$
${}^t_0\mathbf{T}$	Primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff	$[\frac{N}{m^2}]$
$\mathbf{T}(\mathbf{X})$	Tensor constitutivo efetivo	
$\mathbf{T}^0(\mathbf{X})$	Tensor constitutivo de um material base	
\mathbf{T}^H	Tensor constitutivo homogeneizado	
V	Volume	$[m^3]$
V^P	Região viável	
\widetilde{V}^P	Aproximação da região viável	
W_b	Trabalho externo das forças de corpo	$[J]$
W_{ext}	Funcional de trabalho externo	$[J]$

W_t	Trabalho externo das forças de superfície	$[J]$
W_ϕ	Trabalho externo das cargas elétricas de superfície	$[J]$
${}^t\mathbf{X}^p$	Vetor posição do ponto p na configuração t	
U	Energia interna	$[J]$
\mathbf{U}	Vetor de deslocamentos nodais	$[m]$
U_{ij}	Assíntotas superiores	
$\tilde{\alpha}$	Fator de escala	
α^k	Passo obtido por busca linear	
α_j	Limite móvel inferior	
β	Fator adicional de penalização do volume	
β_i	Limite móvel superior	
β_{ij}	Tensor de dilatação térmica	$\left[\frac{m}{K}\right]$
β^k	Fator de ajuste da direção conjugada	
γ	Peso específico	$[Kgm^{-3}]$
δa	Incremento iterativo da grandeza a	
${}_b^a\delta A$	Primeira variação de A com respeito a b , na configuração a	
δ_{ij}	Delta de Kronecker	
ϵ_0	Permissividade dielétrica do vácuo ($8.854 * 10^{-12}$)	$[Fm^{-1}]$
ϵ_{ij}	Tensor permissividade dielétrica	$[C^2N^{-1}m^{-2}]$
ε_{ij}	Tensor de deformações infinitesimais	$\left[\frac{m}{m}\right]$
η_{ij}	Parcela não-linear do incremento de deformações	$\left[\frac{m}{m}\right]$
θ	Orientação da célula unitária	$[rad]$
κ_{ij}	Tensor permissividade relativa	
λ	Nível de carregamento	
$\boldsymbol{\lambda}_g$	Vetor de variáveis adjuntas	
μ	Parâmetro geométrico da célula unitária	
μ	Escalar que parametriza \mathbf{x} e λ	
$\boldsymbol{\mu}$	Vetor dos multiplicador de Lagrange	
ρ	Fração de volume ou densidade relativa de material	
σ	Distribuição superficial de cargas elétricas	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$
ς_{ij}	Parcela linear do incremento de deformações	$\left[\frac{m}{m}\right]$
τ	Parâmetro geométrico da célula unitária	
ϕ	Potencial elétrico	$[NmC^{-1}]$

φ_i	Vetor campo elétrico	$\left[\frac{V}{m}\right]$
χ_{ij}	Tensor suscetibilidade dielétrica	$[Fm^{-1}]$
Γ_0	Configuração de referência (superfície)	
Δ	Incremento	
$(\Delta S)^2$	Comprimento de arco	
$\Lambda(\mathbf{X})$	Função indicadora	
Φ	Vetor de voltagens nodais	$[NmC^{-1}]$
Ω_0	Configuração de referência (volume)	
Ω_{t_1}	Configuração intermediária	
Ω	Domínio de projeto	
Ω^m	Domínio de projeto com material	
Ω^v	Domínio de projeto sem material	
\mathcal{L}	Função de Lagrange	
$(A)_{x,y}$	A é avaliado com x e y mantidos constantes	
${}_b^a A$	Valor de A na configuração a , tendo a configuração b como referência	
\underline{a}	Limite inferior para a variável a	
\bar{a}	Limite superior para a variável a	
\dot{a}	$\frac{da}{dt}$	
\ddot{a}	$\frac{d^2a}{dt^2}$	
$\ \cdot\ _2$	Norma Euclidiana	
$ \cdot $	Valor absoluto	

Lista de Figuras

2.1	Estrutura cristalina centrosimétrica (esquerda) e não-centrosimétrica (direita).	4
2.2	Corpo submetido a um estado plano de deformações.	14
2.3	Corpo submetido a um estado plano de tensões.	16
4.1	Convergência do método de comprimento de arco com restrição cilíndrica, correspondente a Equação de restrição (4.14), para um sistema de dois graus de liberdade.	42
4.2	Convergência do método de comprimento de arco, correspondente as Equações de restrição (4.17) e (4.19), para um sistema de dois graus de liberdade.	44
4.3	Convergência do método de comprimento de arco correspondente as Equações de restrição (4.17) e (4.25), para um sistema de dois graus de liberdade.	45
4.4	Interpretação geométrica da Equação (4.30) para um sistema de dois graus de liberdade.	46
4.5	Convergência do método GDC, para um sistema de dois graus de liberdade.	49
4.6	Trajectoria de equilíbrio não-linear. Os pontos A e C são pontos limites e o ponto B é um ponto de "snap-back".	54
5.1	Região de projeto (esquerda) e estrutura obtida com uso do método da Otimização Topológica.	60
5.2	Topologia com instabilidade de tabuleiro.	66
6.1	Aproximação GMMA.	80
7.1	Efeito piezelétrico inverso (esquerda) e efeito piezelétrico direto (direita).	88
7.2	Atuador amplificado externamente por uma estrutura em arco ("Moonie").	89
7.3	Atuador amplificado internamente por empilhamento ("Stack").	90
7.4	Inversor de movimento: mecanismo tradicional (em cima), mecanismo totalmente flexível concentrado (meio) e mecanismo totalmente flexível distribuído (em baixo).	91

7.5	Região de projeto de um mecanismo flexível, portas de entrada e de saída.	93
7.6	Casos de carregamento considerados para a otimização baseado em energia mútua [De Lima, 2002].	96
7.7	Mecanismo rotulado obtido com a formulação de maximização do deslocamentos de saída.	97
8.1	Problema de verificação: flambagem de uma coluna submetida a ação de material piezelétrico.	108
8.2	Relação entre o nível de carregamento λ e o deslocamento vertical do ponto A, para o exemplo primeiro exemplo de verificação.	109
8.3	Comportamento do deslocamento vertical no ponto A, para diferentes valores de perturbação da posição vertical do nó do ponto B. O Valor da perturbação 1 é maior do que o da perturbação 2.	110
8.4	Configuração final da estrutura (todos os deslocamentos estão multiplicados por um fator de $1 * 10^4$)	110
8.5	Pórtico de Lee com um inserto piezelétrico. Dimensões em <i>mm</i>	112
8.6	Deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força, se o cerâmico piezelétrico não é considerado.	113
8.7	Deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força. Resultado obtido considerando o cerâmico piezelétrico.	114
8.8	Diferença de pontencial no canto superior direito da pastilha piezelétrica.	115
8.9	Viga longa sob flexão. Dimensões em <i>mm</i>	115
8.10	Deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força.	116
8.11	Potenciais elétricos obtidos nos cantos superior direito e superior esquerdo da pastilha piezelétrica.	117
8.12	Viga submetida a grandes deslocamentos. Dimensões em <i>mm</i>	118
8.13	Topologia obtida para o problema da viga submetida a grandes deslocamentos.	119
8.14	Coluna bi-engastada submetida a um carregamento de compressão. Dimensões em <i>mm</i>	119
8.15	Topologias obtidas para o problema da coluna sob compressão. Solução para o problema linear (esquerda) e não-linear geométrico (direita) (Fator de amplificação dos deslocamentos de $10\times$ mas duas figuras)	120
8.16	Projeto de um atuador Flexitensional	122
8.17	Topologias obtidas para o caso linear (esquerda) e não-linear (direita). Os resultados foram obtidos sem filtragem.	124

8.18	Topologias obtidas para o caso linear (esquerda) e não-linear (direita), considerando filtragem sobre os limites móveis.	124
8.19	Formas de variação não-linear da rigidez do meio externo consideradas no projeto de um atuador tipo "Moonie". A equação linear tem forma $K_s(u_{out}) = 1 * 10^5 + 4 * 10^{11}u_{out}$ e a equação quadrática tem a forma $K_s(u_{out}) = 1 * 10^5 - 1 * 10^{11}u_{out} + 1 * 10^{17}u_{out}^2$	125
8.20	Topologias obtidas com consideração de meio externo com rigidez constante (esquerda), linear (centro) e quadrática (direita).	126
8.21	Topologias obtidas com rigidez externa constante ($K_s = 1 * 10^5 N/m$) e fração de volume de 15% (primeira linha), 20% (segunda linha) e 30% (terceira linha). A primeira coluna contém os resultados obtidos com formulação linear e a segunda coluna os resultados obtidos com a formulação não-linear.	127
8.22	Domínio de projeto considerado na otimização de um atuador do tipo ponte ("bridge"). Dimensões em m	128
8.23	Topologias obtidas para o caso linear (coluna esquerda) e não-linear (coluna direita), para molas externas de rigidez constante $K_s = 1 * 10^2 N/m$ (primeira linha), $K_s = 1 * 10^5 N/m$ (segunda linha) e $K_s = 1 * 10^{10} N/m$ (terceira linha), todos com 20% de fração de volume.	129
8.24	Topologias obtidas para o caso linear (coluna esquerda) e não-linear (coluna direita), para molas externas de rigidez constante $K_s = 1 * 10^2 N/m$ (primeira linha), $K_s = 1 * 10^5 N/m$ (segunda linha) e $K_s = 1 * 10^{10} N/m$ (terceira linha), todos com 10% de fração de volume.	131
D.1	Imposição de simetria de reflexão em problemas lineares.	165
D.2	Síntese de um mecanismo com uma simetria de reflexão em torno do plano ab	166
E.1	Coluna bi-engastada com dois insertos piezelétricos.	169

Lista de Tabelas

2.1	Tensores constitutivos de um material piezelétrico.	12
2.2	Tensores constitutivos de um material ortotrópico com polarização na direção do eixo 3 ($e_{31} = e_{311}$, $e_{32} = e_{322}$, $e_{33} = e_{3333}$, $e_{15} = e_{113}$, $e_{24} = e_{223}$).	16
8.1	Propriedades constitutivas para o cerâmico piezelétrico PZT-5	112
8.2	Valores de deslocamento máximo das topologias das Figuras 8.17 e 8.18, normalizados pelo valor correspondente ao caso com filtro, modelo linear.	124
8.3	Deslocamentos máximos obtidos com as topologias da Figura 8.20, normalizados pelo valor correspondente ao deslocamento obtido com o modelo linear.	125
8.4	Deslocamentos relativos as topologias da Figura 8.21, normalizados pelo valor correspondente a menor fração de volume, caso linear.	126
8.5	Deslocamentos relativos as topologias das duas primeiras linhas da Figura 8.23, normalizados pelo valor da menor rigidez, caso linear.	130
8.6	Deslocamentos relativos as topologias das duas primeiras linhas da Figura 8.24, normalizados pelo valor da menor rigidez, caso linear.	130

1. INTRODUÇÃO

O fenômeno da piezeletricidade é uma das muitas formas de acoplamento eletro-mecânico, permitindo a construção de sensores e atuadores. Devido ao fato de materiais piezelétricos capazes de realizar atuação serem geralmente cerâmicos, estes são na grande maioria das vezes fabricados em geometrias simples e operam um modos de deformação simples, como extensão / contração, cisalhamento puro e flexão. Ainda, para os valores usuais de campo elétrico e dimensões dos cerâmicos utilizados, os deslocamentos obtidos são pequenos, justificando a necessidade de acoplar dispositivos de amplificação mecânica para a obtenção de modos de atuação mais complexos e de maiores amplitudes de deslocamentos. Diversos dispositivos de amplificação mecânica tem sido propostos na literatura especializada, sendo a grande maioria obtida por melhorias em conceitos pré-existentes.

Recentemente, o método da Otimização Topológica de meios contínuos foi utilizado para o projeto de tais mecanismos, permitindo uma substancial melhora em desempenho, inclusive para padrões de atuação não tradicionais (Silva, 1998). No entanto, trabalhos recentes [Bhul et al., 2000; Sigmund e Bhul, 2000 e Bruns e Tortorelli, 2001] tem demonstrado que a consideração de efeitos de alta ordem, como o da não-linearidade geométrica, pode levar a topologias diferentes das obtidas com consideração de equilíbrio linear. Isto ocorre devido ao fato de a otimização topológica permitir a obtenção de estruturas bastante especializadas para as condições de projeto, mas que podem ser sub-ótimas ou mesmo inviáveis em condições de operação diferentes das consideradas no projeto. Com isto, deve-se sempre aprimorar as formulações existentes, com o intuito de considerar o maior número de fatores presentes na vida real. A desconsideração da não-linearidade geométrica na otimização topológica pode levar ao projeto de estruturas que apresentem instabilidades elásticas, mesmo se a magnitude dos deslocamentos for pequena. Outras questões são a possibilidade de utilização favorável de partes que se tornem mais rígidas (*stress-stiffening*) e da correta descrição de partes que sofram grandes rotações, evitando o travamento de mecanismos.

Baseado nestes fatores, é proposta neste trabalho uma metodologia para o projeto otimizado de transdutores piezelétricos submetidos a não-linearidade geométrica.

1.1 Organização do Texto

O projeto de transdutores utilizando o método da Otimização Topológica pode ser dividido em diversas etapas (descrição do equilíbrio do corpo, solução das equações de equilíbrio, formulação do problema de otimização, determinação das sensibilidades e solução do problema de otimização), sendo que cada uma destas etapas engloba um número considerável de conceitos. Como cada etapa se relaciona a uma área independente de pesquisa, foi escolhido apresentar a conceituação e revisão bibliográfica de cada área no capítulo em que o tópico é abordado.

O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão dos conceitos de piezeletricidade e apresenta as equações constitutivas particularizadas para o estado plano de tensões e deformações. Estes conceitos serão utilizados extensivamente ao longo do texto desta tese.

Devido a necessidade de uma descrição finita do movimento de um corpo piezelétrico, faz-se necessária a correta seleção das medidas utilizadas e a correta descrição do movimento do sólido piezelétrico. No Capítulo 3 são propostas uma formulação incremental na forma integral e sua discretização por meio do método dos Elementos Finitos. De posse do sistema de equações linearizadas obtido no Capítulo 3, são discutidas no Capítulo 4 estratégias de solução do equilíbrio não-linear baseadas no conceito de comprimento de arco. Em especial, dá-se atenção a métodos de restrição ortogonais e, por este motivo, é proposta neste capítulo a unificação do método dos Deslocamentos Generalizados (GDC) com os métodos tradicionais de comprimento de arco com restrições ortogonais. Com isto, é possível utilizar de forma unificada os conceitos desenvolvidos para cada um dos métodos e obter uma implementação computacional unificada.

O Capítulo 5 apresenta os conceitos básicos relacionados ao método da Otimização Topológica. Em especial, são abordadas as parametrizações materiais mais utilizadas, questões como existência e unicidade de soluções, instabilidade de tabuleiro e a influência da não-linearidade geométrica nos resultados obtidos com o método da Otimização Topológica. O Capítulo 6 aborda as estratégias de solução dos problemas de programação matemática. Embora exista um grande número de abordagens de solução, foi dada ênfase a solução por aproximações convexas e métodos duais, mais eficientes em problemas de Otimização Topológica, devido ao grande número de variáveis de projeto e ao pequeno número de restrições. Como o método das Assíntotas Móveis Generalizadas (GMMA) foi implementado no código computacional desenvolvido em conjunto com esta tese, são discutidas detalhadamente as etapas de implementação.

De posse dos conceitos desenvolvidos no início desta tese, são apresentados no Capítulo 7 os conceitos relativos a transdutores piezelétricos e mecanismos flexíveis. Em especial, é apresentada uma discussão das abordagens de projeto de atuadores piezelétricos utilizando a Otimização Topológica e são discutidos os pontos favoráveis e desfavoráveis de cada abordagem. Com isto,

é proposta a abordagem utilizada neste trabalho e são obtidas as sensibilidades das funções envolvidas com respeito as variáveis de projeto. Tais sensibilidades são suficientemente gerais, permitindo o projeto de sensores e atuadores. As sensibilidades são obtidas por um método adjunto, sendo que modificações necessárias para considerar a imposição de condições de contorno essenciais não-homogêneas são discutidas.

Por fim, alguns resultados são apresentados e discutidos.

1.2 Contribuições

Esta tese de doutorado apresenta as seguintes contribuições:

1) O desenvolvimento de uma formulação variacional para a descrição do movimento finito de um sólido piezelétrico;

2) A discretização destas equações variacionais por meio do método dos elementos finitos;

3) A utilização do método do comprimento de arco para a solução das equações de equilíbrio obtidas no item 2 e a utilização de um procedimento de escalonamento que permite definir o comprimento de arco em problemas acoplados;

4) A utilização de um procedimento de escalonamento da unidade básica de força (previamente reportado na literatura) que permite solucionar problemas de condicionamento decorrentes da grande diferença na ordem de grandeza dos tensores constitutivos considerados para permitir a utilização do método do comprimento de arco em problemas com graus de liberdade de diferença de potencial e deslocamentos;

5) A descrição do método dos Deslocamentos Generalizados (GDC) como um método de comprimento de arco com restrição ortogonal, permitindo a unificação de conceitos apresentados para diferentes métodos;

6) A generalização dos procedimentos de obtenção de análise de sensibilidade para problemas piezelétricos com não-linearidade geométrica e a consideração do procedimento de imposição de condições de contorno essenciais não-homogêneas em problemas piezelétricos;

7) A utilização do método da Otimização Topológica para o projeto de atuadores piezelétricos submetidos a não-linearidade geométrica.

É importante salientar que as etapas 1, 2, 3 e 4 já estão publicadas em um periódico internacional (Cardoso e Fonseca, 2003), sendo que as etapas 5, 6 e 7 devem ser publicadas em breve.

2. UMA BREVE REVISÃO DOS CONCEITOS DA PIEZELETRICIDADE

A piezeletricidade é um tipo específico de acoplamento eletromecânico, sendo observada em materiais dielétricos (isolantes polarizáveis) que apresentam estrutura cristalina não centrosimétrica nas condições de uso [Lu et al, 1999]. Esta assimetria pode ser natural ou uma propriedade de fabricação [Hao et al, 1996; Lu et al, 1999, Damjanovic, 1998a, Cheng et al, 2001]. Por estrutura cristalina não centrosimétrica entende-se que o cristal possui um arranjo como o ilustrado à direita na figura 2.1, ou seja, o íon que se situava no centro da estrutura cristalina (esquerda) se desloca e com isto leva a um novo arranjo. Este novo arranjo estará em equilíbrio para determinados valores de temperatura, campo elétrico, campo magnético e esforços mecânicos aplicados externamente, sendo que pode ser desfeito ou alterado para valores acima dos tolerados (coercividade). Por ser não centrosimétrica, a estrutura apresenta uma polarização espontânea ou remanescente, que lhe confere o caráter piezelétrico [Damjanovic, 1998a].

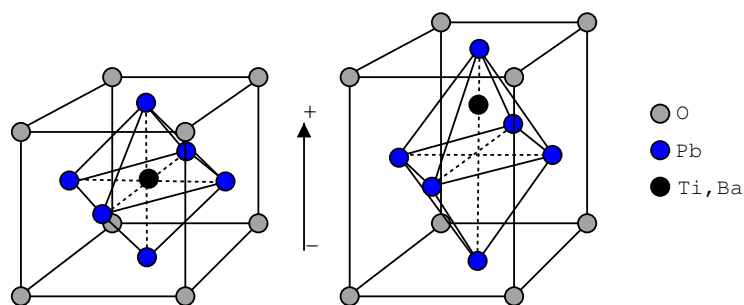


Figura 2.1: Estrutura cristalina centrosimétrica (esquerda) e não-centrosimétrica (direita).

Este acoplamento eletromecânico foi descoberto em 1880 pelos irmãos Pierre e Jacques Curie¹, *apud* Ikeda, 1996, como resultado de suas pesquisas com piezeletricidade (acoplamento eletrotérmico) e propriedades cristalográficas. Com a base teórica decorrente deste estudo, previram a eletrificação por pressão (resposta elétrica a um esforço mecânico) em diferentes classes de cristais, sendo que o fenômeno inverso foi previsto por Lippman em 1881, *apud* Lines e Glass, 2001, baseado em considerações termodinâmicas. A confirmação experimental de tal efeito inverso foi

¹P.-J. Curie e J. Curie, *Crystal Physics - Development by Pressure of Polar Electricity in Hemihedral Crystals with Inclined Faces* (em Francês). Academia de Ciências de Paris, C.R. Hebd. Seances, 19, 294, 1880.

verificada pelos próprios irmãos Curie ao final do ano de 1881. Em 1918², Paul Langevin propôs a construção do primeiro transdutor piezelétrico, baseando-se nos estudos dos irmãos Curie. No entanto, os materiais piezelétricos utilizados eram predominantemente o quartzo e o sal Rochelle, que possuem baixos coeficientes piezelétricos [Lines e Glass, 2001]. Com a descoberta de Gray³, em 1946, de que materiais ferrelétricos como o Titanato de Bário poderiam ser utilizados como materiais piezelétricos se submetidos a um campo elétrico suficientemente elevado (*pooling*), houve um grande impulso no projeto e utilização de materiais piezelétricos. Este impulso na pesquisa de cerâmicos piezelétricos levou a descoberta no início dos anos 50, por Jaffe⁴, do efeito piezelétrico no PZT (Titanato Zirconato de Chumbo), um dos materiais mais utilizados atualmente. Materiais poliméricos também podem apresentar propriedades piezelétricas. Esta descoberta foi realizada por Kawai em 1969 [apud Ikeda, 1996], sendo que atualmente tanto cerâmicos quanto polímeros tem sido utilizados como materiais piezelétricos nas mais diversas configurações.

Recentes avanços no projeto e caracterização de materiais piezelétricos estão relacionados à degradação das propriedades com a operação continuada e/ou cíclica [Algeró et al, 2001; Uchino, 1998], propriedades de materiais piezelétricos em escala microscópica [Suo, 1998], relações constitutivas não-lineares e fenômenos de mudança de domínio [Damjanovic, 1998a; Gong e Suo, 1996; Kamlah e Tsakmakis, 1999; Kessler e Balke, 2001], utilização em altíssimas temperaturas [Damjanovic, 1998b], caracterização das propriedades de filmes piezelétricos [Brown, 1990; Damjanovic, 1998a; Kazuta et al, 2001], projeto de materiais compostos em que uma das fases é piezoativa [Silva 1998; Gibiansky e Torquato, 1997; Tressler et al, 1999], atuadores fotostrictivos [Poosanaas et al, 2000], entre outros [Damjanovic, 2001; Uchino, 1998].

Embora a piezeletricidade seja uma das formas de acoplamento eletro-mecânico mais utilizada, ela geralmente se apresenta combinada com o fenômeno da eletrestricção [Damjanovic, 1998a; Yimnirun et al, 1999; Lines e Glass, 2001, Cheng et al, 2001b], que está presente em todos os materiais dielétricos. Para alguns materiais específicos e valores apropriados de campo elétrico, a eletrestricção pode ser bastante pronunciada [Lines e Glass, 2001]. No entanto, para os materiais e magnitudes de campo elétrico considerados neste trabalho, pode-se considerar a piezeletricidade como o fator dominante do acoplamento eletromecânico [Yimnirun et al, 1999]. Outros acoplamentos bastante comuns são o piezomagnetismo (relação magneto-mecânica) e a pireletricidade (relação termo-eletro-mecânica). Neste capítulo, ambos os efeitos serão inicial-

²P. Langevin, Improvements Relating to the Emission and Receptions of Submarine Waves, British Patent No. 145,691.

³R.B.Gray, US Patent No. 2,486,560, Nov, 1949.

⁴H. Jaffe, US Patent No. 2,708,244, May, 1955.

mente considerados. No entanto, como o objetivo deste trabalho é focado nos efeitos de grandes deslocamentos em transdutores piezelétricos, ambos serão desconsiderados na formulação incremental que será apresentada nos capítulos seguintes. Considerando a classe de materiais a serem utilizados neste trabalho, pode-se considerar que esta simplificação pode ser feita sem problemas para o caso do piezomagnetismo [Bush-Vishniac, 1998], mas deve ser avaliada com cuidado no caso do acoplamento termomecânico, pois as propriedades piezelétricas são bastante sensíveis a variações de temperatura. Além disso, muito dos materiais piezelétricos apresentam valores consideráveis de constantes piezelétricas.

O objetivo deste capítulo é apresentar conceitos referentes ao fenômeno da piezeletricidade. O Apêndice A apresenta algumas relações constitutivas que serão utilizadas neste trabalho, introduzindo conceitos que serão abordados conjuntamente a seguir, utilizando uma abordagem termodinâmica. Em seguida, serão apresentadas as expressões que serão utilizadas para o trabalho externo, a notação utilizada para expressar os tensores constitutivos e sua particularização para problemas planos.

2.1 Problemas Acoplados

Com o objetivo de obtermos uma descrição constitutiva consistente e suficientemente genérica para o intuito deste trabalho, serão utilizados conceitos básicos da termodinâmica.

2.1.1 Relações Termodinâmicas

Cargas elétricas em materiais polares podem ser induzidas por um campo elétrico externo, por tensão, por alteração de temperatura, etc.. De forma similar, deformação em materiais piezelétricos pode ser induzida por campo elétrico, tensão e variação de temperatura. Assim, o acoplamento de diferentes fenômenos deve ser representado de forma coerente, o que pode ser obtido por meio de relações termodinâmicas. Como resultado, obtemos equações de estado, relacionando parâmetros materiais obtidos sob diferentes condições experimentais [Ikeda, 1996; Lines e Glass, 2001].

A termodinâmica permite descrever o comportamento de sistemas com muitos graus de liberdade (moléculas, partículas, etc..) após estes terem alcançado um estado de equilíbrio termodinâmico [Reichl, 1980]. A importância de tal abordagem consiste no fato de que embora o sistema contenha um número considerável de graus de liberdade em movimento caótico, podemos descrever o seu estado por meio de um número finito de parâmetros, que são geralmente chamados de variáveis de estado. Em geral, podemos utilizar diferentes parâmetros para descrever o estado

termodinâmico de um determinado sistema, mas apenas alguns são independentes. Podemos classificar as variáveis de estado como sendo extensivas ou intensivas. Se um sistema é dividido em diversas partes, o valor de uma variável extensiva do sistema é igual a soma dos valores de todas as partes. Variáveis intensivas, por sua vez, independem da quantidade de matéria [Dixon, 1975] (como exemplo, podemos imaginar uma barra elástica sob tração: o deslocamento total da barra, que é uma medida extensiva, será dada pela soma dos deslocamentos de cada seção. Por sua vez, a força, que é uma medida intensiva, será constante em cada seção e a força total não é dada por um somatório dos valores em cada seção). Certos pares de variáveis extensivas e intensivas são considerados conjuntamente pois correspondem a forças e deslocamentos generalizados do ponto de vista do trabalho termodinâmico [Lines e Glass, 2001]. Se modificarmos o estado termodinâmico do sistema, então a mudança nos valores das variáveis de estado deve independe da trajetória. Matematicamente, mudanças nas variáveis de estado correspondem a diferenciais exatos [Reichl, 1980]⁵.

Equações de estado são relações funcionais entre variáveis de estado [Reichl, 1980]. Estas relações funcionais são importantes pois reduzem o número de variáveis que devem ser utilizadas para descrever termodinamicamente um sistema. Existem vários exemplos de tais relações, como por exemplo a lei de gases ideais, a lei de Hooke, etc..

Utilizando a termodinâmica, podemos expressar a mudança de energia interna dU ⁶ em um

⁵Se existe uma relação $f = f(x, y)$ entre 2 (ou mais) variáveis independentes, então o diferencial de f é dado por

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy,$$

onde $(\cdot)_a$ significa que o termo dentro dos parênteses é avaliado com a fixo. Se f e suas derivadas são contínuas e

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \right]_y = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \right]_x$$

então df é um diferencial exato. Como consequência, a integral de df em um caminho fechado deve ser nula e, se df é conhecido, então podemos determinar o valor de f a não ser por uma constante aditiva de integração.

⁶ A energia interna é uma propriedade:

Considere um sistema que pode ser alterado por algum processo A, do estado 1 para o estado 0 e um processo B do estado 0 para o estado 1. Da primeira lei da termodinâmica,

$$\int_{1A}^0 dQ - dW + \int_{0B}^1 dQ - dW = 0,$$

onde Q é calor e W trabalho. Seja o processo C outro processo no qual o sistema muda do estado 0 para um estado 1. Para o ciclo 1A0C1, podemos escrever

$$\int_{1A}^0 dQ - dW + \int_{0C}^1 dQ - dW = 0.$$

material dielétrico elástico, submetido a variações nos campos de deformação (E), deslocamento elétrico (D), entropia (s) e densidade de fluxo magnético (B) como [Damjanovic, 1998; Ikeda, 1996; Bush-Vishniac, 1998, Lines e Glass, 2001]

$$dQ = Tds$$

$$dU = dQ + S_{ij}dE_{ij} + \varphi_i dD_i + H_i dB_i, \quad (2.1)$$

onde as variações são aplicadas sobre as variáveis extensivas [Reichl, 1980]. Nesta equação, U é a energia interna, T a temperatura, s a entropia, Q calor, \mathbf{H} o campo magnético, \mathbf{B} a densidade de fluxo magnético, \mathbf{E} o tensor deformação de Green, \mathbf{S} é o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, φ é o vetor campo elétrico e \mathbf{D} é o deslocamento elétrico.

De modo a trabalhar com uma formulação mista (intensiva-extensiva) onde as variáveis independentes são deformação, campo elétrico, temperatura e campo magnético, definimos o funcional

$$G = U - \varphi_i D_i - Ts - H_i B_i \quad (2.2)$$

que é obtido por meio da transformação de Legendre indicada na Equação (2.2) [Reichl, 1980]. Diferenciando a Equação (2.2) e considerando a Equação (2.1) obtemos a expressão para a variação do funcional desejado

$$dG = S_{ij}dE_{ij} - d\varphi_i D_i - dTs - dH_i B_i. \quad (2.3)$$

Combinando as duas equações, obtemos

$$\int_{0B}^1 dQ - dW = \int_{0C}^1 dQ - dW.$$

Assim, quando o sistema muda de um estado prescrito para outro estado, o valor da integral de $dQ-dW$ é fixado pelos estados finais e é independente do processo. Com isto, a própria integral é uma propriedade, ao qual chamamos de energia interna.

$$U_1 - U_0 = \int_0^1 dQ - dW = Q - W$$

lembrando que Q e W não são propriedades, pois suas integrais em um laço não são nulas. Assim, não podemos falar em W_1 ou Q_1 . Derivando a equação anterior,

$$dU = dQ - dW$$

e por fim lembramos que não existe um valor absoluto de energia interna, como no caso da temperatura.

Da equação acima, define-se

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \left(\frac{\partial G}{\partial E_{ij}} \right)_{\varphi, T, H} \\ D_i &= - \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi_i} \right)_{E, T, H} \\ s &= - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{E, \varphi, H} \\ B_i &= - \left(\frac{\partial G}{\partial H_i} \right)_{E, \varphi, T} \end{aligned} \quad (2.4)$$

e os diferenciais totais das variáveis dependentes são

$$\begin{aligned} dS_{ij} &= \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{ij}} \right)_{\varphi, T, H} dE_{ij} - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial \varphi_i} \right)_{E, T, H} d\varphi_i - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial T} \right)_{\varphi, E, H} dT - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial H_i} \right)_{\varphi, E, T} dH_i \\ dD_i &= \left(\frac{\partial D_i}{\partial E_{ij}} \right)_{\varphi, T, H} dE_{ij} - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \varphi_i} \right)_{E, T, H} d\varphi_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial T} \right)_{\varphi, E, H} dT - \left(\frac{\partial D_i}{\partial H_i} \right)_{\varphi, E, T} dH_i \\ ds &= \left(\frac{\partial s}{\partial E_{ij}} \right)_{\varphi, T, H} dE_{ij} - \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi_i} \right)_{E, T, H} d\varphi_i - \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\varphi, E, H} dT - \left(\frac{\partial s}{\partial H_i} \right)_{\varphi, E, T} dH_i \\ dB_i &= \left(\frac{\partial B_i}{\partial E_{ij}} \right)_{\varphi, T, H} dE_{ij} - \left(\frac{\partial B_i}{\partial \varphi_i} \right)_{E, T, H} d\varphi_i - \left(\frac{\partial B_i}{\partial T} \right)_{\varphi, E, H} dT - \left(\frac{\partial B_i}{\partial H_i} \right)_{\varphi, E, T} dH_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde cada derivada parcial corresponde a uma relação constitutiva. De posse destas equações, podemos provar a equivalência entre o efeito piezoeletrico direto e o efeito inverso. Das Equações (2.5), definimos e_{ijk} como sendo

$$e_{ijk}^{E, T, H} = - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial \varphi_k} \right)_{E, T, H}$$

e o efeito inverso é dado por

$$e_{kij}^{\varphi, T, H} = \left(\frac{\partial D_k}{\partial E_{ij}} \right)_{\varphi, T, H}$$

Assim, utilizando a Equação (2.4), observamos que

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_k \partial E_{ij}} = -\frac{\partial^2 G}{\partial E_{ij} \partial \varphi_k}$$

ou seja,

$$e_{ijk} = e_{kij},$$

pois como os diferenciais são exatos, a ordem de diferenciação pode ser alterada. Conforme comentado anteriormente, para aplicações puramente piezelétricas, podemos desprezar as iterações magnéticas sem comprometer a descrição do fenômeno. Diversas aplicações do fenômeno de piezomagnetismo são apresentadas em Busch-Vishniac, 1998, Capítulo 6, onde efeitos de temperatura e de piezeletricidade são desprezados. Desta forma, considerando os resultados obtidos nesta seção, podemos definir o funcional G como [Reddy, 1997]

$$G = \frac{1}{2}C_{ijkl}E_{ij}E_{kl} - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\varphi_i\varphi_j - e_{kij}\varphi_k E_{ij} - \beta_{ij}E_{ij}\Delta T - p_k\varphi_k\Delta T - \frac{\gamma c_v}{2T_0}\Delta T^2 \quad (2.6)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de propriedades elásticas, e_{kij} é o tensor de propriedades piezelétricas, β é o tensor de dilatação térmica, ϵ_{ij} é o tensor de segunda ordem das propriedades dielétricas, p_k é o vetor de propriedades piroelétricas, γ é o peso específico, c_v é o calor específico por unidade de massa e T_0 é a temperatura de referência. De posse desta função de energia livre, conhecida como entalpia elétrica ou funcional de Gibbs, podemos obter as equações de equilíbrio para a piezeletricidade finita, objeto do próximo capítulo. Como neste trabalho será considerado somente o efeito piezelétrico, podemos desprezar os últimos três termos na Equação (2.6), ou seja, são abordados problemas isotérmicos. Esta simplificação é comumente realizada em trabalhos que tratam de transdutores baseados no fenômeno da piezeletricidade, desde que não ocorram variações acentuadas de temperatura [Uchino, 1998], pois isto acarreta em mudanças nas propriedades piezelétricas, além de dar origem ao fenômeno da piroeletricidade [Ikeda, 1996].

Em relação às simetrias entre os índices dos tensores envolvidos, observamos que,

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (2.7)$$

$$E_{ij} = E_{ji}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$$

$$e_{kij} = e_{kji},$$

e portanto, iremos trabalhar com 6 componentes de tensão, 6 de deformação, 21 constantes elásticas, 3 componentes de deslocamento, 6 constantes dielétricas, 18 constantes piezelétricas, 3 componentes de campo elétrico e 3 componentes de deslocamento elétrico.

É importante salientar que a mudança de variável realizada na Equação (2.1) pode ser realizada de outras formas, pois o potencial termodinâmico a ser utilizado depende da escolha do conjunto de variáveis independentes [Ikeda, 1996, Lines e Glass, 2001]. Assim, relações do tipo extensiva (E, D), intensiva (S, φ) e mistas (S, D e E, φ), são obtidas pela mudança adequada de variáveis [Ikeda, 1996]. No entanto, de posse de uma das relações acima, é possível obter expressões analíticas que relacionam os tensores constitutivos derivados de cada uma das formulações [Ikeda, 1996; Busch-Vishniac, 1998].

2.2 Trabalho Externo

O trabalho externo pode ser causado por forças de corpo ou de superfície, onde força diz respeito a um campo externo aplicado sobre o corpo. Para a classe de problemas estudados neste trabalho, serão considerados o trabalho causado por trações aplicadas na superfície do corpo

$$W_t = \int_{\Gamma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

por forças de corpo

$$W_b = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u},$$

e/ou por cargas superficiais

$$W_{\phi} = \int_{\Gamma} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \phi = - \int_{\Gamma} \sigma \phi, \quad (2.9)$$

onde n é o vetor normal à superfície, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, t é o vetor tração superficial, ϕ é a diferença de potencial elétrico, σ representa a distribuição superficial de cargas elétricas e \mathbf{b} é uma força de corpo. O sinal negativo na Equação (2.9) vem do fato de convencionarmos o sentido positivo do campo elétrico como sendo o mesmo de uma normal que aponta para fora de uma carga elétrica positiva. Assim, as linhas de campo tem sentido contrário à normal da superfície. O trabalho externo total é dado por

$$W_{ext} = W_t + W_b + W_{\phi} = \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} - \sigma \phi) + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

Neste trabalho serão consideradas forças conservativas, ou seja, o carregamento externo independe das condições do corpo sobre o qual está atuando. Assim, por exemplo, considera-se que uma força vertical aplicada sobre a extremidade de uma viga longa permanece vertical mesmo se a viga sofrer grandes deslocamentos e rotações (força não seguidora). Esta observação é im-

portante e será utilizada no decorrer do texto. O tópico forças não conservativas em problemas de otimização é objeto de estudo das referências [Langthjem e Sugiyama, 1999; Cheng B.-C et al, 2001].

2.3 Notação Utilizada para a Descrição dos Tensores Constitutivos

O objetivo desta seção é avaliar a forma dos tensores constitutivos utilizados ao longo do texto. Considerando as Equações (2.4) e (2.5), podemos escrever as relações constitutivas do acoplamento piezelétrico como

$$\begin{aligned} S_{ij} &= C_{ijkl}E_{kl} - e_{kij}\varphi_k \\ D_k &= e_{kij}E_{ij} + \epsilon_{kl}\varphi_k \end{aligned} \quad (2.11)$$

e o objetivo é avaliar a forma dos tensores constitutivos envolvidos. Para isto, será considerada a tabela 2.1, onde $1 = x$, $2 = y$, $3 = z$, $4 = yz$, $5 = xz$ e $6 = xy$, que permite fazer uma avaliação gráfica das características de acoplamento do material. A tabela está na forma geral, sendo que para cada material, algumas posições serão não nulas com as demais nulas. A convenção de cisalhamento utilizada é $E_4 = 2E_{yz}$, $E_5 = 2E_{xz}$, e $E_6 = 2E_{xy}$.

					E					φ	
		1	2	3	4	5	6		1	2	3
	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}		e_{11}	e_{21}	e_{31}
	2		C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}		e_{12}	e_{22}	e_{32}
	3	Si		C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}		e_{13}	e_{23}	e_{33}
S	4		mé		C_{44}	C_{45}	C_{46}		e_{14}	e_{24}	e_{34}
	5			tri		C_{55}	C_{56}		e_{15}	e_{25}	e_{35}
	6				co		C_{66}		e_{16}	e_{26}	e_{36}
	1	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}		ϵ_{11}	ϵ_{12}	ϵ_{13}
D	2	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}		Simé	ϵ_{22}	ϵ_{23}
	3	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}			trico	ϵ_{33}

Table 2.1: Tensores constitutivos de um material piezelétrico.

Em relação as possíveis simetrias constitutivas existentes para materiais piezelétricos, deve-se salientar que a isotropia não é de interesse [Lines e Glass, 2001], devido ao fato de não existirem materiais piezelétricos isotrópicos. Um cristal possuindo centro de simetria não pode

ser piezométrico, pois não existe combinação de tensões uniformes que produzam momentos de dipolo [Ikeda, 1996].

2.3.1 Problemas Planos

A modelagem e solução das equações da piezeletricidade tridimensional é uma tarefa bastante complexa. No entanto, hipóteses geométricas e de carregamento podem ser utilizadas para obtermos modelos simplificados. No texto que segue, iremos considerar dois modelos bastante utilizados: estado plano de deformações (EPD) e estado plano de tensões (EPT). Em ambos os casos, o plano de trabalho será o 13 (xz), com as variáveis na direção 2 sendo condensadas de alguma forma. A polarização do material piezométrico é assumida na direção positiva do eixo 3.

A discussão sobre tais hipóteses planas e materiais piezométricos é abordada de forma superficial por Rajapakse, 1997 e Yang, 2001.

2.3.1.1 Estado Plano de Deformações

A hipótese de estado plano de deformações é muito utilizada na elasticidade linear isotrópica. Um corpo está submetido a um estado plano de deformações, paralelo ao plano 13, se o deslocamento na direção 2 for nulo ou de corpo rígido (constante) e as componentes de deslocamento no plano 13 forem funções de 1 e 3 somente (figura 2.2). Ainda, é assumido que não existem trações ou forças de corpo aplicadas na direção 2. Para o problema piezométrico, adicionamos a esta definição as hipóteses de que a diferença de potencial é função somente das direções 1 e 3 e que não são aplicadas cargas elétricas sobre as faces paralelas ao plano 13. Com as hipóteses de deslocamento e diferença de potencial, podemos calcular deformações e campo elétrico resultantes. Com isto, verificamos que

$$E_2 = E_4 = E_6 = \varphi_2 = 0,$$

e considerando estes valores nulos nas expressões representadas na tabela 2.1, podemos escrever os valores de tensão e deslocamento elétrico fora do plano 13 como

$$S_2 = C_{12}E_1 + C_{23}E_3 + C_{25}E_5 - e_{12}\varphi_1 - e_{32}\varphi_3 \quad (2.12)$$

$$S_4 = C_{14}E_1 + C_{34}E_3 + C_{35}E_5 - e_{14}\varphi_1 - e_{34}\varphi_3$$

$$S_6 = C_{16}E_1 + C_{36}E_3 + C_{56}E_5 - e_{16}\varphi_1 - e_{36}\varphi_3$$

$$D_2 = e_{21}E_1 + e_{23}E_3 + e_{25}E_5 + \epsilon_{21}\varphi_1 + \epsilon_{23}\varphi_3.$$

É interessante notar que S_2 e D_2 aparecem para compatibilizar a hipótese de deslocamento e diferença de potencial assumidas. No entanto, na literatura sobre elasticidade plana, o material é sempre assumido como sendo isotrópico no plano 13, o que faz com que S_4 e S_6 sejam nulos, o que pode não ocorrer em um material piezoeletrico devido ao grau de anisotropia e acoplamento eletromecânico. Considerando um material com simetria ortotrópica ou superior (com as direções materiais alinhadas com os eixos cartesianos), tabela 2.2, as expressões de S_4 , S_6 e D_2 se anulam pois todos os termos constitutivos envolvidos nestas expressões são nulos.

Os valores de tensão e corrente de deslocamento no plano de interesse são dados por

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{15} \\ C_{13} & C_{33} & C_{35} \\ C_{15} & C_{35} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{31} \\ e_{13} & e_{33} \\ e_{15} & e_{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{13} & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}.$$

A hipótese de estado plano de deformações é utilizada em corpos prismáticos cuja dimensão na direção fora do plano (2) é maior do que as dimensões nas direções 1 e 3 e que satisfazem as hipóteses de carregamento consideradas anteriormente. Como pode ser verificado, o requerimento de que o material tenha no mínimo simetria ortotrópica é fundamental para que a consideração de EPD seja válida.

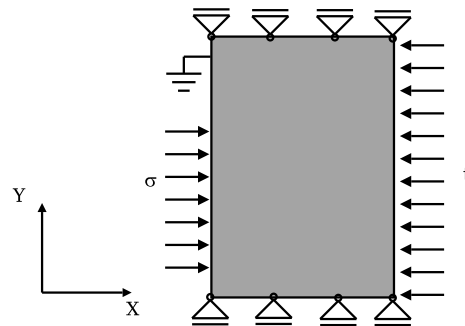


Figure 2.2: Corpo submetido a um estado plano de deformações.

2.3.1.2 Estado Plano de Tensões

O estado plano de tensões é utilizado em corpos cuja dimensão fora do plano (2) é muito menor do que as dimensões do plano (13). Assim, o corpo é descrito por uma superfície média que se encontra entre as faces paralelas ao plano 13. O carregamento é assumido como sendo aplicado somente no contorno do plano 13, de forma simétrica ao longo da espessura, com o objetivo de não gerar momentos (figura 2.3). Com estas condições de contorno, as tensões S_2 , S_4 e S_6 são nulas nas faces paralelas ao plano 13, sendo assumidas como identicamente nulas ao longo da espessura. Introduzindo a analogia elétrica, D_2 é assumido como sendo nula, com cargas elétricas aplicadas somente nas laterais, de forma simétrica ao longo da espessura.

Utilizando as expressões representadas na tabela 2.1, podemos isolar E_2 , E_4 , E_6 e φ_2 (valores fora do plano 13), obtendo

$$E_2 = \frac{e_{12}\varphi_1 + e_{22}\varphi_2 + e_{32}\varphi_3 - C_{12}E_1 - C_{23}E_3 - C_{24}E_4 - C_{25}E_5 - C_{26}E_6}{C_{22}}$$

$$E_4 = \frac{e_{14}\varphi_1 + e_{24}\varphi_2 + e_{34}\varphi_3 - C_{41}E_1 - C_{42}E_2 - C_{43}E_3 - C_{45}E_5 - C_{46}E_6}{C_{44}}$$

$$E_6 = \frac{e_{16}\varphi_1 + e_{26}\varphi_2 + e_{36}\varphi_3 - C_{61}E_1 - C_{62}E_2 - C_{63}E_3 - C_{64}E_4 - C_{65}E_5}{C_{66}}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\epsilon_{23}\varphi_3 + \epsilon_{12}\varphi_1 + e_{21}E_1 + e_{22}E_2 + e_{23}E_3 + e_{24}E_4 + e_{25}E_5 + e_{26}E_6}{\epsilon_{22}}.$$

No entanto, estes valores estão acoplados entre si, devido aos coeficientes e_{22} , e_{24} , e_{26} , C_{24} , C_{26} e C_{46} . Considerando um material com simetria ortotrópica, ainda temos o problema de acoplamento entre E_4 e φ_2 , pois e_{24} não é nulo. No entanto, as demais equações não dependem de E_4 , E_6 e φ_2 . Inserindo a expressão de E_2 , nas expressões de S_1 , S_3 , S_5 , D_1 e D_3 em 2.2, obtemos

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{C_{12}C_{12}}{C_{22}} & C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}} & 0 \\ C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}} & C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} - \frac{C_{12}e_{32}}{C_{22}} \\ 0 & e_{33} - \frac{e_{32}C_{23}}{C_{22}} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} - \frac{C_{12}e_{32}}{C_{22}} & e_{33} - \frac{e_{32}C_{23}}{C_{22}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} + \frac{e_{32}^2}{C_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}.$$

								E			φ		
								1	2	3			
	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	0	0	0	0	0	e_{31}			
	2		C_{22}	C_{23}	0	0	0	0	0	e_{32}			
	3	Si		C_{33}	0	0	0	0	0	e_{33}			
S	4		mé		C_{44}	0	0	0	e_{24}	0			
	5			tri		C_{55}	0	e_{15}	0	0			
	6				co		C_{66}	0	0	0			
	1	0	0	0	0	e_{15}	0	ϵ_{11}	0	0			
D	2	0	0	0	e_{24}	0	0	Simé	ϵ_{22}	0			
	3	e_{31}	e_{32}	e_{33}	0	0	0		trico	ϵ_{33}			

Table 2.2: Tensores constitutivos de um material ortotrópico com polarização na direção do eixo 3 ($e_{31} = e_{311}$, $e_{32} = e_{322}$, $e_{33} = e_{3333}$, $e_{15} = e_{113}$, $e_{24} = e_{223}$).

A estrutura de ambos os problemas planos é idêntica, bastando corrigir os termos constitutivos para o caso de EPT. Pode-se observar que a consideração do acoplamento eletromecânico faz com que os tensores constitutivos a serem utilizados no problema plano dependam de alguma forma uns dos outros. Isto não ocorre em problemas de elasticidade tradicional, uma vez que temos apenas um tensor constitutivo envolvido.

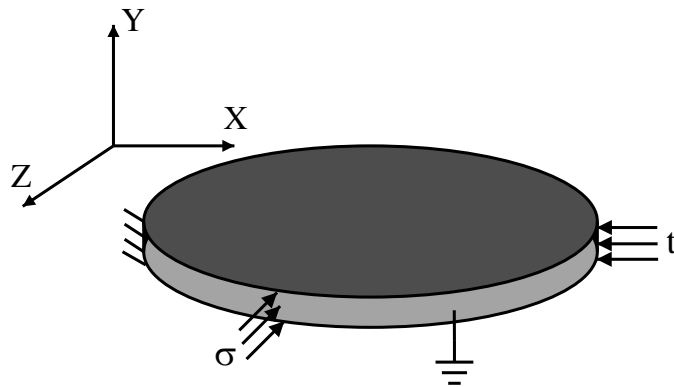


Figure 2.3: Corpo submetido a um estado plano de tensões.

É importante salientar que tanto EPT quanto EPD são apenas aproximações do caso tridimensional e que a consideração de que os materiais piezelétricos tem simetria material ortotrópica é suficientemente geral para permitir a modelagem da grande maioria dos materiais utilizados na prática.

3. DESCRIÇÃO FINITA DO MOVIMENTO DE UM SÓLIDO PIEZELÉTRICO

Pode-se afirmar que a grande diferença entre a otimização de estruturas/mecanismos que se comportam de forma não-linear, quando comparada a otimização de estruturas/mecanismos com comportamento linear, é a existência de diversas abordagens de solução do problema de equilíbrio. Estas diferentes formas de descrição do movimento implicam em formulações diferenciadas (mas que devem concordar entre si) e que utilizam medidas físicas diferentes. Assim, um ponto crucial para atingirmos o objetivo final deste trabalho consiste na correta descrição do movimento do sólido, que por sua vez depende da seleção adequada de grandezas cinemáticas e cinéticas.

Formulações variacionais descrevendo o movimento infinitesimal de sólidos piezelétricos são bem estabelecidas [Tiersten, 1967], bem como a sua discretização pelo método dos elementos finitos [Naillon et al, 1983; Lerch, 1990; Kagawa et al, 1996; Qi et al, 1997] ou o método dos elementos de contorno [Xu e Rajapakse, 1998]. Como os funcionais de energia livre abordados no capítulo anterior são válidos para quaisquer pares conjugados energeticamente (embora esta não seja uma preocupação evidente em uma formulação infinitesimal), deve-se selecionar de forma consistente as variáveis utilizadas para descrever-se o estado do sólido piezelétrico. Este é o objetivo inicial deste capítulo, onde são apresentados conceitos fundamentais para o correto desenvolvimento da formulação. Juntamente com estes conceitos são apresentadas as grandezas cinemáticas e cinéticas que são utilizadas neste trabalho e são discutidas as implicações de sua escolha, principalmente no que diz respeito a maneira como um observador localizado na configuração de referência observa o movimento finito do sólido piezelétrico.

De posse de tais medidas, é proposta uma descrição incremental do movimento de um sólido piezelétrico, resultando em um conjunto de equações variacionais acopladas contendo termos de alta ordem com respeito aos incrementos de deslocamento e potencial elétrico. Estas equações são discretizadas por meio do método dos elementos finitos, obtendo-se assim um sistema de equações linearizadas de equilíbrio, que são solucionadas iterativamente.

Deve-se salientar que estes tópicos são bastante discutidos em problemas puramente mecânicos ou mesmo termo-mecânicos, mas existem pouquíssimos trabalhos que abordam grandes deslocamentos em sólidos piezelétricos [Tiersten 1976; Tiersten, 1995; Yang, 1999; Zhou e

Tzou, 2000; Mukerjee e Saha Chaudhuri, 2000; Yi et al, 2000; Wang, 2002], sendo que a maioria utiliza algum tipo de simplificação sobre os carregamentos ou hipóteses simplificativas sobre o campo elétrico ou de deslocamento. O pequeno número de referências sobre este tópico se deve principalmente às características de muitas cerâmicas piezelétricas que são rígidas e desenvolvem pequenos deslocamentos. No entanto, este estudo se justifica, pois somente com uma formulação consistente podemos representar corretamente o acoplamento eletro-mecânico que existe em transdutores piezelétricos submetidos a movimentos finitos e em materiais piezelétricos flexíveis tais como o PVDF (Polifluoreto Vinilideno) [Lines e Glass, 2001; Janiczek, 2001]. No caso específico de otimização topológica, qualquer simplificação assumida sobre o equilíbrio do sólido em consideração irá implicar em uma restrição as possíveis topologias admissíveis [Cheng, 1992], justificando assim um desenvolvimento consistente da formulação de equilíbrio a ser utilizada ao longo deste trabalho.

3.1 Descrição Lagrangiana do Movimento

Quando consideramos o movimento finito, as configurações deformadas não podem mais ser confundidas com a configuração de referência (indeformada). Assim, devemos ter um cuidado especial ao selecionar as grandezas tensoriais que serão utilizadas para descrever o movimento, de modo a garantir a consistência da descrição. Nesta seção, medidas Lagrangianas para as grandezas mecânicas e elétricas serão discutidas.

Como estamos considerando diferentes configurações durante o movimento finito, devemos utilizar uma notação que indique, para cada grandeza utilizada na descrição, a posição atual e a posição de referência. No texto que segue, utilizaremos uma notação derivada das referências [Atkin e Fox, 1980; Kleiber 1989; Zieliński e Frey, 2001]. Seja uma grandeza arbitrária A , função de x . Se A está sendo descrita no tempo t , considerando como a configuração de referência a posição inicial (indeformada), representamos a grandeza por t_0A . Caso seja utilizada uma notação Euleriana, onde a configuração de referência é a configuração atual, representamos a grandeza por t_tA .

Se a configuração inicial é considerada como configuração de referência durante todo o movimento, chamaremos a descrição de Lagrangiana Total. Como a formulação utilizada ao longo deste trabalho será Lagrangiana Total, serão utilizados índices maiúsculos para bases definidas na posição de referência e índices minúsculos para as outras bases.

3.1.1 Movimento Finito

Seja um corpo piezelétrico, com configuração de referência Ω_0 e com configurações intermediárias $\Omega_{t_1}, \Omega_{t_2} \dots \Omega_{t_n}$ ao longo do movimento. Consideraremos dois pontos materiais 0p e 0q , na configuração de referência Ω_0 , com vetores posição ${}^0\mathbf{X}^p$ e ${}^0\mathbf{X}^q$, tal que ${}^0d\mathbf{X} = {}^0\mathbf{X}^p - {}^0\mathbf{X}^q$ é a posição relativa entre estes dois pontos. Após o movimento da posição de referência para uma configuração intermediária Ω_t definimos o deslocamento do ponto p como

$${}^t_0\mathbf{u}^p = {}^t\mathbf{X}^p - {}^0\mathbf{X}^p, \quad (3.1)$$

e o novo vetor posição relativa é ${}^t d\mathbf{X}$.

Se existe uma relação funcional entre a configuração deformada e a configuração indeformada, na forma

$${}^t\mathbf{X} = {}^t\mathbf{X}({}^0\mathbf{X}, \mathbf{t}), \quad (3.2)$$

podemos expressar o incremento como

$${}^t dX_i = \frac{\partial {}^t X_i}{\partial {}^0 X_J} d{}^0 X_J \quad (3.3)$$

onde

$${}^t_0 F_{iJ} = \frac{\partial {}^t X_i}{\partial {}^0 X_J} \quad (3.4)$$

é conhecido como tensor gradiente de deformação. Como [Atkin e Fox, 1980]

$$\det({}^t_0\mathbf{F}) = \frac{d{}^t V}{d{}^0 V} \quad (3.5)$$

verificamos que este determinante deve ser estritamente positivo, pois volumes são sempre positivos.

Se o movimento é uma translação rígida, então ${}^t_0\mathbf{F} = \mathbf{I}$, e para rotações rígidas, ${}^t_0\mathbf{F} = \mathbf{R}$, onde \mathbf{R} é uma matriz ortogonal de rotação [Atkin e Fox, 1980]. Em ambos casos, o produto ${}^t_0\mathbf{F}^T {}^t_0\mathbf{F}$ é sempre igual a \mathbf{I} .

3.1.2 Medidas de deformação

Se o corpo é submetido a um movimento arbitrário, o vetor posição relativa de cada ponto do corpo pode mudar sua direção e/ou comprimento, tal que ${}^t_0\mathbf{F}^T {}^t_0\mathbf{F}$ pode ser diferente de \mathbf{I} . O

tensor de segunda ordem ${}^t_0\mathbf{C} = {}^t_0\mathbf{F}^T {}^t_0\mathbf{F}$ é conhecido como o tensor de deformação de Cauchy-Green à direita, medindo a mudança de comprimento do vetor posição relativa da configuração indeformada até a configuração deformada

$$(\|{}^t\mathbf{ds}\|_2)^2 = ({}^t\mathbf{dX})^T ({}^t\mathbf{dX}) = ({}^0\mathbf{dX})^T {}^t_0\mathbf{F}^T {}^t_0\mathbf{F} ({}^0\mathbf{dX}). \quad (3.6)$$

Por sua definição, esta medida de deformação é uma medida Lagrangiana.

Uma medida de deformação alternativa é o tensor de deformação de Green-Lagrange [Atkin e Fox, 1980]

$${}^t_0\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{F}^T {}^t_0\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.7)$$

Considerando as Equações (3.1) e (3.7), é possível expressar o tensor de deformação de Green-Lagrange como uma função dos deslocamentos

$${}^tE_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t u_I}{\partial {}^0 X_J} + \frac{\partial {}^t u_J}{\partial {}^0 X_I} + \frac{\partial {}^t u_M}{\partial {}^0 X_I} \frac{\partial {}^t u_M}{\partial {}^0 X_J} \right). \quad (3.8)$$

Para valores pequenos de deslocamentos, o último termo da Equação (3.8) é muito menor do que os primeiros dois termos. Quando este termo de alta ordem é descartado, define-se a medida de deformação infinitesimal

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T + \mathbf{F}) - \mathbf{I}. \quad (3.9)$$

No entanto, deve-se salientar que para movimentos de rotação de corpo rígido esta medida é não invariante [Atkin e Fox, 1980]. Este é o motivo pelo qual as equações infinitesimais da piezeletricidade são não-invariantes com movimentos de rotação de corpo rígido. Ainda, caso os deslocamentos não sejam pequenos, devemos considerar os termos de alta ordem, pois do contrário o estado do corpo será descrito incorretamente.

3.1.3 Medidas de campo elétrico

O campo elétrico φ pode ser definido como

$${}^t\varphi_i = -\frac{\partial {}^t\phi}{\partial {}^tX_i} \quad (3.10)$$

onde ϕ é o potencial elétrico e o gradiente é avaliado na configuração deformada [Wangsness, 1979]. Para obtermos uma medida consistente para o campo elétrico, devemos levar o movimento do corpo em consideração. Multiplicando a Equação (3.10) por ${}^tF_{iL}$ e utilizando a regra

da cadeia, obtemos

$${}^t_0\varphi_L = -\frac{\partial^t\phi}{\partial^tX_i} \frac{\partial^tX_i}{\partial^0X_L} = {}^t\varphi_i {}^t_0F_{iL} \quad (3.11)$$

onde

$${}^t_0\varphi_L = -\frac{\partial^t\phi}{\partial^0X_L} \quad (3.12)$$

é o campo elétrico Lagrangeano. A relação inversa é dada por

$${}^t\varphi_i = {}^t_0\varphi_L {}^t_0F_{iL}^{-1}. \quad (3.13)$$

3.1.4 Medidas de tensão

Considerando um corpo elástico em sua configuração deformada Ω_t , e uma distribuição superficial de forças ${}^t\mathbf{df}$ sobre uma área ${}^t d\Gamma$, com normal ${}^t\mathbf{n}$. O vetor tração é definido como

$${}^t\mathbf{t} = \lim_{{}^t d\Gamma \rightarrow 0} \frac{{}^t\mathbf{df}}{{}^t d\Gamma} \quad (3.14)$$

e o tensor tensão de Cauchy é definido como

$${}^tT_{ji} {}^t n_j = {}^t t_i, \quad (3.15)$$

sendo expresso na configuração deformada. Para obtermos uma medida de tensão Lagrangiana, multiplicamos a Equação (3.15) por ${}^t d\Gamma$, obtendo

$${}^tT_{ji} {}^t n_j {}^t d\Gamma = {}^t t_i {}^t d\Gamma \quad (3.16)$$

onde tanto n_j quanto $d\Gamma$ mudam da posição de referência para a configuração deformada. Para expressar esta mudança, utilizamos a fórmula de Nanson [Atkin e Fox, 1980]

$${}^t n_i {}^t d\Gamma = \det({}^t_0\mathbf{F}) \frac{\partial^0 X_K}{\partial^t X_i} {}^0 n_K {}^0 d\Gamma = \det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0F_{iK}^{-1} {}^0 n_K {}^0 d\Gamma. \quad (3.17)$$

Utilizando as Equações (3.16) e (3.17), obtemos

$$\det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0F_{jK}^{-1} {}^tT_{ji} {}^0 n_K {}^0 d\Gamma = {}^t t_i {}^t d\Gamma. \quad (3.18)$$

e definindo

$${}^tT_{Ki} = \det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0F_{jK}^{-1} {}^tT_{ji} \quad (3.19)$$

podemos reescrever a Equação (3.18) como

$${}^t_0T_{Ki} {}^0n_K {}^0d\Gamma = {}^t t_i {}^t d\Gamma. \quad (3.20)$$

Esta medida é conhecida como primeiro tensor de Piola-Kirchhoff [Kleiber, 1989], que não é simétrico. Para utilizarmos um tensor tensão simétrico, definimos o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff como [Kleiber, 1989]

$${}^t_0S_{KL} = {}^t_0F_{iL}^{-1} {}^t_0T_{Ki}. \quad (3.21)$$

3.1.5 Medidas de deslocamento elétrico

Considerando um corpo dielétrico em sua configuração deformada Ω_t , e uma distribuição superficial de cargas elétricas q . A densidade superficial de cargas é definida como

$${}^t\sigma = \lim_{{}^t d\Gamma \rightarrow 0} \frac{{}^t dq}{{}^t d\Gamma} \quad (3.22)$$

e o deslocamento elétrico é definido como

$${}^t D_i {}^t n_i = - {}^t \sigma. \quad (3.23)$$

Esta medida é definida na configuração deformada. Para obtermos uma medida Lagrangiana para o deslocamento elétrico, utilizamos o mesmo procedimento da seção 3.1.4.

Multiplicando a Equação (3.23) por ${}^t d\Gamma$

$$- {}^t \sigma {}^t d\Gamma = {}^t D_i {}^t n_i {}^t d\Gamma \quad (3.24)$$

e utilizando a Equação (3.17), obtemos

$$- {}^t \sigma {}^t d\Gamma = \det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0F_{iK}^{-1} {}^t D_i {}^0n_K {}^0d\Gamma. \quad (3.25)$$

Assim, a medida Lagrangiana é

$${}^t_0D_K = \det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0F_{iK}^{-1} {}^t D_i \quad (3.26)$$

tal que

$${}^t_0D_K {}^0n_K {}^0d\Gamma = - {}^t \sigma {}^t d\Gamma. \quad (3.27)$$

Esta medida é análoga ao primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, mas como é um vetor, não existe a preocupação com simetria. A relação entre as medidas Lagrangianas e Eulerianas é dada por

$${}^tD_m = \frac{1}{\det({}^t_0\mathbf{F})} {}^t_0F_{mK} {}^t_0D_K. \quad (3.28)$$

3.1.6 Princípio da Indiferença do Referencial

O movimento do corpo pode ser descrito por diferentes observadores, sendo que cada um destes observadores pode utilizar um ou mais sistemas de coordenadas para descrever o movimento. Um princípio fundamental que deve ser respeitado em qualquer formulação é o princípio da indiferença do referencial, que afirma que a energia livre do corpo deve ser independente do movimento relativo de dois observadores diferentes que estejam descrevendo o estado do corpo.

Sejam dois observadores O e \widehat{O} , em movimento relativo, e um tensor ortogonal próprio, $\widehat{Q}_{ij}(t)$, que relaciona os cossenos diretores das bases utilizadas por ambos observadores [Ogden, 1997]. Em um dado instante t , definimos o vetor posição relativa $\widehat{c}(t)$ entre \widehat{O} e O , com origem em \widehat{O} , tal que o vetor posição \mathbf{X} (visto por O), é descrito por \widehat{O} como

$$\widehat{X}_i = \widehat{Q}_{ij}(t)X_j + \widehat{c}_i(t) \quad (3.29)$$

se desprezarmos os efeitos relativísticos.

Quando lidamos com sólidos piezelétricos, utilizamos o conceito de energia livre do sistema. Esta energia livre é obtida por relações termodinâmicas, sendo que existem diversas escolhas possíveis [Ikeda, 1996]. Uma abordagem muito comum consiste em utilizar a energia livre de Gibbs, mas assumindo a teoria infinitesimal (onde a mudança de configuração do corpo não é levada em consideração). Como estamos lidando com movimento finitos, todas as relações constitutivas e medidas devem ser consistentes. Para satisfazer o princípio da indiferença do referencial, consideramos uma energia livre de Gibbs genérica, ${}^t_0G({}^t_0\mathbf{E}, {}^t_0\boldsymbol{\varphi})$, função de ${}^t_0\mathbf{E}$ e ${}^t_0\boldsymbol{\varphi}$. Se esta função é invariante, a seguinte igualdade deve ser satisfeita

$${}^t_0G({}^t_0\mathbf{E}, {}^t_0\boldsymbol{\varphi}) = {}^t_0G({}^t_0\widehat{\mathbf{E}}, {}^t_0\widehat{\boldsymbol{\varphi}}), \quad (3.30)$$

e devemos investigar como ${}^t_0\mathbf{E}$ e ${}^t_0\boldsymbol{\varphi}$ transformam-se entre os diferentes observadores. Para isto, observamos que

$${}^t_0\widehat{F}_{iK} = \frac{\partial {}^t\widehat{X}_i}{\partial {}^0X_K} = \frac{\partial \left(\widehat{Q}_{ij}X_j \right)}{\partial {}^0X_K} = \widehat{Q}_{ij}F_{jK} \quad (3.31)$$

e como o tensor de Cauchy-Green à direita é invariante,

$$\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{F}^T \widehat{\mathbf{Q}}^T \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F} \right) = \mathbf{C}, \quad (3.32)$$

fica claro que o tensor deformação de Cauchy também é invariante $\left(\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \right)$.

Considerando o campo elétrico Lagrangiano ${}^t_0\varphi$, temos que

$${}^t_0\widehat{\varphi}_L = {}^t\widehat{\varphi}_i {}^t_0\widehat{F}_{iL}, \quad (3.33)$$

tal que

$${}^t_0\widehat{\varphi}_L = \widehat{Q}_{ij} {}^t\varphi_j \widehat{Q}_{ij} F_{jL} = {}^t\varphi_j F_{jL} = {}^t_0\varphi_L, \quad (3.34)$$

indicando que esta medida também é invariante. Assim, expressando a energia livre de Gibbs em termos de ${}^t_0\mathbf{E}$ e ${}^t_0\varphi$, garante a a invariância com o referencial. Utilizando a tradicional teoria linear da piezeletricidade, podemos escrever

$${}^t_0G = \frac{1}{2} {}^t_0C_{IJKL} {}^tE_{KL} {}^tE_{IJ} - \frac{1}{2} {}^t_0\epsilon_{KL} {}^t_0\varphi_K {}^t_0\varphi_L - {}^t_0e_{KIJ} {}^tE_{IJ} {}^t_0\varphi_K \quad (3.35)$$

onde as medidas Lagrangianas discutidas neste trabalho são utilizadas, \mathbf{C} é o tensor de quarta ordem de coeficientes elásticos, ϵ é o tensor de segunda ordem dos coeficientes dielétricos e e é o tensor de terceira ordem dos coeficientes piezelétricos [Ikeda, 1996]. Utilizando os conceitos apresentados no Capítulo 2, obtemos as relações constitutivas

$${}^t_0S_{IJ} = {}^t_0C_{IJKL} {}^tE_{KL} - {}^t_0e_{KIJ} {}^t_0\varphi_K \quad (3.36)$$

$${}^t_0D_K = {}^t_0e_{KIJ} {}^tE_{IJ} + {}^t_0\epsilon_{KL} {}^t_0\varphi_K \quad (3.37)$$

onde deve-se observar que as relações constitutivas obtidas relacionam medidas Lagrangianas.

Como t_0G é invariante, segue que tanto ${}^t_0\mathbf{S}$ quanto ${}^t_0\mathbf{D}$ também são invariantes. A invariância do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff é bem conhecida na literatura. Para avaliarmos a

invariância da medida Lagrangiana de deslocamento elétrico, observamos que

$$\begin{aligned} {}^t_0\hat{D}_K &= \det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0\hat{F}_{ik}^{-1} {}^t\hat{D}_i \\ &= \det(\hat{\mathbf{Q}})\det({}^t_0\mathbf{F}) {}^t_0F_{jK}^{-1} \hat{Q}_{ij}^{-1} \hat{Q}_{im} {}^tD_m \\ &= {}^t_0D_K. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Este resultado é muito importante, pois indica que o uso de uma formulação Lagrangiana total torna desnecessária a atualização das medidas e tensores constitutivas ao longo do movimento. O fato de estas medidas serem invariantes, indica que a escolha de uma abordagem Lagrangiana total equivale a escolha de um observador fixo posicionado na configuração de referência. Como o observador não muda e todas as medidas são escritas nesta mesma configuração, nenhuma atualização é necessária.

3.1.7 Invariância com Respeito ao Sistema de Coordenadas

É importante salientar a diferença entre invariância do sistema de referência e invariância do sistema de coordenadas. A invariância com o referencial diz respeito a invariância de uma determinada medida com respeito a dois diferentes observadores, relacionados por $\hat{\mathbf{Q}}(t)$.

Um observador específico pode utilizar uma infinidade de sistemas de coordenadas, sendo que a relação entre estes sistemas de coordenadas é dada por um outro tensor ortogonal, $\tilde{\mathbf{Q}}$, que não varia com o tempo. Assim, para um observador específico, na configuração de referência

$${}^0\tilde{X}_A = \tilde{Q}_{AB} {}^0X_B, \quad (3.39)$$

onde

$$\tilde{F}_{iA} = \frac{\partial {}^tX_i}{\partial {}^0\tilde{X}_A} \text{ e } F_{iB} = \frac{\partial {}^tX_i}{\partial {}^0X_B} \quad (3.40)$$

são relacionados por

$$F_{iB} = \frac{\partial {}^tX_i}{\partial {}^0\tilde{X}_A} \frac{\partial {}^0\tilde{X}_A}{\partial {}^0X_B} = \tilde{F}_{iA} \tilde{Q}_{AB}. \quad (3.41)$$

Considerando a Equação (3.41), observamos que

$${}^t_0\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{Q}} {}^t_0\mathbf{F}^T {}^t_0\mathbf{F} \tilde{\mathbf{Q}}^T = \tilde{\mathbf{Q}} {}^t_0\mathbf{C} \tilde{\mathbf{Q}}^T \quad (3.42)$$

e

$${}^t_0\tilde{\varphi} = {}^t_0\varphi \tilde{\mathbf{Q}}^T, \quad (3.43)$$

tal que

$${}^t_0G({}^t_0\mathbf{E}, {}^t_0\boldsymbol{\varphi}) = {}^t_0G({}^t_0\tilde{\mathbf{E}}, {}^t_0\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) = {}^t_0G(\tilde{\mathbf{Q}} {}^t_0\mathbf{E}\tilde{\mathbf{Q}}^T, {}^t_0\boldsymbol{\varphi}\tilde{\mathbf{Q}}^T), \quad (3.44)$$

é válido para qualquer tensor ortogonal próprio $\tilde{\mathbf{Q}}$ se e somente se o material é isotrópico [Zheng, Q-S. 1994]. Neste ponto, devemos observar que materiais piezelétricos não são definidos para todos os grupos de simetria material [Ikeda, 1996; Lines e Glass, 2001] sendo que materiais isotrópicos não são de interesse.

3.1.8 Análise de Conjugação entre as medidas Lagrangianas Elétricas

Para expressarmos o movimento do corpo de forma consistente, é importante que sejam utilizadas medidas energeticamente conjugadas. A análise de conjugação entre o segundo tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformação de Green é bem estabelecida na literatura, e não será abordado neste texto [Pai et al, 1998].

Para avaliar a conjugação entre as medidas Lagrangianas elétricas ${}^t_0\mathbf{D}$ e ${}^t_0\boldsymbol{\varphi}$, podemos utilizar o conceito de energia interna de um sólido dielétrico [Wangsness, 1979] na configuração deformada

$${}^tU = \int_{\Omega_t} {}^tD_i d {}^t\varphi_i d\Omega_t, \quad (3.45)$$

e verificar se a energia mantém o mesmo valor para diferentes observadores. Utilizando as medidas Lagrangianas podemos expressar a energia interna na configuração de referência. Para isto, utilizamos a Equação (3.5) para mudar o domínio de integração e, considerando as Equações (3.13) e (3.28), obtemos

$${}^tU = \int_{\Omega_t} {}^tD_k d {}^t\varphi_k d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \frac{1}{\det({}^t_0\mathbf{F})} {}^tF_{iK} {}^tD_K d ({}^t_0\varphi_K {}^tF_{iK}^{-1}) \det({}^t_0\mathbf{F}) d\Omega_0. \quad (3.46)$$

Considerando o fato de que ${}^t_0\mathbf{F} {}^t_0\mathbf{F}^{-1}$ é a identidade e cancelando os determinantes, obtemos

$${}^tU = {}^0U = \int_{\Omega_0} {}^tD_K d {}^t_0\varphi_K d\Omega_0, \quad (3.47)$$

indicando que as medidas Lagrangianas consideradas neste trabalho são energeticamente conjugadas.

3.2 Equações incrementais

Durante o movimento de um corpo arbitrário, geralmente conhecemos o estado atual do corpo e os estados prévios, a partir da configuração inicial. Na descrição do movimento finito, o objetivo é determinar a próxima configuração admissível ($t + \Delta t$), isto é, uma configuração que respeite o princípio de Hamilton para um corpo piezelétrico [Tiersten, 1967]. Nesta nova configuração, o princípio de Hamilton pode ser escrito como

$${}^{t+\Delta t}_0 \delta_{a_n} \int_{t_0}^{t_1} {}^{t+\Delta t}_0 L dt + {}^{t+\Delta t}_0 \delta_{a_n} \int_{t_0}^{t_1} {}^{t+\Delta t}_0 W_{ext} dt = 0 \quad (3.48)$$

$${}^{t+\Delta t}_0 L = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_0 \gamma {}^{t+\Delta t}_0 \dot{u}_I {}^{t+\Delta t}_0 \dot{u}_I - {}^{t+\Delta t}_0 G \right) d\Omega_0 \quad (3.49)$$

$${}^{t+\Delta t}_0 G = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} {}^{t+\Delta t}_0 E_{KL} {}^{t+\Delta t}_0 E_{IJ} - \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{KLM} {}^{t+\Delta t}_0 \varphi_K {}^{t+\Delta t}_0 \varphi_L - {}^{t+\Delta t}_0 e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}_0 E_{IJ} {}^{t+\Delta t}_0 \varphi_K \quad (3.50)$$

onde as variações são consideradas em $t + \Delta t$ com respeito a uma componente arbitrária n de um campo vetorial \mathbf{a} , γ é o peso específico, \dot{u} é a velocidade (derivada temporal do campo de deslocamentos), L é o funcional de Lagrange (energia cinética menos energia livre), W_{ext} é o trabalho externo e ${}^{t+\Delta t}_0 G$ é a energia livre do corpo piezelétrico, considerando medidas Lagrangianas consistentes.

Para reescrever a Equação (3.49) em uma forma mais tratável, podemos integrar o termo de inércia por partes

$$\int_{\Omega_0} \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_0 \gamma {}^{t+\Delta t}_0 \dot{u}_I {}^{t+\Delta t}_0 \dot{u}_I dt \right) d\Omega_0 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[\int_{t_0}^{t_1} ({}^{t+\Delta t}_0 \gamma {}^{t+\Delta t}_0 \ddot{u}_I {}^{t+\Delta t}_0 u_I) dt + \left. {}^{t+\Delta t}_0 \gamma {}^{t+\Delta t}_0 \dot{u}_I {}^{t+\Delta t}_0 u_I \right|_{t_0}^{t_1} \right] d\Omega_0 \quad (3.51)$$

onde o último termo se anula, devido a variação na Equação (3.48). Com isto,

$${}^{t+\Delta t}_0 L = - \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_0 \gamma {}^{t+\Delta t}_0 \ddot{u}_I {}^{t+\Delta t}_0 u_I + {}^{t+\Delta t}_0 G \right) d\Omega_0. \quad (3.52)$$

Como a configuração atual é conhecida, é possível descrever a nova configuração por incrementos das variáveis de estado (deslocamento e potencial elétrico), na forma

$${}^{t+\Delta}u_I = {}^t u_I + \Delta u_I \quad (3.53)$$

$${}^{t+\Delta}\phi = {}^t \phi + \Delta\phi. \quad (3.54)$$

Assim, considerando a Equação (3.53), podemos avaliar o incremento de deformação finita como

$${}^{t+\Delta t}E_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial ({}^t u_I + \Delta u_I)}{\partial {}^0 X_J} + \frac{\partial ({}^t u_J + \Delta u_J)}{\partial {}^0 X_I} + \frac{\partial ({}^t u_M + \Delta u_M)}{\partial {}^0 X_I} \frac{\partial ({}^t u_M + \Delta u_M)}{\partial {}^0 X_J} \right) \quad (3.55)$$

que pode ser reescrito como

$${}^{t+\Delta}E_{IJ} = {}^t E_{IJ} + \Delta E_{IJ} = {}^t E_{IJ} + (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) \quad (3.56)$$

$$\varsigma_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_I}{\partial {}^0 X_J} + \frac{\partial \Delta u_J}{\partial {}^0 X_I} + \frac{\partial {}^t u_M}{\partial {}^0 X_I} \frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}^0 X_J} + \frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}^0 X_I} \frac{\partial {}^t u_M}{\partial {}^0 X_J} \right) \quad (3.57)$$

$$\eta_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}^0 X_I} \frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}^0 X_J} \right), \quad (3.58)$$

onde o incremento de deformação é separado em uma parte linear (ς_{IJ}) e em uma parte não-linear (η_{IJ}) com respeito ao incremento de deslocamentos .

Fazendo o mesmo com o campo elétrico, obtemos

$${}^{t+\Delta t}\varphi_K = -\frac{\partial ({}^t \phi + \Delta\phi)}{\partial {}^0 X_K} = {}^t \varphi_K + c_K \quad (3.59)$$

$$c_K = -\frac{\partial (\Delta\phi)}{\partial {}^0 X_K}, \quad (3.60)$$

onde c_K é linear com respeito ao incremento de campo elétrico. Como o gradiente é linear com respeito ao potencial elétrico, existe apenas uma componente linear de incremento.

Devido ao fato de o problema ser acoplado, as variações podem ser aplicadas a variáveis mecânicas e/ou elétricas. Considerando que estas variações são arbitrárias, podemos avaliar separadamente a influência de uma variação sobre variáveis de estado mecânicas e elétricas. A seguir, serão avaliadas as equações obtidas com variações sobre uma componente de deslocamento e após as equações obtidas com uma variação sobre o potencial elétrico. Como resultado,

será obtido um sistema de equações variacionais capaz de descrever o movimento finito de um corpo piezelétrico.

3.2.1 Variação com respeito a uma componente de deslocamento

Nas Equações (3.48), (3.49) e (3.50), podemos calcular a variação com respeito a uma componente n de um campo vetorial \mathbf{u}

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}^t L dt + {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}^t W_{ext} dt = 0. \quad (3.61)$$

Inicialmente, consideramos o lado esquerdo da Equação (3.61)

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}^t L dt \quad (3.62)$$

com

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t L) = - \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} {}^t \gamma ({}^t \ddot{u}_I + \Delta \ddot{u}_I) {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t u_I + \Delta u_I) + {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t G) \right] d\Omega_0 \quad (3.63)$$

e

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t G) = {}^t C_{IJKL} {}^t E_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t E_{IJ}) - {}^t e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t E_{IJ}) {}^t \varphi_K. \quad (3.64)$$

Inserindo as Equações (3.56) e (3.59) na Equação (3.64), obtemos

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t G) = {}^t C_{IJKL} ({}^t E_{KL} + \varsigma_{KL} + \eta_{KL}) {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t E_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) - {}^t e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t E_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) ({}^t \varphi_K + c_K) \quad (3.65)$$

e, como as variações são consideradas em $t + \Delta t$ [Zieliński e Frey, 2001],

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t u_I + \Delta u_I) = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\Delta u_I) \quad (3.66)$$

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t E_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}). \quad (3.67)$$

Com este resultado, podemos finalmente reescrever o problema na forma apropriada

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t_0{}^{t+\Delta t}L) = - \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} [{}^{t+\Delta t}\gamma ({}^t_0\ddot{u}_I + \Delta\ddot{u}_I) {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\Delta u_I) \\ + {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t_0{}^{t+\Delta t}G)] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t_0{}^{t+\Delta t}G) = {}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} ({}^t_0E_{KL} + \varsigma_{KL} + \eta_{KL}) {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) \\ - {}^t_0{}^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) ({}^t_0\varphi_K + c_K). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Utilizando as Equações (3.68) e (3.69) podemos reescrever a Equação (3.61) como

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} ({}^{t+\Delta t}\gamma {}^t_0\ddot{u}_I {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\Delta u_I) + {}^t_0{}^{t+\Delta t}\gamma {}^t_0\ddot{u}_I {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\Delta u_I)) d\Omega_0 + \right. \\ \int_{\Omega_0} ({}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} {}^t_0E_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + {}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} {}^t_0E_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + \\ {}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + {}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + \\ {}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + {}^t_0{}^{t+\Delta t}C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) - \\ {}^t_0{}^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) c_K - {}^t_0{}^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) c_K - \\ \left. {}^t_0{}^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) {}^t_0\varphi_K - {}^t_0{}^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) {}^t_0\varphi_K \right) d\Omega_0] dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} [{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} ({}^t_0{}^{t+\Delta t}W_{ext})] dt. \end{aligned} \quad (3.70)$$

3.2.2 Variação com respeito ao potencial elétrico

Considerando a variação com respeito ao potencial elétrico,

$${}^{t+\Delta t}\delta_\phi \int_{t_0}^{t_1} {}^t_0{}^{t+\Delta t}L dt + {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \int_{t_0}^{t_1} {}^t_0{}^{t+\Delta t}W_{ext} dt = 0, \quad (3.71)$$

e como o termo de inércia não depende do potencial elétrico

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi ({}^t_0{}^{t+\Delta t}L) = {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} {}^t_0{}^{t+\Delta t}\gamma {}^t_0{}^{t+\Delta t}\dot{u}_I {}^t_0{}^{t+\Delta t}\dot{u}_I - {}^t_0{}^{t+\Delta t}G \right) d\Omega_0 \\ = - \int_{\Omega_0} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi ({}^t_0{}^{t+\Delta t}G) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

é necessário apenas calcular

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^{t+\Delta t}G \right) = & - {}_0^{t+\Delta t}\epsilon_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^{t+\Delta t}\varphi_K \right) {}_0^{t+\Delta t}\varphi_L \\ & - {}_0^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}_0^{t+\Delta t}E_{IJ} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(\varphi_K \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Introduzindo as Equações (3.56), (3.57), (3.58), (3.59) e (3.60), na Equação (3.73) obtém-se

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^{t+\Delta t}G \right) = & - {}_0^{t+\Delta t}\epsilon_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^t\varphi_K + c_K \right) \left({}_0^t\varphi_L + c_L \right) \\ & - {}_0^{t+\Delta t}e_{KIJ} \left({}_0^tE_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ} \right) {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^t\varphi_K + c_K \right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

e, como as variações são consideradas em $t + \Delta t$,

$${}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^t\varphi_K + c_K \right) = {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(c_K \right) \quad (3.75)$$

obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} \left({}_0^{t+\Delta t}\epsilon_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(c_K \right) {}_0^t\varphi_L + {}_0^{t+\Delta t}\epsilon_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(c_K \right) c_L + \right. \\ \left. {}_0^{t+\Delta t}e_{KIJ} {}_0^tE_{IJ} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(c_K \right) + {}_0^{t+\Delta t}e_{KIJ} \varsigma_{IJ} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(c_K \right) + \right. \\ \left. {}_0^{t+\Delta t}e_{KIJ} \eta_{IJ} {}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left(c_K \right) \right) d\Omega_0 \Big] dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left[{}^{t+\Delta t}\delta_\phi \left({}_0^{t+\Delta t}W_{ext} \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.76)$$

3.2.3 Equações incrementais acopladas

As Equações (3.70) e (3.76) formam um conjunto de equações acopladas, descrevendo o movimento finito de um sólido piezoeletrico. Se consideramos as relações constitutivas descritas pelas Equações (3.36) e (3.37), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} \left({}_0^{t+\Delta t} \gamma {}_0^t \ddot{u}_I {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\Delta u_I) + {}_0^{t+\Delta t} \gamma {}_0^t \Delta \ddot{u}_I {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\Delta u_I) \right) d\Omega_0 \right] \quad (3.77) \\
& \int_{\Omega_0} \left({}_0^t S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) - {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) c_K + \right. \\
& \quad {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + \\
& \quad \left. {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) - \right. \\
& \quad \left. {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) c_K \right) d\Omega_0 \Big] dt \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \left[{}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) - \int_{\Omega_0} {}_0^t S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) d\Omega_0 \right] dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} \left({}_0^{t+\Delta t} \epsilon_{KIL} {}^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) c_L + {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \varsigma_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) \right. \quad (3.78) \\
& \quad \left. {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \eta_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) \right) d\Omega_0 \Big] dt \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \left[{}^{t+\Delta t} \delta_\phi \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) + \int_{\Omega_0} {}_0^t D_K {}^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) d\Omega_0 \right] dt
\end{aligned}$$

que é a forma incremental para a Equação (3.48). Estas equações tem termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos com respeito aos incrementos de deslocamentos e lineares e quadráticos com respeito ao incremento de potencial elétrico. O lado direito da igualdade nas Equações (3.77) e (3.78) são chamados de resíduos, que devem ser iguais a zero no equilíbrio.

Quando consideramos casos estáticos, a Equação (3.48) se torna o princípio dos trabalhos virtuais. Neste caso, os efeitos de inércia, isto é, a primeira linha na Equação (3.77), se anulam, assim como as integrais no tempo. Somente casos estáticos serão considerados neste trabalho, mas deve-se salientar que a extensão para o caso dinâmico é simples, pois os termos que devem ser considerados foram obtidos de forma consistente no procedimento apresentado nesta seção.

3.3 Equações infinitesimais

Se a configuração deformada e a indeformada podem ser confundidas, é possível particularizar as equações incrementais para as equações infinitesimais da piezeletricidade. Primeiro, observamos que ${}_0^t \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{I}$ quando $\Omega_t \rightarrow \Omega_0$. Como conseqüência, as medidas Lagrangianas e Eulerianas se confundem e a expressão de energia livre (3.35) se torna a expressão de energia livre de Gibbs na forma infinitesimal. A medida de deformação a ser considerada é o tensor de

deformações infinitesimais, Equação (3.9), tal que não existem termos de alta ordem a considerar, resultando em $\varepsilon_{ij} = \varsigma_{IJ}$ com $\eta_{IJ} = 0$ pois ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Para o campo elétrico, temos que $\varphi_k = c_K$, pois ${}^{t+\Delta t}\varphi = \Delta\varphi = \varphi$. Considerando tais simplificações nas Equações (3.77) e (3.78) é possível escrever

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega} (\gamma \ddot{u}_i \delta_{u_n}(u_i)) d\Omega + \right. \\ & \left. \int_{\Omega_0} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta_{u_n}(\varepsilon_{ij}) - e_{kij} \delta_{u_n}(\varepsilon_{ij}) \varphi_k) d\Omega \right] dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} [\delta_{u_n}(W_{ext})] dt \end{aligned} \quad (3.79)$$

e

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} (\varepsilon_{kl} \delta_{\phi}(\varphi_k) \varphi_l + e_{kij} \varepsilon_{ij} \delta_{\phi}(\varphi_k)) d\Omega \right] dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} [\delta_{\phi}(W_{ext})] dt \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde assumimos uma configuração inicial sem tensões e deslocamentos elétricos. As Equações (3.79) e (3.80) estão de acordo com as equações variacionais infinitesimais presentes na literatura [Naillon et al, 1983], mostrando que o caso infinitesimal é um caso particular da formulação proposta.

3.4 Aproximação por Elementos Finitos

As Equações (3.77) e (3.78) descrevem os campos de deslocamento e potencial elétrico que respeitam o princípio de Hamilton durante o movimento finito. Estas equações são obtidas considerando-se que são conhecidas na configuração atual tanto a configuração de referência, onde as integrais são calculadas, quanto as variáveis de estado.

Soluções analíticas para a determinação dos campos incrementais contínuos $\Delta\mathbf{u}$ e $\Delta\phi$ são muito complexas para serem obtidas para geometrias e condições de contorno gerais. Uma alternativa bastante utilizada na construção de soluções aproximadas é a utilização do método dos Elementos Finitos [Bathe, 1996]. Para este fim, os campos contínuos incrementais são aproxi-

dados, dentro de cada elemento finito e , na forma

$$\Delta u_I^e \simeq N_{\alpha I}^u \Delta U_{\alpha I}^e \quad (3.81)$$

$$\Delta \phi^e \simeq N_{\alpha}^c \Delta \Phi_{\alpha}^e \quad (3.82)$$

onde $\alpha \in [1, nen]$ e nen é o número de nós de cada elemento finito na malha, $I \in [1, 3]$ é uma das coordenadas cartesianas, $N_{\alpha I}^u$ é a função de interpolação para os incrementos de deslocamentos no nó α , direção I e N_{α}^c é a função de interpolação para o incremento de campo elétrico no nó α . $\Delta U_{\alpha I}^e$ é o valor nodal de incremento de deslocamentos e $\Delta \Phi_{\alpha}^e$ é o valor nodal do incremento de potencial elétrico.

Considerando as Equações (3.81) e (3.57), obtém-se

$$\varsigma_{IJ}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{\alpha I}^u}{\partial^0 X_J} \Delta U_{\alpha I}^e + \frac{\partial N_{\alpha J}^u}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha J}^e + \frac{\partial_0^t u_m}{\partial^0 X_I} \frac{\partial N_{\alpha m}^u}{\partial^0 X_J} \Delta U_{\alpha m}^e + \frac{\partial N_{\alpha m}^u}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha m}^e \frac{\partial_0^t u_m}{\partial^0 X_J} \right), \quad (3.83)$$

e a variação ${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e$ deve ser avaliada na sua forma discreta, isto é, nos nós [Bathe, 1996]. Antes de calcularmos este termo, devemos observar que esta variação deve ser calculada em $t + \Delta t$, tal que [Zieliński e Frey, 2001]

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e = {}^{t+\Delta t} \delta_{\Delta u_n} \varsigma_{IJ}^e, \quad (3.84)$$

e a relação [Bathe, 1996]

$${}^{t+\Delta t} \delta_{\Delta u_n} \varsigma_{IJ}^e \Rightarrow \frac{\partial \varsigma_{IJ}^e}{\partial \Delta U_{\mu n}^e} \delta \Delta U_{\mu n}^e \quad (3.85)$$

deve ser utilizada na formulação discreta. Utilizando a Equação (3.85) para avaliar a primeira variação da Equação (3.57), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varsigma_{IJ}^e}{\partial \Delta U_{\mu n}^e} \delta \Delta U_{\mu n}^e &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{\alpha I}^u}{\partial^0 X_J} \delta_{In} \delta_{\mu\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha J}^u}{\partial^0 X_I} \delta_{Jn} \delta_{\mu\alpha} + \frac{\partial_0^t u_m}{\partial^0 X_I} \frac{\partial N_{\alpha m}^u}{\partial^0 X_J} \delta_{mn} \delta_{\alpha\mu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial N_{\alpha m}^u}{\partial^0 X_I} \delta_{mn} \delta_{\alpha\mu} \frac{\partial_0^t u_m}{\partial^0 X_J} \right) \delta \Delta U_{\mu n}^e. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Considerando as Equações (3.58) e (3.81), obtemos

$$\eta_{IJ}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{\alpha m}^u}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha m}^e \frac{\partial N_{\beta m}^u}{\partial^0 X_J} \Delta U_{\beta m}^e \right) \quad (3.87)$$

com primeira variação

$$\frac{\partial \eta_{IJ}^e}{\partial \Delta U_{\mu n}^e} \delta \Delta U_{\mu n}^e = \left(\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha m}^e \frac{\partial N_{\beta m}}{\partial^0 X_J} \delta_{mn} \delta_{\beta \mu} \right) \delta \Delta U_{\mu n}^e, \quad (3.88)$$

e, para a Equação (3.60), obtemos a forma discreta

$$c_K^e = - \frac{\partial N_{\alpha}^c}{\partial^0 X_K} \Delta \Phi_{\alpha}^e \quad (3.89)$$

com primeira variação

$$\frac{\partial c_K^e}{\partial \Delta \phi_{\mu}^e} \delta \Delta \phi_{\mu}^e = - \frac{\partial N_{\alpha}^c}{\partial^0 X_K} \delta_{\alpha \mu} \delta \Delta \phi_{\mu}^e. \quad (3.90)$$

Utilizando as formas discretas obtidas acima, podemos reescrever as Equações (3.77) e (3.78). No entanto, se todos os termos destas equações fossem considerados, um procedimento de solução não-linear de alta ordem seria necessário.

Com o objetivo de utilizarmos métodos de solução baseados em Newton-Raphson, descartamos os termos de alta ordem com respeito aos incrementos das variáveis de estado. Considerando apenas os termos de baixa ordem, podemos reescrever as Equações (3.77) e (3.78) como

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} \left({}_0^{t+\Delta t} \gamma {}_0^t \ddot{u}_I \delta_{u_n}^{t+\Delta t} (\Delta u_I) \right) d\Omega_0 + \right. \\ & \left. \int_{\Omega_0} \left({}_0^t S_{IJ} \delta_{u_n}^{t+\Delta t} (\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \varsigma_{KL} \delta_{u_n}^{t+\Delta t} (\varsigma_{IJ}) - {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \delta_{u_n}^{t+\Delta t} (\varsigma_{IJ}) c_K \right) \right] dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta_{u_n}^{t+\Delta t} \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) - \int_{\Omega_0} {}_0^t S_{IJ} \delta_{u_n}^{t+\Delta t} (\varsigma_{IJ}) d\Omega_0 \right] dt \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} \left({}_0^{t+\Delta t} \epsilon_{KL} \delta_{\phi}^{t+\Delta t} (c_K) c_L + {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \varsigma_{IJ} \delta_{\phi}^{t+\Delta t} (c_K) \right) d\Omega_0 \right] dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta_{\phi}^{t+\Delta t} \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) + \int_{\Omega_0} {}_0^t D_K \delta_{\phi}^{t+\Delta t} (c_K) d\Omega_0 \right] dt. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Estas equações de equilíbrio linearizadas devem ser solucionadas de forma a manter o resíduo nulo, isto é, deve existir um equilíbrio entre as forças e cargas elétricas internas e externas.

Deve-se salientar que o descarte dos termos de alta ordem só é possível quando os incrementos das variáveis de estados são pequenos, garantindo que os termos de alta ordem serão muito

menores dos que os termos de baixa ordem. Isto é crucial para mantermos o raio de atração dos métodos de Newton [Arora, 1989].

Utilizando a Equação (3.91), e descartando os termos de inércia, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^e} {}^t S_{IJ}^e {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e d\Omega_0^e &= \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^T {}^t \vec{S} d\Omega_0^e \right) \delta \Delta \mathbf{U}^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} {}^t \mathbf{F}_{int}^e \\ \int_{\Omega_0^e} {}^t S_{IJ}^e {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \eta_{IJ}^e d\Omega_0^e &= \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{G}^T \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{G} d\Omega_0^e \right) \Delta \mathbf{U}^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{K}_\sigma^e \Delta \mathbf{U}^e \\ \int_{\Omega_0^e} {}^{t+\Delta t} C_{IJKL} \varsigma_{KL}^e {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e d\Omega_0^e &= \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^t \mathbf{C} \mathbf{B}_u d\Omega_0^e \right) \Delta \mathbf{U}^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{K}_{uu}^e \Delta \mathbf{U}^e \\ \int_{\Omega_0^e} {}^{t+\Delta t} e_{KIJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e c_K^e d\Omega_0^e &= \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^t \mathbf{e}^t \mathbf{B}_\phi d\Omega_0^e \right) \Delta \Phi^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \Delta \Phi^e \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_u &= \mathbf{B}_u^0 + \mathbf{B}_u^1 \\ \mathbf{B}_u^0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & & & & \\ & \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & & & \\ & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} & & \\ & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} & & \\ & \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} & \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} & & \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & & & \end{bmatrix}, \alpha=1..nen \\ \mathbf{B}_u^1 &= \begin{bmatrix} u_{1,1} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} & & \\ u_{1,2} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & u_{2,2} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & u_{3,2} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} & & \\ u_{1,3} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} & u_{2,3} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} & u_{3,3} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} & & \\ u_{1,2} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} + u_{1,3} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & u_{2,2} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} + u_{2,3} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & u_{3,2} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} + u_{3,3} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} & & \\ u_{1,1} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} + u_{1,3} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} + u_{2,3} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} + u_{3,3} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} & & \\ u_{1,1} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} + u_{1,2} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} + u_{2,2} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} + u_{3,2} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} & & \end{bmatrix}, \alpha=1..nen \\ \mathbf{B}_\phi &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha^c}{\partial^0 X_1} \\ \frac{\partial N_\alpha^c}{\partial^0 X_2} \\ \frac{\partial N_\alpha^c}{\partial^0 X_3} \end{bmatrix}, \alpha=1..nen \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial X_3} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial X_3} \\ \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial X_3} \end{bmatrix}, \alpha=1..nen$$

$$\widehat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & & & & \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & & & & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & & & & \\ & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ & & & S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & \\ & & & S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & \\ & & & & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & & & & & & S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ & & & & & & S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix},$$

e

$$\vec{\mathbf{S}} = \left\{ S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{23} \ S_{13} \ S_{12} \right\}^T,$$

tal que

$${}_0^t \mathbf{E}^e = (\mathbf{B}_u^0 + 0.5 * \mathbf{B}_u^1) {}_0^t \mathbf{U}^e$$

e

$${}_0^t \varphi^e = -\mathbf{B}_\phi {}_0^t \phi^e.$$

Desta forma, a Equação linearizada (3.91), pode ser reescrita, para um elemento finito e , como

$$(\mathbf{K}_{uu}^e + \mathbf{K}_\sigma^e) \Delta \mathbf{U}^e + \mathbf{K}_{u\phi}^e \Delta \Phi^e = {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext}^e - {}_0^t \mathbf{F}_{int}^e, \tag{3.93}$$

pois as variações são arbitrárias e comuns a todos os termos.

Para a Equação (3.92), utilizando as Equações (3.86), (3.87), (3.88), (3.89) e (3.90), obtemos

a forma discreta

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega_0^e} {}_0^{t+\Delta t} \epsilon_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_\phi c_K^e c_L^e d\Omega_0^e &= -\left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_\phi^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{B}_\phi d\Omega_0^e \right) \delta \Delta \phi^e \Delta \Phi^e = -\delta \Delta \Phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \Delta \Phi^e \\
-\int_{\Omega_0^e} {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \zeta_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_\phi c_K^e d\Omega_0^e &= \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_\phi^t \mathbf{e} \mathbf{B}_u d\Omega_0^e \right) \delta \Delta \phi^e \Delta \Phi^e = \delta \Delta \Phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \Delta \Phi^e \\
\int_{\Omega_0^e} {}_0^t D_K^e {}^{t+\Delta t} \delta_\phi c_K^e d\Omega_0^e &= -\left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_\phi^t {}_0^t \mathbf{D}_K^e d\Omega_0^e \right) \delta \Delta \phi^e = -\delta \Delta \Phi^{eT} {}_0^t \mathbf{Q}_{int}^e
\end{aligned}$$

tal que a Equação (3.92) pode ser reescrita, para um elemento finito e , como

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e \Delta \mathbf{U}^e - \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \Delta \Phi^e = {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{ext}^e - {}_0^t \mathbf{Q}_{int}^e. \quad (3.94)$$

Após a montagem do sistema global de equações, pela consideração individual de cada elemento da malha [Bathe, 1996], obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} \\ {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{ext} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}_0^t \mathbf{F}_{int} \\ {}_0^t \mathbf{Q}_{int} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}. \quad (3.95)$$

Embora este arranjo da matriz de rigidez global leve a uma maior largura de banda, é utilizado aqui para tornar a apresentação das equações mais simples. Com isto, podemos reescrever a Equação (3.95) em uma forma compacta

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{x} = {}_0^{t+\Delta t} \mathbf{P}_{ext} - {}_0^t \mathbf{F} = \mathbf{R}. \quad (3.96)$$

onde \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente acoplada, \mathbf{x} é o vetor de estados com os primeiros $3 \cdot n_{nos}$ representando os incrementos de deslocamentos e as demais n_{nos} componentes representando os incrementos de potencial elétrico de toda a malha. \mathbf{P}_{ext} é o vetor de carregamento externo e \mathbf{F} é o vetor de forças internas. \mathbf{R} é conhecido como vetor resíduo e deve ser zero no equilíbrio.

4. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações incrementais de equilíbrio discretas obtidas no capítulo anterior devem ser solucionadas por um procedimento incremental/iterativo. O uso de um procedimento incremental puro não é aconselhável, pois a acumulação de erros em cada incremento pode ser considerável. [Crisfield, 1991; Lopez, 2001]. Adicionalmente, o método de solução utilizado deve ser capaz de lidar com pontos limites e variações rápidas de rigidez [Crisfield, 1991; Fuji, 1997]. Entre os métodos mais utilizados atualmente, a família de métodos conhecida por comprimento de arco (*arc-length*), [Crisfield, 1991], tem se mostrado efetiva em uma grande gama de problemas não-lineares.

No texto que segue, o conceito de comprimento de arco é introduzido e as formulações consideradas neste trabalho são apresentadas e comparadas entre si, com ênfase na interpretação geométrica das equações de restrição de cada formulação. Deve-se salientar que existem outros métodos de solução não baseados no conceito de comprimento de arco, mas como não foram considerados neste trabalho, não serão abordados no presente texto [Ragon et al, 2002].

4.1 Equações de Equilíbrio na Forma Incremental

Para que a notação utilizada neste capítulo seja consistente com a notação utilizada nos textos que tratam de métodos de solução de equações incrementais de equilíbrio, a etapa de linearização é rerepresentada.

Seja o resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda)$, função do estado da estrutura \mathbf{x} e do nível de carregamento λ , tal que

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda\mathbf{P} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{P} é o vetor de carregamento externo da estrutura e $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o vetor de forças internas. No presente texto, ambos os vetores contém parcelas mecânicas (forças) e parcelas elétricas (cargas). A Equação (4.1) é completa, contendo todos os termos de alta ordem. Considerando a linearização da Equação (4.1) no entorno do ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, obtemos

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x}_0, \lambda_0) + \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \mathbf{x}_0} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \lambda_0} \delta \lambda = \mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda) = 0, \quad (4.2)$$

onde $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e $\delta \lambda = \lambda - \lambda_0$. Considerando a Equação (4.1), observamos que

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \lambda_0} \quad (4.3)$$

e, de acordo com o Apêndice C,

$$-\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \mathbf{x}_0}, \quad (4.4)$$

onde o símbolo \mathbf{K}_t é utilizado para representar a matriz de rigidez tangente acoplada. De posse das Equações (4.3) e (4.4), podemos reescrever a Equação (4.2) na forma

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{x} = \mathbf{R} + \delta \lambda \mathbf{P}. \quad (4.5)$$

De acordo com Batoz e Dhatt, 1979, podemos decompor a Equação linearizada (4.5) na forma

$$\begin{cases} \mathbf{K}_t \delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{P} \\ \mathbf{K}_t \delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} \end{cases} \quad (4.6)$$

tal que

$$\delta \mathbf{x} = \delta \lambda \delta \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2 \quad (4.7)$$

é o incremento iterativo do vetor de estado. Na prática, a Equação (4.6) é solucionada incrementalmente e iterativamente. Incrementalmente pois o carregamento é aplicado em forma de passos e iterativamente, pois a condição de resíduo nulo é satisfeita de forma iterativa a cada passo incremental. Para representar o incremento, é utilizado um superíndice i e para denotar uma iteração dentro do referido incremento, é utilizado o índice j . Assim, para o incremento i , iteração j , podemos reescrever a Equação (4.5) como

$$\mathbf{K}_{t_{j-1}}^i \delta \mathbf{x}_j^i = \mathbf{R}_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i \mathbf{P}_j^i. \quad (4.8)$$

Os incrementos $\delta \mathbf{x}$ e $\delta \lambda$ são chamados de iterativos, sendo que os incrementos totais em uma iteração i são dados por

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_j^i = \Delta \mathbf{x}_{j-1}^i + \delta \mathbf{x}_j^i = \Delta \mathbf{x}_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i \delta \mathbf{x}_1^i + \delta \mathbf{x}_2^i \\ \Delta \lambda_j^i = \Delta \lambda_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i \end{cases} \quad (4.9)$$

e os valores totais de \mathbf{x} e λ são obtidos pela soma dos valores incrementais, na forma

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}_j^i \\ \lambda = \lambda + \Delta\lambda_j^i \end{cases} . \quad (4.10)$$

4.2 Solução das Equações de Equilíbrio na Forma Incremental

Considerando as equações de equilíbrio na forma incremental

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{t_{j-1}}^i \delta\mathbf{x}1_j^i = \mathbf{P}^i \\ \mathbf{K}_{t_{j-1}}^i \delta\mathbf{x}2_j^i = \mathbf{R}_{j-1}^i \\ \delta\mathbf{x}_j^i = \delta\lambda_j^i \delta\mathbf{x}1_j^i + \delta\mathbf{x}2_j^i \end{cases} , \quad (4.11)$$

que são equivalentes a Equação (4.5), verificamos que se o nível de carregamento λ for considerado como uma incógnita, teremos $N + 1$ variáveis e N equações, onde N é o número de graus de liberdade do vetor de estado. Para completar este sistema, utiliza-se uma equação adicional, conhecida como equação de restrição. No presente trabalho, serão consideradas duas equações equivalentes, porém escritas de forma distinta. São elas [Fafard e Massicotte, 1993]

$$f(\delta\mathbf{x}, \delta\lambda) = (\Delta\mathbf{x}_j^i)^T \mathbf{D} \Delta\mathbf{x}_j^i + d (\Delta\lambda_j^i)^2 = (\Delta S_j^i)^2 \quad (4.12)$$

e [Yang e Shieh , 1991]

$$f(\delta\mathbf{x}, \delta\lambda) = \mathbf{C}^T \delta\mathbf{x}_j^i + k \delta\lambda_j^i = H_j^i. \quad (4.13)$$

Nas equações de restrição acima, \mathbf{D} é uma matriz diagonal, \mathbf{C} é um vetor e d , k , ΔS e H são escalares. Dependendo da escolha destes coeficientes, diferentes métodos de solução são obtidos. A seguir, serão apresentados os métodos considerados neste trabalho.

4.2.1 Comprimento de Arco Cilíndrico

Considerando a Equação de restrição (4.12) e a primeira Equação em (4.9) obtemos

$$(\Delta\mathbf{x}_{j-1}^i + \delta\lambda_j^i \delta\mathbf{x}1_j^i + \delta\mathbf{x}2_j^i)^T \mathbf{D} (\Delta\mathbf{x}_{j-1}^i + \delta\lambda_j^i \delta\mathbf{x}1_j^i + \delta\mathbf{x}2_j^i) + d (\Delta\lambda_j^i)^2 = (\Delta S_j^i)^2. \quad (4.14)$$

O método de comprimento de arco cilíndrico [Crisfield, 1991], é obtido ao considerarmos $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ e $d = 0$. Expandindo a Equação (4.14) e agrupando por potências de $\delta\lambda_j^i$, obtemos

$$a_0 (\delta\lambda_j^i)^2 + a_1 \delta\lambda_j^i + a_2 = 0, \quad (4.15)$$

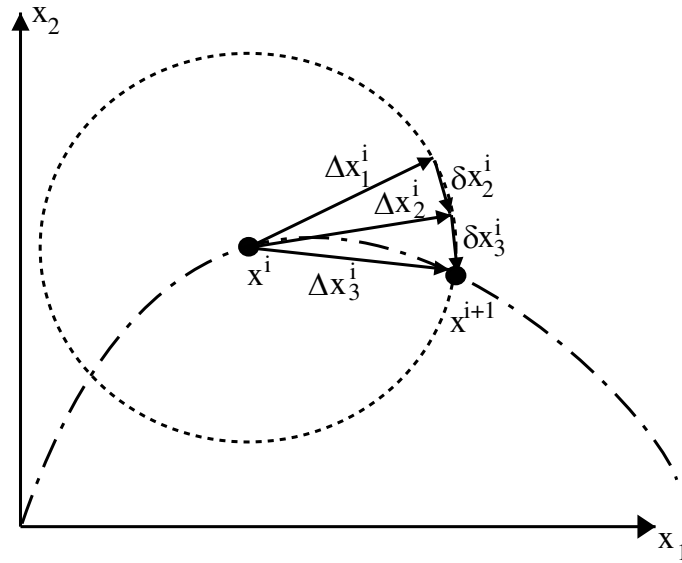


Figura 4.1: Convergência do método de comprimento de arco com restrição cilíndrica, correspondente a Equação de restrição (4.14), para um sistema de dois graus de liberdade.

onde

$$\begin{aligned}
 a_0 &= (\delta \mathbf{x} \mathbf{1}_j^i)^T (\delta \mathbf{x} \mathbf{1}_j^i) \\
 a_1 &= 2 (\delta \mathbf{x} \mathbf{1}_j^i)^T (\Delta \mathbf{x}_{j-1}^i + \delta \mathbf{x} \mathbf{2}_j^i) \\
 a_2 &= (\Delta \mathbf{x}_{j-1}^i + \delta \mathbf{x} \mathbf{2}_j^i)^T (\Delta \mathbf{x}_{j-1}^i + \delta \mathbf{x} \mathbf{2}_j^i) - \Delta S^2
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Geometricamente, a Equação (4.15) corresponde a uma cilindro de raio ΔS no espaço de dimensão $N + 1$, conforme ilustrado na Figura 4.1, para um sistema com dois graus de liberdade. Nesta figura, assim como nas demais figuras ilustrativas da convergência de cada método de comprimento de arco discutidos adiante, o eixo perpendicular ao plano ilustrado corresponde ao fator de proporcionalidade de carregamento λ . Portanto, cada figura corresponde a projeção do cilindro e dos vetores no plano $x_1 \times x_2$. Neste caso, fica claro que a cada iteração j do incremento i , a magnitude do incremento do vetor de estados, $\|\Delta \mathbf{x}^i\|_2$, é restrita a ΔS .

Devido ao fato da Equação (4.15) apresentar duas raízes, diversos procedimentos de seleção da raiz correta são discutidos na literatura [Crisfield 1991, Hellweg e Crisfield, 1998]. No entanto, conforme discutido por Fafard e Massicotte, 1993, este procedimento é um tanto complexo quando comparado a equações de restrição "lineares", sendo que ambas abordagens permitem solucionar o problema. Por este motivo, são estudadas equações de restrição alternativas à esta

equação quadrática.

4.2.2 Comprimento de Arco - Método de Crisfield-Ramm Modificado

A primeira proposta de controle de comprimento de arco foi apresentada por Wempner, 1971, tendo sido desenvolvida por Riks, 1979. Esta abordagem considera que a equação de restrição

$$(\Delta \mathbf{x}_1^i)^T (\delta \mathbf{x}_1^i) = (\Delta S_1^i)^2 \quad (4.17)$$

é utilizada na primeira iteração de cada incremento. Utilizando a Equação (4.9), podemos reescrever a Equação (4.17) como

$$(\Delta \mathbf{x}_1^i)^T (\Delta \mathbf{x}_1^i) = (\delta \mathbf{x}_1^i)^T (\delta \mathbf{x}_1^i) = (\Delta S_1^i)^2 \quad (4.18)$$

significando que na primeira iteração de cada incremento restringimos a norma Euclidiana do incremento do vetor de estados. Para as iterações subsequentes, a condição de ortogonalidade

$$(\Delta \mathbf{x}_1^i)^T (\delta \mathbf{x}_j^i) = 0 \quad (4.19)$$

é imposta, significando que o incremento iterativo do vetor de estados deve ser ortogonal a $\Delta \mathbf{x}_1^i$, como ilustrado na Figura 4.2, para um sistema de dois graus de liberdade. Assim, a restrição da norma do incremento do vetor de estado é imposta apenas na primeira iteração, podendo causar dificuldades de convergência em problemas nos quais a trajetória não-linear apresente variações rápidas de comportamento. Como pode ser observado na Figura 4.2, a condição de ortogonalidade imposta faz com que os incrementos iterativos sejam tangentes a intersecção de $\Delta \mathbf{x}_1^i$ com a restrição da norma do vetor.

Introduzindo a última linha da Equação (4.11) na Equação (4.17)

$$(\Delta \mathbf{x}_1^i)^T (\delta \lambda_1^i \delta \mathbf{x}_1^i + \delta \mathbf{x}_2^i) = (\Delta S_1^i)^2 \quad (4.20)$$

e considerando que o resíduo no início de um incremento é nulo (pois a condição de resíduo nulo deve ser garantia ao final do incremento anterior, $i - 1$), obtemos

$$\delta \lambda_1^i = \frac{(\Delta S_1^i)^2}{(\Delta \mathbf{x}_1^i)^T \delta \mathbf{x}_1^i} = \frac{(\Delta S_1^i)^2}{(\delta \lambda_1^i \delta \mathbf{x}_1^i)^T \delta \mathbf{x}_1^i}. \quad (4.21)$$

Como $\delta \mathbf{x}_1^i$ é obtido com o uso da primeira linha da Equação (4.11) e $\Delta \mathbf{x}_1^i$ é obtido com o uso

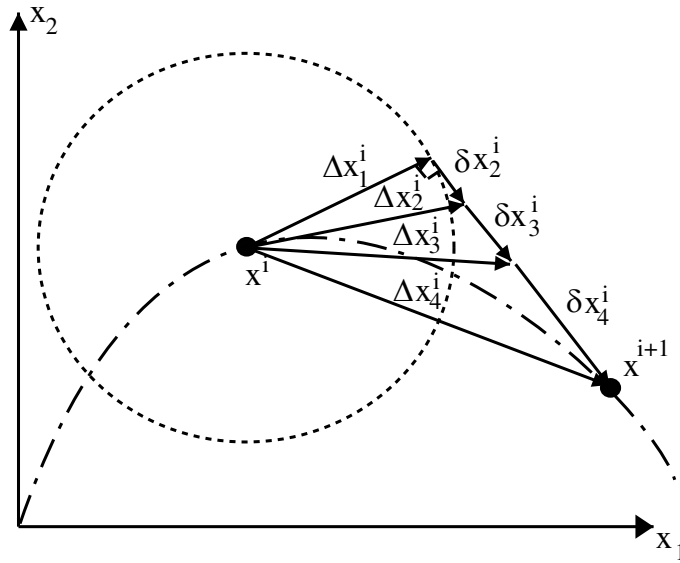


Figura 4.2: Convergência do método de comprimento de arco, correspondente as Equações de restrição (4.17) e (4.19), para um sistema de dois graus de liberdade.

da primeira Equação em (4.9), a Equação (4.21) permite obter uma relação entre o comprimento de arco ΔS e o primeiro incremento de nível de carregamento do passo

$$\delta\lambda_1^i = \pm \frac{\Delta S_1^i}{\sqrt{(\delta\mathbf{x}_1^i)^T \delta\mathbf{x}_1^i}} \quad (4.22)$$

Para as iterações subseqüentes neste incremento, observamos que ΔS_j^i é nulo, Equação (4.19), assim,

$$(\Delta\mathbf{x}_1^i)^T (\delta\mathbf{x}_1^i \delta\lambda_j^i + \delta\mathbf{x}_2^i) = 0 \quad (4.23)$$

resultando em

$$\delta\lambda_j^i = -\frac{(\Delta\mathbf{x}_1^i)^T \delta\mathbf{x}_2^i}{(\Delta\mathbf{x}_1^i)^T \delta\mathbf{x}_1^i} \quad (4.24)$$

que permite obter o valor de incremento do nível de carregamento em cada iteração j do incremento i .

Uma deficiência deste método está na natureza da condição de ortogonalidade da Equação (4.19), que força a ortogonalidade somente em relação ao primeiro incremento do vetor de estados. Tendo em vista esta deficiência, [Ramm, 1981], propôs uma atualização do método, onde a restrição da Equação (4.19) é modificada para considerar a ortogonalidade em relação à última

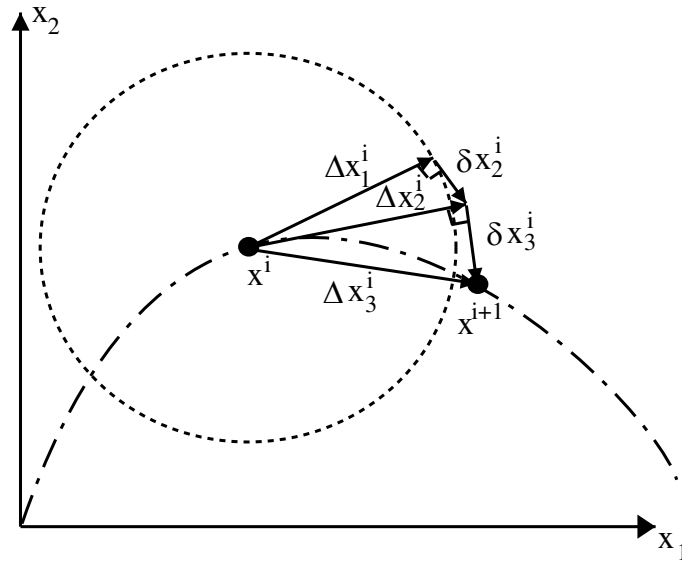


Figura 4.3: Convergência do método de comprimento de arco correspondente as Equações de restrição (4.17) e (4.25), para um sistema de dois graus de liberdade.

iteração

$$(\Delta \mathbf{x}_j^i)^T (\delta \mathbf{x}_j^i) = 0 \quad (4.25)$$

e com isto, a trajetória iterativa tende a acompanhar a trajetória obtida com uma restrição de norma, como ilustrado na Figura 4.3 para um sistema de dois graus de liberdade. Este método é conhecido por "updated plane".

Utilizando esta nova restrição de ortogonalidade, o incremento iterativo de nível de carregamento passa a ser

$$\delta \lambda_j^i = - \frac{(\Delta \mathbf{x}_j^i)^T \delta \mathbf{x} 2_j^i}{(\Delta \mathbf{x}_j^i)^T \delta \mathbf{x} 1_j^i} \quad (4.26)$$

sendo que a relação entre o primeiro incremento de nível de carregamento de uma iteração e o valor do comprimento de arco continua sendo fornecido pela Equação (4.22). No entanto, a restrição de magnitude do incremento do vetor de estado só é garantida na primeira iteração do incremento. Para modificar este comportamento, Fafard e Massicote, 1993, propuseram um escalonamento do incremento do vetor de estados. Este procedimento é bem simples e, juntamente com a equação de restrição (4.25), dá origem ao método conhecido como Crisfield-Ramm Modificado (MCR). Assim, ao considerarmos o incremento do vetor de estados, Equação (4.7), resultante do incremento do nível de carregamento resultante da Equação (4.26), teríamos um

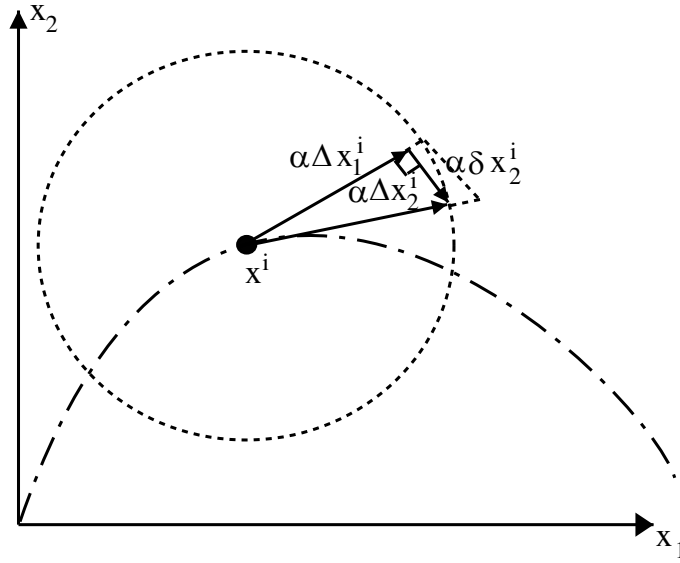


Figura 4.4: Interpretação geométrica da Equação (4.30) para um sistema de dois graus de liberdade.

incremento

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}}_{j+1}^i = \Delta \mathbf{x}_j^i + \delta \mathbf{x}_{j+1}^i. \quad (4.27)$$

Para que o incremento do vetor de estado $\Delta \mathbf{x}_j^i$ satisfaça a restrição de comprimento de arco, devemos multiplicar a norma do incremento $\Delta \tilde{\mathbf{x}}_j^i$ por um fator de escala,

$$\|\Delta \mathbf{x}_j^i\|_2 = \Delta S = \tilde{\alpha} \|\Delta \tilde{\mathbf{x}}_{j+1}^i\|_2 \quad (4.28)$$

resultando em

$$\tilde{\alpha} = \frac{\Delta S}{\|\Delta \tilde{\mathbf{x}}_{j+1}^i\|_2} \quad (4.29)$$

tal que o incremento que satisfaz o comprimento de arco é dado por

$$\Delta \mathbf{x}_{j+1}^i = \tilde{\alpha} (\Delta \mathbf{x}_j^i + \delta \mathbf{x}_{j+1}^i). \quad (4.30)$$

4.2.3 Método dos Deslocamentos Generalizados (GDC)

Embora este método não seja apresentado explicitamente como um método de comprimento de arco no artigo original [Yang e Shieh, 1991], mas sim como uma abordagem alternativa, pode-se provar que está intimamente relacionado a métodos de restrição de ortogonalidade como os

apresentados na seção anterior. Este método é obtido pela consideração dos coeficientes

$$\begin{cases} C &= \delta\lambda_1^i \delta\mathbf{x}_1^{i-1} \\ k &= 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

na restrição da Equação (4.13), onde $\delta\mathbf{x}_1^{i-1}$ é o primeiro "deslocamento" iterativo do incremento anterior. Com isto, a Equação de restrição passa a ser

$$(\delta\lambda_1^i \delta\mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}_j^i = H_j^i \quad (4.32)$$

e substituindo a última linha da Equação (4.11) na Equação (4.32), obtemos

$$\delta\lambda_j^i = \frac{H_j^i - \delta\lambda_1^i (\delta\mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}_j^i}{\delta\lambda_1^i (\delta\mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}_1^i}. \quad (4.33)$$

Para a primeira iteração de um incremento, o resíduo é nulo, portanto

$$\delta\lambda_1^i = \sqrt{\frac{H_1^i}{(\delta\mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}_1^i}}, \quad (4.34)$$

o que permite relacionar o primeiro incremento de nível de carregamento de um incremento com o valor de H_1^i . Se considerarmos que o valor de H_1^1 deve ser determinado a partir de um dado valor inicial $\delta\lambda_1^1$, verificamos que

$$H_1^1 = (\delta\lambda_1^1)^2 (\delta\mathbf{x}_1^1)^T \delta\mathbf{x}_1^1 \quad (4.35)$$

pois como $\delta\mathbf{x}_1^0$ não é definido, é assumido como sendo $\delta\mathbf{x}_1^1$. Esta equação, juntamente com a Equação (4.34), permite obter a relação

$$\delta\lambda_1^i = \delta\lambda_1^1 \sqrt{\frac{(\delta\mathbf{x}_1^1)^T \delta\mathbf{x}_1^1}{(\delta\mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}_1^i}} \quad (4.36)$$

que permite calcular o valor do primeiro incremento do nível de carregamento de cada iteração. A magnitude do primeiro incremento do vetor de estados será

$$\|\Delta\mathbf{x}_1^i\|_2 = \delta\lambda_1^i \sqrt{(\delta\mathbf{x}_1^i)^T \delta\mathbf{x}_1^i} = \delta\lambda_1^1 \sqrt{\frac{(\delta\mathbf{x}_1^1)^T \delta\mathbf{x}_1^1}{(\delta\mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}_1^i}} \sqrt{(\delta\mathbf{x}_1^i)^T \delta\mathbf{x}_1^i}, \quad (4.37)$$

sendo portanto este o valor do comprimento de arco imposto na primeira iteração de cada incremento.

O termo dentro da raiz da Equação (4.36) é conhecido como *Global Stiffness Parameter, GSP*, tendo como característica apresentar um valor negativo imediatamente após a passagem por pontos limites, o que é um indicador muito útil para a inversão da direção do carregamento. Esta propriedade vem do produto interno do denominador, que apresenta valor negativo quando o ponto $i - 1$ se encontra antes do ponto limite e o ponto i se encontra após o ponto limite. Ainda, este termo é uma razão entre uma medida do estado atual da estrutura $(\delta \mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta \mathbf{x}_1^i$ e o estado "original" $(\delta \mathbf{x}_1^1)^T \delta \mathbf{x}_1^1$, servindo, portanto, como um ajuste do primeiro valor do incremento do nível de carregamento de cada iteração [Yang e Shieh, 1991]. Este ajuste tem como objetivo escalonar o valor de $\delta \lambda_1^i$ na Equação (4.36), de forma que o valor original $\delta \lambda_1^1$ seja diminuído em regiões de baixa rigidez relativa e aumentado em regiões de alta rigidez relativa. Desta forma, observando a Equação (4.37), fica claro que a mudança relativa de rigidez é contemplada na definição do arco inicial de cada iteração.

A Equação (4.37) deve ser comparada com a abordagem heurística muito utilizada [Crisfield, 1991]

$$\Delta S_1^i = \Delta S_1^{i-1} \sqrt{\frac{I_d}{I_{ef}^{i-1}}}, \quad (4.38)$$

onde ΔS_1^i é o comprimento de arco para a primeira iteração do incremento atual, ΔS_1^{i-1} é o comprimento de arco da primeira iteração do incremento anterior, I_d é o número de iterações desejadas por incremento de carga e I_{ef}^{i-1} é o número efetivo de iterações necessárias para a convergência do incremento anterior.

Para as iterações subseqüentes do mesmo incremento, considera-se que H_j^i é nulo. Isto significa que a restrição de "arco" associada a H só é respeitada na primeira iteração do incremento. Ainda, isto implica na condição de ortogonalidade

$$(\delta \mathbf{x}_1^{i-1})^T \delta \mathbf{x}_j^i = 0 \quad (4.39)$$

que deve ser comparada as Equações (4.19) e (4.25). Assim, verifica-se que a trajetória de convergência das iterações no incremento atual (i) é ortogonal a primeira iteração do incremento anterior ($i - 1$), conforme ilustrado na Figura 4.5. Com isto, se a trajetória de equilíbrio sofrer uma alteração brusca, pode-se não obter convergência para um valor aceitável de incremento. No entanto, observa-se pelas características da Equação (4.36), que se a trajetória de equilíbrio se aproxima suavemente do ponto limite, o raio do círculo será escalonado pelo valor do *GSP*.

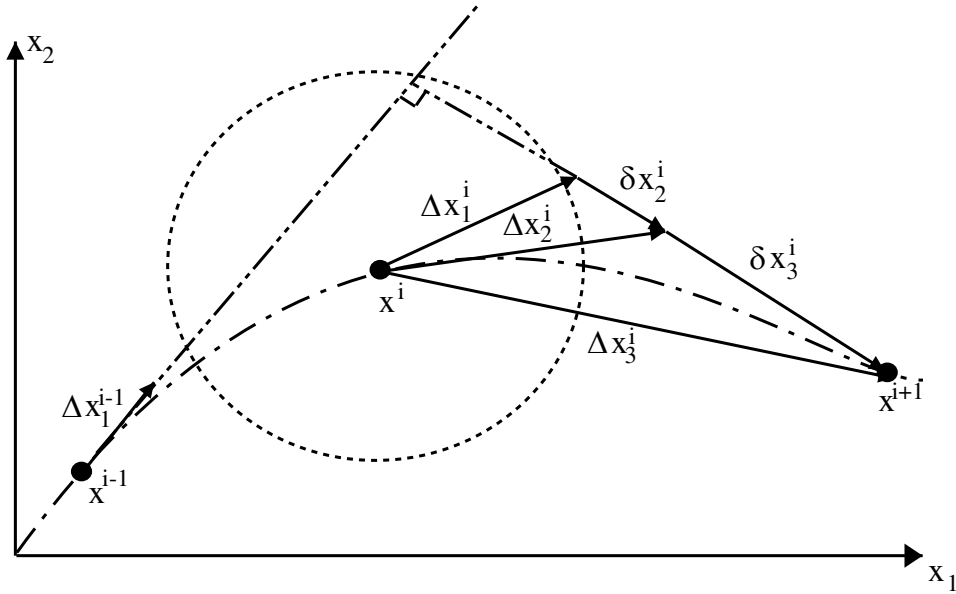


Figura 4.5: Convergência do método GDC, para um sistema de dois graus de liberdade.

Devido a esta propriedade, o método consegue descrever a trajetória em pontos limites e em pontos de baixa rigidez relativa, regiões em que alguns métodos encontram dificuldades, pois não contam com este escalonamento automático. Por outro lado, comparando as equações de ortogonalidade do método *GDC* e *MCR*, verificamos que o último é menos sensível ao escalonamento da norma de comprimento de arco.

Utilizando a Equação (4.33), podemos obter o valor do incremento de nível de carregamento para uma iteração j no incremento i ,

$$\delta\lambda_j^i = -\frac{(\delta\mathbf{x}\mathbf{1}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}\mathbf{2}_j^i}{(\delta\mathbf{x}\mathbf{1}_1^{i-1})^T \delta\mathbf{x}\mathbf{1}_j^i}. \quad (4.40)$$

A interpretação do método *GDC* como um método de comprimento de arco permite que técnicas como imposição de níveis de carregamento [Teng e Luo, 1998], busca em linha [Shi e Crisfield, 1995; Schweizerhoff, 1993], entre outras, sejam utilizadas conjuntamente com este método. Como um exemplo, verificamos que o escalonamento do incremento do vetor de estado pode ser aplicado também neste método. Reescrevendo a Equação (4.37), verificamos que o arco inicial de cada iteração é dado por

$$\Delta S_1^i = \delta\lambda_1^i \sqrt{|GSP|} \sqrt{\delta\mathbf{x}\mathbf{1}_1^i \delta\mathbf{x}\mathbf{1}_1^i} \quad (4.41)$$

e que a norma Euclidiana do primeiro incremento $\Delta \mathbf{x}_1^i$ será igual a ΔS_1^i , mas que esta norma não é respeitada nas iterações subseqüentes do incremento. No entanto, de posse do valor de ΔS_1^i , pode-se aplicar o escalonamento proposto no artigo de Fafard e Massicote, 1993, implicando em uma maior robustez do método *GDC*.

4.2.4 Tratamento de Pontos Limites

Uma etapa importante na implementação dos métodos descritos neste texto é a correta determinação do sinal do primeiro incremento iterativo do nível de carregamento, $\delta \lambda_1^i$, de cada incremento i . Isto é necessário pois em pontos limites, o sinal de $\delta \lambda_1^i$ deve ser invertido, por serem pontos extremos da relação curva definida pela seqüência de pontos (λ, x) . A Figura 4.6 ilustra dois pontos limites, A e B. A Equação (4.22) não traz esta informação, sendo que a Equação (4.36) tem dentro da raiz o termo *GSP*, que apresenta como propriedade fundamental, assumir um valor negativo imediatamente após pontos limites. Conforme discutido por Souza Neto et al, 2002, e Crisfield, 1991, os métodos mais utilizados para detecção de pontos limites são

- Determinante da matriz tangente: $sgn(\delta \lambda_1^i) = sgn(|\mathbf{K}_t(\mathbf{x}^{i-1})|)$;
- Trabalho incremental: $sgn(\delta \lambda_1^i) = sgn(\delta \mathbf{x}_1^i \mathbf{1}_1^T \mathbf{P})$;
- Trajetória secante: $sgn(\delta \lambda_1^i) = sgn(\Delta \mathbf{x}^{i-1T} \delta \mathbf{x}_1^i)$,

onde

$$sgn(a) = \frac{a}{|a|} \quad (4.42)$$

é a função sinal de um escalar a .

Em adição a estes métodos, será também considerado

- *GSP*: se $GSP^i < 0$ e $GSP^{i-1} > 0$, então $signal = -1 * signal$ e $\delta \lambda_1^i = signal * \delta \lambda_1^i$,

(onde *signal* é uma variável que armazena o sinal do incremento do nível de carregamento) assim apresentado no artigo original [Yang e Shieh, 1991].

Em relação a estas abordagens, sabe-se que o uso do determinante da matriz tangente no início de cada incremento é sensível a bifurcações [Souza Neto et al, 2002]. Assim, em caso de determinante negativo, devemos avaliar a condição do ponto, sendo que em caso de bifurcação, pode acontecer de o algoritmo de solução oscilar em torno do ponto em questão [Crisfield, 1997]. Por sua vez, a avaliação do sinal do incremento de trabalho associado ao passo predictor

é insensível a bifurcações, mas falha na presença de *snap-backs* [Souza Neto et al., 2002]. O conceito de trajetória secante, tem como características ser insensível a bifurcações e funcionar bem na presença de pontos limites e de *snap-back* [Souza Neto et al., 2002].

Da forma como são geralmente apresentados, tanto o conceito de trajetória tangente como o *GSP* parecem ser conceitos puramente geométricos. No entanto, conforme apresentado por [Feng et al, 1997], podemos determinar analiticamente uma expressão geral para a correta seleção do sinal de $\delta\lambda_1^i$. A seguir, um breve resumo da formulação é apresentado.

4.2.4.1 Determinação analítica do sinal de $\delta\lambda_1^i$

Para a determinação analítica do sinal de $\delta\lambda_1^i$ iniciamos com a parametrização da equação de equilíbrio

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{P} - \mathbf{F} = 0 \quad (4.43)$$

por um escalar positivo não-decrescente μ , tal que $\mathbf{x}(\mu)$ e $\lambda(\mu)$ [Fafard e Massicote, 1993; Feng et al, 1997]. A equação de restrição pode ser considerada de forma suficientemente genérica como [Feng et al, 1997]

$$f = h(\mathbf{x}, \lambda) - \mu = 0. \quad (4.44)$$

Avaliando as derivadas da equação de equilíbrio em relação ao parâmetro μ ,

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mu} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = 0 \quad (4.45)$$

de onde lembramos que a derivada parcial do resíduo em relação ao vetor de deslocamentos é igual ao negativo da matriz de rigidez tangente e que a derivada parcial do resíduo em relação ao nível de carregamentos é igual ao vetor de carregamentos externos. Com isto, podemos reescrever a Equação (4.45) como

$$\mathbf{K}_t \frac{d\mathbf{x}}{d\mu} = \mathbf{P} \frac{d\lambda}{d\mu} \quad (4.46)$$

e lembrando que (preditor)

$$\delta\mathbf{x}\mathbf{1} = \mathbf{K}_t^{-1}\mathbf{P} \quad (4.47)$$

podemos reescrever a Equação (4.46) como

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mu} = \delta\mathbf{x}\mathbf{1} \frac{d\lambda}{d\mu}, \quad (4.48)$$

desde que o determinante da matriz tangente seja não-nulo.

Derivando agora a equação de restrição com respeito ao escalar μ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} - 1 = 0 \quad (4.49)$$

e substituindo a Equação (4.48) na Equação (4.49), observamos que

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}}. \quad (4.50)$$

que substituindo na Equação (4.48) permite obter

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mu} = \frac{\delta \mathbf{x} \mathbf{1}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}}. \quad (4.51)$$

Como o objetivo é obter o sinal do primeiro incremento, verificamos que esta informação deve ser obtida do estudo da Equação (4.50). Os algoritmo de solução não linear abordados neste trabalho são baseados em uma etapa preditora e em uma etapa corretora. Na etapa preditora, partimos de uma configuração de equilíbrio (conhecida), e baseados nos gradientes obtidos acima, podemos incrementar o parâmetro escalar μ (o incremento é sempre positivo) obtendo os novos valores das incógnitas \mathbf{x} e λ , na forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1^{i+1} &= \mathbf{x}_1^i + \frac{d\mathbf{x}}{d\mu} \Delta\mu \\ \lambda_1^{i+1} &= \lambda_{final}^i + \frac{d\lambda}{d\mu} \Delta\mu \end{cases}. \quad (4.52)$$

Assim, definindo o incremento de carregamento como $\lambda^{i+1} - \lambda^i$, observamos que o sinal deste incremento é dado pelo produto $\frac{d\lambda}{d\mu} \Delta\mu$ e como $\Delta\mu$ é sempre positivo, concluímos que o sinal do incremento é dado pelo sinal da Equação (4.50), ou de forma mais simples,

$$\text{sgn}(\Delta\lambda_1^{i+1}) = \text{sgn}(\delta\lambda_1^{i+1}) = \text{sgn}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \mathbf{x}_{final}^i} \delta \mathbf{x} \mathbf{1}_{final}^i + \frac{\partial f^i}{\partial \lambda_{final}^i}\right) = \text{sgn}(\mathbf{m}^{iT} \delta \mathbf{x} \mathbf{1}_{final}^i + \alpha^i). \quad (4.53)$$

Para o método de Comprimento de Arco Cilíndrico, consideramos a equação de restrição

$$f^i(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \Delta \mathbf{x}^{iT} \Delta \mathbf{x}^i - (\mu - \mu^i)^2, \quad (4.54)$$

onde $\alpha^i = 0$, pois esta equação não depende de λ . Avaliando a Equação (4.53), obtemos

$$m^i = \frac{\partial [(x_1^i - x_1^{i-1})^T (x_1^i - x_1^{i-1}) - (\mu_1^i - \mu_1^{i-1})^2]}{\partial x} \Bigg|_{(x_1^i, \lambda_1^i, \mu_1^i)} = 2(x_1^i - x_1^{i-1}) = 2\Delta x^{i-1} \quad (4.55)$$

que permite obter a condição

$$\text{sgn}(\delta\lambda_1^i) = \text{sgn}\left((\Delta x^{i-1})^T \delta x_1^i\right) \quad (4.56)$$

que nada mais é do que o critério conhecido por trajetória secante. Assim, o critério da trajetória secante é um critério "consistente" com a equação de restrição cilíndrica (sem garantia de consistência para outras equações de restrição).

Para os métodos baseados em restrições ortogonais, devemos considerar a equação de restrição na forma

$$f = h(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \quad (4.57)$$

de modo que a Equação (4.49) deve ser reescrita como

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = 0, \quad (4.58)$$

levando a seguinte relação :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) \frac{d\lambda}{d\mu} = 0. \quad (4.59)$$

Como $\frac{d\lambda}{d\mu}$ deve ser não nulo, resta que o termo entre parênteses deve ser nulo. Com isto, obtemos a relação

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0. \quad (4.60)$$

Isolando $\delta \mathbf{x} \mathbf{1}$

$$\delta \mathbf{x} \mathbf{1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}} \quad (4.61)$$

e inserindo na Equação (4.48), após isolar $\frac{d\lambda}{d\mu}$, obtemos

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mu}. \quad (4.62)$$

Como pode ser observado na Equação (4.62), não ocorre um desacoplamento das derivadas de \mathbf{x}

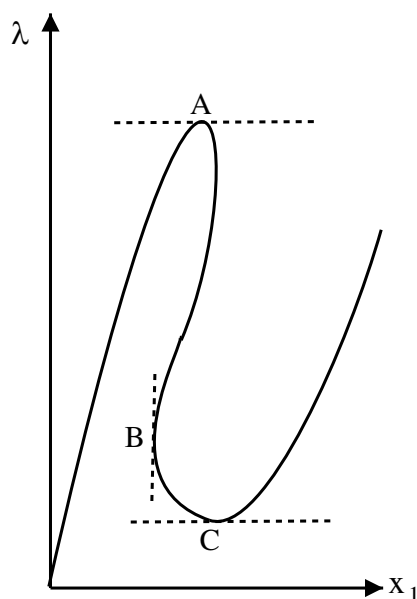


Figura 4.6: Trajetória de equilíbrio não-linear. Os pontos A e C são pontos limites e o ponto B é um ponto de "snap-back".

e λ , indicando que esta abordagem não pode ser utilizada com as equações de restrição do tipo ortogonal, que não garantem a restrição da norma do incremento.

4.2.5 Equações de Restrição e Problemas Acoplados

As equações de restrição discutidas anteriormente são apresentadas na literatura em problemas puramente mecânicos. No caso geral, podemos desconsiderar alguns graus de liberdade da estrutura, como no caso das rotações em cascas [Crisfield, 1997]. Deve-se observar que nos graus de liberdade desprezados, as posições correspondentes na matriz diagonal \mathbf{D} , Equação (4.12), devem ser nulas, enquanto as demais devem ser unitárias. Uma questão importante a ser considerada é o fato de que a equação de restrição tem um impacto importante na correta representação da trajetória de equilíbrio, que por sua vez diz respeito a todos os graus de liberdade envolvidos. No entanto, no problema piezelétrico abordado neste trabalho, a magnitude dos graus de liberdade de deslocamento e de diferença de potencial são muito distintas, o que causa uma dificuldade adicional na definição de um valor adequado de comprimento de arco. Em adição a este problema, existe ainda o fato de a ordem de grandeza dos tensores constitutivos envolvidos ser muito diferente, o que implica em uma grande diferença na magnitude dos termos da matriz tangente acoplada e, conseqüentemente em um número de condicionamento elevado.

Visando apenas o problema de condicionamento, Qi et al, 1997, propuseram o escalonamento da unidade básica de força. Este é um procedimento muito simples, onde apenas passamos a utilizar um múltiplo da unidade de forças

$$1\bar{N} = 1 \cdot 10^p N \quad (4.63)$$

onde p é um inteiro positivo. Com este escalonamento, os tensores constitutivos $\mathbf{C} [Nm^{-2}]$ e $\epsilon [C^2N^{-1}m^{-2}]$ passam a ter magnitude $\bar{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C} * 1 \cdot 10^{-p}$ e $\bar{\epsilon} \rightarrow \epsilon * 1 \cdot 10^p$, solucionando o problema de condicionamento. Ainda, o potencial elétrico $\phi [NmC^{-1}]$ passa a ter unidade $\bar{\phi} \rightarrow \phi * 1 \cdot 10^{-p}$, o que aproxima a magnitude dos deslocamentos e potenciais elétricos, solucionando o problema de imposição do comprimento de arco.

O valor do expoente p depende da magnitude dos tensores constitutivos envolvidos. Como exemplo, podemos considerar o material piezolétrico PZT5 que tem propriedades elásticas da ordem de $1 \cdot 10^{10}$, dielétricas da ordem de $1 \cdot 10^{-9}$ e piezolétricas da ordem de $1 \cdot 10^0$. Considerando que os blocos \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ e $\mathbf{K}_{u\phi}$ da matriz tangente acoplada mantenham a ordem de grandeza relativa de cada tensor constitutivo, teremos uma diferença da ordem de $1 \cdot 10^{19}$ entre os termos da matriz global, e podemos assumir que o número de condicionamento será da mesma ordem. Utilizando a Equação (4.63), com $p = 9$, a diferença passa a ser $1 \cdot 10^{19-2p}$, tal que o número de condicionamento passa a ser da ordem de $1 \cdot 10^1$.

Geralmente trabalhamos com deslocamentos da ordem de $1 \cdot 10^{-6}$ para cerâmicos e diferenças de potencial da ordem de $1 \cdot 10^2$. Assim, para $p = 9$, os deslocamentos não seriam alterados, mas a diferença de potencial passaria a ser da ordem de $1 \cdot 10^{-7}$.

4.2.6 Métodos de Comprimento de Arco e Sequência de Otimização

O procedimento de otimização topológica considerado neste trabalho é sequencial, pois consiste em várias etapas de análise de equilíbrio - obtenção de sensibilidades - construção de uma aproximação convexa e separável - solução desta aproximação com a obtenção de uma nova distribuição de variáveis de projeto. Esta sequência é solucionada diversas vezes, até que uma distribuição satisfatória de variáveis de projeto seja obtida. Deve-se observar que a etapa de análise de equilíbrio é fundamental, pois tem influência direta na etapa de análise de sensibilidade e portanto na construção da aproximação das funções envolvidas e conseqüentemente na nova distribuição de variáveis de projeto (deve-se salientar que a construção das aproximações convexas dependem do histórico do procedimento sequencial). No entanto, o uso de métodos de comprimento de arco não garante que o carregamento correspondente a $\lambda = 1$ (carregamento aplicado) seja obtido exatamente, pois este geralmente é maior do que um, a não ser que um procedimento

específico seja utilizado.

No presente trabalho, observou-se que este comportamento leva a problemas de convergência quando o método de comprimento de arco é utilizado para solução do problema de equilíbrio e o MMA é utilizado para a solução do problema de otimização. Possíveis alternativas são a utilização de métodos que permitam a imposição de níveis de carregamento em comprimento de arco [Teng e Luo, 1998], a utilização do método de Newton-Raphson puro e/ou um método de solução de problemas de otimização que não dependa de informações prévias para a construção das aproximações convexas (como o LP).

Na literatura de otimização topológica considerando problemas não-lineares, nos poucos trabalhos existentes, foi utilizado o Método de Newton-Raphson puro, que garante a exatidão do nível de carregamento aplicado. Bruns e Sigmund, 2004, utilizam o método de comprimento de arco cilíndrico e reportam dificuldade de convergência do MMA. No presente trabalho, foi utilizado um artifício que permite a utilização de métodos de comprimento de arco juntamente com o MMA. Para assegurar esta condição, foi utilizada a estratégia de considerar o método de Newton-Raphson simples quando λ for próximo de 1 e quando isto não prejudicar a análise, isto é, quando o carregamento não corresponder a um ponto limite.

5. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos básicos relacionados ao tópico Otimização Topológica. Após uma breve revisão histórica, são apresentados os conceitos teóricos relacionados ao método, como parametrizações materiais mais utilizadas e questões como existência e unicidade das soluções. Por fim, questões como a instabilidade de tabuleiro e formulações que tratam da não-linearidade geométrica são discutidas.

5.1 Revisão Histórica

Diversas referências apontam o trabalho de Michell, 1904, como sendo o primeiro estudo de Otimização Topológica de estruturas. Michell, baseado nos estudos de Maxwell, 1869¹, determinou as condições necessárias para que uma estrutura formada por elementos de barra tenha o mínimo volume de material, respeitando as relações de equilíbrio e restrições de tensão. O trabalho de Michell permaneceu pouco conhecido por muitas décadas, tendo sido retomado por diversos pesquisadores [Cox, 1956; Hemp, 1973; Owen, 1975; Prager 1974]. Em especial, podemos citar a extensão do trabalho de Michell para o caso de estruturas formadas por vigas [Rozvany e Adidam, 1972] e a generalização dos resultados obtidos até então, dando origem a teoria da configuração ótima (*Optimal Layout Theory*) [Prager e Rozvany, 1977; Rozvany et al, 1995].

Entre as décadas de 1930 e 1960, o estudo de otimização de estruturas se dividiu em três linhas principais [Park, 1995]: a escola russa, liderada por Rabinovitch e Vinogradov (*apud* Reitman, 1989); Wasiutynky e seus colaboradores [Wasiutynky e Brant, 1963] no estudo de estruturas com energia de deformação mínima e Prager e colaboradores no estudo de estruturas com mínimo peso, baseado na teoria da plasticidade [Prager e Shield, 1967].

Em 1951 Kuhn e Tucker apresentam o seu trabalho sobre condições de otimalidade (proposto anteriormente e de forma mais simplificada por Karush em 1939), hoje conhecido com critério de Karush-Kuhn-Tucker, KKT. Prager e Taylor, 1968, estabeleceram a base teórica para a obtenção de critérios ótimo baseados nas condições KKT, dando início ao uso extensivo de critérios

¹Maxwell, J. C, 1869, **Trans. Roy. Soc.**, Edinburgh, Vol. 26, pp. 1-40

de ótimo em aplicações de engenharia. Uma boa revisão dos métodos de critério de ótimo pode ser encontrada nas referências [Rozvany et al, 1995; Zhou e Rozvany, 1991; Hassani e Hinton, 1998c; Bendsøe e Sigmund, 2003]. O uso conjunto de critérios de ótimo e métodos de discretização das equações de equilíbrio teve início com a otimização de estruturas aeroespaciais na década de 1970 [Haftka e Gürdal, 1996], sendo uma técnica muito utilizada até os dias de hoje [Zhou e Rozvany, 1991; Hassani e Hinton, 1998c; Bendsøe e Sigmund, 2003].

O desenvolvimento de computadores mais poderosos e do crescente uso de otimização na área aeroespacial levou ao uso de técnicas de programação matemática na formulação dos problemas de otimização. Um trabalho bem fundamentado no uso de técnicas de programação matemática foi apresentado por [Schmit, 1960], que utilizou a programação matemática para solucionar problemas com múltiplos casos de carregamento e restrições não-lineares na forma de inequações. Outro estudo ocidental pioneiro sobre a utilização de programação matemática linear aplicado a otimização de treliças é o de [Dorn et al, 1964]. Reitman, 1989, apresenta estudos realizados na antiga URSS neste tópico. No início da década de 1970, os métodos de programação matemática eram muito ineficientes quando comparados aos critérios de ótimo, devido principalmente a capacidade dos computadores da época. No entanto, a programação matemática possui uma base matemática muito sólida quando comparada a alguns métodos de redimensionamento empíricos, sendo muito mais flexível do que métodos de critério de ótimo baseados em KKT. Schmit e Farshi, 1974 e Fleury, 1979, desenvolveram métodos de programação matemática com variáveis intermediárias e métodos duais, dando início a uma série de trabalhos sobre algoritmos de programação matemática na década de 1980. De fundamental importância é o trabalho de Fleury, 1979, que unifica os conceitos de programação matemática e critério de ótimo, que até então eram tratados como tópicos totalmente distintos. O trabalho de Belegundu e Arora, 1985a, contém uma boa revisão e fundamentação teórica sobre os métodos de programação matemática desenvolvidos até a primeira metade da década de 1980. Zhang e Fleury, 1997, apresentam um estudo interessante sobre os métodos de aproximação convexa mais utilizados na época e [Bruyneel et al, 2002; Beckers, 1997; Hassani e Hinton, 1998c] apresentam o estado da arte no final da década de 1990 e início da década de 2000.

Recentemente, diversos métodos heurísticos foram propostos para a solução de problemas de otimização estrutural. Rozvany, 2001b, classifica estes métodos como *SERA* (*Sequential Element Rejection and Admission*), englobando métodos como *ESO* (*Evolutionary Structural Optimization*) [Xie e Steven, 1997], *BESO* (*Bidirectional ESO*) [Querin et al, 1998], *CAO* (*Computer Aided Optimization*) [Matteheck et al, 1991 *apud* Rozvany, 2001b] entre outros. Em um estudo muito interessante, [Zhou e Rozvany, 2001] demonstram que métodos baseados em

ESO não tem garantia de ótimo global.

A otimização de meios contínuos se desenvolveu com a introdução de métodos de relaxação [Allaire e Henrot, 2001], através da consideração de materiais compostos, na década de 1970. Este conceito foi desenvolvido de forma independente por vários grupos de pesquisa, como por exemplo [Cheng, 1981; Cheng e Olhoff, 1982; Murat e Tartar, 1985; Lurie et al, 1982a e 1982b; Ratum, 1979; Kohn e Strang, 1986a, 1986b, 1986c].

A descrição da implementação numérica do método da homogeneização aplicado para a relaxação do problema de Otimização Topológica de meios contínuos, por Bendsøe e Kikuchi, 1988, deu início a uma grande popularização do método. Este trabalho introduziu microestruturas sub-ótimas, relacionadas a relaxação parcial do problema de Otimização Topológica, permitindo obter topologias mais definidas e com menos regiões de densidade intermediária. No estudo de problemas com relaxação parcial, Park, 1995, estudou a influência da descrição microscópica das propriedades do material na topologia obtida. Hassani e Hinton, 1998a e 1998b apresentam uma revisão recente das técnicas de homogeneização e da sua aplicação na Otimização Topológica. Atualmente, parametrizações materiais mais simples como a SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization) [Rozvany, 2001a, Bendsøe e Sigmund, 1999], tem sido utilizadas em detrimento de parametrizações mais elaboradas, com excelentes resultados.

Uma abordagem alternativa a relaxação do problema de Otimização Topológica foi inicialmente apresentada por Niordson, 1983, que restringiu o gradiente espacial da variação da espessura de placas finas, obtendo uma solução suave (sem variações bruscas das variáveis de projeto). Esta abordagem consiste na restrição do domínio de solução, conceito este que foi formalmente desenvolvido por Bendsøe, 1995 e Ambrosio e Butazzo, 1993. Bendsøe, 1995, provou que a restrição da variação espacial das variáveis de projeto permite obter um problema bem posto. Este conceito foi utilizado por Petersson e Sigmund, 1998, para problemas com malhas estruturadas e foi estendido por Cardoso e Fonseca, 1999, para problemas com malhas não-estruturadas. Por sua vez, Ambrosio e Butazzo, 1993, mostraram que a restrição do perímetro da topologia permite obter um problema bem posto, inclusive para problemas com parametrização inteira. Este conceito foi implementado para parametrizações contínuas por [Haber et al, 1996] e para problemas com parametrizações discretas por [Beckers, 1997].

Recentemente, tem-se dado especial atenção a procedimentos de solução dos problemas de Otimização Topológica por métodos de programação matemática [Bruyneel et al, 2002], a inclusão de efeitos não-lineares [Bruns e Tortorelli, 2001; Gea e Luo, 2001; Buhl et al, 2000; Bruns e Sigmund, 2004], a consideração de restrições de tensão [Duysinx e Bendsøe, 1998; Cheng e Guo, 1997; Stolpe e Svanberg, 2001 e 2003; Kirsch, 1990; Rozvany, 1996; Fancello e Pereira, 2003],

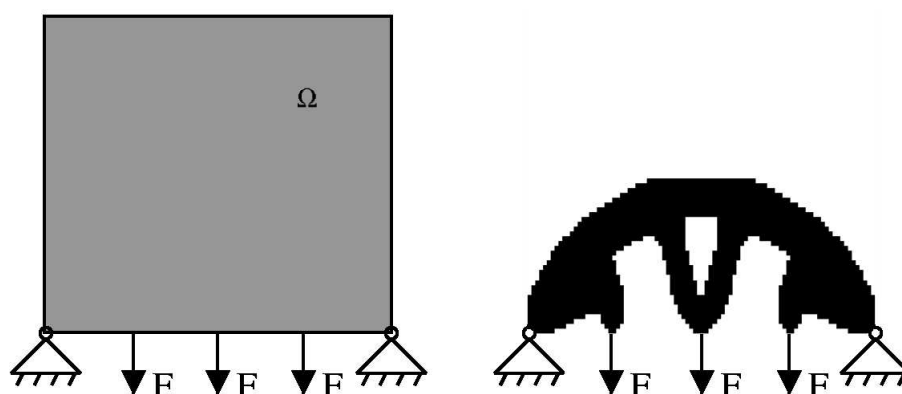


Figura 5.1: Região de projeto (esquerda) e estrutura obtida com uso do método da Otimização Topológica.

a solução de problemas numéricos como a instabilidade de tabuleiro [Díaz e Sigmund, 1995; Jog e Haber, 1995] e ao aparecimento de rótulas no projeto de mecanismos flexíveis [Poulsen, 2002; Yin e Ananthasuresh, 2002; Cardoso e Fonseca, 2004].

5.2 Otimização Topológica

A Otimização Topológica lida com a determinação de características como o número e localização de furos e a conectividade do domínio [Bendsøe e Sigmund, 2003], com o objetivo de extremizar um funcional e satisfazer um conjunto de restrições. Diferentemente de outros métodos de otimização estrutural, a Otimização Topológica permite a determinação simultânea da topologia e da forma de uma estrutura contida em uma região Ω do espaço, conhecida como Domínio de Projeto, com condições de contorno naturais e essenciais pré-estabelecidas (Figura 5.1).

Esta determinação conjunta de topologia e forma se dá por meio da distribuição de um ou mais materiais, conhecidos por materiais base, no domínio de projeto Ω . Assim, em termos da distribuição de um ou mais materiais isotrópicos de base, podemos redefinir a Otimização Topológica como a determinação das regiões $\Omega^m \subseteq \Omega$ que irão conter um dos materiais base e das regiões $\Omega^v \subset \Omega^m \setminus \Omega$ que não contém material. A descrição dos pontos do domínio que contém material, $\mathbf{X} \subset \Omega^m$, é realizada por meio de uma parametrização do tensor constitutivo

efetivo $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ em cada ponto do domínio de projeto, na forma

$$P_{0/1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \Lambda(\mathbf{X})\mathbf{T}^0(\mathbf{X}) \\ \Lambda(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^v \end{cases} \\ \int_{\Omega} \Lambda(x)d\Omega = Volume(\Omega^m) \leq \bar{V} \\ \mathbf{T}(\mathbf{X}) \in L^\infty \\ \mathbf{X} \in \Omega \end{array} \right. , \quad (5.1)$$

onde \bar{V} é a quantidade de material disponível, $\Lambda(\mathbf{X})$ é uma função indicadora e $\mathbf{T}^0(\mathbf{X})$ é o tensor constitutivo de um dos materiais base. A parametrização $P_{0/1}$ define um problema binário, onde apenas dois estados podem existir em cada ponto do domínio: presença de material (*solid*) ou ausência de material (*void*).

De posse da parametrização $P_{0/1}$ pode-se formular um problema de Otimização Topológica, como por exemplo o clássico problema de minimização da flexibilidade com restrição de volume [Bendsøe e Sigmund, 2003]. No entanto, o conjunto de soluções associado a parametrização $P_{1/0}$ não é completo uma vez que a solução ótima contém materiais anisotrópicos, pois somente a utilização de materiais anisotrópicos garante a obtenção de soluções extremas [Allaire e Henrot, 2001; Bendsøe e Sigmund, 2003; Kohn e Strang, 1986a, 1986b, 1986c]. Isto faz com que problemas de Otimização Topológica formulados com o uso da parametrização $P_{0/1}$ sejam mal-postos. Para solucionar este problema, pode-se redefinir a parametrização do tensor constitutivo [Allaire e Henrot, 2001] ou utilizar um método de restrição [Bendsøe, 1995; Beckers, 1997].

Os clássicos trabalhos de Cheng e Olhoff [Cheng, 1981; Cheng e Olhoff, 1982], foram os primeiros estudos de Otimização Topológica a detectar e solucionar este problema. Cheng e Olhoff, no estudo do problema de maximização da rigidez de placas isotrópicas, observaram que o resultado da Otimização Topológica era dependente do refino da malha, sendo que malhas mais refinadas permitiam obter estruturas mais rígidas. Cheng e Olhoff observaram também que o refino da malha se refletia na formação de um número cada vez maior de reforços infinitesimais, que correspondiam a microestruturas ortotrópicas. Esta observação está de acordo com diversos estudos que mostram que soluções extremas para este problema envolvem a utilização de tais reforços [Smitses, 1973]. Para solucionar a dependência da discretização, o problema foi reformulado, fazendo com que as variáveis de projeto passassem a ser as características geométricas de tais reforços. Com isto, o problema discreto passou a ser independente da discretização (ou seja, o problema infinito dimensional possui solução).

Na prática, observamos que um problema infinito-dimensional que utiliza a parametrização

$P_{0/1}$ não possui solução, mas ao ser discretizado possuirá sempre uma solução, por ser finito-dimensional [Lumberger, 1968]. Isto se reflete em uma dependência da discretização, que em última análise significa que o problema que se está tentando aproximar não possui solução para a classe de materiais que está se utilizando. Ao modificar a classe de materiais disponíveis na parametrização, Cheng e Olhoff, 1982, aumentaram o conjunto de possíveis soluções para o problema em questão, obtendo um problema infinito-dimensional bem posto, que se reflete em um problema discretizado estável (independente da discretização). É importante salientar que a cada tipo de problema está associado um conjunto ótimo de materiais, ao que chamamos de fechamento G [Cherkaev e Gibiansky, 1993; Kohn e Strang, 1986a, 1986b, 1986c; Allaire e Henrot, 2001] e que tais conjuntos só foram determinados até o presente momento para alguns tipos de problemas [Allaire e Henrot, 2001].

Como extensão natural dos trabalhos de Cheng e Olhoff, [Bendsøe e Kikuchi, 1988], propuseram a utilização da Teoria da Homogeneização [Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia, 1992] para descrever as propriedades efetivas de um material composto formado por um material isotrópico de base. A Teoria da Homogeneização permite obter uma parametrização contínua e consistente das propriedades do material no domínio de projeto, garantindo assim a obtenção de um problema bem posto. A parametrização associada ao uso da Teoria da Homogeneização pode ser escrita como

$$P_{Homo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^H(\mu(\mathbf{X}), \tau(\mathbf{X}), \dots, \theta(\mathbf{X})) \\ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}) d\Omega \leq \bar{V} \\ 0 \leq \rho(\mathbf{X}) \leq 1 \\ \mathbf{X} \in \Omega \end{array} \right. , \quad (5.2)$$

onde $\mu(\mathbf{X}), \tau(\mathbf{X}), \dots$, são variáveis geométricas da célula unitária, $\theta(\mathbf{X})$ é a orientação da célula e $\rho(\mathbf{X}) = \rho(\mu(\mathbf{X}), \tau(\mathbf{X}), \dots)$ representa a quantidade de material na célula unitária (comumente chamado de densidade de material ou simplesmente densidade). Uma densidade nula corresponde a ausência de material (*void*) e uma densidade unitária corresponde ao material isotrópico de base (*solid*). \mathbf{T}^H é o tensor constitutivo correspondente as propriedades efetivas do meio homogeneizado, podendo ser obtido analiticamente (para geometrias simples de células unitárias) ou por métodos numéricos [Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia, 1992]. Diferentes células unitárias levarão a diferentes propriedades do meio homogeneizado [Bendsøe, 1995; Park, 1995].

Em relação as combinações de materiais que podem estar presentes nas topologias obtidas com a Otimização Topológica, [Rozvany, 2001a] apresenta as seguintes possibilidades

- ISE (*Isotropic-Solid/Empty*) [Bendsøe e Sigmund, 1999]
- ASE (*Anisotropic-Solid/Empty*) [Rodrigues et al, 1999; Guedes e Taylor, 1997]

- ISEP (*Istropic-Solid/Empty/Porous*) [Jog, Haber e Bendsøe, 1994].

O termo ISE implica na existência de regiões com ou sem material isotrópico, o que está de acordo com a parametrização $P_{1/0}$. No entanto, o uso direto desta parametrização implica na não-existência da solução para o problema infinito-dimensional. Por este motivo, deve-se utilizar parametrizações relaxadas e que permitam a solução do problema (obtendo uma topologia ISEP, com regiões de densidade intermediária), com posterior penalização das regiões que não contenham materiais isotrópicos sólidos. Estas topologias podem ser obtidas com o uso das parametrizações

- OMP (*Optimal Microstructure with Penalization*) [Allaire, 1997 *apud* Rozvany, 2001a]
- NOM (*Non-Optimal Microstructures*) [Bendsøe e Kikuchi, 1988],

sendo que a parametrização SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with penalization*) [Bendsøe e Sigmund, 1999] é um caso particular da parametrização NOM, pois é equivalente ao uso de microestruturas isotrópicas. Uma outra abordagem consiste na utilização de parametrização $P_{0/1}$ juntamente com a restrição de perímetro [Ambrosio e Buttazzo, 1993].

A parametrização SIMP pode ser escrita como

$$P_{SIMP} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \rho^n(\mathbf{X})\mathbf{T}^0(\mathbf{X}) \\ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X})d\Omega \leq \bar{V} \\ 0 \leq \rho(\mathbf{X}) \leq 1 \\ n \geq 1 \\ \mathbf{X} \in \Omega \end{array} \right. , \quad (5.3)$$

e consiste em uma relaxação da parametrização $P_{0/1}$, onde em cada ponto $\mathbf{X} \in \Omega$ o tensor constitutivo efetivo é obtido por uma interpolação do tensor constitutivo do material de base. O expoente n é utilizado para ajustar o grau de interpolação, sendo que a parametrização $P_{0/1}$ pode ser recuperada para $n \rightarrow \infty$. A primeira tentativa de se relaxar a parametrização $P_{0/1}$ foi feita por [Rossow e Taylor, 1973] para um problema de otimização de estado plano de tensões, sendo que a utilização da parametrização P_{SIMP} foi originalmente proposta por [Bendsøe, 1989]. Uma leitura cuidadosa do artigo [Bendsøe e Kikuchi, 1988] mostra que algumas conclusões obtidas com o uso da parametrização NOM já indicavam que uma parametrização baseada apenas nas densidades, mesmo que sem uma relação explícita com algum tipo de microestrutura, seria possível. Rozvany, 2001a e Rozvany et al, 1995, apresentam justificativas alternativas para justificar a formulação do problema de Otimização Topológica com o uso da parametrização P_{SIMP} .

Em problemas contínuos, a utilização da parametrização P_{SIMP} com expoente unitário leva a obtenção de topologias com regiões de densidade intermediária ($0 < \rho < 1$), também conhecidas como regiões de cinzas ou apenas cinzas (topologias ISEP). Estas regiões podem ser interpretadas como regiões formadas por um material poroso e recentemente [Bendsøe e Sigmund, 1999], associaram estas regiões a microestruturas isotrópicas. Independentemente do conhecimento das microestruturas presentes em tais regiões, sua fabricação é complexa, fazendo com que resultados 0/1 sejam desejados. Isto pode ser obtido pelo aumento gradual do valor do expoente n na parametrização P_{SIMP} , procedimento conhecido como método da continuação. No método da continuação, inicia-se com um expoente unitário, obtendo-se uma solução que pode conter grandes áreas com densidades intermediárias. Por ser uma solução obtida exclusivamente com materiais isotrópicos, esta solução está contida no conjunto de soluções que seriam obtidas com o uso de parametrizações NOM ou com o uso de microestruturas do fechamento G , porém é um resultado sub-ótimo. A medida que o valor do expoente n aumenta, a parametrização P_{SIMP} tende a parametrização $P_{0/1}$, sendo que este procedimento *pode levar* a uma topologia ISE para valores finitos do expoente n [Rietz, 2001].

Em relação as vantagens da utilização da parametrização P_{SIMP} [Rozvany, 2001a] cita que a parametrização P_{SIMP} requer um número menor de parâmetros quando comparado a parametrização P_{Homo} e pode ser utilizado em qualquer problema, ao contrário do fechamento G . No entanto, a solução de um problema de Otimização Topológica formulado com o uso da parametrização P_{SIMP} dependem do valor do expoente n e não tem garantia matemática de convergência para a solução ótima [Stolpe e Svanberg, 2001]. Outra deficiência do uso da parametrização P_{SIMP} é a dependência da discretização [Bendsøe, 1989]. Isto indica que o problema infinito-dimensional não é bem posto, o que pode ser facilmente visualizado para o caso $n \rightarrow \infty$, pois $P_{SIMP} \rightarrow P_{0/1}$. Por este motivo, procedimentos de restrição tem sido propostos para permitir a solução dos problemas $P_{0/1}$ e P_{SIMP} . Duas possibilidades são presentes na literatura: a restrição de gradiente das densidades ou a restrição de perímetro.

Conforme discutido por [Bendsøe, 1995], a restrição da variação espacial da densidade garante a existência da solução para o problema de minimização de flexibilidade obtido com a

parametrização P_{SIMP} . A parametrização regularizada é

$$P_{H^1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \rho^n(\mathbf{X})\mathbf{T}^0(\mathbf{X}) \\ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X})d\Omega \leq \bar{V} \\ 0 \leq \rho(\mathbf{X}) \leq 1 \\ \|\rho\|_{H^1} = [\int_{\Omega} (\rho^2 + \nabla\rho^2) d\Omega]^{\frac{1}{2}} \leq M \\ n \geq 1 \\ \mathbf{X} \in \Omega \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Para que a variação espacial de densidades possa ser restrita é necessário utilizar uma parametrização contínua, tal que P_{H^1} é uma particularização de P_{SIMP} . Esta restrição da norma H^1 das densidades pode ser implementada como um controle estrito de gradiente [Petersson e Sigmund, 1998; Cardoso, 2000] ou na forma de filtros [Sigmund, 1997; Cardoso e Fonseca, 2003], sendo que uma justificativa adicional para seu uso é o controle da complexidade da topologia [Cardoso e Fonseca, 2003]. Outra consequência direta da utilização da parametrização P_{H^1} é a independência da discretização, pois o problema infinito-dimensional é bem-posto [Cardoso e Fonseca, 2003].

Por sua vez, a restrição de perímetro [Ambrosio e Buttazzo, 1993] permite regularizar problemas de Otimização Topológica que utilizem a parametrização $P_{0/1}$. Esta abordagem restringe o perímetro que as topologias podem assumir e assim impede que a topologia venha conter reforços menores que alguma escala, prevenindo assim o aparecimento de microestruturas. Esta abordagem foi implementada para a parametrização P_{SIMP} por [Haber et al., 1996] e para a parametrização $P_{0/1}$ por [Beckers, 1997]. A possibilidade de solucionar problemas de Otimização Topológica bem postos e formulados com a parametrização $P_{0/1}$ permitiria, em tese, evitar problemas associados às diversas parametrizações utilizadas na Otimização Topológica e evitar problemas como a instabilidade de tabuleiro e a existência de densidades intermediárias. Infelizmente, somente problemas simples foram solucionados com o uso desta abordagem até o momento.

Por fim, é interessante notar que o controle do perímetro também permite controlar a complexidade da topologia e que os resultados obtidos com o uso de controles de gradiente, seja na forma estrita ou com o uso de filtros, tem menor perímetro do que topologias obtidas sem esta restrição. Embora seja difícil comparar estes dois tipos de restrição, fica claro que ambas garantem a existência de solução por restringirem a escala mínima de formação de reforços.



Figura 5.2: Topologia com instabilidade de tabuleiro.

5.2.1 Instabilidade de Tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro é um problema muito comum na Otimização Topológica de estruturas contínuas. No entanto, tanto sua origem quanto a sua solução ainda não foram devidamente estudadas. Este é um problema decorrente da aproximação numérica utilizada, se manifestando como descontinuidades no valor da densidade em elementos contíguos. Esta instabilidade é dependente da discretização e é indesejável, já que não permite uma representação unívoca da topologia final. A figura 5.2 ilustra a instabilidade de tabuleiro obtida em um problema de minimização de volume com restrição de trabalho externo [Cardoso, 2000]. Estudos realizados por [Díaz e Sigmund, 1995; Jog e Haber, 1995], indicam que a diferença na ordem de interpolação dos campos de deslocamento e de densidades é a causa do aparecimento da instabilidade de tabuleiro. Estas conclusões se assemelham às obtidas no problema de Stokes, onde determinadas combinações de interpolação para os campos de velocidade e de pressão se mostram instáveis. O trabalho de Jog e Haber, 1995, propõe uma série de testes para avaliar se uma determinada combinação de interpolações de densidades e deslocamentos resulta em configurações instáveis ou estáveis.

Estes testes são baseados em observações práticas ou no estudo matemático do problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume. Malhas regulares são mais suscetíveis ao aparecimento da instabilidade de tabuleiro, o que indica o uso de malhas regulares em testes para instabilidade de tabuleiro. Outra observação dos referidos artigos é a de que a instabilidade de tabuleiro aparece quando a malha está submetida a uma distribuição uniforme de energia de deformação. A satisfação da condição de energia de deformação constante em cada elemento só é obtida em estágios mais avançados do processo iterativo de otimização e é justamente neste ponto em que a instabilidade de tabuleiro começa a se manifestar. Embora os artigos de Jog e Haber, 1996 e de Díaz e Sigmund, 1995, apresentem uma discussão interessante sobre o assunto, não sugerem uma solução efetiva para o problema.

Observações práticas, [Bendsøe, 1995; Swan e Kosaka, 1997b e Díaz e Sigmund, 1995],

demonstram que elementos de alta ordem (na interpolação dos deslocamentos), tais como o isoparamétrico de 9 nós, quando utilizados com uma descrição constante da densidade em cada elemento não apresentam a instabilidade de tabuleiro. Utilizando a parametrização P_{SIMP} Díaz e Sigmund, 1995, demonstraram que para determinados valores do expoente n , elementos de 8 ou 9 nós também são suscetíveis a instabilidade de tabuleiro, sendo que Jog e Haber, 1996, apontam um valor diferente para o elemento isoparamétrico de 8 nós. Isto permite relacionar o aparecimento da instabilidade de tabuleiro a diferença da ordem de interpolação entre os dois campos do problema variacional misto (o que estaria de acordo com a condição de Babuska e Brezzi, [Bathe, 1996]) e também com o grau de não-linearidade da função objetivo. Díaz e Sigmund, 1995, discutem as características locais da instabilidade de tabuleiro na Otimização Topológica, que difere das características globais da instabilidade do problema de Stokes.

Baseados nestas informações, diversos autores propõem técnicas para o controle da instabilidade de tabuleiro. Bendsøe, 1995, propõe a utilização de um super-elemento formado pela união de 4 elementos quadrilaterais de baixa ordem. A proposta é baseada na técnica já utilizada em problemas de Stokes, embora sem uma justificativa matemática baseada na formulação do problema de Otimização Topológica. Outros autores [Fernandes, 1992] utilizam elementos de alta ordem para o campo de deslocamentos e uma interpolação constante para a densidade. Esta abordagem, além de ser computacionalmente cara, não garante a ausência da instabilidade de tabuleiro, pois casos patológicos podem existir [Jog e Haber, 1996 e Díaz e Sigmund, 1995]. Baseados na informação de que a instabilidade de tabuleiro é causada pela diferença do grau de interpolação utilizado no campo de densidades e de deslocamentos, [Swan e Kosaka, 1997b; Cardoso e Fonseca, 2003; Petersson e Sigmund, 1998; Fujii e Kikuchi, 2000; Fancello e Pereira, 2003; Poulsen, 2002] propuseram técnicas de controle de gradiente que uma vez aplicadas sobre o campo de densidades permitem reduzir a sua variação espacial, evitando o aparecimento da instabilidade de tabuleiro.

O estudo da instabilidade de tabuleiro ainda oferece um vasto campo de pesquisa para estudiosos da área. Estudos de combinações seguras de interpolação para o campo de densidades e de deslocamentos ainda podem ser realizados, comparando o desempenho de diversas formulações de elementos finitos. Poucos estudos baseados no funcional misto da Otimização Topológica foram realizados, tornando esta área de pesquisa bastante interessante.

5.2.2 Problemas com Não-Linearidade Geométrica

A utilização do método da Otimização Topológica permite obter estruturas com respostas extremas nas condições específicas de projeto, mas sem nenhuma garantia de eficiência ou equi-

líbrio para qualquer alteração das propriedades do material de base ou das condições de contorno. Assim, é de se esperar que simplificações no cálculo de equilíbrio irão ter uma grande influência na topologia obtida, sendo que estas simplificações podem estar relacionadas à descrição do comportamento material (problemas de plasticidade, mudança de domínio em materiais ferromagnéticos, etc.) ou na descrição do movimento (não-linearidade geométrica). No que diz respeito a descrição do movimento, temos que a Otimização Topológica tem sido geralmente considerada no domínio da elasticidade linear infinitesimal, com exceção de alguns trabalhos que consideram não-linearidade geométrica [Bruns e Tortorelli, 2001; Gea e Luo, 2001; Buhl et al, 2000] ou problemas de flambagem linearizada [Neves, 2001]. Destes trabalhos, fica claro que a tradicional característica de dependência da direção da força nos resultados de Otimização Topológica passa a ser mais crítica em problemas com grandes deslocamentos, pois o equilíbrio da estrutura obtida passará a depender da magnitude, direção e sentido das forças aplicadas. Isto mostra o quanto os resultados obtidos com Otimização Topológica são sensíveis as condições de contorno, sendo que isto deve ser sempre levado em consideração na interpretação da topologia obtida.

Uma outra questão relevante em problemas de Otimização Topológica considerando não-linearidade geométrica são as regiões de baixa densidade. Áreas com densidade mínima deveriam ser desconsideradas no processo de análise não-linear, pois devido a baixa rigidez podem causar instabilidades localizadas, tanto do ponto de vista numérico quanto estrutural. Buhl et al, 2000, reportam uma tentativa de se desconsiderar a parcela não-linear na rigidez de tais elementos, onde verificam que isto pode causar uma influência global não desejada. A alternativa de se desconsiderar estes graus de liberdade no processo de otimização poderia ser feito seguindo um raciocínio semelhante ao de Neves, 2001, onde um critério heurístico baseado em energia de deformação de modos localizados de flambagem foi utilizado. No entanto, a desconsideração de tais regiões implica em violar um conceito básico da Otimização Topológica, o de que toda a região de projeto é candidata a receber ou perder material. Bruns e Tortorelli, 2001, utilizam um material hiperelástico para tentar solucionar o problema, mas Buhl et al, 2000, reportam que esta abordagem não é eficaz. Bruns e Sigmund, 2004, no estudo de problemas com *snap-trough*, retiram os elementos da malha quando estes estão sem material, violando um dos conceitos básicos da otimização topológica

Uma característica comum ao trabalho de Bruns e Tortorelli, 2001 e Buhl et al, 2000 é o fato de se iniciar o problema com uma parametrização material não penalizada. Com isto, densidades intermediárias são mais rígidas e a distorção da malha e magnitude dos deslocamentos são bem menores. Ao convergir, a penalização é aumentada até um valor que permita obter uma topologia com poucas regiões de material intermediário (geralmente $n = 3$). Por sua vez, Gea e Luo,

2001, utilizam coeficientes homogeneizados pela consideração de uma célula retangular com furo circular. Os autores não relatam problemas de instabilidade local, provavelmente devido ao fato de aplicarem cargas trativas elevadas, mas compressivas de menor magnitude.

Uma alternativa para certos problemas de não convergência dos algoritmos iterativos (tipo Newton-Raphson) é comentada por Buhl et al, 2000 e aplicada neste trabalho. Os autores comentam que graus de liberdade correspondentes a nós cercados por elementos de baixa densidade podem provocar a não convergência do algoritmo, devido a flutuações no valor de deslocamento. Como estes nós não são significativos do ponto de vista estrutural, são descartados *no processo de análise de convergência*, mas não do processo de análise de equilíbrio propriamente dito. No presente trabalho, um valor de referência é fornecido pelo usuário, sendo que $5 * 10^{-3}$ (para uma densidade mínima de $1 * 10^{-3}$) tem sido utilizado. Assim, graus de liberdade cercados por elementos de densidade abaixo do valor de referência não são considerados no processo de análise de convergência.

Em relação a parametrização constitutiva, temos que em problemas com não-linearidade geométrica a relação constitutiva permanece linear. Isto faz com que seja possível o uso da parametrização P_{SIMP} . No entanto, nenhuma afirmação pode ser feita sobre a otimalidade de microestruturas do tipo Rank-n [Bendsøe e Sigmund, 2003], sendo possível que a dependência da magnitude, direção e sentido das cargas deva ser observada na microescala. Portanto, em tal estudo, instabilidades locais na microestrutura devem ser levadas em consideração [Neves, 2001].

Deve-se salientar que todas as questões discutidas nos parágrafos anteriores são bem recentes, merecendo estudos mais aprofundados.

6. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Existem diversas abordagens para a solução de problemas de otimização estrutural, como por exemplo, abordagens heurísticas [Rozvany, 2001], critérios de ótimo [Bendsøe e Sigmund, 2003] e métodos de programação matemática [Bazaraa e Shetty, 1979; Arora, 1989]. Embora existam muitos trabalhos utilizando a abordagem evolucionária para a solução de problemas de otimização topológica, verifica-se que estas formulações não são estritamente corretas do ponto de vista matemático e portanto não garantem a obtenção de um extremo matemático do problema de otimização [Zhou e Rozvany, 2001]. Por sua vez, critérios de ótimo costumam ser muito eficientes, mas tem como principal deficiência o fato de serem demasiadamente específicos. Isto faz com que tais métodos tenham que ser deduzidos para cada novo problema mesmo que apenas uma nova restrição tenha sido adicionada.

Por sua vez, métodos de programação matemática são bastante gerais e uma vez implementados, podem ser utilizados para solucionar uma grande gama de problemas de otimização. Por este motivo, tal abordagem tem sido extensivamente utilizada na solução de problemas de otimização estrutural [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Conjuntamente com a utilização de métodos de programação matemática, uma abordagem que tem sido considerada na solução de problemas de otimização topológica é a utilização de aproximações convexas. Estas aproximações simplificam a solução do problema de otimização localmente, isto é, o problema é aproximado por funções simples e com propriedades que permitam um tratamento matemático simplificado. No entanto, esta aproximação é local e só permite obter uma solução local do problema de otimização. A solução seqüencial de diversos problemas aproximados permite solucionar o problema original, ao que chamamos abordagem seqüencial. Deve-se salientar, no entanto, que se o problema original for não-convexo, pode existir mais de um ponto extremo local. Desta forma, a utilização de um procedimento seqüencial baseado em aproximações convexas permite obter um mínimo local do problema original, para o caso de existirem diversas soluções estacionárias.

Duas das aproximações convexas mais utilizadas são a aproximação linear (LP) e a aproximação por assíntotas móveis (MMA). Neste trabalho, ambas as aproximações foram utilizadas. Como a aproximação por assíntotas móveis é mais geral, sendo que a aproximação linear pode ser considerada como um caso particular, este método será discutido em detalhes neste capítulo.

Deve-se salientar que a escolha de uma aproximação convexa é apenas uma das etapas no procedimento de solução do sub-problema de otimização. Existem diversas formas de se solucionar o sub-problema, sendo que a abordagem implementada neste trabalho segue a tendência atual de solução do problema no espaço dual. Por este motivo, esta abordagem será detalhada no texto que segue. É importante enfatizar que o procedimento de solução dual é suficientemente genérico, podendo ser utilizado com outras aproximações convexas apresentadas na literatura [Kegl e Oblak, 1997; Xu et al, 2000].

Neste capítulo, as variáveis de projeto serão representadas por ρ , sem que isto signifique que estamos lidando exclusivamente com densidades.

6.1 Introdução

Um problema de otimização geral, P , pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Min} \quad f_0(\boldsymbol{\rho}) \\
 & \boldsymbol{\rho} \\
 & \text{Sujeito a.} \quad f_j(\boldsymbol{\rho}) \leq \bar{f}_j \\
 & \quad \underline{\rho}_i \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, n é o número de variáveis de projeto, m o número de restrições, \bar{f}_j é o valor superior da restrição j , $\bar{\rho}_i$ é o valor máximo que a variável de projeto i pode assumir e $\underline{\rho}_i$ é o valor mínimo. O funcional f_0 é conhecido como função objetivo e os m funcionais f_j são conhecidos como restrições. Um vetor $\boldsymbol{\rho}$ que satisfaça todas as restrições é chamado de uma solução viável do problema P , sendo que o conjunto de todas as soluções viáveis é chamado de região viável V^P . Com isto, podemos definir o problema P como a busca de um ponto $\boldsymbol{\rho}^*$ no conjunto de soluções viáveis V^P , tal que $f_0(\boldsymbol{\rho}^*) \leq f_0(\boldsymbol{\rho}) \forall \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}^* \in V^P$.

A solução do problema P em problemas de Otimização Topológica é uma tarefa computacionalmente cara, pois a cada avaliação da função objetivo e/ou restrições, é necessário solucionar as equações de equilíbrio, além do cálculo das sensibilidades. Além disso, as funções envolvidas geralmente são funções implícitas e não-lineares das variáveis de projeto. Para contornar este problema, Schmidt e colaboradores [Schmidt e Farshi, 1974; Schmidt e Fleury, 1980] propuseram a utilização da programação matemática para a solução de *aproximações* do problema P , obtidos à partir de uma seqüência de aproximações (sub-problemas) explícitas e com estrutura algébrica simples, construídas com informações locais das funções envolvidas no problema P

Algoritmo 1 Principais passos de uma abordagem seqüencial.

Dada uma distribuição inicial de variáveis de projeto ρ^k e um contador de iterações $k = 1$:

1. Obtenha os valores das funções envolvidas no problema P e de suas derivadas em relação as variáveis de projeto ρ^k ;
 2. De posse dos valores f_j e de suas derivadas $\frac{df_j}{d\rho_i}$, obtenhas as aproximações \tilde{f}_j (problema \tilde{P}) ;
 3. Solucione o problema \tilde{P} , obtendo uma nova distribuição de variáveis de projeto ρ^{k+1} ;
 4. Se o problema convergiu, interrompa o processo seqüencial. Do contrário, incremente k e retorne ao passo 1.
-

[Duysinx et al, 2000; Zhang e Fleury, 1997]. Este problema aproximado por ser escrito na forma

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \tilde{f}_0(\rho) \\
 \tilde{P} : & \rho \\
 \text{Sujeito a} & \tilde{f}_j(\rho) \leq \bar{f}_j \\
 & \underline{\rho}_i \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i
 \end{array} \tag{6.2}$$

onde \tilde{f}_0 é uma aproximação local para a função objetivo e \tilde{f}_j são aproximações locais para as funções de restrição. O problema aproximado \tilde{P} é considerado conservativo se as aproximações \tilde{f}_j forem tais que $\tilde{V}^P \subseteq V^P$, garantindo que a seqüência de aproximações geradas serão sempre admissíveis.

Dependendo da forma como as funções são aproximadas, diferentes métodos de programação matemática são obtidos, com propriedades bastante distintas. Entre as aproximações mais utilizadas em problemas de Otimização Topológica podemos citar as aproximações lineares, aproximações recíprocas, aproximações quadráticas e aproximações alternativas, como o método das assíntotas móveis e o método de linearização convexa [Zhang e Fleury, 1997]. Assim, a solução do problema P é aproximada pela solução seqüencial de diversas aproximações locais, de acordo com o Algoritmo (1).

Comum a todos estes métodos é a possibilidade de se solucionar o problema \tilde{P} na forma dual, explorando as características de convexidade e separabilidade introduzidas juntamente com as funções aproximadas \tilde{f}_0 e \tilde{f}_j .

6.2 Algoritmos de Solução Dual

A otimização topológica tem como característica apresentar um grande número de variáveis de projeto. Isto faz com que métodos de otimização que tratem da busca do ponto de ótimo no espaço definido pelas variáveis de projeto (espaço das variáveis primais) tenham que lidar com espaços de dimensão elevadas. Por sua vez, o número de restrições geralmente consideradas em problemas de otimização topológica é baixo, fazendo com que métodos de otimização que buscam a solução ótima no espaço definido pelas restrições (espaço dual) apresentem algumas vantagens.

Considerando o problema P , Equação (6.1), definimos a função de Lagrange associada ao problema P como [Rockafellar, 1997]

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\boldsymbol{\rho}) + \sum_{j=1}^m \mu_j (f_j(\boldsymbol{\rho}) - \bar{f}_j) \quad (6.3)$$

onde as variáveis μ_i são introduzidas para incorporar na função de Lagrange a informação das restrições. Caso alguma restrição seja violada, o valor correspondente μ_j será não nulo e positivo, de tal forma que a função de Lagrange é penalizada. Caso a restrição seja respeitada, o valor μ_j correspondente será nulo. As variáveis $\mu_j \geq 0$ são conhecidas como variáveis duais pois existe uma relação um para um entre estas variáveis e as restrições [Duysinx et al, 2000; Rockafellar, 1997], ao passo que as variáveis de projeto ρ_i são conhecidas como variáveis primais. É importante salientar que esta dualidade é conhecida como dualidade Lagrangiana, sendo que outras formas de dualidade podem ser definidas [Bazaraa e Shetty, 1979]. Na Equação (6.3) não incorporamos as restrições laterais na função de Lagrange. Como será demonstrado adiante, estas restrições podem ser tratadas separadamente e a sua não-consideração na função de Lagrange implica em um menor número de variáveis duais, o que é vantajoso computacionalmente.

Devido a natureza da maioria dos problemas de otimização topológica, temos que o número de variáveis primais é muito superior ao número de variáveis duais. Por este motivo, é interessante solucionar o problema de otimização no espaço definido pelas variáveis duais, reduzindo a dimensão do problema.

Considerando a Equação (6.3), podemos reescrever o problema P na forma

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \text{Max} \\ \boldsymbol{\rho} & \boldsymbol{\mu} \geq 0 \end{array} \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) \quad (6.4)$$

onde a maximização sobre as variáveis duais faz com que as restrições violadas sejam penaliza-

das (tenham um custo infinito). Deve-se salientar que o problema definido pela Equação (6.4) é equivalente ao problema P , porém com um número adicional m de variáveis μ

6.2.1 Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Se uma distribuição de variáveis primais ρ^* e uma distribuição de variáveis duais μ^* satisfazem a Equação (6.4), então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(\rho^*)}{\partial \rho_i} + \sum_j^m \mu_j^* \frac{\partial f_j(\rho)}{\partial \rho_i} &= 0 \quad \forall i \\ f_j(\rho^*) - \bar{f}_j(\rho^*) &\leq 0 \quad \forall j \\ \mu_j^* &\geq 0 \quad \forall j \\ \mu_j^* [f_j(\rho^*) - \bar{f}_j(\rho^*)] &= 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde a primeira linha da Equação (6.5) indica a condição de estacionaridade da função Lagrangiana em relação as variáveis de projeto, a segunda equação indica que as restrições devem ser respeitadas (viabilidade primal), a terceira equação indica que as variáveis duais são não negativas (viabilidade dual) e a última equação indica que as variáveis duais correspondentes as restrições inativas são nulas (condição de complementaridade) [Rockafellar, 1997; Arora, 1989]. Deve-se salientar que em adição a estas condições, o ponto ρ^* deve ser um ponto regular, ou seja, todos os gradientes das restrições ativas devem ser linearmente independentes [Bazaraa e Shetty, 1979]. As condições apresentadas na Equação (6.5) são conhecidas como condições de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker, representando condições necessárias para que o ponto seja um extremo válido, isto é, um ponto de valor extremo que satisfaça as restrições. No entanto, este ponto pode ser um extremo local (podem existir outros pontos que satisfazem as restrições e que permitam obter um valor menor na função objetivo), sendo que para problemas gerais condições de alta ordem são necessárias para caracterizar tais pontos.

Considerando o problema \tilde{P} , podemos utilizar aproximações convexas, de tal forma que as condições de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker sejam condições necessárias e suficientes no estudo da otimalidade do sub-problema [Rockafellar, 1997].

6.2.2 Dualidade

Dada uma distribuição qualquer μ , e a condição da Equação (6.4), observamos que o problema se torna

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathcal{L}(\rho, \mu) \\ & \rho \end{aligned} \quad (6.6)$$

ou seja, para cada distribuição μ , podemos solucionar o problema de minimização da Equação (6.6), obtendo uma distribuição

$$\rho_\mu = \rho(\mu) \quad (6.7)$$

que nada mais é do que uma relação entre as variáveis primais e as variáveis duais. Se introduzirmos a relação da Equação (6.7) na função Lagrangiana, Equação (6.3), obtemos

$$l(\mu) = \mathcal{L}(\rho_\mu, \mu) = f_0(\rho_\mu) + \sum_{j=1}^m \mu_j (f_j(\rho_\mu) - \bar{f}_j) \quad (6.8)$$

onde $l(\mu)$ é conhecida como função dual do problema [Duysinx et al, 2000, Bazaraa e Shetty, 1979]. Desta forma, o problema dual associado a Equação (6.4) pode ser escrito como [Rockafellar, 1997]

$$D : \quad \text{Max} \quad l(\mu) \\ \mu \geq 0 \quad (6.9)$$

que é um problema mais simples do que o problema original P , pois possui m variáveis de projeto com apenas restrições laterais de não-negatividade. As principais características do problema dual são: se o problema de otimização P é um problema de minimização, o problema dual é um problema de maximização e se o problema primal possuir uma solução, então o problema dual também possui [Duysinx et al, 2000].

Deve-se salientar que a condição da Equação (6.6) pode ser relaxada na forma

$$l(\mu) = \inf_{\rho} \mathcal{L}(\rho_\mu, \mu) \quad (6.10)$$

o que implica em existência de um problema dual mesmo se as funções envolvidas forem discretas ou não-convexas [Beckers, 1997]. Assim, no caso geral, podemos escrever

$$f_0(\rho^*) \geq l(\mu^*) \quad (6.11)$$

que é conhecido como salto (*gap*) de dualidade pois em problemas não convexos ou discretos a solução do problema dual não necessariamente corresponde ao valor mínimo de f_0 . Deve-se salientar, também, que nestes casos a solução primal correspondente a solução dual pode ser não viável. Nestes casos diz-se que a relação de dualidade é fraca [Duysinx et al, 2000, Bazaraa e Shetty, 1979].

No entanto, para problemas convexos e definidos sobre variáveis contínuas, a relação de dualidade é forte [Bazaraa e Shetty, 1979]. Assim, a função dual associada é côncava e possui

apenas um máximo, tal que

$$f_0(\boldsymbol{\rho}^*) = l(\boldsymbol{\mu}^*) \quad (6.12)$$

e o ponto $\boldsymbol{\rho}^*$ satisfaz as restrições do problema P . Conclui-se, assim, que se considerarmos o problema \tilde{P} , com aproximações convexas e variáveis de projeto definidas em um domínio contínuo, teremos obrigatoriamente uma relação de dualidade forte.

O problema de maximização da Equação (6.9) possui uma estrutura mais simples do que o problema primal, sendo classificado como um problema quase-irrestrito [Bazarra e Shetty, 1979; Duysinx et al, 2000]. Ainda, temos que os gradientes da função dual em relação as variáveis duais são de fácil obtenção [Duysinx et al, 2000], pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu_k} &= \frac{\partial \left[f_0(\boldsymbol{\rho}_\mu) + \sum_{j=1}^m \mu_j (f_j(\boldsymbol{\rho}_\mu) - \bar{f}_j) \right]}{\partial \mu_k} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_0(\boldsymbol{\rho}_\mu)}{\partial \rho_i} + \sum_{j=1}^m \mu_j \frac{\partial (f_j(\boldsymbol{\rho}_\mu) - \bar{f}_j)}{\partial \rho_i} \right] \frac{\partial \rho_i}{\partial \mu_k} + (f_k(\boldsymbol{\rho}_\mu) - \bar{f}_k) \\ &= f_k(\boldsymbol{\rho}_\mu) - \bar{f}_k \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde o termo entre colchetes é nulo, pois esta condição de estacionaridade é utilizada para a obtenção da relação da Equação (6.7). Assim, a primeira derivada da função dual com respeito a uma variável dual nada mais é do que o valor correspondente da restrição. Com isto, as condições de ótimo do problema se resumem a [Lasdon, 2002]

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu_k} &= 0 \quad \text{se } \mu_k > 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \mu_k} &< 0 \quad \text{se } \mu_k = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

De posse das relações da Equação (6.14), observamos que uma variável dual tem seu valor aumentado se a restrição correspondente for violada e decresce (com um limite em zero), se a restrição correspondente for satisfeita.

Em relação as derivadas de segunda ordem, observamos que

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu_l \partial \mu_k} = \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\rho}_\mu)}{\partial \mu_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\rho}_\mu)}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_{\mu_i}}{\partial \mu_l} \quad (6.15)$$

onde o termo $\frac{\partial \rho_{\mu_i}}{\partial \mu_l}$ pode ser obtido calculando-se a derivada da primeira linha da Equação (6.5)

em relação a μ_l , resultando em

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - \sum_{j=1}^m \mu_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial \rho_i \partial \rho_k} \right] \frac{\partial \rho_{\mu_k}}{\partial \mu_l} + \frac{\partial f_l(\boldsymbol{\mu})}{\partial \rho_i} = 0. \quad (6.16)$$

Em caso de restrições laterais ativas (limites superiores e inferiores nos valores de $\boldsymbol{\rho}$), algumas posições de $\frac{\partial \rho_{\mu_k}}{\partial \mu_l}$ irão se anular. Reescrevendo a Equação (6.16) na forma matricial,

$$\nabla_{\rho\rho}^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) \frac{\partial \rho_{\mu_k}}{\partial \mu_l} + \nabla_{\rho} f_l = 0 \quad (6.17)$$

verificamos que as linhas e colunas da matriz Hessiana da função de Lagrange correspondentes as variáveis primais com restrições laterais ativas devem ser desconsideradas, dando origem a uma matriz $\mathbf{G}_{\mathcal{L}}$. Definindo a matriz \mathbf{N} , cujas colunas são os vetores gradiente de todas as restrições, e introduzindo a Equação (6.17) na Equação (6.15), obtemos

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu_l \partial \mu_k} = -\mathbf{N}^T \mathbf{G}_{\mathcal{L}}^{-1} \mathbf{N}, \quad (6.18)$$

que é contínua por partes, pois é descontínua nos planos definidos por $\rho_{\mu_i} = \bar{\rho}_i$ e $\rho_{\mu_i} = \underline{\rho}_i$. Por este motivo, afirma-se que as restrições laterais das variáveis primais levam a planos de descontinuidade de segunda ordem no espaço dual [Fleury, 2000]. Portanto, algoritmos de solução do problema definido na Equação (6.9) baseados em métodos que utilizem a matriz Hessiana definida na Equação (6.18) devem incluir uma estratégia de seleção de variáveis ativas na montagem da matriz Hessiana efetiva. Por este motivo, optou-se por utilizar o método de gradientes conjugados, segundo Fletcher e Reeves [Lasdon, 2000], no código computacional implementado neste trabalho.

6.2.3 Separabilidade

Uma função $f(\boldsymbol{\rho})$ é dita separável se pode ser escrita como a soma de funções de uma variável $f_i(\rho_i)$, na forma

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i), \quad (6.19)$$

sendo que um problema de otimização é dito separável se a função objetivo e todas as restrições forem separáveis [Duysinx, 2000]. Neste caso, a função Lagrangiana definida na Equação (6.3)

é também separável

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_i^n \mathcal{L}_i(\rho_i, \boldsymbol{\mu}). \quad (6.20)$$

Como principal consequência deste fato, observamos que o problema definido na Equação (6.6) pode ser separado em múltiplos problemas unidimensionais

$$\min_{\boldsymbol{\rho}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^n \min_{\rho_i} \mathcal{L}_i(\rho_i, \boldsymbol{\mu}) \quad (6.21)$$

sendo que o mesmo é válido para o problema dual

$$l(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^n l_i(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \min_{\rho_i} \mathcal{L}_i(\rho_i, \boldsymbol{\mu}) \right\}. \quad (6.22)$$

A utilização de funções separáveis permite a obtenção de relações primais-duais simplificadas, tornando o custo de solução da Equação (6.6) baixo. Se isto não for verificado, o baixo custo de solução do problema no espaço dual será comprometido pela necessidade da solução de um sistema, geralmente não linear, de n equações para a obtenção das relações primais-duais.

6.3 Aproximações Convexas Separáveis

Tendo em vista os resultados apresentados anteriormente, fica clara a vantagem de se substituir o problema P por um problema \tilde{P} , com funções convexas e separáveis. O fato de as funções em \tilde{P} serem convexas garante a dualidade forte na solução do sub-problema e o fato de as funções serem separáveis garante o uso de relações simples entre as variáveis duais e primais. Um requisito adicional, que garante a estabilidade e convergência da seqüência de aproximações é conservatividade das aproximações convexas utilizadas [Zillober, 1999].

Entre as aproximações convexas e separáveis podemos citar a aproximação linear (LP), a aproximação quadrática (QP), a aproximação linear convexa (CONLIN) e o método das assíntotas móveis (MMA). O método MMA é muito interessante pois engloba os métodos CONLIN e LP, o que o torna adequado para a apresentação detalhada dos conceitos discutidos acima. Neste trabalho, optou-se pela utilização do método GMMA, que consiste em uma generalização do método MMA. Por este motivo, o método GMMA será detalhado no texto que segue.

6.3.1 Método das Assíntotas Móveis Generalizadas

O Método das Assíntotas Móveis Generalizadas, GMMA [Zhang et al, 1996], é uma generalização do Método das Assíntotas Móveis, MMA, [Svanberg, 1987], onde cada função f_i é aproximada no entorno do ponto $\boldsymbol{\rho}^0$ com respeito as variáveis $1/(U_{ij} - \rho_j)$ e $1/(\rho_j - L_{ij})$, dependendo do sinal da derivada. Com isto, obtém-se a aproximação

$$\tilde{f}_i(\boldsymbol{\rho}) = r_i + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_{ij} - \rho_j} + \frac{q_{ij}}{\rho_j - L_{ij}} \right) \quad (6.23)$$

onde

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\rho}^0)}{\partial \rho_j} (U_{ij} - \rho_j^0)^2 & ; \quad \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\rho}^0)}{\partial \rho_j} > 0 \\ 0 & ; \quad \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\rho}^0)}{\partial \rho_j} \leq 0 \end{cases}, \quad (6.24)$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \quad \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\rho}^0)}{\partial \rho_j} \geq 0 \\ -\frac{\partial f_i(\boldsymbol{\rho}^0)}{\partial \rho_j} (\rho_j^0 - L_{ij})^2 & ; \quad \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\rho}^0)}{\partial \rho_j} < 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

e

$$r_i = f_i(\boldsymbol{\rho}^0) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_{ij} - \rho_j^0} + \frac{q_{ij}}{\rho_j^0 - L_{ij}} \right). \quad (6.26)$$

Esta aproximação monotônica pode ser visualizada na figura 6.1, para o caso unidimensional. Os valores L_{ij} e U_{ij} são conhecidos como assíntotas inferiores e superiores, respectivamente, e permitem ajustar o grau de convexidade da aproximação \tilde{f}_i . Assim, se a assíntota L na figura 6.1 for transladada para $-\infty$, a aproximação \tilde{f}_i se torna uma aproximação linear. No método das Assíntotas Móveis original, todas as funções (função objetivo e restrições) do problema de otimização são aproximadas de acordo com o mesmo conjunto de assíntotas L_j e U_j , o que não permite ajustar o grau de convexidade da aproximação de cada função. Isto é especialmente crítico no projeto de mecanismos flexíveis, onde tanto a função objetivo quanto as restrições podem ser de natureza distinta, indicando o uso de um conjunto diferente de assíntotas para cada função aproximada. Por este motivo, o método GMMA é utilizado neste trabalho.

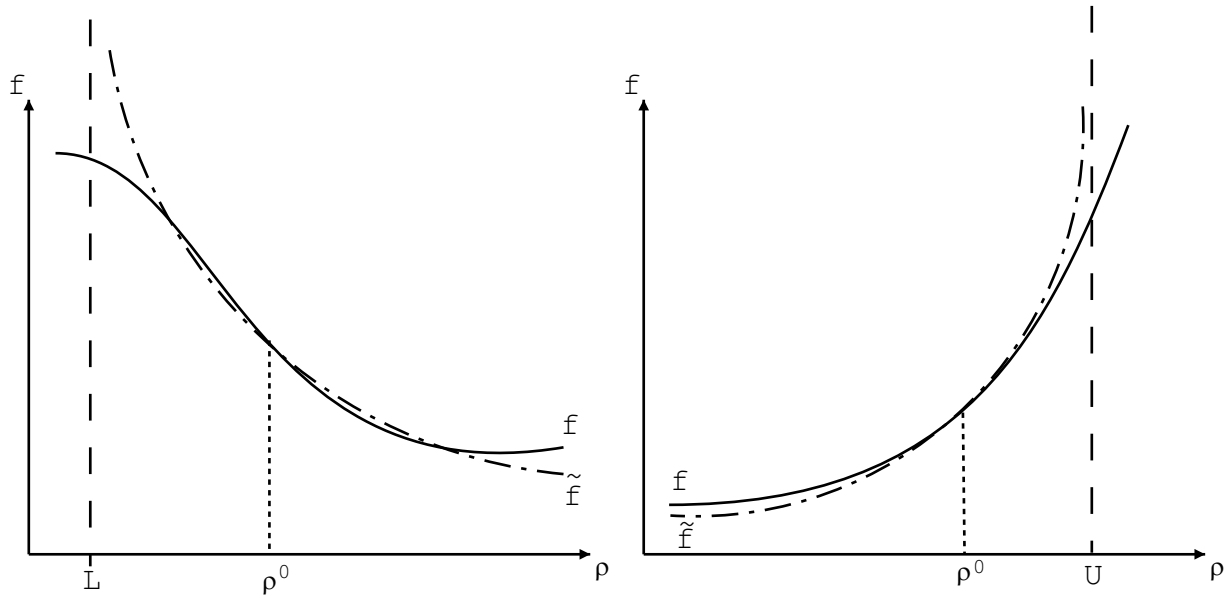


Figura 6.1: Aproximação GMMA.

A aproximação GMMA é de primeira ordem no entorno do ponto ρ^0 , pois $\tilde{f}_i(\rho^0) = f_i(\rho^0)$ e $\frac{\partial \tilde{f}_i(\rho^0)}{\partial \rho_j} = \frac{\partial f_i(\rho^0)}{\partial \rho_j}$, sendo que a segunda derivada é dada por

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}_i}{\partial \rho_j^2} = \frac{2p_{ij}}{(U_{ij} - \rho_j)^3} + \frac{2q_{ij}}{(\rho_j - L_{ij})^3}, \quad (6.27)$$

que é sempre positiva, pois $L_{ij} < \rho_j < U_{ij}$ e p e q são sempre positivos.

Utilizando esta aproximação convexa e separável, podemos escrever o problema P na forma

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & r_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}}{U_{0j} - \rho_j} + \frac{q_{0j}}{\rho_j - L_{0j}} \right) \\ \tilde{P}_{GMMA} : \text{ Sujeito a} \quad & r_i + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_{ij} - \rho_j} + \frac{q_{ij}}{\rho_j - L_{ij}} \right) \leq \bar{f}_i \quad (6.28) \\ & \max(\underline{\rho}_j, \alpha_j) \leq \rho_j \leq \min(\bar{\rho}_j, \beta_j) \end{aligned}$$

onde α_j e β_j são limites móveis, tal que $L_{ij} \leq \alpha_j \leq \rho_j \leq \beta_j \leq U_{ij}$. Os limites móveis são utilizados para evitar denominadores nulos nas aproximações e são particularmente importantes quando a aproximação GMMA é utilizada para aproximar funções não-monotônicas [Duysinx, 2000].

Neste trabalho, optou-se por implementar o GMMA juntamente com o conceito de relaxação

primal [Zhang et al, 1996]

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & r_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}}{U_{0j} - \rho_j} + \frac{q_{0j}}{\rho_j - L_{0j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (z_i - d)^2 \\ \tilde{P}_{GMMMA}^* : \text{ Sujeito a} \quad & r_i + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_{ij} - \rho_j} + \frac{q_{ij}}{\rho_j - L_{ij}} \right) - z_i \leq \bar{f}_i \\ & \max(\underline{\rho}_j, \alpha_j) \leq \rho_j \leq \min(\bar{\rho}_j, \beta_j) \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde as variáveis primais $z_i \geq 0$ são chamadas de variáveis fictícias e d é um valor elevado. Se as variáveis z_i forem nulas, o problema \tilde{P}_{GMMMA}^* se torna o problema \tilde{P}_{GMMMA} , que por sua vez é a aproximação convexa para o problema P . As variáveis z_i são introduzidas nas restrições para permitir que exista sempre um valor z_i que torne o problema admissível. Isto só ocorre quando o problema original não é admissível, sendo que quando o problema é admissível as variáveis z_i são nulas (pois do contrário, o termo adicional na função objetivo acarreta em um aumento do seu valor).

Com isto, podemos reescrever o problema \tilde{P}_{GMMMA}^* na forma a ser utilizada aqui,

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & r_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}}{U_{0j} - \rho_j} + \frac{q_{0j}}{\rho_j - L_{0j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (z_i - d)^2 \\ \tilde{P}_{GMMMA}^* : \text{ Sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_{ij} - \rho_j} + \frac{q_{ij}}{\rho_j - L_{ij}} \right) \leq b_i \\ & \alpha_j \leq \rho_j \leq \beta_j \end{aligned} \quad (6.30)$$

onde $b_i = \bar{f}_i - r_i - z_i$.

Construindo a função Lagrangiana para o problema \tilde{P}_{GMMMA}^* , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = & r_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_{0j}}{(U_{0j} - \rho_j)} + \sum_{j=1}^n \frac{q_{0j}}{(\rho_j - L_{0j})} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (z_i + d)^2 \\ & + \sum_{i=1}^m \mu_i \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{(U_{ij} - \rho_j)} + \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{(\rho_j - L_{ij})} - b_i \right\} \end{aligned} \quad (6.31)$$

e o problema \tilde{P}_{GMMMA}^* , Equação (6.29), pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \text{Min} \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) \\ \boldsymbol{\mu} \geq 0 \quad & \boldsymbol{\rho}, \mathbf{z} \end{aligned} \quad (6.32)$$

O problema interno de minimização na Equação (6.32), para um dado $\boldsymbol{\mu}$ fixo pode ser escrito como

$$\frac{d\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu})}{d\boldsymbol{\rho}} = 0 \quad e \quad \frac{d\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu})}{d\mathbf{z}} = 0, \quad (6.33)$$

onde

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\rho_j} = \frac{p_{0j}}{(U_{0j} - \rho_j)^2} - \frac{q_{0j}}{(\rho_j - L_{0j})^2} + \sum_{i=1}^m \mu_i \left\{ \frac{p_{ij}}{(U_{ij} - \rho_j)^2} - \frac{q_{ij}}{(\rho_j - L_{ij})^2} \right\} = 0 \quad (6.34)$$

pode ser solucionado por um método de Newton [Arora, 1989], na forma

$$\rho_j^k(\boldsymbol{\mu}) = \rho_j^{k-1}(\boldsymbol{\mu}) - \frac{d\mathcal{L}}{d\rho_j} / \frac{d^2\mathcal{L}}{d\rho_j^2}, \quad (6.35)$$

onde k é um contador de número de iterações e

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\rho_j} = \frac{2p_{0j}}{(U_{0j} - \rho_j)^3} + \frac{2q_{0j}}{(\rho_j - L_{0j})^3} + \sum_{i=1}^m \mu_i \left\{ \frac{2p_{ij}}{(U_{ij} - \rho_j)^3} + \frac{2q_{ij}}{(\rho_j - L_{ij})^3} \right\} \geq 0. \quad (6.36)$$

A relação entre as variáveis fictícias e as variáveis duais é obtida de forma explícita, pois

$$\frac{d\mathcal{L}}{dz_i} = z_i + d - \mu_i = 0 \quad (6.37)$$

com

$$\frac{d^2\mathcal{L}}{dz_i^2} = 1. \quad (6.38)$$

Uma vez solucionado o sistema de Equações (6.33), obtemos relações $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu})$ e $\mathbf{z}(\boldsymbol{\mu})$, que reintroduzidas na função Lagrangiana permitem obter a função dual

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\mu}) = & r_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_{0j}}{(U_{0j} - \rho_j(\boldsymbol{\mu}))} + \sum_{j=1}^n \frac{q_{0j}}{(\rho_j(\boldsymbol{\mu}) - L_{0j})} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (z_i(\boldsymbol{\mu}) + d)^2 + \sum_{i=1}^m \mu_i \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{(U_{ij} - \rho_j(\boldsymbol{\mu}))} + \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{(\rho_j(\boldsymbol{\mu}) - L_{ij})} - b_i \right\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

permitindo escrever o problema dual como

$$\begin{aligned} & \text{Max } l(\boldsymbol{\mu}) \quad , \\ & \boldsymbol{\mu} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

sendo que a solução deste problema externo permite obter os multiplicadores de Lagrange que satisfazem as condições de KKT . O gradiente da função dual em relação as variáveis duais é de

Algoritmo 2 Algoritmo de Gradientes Conjugados, segundo Fletcher e Reeves, para a maximização da função dual.

Dada uma distribuição inicial de variáveis duais $\boldsymbol{\mu}$, um parâmetro de convergência tol e um contador de iterações $k = 1$:

1. Calcule o gradiente da função dual com respeito as variáveis duais \mathbf{DI}^k ;
 2. Se a norma do gradiente, $\|\mathbf{DI}^k\|_\infty$, for menor do que tol interrompa processo;
 3. Calcule o fator de ajuste da direção conjugada $\beta^k = (\|\mathbf{DI}^k\|_2 / \|\mathbf{DI}^{k-1}\|_2)^2$;
 4. Calcule a direção de máxima subida $\mathbf{d}^k = \mathbf{DI}^k + \beta \mathbf{d}^{k-1}$;
 5. Determine o melhor passo α^k na direção \mathbf{d}^k , utilizando Método da Seção Áurea;
 6. Atualize as variáveis duais $\boldsymbol{\mu}^k = \boldsymbol{\mu}^{k-1} + \alpha^k \mathbf{d}^k$;
 7. Incremente o contador k e retorne para o passo 1.
-

fácil obtenção, resultando em

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{U_{0j} - \rho_j(\boldsymbol{\mu})} + \sum_{j=1}^n \frac{q_{ij}}{\rho_j(\boldsymbol{\mu}) - L_{0j}} - b_i \quad (6.41)$$

sendo que a condição de estacionaridade da primeira derivada é uma condição necessária e suficiente, pois a função dual é côncava (a função $l(\boldsymbol{\mu})$ é côncava pois é um mínimo de um conjunto de funções lineares em $\boldsymbol{\mu}$ [Rockafellar, 1997]).

6.3.1.1 Implementação

Neste trabalho, optou-se por solucionar o problema dual obtido na seção anterior utilizando o método dos Gradientes Conjugados, segundo Fletcher e Reeves [Lasdon, 2000]. Embora este método seja de primeira ordem, evita a implementação de uma estratégia de seleção de posições da matriz Hessiana da função dual, tornando a implementação mais simples. Em termos gerais, o procedimento de maximização da função dual utilizando o método dos Gradientes Conjugados tem a estrutura apresentada no Algoritmo (2),

sendo que devido a natureza quase-irrestrita do problema dual, algumas modificações são necessárias nas etapas (1) [Bazaraa e Shetty, 1979; Lasdon, 2000] e (5) [Pierre Duysinx, comunicação pessoal].

Um ponto crucial para o sucesso do método GMMA é a correta seleção das assíntotas L_{ij} e

U_{ij} . Existem na literatura diversas abordagens, sendo a maioria baseada na regra de atualização

$$\begin{cases} L_{ij}^k = \rho_j^k + s_{ij} (\rho_j^{k-1} - L_{ij}^{k-1}) \\ U_{ij}^k = \rho_j^k + s_{ij} (U_{ij}^{k-1} - \rho_j^{k-1}) \end{cases} \quad (6.42)$$

onde o escalar s_{ij} é o fator de atualização das assíntotas. Na abordagem heurística [Svanberg, 1987], o valor de s_{ij} é ajustado de acordo com o histórico das variáveis de projeto, sendo que esta abordagem é utilizada somente no MMA, já que no GMMA cada função i tem uma assíntota diferente.

Outros métodos mais elaborados estão presentes na literatura, sendo que a atualização por dois pontos proposta por [Zhang e Fleury, 1994 *apud* Duysinx et al, 2000] permite na maioria das vezes obter valores adequados para os fatores de ajuste s_{ij} . Este método busca valores de s_{ij} que permitam a aproximação no entorno do ponto atual interpolar corretamente o valor da função f_i no ponto anterior, ou seja,

$$\tilde{f}_i^k(\boldsymbol{\rho}^{k-1}, s_{ij}) = f_i(\boldsymbol{\rho}^{k-1}). \quad (6.43)$$

A solução desta equação altamente não-linear nem sempre é simples, pois diferentes raízes podem existir. Recentemente, [Bruyneel et al, 2002] comentam que esta abordagem tem sido gradualmente abandonada devido a dificuldade de se estabelecer uma regra rigorosa de determinação da raiz correta.

Uma abordagem mais consistente foi proposta por [Smaoui, 1988], permitindo obter os valores das assíntotas móveis pelo ajuste do valor da aproximação da derivada segunda da aproximação convexa, Equação (6.27). O método parte do princípio de que a convexidade da aproximação é dada pelo valor da derivada segunda, que por sua vez é ajustada pelo valores das assíntotas móveis. Assim, de posse das derivadas segundas, podemos obter os valores das assíntotas. Um problema associado a esta abordagem é justamente dispor das derivadas segundas das funções envolvidas. Tendo em vista esta dificuldade, [Duysinx et al, 2000] estudaram estratégias de atualização da diagonal da matriz Hessiana, obtendo resultados satisfatórios. Outras abordagens também são discutidas na literatura [Bruyneel et al, 2002].

A estratégia de seleção de limites móveis é decorrente da seleção das assíntotas, pois deve-se respeitar a condição $Max(L_{ij}) \leq \alpha_{ij} \leq \rho_{ij} \leq \beta_{ij} \leq Min(U_{ij})$. Em primeiro lugar, os limites móveis devem impedir que cada variável de projeto atinja o valor da assíntota, pois isto implica em um valor infinito nas aproximações GMMA. Ainda, como a aproximação GMMA é monotônica, utilizam-se os limites móveis para impedir que a aproximação monotônica se afaste

demasiadamente de uma resposta original não-monotônica.

6.3.2 Programação Linear Seqüencial

A aproximação linear é de simples obtenção, consistindo na expansão por série de Taylor no entorno do ponto ρ^0 , retendo apenas os termos lineares

$$\tilde{f}_i(\rho) = f_i(\rho^0) + \sum_{j=1}^n (\rho_j - \rho_j^0) \nabla f_i(\rho^0) \quad i = 0..m$$

e a consideração de tais aproximações leva a um problema de programação linear seqüencial [Lasdon, 2002]. Diversos algoritmos de solução são disponíveis para problemas lineares, sendo que neste trabalho é utilizado o algoritmo da biblioteca SLATEC [Hanson e Hirbert, 1981].

Um problema com a utilização de tal aproximação é o fato de estarmos lidando com funções altamente não-lineares, o que leva a necessidade de considerarmos a expansão em torno de uma região muito pequena no entorno do ponto atual. A restrição sobre a magnitude da linearização é obtida pela consideração de limites móveis, que nada mais são do que restrições laterais cujo objetivo é impedir grandes variações das variáveis de projeto. No entanto, a correta seleção de tais limites móveis é crucial para o sucesso de tal classe de algoritmos. Embora a literatura apresente um grande número de propostas para a determinação destes limites móveis [Arora, 1989], foi utilizado um procedimento heurístico que tem se mostrado bastante eficaz [Cardoso, 2000].

Outro problema associado ao uso da aproximação linear seqüencial é apontado por Bruns e Tortorelli, 2001. Devido as características da aproximação, não existe garantia de que a topologia obtida seja simétrica em casos onde deva ser simétrica. Em problemas lineares isto é facilmente detectável, mas em problemas não-lineares a falta de simetria pode ser resultado da não-linearidade, tornando difícil de analisar o motivo de possíveis assimetrias. Em casos onde a simetria é desejada, pode-se solucionar um problema reduzido, conforme discutido no Apêndice D.

7. PROJETO DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS

O projeto de transdutores piezelétricos utilizando a Otimização Topológica é um tópico recente e multidisciplinar. O objetivo deste capítulo é introduzir uma nomenclatura apropriada para a correta abordagem do tema e apresentar as estratégias de solução mais utilizadas. Inicialmente é apresentada a definição de transdutor e os requisitos de projeto de atuadores e sensores. Após, é apresentada uma classificação para os diferentes tipos de atuadores piezelétricos e a classificação para os diferentes tipos de mecanismos flexíveis existentes. Com base nestas definições, são apresentadas e comparadas as duas abordagens mais utilizadas na atualidade para o projeto de mecanismos flexíveis utilizando a Otimização Topológica.

7.1 Definição de Transdutor

Em uma área multidisciplinar, definições consensuais são raras, considerando que as definições utilizadas em cada área específica geralmente diferem em alguns aspectos.

Entre as definições encontradas na literatura para o tópico transdutor, temos [Busch-Vishniac, 1998]

- Um transdutor é um dispositivo que transforma energia não elétrica em energia elétrica ou vice-versa;
- Um transdutor é um dispositivo que transforma energia de um domínio em outro, onde o domínio pode ser elétrico, mecânico, térmico, químico, etc.;
- Um transdutor é um dispositivo que transforma energia de um tipo em outro, mesmo se ambas energias pertencem ao mesmo domínio.

As definições foram apresentadas em ordem de generalidade, pois a primeira definição não considera um termômetro como sendo um transdutor, sendo que a segunda não considera um sensor de efeito Hall como sendo um transdutor, pois as grandezas elétricas e magnéticas podem ser classificadas no domínio de energia elétrica. Fica claro que a primeira definição é bastante restritiva, enquanto a segunda definição é extremamente dependente da definição dos domínios de energia

envolvidos. A terceira definição considera tanto um termômetro quanto um sensor de efeito Hall, englobando as duas primeiras definições. Ainda a terceira definição considera um mecanismo puramente mecânico como sendo um transdutor, pois existe conversão de energia mecânica em energia mecânica. Por fim, a classificação dos domínios de energia gera alguma discussão, pois a energia é apenas transformada em diferentes domínios. Desta forma, por sua generalidade, a terceira definição será utilizada neste trabalho.

7.1.1 Sensores e Atuadores

Transdutores podem ser classificados em sensores e/ou atuadores. Embora um transdutor possa ser operado em um momento como sensor e em outro como atuador, esta separação faz sentido do ponto de vista dos requerimentos básicos para o projeto otimizado de cada um.

De acordo com Shieh et al, 2001, a definição de sensor presente no dicionário Oxford da língua Inglesa é: "sensor é um dispositivo que detecta ou mede alguma condição ou propriedade e registra ou responde a informação recebida". Ou seja, o sensor converte um estímulo em um sinal que pode ser medido. A esta definição genérica devem ser acrescentados os requisitos básicos de projeto. Em uma definição mais aplicada a engenharia, Bush-Vishniac, 1998, comenta que sensores são (idealmente) dispositivos que monitoram parâmetros de um sistema sem que haja troca de energia entre o sensor e o sistema a ser medido. No entanto, para se realizar uma medida sobre um parâmetro de um sistema, é necessário interagir energeticamente com este sistema, adicionando ou retirando energia de alguma forma. Assim, um sensor é um transdutor que deve ser projetado de forma a ter uma grande impedância de entrada.

Atuadores são dispositivos que impõe um estado a um sistema. Idealmente, esta imposição deve ser independente do sistema sobre o qual está se atuando. No entanto, isto só é possível se uma energia infinita for fornecida ao atuador, o que não é fisicamente possível. Desta forma, o atuador deve ser projetado de forma a ser capaz de atuar sobre um determinado sistema de características determinadas.

Em termos da frequência de operação, podemos separar os transdutores como de baixa e de alta frequência. Transdutores que operam em baixas frequências são aqueles cuja primeira frequência natural é superior a faixa de frequências onde o transdutor irá ser utilizado. Assim, a operação é quase-estática, simplificando a modelagem. Por sua vez, transdutores que operam em altas frequências devem ser projetados levando-se em conta frequências de operação e as frequências naturais do transdutor [Silva, 1998].

Embora as etapas de análise de equilíbrio e de sensibilidade apresentadas neste trabalho sejam aplicáveis a sensores e atuadores piezelétricos operando em regime não-linear geométrico,

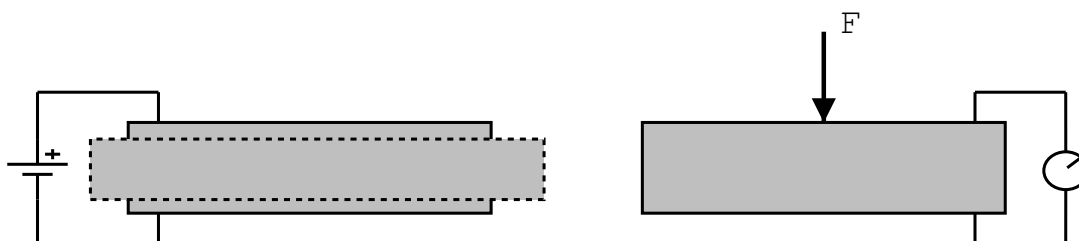


Figura 7.1: Efeito piezelétrico inverso (esquerda) e efeito piezelétrico direto (direita).

temos que os requerimentos de projeto otimizado de sensores e atuadores são diferenciados. Publicações que tratam especificamente do projeto de sensores piezelétricos utilizando otimização topológica com grandes deslocamentos não foram encontradas na literatura consultada. Por sua vez, o projeto de atuadores piezelétricos utilizando a Otimização Topológica tem sido baseado no projeto de mecanismos flexíveis [Silva, 1998; Bendsøe e Sigmund, 2003; Cheng et al, 2001; Bruns e Tortorelli, 2001; Saxena e Anathasuresh, 2002].

7.2 Atuadores Piezelétricos

A utilização de materiais piezelétricos para fins de atuação tem como principais justificativas a grande velocidade de atuação, o baixo consumo de energia, as pequenas dimensões e a grande faixa de frequências em que estes materiais podem ser operados [Niezrecki et al, 2001]. Em se tratando de materiais piezelétricos cerâmicos, pode-se adicionar às principais características uma grande força de atuação para pequenas dimensões e a geração de pequenos deslocamentos [Hao et al, 1996]. Desta forma, materiais piezelétricos operando segundo o efeito inverso, figura 7.1, podem ser estudados como atuadores eletromecânicos e materiais piezelétricos operando segundo o efeito direto podem ser estudados como sensores.

Para a maioria dos atuadores piezelétricos, o principal objetivo de projeto tem sido a modificação do padrão de atuação do material e a obtenção de maiores deslocamentos. Uma pesquisa na literatura especializada mostra que o número de projetos existentes é bastante elevado, embora a grande maioria dos projetos possa ser classificada em três diferentes categorias [Niezrecki et al, 2001]:

- Atuadores piezelétricos amplificados externamente;
- Atuadores piezelétricos amplificados internamente;
- Atuadores piezelétricos amplificados por frequência.

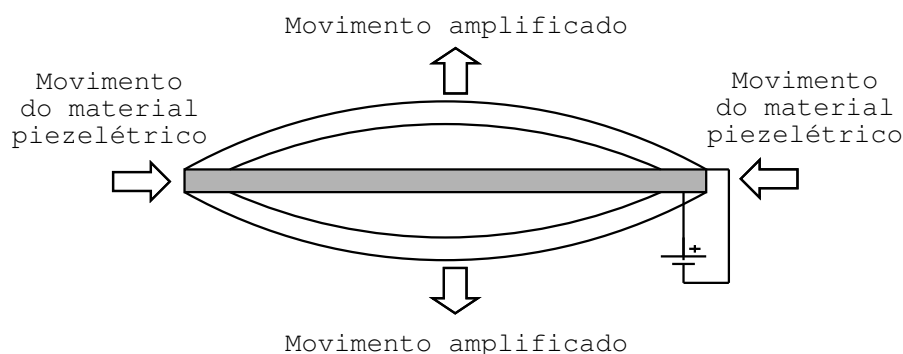


Figura 7.2: Atuador amplificado externamente por uma estrutura em arco ("Moonie").

Atuadores piezelétricos amplificados externamente são o tipo mais comum e consistem em arranjos de materiais piezelétricos e de componentes mecânicos externos que tem como função amplificar ou modificar a direção do movimento dos materiais ativos. Exemplos de tais atuadores são as estruturas em arco [Hao et al, 1996], das quais se destacam os atuadores Moonie [Zhang et al, 2001], figura 7.2, Cymbal [Meyer et al, 2001], bimorph [Smits et al, 1991; Dobrucki e Pruchincki, 1997], torcionais [Glazounov et al, 2000], entre outros. Atuadores amplificados internamente tem como principal objetivo a amplificação do deslocamento, pois geralmente apresentam padrões de atuação simplificado. Exemplos de tais atuadores são o empilhamento (stack) de cerâmicas [Busch-Vishniac, 1998], figura 7.3, e novos transdutores pré-tensionados [Mulling et al, 2001; Niezrecki et al, 2001], como o THUNDER e o RAINBOW. Atuadores amplificados por frequência consistem em dispositivos operados em alta-freqüência, com movimento confinado a um determinado caminho [Silva, 2001; Hu et al, 2001]. Com isto, uma seqüência de pequenos passos resulta em um grande deslocamento na direção desejada.

Assim, os dispositivos de amplificação mecânica convertem a grande rigidez de materiais piezelétricos cerâmicos em um maior deslocamento de saída e/ou em um padrão de atuação mais complexo, a custo de uma menor força de atuação sobre o meio externo. Tanto o material ativo (piezelétrico), o mecanismo de transformação mecânica, quanto o conjunto podem ser enquadrados como transdutores de acordo com a definição utilizada neste trabalho. No que segue, transdutores piezelétricos serão considerados como sendo o conjunto material piezelétrico mais mecanismo de amplificação/transformação do movimento.

A variedade de transdutores que se utilizam da piezeletricidade é ilimitada, existindo diversas combinações geométricas e materiais que permitem obter comportamentos específicos [Bush-Vishniac, 1998]. No entanto, tais configurações são geralmente obtidas de forma empírica, com otimização restrita a alteração de configurações geométricas (*sizing*) ou material. Recentemente,

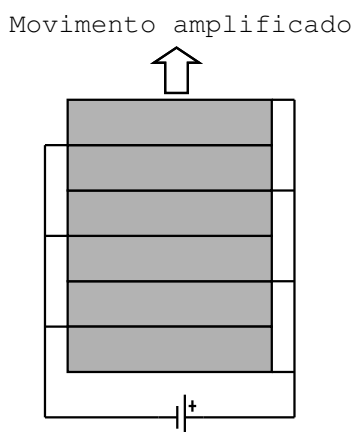


Figura 7.3: Atuador amplificado internamente por empilhamento ("Stack").

um grande número de formulações baseadas nos conceitos da Otimização Topológica tem sido propostas para o projeto otimizado de tais atuadores [Cheng et al, 2001; Bendsøe e Sigmund, 2003; Yin e Ananthasuresh, 2001]. Com o uso da Otimização Topológica, novos tipos de transdutores podem ser projetados, permitindo a obtenção de resultados muito melhores do que a simples modificação de parâmetros geométricos de uma configuração (topologia) fixa [Meyer et al, 2001] ou alteração das condições de contorno [Mulling et al, 2001]. Comum a grande maioria das abordagens de síntese de atuadores piezelétricos utilizando a otimização topológica é a utilização de mecanismos flexíveis para a amplificação/transformação do movimento. Por este motivo, será dada ênfase especial a nomenclatura e formulações existentes para o projeto otimizado de mecanismos flexíveis utilizando o método da Otimização Topológica.

7.3 Projeto de Mecanismos Flexíveis

Mecanismos flexíveis são estruturas elásticas que transformam o movimento por meio da flexibilidade relativa de suas partes [Lau et al, 2001]. Diferentemente dos mecanismos tradicionais, formados por uma associação de membros rígidos e conexões rotuladas, mecanismos flexíveis são dispositivos formados por uma associação de peças flexíveis e/ou rígidas.

De acordo com Ananthasuresh e Kota, 1995, [Citados por Saxena e Ananthasuresh, 2002], o fato de os mecanismos flexíveis apresentarem um número reduzido de partes, muitas delas flexíveis, faz com que sejam mais leves do que os mecanismos tradicionais. Ainda, a presença de poucas (ou nenhuma) juntas faz com que o atrito, ruído e desgaste sejam menores. Utilizando a mesma classificação de Nishiwaki, 1998, temos que os mecanismos flexíveis podem ser

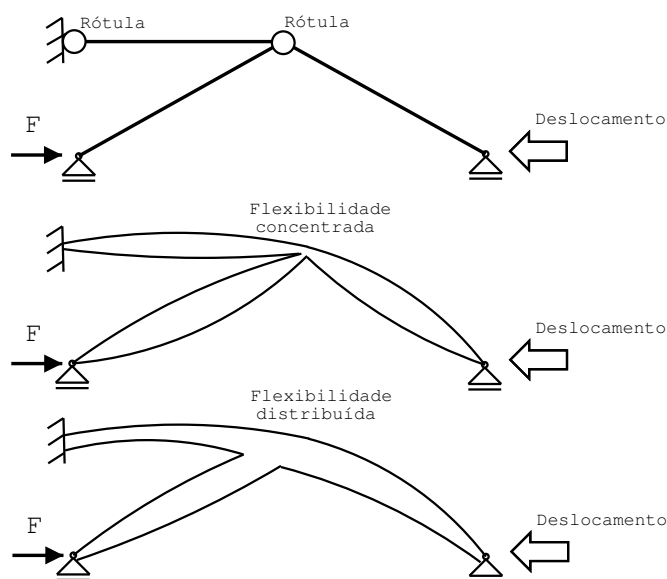


Figura 7.4: Inversor de movimento: mecanismo tradicional (em cima), mecanismo totalmente flexível concentrado (meio) e mecanismo totalmente flexível distribuído (em baixo).

classificados como Parcialmente Flexíveis ou Totalmente Flexíveis.

Mecanismos Parcialmente Flexíveis contém ligações rígidas e partes flexíveis atuando conjuntamente. Por sua vez, mecanismos Totalmente Flexíveis podem ser separados em duas categorias: Localizados (*lumped*) ou Distribuídos. Mecanismos Totalmente Flexíveis Localizados possuem flexibilidade concentrada em juntas flexíveis, em torno da qual se movem partes mais rígidas. Mecanismos Totalmente Flexíveis Distribuídos são formados em sua totalidade por partes flexíveis. A figura 7.4 ilustra três soluções para o projeto de um mecanismo inversor de movimento: um mecanismo formado por peças rígidas e conexões rotuladas, um mecanismo flexível concentrado e um mecanismo flexível distribuído. Considerando as dimensões usuais de transdutores piezelétricos, temos que a utilização de conexões rotuladas implica em uma grande dificuldade de fabricação, embora permita obter maiores deslocamentos. Para transdutores de pequenas dimensões, um objetivo a ser alcançado é a obtenção de mecanismos totalmente flexíveis.

7.3.1 Projeto de Atuadores Piezelétricos Utilizando Otimização Topológica

O projeto de atuadores piezelétricos utilizando a otimização topológica é bastante recente, sendo que um grande número de abordagens tem sido propostas na literatura [Lau et al, 2001]. Em especial, observa-se que duas abordagens principais tem sido utilizadas na grande maioria

dos trabalhos: a maximização de uma função do deslocamento de saída ou a extremização de uma função que leva em consideração a flexibilidade do mecanismo e a sua rigidez (métodos baseados em energia mútua).

A primeira abordagem tem sido desenvolvida pelo grupo de pesquisa da Universidade Técnica da Dinamarca [Bendsøe e Sigmund, 2003] e tem sido utilizado com sucesso em problemas acoplados, dinâmicos e com não-linearidade geométrica. Por sua vez, a segunda abordagem tem como origem o grupo de pesquisa da Universidade de Michigan [Nishiwaki et al, 1998a, 1998b, 200; Cheng et al, 2001], tendo sido utilizado com sucesso em problemas acoplados e dinâmicos. Embora existam outros métodos muito interessantes, nenhuma abordagem tem recebido tanta atenção como as citadas anteriormente, justificando um estudo mais aprofundado de ambas.

No que diz respeito ao projeto de atuadores piezelétricos, ambas abordagens tem sido utilizadas com sucesso [Bendsøe e Sigmund, 2003; Cheng et al, 2001] e os resultados obtidos demonstram que melhoras substanciais na magnitude dos deslocamentos de atuação de tais transdutores são obtidas. Ainda, geometrias clássicas como a "Moonie" são naturalmente obtidas com o uso da Otimização Topológica [Silva, 1998]. Tão interessante quanto a possibilidade de amplificar os deslocamentos desenvolvidos por materiais piezelétricos é o fato de a Otimização Topológica permitir a obtenção de padrões de deslocamentos complexos quando comparados com atuadores "Moonie", por exemplo.

No que segue, conceitos pertinentes a cada uma das abordagens serão apresentados. Optou-se por apresentar as abordagens aplicadas diretamente ao projeto de mecanismos flexíveis, uma vez que este é o objetivo final de um projeto de um atuador piezelétrico utilizando a otimização topológica.

7.3.1.1 Maximização do Deslocamento de Saída

Esta abordagem deriva do artigo [Sigmund, 1997], tendo sido constantemente refinada [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Sigmund, 1997, introduz o conceito de vantagem mecânica, ou a relação entre as forças de saída e de entrada. No entanto, como este conceito envolve forças, tem aplicação mais focada para problemas puramente mecânicos. Atualmente, é utilizada a formulação de maximização de deslocamentos, com restrição de volume e de algumas componentes

de deslocamento. Esta abordagem pode ser apresentada na forma [Sigmund e Bhul, 2000]

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} && u_{out} \\
 \text{Sujeito a} & && V \leq \bar{V} \\
 & && u_{in} \leq \bar{u}_{in} \\
 & && u_{lat} = 0
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde u_{out} é o deslocamento a ser maximizado, V é o volume da estrutura, \bar{V} é o limite superior de material, u_{lat} é a componente transversal de deslocamento da porta de saída, u_{in} é o deslocamento no ponto de aplicação da força e \bar{u}_{in} é o valor limite do deslocamento no ponto de aplicação da força. A restrição de igualdade é utilizada para garantir que a maximização de deslocamentos seja realizada exclusivamente sobre uma rigidez externa que é introduzida no problema como uma mola externa K_{out} . A figura 7.5 ilustra a região de projeto e as portas de entrada e de saída.

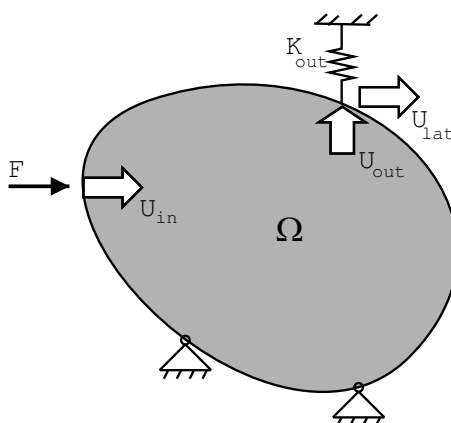


Figure 7.5: Região de projeto de um mecanismo flexível, portas de entrada e de saída.

A utilização de uma mola para simular a rigidez do meio sobre o qual o mecanismo atua foi proposta por Ananthasuresh et al, 1994, e tem como justificativa o fato de que a máxima transmissão de energia do atuador para o meio externo ocorre quando a rigidez do atuador é compatível com a rigidez do meio externo [Niezrecki et al, 2001]. Esta abordagem é conhecida na literatura como "*spring model*", ou modelo de mola.

Em problemas acoplados, a formulação 7.1 não se altera, mas não são necessárias restrições sobre os deslocamentos de entrada, já que este é limitado pela deformação do material ativo.

A extensão desta formulação para problemas com não-linearidade geométrica é bastante sim-

ples, uma vez que é possível obter as sensibilidades para as componentes de deslocamento de forma analítica. A consideração de não-linearidade geométrica no projeto de mecanismos flexíveis foi abordada recentemente por Bruns e Tortorelli, 2001 e Sigmund e Buhl, 2000. Mesmo com esta relação direta, a utilização desta abordagem para problemas com piezeletricidade e não-linearidade geométrica ainda não foi abordada na literatura, sendo o ponto central desta tese.

7.3.1.2 Energia Mútua

Outra abordagem utilizada para o projeto de mecanismos flexíveis foi adaptada para o projeto de atuadores piezelétricos com sucesso. Esta abordagem consiste em uma relação de compromisso entre a flexibilidade do mecanismo (possibilitando seu deslocamento e conseqüente transmissão do movimento) e a sua rigidez (que possibilita suportar cargas externas decorrentes da atuação sem se deformar) [Frecker, 1997 e Nishiwaki, 1998]. De acordo com esta abordagem, quanto mais flexível for o mecanismo na direção de saída, maiores serão os deslocamentos nesta direção. No entanto, esta flexibilidade faz com que o mecanismo não tenha capacidade de impor o movimento a um meio externo que venha a ser mais rígido do que o mecanismo obtido. Portanto, deve-se maximizar a rigidez do mecanismo. Claramente estes dois objetivos são conflitantes, o que leva a uma relação de compromisso.

Para ilustrar este conceito, vamos considerar dois pontos sobre um corpo elástico e linear. Um ponto A de aplicação de força de entrada (porta de entrada) e um ponto B de atuação (porta de saída). De acordo com o teorema de Betti, temos que

$$f_A u_B = f_B u_A,$$

onde f_B é uma força fictícia, que simula a ação do meio externo (equivale a um segundo caso de carregamento). Como o problema é linear, podemos assumir esta força como sendo unitária no ponto B e nula nas demais posições. Com isto, podemos escrever

$$u_A = f_A u_B$$

onde o termo $f_A u_B$ pode ser interpretado como uma energia mútua. Assim, para maximizarmos o deslocamento em qualquer ponto da estrutura, devemos maximizar a energia mútua

$$\begin{aligned} & \text{Max} && f_A u_b \\ & \text{Sujeito a} && \text{Equilíbrio}_1(\mathbf{K}\mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A) \\ & && \text{Equilíbrio}_2(\mathbf{K}\mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B) \quad . \end{aligned}$$

No entanto, este problema leva a um mecanismo sem rigidez. Desta forma, devemos considerar uma rigidez mínima para o mecanismo. Isto é obtido pela consideração de um caso de carregamento adicional. Neste carregamento, uma força é aplicada no ponto B , com o deslocamento no ponto A restrito. O problema de maximização da rigidez para este caso e carregamento é escrito como

$$\begin{aligned} & \text{Min} && f_B u_B \\ & \text{Sujeito a} && \text{Equilíbrio}(\mathbf{K}^* \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B) \end{aligned}$$

que nada mais é do que uma problema de minimização de flexibilidade (Bendsøe e Sigmund, 2003). A figura 7.6 ilustra estes carregamentos para um problema com uma força e um ponto de atuação.

Considerando estes dois problemas, pode-se definir uma função objetivo da forma [Silva, 1998]

$$\begin{aligned} \text{Obj} &= w * \ln(f_A u_B) - (1 - w) \ln(f_B u_B) && (7.2) \\ &0 \leq w \leq 1 \end{aligned}$$

onde o fator de ajuste w permite obter mecanismos mais flexíveis ($w = 1$) ou mais rígidos ($w = 0$). Como pode ser observado, é necessário considerar três casos de carregamento, ilustrados na figura 7.6. Com isto, o problema de otimização passa a ser

$$\begin{aligned} & \text{Min} && \text{Obj} \\ & \text{Sujeito a} && V \leq V_{lim} \\ & && \text{Equilíbrio}_1(\mathbf{K} \mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A) \\ & && \text{Equilíbrio}_2(\mathbf{K} \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B) \\ & && \text{Equilíbrio}_3(\mathbf{K}^* \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B). \end{aligned}$$

Esta formulação foi estendida para o projeto de atuadores piezelétricos lineares, através da introdução do conceito de transdutância mútua [Silva e Kikuchi, 1999]. Neste caso, a reciprocidade é representada por

$$f_A u_B + q_A \phi_B = f_B u_A + q_B \phi_A$$

onde q_A é a carga elétrica no ponto A e ϕ_B é a diferença de potencial no ponto B . O procedimento de solução é o mesmo apresentado para o problema elástico, mas utilizando as equações de

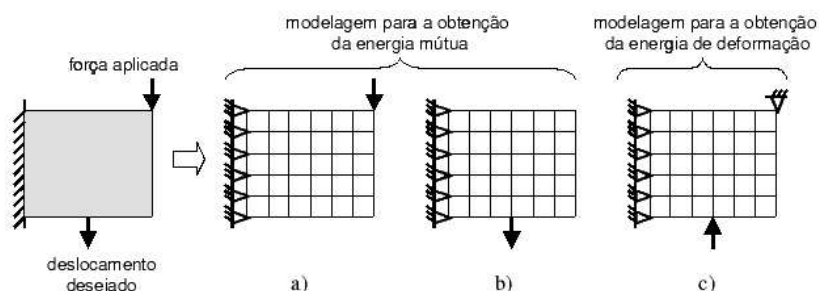


Figure 7.6: Casos de carregamento considerados para a otimização baseado em energia mútua [De Lima, 2002].

equilíbrio da piezeletricidade infinitesimal.

Na forma como é geralmente considerada, esta abordagem não leva em consideração as características do meio externo. Assim, obtém-se mecanismos mais ou menos flexíveis na faixa $0 \leq w \leq 1$, mas não existe garantia de que isto é suficiente para atuar sobre um meio externo. Isto pode ser realizado pela consideração de molas externas que simulem tal meio, como é feito na abordagem utilizada por Sigmund. No entanto, como a abordagem baseada em energia mútua utiliza o conceito de auperposição (aplicável apenas a problemas lineares), sua extensão para problemas com não-linearidade geométrica não é imediata.

7.3.2 Comparação entre as abordagens

Um problema comum a ambas abordagens discutidas acima é justamente o objetivo. Embora a maximização do deslocamento de saída seja necessária em diversas aplicações, faz com o projeto tenda naturalmente a mecanismos rotulados, pois estes permitem obter deslocamentos maiores. Isto leva a uma má definição do problema e, portanto, a um projeto otimizado mas que não satisfaz o requisito de se obter um mecanismo flexível (pois este requisito não está definido claramente nas formulações 7.1 e 7.2). Um exemplo de mecanismo rotulado pode ser observado na figura 7.7.

Entre as diversas abordagens propostas para evitar o aparecimento de rótulas podemos citar o trabalho de Poulsen, 2002, que propõe a inclusão de uma restrição global associada a formação de rótulas e o trabalho de Cardoso e Fonseca, 2004b, que propõe a maximização de um funcional de energia. A proposta de Poulsen consiste na soma de funções indicadoras $h(\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d)$ para cada nó de uma malha regular de elementos quadrilaterais. Quando as densidades dos elementos que cercam um nó configuram uma rótula, a função indicadora será não-nula. Embora a restrição

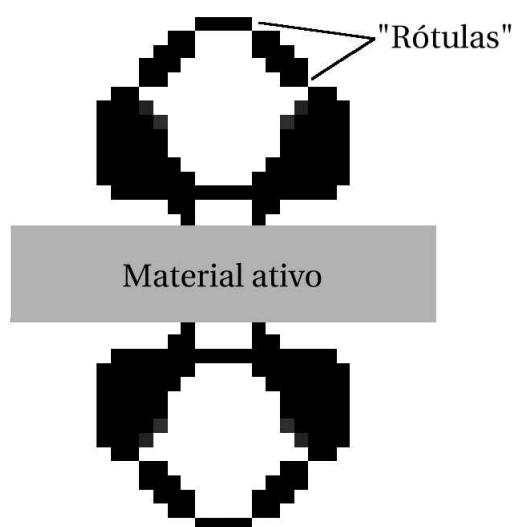


Figure 7.7: Mecanismo rotulado obtido com a formulação de maximização dos deslocamentos de saída.

global e suas derivadas sejam de fácil obtenção e o procedimento proposto permita a obtenção de topologias livres de rótulas, o problema de Otimização Topológica resultante não é bem posto. Isto ocorre pois a função indicadora de cada nó depende somente das densidades dos elementos contíguos, tal que a topologia obtida depende do refino da malha. Ainda, para as topologias obtidas, ocorre uma pequena concentração de material no entorno do ponto onde deveria existir a rótula, o que leva a obtenção de mecanismos flexíveis concentrados. Por sua vez, a proposta de Cardoso e Fonseca utiliza um conceito diferente, baseado no fato de que elementos com densidade elevada devem absorver o máximo de energia de deformação, respeitando condições cinemáticas. Esta proposta permite a extensão para problemas não-lineares, mas até o momento apenas problemas lineares foram abordados.

Observa-se na literatura que as topologias obtidas com o modelo de mola apresentam uma grande dependência com o valor da rigidez do meio externo (K_{out}). Da mesma forma, resultados obtidos com a função objetivo da Equação (7.2) dependem do valor de ajuste w . De modo geral pode-se afirmar que topologias sem rótulas podem ser obtidas para valores elevados da rigidez do meio externo (pois o mecanismo tem como principal função a transmissão de forças) e para valores baixos de w (de tal forma que o resultado tende a uma topologia de mínima flexibilidade).

A instabilidade de tabuleiro é associada a ordem de interpolação dos campos de densidade e

de deslocamentos em cada elemento finito da malha. Com isto, ambas abordagens apresentam a mesma tendência ao aparecimento de tal instabilidade e tal fato não tem influência na escolha de uma determinada abordagem.

Quanto a convexidade de cada formulação, pode-se afirmar que ambas levam a problemas não-convexos [Lau et al, 2001] e portanto existe a dificuldade adicional de trabalharmos com funções objetivo não-lineares, não-convexas e com um grande número de variáveis de projeto. Isto torna a comparação das topologias obtidas uma tarefa complexa, pois depende da estratégia de solução utilizada, da parametrização do tensor constitutivo e da distribuição inicial das variáveis de projeto. Uma abordagem que tem sido utilizada conjuntamente com a parametrização SIMP é um método de continuação (seqüência de problemas de Otimização Topológica) onde cada problema tem como ponto de partida a topologia obtida considerando um expoente de penalização de valor inferior. O procedimento inicia sem penalização (expoente unitário) e termina quando o expoente atinge um valor pré-determinado (geralmente 3). Bruns e Tortorelli, 2001, incrementam o expoente em intervalos de valor 0.1 a cada 10 iterações e Sigmund e Buhl, 2000, apenas comentam que tal procedimento permite a obtenção de topologias mais parecidas quando o problema é iniciado com valores diferentes de densidades. No entanto, como tanto as funções envolvidas quanto a parametrização do tensor constitutivo levam a não-convexidade do problema, diferentes trajetórias de convergência para mínimos locais serão obtidas para diferentes estratégias de incremento da penalização do tensor constitutivo e para diferentes métodos de solução do problema de otimização.

Quanto a utilização de cada um dos métodos em problemas não-lineares, observamos que o método de maximização de uma função dos deslocamentos, ou mais precisamente a maximização direta de componentes de deslocamentos [Sigmund e Buhl, 2000], tem sido utilizado em problemas com não-linearidade geométrica. Por sua vez, formulações baseadas em teoremas recíprocos são de difícil generalização para o caso não-linear, pois a premissa de superposição de efeitos só é válida em problemas lineares. Por este motivo optou-se por utilizar a formulação de maximização de deslocamentos, estendida aqui para a maximização de uma componente do vetor de estados. Conforme já apresentado, esta abordagem não é a ideal, pois tem a tendência a formação de rótulas, mas permite a utilização direta em problemas não-lineares.

7.4 Análise de Sensibilidade

No problema de otimização topológica tratado neste trabalho, buscamos a distribuição de material no domínio de projeto que extremize um funcional, conhecido como função objetivo

e satisfaça as restrições. As propriedades do material são assumidas como constantes em cada elemento finito, o que leva a uma relação de uma variável de projeto para cada elemento da malha se uma parametrização SIMP for utilizada. Assim, para um elemento finito e , podemos representar os tensores constitutivos efetivos como

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_e &= \rho_e^{nc} \mathbf{C}_e^0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_e &= \rho_e^{n\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \mathbf{e}_e &= \rho_e^{ne} \mathbf{e}^0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde o superíndice 0 se refere as propriedades do material que se quer distribuir (material base). Embora na prática cada um dos tensores constitutivos apresente uma relação funcional diferente com respeito ao expoente, será considerado neste trabalho a hipótese de que as três interpolações da Equação (7.3) seguem a mesma lei, isto é, $nc = n\epsilon = ne = n$. Com o objetivo de utilizar algoritmos de otimização de primeira ordem, como a programação linear sequencial ou o método das assíntotas móveis, devemos calcular as sensibilidades de algumas grandezas de interesse em relação às variáveis de projeto.

7.4.1 Sensibilidade de uma Componente do Vetor de Estados

No projeto de mecanismos flexíveis, muitas vezes precisamos do valor da sensibilidade de uma componente do vetor de estados com respeito a variação de uma das variáveis de projeto. Como geralmente são necessárias mais de uma componente para especificar o comportamento de um mecanismo, é importante obter o valor destas sensibilidades de forma eficiente. A seguir, duas abordagens são consideradas: a abordagem direta e a abordagem adjunta [Haug et al, 1986; Belegundu e Arora, 1985; Dems e Mróz, 1983]. Em ambas abordagens, será utilizado o conceito de vetor localização, \mathbf{L}_i , que possui todas as componentes nulas e a i -ésima componente unitária, tal que $x_i = \mathbf{L}_i^T \mathbf{x}$, onde x_i é a i -ésima componente do vetor de estados.

É importante salientar que a análise de sensibilidade de uma componente do vetor de estados estende o conceito de sensibilidade de uma componente de deslocamentos. Com isto, pode-se utilizar as expressões obtidas neste capítulo para o projeto de atuadores e sensores.

7.4.1.1 Abordagem direta

Considerando a equação de equilíbrio $\mathbf{R}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ e derivando em relação a uma variável de projeto ρ_m , obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} = 0. \quad (7.4)$$

Isolando a derivada do vetor de estados e utilizando o resultado do Apêndice C, obtém-se

$$\mathbf{K}_t \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m}. \quad (7.5)$$

Como a matriz de rigidez tangente já está fatorada, para um dado nível de carregamento λ , podemos obter a sensibilidade do vetor de estados da estrutura com respeito a cada variável de projeto por meio do cálculo da derivada parcial e por uma retrosubstituição. Para a obtenção da sensibilidade de cada componente, utiliza-se o vetor de localização.

O custo associado a cada retrosubstituição não é geralmente alto. No entanto, observa-se que em problemas de otimização topológica o número de variáveis de projeto é elevado, fazendo com que um grande número de retrosubstituições seja necessário.

O termo restante, da derivada parcial do resíduo em relação a cada variável de projeto, pode ser obtido de forma analítica. Para isto observamos que

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} = \frac{\partial (\mathbf{P}_{ext} - \mathbf{F})}{\partial \rho_m} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_m} \quad (7.6)$$

se assumirmos que as forças externas independem das variáveis de projeto. Assim, utilizando a definição dos vetores de força interna apresentados no Capítulo 2, podemos reescrever a Equação (7.6) como

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_u^t \mathbf{S} d\Omega_0 \right) \\ \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_\phi^t \mathbf{D}_k d\Omega_0 \right) \end{array} \right\}. \quad (7.7)$$

Desenvolvendo estas expressões e fazendo uso das relações constitutivas para o meio piezelétrico, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} = - \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_u^t \frac{\partial}{\partial \rho_m} ({}^t C_{ijkl} {}^t E_{kl} - {}^t e_{kij} {}^t \varphi_k) d\Omega_0 \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_\phi^t \frac{\partial}{\partial \rho_m} ({}^t e_{ijk} {}^t E_{ij} + {}^t \epsilon_{kl} {}^t \varphi_l) d\Omega_0 \end{array} \right\} \quad (7.8)$$

e como a deformação e o campo elétrico não dependem diretamente das variáveis de projeto,

obtemos a relação

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} = - \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_u^t \left(\frac{\partial {}^t C_{ijkl}}{\partial \rho_m} {}^t E_{kl} - \frac{\partial {}^t \epsilon_{kij}}{\partial \rho_m} {}^t \varphi_k \right) d\Omega_0 \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_\phi^t \left(\frac{\partial {}^t e_{ijk}}{\partial \rho_m} {}^t E_{ij} + \frac{\partial {}^t \epsilon_{kl}}{\partial \rho_m} {}^t \varphi_l \right) d\Omega_0 \end{array} \right\}, \quad (7.9)$$

que pode ser facilmente calculada, uma vez que todas as variáveis envolvidas são conhecidas na configuração atual. Este cálculo tem o custo equivalente ao cálculo do vetor de forças internas generalizadas.

7.4.1.2 Abordagem adjunta

Na abordagem adjunta, ao invés de utilizarmos a equação de equilíbrio, consideramos

$$x_i = \mathbf{L}i^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}_g^T \mathbf{R} \quad (7.10)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}_g$ é o vetor adjunto. A derivada de x_i em relação a uma variável de projeto pode ser reescrita como

$$\frac{dx_i}{d\rho_m} = \mathbf{L}i^T \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}_g^T \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} \right). \quad (7.11)$$

Agrupando os termos comuns obtém-se

$$\frac{dx_i}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} \left(\mathbf{L}i^T + \boldsymbol{\lambda}_g^T \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{x}} \right) + \boldsymbol{\lambda}_g^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m}, \quad (7.12)$$

e a expressão (7.12) pode ser separada em duas partes, tornando o problema mais tratável do ponto de vista computacional. Em primeiro lugar, observamos que se a expressão entre parênteses for igual a zero, eliminamos também o termo $\frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m}$. Para zerarmos o termo entre parênteses, escrevemos

$$\mathbf{K}_t \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{L}i, \quad (7.13)$$

onde o resultado do Apêndice C foi utilizado. A solução $\boldsymbol{\lambda}_g$ deste sistema de equações permite reescrever a expressão (7.12) como

$$\frac{dx_i}{d\rho_m} = \boldsymbol{\lambda}_g^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} \quad (7.14)$$

ou seja, a solução conjunta das Equações (7.13) e (7.14) permite obter a sensibilidade de uma componente do vetor de estado \mathbf{x} em relação a uma variável de projeto. A solução de (7.13) é muito simples, pois o vetor de localização entra como um vetor de forças conhecido e a matriz de

rigidez tangente já foi calculada no processo de solução das equações de equilíbrio (corresponde a matriz de rigidez tangente utilizada em um determinado nível de carregamento). Assim, o custo de solução da Equação (7.13) é o mesmo de uma retrosubstituição. De posse da solução λ_g , procedemos com o produto interno na Equação (7.14), cujo custo é dominado pelo cálculo da derivada parcial do resíduo em relação a variável de projeto, que é um termo local.

Desta forma, pode-se verificar que o número de retrosubstituições na abordagem adjunta é igual ao número de componentes do vetor de estado das quais desejamos obter as derivadas. Como este número é geralmente muito menor do que o número de variáveis de projeto, fica clara a vantagem da utilização da abordagem adjunta sobre a abordagem direta neste caso específico.

7.4.1.3 Sensibilidade de Uma Componente do Vetor de Estados para o Caso de Condições de Contorno Essenciais Não-Homogêneas

Um ponto interessante e que geralmente não é percebido é a necessidade de modificarmos o cálculo das sensibilidades para o caso de existirem condições de contorno essenciais não-homogêneas. Este tópico é abordado de forma muito interessante por [Cho e Jung, 2003] para estruturas com deslocamento imposto e submetidas a não-linearidade geométrica. As conclusões obtidas por Cho e Jung podem ser facilmente estendidas para o presente trabalho. Para isto, consideramos que o vetor de estados pode ser separado em uma parcela homogênea e uma parcela não-homogênea

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^h + \mathbf{x}^{nh} \quad (7.15)$$

onde a parcela homogênea contém os valores usuais do vetor de estado e valores nulos nas posições correspondentes as condições de contorno essenciais homogêneas e não-homogêneas. Por sua vez, a parcela não-homogênea contém todos os termos nulos, com exceção das posições correspondentes aos graus de liberdade com condições de contorno essenciais não-homogêneas. Como as condições de contorno essenciais não dependem das variáveis de projeto, verificamos que

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{x}^h}{d\rho_m} + \frac{d\mathbf{x}^{nh}}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{x}^h}{d\rho_m}. \quad (7.16)$$

Considerando a abordagem direta, Equação (7.5), e o resultado da Equação (7.16), obtemos

$$\mathbf{K}_t \frac{d\mathbf{x}^h}{d\rho_m} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m}$$

que deve ser solucionado com a imposição de que as posições correspondentes as condições de contorno essenciais homogêneas e não-homogêneas sejam nulas (o sistema de equações de

equilíbrio deve ser solucionado da forma usual). Esta é a única modificação necessária tornando a consideração de condições de contorno essenciais não-homogêneas de fácil implementação na abordagem direta. Para o problema adjunto, Equação (7.12), observamos que

$$\frac{dx_i}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{x}^h}{d\rho_m} \left(\mathbf{L}\mathbf{i}^T + \boldsymbol{\lambda}_g^T \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{x}} \right) + \boldsymbol{\lambda}_g^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m}. \quad (7.17)$$

Na Equação (7.17), para evitar o cálculo do termo $\frac{d\mathbf{x}^h}{d\rho_m}$, zeramos o termo entre parênteses, dando origem a um sistema de equações, Equação (7.13). De forma análoga ao problema direto, devemos solucionar o sistema de equações (7.13) de modo a impor valores nulos nas posições equivalentes as condições de contorno essenciais homogêneas e não-homogêneas no vetor $\boldsymbol{\lambda}_g$. Deve-se salientar que o procedimento de solução das equações de equilíbrio do problema de análise deve ser solucionado normalmente, sem tal modificação.

Esta conclusão é muito importante para o projeto de transdutores piezelétricos, uma vez que as condições de contorno de diferença de potencial são condições de contorno essenciais e são geralmente utilizadas na definição do problema. Tal tópico não foi encontrado em nenhum trabalho que trata do projeto de transdutores piezelétricos.

7.4.2 Derivada do Volume

A quantidade de material a ser utilizado na otimização topológica é muito utilizada como restrição ou objetivo. A derivada de volume é bastante simples para a abordagem tradicional, onde a relação volume densidade é linear (sem penalização no volume). Na forma discreta

$$V = \sum_{i=1}^{nelems} A_i * esp_i * \rho_i \quad (7.18)$$

tem derivada

$$\frac{dV}{d\rho_i} = A_i * esp_i. \quad (7.19)$$

Para a relação não linear (penalizada) entre volume e densidade [Cardoso, 2000],

$$V = \sum_{i=1}^{nelems} (\rho^n + \beta (\rho - \rho^2)) A_i * esp_i \quad (7.20)$$

obtemos a derivada

$$\frac{dV}{d\rho_m} = (n\rho^{n-1} + \beta (1 - 2\rho)) A_m * esp_m. \quad (7.21)$$

Esta relação tem como objetivo penalizar valores intermediários de densidade, fazendo com que a relação entre a quantidade de material e a densidade em cada elemento seja dado por uma função côncava, ao invés da tradicional relação linear.

7.4.3 Derivada da Flexibilidade

A flexibilidade é definida como um análogo ao trabalho das forças externas,

$$Flex = \mathbf{P}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{x} \quad (7.22)$$

e sua derivada em relação as variáveis de projeto, para o caso não-linear geométrico pode ser obtida com o uso de um método adjunto. Neste caso, a sensibilidade é

$$\frac{dFlex}{d\rho_m} = \mathbf{P}_{\text{ext}} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}_g^T \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho_m} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} \right) \quad (7.23)$$

e, com um procedimento análogo ao utilizado no cálculo de sensibilidade para uma componente do vetor de estado, podemos escrever

$$\frac{dFlex}{d\rho_m} = \boldsymbol{\lambda}_g^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} \quad (7.24)$$

onde

$$\mathbf{K}_t \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{P}_{\text{ext}}. \quad (7.25)$$

Com isto, conclui-se que o vetor adjunto nada mais é do que o vetor de estados obtido ao final do cálculo de equilíbrio não-linear. Considerando um problema com a região piezométrica fixa (neste caso não é necessário calcular as sensibilidades na região piezométrica), verifica-se que a expressão é a mesma obtida por [Bhul et al, 2000] e para o caso de o problema ser linear, obtém-se a mesma expressão que [Silva, 1998]

$$\frac{dFlex}{d\rho_m} = -\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{u}. \quad (7.26)$$

7.4.4 Rigidez Externa

A inclusão de molas externas para representar a rigidez do meio externo ao atuador é conhecido como modelo de mola, ou "*spring model*" [Ananthasuresh et al, 1994]. Estas molas podem ser lineares ou não, sendo que a não-linearidade é representada por uma dependência da rigidez

do meio externo com o deslocamento. Neste trabalho, uma função cúbica

$$K_i = K_0 + K_1 u_i + K_2 u_i^2 + K_3 u_i^3 \quad (7.27)$$

será inicialmente utilizada, onde $K_0..K_3$ são coeficientes referentes ao comportamento do meio externo e u_i é o valor de deslocamento na posição global i . Com esta função, podemos simular molas com rigidez diferenciada em compressão e tração, sistemas que apresentem uma maior rigidez no início do deslocamento, etc.

O procedimento de se incluir tais molas é simples, uma vez que a rigidez deve ser somada no grau de liberdade correspondente do sistema global. Da mesma forma, no cálculo das forças internas, deve-se somar a contribuição de tais molas

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} + \mathbf{L}_i K_i u_i = \mathbf{F} + \mathbf{Fk}_i, \quad (7.28)$$

onde \mathbf{Fk}_i é um vetor com todas as posições nulas, exceto pelo valor $K_i u_i$ na i -ésima posição. Para o cálculo de sensibilidade de uma componente do vetor de estado, devemos nos ater ao último termo da Equação (7.12), obtendo

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_m} = \frac{\partial (\mathbf{P}_{\text{ext}} - \mathbf{F} - \mathbf{Fk}_i)}{\partial \rho_m} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_m} - \frac{\partial \mathbf{Fk}_i}{\partial \rho_m} \quad (7.29)$$

onde a primeira derivada foi desenvolvida na Equação (7.9). A segunda derivada resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{Fk}_i}{\partial \rho_m} = \frac{\partial K_i}{\partial \rho_m} u_i + K_i \frac{\partial u_i}{\partial \rho_m} \quad (7.30)$$

mas, como a rigidez da mola externa não depende explicitamente das densidades, o primeiro termo se anula. Considerando este novo termo, resulta que a Equação (7.13) deve ser reescrita como

$$(\mathbf{K}_t + \mathbf{K}_k) \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{L}i^T \quad (7.31)$$

onde \mathbf{K}_k é uma matriz global com a rigidez de todas as molas externas, nas posições $\mathbf{K}_{kii} = K_i$. Esta expressão é uma consequência natural do fato de adicionarmos a rigidez das molas externas na matriz tangente durante o processo de solução das equações de equilíbrio e, conseqüentemente, na solução do problema de análise de sensibilidade.

7.4.5 Restrições de Igualdade

Geralmente desejamos maximizar ou prescrever um determinado deslocamento ou diferença de potencial, mas desejamos que outras partes da estrutura acompanhem este valor de referência. Para relacionarmos estas componentes, precisamos utilizar restrições de igualdade, que nem sempre são disponíveis nos algoritmos de programação matemática. Uma saída é utilizar uma restrição da forma [Bruns et al, 2001]

$$\frac{(a - a_{ref})^2}{(a + a_{ref})^2} \leq \epsilon \quad (7.32)$$

onde a é uma componente cujo valor queremos igualar ao valor de referência a_{ref} e ϵ é um valor pequeno, maior do que zero. Quanto maior o valor de ϵ , mais relaxada a restrição de igualdade. O lado esquerdo da Equação (7.32) é sempre positivo e o denominador é apenas um fator de escala. O cálculo de sensibilidade para esta função é bastante simples, resultando em

$$\frac{d \left[\frac{(a - a_{ref})^2}{(a + a_{ref})^2} \right]}{d\rho_m} = -4 \frac{(a - a_{ref})}{(a + a_{ref})^3} \left(-a_{ref} \frac{da}{d\rho_m} + a \frac{da_{ref}}{d\rho_m} \right). \quad (7.33)$$

8. RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com o uso da formulação proposta neste trabalho. Como foram propostas metodologias de análise e de otimização, este capítulo será separado em duas partes: resultados referentes a parte de análise e resultados de Otimização Topológica.

8.1 Problemas de análise

O objetivo desta seção é apresentar resultados referentes ao procedimento de análise de equilíbrio proposto neste trabalho. O primeiro exemplo consiste na verificação da formulação de equilíbrio e da referente implementação computacional propostos neste trabalho. Para isto, desenvolveu-se um modelo teórico (Apêndice E) para prever a flambagem de uma coluna de material elástico, isotrópico, linear e homogêneo submetido a ação de regiões piezoeletricas. A geometria do problema é apresentada na Figura 8.1 e, para este exemplo, vamos considerar os seguintes dados:

- $\alpha = 0.5$ (bi-engastada);
- $E_b = 110GPa$ (Cobre);
- $E_c = 63GPa$ (PZT-5A, direção 2);
- $h_b = 1 * 10^{-4}m$;
- $h_p = 5 * 10^{-3}m$;
- $d_{13} = 170 * 10^{-12}m/V$;
- $L_p = 3 * 10^{-2}m$;
- $L_b = 5 * 10^{-2}m$.

Utilizando a formulação desenvolvida no Apêndice D, determinamos que o campo elétrico associado a flambagem de Euler é de $\varphi_3 = 67210.26 V/m$.

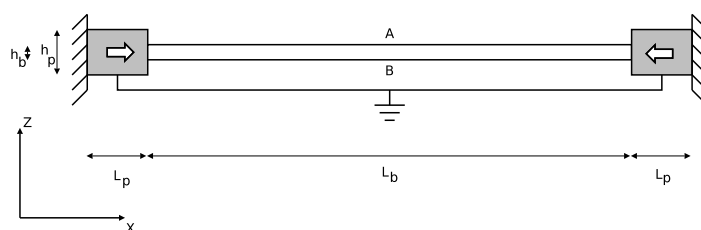


Figura 8.1: Problema de verificação: flambagem de uma coluna submetida a ação de material piezelétrico.

O modelo computacional consiste em uma malha de 2240 elementos isoparamétricos de 8 nós, divididos da seguinte forma: cada região piezelétrica é discretizada com 12×60 elementos e a região elástica com 2×500 elementos. Esta discretização se mostrou adequada, após testes com diferentes malhas. O material da região piezelétrica é o PZT-5, com as propriedades da Tabela 8.1 e o material da região elástica é o Cobre, com as propriedades listadas acima. O carregamento considerado foi a aplicação de condição de contorno essencial de diferença de potencial, com um valor máximo de campo elétrico de $700 \times 10^3 \text{ V/m}$. Assim, de acordo com o modelo, deve-se observar um aumento considerável do deslocamento vertical do ponto A em um nível de carregamento λ próximo de 0.96. A Figura 8.2 ilustra o deslocamento vertical do ponto A a medida que o nível de carregamento é incrementado. Pode-se observar que os deslocamentos apresentam um aumento significativo de valor em um valor próximo ao teórico. Para obter este comportamento no modelo computacional, foi considerado uma pequena perturbação da posição vertical do nó sobre o ponto B. Quanto menor o valor da perturbação, mais próximo o comportamento do modelo será de uma coluna ideal. Assim, foram considerados diferentes valores de perturbação nas simulações. A Figura 8.3 ilustra o comportamento perto da carga crítica, para dois valores de perturbação.

Analizando os resultados, verifica-se uma grande coerência entre o modelo computacional e o modelo teórico.

Em adição, apresentam-se dois resultados previamente publicados na literatura [Cardoso e Fonseca, 2004a]. Nestes dois exemplos, o material isotrópico elástico linear é o Alumínio ($E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}$ e $\nu = 0.334$) e o material piezelétrico linear é o PZT5 (Tabela 8.1). Em todos os exemplos, assumimos que o cerâmico, de altura 1 mm , está perfeitamente colado ao Alumínio. Nos exemplos considerados, o expoente de escalonamento da unidade de força considerado tem valor 9.

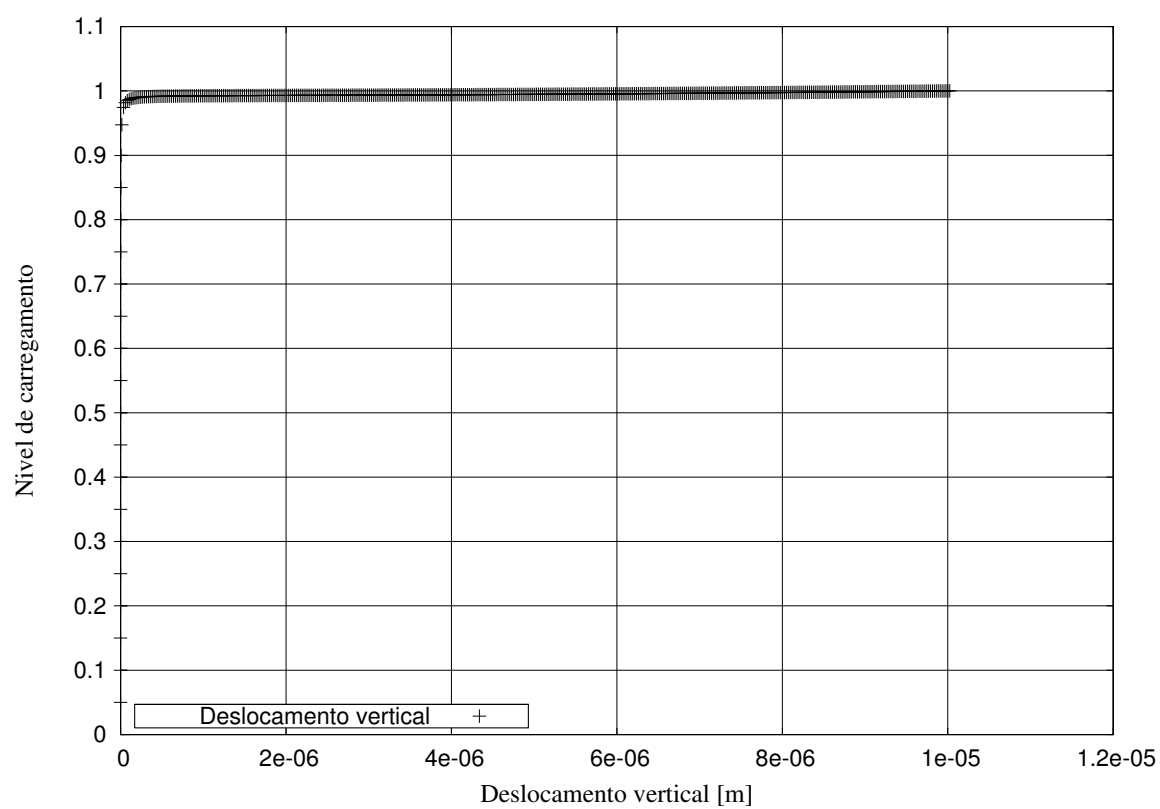


Figura 8.2: Relação entre o nível de carregamento λ e o deslocamento vertical do ponto A , para o exemplo primeiro exemplo de verificação.

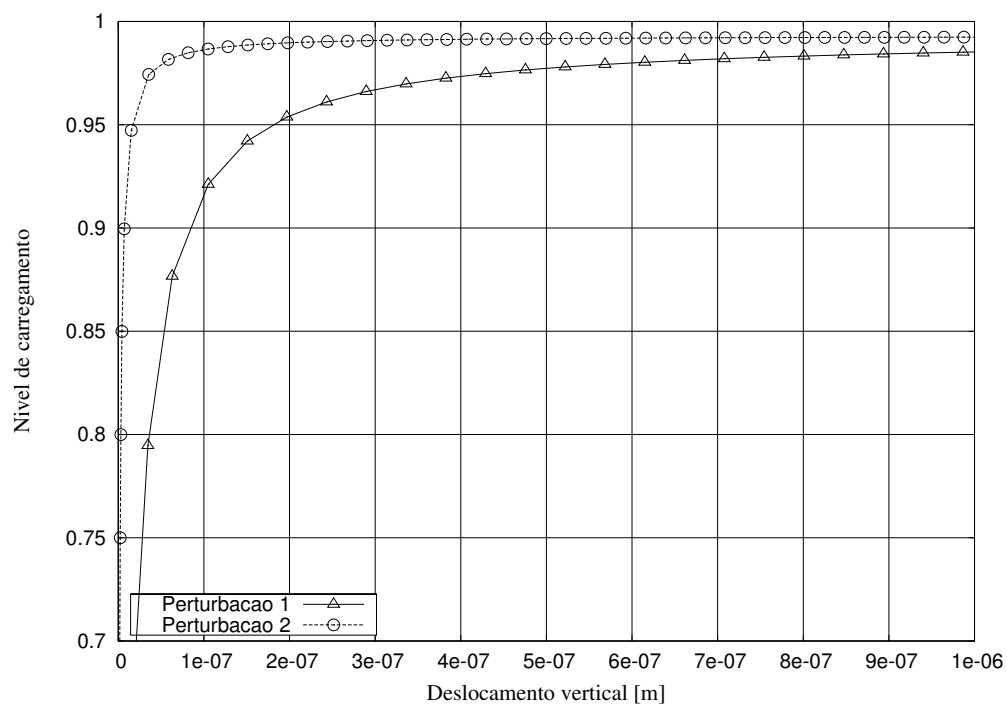


Figura 8.3: Comportamento do deslocamento vertical no ponto A, para diferentes valores de perturbação da posição vertical do nó do ponto B. O Valor da perturbação 1 é maior do que o da perturbação 2.

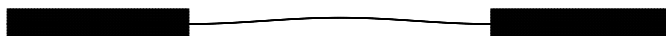


Figura 8.4: Configuração final da estrutura (todos os deslocamentos estão multiplicados por um fator de $1 * 10^4$)

O primeiro exemplo é o Pórtico de Lee [Lee et al., 1968]. Esta estrutura é bem conhecida, exibindo pontos limites e *snap-back*, sendo portanto interessante para verificar se a formulação e o procedimento de solução conseguem lidar com tais efeitos não-lineares. A estrutura está ilustrada na figura 8.5, com partes de Alumínio (cinza) e com uma pastilha piezolétrica colada na parte superior (preto). Nestas simulações, a face inferior da pastilha piezolétrica tem potencial nulo, sendo que a face superior é livre. Com isto, cada nó da face superior pode assumir um valor de potencial distinto. A malha de elementos finitos utilizada tem 478 elementos (dois na espessura) de 8 nós (*Serendipity*). A pastilha piezolétrica é discretizada com 2×30 elementos de 8 nós (*Serendipity*). A hipótese de estado plano de tensões foi considerada.

Se não consideramos a pastilha piezolétrica, devemos obter o resultado elástico tradicional. Neste caso, o gráfico da figura 8.6 mostra os deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força. Ao considerarmos a pastilha piezolétrica, obtemos os deslocamentos ilustrados no gráfico da figura 8.7. Em resposta a este comportamento altamente não-linear, obtemos um padrão não-linear de potenciais elétricos na cerâmica, como ilustrado no gráfico da figura 8.8.

O segundo exemplo considera uma viga longa de Alumínio (cinza) com um *patch* piezolétrico (preto), ilustrado na figura 8.9. A estrutura foi discretizada com 470 elementos finitos de 8 nós (*Serendipity*). Esta estrutura foi selecionada pois a medida que o deslocamento vertical aumenta, aumenta a rigidez a flexão, efeito da não-linearidade geométrica. Este comportamento pode ser visualizado no gráfico da figura 8.10. No gráfico da figura 8.11 pode-se avaliar a variação não-linear do potencial elétrico em dois pontos da face superior da pastilha piezolétrica com respeito ao nível de carregamento.

Deve-se salientar que nos dois exemplos considerados nesta seção, a solução linear seria uma reta com inclinação igual a inclinação inicial das curvas não-lineares obtidas.

Dos resultados obtidos, verifica-se que o procedimento de solução proposto é capaz de lidar com pontos limites e de "*snap-back*", além de permitir a consideração conjunta dos efeitos elétricos e mecânicos acoplados, independentemente da magnitude dos tensores constitutivos envolvidos. Observa-se, também, a grande diferença de comportamento entre os casos lineares e não-lineares, mostrando a importância da consideração dos efeitos de alta ordem.

8.2 Problemas Minimização de Flexibilidade NLG

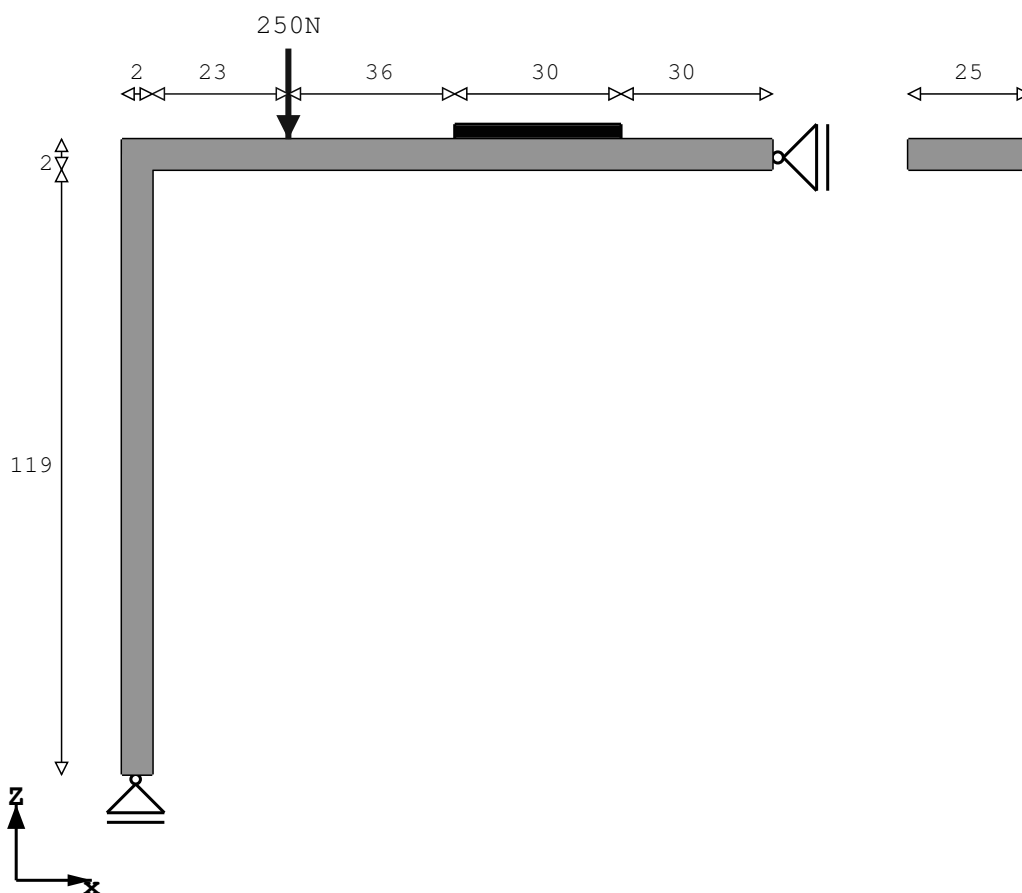
Os problemas abordados nesta seção servem para mostrar a importância da consideração da não-linearidade geométrica no projeto de estruturas de máxima rigidez utilizando otimização

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12.1 & 7.54 & 7.52 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7.54 & 12.1 & 7.52 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7.52 & 7.52 & 11.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.3 \end{bmatrix} * 10^{10} Pa$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \begin{bmatrix} 1650 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1650 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1700 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 12.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 12.3 & 0.0 & 0.0 \\ -5.4 & -5.4 & 15.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} Cm^{-2}$$

Tabela 8.1: Propriedades constitutivas para o cerâmico piezoeletrico PZT-5

Figura 8.5: Pórtico de Lee com um inserto piezoeletrico. Dimensões em *mm*.

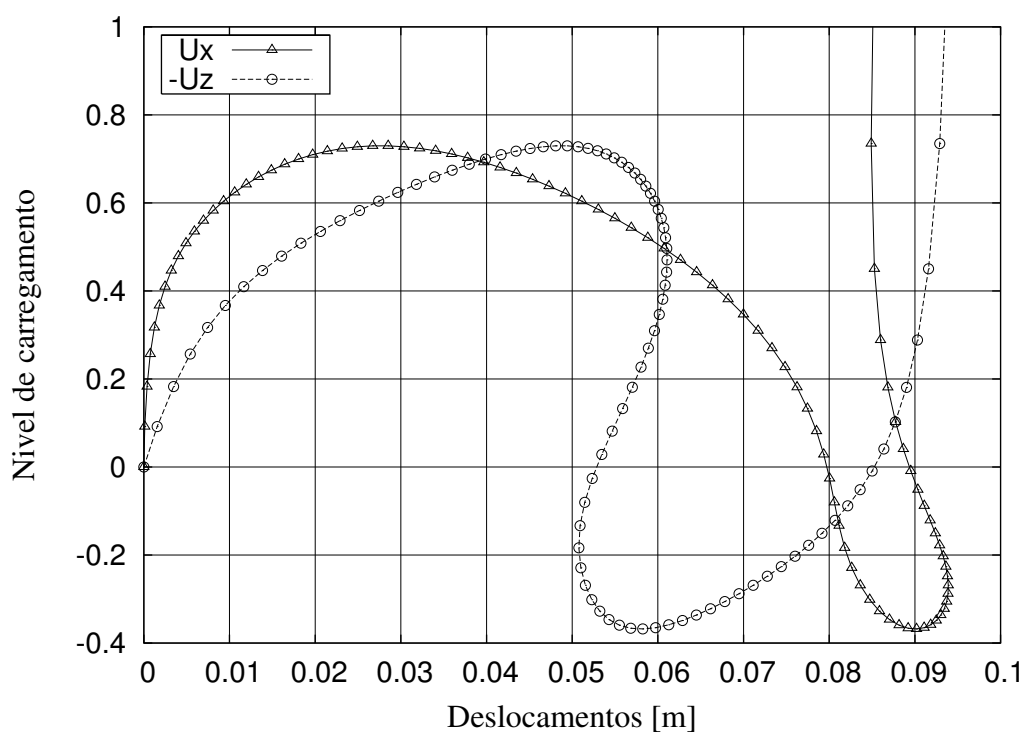


Figura 8.6: Deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força, se o cerâmico piezelétrico não é considerado.

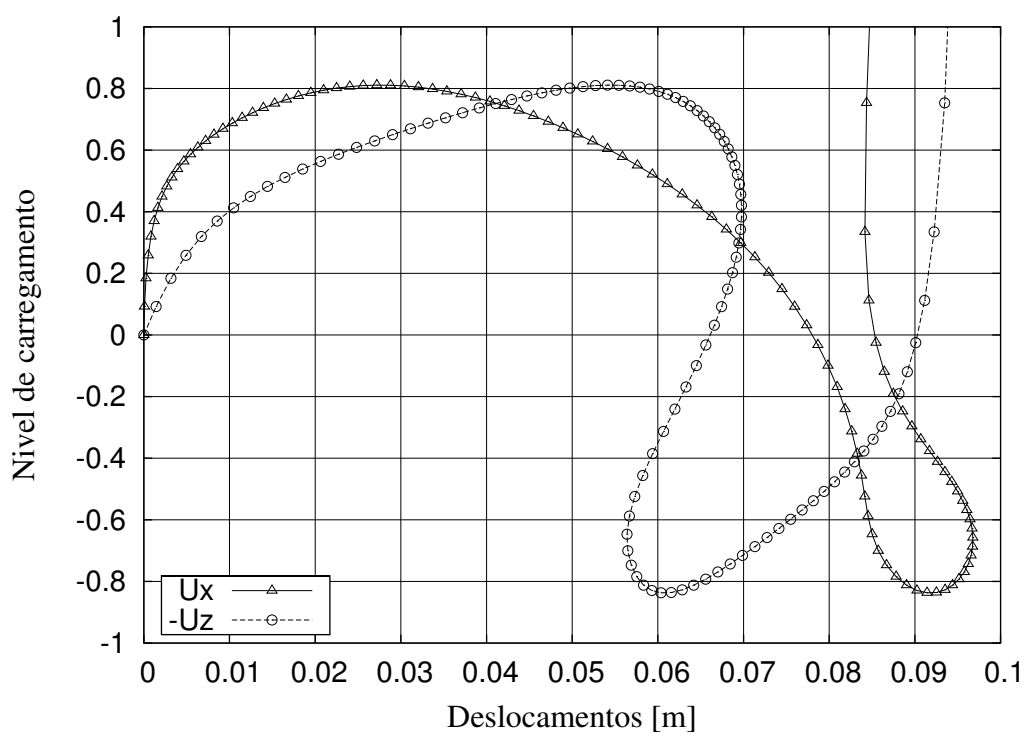


Figura 8.7: Deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força. Resultado obtido considerando o cerâmico piezelétrico.

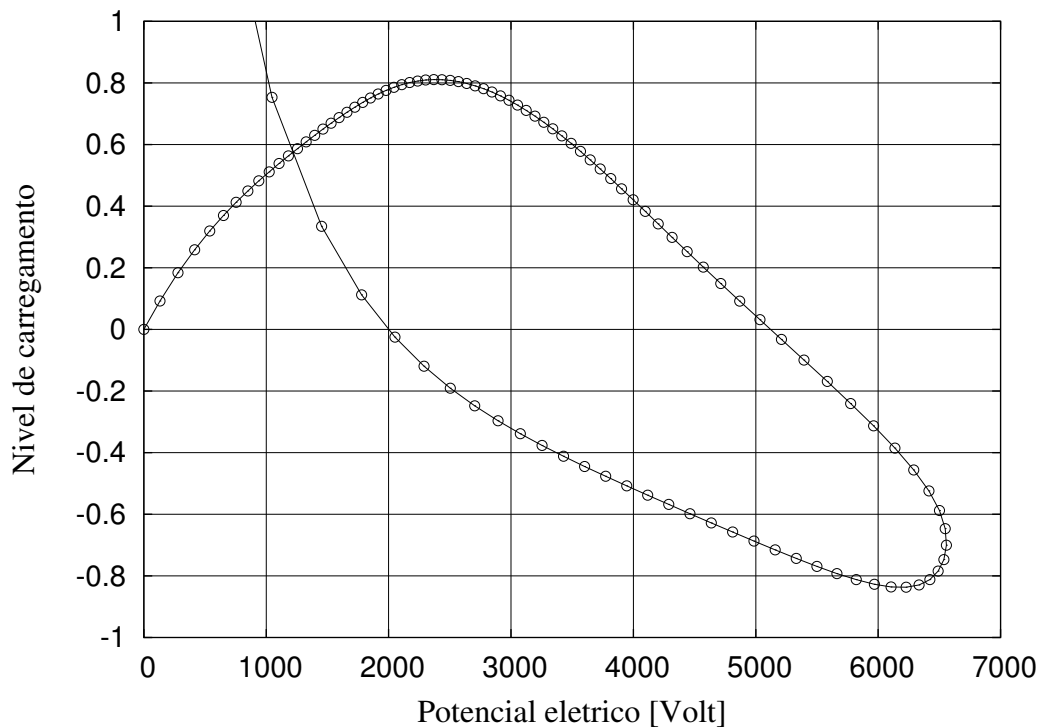


Figura 8.8: Diferença de pontecial no canto superior direito da pastilha piezelétrica.

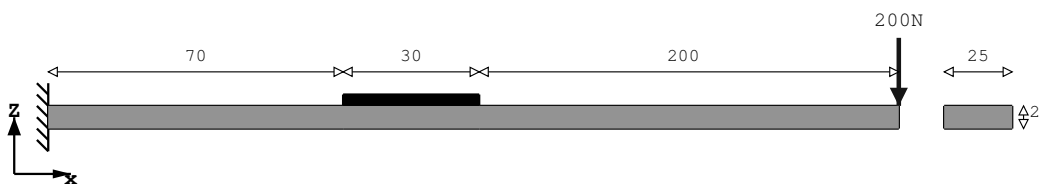


Figura 8.9: Viga longa sob flexão. Dimensões em *mm*.

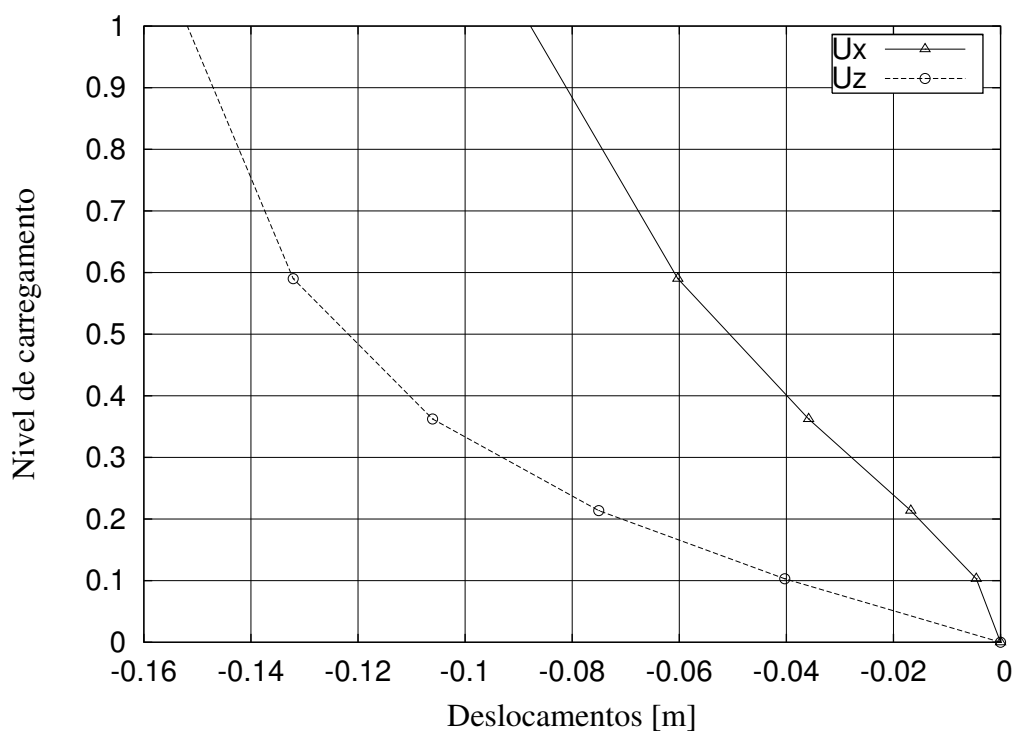


Figura 8.10: Deslocamentos verticais e horizontais no ponto de aplicação da força.

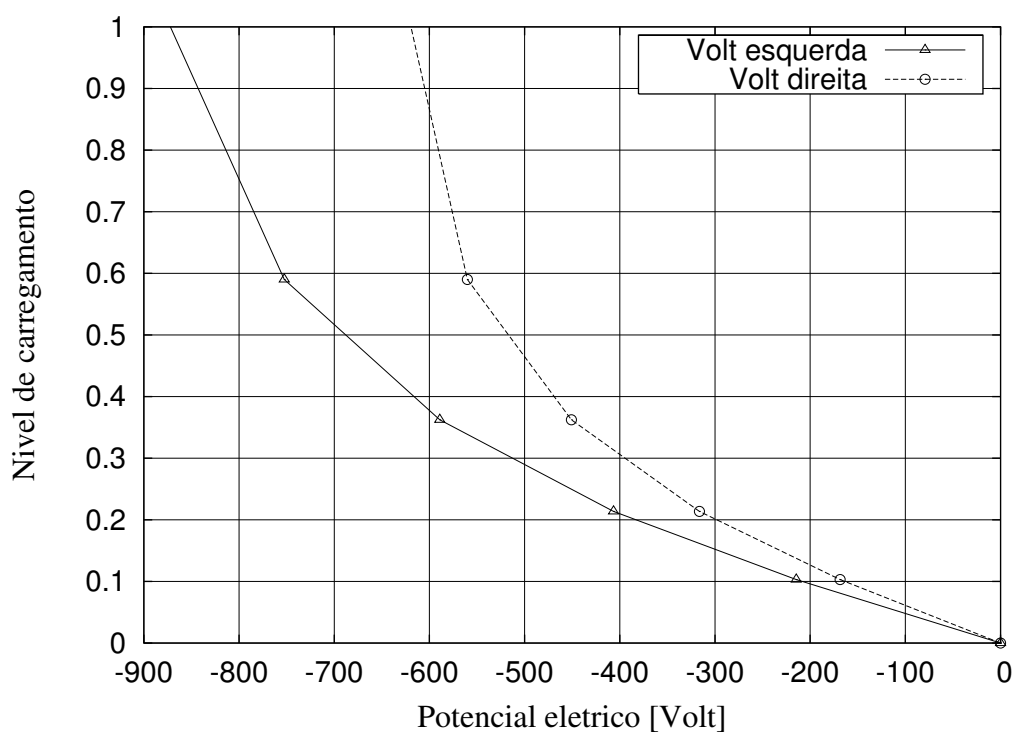


Figura 8.11: Potenciais elétricos obtidos nos cantos superior direito e superior esquerdo da pastilha piezelétrica.

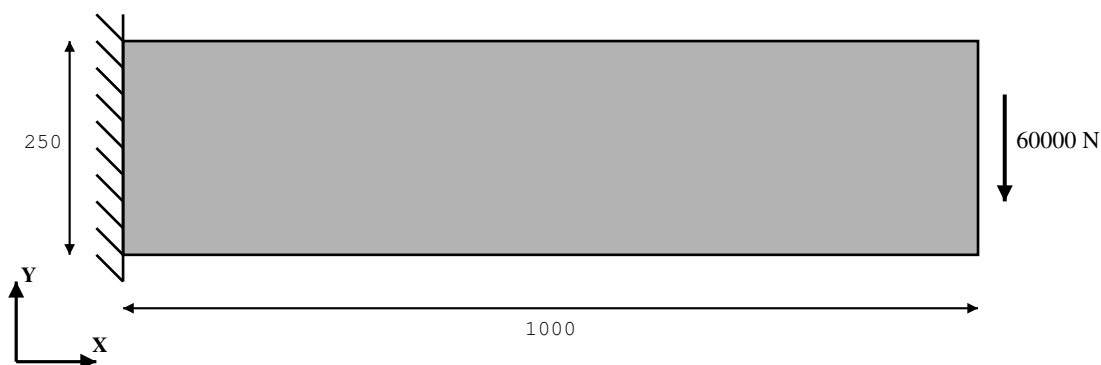


Figura 8.12: Viga submetida a grandes deslocamentos. Dimensões em *mm*.

topológica. Resultados semelhantes podem ser encontrados nas referências [Sigmund e Buhl, 2000; Bruns e Tortorelli, 2001]

O primeiro exemplo é o da viga submetida a uma força concentrada de valor elevado. O resultado linear é bem conhecido (Bendsøe e Sigmund, 2003), sendo simétrico em relação a linha neutra da viga. Quando consideramos os efeitos da não-linearidade geométrica, observamos que regiões submetidas a compressão apresentam um decréscimo de rigidez, enquanto regiões sob tração apresentam um aumento de rigidez. Isto faz com que o processo de otimização tenda a evitar regiões sob compressão, privilegiando regiões sob tração.

O domínio de projeto, Figura 8.12, é um retângulo de dimensões $1000 \times 250\text{mm}$, onde a hipótese de estado plano de tensões foi assumida. A espessura é de 100mm e foram utilizados $100 \times 25(2500)$ elementos bilineares isoparamétricos de 4 nós. O material tem como propriedades $E = 3 \times 10^9 \text{Pa}$ e $\nu = 0.4$, sendo assumido como elástico durante toda a simulação. A fração de volume utilizada foi de 50% e o carregamento consiste em uma força concentrada de magnitude $-60 \times 10^3 \text{N}$ aplicada na metade da face direita, sendo que a face esquerda foi totalmente engastada.

O otimizador utilizado foi o SLP, com limites móveis mínimos de 5% e máximo de 15%. A densidade mínima tem valor 1×10^{-3} e a máxima 1. A estratégia de solução foi iniciar o procedimento de otimização com a penalização constitutiva cúbica e com o filtro ativado (foi utilizado um raio de valor 0.012m , correspondendo a 4 vizinhos de aresta). Após a convergência desta etapa, o filtro foi desativado e uma imagem com uma pequena quantidade de cinzas foi obtida. A topologia obtida pode ser visualizada na figura 8.13, onde observa-se a perda de simetria.

Um segundo exemplo é o do projeto de uma coluna, Figura 8.14 consistindo em um domínio

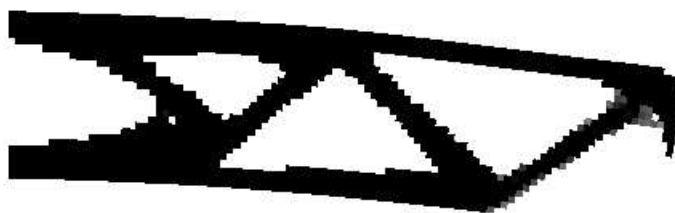


Figura 8.13: Topologia obtida para o problema da viga submetida a grandes deslocamentos.

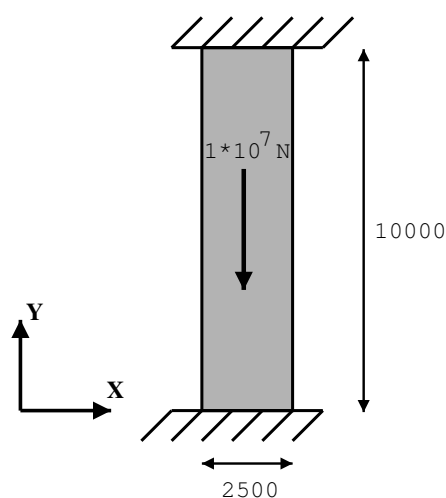


Figura 8.14: Coluna bi-engastada submetida a um carregamento de compressão. Dimensões em mm .

retangular de dimensões $2500 \times 10000mm$ com espessura de $100mm$. O carregamento aplicado é uma força concentrada de magnitude $-1 * 10^7 N$ e é assumido um estado plano de tensões. As faces superior e inferior são engastadas.

A fração de volume é de 19% e são utilizados 40×10 (400) elementos finitos bilineares isoparamétricos de 4 nós . A estratégia de solução consiste em iniciar o problema sem penalização do tensor constitutivo, sendo que após a convergência é utilizada uma penalização quadrática e, por fim, uma penalização cúbica. Se este procedimento não for utilizado, e iniciarmos com uma penalização cúbica, não é obtida a convergência no procedimento de solução não-linear, devida a baixa rigidez das regiões com densidades intermediárias sob penalização cúbica. Não foi utilizada filtragem neste exemplo e o otimizador utilizado foi o GMMA.

A flexibilidade final para o caso linear é de $1.724362 * 10^6 Nm$ e para o caso não-linear geométrico é $2.1644565 * 10^6 Nm$, e conforme pode ser observado na Figura 8.15, as topologias obtidas

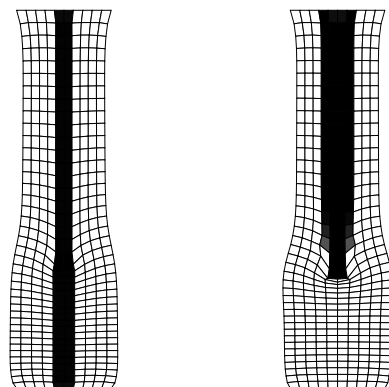


Figura 8.15: Topologias obtidas para o problema da coluna sob compressão. Solução para o problema linear (esquerda) e não-linear geométrico (direita) (Fator de amplificação dos deslocamentos de $10\times$ mas duas figuras) .

são bastante distintas. Na Figura 8.15, a topologia da esquerda corresponde ao problema linear, e uma coluna é obtida. Pode-se observar na mesma figura, que a topologia da direita, obtida para o caso não-linear geométrico, é diferente pois zonas em compressão tendem a ser descartadas por apresentarem um decréscimo de rigidez quando comparadas a regiões tracionadas.

8.3 Projeto de Atuadores Piezelétricos Considerando a Não-Linearidade Geométrica

Nesta seção, serão estudadas as características associadas a formulação proposta neste trabalho para o projeto de atuadores piezelétricos. Deve-se salientar que as possibilidades de projeto são muitas, mas somente algumas poucas configurações são comumente utilizadas, como por exemplo os atuadores flexitensionais, do tipo "Moonie", "Cymbal" e "Bridge". Devido a grande quantidade de estudos associados a estas configurações clássicas, foram selecionados como exemplos principais desta tese o projeto de um atuador flexitensional do tipo "Moonie" e de um atuador flexitensional do tipo "Bridge". Com isto, espera-se que o leitor tenha os subsídios necessários para comparações que julgar pertinentes. Em todos os exemplos foi utilizado o MMA, (GMMA com assíntotas idênticas para todas as funções envolvidas) para evitar problemas associados a determinação das assíntotas móveis, conforme descrito no Capítulo sobre

programação matemática.

Devido a necessidade de representar adequadamente os campos de deslocamento e de tensão, mesmo em reforços finos, foram utilizados elementos finitos quadrilaterais de 8 nós (*Serendipity*). Experiências realizadas com elementos bilineares e com o *Serendipity* mostraram que em alguns exemplos a perda de rigidez associada a zonas de compressão eram subestimadas no elemento de baixa ordem. Desta forma, a utilização de elementos de baixa ordem pode induzir a conclusões erradas sobre a importância da não-linearidade geométrica no projeto de mecanismos flexíveis atuados por materiais piezelétricos.

Em todos os exemplos a excitação elétrica considerada é a aplicação de uma diferença de potencial (voltagem). Isto é possível pois tanto o procedimento de solução das equações de equilíbrio quanto o procedimento de análise de sensibilidade foram modificados para permitir a aplicação de condições de contorno essenciais não-homogêneas. Deve-se salientar que a formulação de equilíbrio proposta neste trabalho não contempla não-linearidades materiais. Assim, o campo elétrico aplicado em cada cerâmica tem um valor limite (inicial) de $100V/mm$. No entanto, não existem restrições na formulação sobre a intensidade das tensões e dos deslocamentos elétricos.

Embora a formulação proposta permita considerar os elementos com material piezelétrico como variáveis de projeto, isto tem pouca aplicação prática com as geometrias e materiais considerados neste capítulo. Desta forma, as regiões piezelétricas serão mantidas fixas (as densidades dos elementos finitos nestas regiões tem valor unitário e não participam do problema de otimização). O material isotrópico a ser distribuído no domínio de projeto dos exemplos considerados nesta seção é o Cobre ($E = 110GPa$ e $\nu = 0.34$) e o material piezelétrico é o PZT-5 (Tabela 8.1).

Devido a consideração de não-linearidade, não é possível utilizar artifícios como discretização de apenas uma parcela da geometria, pois isto mascara os resultados. Desta forma, todo o domínio de projeto deve ser considerado no problema de equilíbrio, sendo que um procedimento de associação de variáveis de projeto deve ser utilizado para garantir a simetria da topologia, no problema de otimização (Apêndice D). Para simular corretamente a rigidez de regiões vazias (*void*), foi considerada uma densidade mínima de $1 * 10^{-4}$ em todos os exemplo e a penalização da relação constitutiva (*SIMP*) é cúbica. O Fator de escalonamento para a unidade de força é de $1 * 10^{10}$.

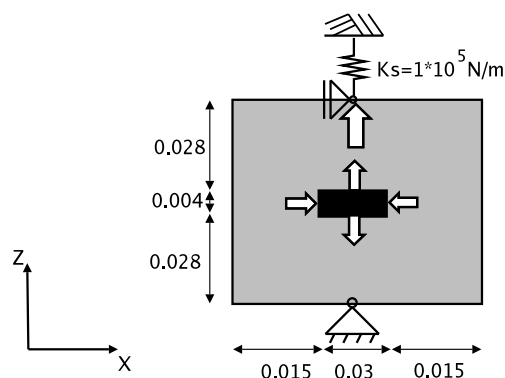


Figure 8.16: Projeto de um atuador Flexitensional

8.4 Projeto de Um Atuador Flexitensional do Tipo "Moonie"

Nesta seção serão estudadas algumas características da formulação proposta neste trabalho, visando o projeto de um atuador flexitensional do tipo "Moonie". O domínio de projeto considerado é apresentado na Figura 8.16, sendo discretizado com 60×60 (3600) elementos quadrilaterais de 8 nós (*Serendipity*), em estado plano de tensões, com uma espessura de 15mm . A cerâmica de PZT-5 (em preto) é polarizada para cima, estando submetida a uma diferença de potencial que gera um campo elétrico de $100\text{V}/\text{mm}$, gerando um padrão de atuação ilustrado na figura. Para ilustrar a utilização do procedimento de simetriação (Apêndice D), é imposta uma simetria de reflexão em X , o que diminui o tamanho do problema de otimização pela metade.

8.4.1 Estudo da Existência de Extremos Locais

Devido a natureza do problema de otimização considerado, espera-se a ocorrência de diversos extremos locais, que podem ser atingidos para diferentes combinações dos parâmetros do problema, como método de programação matemática, distribuição inicial das variáveis de projeto, fator de penalização da relação constitutiva e/ou uso de controle de gradiente. Este é um importante fator a ser considerado, uma vez que pode induzir a falsas conclusões sobre a importância da consideração da não-linearidade geométrica nos resultados obtidos.

Foi observado que o uso de filtro, por relacionar a variação individual de cada variável de projeto, pode evitar a parada prematura em pontos de extremo local. O objetivo desta seção é mostrar que este comportamento é facilmente observável na classe de problemas propostos. Para isto, será considerado o problema da Figura 8.16, com uma fração de volume de 20%.

Inicialmente, o problema foi solucionado sem filtragem. As topologias obtidas estão ilustradas

na Figura 8.17. Considerando o filtro espacial de pesos médios (Cardoso e Fonseca, 2003) sobre os limites móveis da programação seqüencial e utilizando apenas os vizinhos de aresta, foram obtidas as topologias da Figura 8.18. Pode-se observar que, em cada caso, as topologias obtidas considerando o procedimento linear e não-linear diferem apenas em detalhes muito sutis, sendo ambas não-simétricas em relação ao plano horizontal. A principal diferença entre as duas topologias é a presença de um reforço na articulação superior, que tem como objetivo aumentar a rigidez do mecanismo, necessária para atuar sobre o meio externo. Observa-se que o deslocamento do caso não-linear é maior do que o obtido com a consideração de linearidade (Tabela 8.2), pois o mecanismo está sob compressão, o que diminui a rigidez. É importante salientar que este comportamento ilustra que existem diferenças entre o procedimento linear e o não-linear, mesmo em um caso simples como o estudado. Do contrário, o resultado obtido deveria ser idêntico, uma vez que todos os parâmetros utilizados na solução foram iguais.

A utilização de filtragem levou a obtenção de topologias simétricas (Figura 8.18), com praticamente o mesmo deslocamento. A análise dos deslocamentos finais em cada caso permite concluir que os resultados sem filtragem são máximos locais, uma vez que seus deslocamentos são menores do que os obtidos com filtragem (Tabela 8.2). Deve-se salientar que os resultados obtidos com filtragem também devem ser máximos locais, uma vez que o problema é não-convexo, mas apresentam deslocamentos maiores do que os sem filtragem.

Em relação a influência da não-linearidade geométrica, observa-se no caso sem filtragem que as trajetórias de convergência do procedimento seqüencial de otimização, neste caso, são ligeiramente diferentes, convergindo prematuramente para valores distintos de deslocamento máximo. No caso da filtragem, embora as trajetórias também difiram ao longo do procedimento seqüencial, existe uma convergência para um valor mais próximo no final do procedimento de otimização. Isto se deve, provavelmente, ao fato de o filtro relacionar os valores de densidades de elementos contíguos, mascarando qualquer ligeira diferença no valor das derivadas do caso linear e do caso não-linear geométrico. De fato, para um problema como o considerado (onde os deslocamentos e forças envolvidos não são elevados), estas diferenças são muito sutis, sendo o efeito do filtro maior do que o efeito da não-linearidade geométrica.

8.4.2 Rigidez Externa Não-Linear

Uma das vantagens da utilização da formulação proposta neste trabalho é a possibilidade de simular um meio externo com comportamento não-linear. Para ilustrar este conceito, serão considerados dois exemplos. O primeiro consiste no projeto de um atuador "Moonie" (domínio de projeto ilustrado na Figura 8.16) que atua sobre um meio com rigidez que varia de forma linear



Figure 8.17: Topologias obtidas para o caso linear (esquerda) e não-linear (direita). Os resultados foram obtidos sem filtragem.



Figure 8.18: Topologias obtidas para o caso linear (esquerda) e não-linear (direita), considerando filtragem sobre os limites móveis.

Table 8.2: Valores de deslocamento máximo das topologias das Figuras 8.17 e 8.18, normalizados pelo valor correspondente ao caso com filtro, modelo linear.

	Linear	Não-Linear	Diferença entre o modelo linear e o não-linear
Com Filtro	1.00	0.997	0.3%
Sem Filtro	0.544	0.560	2.9%

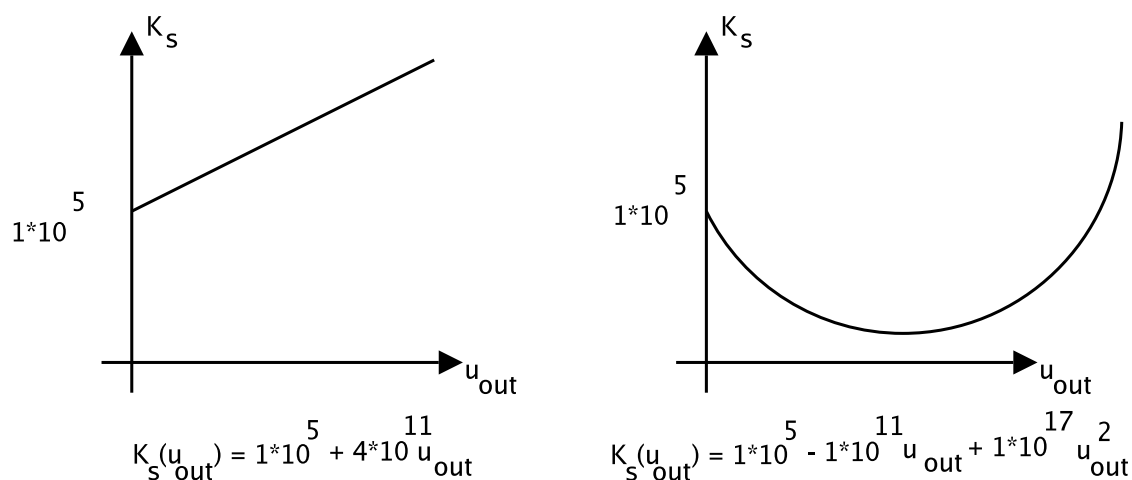


Figure 8.19: Formas de variação não-linear da rigidez do meio externo consideradas no projeto de um atuador tipo "Moonie". A equação linear tem forma $K_s(u_{out}) = 1 * 10^5 + 4 * 10^{11} u_{out}$ e a equação quadrática tem a forma $K_s(u_{out}) = 1 * 10^5 - 1 * 10^{11} u_{out} + 1 * 10^{17} u_{out}^2$

Table 8.3: Deslocamentos máximos obtidos com as topologias da Figura 8.20, normalizados pelo valor correspondente ao deslocamento obtido com o modelo linear.

Rigidez	Constante	Linear	Quadrática
Deslocamento	1.00	0.514	0.654

em relação ao deslocamento da porta de saída e o segundo de forma quadrática, de acordo com a Figura 8.19. O primeiro exemplo simula um comportamento de enrijecimento do meio externo, como ocorre em problemas de contato. O segundo, um meio externo com queda de rigidez nos primeiros instantes, com um aumento posterior de rigidez. A fração de volume considerada é de 20%.

Os resultados devem ser comparados com o transdutor obtido com filtragem e hipótese de linearidade, sendo que nos dois casos, a rigidez inicial é a mesma considerada anteriormente. A Figura 8.20 ilustra as 3 topologias obtidas e a Tabela 8.3 mostra os deslocamentos máximos obtidos em cada caso. O procedimento de otimização do atuador com rigidez não-linear é bastante interessante, podendo ser observado, via *GSP*, a variação da rigidez da estrutura ao longo do procedimento iterativo não-linear. Esta variação tem um comportamento compatível com a rigidez do meio externo, mostrando o quanto a topologia obtida é específica para as condições de contorno do problema.

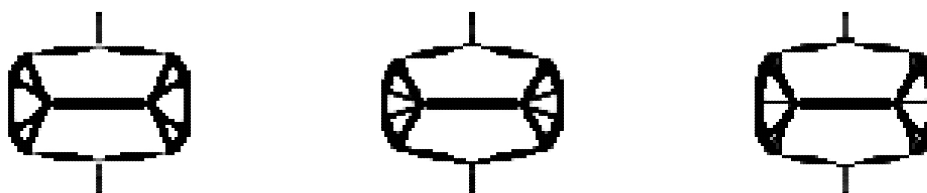


Figure 8.20: Topologias obtidas com consideração de meio externo com rigidez constante (esquerda), linear (centro) e quadrática (direita).

Fração de Volume (%)	Linear	Não-Linear	Diferença entre o modelo linear e o não-linear
15	1.00	0.99	0.17%
20	1.34	1.33	0.33%
30	1.36	1.36	0.32%

Table 8.4: Deslocamentos relativos as topologias da Figura 8.21, normalizados pelo valor correspondente a menor fração de volume, caso linear.

8.4.3 Influência da Fração de Volume

Um atuador flexível deve satisfazer um compromisso entre flexibilidade (para permitir o movimento de atuação) e rigidez (para permitir realizar esforços sobre o meio externo). Estes dois requisitos estão associados a topologia do atuador, propriedades dos materiais envolvidos e suas quantidades. Desta forma, espera-se que a restrição de volume tenha um impacto importante na topologia final e valores dos deslocamentos obtidos.

Para ilustrar esta dependência, o problema da Figura 8.16 foi solucionado, para uma rigidez externa de valor $1 * 10^5 N/m$ e com frações de volume de 15%, 20% e 30%. As topologias obtidas, para o caso linear e para o caso não-linear, estão ilustradas na Figura 8.21.

8.5 Projeto de um Atuador do Tipo Ponte

Um tipo de transdutor bastante utilizado é o atuador do tipo ponte ("bridge"). Neste tipo de atuador, o material ativo comprime uma região com flexibilidade localizada, obtendo uma amplificação significativa do deslocamento de saída. Para avaliar o impacto da não-linearidade

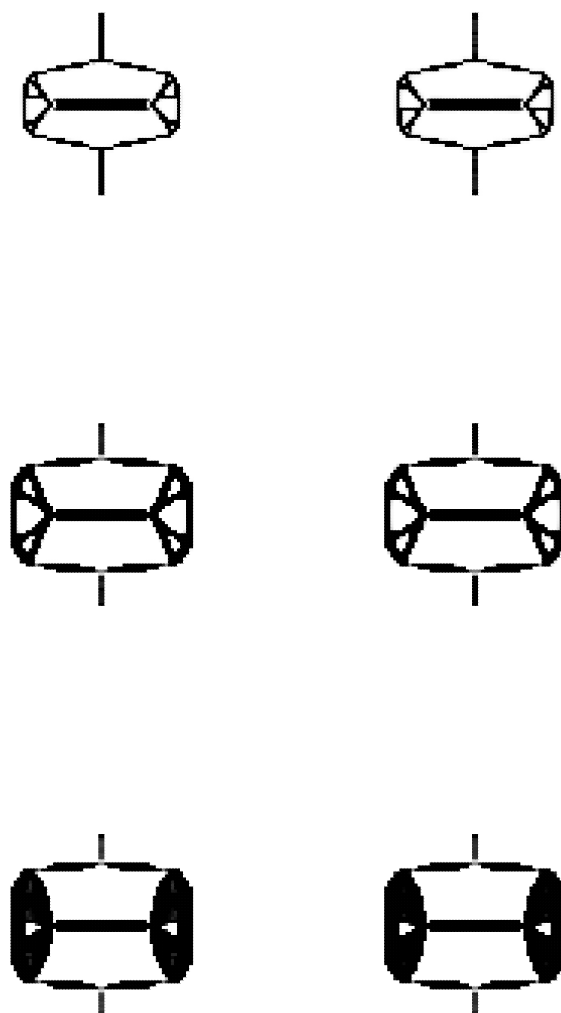


Figure 8.21: Topologias obtidas com rigidez externa constante ($K_s = 1 * 10^5 N/m$) e fração de volume de 15% (primeira linha), 20% (segunda linha) e 30% (terceira linha). A primeira coluna contém os resultados obtidos com formulação linear e a segunda coluna os resultados obtidos com a formulação não-linear.

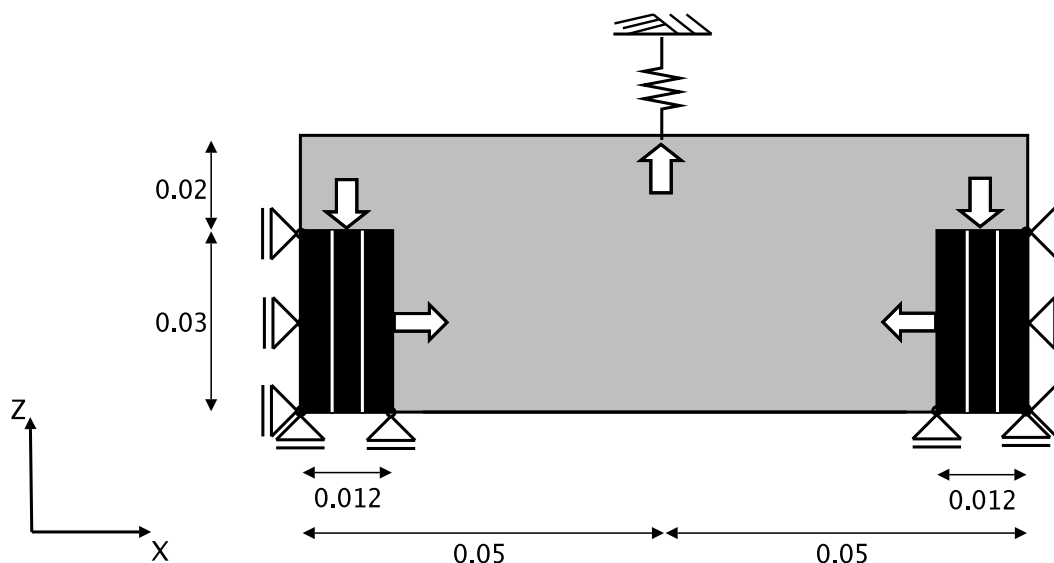


Figura 8.22: Domínio de projeto considerado na otimização de um atuador do tipo ponte (“bridge”). Dimensões em m .

geométrica no projeto otimizado de tais transdutores, é proposta a otimização topológica no domínio de projeto da Figura 8.22. A atuação é realizada por 6 cerâmicas de PZT-5 (Tabela 8.1), com padrão de atuação indicado na figura e voltagem de $400V$ em cada cerâmica (correspondendo a um campo elétrico de $100V/mm$). O domínio de projeto foi discretizado com 500 quadriláterais de 8 nós no comprimento e 100 na altura (5000) e foi utilizado filtro espacial de pesos médios, com raio de $1.1mm$, correspondendo a uma vizinhança de 4 vizinhos de aresta para cada elemento. A espessura do domínio de projeto é de $15mm$ e foi considerado o estado plano de tensões. O material isotrópico a ser distribuído no domínio de projeto é o Cobre ($E = 110GPa$ e $\nu = 0.34$) e o objetivo do atuador é impor um deslocamento de saída vertical contra a mola K_s que simula o meio externo.

A Figura 8.23 ilustra as topologias obtidas para uma fração de volume de 20% e diferentes valores de rigidez externa (constante). Da figura, e dos valores de deslocamento de saída correspondentes a cada uma das topologias obtidas, pode-se verificar que existem diferenças entre os mecanismos obtidos com o modelo linear e com o modelo não-linear (na Tabela 8.5 não constam os deslocamentos relativos a última linha da Figura 8.23, pois estes valores são muito menores do que os demais valores da tabela. No entanto, a diferença de deslocamento para este caso, comparando o modelo linear com o não-linear, foi de 0.6%). Embora as topologias não difiram drasticamente, existem diferenças de inclinação entre os membros horizontais que compõe

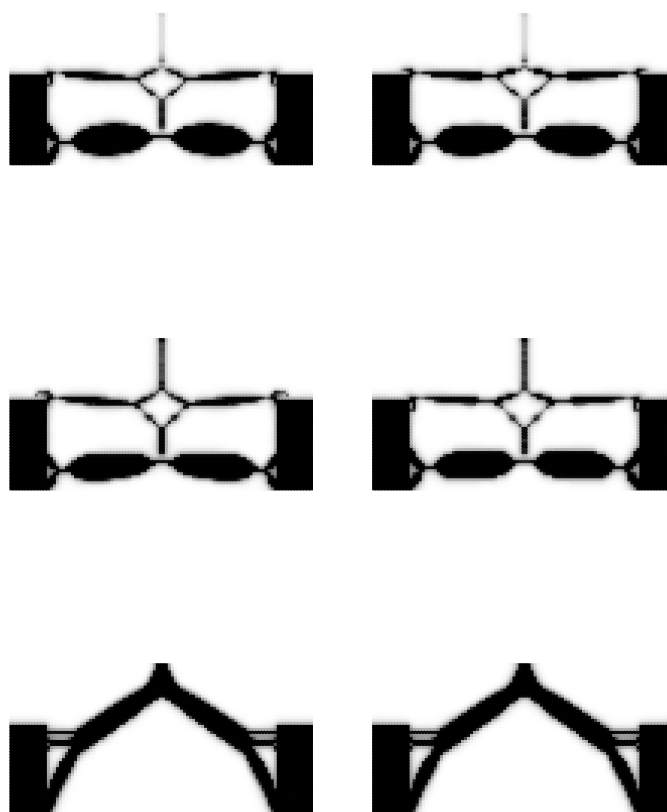


Figure 8.23: Topologias obtidas para o caso linear (coluna esquerda) e não-linear (coluna direita), para molas externas de rigidez constante $K_s = 1 * 10^2 N/m$ (primeira linha), $K_s = 1 * 10^5 N/m$ (segunda linha) e $K_s = 1 * 10^{10} N/m$ (terceira linha), todos com 20% de fração de volume.

a ponte inferior, sendo que esta diferença é mais clara para a rigidez externa de $1 * 10^5 N/m$. Em relação a ponte superior, existe uma diminuição gradual de espessura nos modelos lineares, com uma concentração de material na parte central nos modelos não-lineares.

Estudando o mesmo problema, mas considerando uma fração de volume de 10%, obtém-se as topologias da Figura 8.24. Da figura, observa-se a grande presença de elementos com densidade intermediária para o caso da rigidez externa de valor $1 * 10^2 N/m$. Estas regiões com densidade intermediária, conectando o mecanismo a porta de saída, ocorrem devido a uma inconsistência do modelo SIMP. Como o objetivo desta região é atuar sobre o meio externo, de baixa rigidez, não se faz necessária a utilização de densidade máxima. Isto fica claro se aproximarmos a rigidez desta região (com densidade de 0.5 e expoente de penalização de 3.0) por

Rigidez Externa (N/m)	Linear	Não-Linear	Diferença entre o modelo linear e o não-linear
$1 * 10^2$	1.00	1.03	3%
$1 * 10^5$	0.77	0.87	13%
$1 * 10^{10}$	—	—	0.6%

Table 8.5: Deslocamentos relativos as topologias das duas primeiras linhas da Figura 8.23, normalizados pelo valor da menor rigidez, caso linear.

Rigidez Externa (N/m)	Linear	Não-Linear	Diferença entre o modelo linear e o não-linear
$1 * 10^2$	1.00	0.97	2.88%
$1 * 10^5$	0.48	0.5	2.95%
$1 * 10^{10}$	—	—	2.4%

Table 8.6: Deslocamentos relativos as topologias das duas primeiras linhas da Figura 8.24, normalizados pelo valor da menor rigidez, caso linear.

$$K_{eq} = \frac{110 * 10^9 (0.5)^3 * (0.015)^2}{0.05} = 61.875 * 10^6 N/m$$

que corresponde a rigidez axial de uma barra de cobre de seção transversal $0.015m \times 0.015m$ e comprimento $0.02m$. Esta rigidez é maior do que a rigidez do meio externo, tornando a atuação possível. Isto demonstra que para baixos valores de rigidez externa e baixas frações de volume, regiões intermediárias tem função estrutural e podem ser utilizadas pelo otimizador. Isto, sem dúvida, corresponde a uma das deficiências do modelo SIMP.

Um resultado importante obtido com a fração de volume mais baixa pode ser visualizada na Figura 8.24, para uma rigidez de $1 * 10^5 N/m$. Os reforços verticais, submetidos a compressão, que surgem na topologia obtida com o modelo linear, são descartados no modelo não-linear. A Tabela 8.6 contém os deslocamentos obtidos em ambos os casos. Pode-se argumentar que estes reforços seriam descartados em uma posterior etapa de interpretação dos resultados, mas observa-se aqui que isto não é necessário quando os efeitos da não-linearidade são considerados.

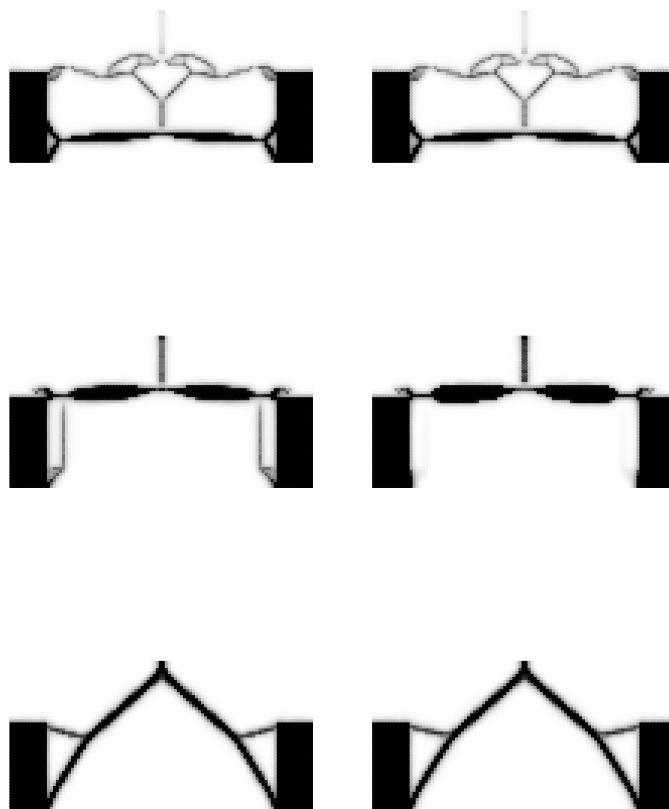


Figure 8.24: Topologias obtidas para o caso linear (coluna esquerda) e não-linear (coluna direita), para molas externas de rigidez constante $K_s = 1 \times 10^2 N/m$ (primeira linha), $K_s = 1 \times 10^5 N/m$ (segunda linha) e $K_s = 1 \times 10^{10} N/m$ (terceira linha), todos com 10% de fração de volume.

9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

9.1 Aspectos Conclusivos

Foi abordado o desenvolvimento de uma formulação para o projeto de transdutores piezelétricos, considerando os efeitos da não-linearidade geométrica. Para atingir o objetivo final do trabalho, foram propostas e desenvolvidas diversas etapas associadas ao projeto de transdutores piezelétricos utilizando a Otimização Topológica. Cada uma das etapas foi desenvolvida de forma detalhada e consistente.

Em relação a análise de estruturas elásticas/piezelétricas utilizando a formulação proposta neste trabalho, verificou-se que:

- o procedimento proposto (formulação de equilíbrio/escalonamento dos tensores constitutivos/procedimento de solução não-linear) é capaz de simular estruturas com comportamento não-linear bastante pronunciado, incluindo pontos limites;
- o procedimento proposto é suficientemente geral para ser utilizado em problemas com acoplamento piezelétrico bi e tridimensionais;
- o procedimento de escalonamento anteriormente proposto na literatura para equalizar a ordem de grandeza dos tensores constitutivos também permite equalizar a ordem de grandeza da restrição de arco, facilitando a consideração conjunta de graus de liberdade elétricos e mecânicos;
- o método dos Deslocamentos Generalizados pode ser interpretado como um método de restrição ortogonal, possibilitando assim a utilização de técnicas desenvolvidas para outros métodos da mesma classe. Esta generalização também possibilita uma implementação computacional unificada;

Em relação ao projeto de atuadores piezelétricos considerados neste trabalho, verificou-se que:

- o procedimento de análise de sensibilidade proposto para o problema acoplado é suficientemente geral para o projeto de atuadores e sensores piezelétricos, lineares e não-lineares, com ou sem condições de contorno essenciais não-homogêneas;

- mesmo em problemas com pequenas forças e pequenas dimensões, existe uma diferença na convergência do procedimento seqüencial de otimização de problemas lineares e não-lineares. Isto indica que a não-linearidade se manifesta mesmo em problemas onde geralmente não é considerada;
- a utilização de controle de gradiente (filtro) pode mascarar a diferença de topologia que existiria entre problemas lineares e não-lineares quando a magnitude das parcelas não-lineares é pequena;
- a consideração de um meio externo com comportamento não-linear tem um impacto significativo nos resultados obtidos. Isto indica que análises não-lineares são úteis no estudo da sensibilidade da topologia (e do projeto do transdutor) em relação as características do meio externo. Isto não é possível em uma análise linear;
- regiões sob compressão tendem a apresentar uma menor rigidez quando comparadas a regiões tracionadas. Isto faz com que, em algumas circunstâncias, as topologias e os valores finais de deslocamentos sejam diferentes quando são consideradas as influências da não-linearidade. Nos exemplos considerados, este foi o principal mecanismo responsável por alterações de valores de deslocamento e de topologia, uma vez que a magnitude dos deslocamentos e rotações de corpo rígido são pequenas;
- provavelmente os resultados obtidos em mecanismos totalmente flexíveis distribuídos sejam mais sensíveis a não-linearidade geométrica, uma vez que os resultados obtidos aqui tem flexibilidade concentrada em rótulas. Isto faz com que as partes móveis dos mecanismos obtidos tendam a ser rígidas, diminuindo assim a influência da não-linearidade geométrica;

Baseado nestes fatos, conclui-se que a inclusão de efeitos da não-linearidade geométrica no projeto de transdutores piezelétricos deve ser considerada, pois existem evidências de que os resultados obtidos com o modelo linear, utilizado até então, diferem dos obtidos com a consideração da não-linearidade. Embora nos exemplos considerados esta influência seja pequena, pode-se observar uma tendência de aumento de influência para valores intermediários de rigidez do meio externo e pequenas frações de volume. Isto deve ao fato de que em pequenos valores de rigidez e fração de volume elevada não ocorre compressão significativa nas partes flexíveis. Como os deslocamentos não são significativos, as diferenças entre os modelos lineares e não-lineares são, também, pequenas. Para valores intermediários de rigidez e pequenas frações de volume, observa-se que as mudanças de topologia são mais significativas, indicando que o

mecanismo descrito acima é o responsável pelas diferenças observadas. Por fim, para valores elevados da rigidez externa e grandes frações de volume, obtemos basicamente um projeto de maior rigidez, onde o comportamento é basicamente linear.

Quando a rigidez do meio externo é função do estado da estrutura (deslocamento de saída), então somente o modelo não-linear é capaz de descrever corretamente as mudanças de topologia e de comportamento observadas.

9.2 Sugestão para trabalhos futuros

Tanto o procedimento de análise de equilíbrio, análise de sensibilidade e solução do problema de otimização abordados neste trabalho são suficientemente gerais para contemplar o projeto de atuadores e/ou sensores. No entanto, foram abordados somente problemas associados ao projeto de atuadores. Desta forma, uma continuação natural do presente trabalho seria utilizar a formulação para o projeto de sensores eletro-mecânicos baseados no fenômeno da piezeletricidade.

Os resultados obtidos com meio externo não-linear ilustram a sensibilidade dos resultados às características do meio externo. Desta forma, seria natural considerar o problema de contato de forma consistente, discretizando tanto a região de projeto quanto o meio externo.

Em problemas com grandes deformações pode ocorrer distorção excessiva da malha, prejudicando o procedimento de análise de equilíbrio e, conseqüentemente, todo o procedimento de otimização. Neste caso, um procedimento de remalhamento seria desejável.

As topologias obtidas contém rótulas, pois nenhum procedimento de controle foi utilizado. Uma solução seria a utilização de uma formulação alternativa (Cardoso e Fonseca, 2004) ou de métodos de restrição (Poulsen, 2002) aplicadas ao problema não-linear. Conforme apresentado anteriormente, caso seja utilizado um procedimento de eliminação de rótulas, deve-se observar uma aumento na importância dos efeitos da não-linearidade geométrica.

Por fim, um acréscimo importante à formulação proposta neste trabalho seria a consideração da não-linearidade material das regiões piezelétricas. Sabe-se que para campos elétricos / tensões elevadas, a relação constitutiva é não-linear e este aspecto aparenta ser mais significativo do que a não-linearidade geométrica em atuadores tradicionais.

BIBLIOGRAFIA

Algueró M., Cheng B., L., Guiu F., Reece M., J., Poole M., Alford N., 2001, "Degradation of the d_{33} Piezoelectric Coefficient for PZT Ceramics under Static and Cyclic Compressive Loading", **Journal of European Ceramic Society**, Vol. 21, pp. 1437-1440.

Allaire G., Henrot, A., 2001, "On some recent advances in shape optimization", **C. R. Acad. Sci. Paris**, t. 329, Série IIb, pp. 383-396.

Ambrosio, L., Buttazzo, G., 1993, An optimal design Problem with Perimeter Penalization, **Calc. Var.**, 1, pp. 55-69.

Ananthasuresh G.K., Kota S., Gianchandrini K., 1994, **A methodological approach to the synthesis of micro-compliant mechanisms**, Technical digest: Solid-state sensor and actuator workshop , Hilton Head Island, SC, pp. 189-192.

Atkin R., J., Fox N., 1980, **An Introduction to the Theory of Elasticity**. Longman Mathematical Texts, New York.

Arora J.S, 1989, **Introduction to Optimum Design**, McGraw-Hill, New York.

Bathe K.Y, 1996, **Finite Element Procedures**, Springer Verlag.

Batoz J., L., Dhatt G., 1979, "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 14, pp. 1262-1267.

Bazaraa M. S., Shetty C. M., **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**, John Wiley & Sons, New York.

Beckers, M, 1997, **Optimisation de Structures en Variables Discrettes**, Universite de Liege, Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées No 181.

Belegundu, A., D., Arora, J., S., 1985a, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part I: Theory", **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 21, pp. 1583-1599.

Belegundu, A., D., Arora, J., S., 1985b, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part II: Numerical Results", **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 21, pp. 1601-1623.

Belegundu A.D., Arora J.S., 1985c, "A Sensitivity Interpretation of Adjoint Variables in Optimal Design", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 48, pp.81-89.

Bendsøe, M., P., Kikuchi N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using Homogenization Method", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 71, No. 2, pp.197-224.

Bendsøe, M., P., 1989, "Optimal shape design as a material distribution problem", **Struct. Optim.**, Vol. 1, pp. 193-202.

Bendsøe, M., P., 1995, **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**, Springer-Verlag, New York.

Bendsøe M.P, Sigmund O, 1999, Material Interpolation Schemes in Topology Optimization, **Archive of Applied Mechanics**, 69, pp. 635-654.

Bendsøe, M., P. e Sigmund, O., 2003, **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**, Springer-Verlag, New York.

Bhul, T., Clauss, B.W.P., Sigmund, O., 2000, "Stiffness Design of Geometrically non-linear Structures Using Topology Optimization", **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Vol. 19, No. 2, pp. 93-104.

Brown R. H, 1990, "Piezo Film: Form and Function", **Sensor and Actuators**, Vol. A21-A23, pp. 729-733.

Bruns, T.E, Tortorelli, D.A, 2001, "Topology Optimization of Non-Linear Elastic Structures and Compliant Mechanisms", **Computer Methods and Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 150, pp. 3443-3453.

Bruns, T.E, Sigmund. O, 2004, "Toward the topology design of mechanisms that exhibit snap-through behavior", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Vol. 193, pp. 3973-4000

Bruyneel M., Duysinx P., Fleury C., 2002, "A family of MMA approximations for structural optimization", **Struct Multidisc. Optim.**, Vol 24, pp. 263-276.

Busch-Vishniac I., J, 1998, **Eletromechanical Sensors and Actuators**, Springer, Berlin.

Cardoso, E., L., Fonseca, J., S., O., 1999, "Spatial Gradient Control in the Structural Topology Optimization", **First ASMO UK/ISSMO Conference on Engineering Design Optimization**, Ilkley, West Yorkshire, UK.

Cardoso, E., L., 2000, **Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**, Dissertação de Mestrado - PROMEC-UFRGS.

Cardoso, E., L., Fonseca J., S., O., 2003, "Complexity control in the Topology Optimization of continuum structures", **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Vol. XXV, No. 3, pp. 293-301.

Cardoso, E., L., Fonseca J., S., O., 2004a, "An incremental Lagrangian formulation to the analysis of piezoelectric bodies subjected to geometric non-linearities", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 57, No. 7, pp. 895-1020.

Cardoso, E., L., Fonseca J., S., O., 2004b, "Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization", **Latin American Journal of Solids and Structures**, No. 3 (1), pp. 263-276.

Cardoso J.B., Arora J.S., 1991, "Shape Design Sensitivity Analysis of Field Problems", **International Journal of Engineering Science**, Vol. 29, No. 12, pp. 1627-1637.

Cheng B-C, Silva E., C., N., Kikuchi N., 2001, "Advances in Computational Design and Optimization with Application to MEMS", **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 52, No. 1-2, pp. 23-62.

Cheng G., 1992, **Introduction to Structural Optimization - Theory, Methods and Solutions**, Lecture Notes, Technical University of Denmark.

Cheng G., Guo, X., 1997, " ϵ -relaxed approach in structural topology optimization", **Struct. Optim.**, Vol. 13, pp. 258-266.

Cheng K.T, 1981, "On Non-Smoothness in Optimal Design of Solid, Elastic Plates", **Int. J. Solids Structures**, Vol. 17, pp. 795-810.

Cheng K.T, Olhoff, N., 1982, "Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates", **Int. J. Solid Structures**, Vol. 18, No. 2, pp. 153-169.

Cheng Z-Y, Bharti V., Xu T-B, Xu H., Mai T., Zhang Q., M., 2001, "Electrostrictive Poly(Vinylidene Fluoride-Trifluoroethylene) Copolymers", **Sensors and Actuators**, Vol. A90, pp. 138-147.

Cherkaev, A., Gibiansky, L., 1993, "Coupled estimates for the bulk and shear moduli of a two-dimensional isotropic elastic composite", **J. Mech. Phys. Solids**, Vol. 41 (5), pp. 937-980,

Cho S., Jung H-S, 2003, "Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Displacement-Loaded Non-Linear Structures", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 192, pp. 2539-2553.

Cox, H., L., 1956, **The Design of Structures of Least Weight**, Pergamon, London.

Crisfield, M., A., 1991, **Non-linear finite element Analysis of Solid and Structures**, Volume 1, John Wiley & Sons, New York.

Crisfield, M., A., 1997, **Non-linear finite element Analysis of Solid and Structures**, Volume 2, Jhon Wiley & Sons, New York.

Damjanovic D., 1998a, "Ferroelectric, Dielectric and Piezoelectric of Ferroelectric Thin Films and Ceramics", **Rep. Prog. Phys**, Vol. 61, pp. 1267-1324.

Damjanovic D., 1998b, "Materials for High Temperature Piezoelectric Transducers", **Current Opinion in Solid State and Material Science**, Vol. 3, pp. 469-473.

Damjanovic D., 2001, "Piezoelectric Properties of Perovskite Ferroelectrics: Unsolved Problems and Future Research", **Ann. Chim. Sci. Mat**, Vol. 26, pp. 99-106.

De Lima C. R., 2002, **Projeto de mecanismos flexíveis usando o método da Otimização Topológica**, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Dems K., Mróz Z., 1983, "Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis - I", **International Journal of Solids and Structures**, 20, Vol. 19, No. 8, pp. 677-692.

Dixon J. R., 1975, **Thermodynamics 1: an introduction to energy**, Prentice-all, New Jersey.

Díaz, A., Sigmund, O., 1995, "Checkerboard Patterns in Layout Optimization", **Struct. Optim.**, Vol. 10, No. 1, pp. 40-45.

Dobrucki A.B, Pruchincki P, 1997, "Theory of Piezoelectric Axisymmetric Bimorph", **Sensors and Actuators A**, 58, pp. 203-212.

Dorn, W., S., Gomory, R., E., Greenberg, H., J., 1964, "Automatic Design of Optimal Structures", **J. Mec.**, Vol. 3, pp. 25-52.

Duysinx, P., 2000, Comunicação pessoal, Junho.

Duysinx, P., Bendsøe, M., P., 1998, "Topology Optimization of Continuum Structures With Local Stress Constraints", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 43, pp. 1453-1478.

Duysinx P, Bruyneell M, Fleury C, 2000, **Solution of topology optimization problems with sequential convex programming**, Institute of Mechanical and Civil Engineering, University of Liege.

Duysinx P., Zhang W-H., Nguyen V., H., Haubridge S., Fleury C., 2000, **A fast estimation procedure of diagonal second order terms in structural approximations**, Relatorio interno, University of Liège.

Fancello E. A., Pereira J. T., 2003, "Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions", **Latin American Journal of Solids and Structures**, Vol. 1, No. 1, pp. 3-24.

Fafard M., Massicotte B., 1993, "Geometrical Interpretation of the Arc-Length Method", **Computers & Structures**, Vol. 46, pp. 603-615.

Feng Y., T., Owen D., R., J., Peric D., 1997, "On the Sign of the Determinant of the Structural Stiffness Matrix for Determination of Loading Increment in Arc-Length Algorithms", **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Vol. 13, pp. 47-49.

Fernandes, P., R., A., 1992, **Otimização de Topologia em Estruturas Lineares e Elásticas Sujeitas a Solicitações Térmicas**, Dissertação de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa.

Fleury, C., 1979, "A unified Approach to Structural Weight Optimization", **Computer Method in Applied Mechanics**, Vol. 20, No. 1, pp. 17-38.

Fleury C, 2000, **Dual methods for convex separable problems**, Aerospace Laboratory, University of Liege.

Fuji F., Ramm E., 1997, "Computational Bifurcation Theory: Path-Tracing, Pinpointing and Path-Switching", **Engineering Structures**, Vol. 19, No. 5, pp. 385-392.

Fujii, D., Kikuchi, N., 2000, "Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method", **Struct. Multidisc. Optim.**, Vol. 19, pp. 113-121.

Gea H. C, Luo J, 2001, "Topology Optimization of Structures with Geometrical Nonlinearities", **Computers and Structures**, 79, pp. 1977-1985.

Gibiansky L., V., Torquato S., 1997, "On the Use of Homogenization Theory to Design Optimal Piezocomposites for Hydriphone Applications", **J. Mech. Phys. Solids**, Vol. 45, No. 5, pp. 689-708.

Gong X. , Suo Z., 1996, "Reliability of Ceramic Multilayer Actuators: A Nonlinear Finite Element Simulation", **J. Mech. Phys. Solids**, Vol. 44, No. 5, pp. 751-769.

Guedes, J., M., Taylor, J., E., 1997, "On the prediction of material properties and topology for optimal continuum structures", **Struct. Optim.**, Vol. 14, pp. 193-199.

Glazounov A. E, Ahang Q. M, Kim C, 2000, Torsional Actuator Based on Mechanically Amplified Shear Piezoelectric Response, *Sensors and Actuators*, 79, pp. 22-30.

Haber, R., B., Bendsoe, M., P., Jog, C., 1996, "A New Approach to Variable-Topology Shape Design Using a Constraint on the Perimeter", **Struct. Opt.**, Vol. 11. pp. 1-12.

Haftka e Gürdal, 1996, **Elements of Structural Optimization**, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Hanson, R. J., Hirbert, K., L., 1981, "A sparse Linear Programming Subprogram", **Report SAND81-0297**, Sandia National Laboratories.

Hao T., H., Gong X., Suo Z., 1996, "Fracture Mechanics for the Design of Ceramic Multilayer Actuators", **J. Mech. Phys. Solids**, Vol. 44, No. 1, pp. 23-48.

Hassani, B., Hinton, E., 1998a, "A Review of Homogenization and Topology I - Homogenization Theory for Media With Periodic Structure", **Computer and Structures**, Vol. 69, pp.

707-717.

Hassani, B., Hinton, E., 1998b, "A Review of Homogenization and Topology II- Analytical and Numerical Solution of Homogenization Equations", **Computer and Structures**, Vol. 69, pp. 719-738.

Hassani, B., Hinton, E., 1998c, "A Review of Homogenization and Topology III- Topology Optimization Using Optimal Criteria", **Computer and Structures**, Vol. 69, pp. 739-756.

Haug E.J., Choi K.K., Komkov V., 1986, **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems**, Academic Press inc, Orlando, Florida.

Hellweg, H-B, Crisfield, M., A., 1998, "A new Arc-Length method for handling sharp snap-backs", **Computers & Structures**, Vol. 66, No. 5, pp. 705-709.

Hemp, W., S., 1973, **Optimum Structures**, Clarendon, Oxford.

Hu M., Du H., Ling S-F, Teo J-K, 2001, "A Piezoelectric Spherical Motor With Two Degree-of-Freedom", **Sensors and Actuators**, A94, pp. 113-116.

Ikeda T., 1996, **Fundamentals of Piezoelectricity**, Oxford University Press, Oxford.

Janiczek T., 2001, "Analysis of PVDF transducer signals stimulated by mechanical tension", **Journal of Electrostatics**, Vol. 51-52, pp. 167-172.

Jog, C., S., Haber, R. B., Bendsøe, M., P., 1994, "Topology design with optimized self-adaptive materials", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol, 37, pp. 1323-1350.

Jog, C., Haber, R., B., 1996, "Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 130, pp. 203-226.

Kagawa Y., Tsuchiya T., Kataoka T., Yamabuchi T., Furukawa T., 1996, "Finite element si-

mulation of dynamic responses of piezoelectric actuators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, No. 4, pp. 519-538.

Kamlah M., Tsakmakis, C., 1999, "Phenomenological Modeling of the Non-Linear Electro-Mechanical Coupling in Ferroelectrics", ***International Journal of Solids and Structures***, Vol. 36, pp. 669-695.

Karush, W., 1939, ***Minima of functions of several variables with inequality and side constraints***, Tese de mestrado, Univ. of Chicago.

Kawai H., 1969, "The Piezoelectricity of Poly(vinylidene Fluoride)", *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 8, No. 975.

Kazuta S., Cho Y., Odagawa H., 2001, "Determination of Cristal Polarities of Piezoelectric Thin Film Using Scanning Nonlinear Dielectric Microscopy", ***Journal of the European Ceramic***, Vol. 21, pp. 1581-1584.

Kegl, M; Oblak M.M, 1997, "Optimization of mechanical systems: on the non-linear first-order approximation with an additive convex term", ***Communications in Numerical Methods in Engineering***, Vol. 13, pp. 13-20.

Kessler H., Balke H., 2001, "On the Local and Average Energy Release in Polarization Switching Phenonema", ***J. Mech. Phys. Solids***, Vol. 49, No. 5, pp. 953-978.

Kirsch U, 1990, "On singular topologies in optimum structural design", ***Structural Optimization***, Vol. 2, pp. 133-142.

Kleiber M., 1989, ***Incremental Finite Element Modeling in Non-Linear Solid Mechanics***. Ellis Horwood.

Kohn, R., V., Strang, G., 1986a, " Optimal Design and Relaxation of Variational Problems, I", ***Comm. on Pure an Appl. Math***, Vol. XXXIX, pp. 113-137.

Kohn, R., V., Strang, G., 1986b, " Optimal Design and Relaxation of Variational Problems,

II", **Comm. on Pure and Appl. Math**, Vol. XXXIX, pp. 139-182.

Kohn, R., V., Strang, G., 1986c, "Optimal Design and Relaxation of Variational Problems, III", **Comm. on Pure and Appl. Math**, Vol. XXXIX, pp. 353-377.

Kuhn, H., W., Tucker, A., W., 1951, "Nonlinear Programming", **Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**, University of California Press, Berkeley, California, pp. 481-492.

Langthjem K., A., Sugiyama Y., 1999, "Optimum Shape Design Against Flutter of a Cantilevered Column With an End-Mass of Finite Size Subjected to a Non-Conservative Load", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 226, No. 1, pp. 1-23.

Lasdon L. S., 2002, **Optimization Theory for Large Systems**, Dover Publications, INC., Mineola.

Lau G.K., Du H., Lim K.K., 2001, "Convex analysis for topology optimization of compliant mechanisms", *Struct. Multidisc. Optim.*, 22, pp. 284-294.

Lee S., L., Manuel F., S., Rossow E., C., 1968, "Large Deflections and Stability of Elastic Frames", **ASCE Journal of Engineering Mechanics**, 94, pp. 521-533.

Lerch R., 1990, "Simulation of Piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements", **IEEE Transactions on Ultrasonic Ferroelectrics and Frequency Control**, Vol. 37, No. 2.

Lines M., E., Glass A., M., 2001, **Principles and Applications of Ferroelectrics and Related Materials**, Clarendon Press, Oxford.

Lopez S., 2001, Geometrically Nonlinear Analysis of Plates and Cylindrical Shells by a Predictor-Corrector Method, **Computers & Structures**, 79, pp. 1405-1415.

Lu W., Fang D.-N., Li C., Q., Hwang K.-C., 1999, "Nonlinear Electric-Mechanical Behavi-

our and Micromechanics Modelling of Ferroelectric Domain Evolution”, **Acta Mater.**, Vol. 47, No. 10, pp. 2913-2916.

Luemberger, D., G., 1968, **Optimization by Vector Space Methods**, John Willey & Sons, Nova York.

Lurie, K., A., Cherkaev, A., V., Fedorov, A., V., 1982a, "Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates I", **J. Opt. Th. Appl.**, 37, pp. 499-522.

Lurie, K., A., Cherkaev, A., V., Fedorov, A., V., 1982b, "Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates II", **J. Opt. Th. Appl.**, 37, pp. 523-543.

Magnusson A., Svensson I., 1998, "Numerical Treatment of Complete Load-Deflection Curves", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 41, pp. 955-971.

May, I., M., Duan, Y., 1997, "A Local Arc-Length procedure for strain softening", **Computers & Structures**, Vol. 64, No. 1-4, pp. 297-303.

Meyer Jr R.J., Dogan A., Yoon C, Pilgrim S.M, Newnham R.E, 2001, "Displacement Amplification of Electroactive Materials Using the Cymbal Flexional Transducer", **Sensors and Actuators**, A87, pp. 157-162.

Michell, A.G.M, 1904, "The Limits of Economy in Frame Structures", **Phil. Mag.**, Vol. 8(47), pp. 589-597.

Mukherjee A., Saha Chaudhuri A., 2002, "Piezolaminated beams with large deformations", **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 39, pp. 4567-4582.

Mulling J, Usher T, Dessent B, Palmer J, Franzon P, Grant E, Kingon A, 2001, "Load characterization of high displacement piezoelectric actuators with various end conditions", **Sensors and Actuators**, A94, pp. 19-24.

Murat, F., Tartar, L., 1985, "Calcul des Variations et Homogénéisation", **Les Méthodes de l'Homogénéisation: Théorie et Applications en Physique**, Coll. de la Di. des Etudes et Re-

cherches de Elec. de France, Eyrolles, Paris, pp. 319-370.

Naillon M., Coursant R., H., Besnier F., 1983, "Analysis of piezoelectric structures by a finite element method", **Acta Electronica**, Vol. 25, pp. 341-362.

Neves, M. A. Lopes de Matos, 2001, **Modelos Materiais em Optimização Topológica de Estruturas com Critérios de Carga Crítica**, Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior Técnico.

Niezrecki C., Brei D., Balakrishnan S., Moskalil A., 2001, "Piezoelectric Actuation: State of the Art", **The Shock and Vibration Digest**, Vol. 33, No. 4, pp. 269-280.

Niordson, F. I., 1983, "Optimal Design of Plates with a Constraint on the Slope of the Thickness Function", **Int. J. Solids Structures**, Vol. 19, pp. 141-151.

Nishiwaki, S., Frecker, M., Min, S.J., and Kikuchi, N., 1998a, Topology Optimization of Compliant Mechanisms Using the Homogenization Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, pp.535-559.

Nishiwaki, S., Silva, E.C.N., Sekiguchi, M., and Kikuchi, N., 1998b, Structural Optimization Considering Flexibility: Development of Actuator Using Piezoelectric Materials, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 64, No. 626 Series C, pp.3743-3751.

Nishiwaki, S, Min S, Yoo J, Kikuchi N, 2001, Optimal Structural Design Considering Flexibility, *Comput. Methods Appl. Mech, Engrg*, 190, pp. 4457-4505.

Ogden R. W., 1997, *Non-linear elastic deformations*, Dover Publications, INC., Mineola.

Owen, J., B., B., 1975, **The Analysis and Design of Light Structures**, Edward Arnold, London.

Pai P., F., Palazoto A., N., Greer Jr. J., M., 1998, "Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analysis" , *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 6, pp. 823-840.

Park, Y., K., 1995, **Extensions of Optimal Layout Design Using the Homogenization Method**, Tese de Doutorado, University of Michigan.

Petersson, J., Sigmund, O., 1998, "Slope constrained Topology Optimization", **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 41, pp. 1171-1194.

Poosanaas P., Tonooka K., Uchino K., 2000, "Photostrictive Actuators", **Mechatronics**, Vol. 10, pp. 467-487.

Poulsen, T., A., 2002, "A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization", **Struct. Multidisc. Optim.**, Vol. 24, pp. 396-399.

Prager, W., 1974, "A Note on Discretized Michell Structures", **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, Vol. 3, pp. 349-355.

Prager, W, Rozvany, G.I.N, 1977, **Optimization of structural geometry**, Dynamical Systems, Academic Press, NewYork, pp. 265-293.

Prager, W., Shield, R., T., 1967, "A General Theory of Optimal Plastic Design", **J. Appl. Mech.**, Vol. 34, pp. 184-186.

Prager, W., Taylor, J., E., 1968, "Problems of Optimal Structural Design", **J. Applied Mech.**, 35, pp. 102-106

Qi H., Fang D., Yao Z., 1997, "FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials", **Computational Materials Science**, Vol. 8, pp. 281-290.

Querin O., M., Steven, G., P., Xie, Y., M., 1998, "Evolutionary structural optimization (ESO) using bidirectional algorithm", **Eng. Com.**, Vol. 15, pp. 1031-1048.

Ragon S., A., Gürdal Z., Watson L., T., 2002, "A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems" , **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 39, pp. 689-698.

Rajapakse R., K., N., 1997, "Plane Strain/Stress Solutions for Piezoelectric Solids", **Composites Part B**, Vol. 28B, pp. 385-396.

Ratium, U., E., 1979, "On Optimal Control Problems for Linear Elliptic Equations", **Soviet Math Dokl**, 20, pp. 129-417.

Ramm E., 1981, Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, **Euro-US-Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, pp. 68-89, Ruhr Universitat Bochum, Editado por Bathe K., J., Stein E., e Wunderlich W., Springer, Berlin.

Reddy J., N., 1997, **Mechanics of Laminated Composite Plates - Theory and Analysis**, CRC Press.

Reichl L., E., 1980, **A Modern Course in Statistical Physics**, University of Texas Press.

Reitman, M., I., 1989, "Optimal Structural Design in the USSR", **Appl. Mech, Review**, 42, No. 2, pp. 27-36.

Rietz, A., 2001, "Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods", **Struct. Multidisc. Optim**, Vol. 21, pp. 159-163.

Riks E., 1979, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 15, pp. 529-551.

Rockafellar, R.T., 1997, **Convex Analysis**, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton.

Rodrigues, H., Soto, C., Taylor, J., E., 1999, "A design model to predict optimal two-material composite structures", **Struct. Optim.**, Vol. 17, pp. 186-198.

Rossow, M.P, Taylor, J.E, 1973, "A Finite Element Method for the Optimal Design of Variable Thickness Sheets", **AIAA Journal**, Vol. 11, pp: 1566-1569.

Rozvany, G., I., N., Adidam, S., R., 1972, "Rectangular grillages of least weight", **J. Eng.**

Mch. ASCE, Vol. 98, pp. 1337-1352.

Rozvany, G., I., N., Bendsøe, M., P., Kirsch, U., 1995, "Layout Optimization of Structures", **Appl. Mech. Rev.**, Vol. 48, No. 2, pp. 41-119.

Rozvany, G., I., N., 1996, "Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system instability constraints", **Struct. Multisc. Optim**, Vol. 11, pp. 213-217.

Rozvany, G., I., N., 2001a, "Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics", **Struct. Multisc. Optim**, Vol. 21, pp. 90-108.

Rozvany, G., I., N., 2001b, "Stress ratio and compliance based methods in topology optimization - a critical review", **Struct. Multisc. Optim**, Vol. 21, pp. 109-119.

Sanches-Hubert, J., Sanches-Palencia, E., 1992, **Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation**, Masson, Paris.

Saxena A, Anathasuresh G. K, 2002, "On an Optimal Property of Compliant Topologies", **Struct. Multidisc. Optim**, 19, pp. 36-49.

Schmit, L., A., 1960, "Structural Design by Systematic Synthesis", **Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computation**, American Society of Civil Engineering, New York, pp. 105-122.

Schmit, L., A., Farshi, B., 1974, "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", **AIAA Journal**, Vol. 12, pp. 692-699.

Schmidt L., Fleury C., 1980, "Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods", **AIAA Journal**, 18, pp. 1252-1260.

Schweizerhhoﬀ K., 1993, "Consistent concept for line search algorithms in combination with arc-length constraints", **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Vol. 9, pp. 773-784.

Shi J., Crisfield M., A., 1995, "Combining arc-length control and line searches in path-following", **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Vol. 11, pp. 793-803.

Shieh J., Huber J. E, Fleck N. A, Ashby M. F, 2001, "The Selection of Sensors", **Progress in Materials Science**, 46, pp. 461-504.

Sigmund, O., 1997, "On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization", **Mech. Struct. Mach.**, 25, pp. 495-526.

Sigmund O. , Buhl T., 2000, "Design of Multiphysics Actuators Using Topology Optimization - Part III: Large Displacements", DCAMM Report No. 632.

Silva E., C., N., 1998, **Design of Piezocomposite Materials and Piezoelectric Transducers using Topology Optimization**, Tese de Doutorado, Universidade de Michigan.

Silva E. C. N, Kikuchi N, 1999, "Design of Piezoelectric Transducers Using Topology Optimization", **Smart Mater. Struct.**, 8, pp. 350-364.

Silva E. C. N., 2001, **Design of an Inchworm Piezoelectric Motor Using Topology Optimization**, XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia -MG - Brasil.

Smaoui H., 1988, **Advances in dual methods and convex approximations for structural optimization**, Tese de doutorado, University of California, Los Angeles.

Smits J, Dalke S. I, Cooney T. K, 1991, The Constituent Equations of Piezoelectric Bimorphs, Sensors and Actuators, A28, pp. 41-61.

Souza Neto E., A., Feng Y.,T., 1998, "On the Determination of the Path Direction for Arc-Length Methods in the Presence of Bifurcations and "Snap-Backs", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, Vol. 179, pp. 81-89.

Souza Neto E., A., Peric D., Owen D., R., J., 2002, **Computational Plasticity: Small and Large Strain Finite Element Analysis of Elastic and Inelastic Solids**, Curso de Mecânica

Computacional Não-Linear - USP.

Suo Z., 1998, "Stress and Strain in Ferroelectrics", **Current Opinion in Solid State & Materials Science**, Vol. 3, pp. 486-489.

Stolpe, M., Svanberg, K., 2001, "On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization", **Struct. Multidisc. Optim.**, Vol. 21, pp. 140-151.

Stolpe, M., Svanberg, K., 2003, "A note on stress-constrained truss topology optimization", **Struct. Multidisc. Optim.**, Vol. 25, pp. 62-64.

Svanberg, K., 1987, "The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 24, pp. 359-373.

Svanberg K., 1999, **A new globally convergent version of the method of moving asymptotes**, TRITA/MAT-99-OS2, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Suécia.

Swan, C., C., Kosaka, I., 1997, "Voigt-Reuss Topology Optimization for Structures with Linear Elastic Material Behaviour", **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 40, No. 1, pp. 3033-3057.

Swan, C., C., Kosaka, I., 1997, "Homogenization-Based Analysis and Design of Composites", **Computers and Structures**, Vol. 64, No. 1-4, pp. 603-621.

Teng J., G., Luo Y., F., 1998, "A User-Controlled Arc-Length Method for Convergence to Predefined Deformation States", **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Vol. 14, pp. 51-58.

Tiersten H., F., 1976, "Analysis of nonlinear resonance in thickness-shear and trapped-energy resonators", **Journal of Acoustical Society of American**, Vol. 59, No. 4, pp. 866-878.

Tiersten H., F., 1995, "On the accurate description of piezoelectric resonators subject to biasing deformations", **International Journal of Engineering Science**, Vol. 33, No. 15, pp. 2239-

2259.

Tressler J., F., Alkoy S., Dogan A., Newnham R., E., 1999, "Functional Composites for Sensors, Actuators and Transducers", **Composites: Part A**, Vol. 30, pp. 477-482.

Tsay J.J., Arora J.S., 1990, "Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems. Part 1: General Theory", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 81, pp. 183-208.

Uchino K., 1998, "Materials Issues in Design and Performance of Piezoelectric Actuators: an Overview", **Acta mater.**, Vol. 46, No. 11, pp. 3745-3753.

Xie, Y., M., Steven, G., P., 1997, **Evolutionary structural optimization**, Springer-Verlag, London.

Xu G., Yamazaki K., Cheng G. D., 2000, "A new two-point approximation approach for structural optimization", **Struct. Multidisc. Optim**, 20, pp. 22-28.

Wang Q., 2002, "On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers" , **Engineering Structures**, Vol. 24, pp. 199-205.

Wangsness R., K., 1979, **Electromagnetic Fields**, John Wiley & Sons, Canadá.

Wasiutynty, A., Brandt, A., 1963, "The present State of Knowledge in the Field of optimum Design of Structures", **Appl. Mech. Rev.**, Vol. 16, pp. 341-350.

Xu, X.-L., Rajapakse, R.K.N.D, 1998, "Boundary element analysis of piezoelectric solids with defects", **Composites Part B: Engineering**, Vol. 29, pp. 655-669.

Yang F., 2001, "Fracture mechanics for a Mode I crack in piezoelectric materials", **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 38, pp. 3813-3830.

Yang J., S., 1999, "A nonlinear theory for thin piezoelectric plates in moderately large extensional deformations", **Mechanics Research Communications**, Vol. 26, No. 4, pp. 421-426.

Yang Y-B, Shieh M-S, 1991, "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", **AIAA Journal**, Vol. 28, No. 12, pp. 2110-2116.

Yi S., Ling S., F., Y., M., 2000, "Large deformation finite element analysis of composite structures integrated with piezoelectric sensors and actuators", **Finite Element in Analysis and Design**, Vol. 3, pp. 1-15.

Yimnirun R., Eury S., M., -L., Sundar V., Moses P., J., Jang S-J., Newnham R., E., 1999, "Electrostriction Measurements on Low Permittivity Dielectric Materials", **Journal of the Ceramic Society**, 19, pp. 1269-1273.

Yin L., Anantasuresh G.A., 2001, "Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme" , **Struct. Multidisc. Optim.**, 23, pp. 49-62.

Yin, L., Ananthasuresh, G., K., 2002, "Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme", **Struct. Multidisc. Optim.**, Vol. 23, pp. 49-62.

Zhang, W., Fleury, C., 1997, "A Modification of Convex Approximation Methods for Structural Optimization", **Computers & Structures**, Vol. 64, No. 1-4, pp. 89-95.

Zhang W.H, Fleury C, Duysinx P, Nguyen V.H, Laschet I, 1996, "A generalized method of moving asymptotes (GMA) including equality constraints", **Structural Disciplinary Optimization**, 12, pp. 143-165.

Zhang J, Hladky-Hennion A. C, Hughes W. J, Newnham R. E, 2001, "A Miniature Class V Flexensional Cymbal Transducer with Directional Beam Patterns: the Double-Driver", **Ultrasonics**, 39, pp. 91-95.

Zheng Q-S, 1994, "Theory of representations for tensor functions - A unified invariant approach to constitutive equations", **Applied Mechanic Review**, Vol. 47, No. 11, pp. 545-586.

Zhiliang F., 1994, "A Study of Variable Step-Length Incremental/Iterative Methods for Non-

linear Finite Element Equations", **Computers & Structures**, Vol. 52, No. 6, pp. 1269-1275.

Zhou, M., Roznavy, G., I., N., 1991, "The COC Algorithm, Part II: Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, Vol. 89, pp. 309-336.

Zhou M, Rozvany GIN, 2001, "On the validity of ESO type methods in topology optimization", **Struct. Multidisci. Optim**, 21, pp. 80-83.

Zhou Y-H, Tzou H., S., 2000, "Active Control of Nonlinear Piezoelectric Circular Shallow Spherical Shells". **International Journal of Solid and Structures**, Vol. 37, pp. 1663-1677.

Zieliński A., P., Frey F., 2001, "On linearization in non-linear structural finite element analysis". **Computers & Structures**, Vol. 79, pp. 825-838.

Zillober C., 1999, **Global convergence of a Nonlinear Programming method using convex programming**, Relatório interno, Universität Bayreuth.

A. DEFINIÇÃO DE ALGUMAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Este apêndice apresenta de forma simplificada alguns dos conceitos básicos envolvidos no acoplamento eletro-termo-mecânico.

Permissividade Dielétrica

A polarização P_i [Cm^{-2}] que é induzida em um meio isolante polarizável (dielétrico) por um campo elétrico externo φ_i [Vm^{-1}] pode ser escrita na forma

$$P_i = \chi_{ij}\varphi_j + \Xi_{ijk}\varphi_j\varphi_k + \dots \quad (A.1)$$

e, considerando uma relação constitutiva linear, obtemos

$$P_i = \chi_{ij}\varphi_j, \quad (A.2)$$

onde o tensor de segunda ordem χ_{ij} é o tensor de suscetibilidade dielétrica do material [Fm^{-1}]. As cargas elétricas induzidas no material estão relacionadas ao vetor de deslocamentos elétricos D_i [Cm^{-2}] na forma

$$D_i = \epsilon_0\varphi_i + P_i \quad (A.3)$$

onde $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} Fm^{-1}$ é a permissividade dielétrica no vácuo. Considerando as Equações (A.2) e (A.3), obtemos

$$D_i = \epsilon_0\varphi_i + \chi_{ij}\varphi_j = (\epsilon_0\delta_{ij} + \chi_{ij})\varphi_j = \epsilon_{ij}\varphi_j \quad (A.4)$$

onde ϵ_{ij} é conhecido como permissividade dielétrica do material. Uma medida geralmente utilizada para expressar as propriedades dielétricas de um material é o tensor $\kappa_{ij} = \epsilon_{ij}/\epsilon_0$, conhecido como permissividade relativa. Os tensores constitutivos ϵ_{ij} , χ_{ij} e κ_{ij} são tensores simétricos de segunda ordem e, portanto, existem 6 constantes dielétricas independentes para um material dielétrico anisotrópico.

Constantes Elásticas

Em um material elástico a relação entre o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff S_{ij} [Nm^{-2}] e deformações de Green E_{ij} [m/m] é comumente escrita na forma

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + \dots \quad (\text{A.5})$$

onde os termos de alta ordem não serão considerados neste texto (elasticidade linear). A relação linear é conhecida por lei de Hooke e é válida para pequenas magnitudes de deformação. Existem outras medidas de tensão e deformação, sendo que quaisquer medidas conjugadas energeticamente são válidas. Neste trabalho as medidas apresentadas acima serão utilizadas, consistente com a descrição Lagrangiana empregada. Devido a simetria dos tensores tensão e deformação

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (\text{A.6})$$

$$E_{ij} = E_{ji}$$

temos que o tensor de propriedades elásticas apresentará 21 constantes elásticas independentes para um material anisotrópico, devido as simetrias

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}.$$

Efeito Piezelétrico

Materiais piezelétricos são uma sub-classe dos materiais dielétricos. Estes materiais podem ser polarizados, em adição a um campo elétrico externo aplicado, devido a aplicação de tensão mecânica. Uma forma de expressar uma relação linear entre o vetor de deslocamento elétrico e tensão mecânica é

$$D_i = d_{ijk}S_{jk},$$

onde d_{ijk} [CN^{-1}] é um tensor de terceira ordem de coeficientes piezelétricos. Materiais piezelétricos possuem a interessante propriedade de apresentar o efeito inverso, ou seja, mudança de dimensões devido a aplicação de um campo elétrico, descrito por

$$E_{ij} = d_{kij}\varphi_k = d_{ijk}^t\varphi_k$$

com $d_{direto} = d_{reverso}$. Devido as simetrias dos tensores tensão e deformação, observa-se que

$$d_{ijk} = d_{ikj}$$

resultando em 18 constantes piezelétricas independentes para um material anisotrópico. Dependendo das grandezas relacionadas, temos diferentes tensores piezelétricos. Por exemplo, a relação entre campo elétrico e tensão é dado por

$$S_{ij} = e_{kij}\varphi_k.$$

Pireletricidade

Alguns materiais, chamados de polares ou Pielétricos, exibem momento de dipolo elétrico mesmo na ausência de um campo elétrico externo. A polarização espontânea é representada neste trabalho por P_s . A mudança do vetor polarização espontânea com a temperatura T define o efeito pirelétrico

$$p_i = \frac{\partial P_{s_i}}{\partial T}$$

onde o vetor p_i [$Cm^{-2}K^{-1}$] é o vetor de coeficientes pirelétricos. Definimos o vetor de deslocamento elétrico resultante como

$$D_i = \Delta P_{s_i} = p_i \Delta T.$$

É importante salientar que todos os materiais pirelétricos são piezelétricos, mas somente alguns piezelétricos são pirelétricos.

Materiais Ferrelétricos

Materiais ferrelétricos são materiais polares no qual a direção de polarização espontânea pode ser alterada por um campo elétrico externo. Todos os ferrelétricos são pirelétricos, mas apenas alguns pirelétricos são ferrelétricos. Assim, todos os ferrelétricos são, também, piezelétricos. Materiais policristalinos cujos grãos são piezelétricos podem apresentar um comportamento global não-piezelétrico devido a orientação aleatória das direções de polarização de cada grão. No entanto, se o material é ferrelétrico, podemos orientar as polarizações de cada grão, obtendo

um material com comportamento piezoelectrico significativo [Lines e Glass, 2001].

Eletricidade

O efeito eletrestricativo é um exemplo de acoplamento não-linear entre campos elétricos e elásticos. Dado um campo elétrico φ , temos que

$$E_{ij} = M_{ijkl}\varphi_k\varphi_l$$

onde $M_{ijkl} [m^2V^{-2}]$ é o tensor de propriedades eletrestricativas.

É interessante notar que o efeito da eletrestricção não deve ser confundido com o efeito piezoelectrico. Enquanto o efeito piezoelectrico é linear com relação ao campo elétrico e só se manifesta em determinados materiais dielétricos, o efeito de eletrestricção é quadrático e ocorre em todos os materiais dielétricos, independente da simetria material. No entanto, experimentalmente estes efeitos podem ser confundidos. Por exemplo, se aplicarmos um campo elétrico DC φ_{DC} e um campo elétrico AC φ_{AC} tal que $\varphi_{DC} > \varphi_{AC}$ obtemos

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}(\varphi_{DC} + \varphi_{AC})^2 = \mathbf{M}\varphi_{DC}^2 + 2\mathbf{M}\varphi_{DC}\varphi_{AC} + \mathbf{M}\varphi_{AC}^2$$

e verificamos que o termo cruzado $2\mathbf{M}\varphi_{DC}\varphi_{AC}$ se comporta linearmente em relação ao campo elétrico φ_{AC} , como no caso do efeito piezoelectrico. Assim, a combinação material mais campo elétrico φ_{DC} leva a um comportamento semelhante ao observado em materiais piezoelectricos.

Embora a o efeito de eletrestricção seja pequeno na maioria dos materiais dielétricos, existe a classe de materiais relaxor-ferrelétricos que apresentam efeito pronunciado, sendo utilizados para diversos fins [Damjanovic 1998a; Cheng et al 2001 ; Hu et al, 2001; Ymnirun ,1999].

B. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO POR MEIO DA LINEARIZAÇÃO DIRETA

Um procedimento alternativo ao utilizado no Capítulo 3, consiste em linearizar diretamente as equações

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}L dt + {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}W_{ext} dt = 0 \quad (\text{B.1})$$

e

$${}^{t+\Delta t}\delta_{\phi} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}L dt + {}^{t+\Delta t}\delta_{\phi} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}W_{ext} dt = 0, \quad (\text{B.2})$$

sem a consideração direta dos incrementos de deslocamento e diferença de potencial. Esta abordagem é muito utilizada na elasticidade com grandes deslocamentos [Bathe, 1996] e leva automaticamente a uma formulação sem termos de alta ordem. No entanto, como estamos trabalhando com equações acopladas e com duas variáveis de estado (deslocamento e diferença de potencial), temos que considerar a expansão em torno destas duas variáveis.

Para simplificar a apresentação, as equações de equilíbrio não-lineares obtidas no Capítulo 3 são rerepresentadas sem os termos de inércia

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left({}_0^t S_{IJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} {}_{SKL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) - {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) c_K + \right. \\ \left. {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} {}_{SKL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + \right. \\ \left. {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) - \right. \\ \left. {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\eta_{IJ}) c_K \right) d\Omega_0 \\ = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) - \int_{\Omega_0} {}_0^t S_{IJ} {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} \left({}_0^{t+\Delta t} \epsilon_{KL} {}_0^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) c_L + {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \varsigma_{IJ} {}_0^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) \right. \\
\left. {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} \eta_{IJ} {}_0^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) \right) d\Omega_0 \quad . \\
= {}_0^{t+\Delta t} \delta_\phi \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) + \int_{\Omega_0} {}_0^t D_K {}_0^{t+\Delta t} \delta_\phi (c_K) d\Omega_0
\end{aligned} \quad (B.4)$$

Utilizando-se a Equação (B.1) e

$$\begin{aligned}
{}_0^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} G \right) = & {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} {}_0^{t+\Delta t} E_{KL} {}_0^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} E_{IJ} \right) \\
& - {}_0^{t+\Delta t} e_{KIJ} {}_0^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} E_{IJ} \right) {}_0^{t+\Delta t} \varphi_K \quad ,
\end{aligned} \quad (B.5)$$

observamos que o termo do lado esquerdo da igualdade na Equação (B.1) é não-linear em relação aos deslocamentos, e que podemos realizar um processo de linearização utilizando os termos lineares de uma expansão em série de Taylor. Para simplificar a notação, vamos nos referir ao lado esquerdo da Equação (B.1) por ${}_0^{t+\Delta t} W_{int}$ de tal forma que

$${}_0^{t+\Delta t} W_{int} = {}_0^t W_{int} + \frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t u_p} \Delta u_p + \frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t \phi} \Delta \phi. \quad (B.6)$$

Assim,

$$\frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t u_p} \Delta u_p + \frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t \phi} \Delta \phi = {}_0^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} W_{ext} \right) - {}_0^t W_{int} \quad (B.7)$$

e, usando a Equação (B.5), podemos avaliar a derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t u_p} &= \int_{\Omega_0} {}_0^t C_{ijkl} \frac{\partial_0^t E_{kl}}{\partial_0^t u_p} \delta_{u_n} {}_0^t E_{ij} + {}_0^t C_{ijkl} {}_0^t E_{kl} \frac{\partial_0^t \delta_{u_n} {}_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_p} - {}_0^t e_{kij} \frac{\partial_0^t \delta_{u_n} {}_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_p} {}_0^t \varphi_k \quad (B.8) \\
&= \int_{\Omega_0} {}_0^t C_{ijkl} \frac{\partial_0^t E_{kl}}{\partial_0^t u_p} \frac{\partial_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_n} \delta u_n + {}_0^t C_{ijkl} {}_0^t E_{kl} \frac{\partial_0^2 {}_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_n \partial_0^t u_p} \delta u_l - {}_0^t e_{kij} \frac{\partial_0^2 {}_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_n \partial_0^t u_p} {}_0^t \varphi_k \delta u_n
\end{aligned}$$

pois [Zielinsky e Frei, 2001]

$$\delta_{u_n} {}_0^t E_{ij} = \frac{\partial_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_n} \delta u_n. \quad (B.9)$$

Avaliando a segunda derivada na Equação (B.6), obtemos

$$\frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t \phi} = \int_{\Omega_0} \left(- {}_0^t e_{kij} \frac{\partial_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_n} \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \right) \delta u_n, \quad (B.10)$$

e, introduzindo as Equações (B.8) e (B.10) na Equação (B.7), obtemos

$$\int_{\Omega_0} \left({}^t_0 C_{ijkl} \frac{\partial^t_0 E_{kl}}{\partial^t_0 u_p} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} + {}^t_0 C_{ijkl} {}^t_0 E_{kl} \frac{\partial^2 {}^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n \partial^t_0 u_p} - {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial^2 {}^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n \partial^t_0 u_p} {}^t_0 \varphi_k \right) \Delta u_p \delta u_n \quad (\text{B.11})$$

$$+ \int_{\Omega_0} \left(- {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} \frac{\partial^t_0 \varphi_k}{\partial^t_0 \phi} \right) \Delta \phi \delta u_n =$$

$$\delta_{u_i} ({}^{t+\Delta t}_0 W_{ext}) - \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 C_{ijkl} {}^t_0 E_{kl} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} \delta u_n - {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} \delta u_n {}^t_0 \varphi_k \right)$$

onde

$$\int_{\Omega_0} {}^t_0 C_{ijkl} \frac{\partial^t_0 E_{kl}}{\partial^t_0 u_n} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_p} \quad (\text{B.12})$$

é equivalente ao segundo termo da Equação (B.3),

$$\int_{\Omega_0} {}^t_0 C_{ijrs} {}^t_0 E_{rs} \frac{\partial^2 {}^t_0 \delta E_{ij}}{\partial^t_0 u_k \partial^t_0 u_l} - {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial^2 {}^t_0 \delta E_{ij}}{\partial^t_0 u_k \partial^t_0 u_l} {}^t_0 \varphi_k, \quad (\text{B.13})$$

é equivalente ao primeiro termo da Equação (B.3),

$$\int_{\Omega_0} \left({}^t_0 C_{ijkl} {}^t_0 E_{kl} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} \delta u_n - {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} {}^t_0 \varphi_k \delta u_n \right), \quad (\text{B.14})$$

é equivalente ao último termo da Equação (B.3) e

$$\int_{\Omega_0} \left(- {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial^t_0 E_{ij}}{\partial^t_0 u_n} \frac{\partial^t_0 \varphi_k}{\partial^t_0 \phi} \delta u_n \right), \quad (\text{B.15})$$

é equivalente ao terceiro termo da Equação (B.3).

Considerando agora a expressão

$${}^{t+\Delta t}_0 \delta_\phi ({}^{t+\Delta t}_0 G) = - {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{KL} {}^{t+\Delta t}_0 \delta_\phi ({}^{t+\Delta t}_0 \varphi_K) {}^{t+\Delta t}_0 \varphi_L \quad (\text{B.16})$$

$$- {}^{t+\Delta t}_0 e_{KIJ} {}^{t+\Delta t}_0 E_{IJ} {}^{t+\Delta t}_0 \delta_\phi (\varphi_K).$$

juntamente com a Equação (B.2)

$$\int_{\Omega_0} - \left({}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{kl} {}^{t+\Delta t}_0 \delta_\phi ({}^{t+\Delta t}_0 \varphi_k) {}^{t+\Delta t}_0 \varphi_l + {}^{t+\Delta t}_0 e_{kij} {}^{t+\Delta t}_0 E_{ij} {}^{t+\Delta t}_0 \delta_\phi ({}^{t+\Delta t}_0 \varphi_k) \right) \quad (\text{B.17})$$

$$= \int_{\Omega_0} {}^{t+\Delta t}_0 \delta_\phi ({}^{t+\Delta t}_0 W_{ext})$$

e realizando um procedimento semelhante de linearização, agora em relação a diferença de potencial, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t \phi} &= \int_{\Omega_0} - \left({}_0^t \epsilon_{kl} \frac{\partial \delta_\phi {}_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} {}_0^t \varphi_l + {}_0^t \epsilon_{kl} {}_0^t \delta_\phi \varphi_k \frac{\partial_0^t \varphi_l}{\partial_0^t \phi} + {}_0^t e_{kij} {}_0^t E_{ij} \frac{\partial \delta_\phi {}_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \right) \quad (\text{B.18}) \\ &= \int_{\Omega_0} - \left({}_0^t \epsilon_{kl} \frac{\partial^2 {}_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \varphi_l + {}_0^t \epsilon_{kl} \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \frac{\partial_0^t \varphi_l}{\partial_0^t \phi} + {}_0^t e_{kij} {}_0^t E_{ij} \frac{\partial^2 {}_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \right) \delta \phi \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial_0^t W_{int}}{\partial_0^t u_p} = \int_{\Omega_0} \left(- {}_0^t e_{kij} \frac{\partial_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_p} \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \right) \delta \phi. \quad (\text{B.19})$$

Como o operador que relaciona campo elétrico com diferença de potencial é linear, os termos com derivadas segundas na Equação (B.18) se anulam. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} - {}_0^t e_{kij} \frac{\partial_0^t E_{ij}}{\partial_0^t u_p} \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \delta \phi \Delta u_p + \int_{\Omega_0} - {}_0^t \epsilon_{kl} \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \frac{\partial_0^t \varphi_l}{\partial_0^t \phi} \delta \phi \Delta \phi &= \delta_\phi ({}_0^{t+\Delta t} W_{ext}) + \quad (\text{B.20}) \\ \int_{\Omega_0} \left({}_0^t \epsilon_{kl} {}_0^t \varphi_l \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \delta \phi + {}_0^t e_{kij} {}_0^t E_{ij} \frac{\partial_0^t \varphi_k}{\partial_0^t \phi} \delta \phi \right) &, \end{aligned}$$

onde o primeiro termo na Equação (B.20) equivale ao segundo termo da Equação (B.4), o segundo termo na Equação (B.20) é equivalente ao primeiro termo da Equação (B.4) e o último termo na Equação (B.20) é equivalente ao último termo da Equação (B.4).

C. RELAÇÃO ENTRE A MATRIZ TANGENTE ACOPLADA E A DERIVADA DO RESÍDUO

Em problemas de elasticidade finita, a matriz $\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_\sigma$ é muitas vezes definida como sendo o negativo da derivada do resíduo em relação aos deslocamentos. Este conceito pode ser estendido para o problema em questão, utilizando-se o vetor \mathbf{x} ao invés de se utilizar os deslocamentos. Assim, devemos mostrar que

$$\mathbf{K}_t = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial_0^t \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial_0^{t+\Delta t} \mathbf{P}_{\text{ext}}}{\partial_0^t \mathbf{x}} - \frac{\partial_0^t \mathbf{F}}{\partial_0^t \mathbf{x}} \right) \quad (\text{C.1})$$

e considerando forças externas conservativas, obtemos

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial_0^t \mathbf{F}}{\partial_0^t \mathbf{x}}. \quad (\text{C.2})$$

Para calcular esta derivada, observamos que o vetor \mathbf{F} pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c} {}_0^t \mathbf{F}_{\text{int}} \\ {}_0^t \mathbf{Q}_{\text{int}} \end{array} \right\} = \mathbf{A}_1^{ne} \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Omega_0} {}_0^t S_{ij} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{ij} d\Omega_0 \\ - \int_{\Omega_0} {}_0^t D_k {}^{t+\Delta t} \delta_\phi c_k d\Omega_0 \end{array} \right\}, \quad (\text{C.3})$$

onde o operador \mathbf{A}_1^{nelems} é responsável pela superposição global dos efeitos locais de cada elemento. Utilizando as relações constitutivas, podemos reescrever a Equação (C.2) como

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_r} = \mathbf{A}_1^{ne} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\int_{\Omega_0} \partial \left({}_0^t C_{ijkl} {}_0^t E_{kl} - {}_0^t e_{kij} {}_0^t \varphi_k \right) {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{ij} d\Omega_0}{\partial x_r} \\ - \frac{\int_{\Omega_0} \partial \left({}_0^t e_{kij} {}_0^t E_{ij} + {}_0^t \epsilon_{kl} {}_0^t \varphi_l \right) {}^{t+\Delta t} \delta_\phi c_k d\Omega_0}{\partial x_r} \end{array} \right\}. \quad (\text{C.4})$$

Considerando o diferencial de \mathbf{F} em relação ao vetor de variáveis de estado, inicialmente observamos que os tensores constitutivos independem das variáveis de estado e que os tensores de deformação e de incremento de deformação independem da diferença de potencial, assim como o campo elétrico e o seu incremento independem do deslocamento. Portanto, podemos

separar a Equação (C.4) em

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_r} = \mathbf{A}_1^{ne} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 C_{ijkl} \frac{\partial {}^t_0 E_{kl}}{\partial u_r} \frac{\partial s_{ij}}{\partial u_n} + {}^t_0 C_{ijkl} {}^t_0 E_{kl} \frac{\partial^2 s_{ij}}{\partial u_r \partial u_n} - {}^t_0 e_{kij} {}^t_0 \varphi_k \frac{\partial^2 s_{ij}}{\partial u_r \partial u_n} \right) \delta u_n d\Omega_0 \\ - \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 e_{kij} \frac{\partial {}^t_0 E_{ij}}{\partial u_r} \frac{\partial c_k}{\partial \phi} \right) \delta \phi d\Omega_0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.5})$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi} = \mathbf{A}_1^{ne} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left(- {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial {}^t_0 \varphi_k}{\partial \phi} \frac{\partial s_{ij}}{\partial u_n} \right) \delta u_n d\Omega_0 \\ - \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 e_{kij} {}^t_0 E_{ij} \frac{\partial^2 c_k}{\partial \phi^2} + \epsilon_{kl} \frac{\partial {}^t_0 \varphi_l}{\partial \phi} \frac{\partial c_k}{\partial \phi} + \epsilon_{kl} {}^t_0 \varphi_l \frac{\partial^2 c_k}{\partial \phi^2} \right) \delta \phi d\Omega_0 \end{array} \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Fazendo uso das relações constitutivas da piezeletricidade, podemos reescrever a Equação (C.5) como

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_r} = \mathbf{A}_1^{ne} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 C_{ijkl} \frac{\partial {}^t_0 E_{kl}}{\partial u_r} \frac{\partial s_{ij}}{\partial u_n} + {}^t_0 S_{ij} \frac{\partial^2 s_{ij}}{\partial u_r \partial u_n} \right) \delta u_n d\Omega_0 \\ - \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 e_{kij} \frac{\partial {}^t_0 E_{ij}}{\partial u_r} \frac{\partial c_k}{\partial \phi} \right) \delta \phi d\Omega_0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.7})$$

sendo que o primeiro termo da primeira linha na Equação (C.7) corresponde a \mathbf{K}_{uu} após a discretização. O segundo termo na primeira linha da Equação (C.7) a \mathbf{K}_σ após a discretização. Por sua vez, o termo na segunda linha da Equação (C.7) a $\mathbf{K}_{u\phi}$ após a discretização.

Considerando as relações constitutivas do problema piezelétrico e observando o fato de que c_k é linear com respeito a diferença de potencial, pode-se reescrever a Equação (C.6) como

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi} = \mathbf{A}_1^{ne} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left(- {}^t_0 e_{kij} \frac{\partial {}^t_0 \varphi_k}{\partial \phi} \frac{\partial s_{ij}}{\partial u_n} \right) \delta u_n d\Omega_0 \\ - \int_{\Omega_0} \left(\epsilon_{kl} \frac{\partial {}^t_0 \varphi_l}{\partial \phi} \frac{\partial c_k}{\partial \phi} \right) \delta \phi d\Omega_0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.8})$$

onde o termo da primeira linha corresponde a $\mathbf{K}_{\phi u}$ após a discretização e o termo na segunda linha da Equação (C.8) corresponde a $-\mathbf{K}_{\phi\phi}$ após a discretização.

Com isto, a Equação (C.1) se resume a

$$\mathbf{K}_t = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial {}^t_0 x} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

quando consideramos forças externas conservativas.

D. IMPOSIÇÃO DE SIMETRIAS

Métodos de programação matemática, como o SLP e o MMA, não apresentam uma garantia de que a solução (topologia) do problema seja simétrica, mesmo quando esta for a resposta correta. A perda de simetria pode ocorrer por erros de arredondamento, já que o processo de otimização é seqüencial, ou por propriedades da aproximação, como é o caso do LP.

Em problemas lineares, a simetria pode ser garantida pela solução de apenas uma parte do domínio de projeto, pois superposição de efeitos é válida (Figura D.1).

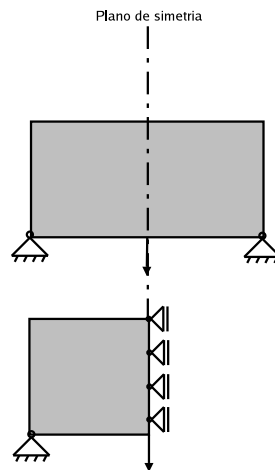


Figure D.1: Imposição de simetria de reflexão em problemas lineares.

No entanto, em problemas não-lineares, a imposição de simetria não deve ser realizada com este artifício, uma vez que a solução do problema de equilíbrio deve ser realizada considerando todo o domínio de projeto. Por este motivo, deve-se utilizar um procedimento consistente de imposição de simetria. Embora possam existir diferentes tipos de simetria, serão apresentadas neste apêndice somente as equações referentes a imposição de simetria de reflexão.

Para ilustrar as modificações necessárias, consideramos o problema da Figura D.2, que possui simetria de reflexão geométrica, material, de condições de contorno e de portas de saída em torno do plano ab .

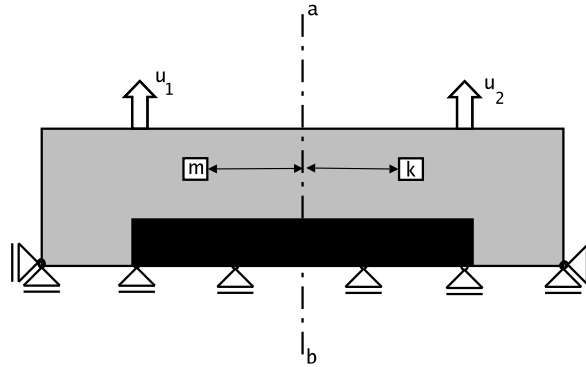


Figure D.2: Síntese de um mecanismo com uma simetria de reflexão em torno do plano ab .

A formulação para este problema seria

$$\begin{aligned} \text{Max } u_{out} &= u_1 + u_2 \\ \text{S.t. } V &\leq \bar{V} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A simetria da topologia implica em uma igualdade nos valores das densidades de dois elementos situados em posições equivalentes em torno do plano de simetria. Considerando que o par (x_i, y_i) define as coordenadas de um elemento i da malha e que o plano de simetria se localiza nas posições $ab = (x_a, \bullet)$, definimos o conjunto de elementos simétricos,

$$S_{ab} = \{(m, k) \mid y_m = y_k \text{ e } x_a - x_m = x_k - x_a\} \quad (\text{D.2})$$

e uma topologia simétrica é aquela em que a densidade dos elementos simétricos é igual, isto é

$$T_{ab} = \{\rho_m = \rho_k \mid (\rho_m, \rho_k) \in S_{ab}\}. \quad (\text{D.3})$$

Neste caso, podemos solucionar o problema de programação matemática utilizando apenas as informações de um lado do plano de simetria.

Considerando os deslocamentos de saída u_1 e u_2 , simétricos em relação ao plano ab , temos

que

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\rho_k} &= -\frac{du_2}{d\rho_m} \\ \frac{du_1}{d\rho_m} &= -\frac{du_2}{d\rho_k}\end{aligned}\quad (\text{D.4})$$

onde $(\rho_m, \rho_k) \in S_{ab}$. Os sinais negativos indicam que a redução de densidade no elemento m provoca a redução de deslocamento u_1 , com o conseqüentemente aumento de deslocamento u_2 , o que de fato se observa na Figura (D.2). Assim, no processo de linearização do deslocamento u_1

$$u_1(\rho + \Delta\rho) = u_1(\rho) + \sum \frac{du_1}{d\rho_i} \Delta\rho_i \quad (\text{D.5})$$

onde o somatório deve ser realizado em todos os elementos da malha. Considerando a simetria de reflexão, podemos separar o somatório em duas parcelas, uma a esquerda do plano de simetria e outra a direita

$$u_1(\rho + \Delta\rho) = u_1(\rho) + \sum \frac{du_1}{d\rho_m} \Delta\rho_m \Big|_{\text{esquerda}} + \sum \frac{du_1}{d\rho_k} \Delta\rho_k \Big|_{\text{direita}} \quad (\text{D.6})$$

e observando que $\Delta\rho_m = \Delta\rho_k$, mais as relações da Equação (E.4), obtemos

$$u_1(\rho + \Delta\rho) = u_1(\rho) + \sum \left(\frac{du_1}{d\rho_m} - \frac{du_2}{d\rho_m} \right) \Delta\rho_m \Big|_{\text{esquerda}} \quad (\text{D.7})$$

indicando que é necessário calcular apenas as sensibilidades dos deslocamentos das portas de saída em relação aos elementos da parte da esquerda (ou da direita) do plano de simetria. Em problemas de otimização topológica, onde o número de elementos é elevado, verifica-se uma grande economia no tempo de computação. Deve-se salientar que o termo entre parênteses na Equação (D.7) não é nulo, pois no caso geral $\frac{du_1}{d\rho_m} \neq \frac{du_2}{d\rho_m}$.

A restrição de volume também é simplificada com a consideração de simetria de reflexão, pois

$$\frac{dV_m}{d\rho_k} = \frac{dV_k}{d\rho_m}$$

e a linearização da restrição de volume, com consideração de simetria, implica em

$$V(\rho + \Delta\rho) = V(\rho) + \sum \left(2 \frac{dV}{d\rho_m} \right) \Delta\rho_m \Big|_{\text{esquerda}} .$$

Com isto, o problema de otimização se reduz a

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & u_1 \\ \text{S.t.} \quad & V \leq \bar{V} \end{aligned} \tag{D.8}$$

com a metade do número de variáveis de projeto.

E. DETERMINAÇÃO DO VALOR DA CARGA CRÍTICA DE UMA COLUNA COM INSERTOS PIEZELÉTRICOS

O objetivo deste apêndice é obter uma expressão que permita prever a flambagem de Euler de uma coluna feita de material elástico e insertos piezelétricos. A geometria do problema está ilustrada na Figura E.1. Da figura, observamos que devido a simetria, temos duas reações horizontais de mesmo valor e sentidos opostos nos apoios laterais.

Da mesma forma, observamos que toda a coluna está sendo submetida a uma força de compressão N , constante. Para determinarmos o valor de N , observamos que, por compatibilidade, o valor do deslocamento u_x nas extremidades deve ser nulo. O valor do deslocamento total da coluna é dado por 3 parcelas

$$\begin{aligned} u_x^p &= 2d_{13}L_p\varphi_3 \\ u_x^b &= -\frac{NL_b}{E_bA_b} \\ u_x^c &= -2\frac{NL_p}{E_pA_p} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

onde o primeiro termo é a extensão do material piezelétrico, provocado pelo campo elétrico φ_3 , o segundo termo é a contração da coluna, provocada pela força de compressão N e o terceiro termo é a compressão da parte piezelétrica, também provocada pela mesma força de compressão.

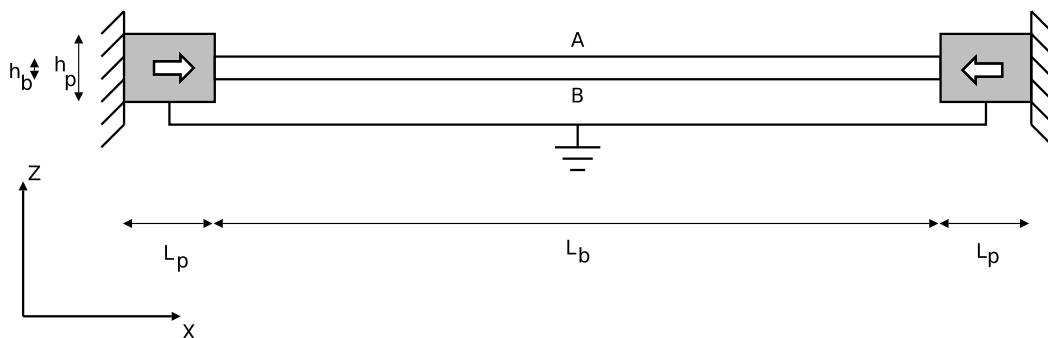


Figure E.1: Coluna bi-engastada com dois insertos piezelétricos.

Desta forma, a compatibilidade permite obter

$$2d_{13}L_p\varphi_3 - N \left(\frac{L_b}{E_bA_b} + 2\frac{L_p}{E_pA_p} \right) = 0 \quad (\text{E.2})$$

ou seja, a força que atua na coluna tem magnitude

$$N = \frac{2d_{13}L_p\varphi_3}{\frac{L_b}{E_bA_b} + 2\frac{L_p}{E_pA_p}}. \quad (\text{E.3})$$

Assumindo agora que estamos interessados na flambagem da parte sem material ativo, de comprimento L_b , avaliamos a carga crítica de Euler como sendo

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_b I_b}{\alpha^2 L_b^2} \quad (\text{E.4})$$

onde α permite ajustar o tipo de condição de contorno (bi-engastado, bi-rotulado, etc.). Considerando conjuntamente as Equações (E.3) e (E.4), verificamos que a flambagem na coluna ocorre quando a seguinte relação for satisfeita

$$\frac{\pi^2 E_b I_b}{\alpha^2 L_b^2} = \frac{2d_{13}L_p\varphi_3}{\frac{L_b}{E_bA_b} + 2\frac{L_p}{E_pA_p}} \quad (\text{E.5})$$