

Marcelo Mendes Disconzi

*Sistemas extensos com dimensão instável
invariante*

Porto Alegre

29 de abril de 2005.

Marcelo Mendes Disconzi

*Sistemas extensos com dimensão instável
invariante*

Dissertação de mestrado para obtenção
do título de *Mestre em Física* pelo Ins-
tituto de Física da Universidade Federal
do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Leonardo Gregory Brunnet

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico — CNPq*

Porto Alegre
29 de abril de 2005.

Agradecimentos

Agradeço:

aos colegas Marlon R. Schmitz, Sandro C. Javiel e Alexandre G. Derivi pelo expressivo auxílio que prestaram com seus preciosos conhecimentos de informática.

à minha irmã Mara Rúbia Mendes Disconzi e ao meu cunhado Maurício Cougo dos Santos, por terem fornecido parte das condições materiais para realização deste trabalho.

a Linus Torvald e Richard Stallmann, por terem inventando um sistema operacional que funciona.

Sumário

Resumo

Abstract

1	Introdução	7
2	Definições básica	11
2.1	Exemplos de Sistemas Hiperbólicos	15
3	Pseudo-órbitas e sombreamento	18
4	Variação da Dimensão Instável	25
4.1	UDV e sombreabilidade	27
4.2	Quantificando UDV	28
5	UDV e sistemas acoplados	32
6	A construção de um contra-exemplo	35
6.1	Sistema desacoplado	35
6.2	Sistema acoplado	37
6.3	Medidas numéricas	39
6.3.1	Distribuição de expoentes a tempo finito	42

7	Observações numéricas	45
8	Considerações finais	47
	Referências	51

Resumo

Neste trabalho nós investigamos as relações existentes entre a Variação de Dimensão Instável (*Unstable Dimension Variability — UDV*) e a dimensão do espaço de fases de uma rede de mapas acoplados com acoplamento difusivo. Damos suporte teórico e evidências numéricas para a afirmação de que a partir de certo valor fixo da dimensão não há presença de UDV.

Abstract

In this piece of work we investigate the relations between the existence of Unstable Dimension Variability (UDV) and the phase space dimension of a coupled map lattices with diffusive coupling. We give theoretical support and numerical evidence to the statement that from some fixed dimension value onwards there is no UDV.

1 *Introdução*

É um fato bastante conhecido que sistemas caóticos apresentam *dependência às condições iniciais* (*sensitive dependence on initial conditions*): trajetórias no espaço de fases começando perto uma da outra divergem rapidamente, de modo que pequenos erros no início resultarão em grandes diferenças após um curto espaço de tempo (BERGÉ; POMEAU; VIDAL, 1988; MANNEVILLE, 1991; BRIN; STUCK, 2002; GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983). Como em um grande número de sistemas físicos de interesse métodos analíticos diretos não estão disponíveis, somos obrigados muitas vezes a lançar mão de simulações numéricas para estudá-los. Mas métodos numéricos sempre apresentam erros, e uma trajetória numérica sempre afastar-se-á de uma trajetória real do sistema que possua exatamente a mesma condição inicial.

Embora estejamos impossibilitados de seguir uma trajetória numérica por longos períodos de tempo, a grande maioria das propriedades de interesse dinâmico podem ser obtidas a partir de *ensembles* de trajetórias (por exemplo, qualquer trajetória densa em um atrator caótico pode ser usada para calcular suas propriedades estatísticas). Portanto, se de alguma forma estivermos autorizados a dizer que *uma trajetória real está próxima de uma trajetória numérica — mesmo se ambas têm condições iniciais diferentes — toda informação relevante será confiável*. Tentar saber quando existe essa órbita real perto da órbita numérica é o principal ponto de uma área que vem ganhando grande destaque na física nos últimos anos e a qual, na falta de um termo canônico, chamaremos de *teoria de sombreamento*. A escolha desse nome ficará clara em alguns instantes.

No nosso trabalho estaremos interessados em sistemas dinâmicos a tempo

discreto. Todavia, os resultados já estabelecidos da teoria de sombreamento generalizam-se também para fluxos (VIANA et al., 2003).

Uma órbita que apresenta um erro de tamanho δ a cada iterada é chamada de uma δ -pseudo-órbita. O nome provém do fato de que a rigor uma órbita com um erro em cada iterada não é uma órbita da dinâmica. Entre os físicos, o exemplo mais comum de δ -pseudo-órbitas são as trajetórias numéricas geradas computacionalmente. *Quando um sistema exibe a propriedade de ter suas δ -pseudo-órbitas acompanhadas por soluções exatas dizemos que ele é sombreável.* Na seção 3 definiremos formalmente esses conceitos. Como veremos, sombreabilidade é importante porque quando um sistema não é sombreável não podemos garantir a confiabilidade dos dados numéricos obtidos (LAI; GREBOGI, 1999; VIANA et al., 2003).

É possível mostrar que sistemas hiperbólicos com estrutura de produto local (ver definição na seção 2) são sempre sombreáveis (ver seção 3), embora sombreabilidade não seja uma propriedade exclusiva de sistemas hiperbólicos (para um exemplo, ver (COVEN; KAN; YORKE, 1988)).

Ausência de sombreabilidade parece ser acompanhada de um fenômeno chamado *variação da dimensão instável* (unstable dimension variability); abreviadamente UDV: dois (ou mais) pontos fixos hiperbólicos mergulhados em um atrator caótico apresentam um número diferente de autodireções atrativas e repulsivas, ou seja, o número de direções instáveis (e portanto também estáveis) não é constante ao longo de uma trajetória típica no atrator. Mais adiante daremos a definição formal.

Todavia, chamamos a atenção de que as conexões estreitas entre UDV e ausência de sombreabilidade ainda não foram (até onde temos conhecimento) completamente entendidas. Se por um lado Yuan and York (YUAN; YORKE, 1999) mostraram que UDV é uma condição suficiente para inexistência de sombreabilidade na grande classe de difeomorfismos que entram em suas hipóteses, por outro lado não há uma prova formal que garanta que a ausência de UDV implique sombreabilidade. UDV também leva à ausência de sombreabilidade em

difeomorfismos robustos transitivos parcialmente hiperbólicos de dimensão três (BONATTI; DÍAZ; TURCAT, 2000). Para a classe mais geral de transformações que não são difeomorfismos, não é conhecida uma condição suficiente para a ausência de sombreabilidade, apesar de existirem fortes evidências de que nesses caso UDV também implica não-sombreabilidade (VIANA et al., 2003).

Por essas razões muito trabalho tem sido feito para a identificação de UDV e assim obter informações acerca das propriedades de sombreabilidade do sistemas dinâmicos. Esses desenvolvimentos sugerem que UDV é um fenômeno típico de sistemas não hiperbólicos de alta dimensão (LAI; GREBOGI, 1999). De fato, vários trabalhos de altíssima qualidade foram de fundamental importância ao exibirem uma grande quantidade de sistemas com UDV (LAI et al., 1999), (VIANA et al., 2003), (BARRETO; SO, 2000), (LAI, 1999), (VIANA; GREBOGI, 2000), (VIANA et al.,), (SAUER, 2002), (SAUER; GREBOGI; YORKE, 1997), (VIANA; PINTO; GREBOGI, 2002), (LAI; GREBOGI, 1999) — destacando-se os de Grebogi e colaboradores. Esses trabalhos têm se baseado basicamente em sistemas de alta-dimensão (não hiperbólicos) e isso levou à conjectura de que tais sistemas tipicamente apresentem UDV (LAI; GREBOGI, 1999), (LAI et al., 1999), (VIANA et al., 2003).

Entretanto, neste trabalho propomos que UDV não é uma propriedade *universal* de sistemas não-hiperbólicos de alta dimensão: o nosso objetivo aqui é justamente a construção de um contra-exemplo. Isso é feito através de um sistema acoplado cuja dinâmica local não é sombreável mas cuja dinâmica induzida pelo acoplamento comporta-se de uma maneira que indique a ausência de UDV. A idéia é construir um sistema cuja “região crítica” (a região no espaço de fases onde o sistema perde sua sombreabilidade) torna-se cada vez menor (em comparação ao restante do espaço) à medida que o sistema aumenta de dimensão.

A despeito da existência de um número relativamente grande de métodos para identificação de UDV, acreditamos que o mais prático e poderoso é baseado no *expoente de Lyapunov a tempo finito* (ABARBANEL; BROWN; KENNEL, 1991). Embora esse conceito tenha surgido fora do contexto da teoria de sombreamento, seu uso para identificação de UDV é uma criação de Grebogi e colaboradores

(DAWSON et al., 1994). Com esse instrumento em mãos estaremos aptos a identificar a existência ou não de UDV.

2 Definições básica

Começaremos expondo as noções básicas que serão usadas para o trabalho. Introduziremos as definições necessárias e fixaremos a notação. Tentaremos acompanhar as definições formais de explicações intuitivas e geométricas para facilitar a compreensão. Quando conveniente forneceremos exemplos. Lembramos mais uma vez que estamos tratando de sistemas a tempo discreto, embora possamos fornecer definições análogas para tempo contínuo.

Definição 1. (BRIN; STUCK, 2002) *Sejam \mathcal{M} uma variedade diferenciável riemanniana compacta e $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ um difeomorfismo, ambos de classe C^∞ . Se $\Lambda \subset \mathcal{M}$ é um conjunto compacto invariante para f , dizemos que Λ é hiperbólico se existem constantes $\lambda \in (0, 1)$, $C > 0$ e famílias de subespaços $E^u(x) \equiv E_x^u \subset T\mathcal{M}_x$ e $E^s(x) \equiv E_x^s \subset T\mathcal{M}_x$, $x \in \Lambda$, tais que para todo $x \in \Lambda$:*

1. $T\mathcal{M}_x = E_x^s \oplus E_x^u$. E_x^s é dito subespaço estável e E_x^u subespaço instável.

2. $\forall v^s \in E_x^s \forall n \geq 0 \quad \|df_x^n(v^s)\| \leq C\lambda^n \|v^s\|,$
 $\forall v^u \in E_x^u \forall n \geq 0 \quad \|df_x^{-n}(v^u)\| \leq C\lambda^n \|v^u\|.$

3. $df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s, df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$

Observação 1. *Sempre que não mencionarmos, estará subentendido que há um sistema dinâmico discreto nas definições e exemplos que se seguem. Ou seja,*

enunciaremos qual o espaço, a função etc, apenas quando isso se mostrar estritamente necessário. Manteremos a mesma notação caso não seja mencionado o contrário; portanto se nos referirmos a, por exemplo, Λ , deve ficar entendido que se trata de um conjunto hiperbólico.

Uma consequência direta da definição de hiperbolicidade é que os subespaços E_x^s e E_x^u variam continuamente em x (BRIN; STUCK, 2002). Em geral, as direções no espaço tangente que satisfazem $df_x(E_x) = E_{f(x)}$ são chamadas de *autodireções* ou *subespaços invariantes*.

O significado geométrico de um sistema hiperbólico pode ser entendido como se segue. Sabemos que localmente podemos estudar a dinâmica através do comportamento induzido no espaço tangente — que é comandado pela derivada df —, isto é, por sua *linearização*. Hiperbolicidade significa então que essa dinâmica no espaço tangente possui dois subespaços (o instável e o estável) que não se misturam, no sentido que vetores do espaço instável do ponto x são mapeados em vetores do espaço instável do ponto $f(x)$ e analogamente para o estável; e que a norma dos vetores cresce exponencialmente no espaço instável e decresce exponencialmente no estável. Para cada vetor no espaço tangente temos curvas na variedade às quais o vetor é tangente (ver figura 1). O comportamento da dinâmica linearizada mostra que na dinâmica completa (i.e., na variedade e não no espaço tangente) os pontos pertencentes às curvas cujos vetores tangentes são instáveis se afastam à medida que a dinâmica evolui (variedade instável; ver definição abaixo); e os pontos pertencentes às curvas cujos vetores tangentes são estáveis se aproximam à medida que a dinâmica evolui (variedade estável; ver definição abaixo).

Definição 2. (BRIN; STUCK, 2002) Dado $x \in \Lambda \subset \mathcal{M}$ as variedades estável e instável do ponto x são respectivamente $W^s(x) = \{y \in \mathcal{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$ e $W^u(x) = \{y \in \mathcal{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(y), f^{-n}(x))\}$; $d(\cdot, \cdot)$ denota a distância em \mathcal{M} . A variedade estável (instável) de Λ é definida como $W^s(\Lambda) = \cup_{x \in \Lambda} W^s(x)$ ($W^u(\Lambda) = \cup_{x \in \Lambda} W^u(x)$). As variedades estável e instável locais de tamanho η são definidas como $W_\eta^s(x) = \{y \in \mathcal{M} : \forall n \geq 0 \ d(f^n(y), f^n(x)) < \eta\}$ e

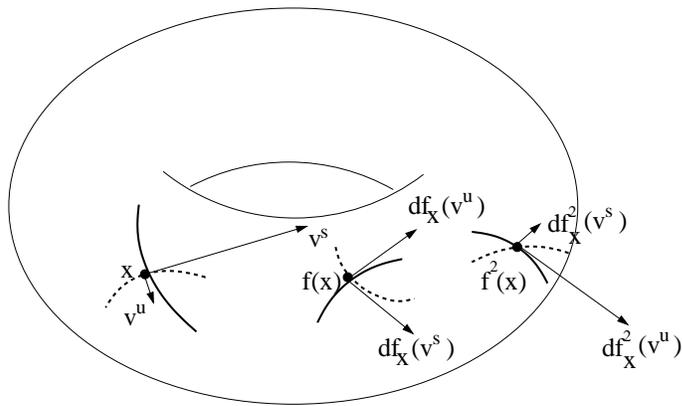


Figura 1: Ilustração de uma dinâmica hiperbólica. O vetor v^u é um vetor na direção instável e v^s um vetor na direção estável. A dinâmica desses vetores é dada pela aplicação da diferencial df . A curva pontilhada representa a variedade estável e a sólida a variedade instável. Observe que a norma de v^u cresce e a de v^s decresce pela ação de df .

$$W_\eta^u(x) = \{y \in \mathcal{M} : \forall n \geq 0 \ d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) < \eta\}.$$

A definição de variedades instável e estável também tem uma interpretação geométrica bastante clara. A variedade instável de um ponto x é simplesmente o conjunto dos pontos que se afastam da *órbita* de x à medida que o tempo evolui; e a variedade estável é simplesmente o conjunto dos pontos que se aproximam da órbita de x à medida que o tempo evolui. Observe que se x é um *ponto fixo* ($f(x) = x$) temos $W^u = \{y \in \mathcal{M} : f^{-n}(y) \rightarrow x \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ e $W^s = \{y \in \mathcal{M} : f^n(y) \rightarrow x \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$.

Observação 2. *O correto seria definirmos $W^s(x)$ ($W^u(x)$) como o conjunto estável (instável). Mas pode-se mostrar efetivamente que esses conjuntos são variedades (ver, por exemplo, (KATOK; HASSEMLAT, 1995)).*

Queremos agora definir um *atrator hiperbólico*. Embora o conceito de atrator seja uma das idéias fundamentais em sistemas dinâmicos, o grande número de definições diferentes encontradas na literatura nos leva a expor aqui a definição que utilizaremos.

Definição 3. (BRIN; STUCK, 2002) *Um conjunto compacto $\Omega \subset \mathcal{M}$ é dito atra-*

tor (para f) se existe um aberto \mathcal{U} contendo Ω tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ e $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathcal{U}) = \Omega$. Além disso, pediremos que Ω contenha uma órbita densa. A bacia de atração de Ω é o conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{U})$.

A figura 2 ilustra a definição acima.

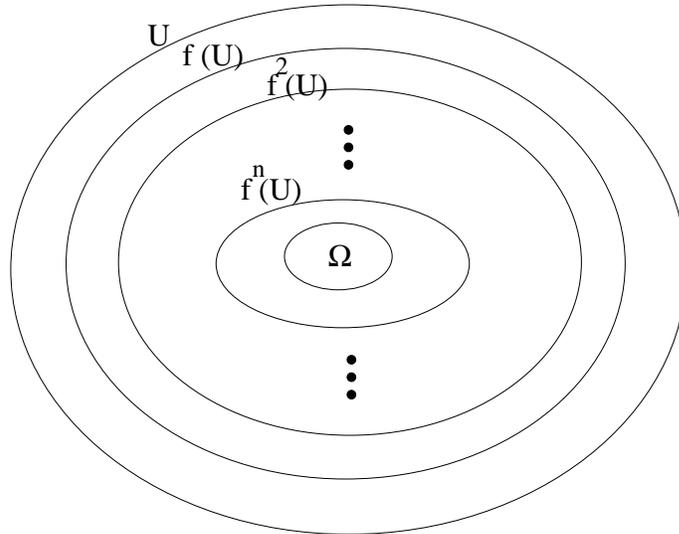


Figura 2: Ilustração de um atrator. Observe que a à medida que iteramos o conjunto \mathcal{U} temos esferóides de tamanho cada vez menor com um contendo o outro e todos contendo o conjunto Ω . Então se fizermos a interseção $\mathcal{U} \cap f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U})$, $f(\mathcal{U}) \cap f^2(\mathcal{U}) = f^2(\mathcal{U})$, $f^2(\mathcal{U}) \cap f^3(\mathcal{U}) = f^3(\mathcal{U})$, \dots , $f^n(\mathcal{U}) \cap f^{n+1}(\mathcal{U}) = f^{n+1}(\mathcal{U})$ temos no limite $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathcal{U}) = \Omega$.

Segue-se diretamente da definição que a órbita de qualquer ponto x na bacia de atração converge para o atrator. Muitas vezes ocorre que um conjunto Ω não seja um atrator no sentido acima e, no entanto, para todo $x \in \mathcal{M}$ a órbita de $x \in \mathcal{M}$ convirja para Ω — e é exatamente esse o caso no sistema que trataremos aqui (ver seção 7). Diremos nesse caso que Ω é um *atrator global*. Na transformação que estudaremos na seção 7, o ponto zero não atrai uma vizinhança; pelo contrário, ele a repele — o que significa que não existe a região \mathcal{U} da definição acima. Mesmo assim todas órbitas acabam convergindo para zero.

Definição 4. (BRIN; STUCK, 2002) *Um atrator hiperbólico consiste de um atrator Ω com estrutura hiperbólica. Diremos que um sistema dinâmico é hiperbólico quando os atratores da dinâmica são atratores hiperbólicos.*

2.1 Exemplos de Sistemas Hiperbólicos

Hiperbolicidade é exemplificada nos dois exemplos abaixo.

Exemplo 1. O *toróide plano* pode ser obtido do \mathbb{R}^2 via quociente por \mathbb{Z}^2 . Isto é, unimos as bordas (identificamos) (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) se $x_i - x'_i \in \mathbb{Z}$. Geometricamente isso corresponde a tomarmos o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ e identificarmos os bordos (ver figura 3).

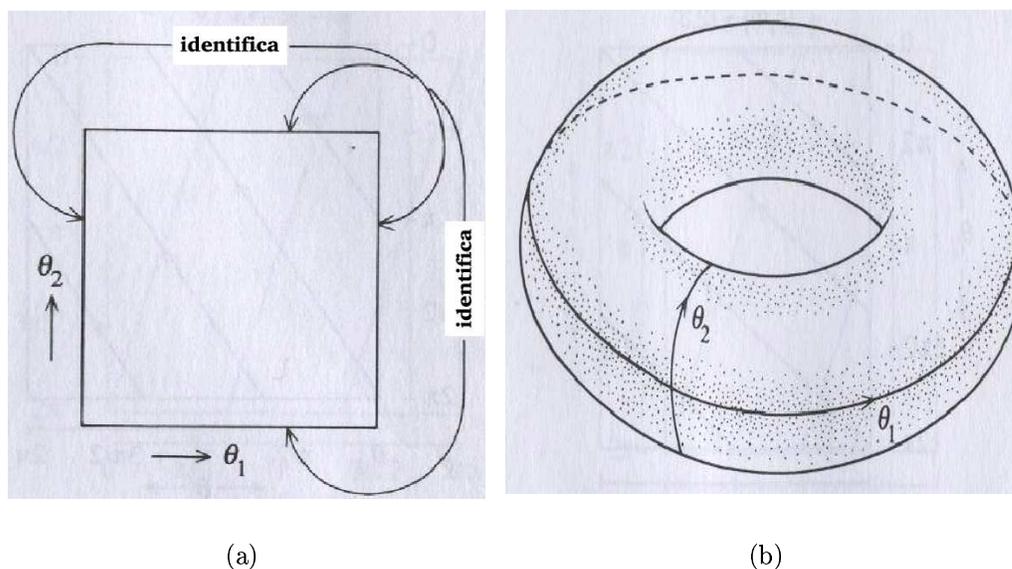


Figura 3: Toróide plano como quociente do plano

Colocamos $f(x) = f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \bmod 1$. A ação de f no toróide é ilustrada na figura 4. A diferencial dá:

$$df = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que é constante. Os subespaços invariantes são obtidos apenas calculando-se os autovetores (soluções da equação $df \cdot v = \alpha v$): os autovalores são $\alpha_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1/\alpha_u$ e os autovetores $v^u = ((1+\sqrt{5})/2, 1)$ e $v^s = ((1-\sqrt{5})/2, 1)$. A

aplicação f expande por um fator α^u na direção de v^u e contrai por um fator α^s na direção v^s (observe que esse é o ponto crucial que fornece a hiperbolicidade). A figura 5 ilustra como curvas no plano são “rebatidas” no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ dando origem a curvas fechadas no toróide.

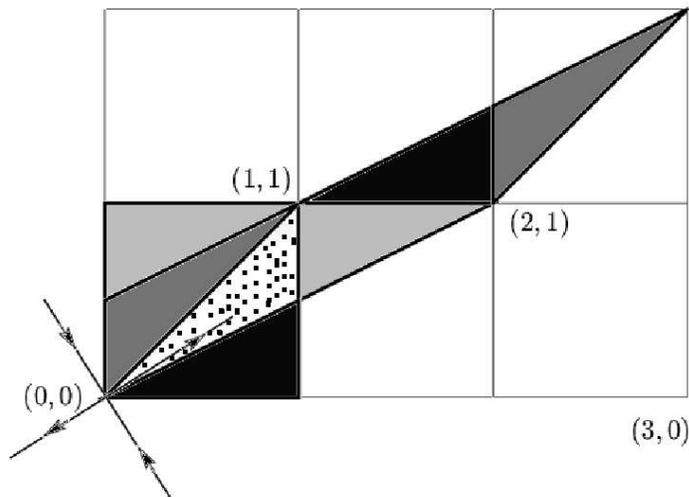


Figura 4: A ação de f no toróide. A figura indica a imagem do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por f em \mathbb{R}^2 . Depois a identificação via mod 1 rebate a imagem de f no quadrado. As tonalidades diferentes indicam onde cada parte é rebatida.

Exemplo 2 Consideremos a aplicação ilustrada na figura 6 (Smale’s Horseshoe).

Em cada iterada f contrai por um fator $\alpha < 1$ na horizontal e expande por um fator $\frac{1}{\alpha} > 1$ na vertical. Pode-se mostrar que o conjunto invariante da dinâmica é $\Lambda = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, onde \mathcal{C} é o conjunto de Cantor (HASSEMBLAT; KATOK, 2003). Observe que a ferradura de Smale é um conjunto invariante mas não um atrator.

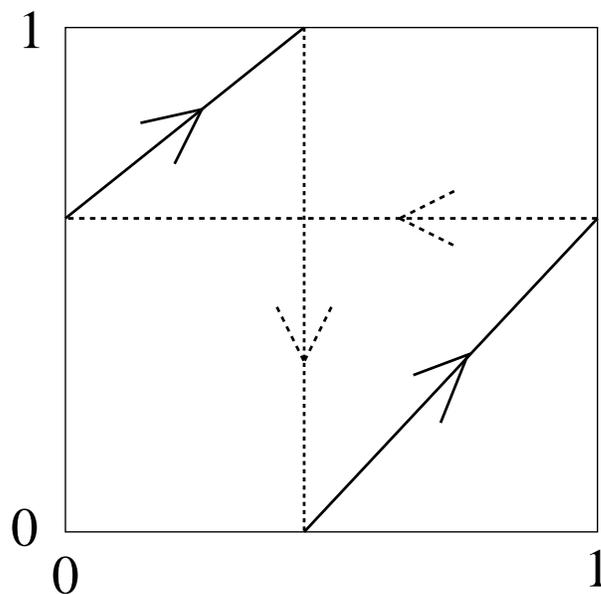


Figura 5: A figura mostra como uma curva enrola-se no toróide através do “rebatimento” para o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$

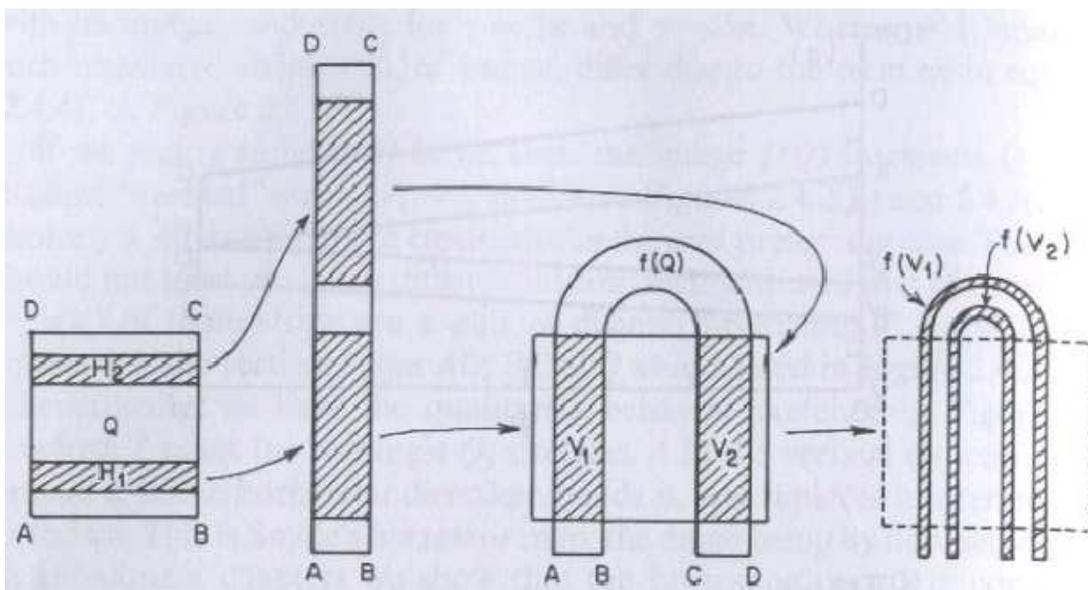


Figura 6: Ferradura de Smale. As regiões H_1 e H_2 indicam as partes da ferradura que, na próxima iterada, retornam no quadrado, dando origem às regiões V_1 e V_2 — isto é, $V_1 = f(H_1)$ e $V_2 = f(H_2)$. Observe o dobramento da função pela trajetória das quinas A, B, C, D .

3 *Pseudo-órbitas e sombreamento*

Consideremos a tradicional aplicação quadrática $f(x) = 4x(1 - x)$. Imagine que estamos calculando sua órbita em um computador chamado “Deep Blue”, cuja precisão numérica é de apenas duas casa decimais. Suponhamos ainda que a condição inicial seja 0.33. Temos que a próxima iterada é $f(0.33) = 0.8844$, mas o Deep Blue computa apenas 0.88. A próxima iteração do Deep Blue tomará como valor de entrada não o resultado verdadeiro 0.8844 e sim 0.88, ou seja, obteremos $f^2(0.33) = f(0.88) = 0.42$ quando o resultado verdadeiro é $f^2(0.33) = f(0.8844) = 0.40894656$. Observe que o erro do computador não se dá simplesmente no momento de apresentar o resultado, isto é, ele não está computando corretamente *todos* os valores e apenas *suprimindo* a terceira casa decimal no momento de apresentar o resultado. Ao calcular a segunda iterada já há um erro no valor de entrada 0.88 (que deveria ser 0.8844). Assim, há um erro *em cada iteração* da dinâmica. O que obtemos como resultado não é uma órbita verdadeira do sistema, mas algo semelhante a uma órbita e que chamamos portanto de *pseudo-órbita*. Como o erro cometido é da ordem de δ , para enfatizar esse dado falamos em δ -pseudo-órbita. O principal objetivo da teoria de sombreamento é responder à seguinte pergunta: “Qual a relação existente entre os dados obtidos a partir das pseudo-órbitas e os dados obtidos a partir das órbitas verdadeiras?”. A importância dessa questão é evidente, o que fornece à teoria de sombreamento um caráter de *fundamento* de vários métodos numéricos utilizados nas ciências físicas.

Podemos agora formalizar os conceitos expressos no parágrafo anterior.

Definição 5. (BRIN; STUCK, 2002) Uma seqüência de pontos (finita ou infinita) $(x_n) \subset \mathcal{M}$ é uma δ -pseudo-órbita (para f) se $d(x_{n+1}, f(x_n)) < \delta$ para todo elemento da seqüência (x_n) .

No exemplo acima do “Deep blue” temos $\delta = 10^{-3}$.

Definição 6. (BRIN; STUCK, 2002) Uma δ -pseudo-órbita é η -sombreada se existe um ponto $y \in \mathcal{M}$ tal que $d(x_n, f^n(y)) < \eta$ para todo $n \geq 0$ (se f for inversível pediremos para todo $n \in \mathbb{Z}$). Se a condição é válida somente para um número finito de iteradas dizemos que a δ -pseudo-órbita é η -sombreada por um tempo finito.

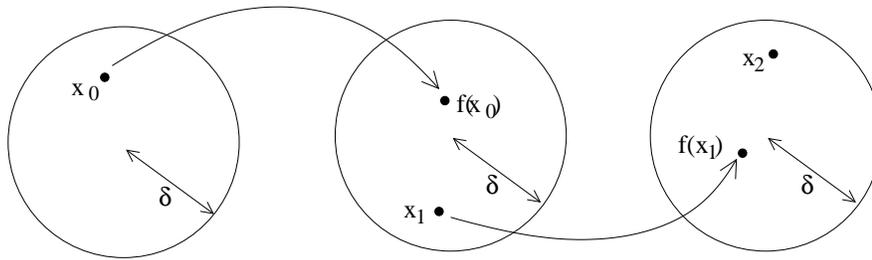


Figura 7: Uma δ -pseudo-órbita .

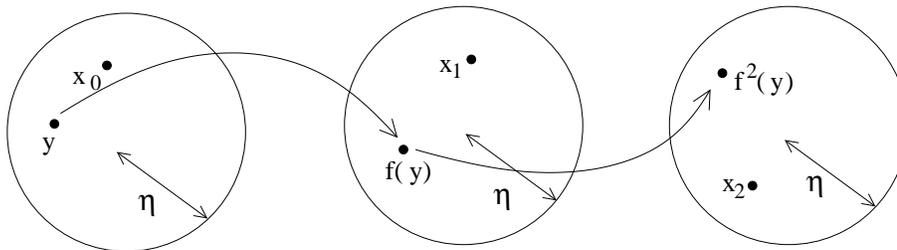


Figura 8: Uma δ -pseudo-órbita $\{x_0, x_1, x_2\}$ que é η -sombreada por $\{y, f(y), f^2(y)\}$.

De forma mais geral, queremos falar em sistemas dinâmicos nos quais todas suas δ -pseudo-órbita possam ser η -sombreadas, desde que escolhamos adequadamente a relação entre δ e η .

Definição 7. (BRIN; STUCK, 2002) Dizemos que um sistema dinâmico $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é *sombreadável* se dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita é η -sombreada .

Isto é: para um dado $\eta > 0$ (“queremos que a distância entre a órbita real e a pseudo-órbita não seja superior a η ”) então existe um $\delta > 0$ (“então para isso ser verdade precisamos usar um computador com erro de truncamento que não ultrapasse δ ”).

Definição 8. (NEWHOUSE,) Um conjunto hiperbólico Λ tem estrutura de produto local se existem $\eta > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos tais que (i) para todo $x, y \in \Lambda$ a interseção $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(y)$ consiste de no máximo um ponto que pertence a Λ e (ii) se $x, y \in \Lambda$ com $d(x, y) < \delta$ a interseção é transversal e igual a exatamente um ponto z , também denotado $[x, y]$ (ver figura 9).

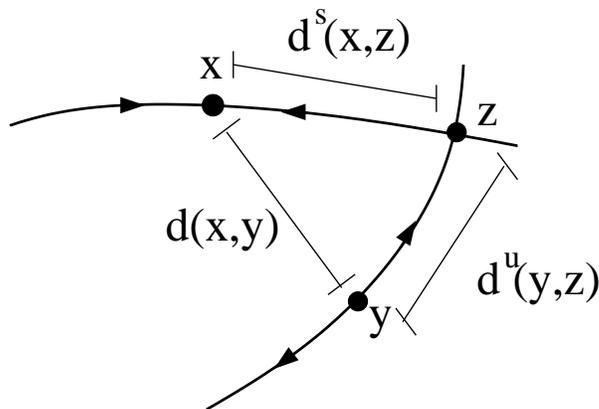


Figura 9: Estrutura de produto local.

A importância dos sistemas hiperbólicos no contexto da teoria de sombreamento deve-se ao fato de que com a hipótese de hiperbolicidade podemos garantir a sombreamento das órbitas em qualquer sistema dinâmico, como é demonstrado abaixo ¹. A estratégia da prova é a seguinte: dada uma δ -pseudo-órbita

¹Poderíamos apenas citar uma das intermináveis referências que apresentam a demonstração. Contudo, achamos profícuo incluí-la aqui para que possamos chamar a atenção em quais pontos a estrutura hiperbólica está entrando de forma crucial para a presença do sombreamento — e assim contrastar com os sistemas que apresentam UDV

(x_i) vamos construir outra seqüência de pontos (z_i) , próxima de (x_i) , com a propriedade de que sempre o próximo ponto de (z_i) é determinado pela interseção da variedade estável do ponto anterior da seqüência (z_i) com a variedade instável de um ponto da δ -pseudo-órbita. Ao fazermos isso é que estaremos usando explicitamente a estrutura de produto local — e, portanto, a hiperbolicidade, já que estrutura de produto local só pode ser definida para sistemas hiperbólicos (ver seção 3). Refiramos o leitor à figura 10 para uma visão geométrica dessa situação. De uma forma ligeiramente diferente, o teorema foi provado por Anosov (ANOSOV, 1967). A versão abaixo é devida a Bowen (BOWEN, 1975).

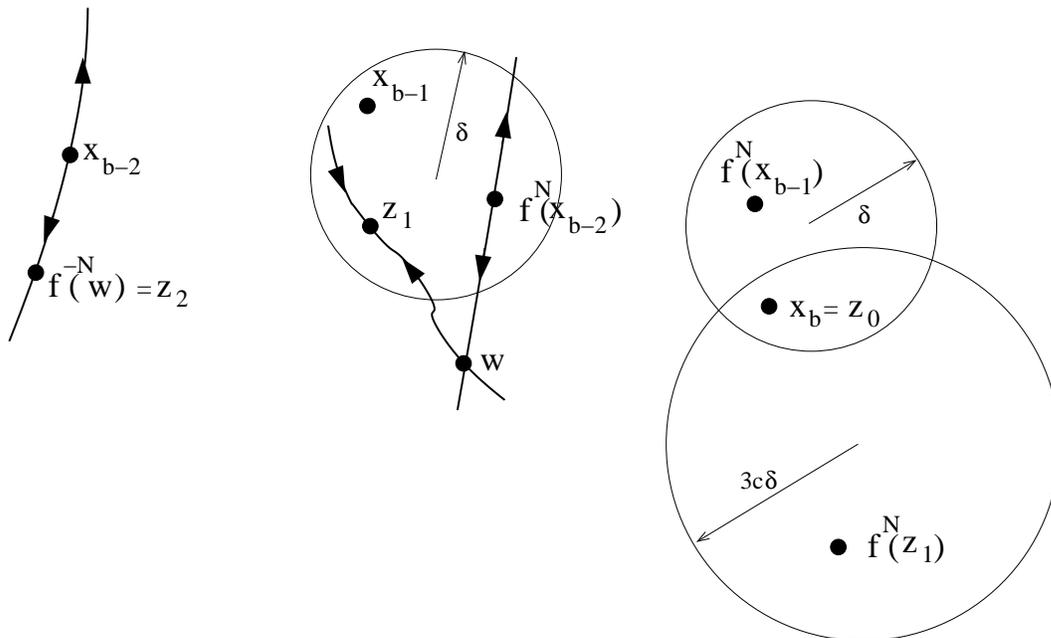


Figura 10: Shading lemma. w é o ponto $W_{\eta_0}^u(f^N(x_{b-(j+1)})) \cap W_{\eta_0}^s(z_j)$ que aparece da demonstração.

Teorema 1. (NEWHOUSE,) (*Shading Lemma*) *Seja $\Lambda \subset \mathcal{M}$ hiperbólico com estrutura de produto local para $f : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Então para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo-órbita em Λ é η -sombreada (por um ponto de Λ).*

Dem: Observamos que existem constantes $\eta_0 > 0$ e $\lambda > 1$ com as seguintes propriedades: Se $0 < \eta_1 < \eta_0$ então (a) para $x, y \in \Lambda$, $W_{\eta_1}^u(x) \cap W_{\eta_1}^s(y) \subset \Lambda$ é no máximo um ponto (isso segue-se basicamente da transversalidade das

variedades instável e estável); (b) $y \in W_{\eta_1}^u(x)$ implica $d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \lambda^{-n}\eta_1$ para $n \geq 0$ (pontos afastam-se na variedade instável); (c) $y \in W_{\eta_1}^s(x)$ implica $d(f^n(y), f^n(x)) \leq \lambda^{-n}\eta_1$ para $n \geq 0$ (aproximam-se na variedade estável).

Da estrutura de produto local podemos encontrar uma constante $c > 1$ tal que se $z \in W_{\eta_0}^u(x) \cap W_{\eta_0}^s(y)$ então $d^s(x, z) \leq cd(x, y)$ e $d^u(y, z) \leq cd(x, y)$ (onde d^s e d^u denotam as distâncias sobre as variedades estável e instável, ver figura 9).

Fixe um inteiro $N > 0$ tal que $2\lambda^{-N}c < 1$. Mostraremos que podemos sombrear f^N . Depois mostraremos que isso é suficiente para o resultado do teorema.

Dado $\eta > 0$ seja $\delta > 0$ tal que $\frac{3c\delta}{1-\lambda^{-N}} < \eta$. Assuma ainda que δ é suficientemente pequeno de modo que se $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y) < 2\delta$ então $W_{\eta_0}^u(x) \cap W_{\eta_0}^s(y)$ é um único ponto.

Seja $(x_i)_{-\infty < i < \infty}$ uma δ -pseudo-órbita para f^N em Λ e seja $b > 1$ um inteiro. Pela definição de pseudo-órbita $d(f^N(x_{b-1}), x_b) < \delta$. Definimos $z_0 = x_b$. Vamos assumir indutivamente que para $j \geq 1$ temos um ponto z_j tal que (i.e.: vamos supor que as hipóteses abaixo valem para $1, \dots, j$ e mostraremos que isso implica valerem para $1, \dots, j, j+1$; por isso indexaremos as hipóteses por j):

$$(1)_j \quad d(z_j, x_{b-j}) < \delta;$$

$$(2)_j \quad d(f^{Nk}(z_j), x_{b-j+k}) < 3c\delta(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-Ni}) \text{ para } 1 \leq k \leq j.$$

Colocando $z_{j+1} = f^{-N}(W_{\eta_0}^u(f^N(x_{b-(j+1)})) \cap W_{\eta_0}^s(z_j))$, mostraremos que z_{j+1} satisfaz $(1)_{j+1}$ e $(2)_{j+1}$. Primeiro notamos que de $(1)_j$ segue-se $d(f^N(x_{b-(j+1)}), z_j) \leq d(f^N(x_{b-(j+1)}), x_{b-j}) + d(x_{b-j}, z_j) < 2\delta$, donde z_{j+1} pode ser definido (i.e.: como a distância é menor do que 2δ temos que a intersecção entre as variedades não é vazia e é um único ponto, visto que escolhemos δ dessa maneira; observe que a desigualdade vale porque (i) $d(f^N(x_{b-(j+1)}), x_{b-j}) < \delta$ já que trata-se de uma δ -pseudo-órbita e (ii) $d(x_{b-j}, z_j) < \delta$ pela hipótese de indução $(1)_j$). Pela escolha de c temos $d^u(f^N(z_{j+1}), f^N(x_{b-(j+1)})) \leq cd(z_j, f^N(x_{b-(j+1)})) \leq c[d(f^N(x_{b-(j+1)}), x_{b-1}) + d(x_{b-1}, z_j)] \leq 2c\delta$ (novamente usando a definição de δ -pseudo-órbita e a hipótese de indução), donde, usando a expansão na variedade instável $d(z_{j+1}, x_{b-(j+1)}) \leq$

$2\lambda^{-N}c\delta < \delta$ que é $(1)_{j+1}$.

Tal como fizemos antes, da escolha de c segue-se:

$$d^s(f^N(z_{j+1}), z_j) \leq cd(f^N(x_{b-(j+1)}), z_j) \leq c2\delta .$$

Como $f^N(z_{j+1}) \in W_{\eta_0}^s(z_j)$, a contração na variedade estável implica

$$d(f^{(k+1)N}(z_{j+1}), f^{kN}(z_j)) \leq \lambda^{-kN}d(f^N(z_{j+1}), z_j) \leq \lambda^{-kN}2c\delta$$

para $k \geq 0$. Para $0 \leq k \leq j+1$ temos

$$d(f^{kN}(z_{j+1}), x_{b-(j+1)+k}) \leq d(f^{kN}(z_{j+1}), f^{N(k-1)}(z_j)) + d(f^{N(k-1)}(z_j), x_{b-j+(k-1)}) .$$

Se $k = 1$ isso fornece $d(f^{kN}(z_{j+1}), x_{b-(j+1)+k}) \leq 2c\delta + \delta \leq 3c\delta$. Se $2 \leq k \leq j+1$ temos $d(f^{kN}(z_{j+1}), x_{b-(j+1)+k}) \leq \lambda^{-(k-1)N}2c\delta + 3c\delta(\sum_{i=0}^{k-2} \lambda^{-Ni}) \leq 3c\delta(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-Ni})$ que é $(2)_{j+1}$.

Agora ponha $w_b = f^{Nb}(z_{2b})$. Temos $d(f^{jN}(w_b), x_j) = d(f^{(b+j)N}(z_{2b}), x_j)$. Daí $(1)_{2b}$ e $(2)_{2b}$ fornecem $d(f^{jN}(w_b), x_j) \leq \frac{3c\delta}{1-\lambda^{-N}} < \eta$ para $|j| \leq b$ (ponha $b+j = j'$; temos que (2) vale para $1 \leq j' \leq 2b$). Seja agora w um ponto de acumulação para $\{w_b\}$. Então $d(f^{jN}(w), x_j) < \eta$ para todo j . Assim temos que f^N é η -sombreada.

Resta agora mostrar que se f^N pode ser η -sombreada então f também pode. Essencialmente usaremos que a estrutura de produto local nos permite sombrear por tempo finito as órbitas para sombrearmos entre os intervalos $N, 2N, \dots$. Escolhemos η_1 tal que $d(x, y) < \eta_1$ implique $d(f^j(x), f^j(y)) < \frac{\eta}{2}$ para $0 \leq j \leq N$. Escolhemos ainda $\delta_1 > 0$ tal que cada δ_1 -pseudo-órbita para f^N pode ser η_1 -sombreada (o que é possível pelo resultado do parágrafo anterior). Pegamos $\delta > 0$ de modo que se (x_i) é uma δ -pseudo-órbita para f então (x_{Ni}) é uma δ_1 -pseudo-órbita para f^N (ver figura 11); e para cada i e $0 \leq j \leq N$ temos $d(f^j(x_i), x_{i+j}) < \frac{\eta}{2}$. Agora seja y um ponto em Λ tal que $d(f^{Ni}(y), x_{Ni}) \leq \eta_1$

para todo i . Então para $0 \leq j \leq N$ $d(f^{N_i+j}(y), x_{N_i+j}) \leq d(f^{N_i+j}(y), f^j(x_{N_i})) + d(f^j(x_{N_i}), x_{N_i+j}) \leq \eta$.

□

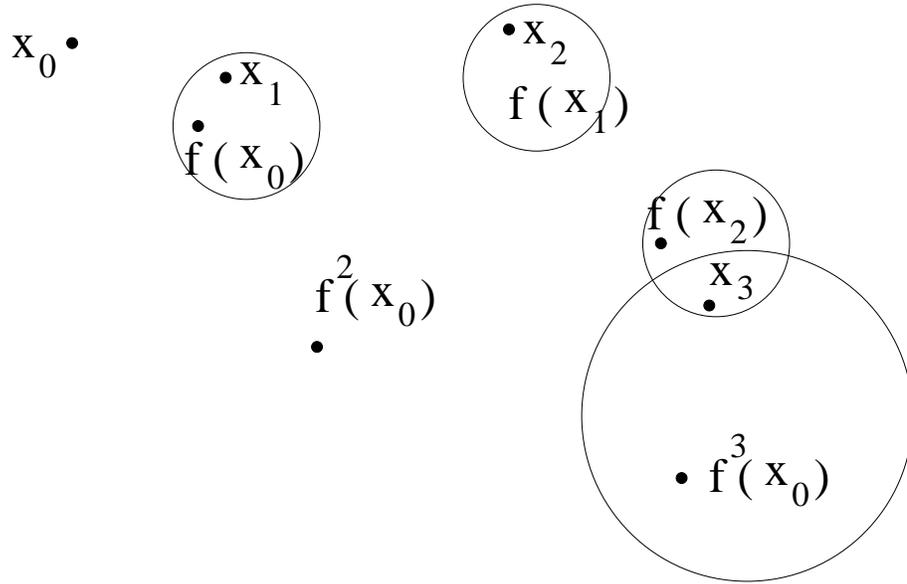


Figura 11: Relação entre δ e δ_1 . A bola de raio maior representa a bola de raio δ_1 e as demais são de raio δ

4 *Variação da Dimensão Instável*

Introduziremos agora um dos conceitos centrais em nosso trabalho. Denotaremos por $\dim(\cdot)$ a dimensão dos espaços em questão. Seguindo o resto do trabalho, escreveremos UDV (abreviação da expressão em inglês para *Unstable Dimension Variability*) para *Variação da Dimensão Instável*.

Definição 9. (VIANA et al., 2003) *Um sistema dinâmico possui UDV na seguinte situação: um conjunto invariante Ω da dinâmica possui dois pontos fixos (hiperbólicos) p e q tais que $\dim E_p^u \neq \dim E_q^u$. O número $\dim E_x^u$ é chamado de índice do ponto fixo.*

A figura 13 ilustra essa situação. Observe que em um sistema hiperbólico isso não pode acontecer pois as direções instável e estável “não se misturam”. Logo, sistemas com UDV não são hiperbólicos.

Observação 3. *Lembramos que uma tangência homoclínica (heteroclínica) é um ponto onde as variedades instável e estável de um ponto fixo (dois pontos fixos) hiperbólico(s) são tangentes (ver figura 12). UDV desempenha em sistemas de dimensão maior ou igual a três papel semelhante ao das tangências homoclínicas e heteroclínicas em sistemas de dimensão dois, no sentido de que é um mecanismo para quebra de hiperbolicidade. Lembramos, no entanto que as tangências também possam ser encontradas em dimensão alta.*

A primeira descrição de um sistema apresentando UDV data de 1970, em um trabalho de Abraham e Smale (ABRAHAM; SMALE, 1970). Entretanto, foi

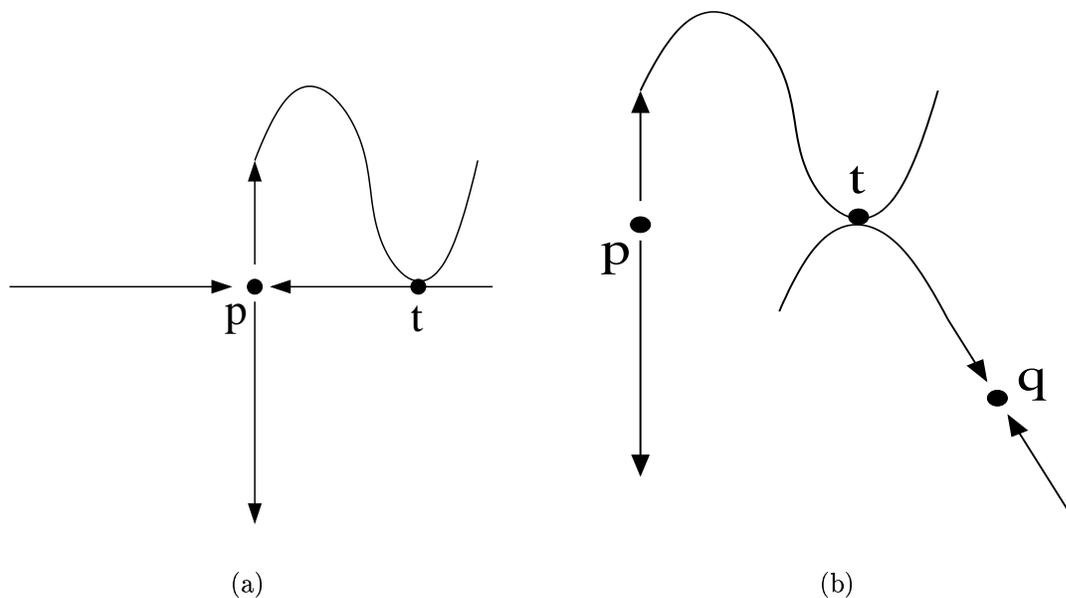


Figura 12: Tangência (a) homoclínica e (b) heteroclínica. O ponto t é o ponto de tangência

necessário um período de mais de vinte anos para que testemunhássemos um sistema físico exibindo esse comportamento. Essa novidade foi apresentada em um trabalho de Romeiras e Grebogi (ROMEIRAS et al., 1992). Desde então, UDV tem sido um tema de intensa pesquisa na comunidade física.

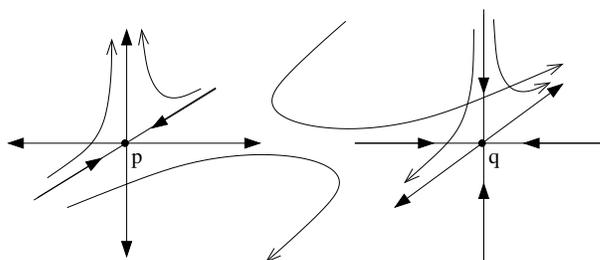


Figura 13: Dois pontos fixos com direções estáveis de diferentes dimensões.

Exemplo 3 — Parte I Consideremos uma aplicação do toróide plano dada por $f(x, y) = (2x, x + y + A \sin(x + y)) \bmod{2\pi}$ onde $0 < A < 1$. $p = (0, 0)$ e $q = (0, \pi)$ são dois pontos fixos. A derivada é:

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 + A \cos(x+y) & 1 + A \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

donde segue-se que p é uma fonte (autovalores 2 e $1+A$) e q é uma sela (autovalores 2 e $1-A$). É possível então mostrar que f apresenta UDV (KOSTELICH et al., 1997); voltaremos a esse exemplo quando introduzirmos o expoente de Lyapunov a tempo finito.

4.1 UDV e sombreabilidade

Conforme exposto na introdução, as relações mais estreitas entre UDV e sombreabilidade ainda não foram compreendidas. Todavia, uma aproximação geométrica e intuitiva para essa relação pode ser dada da seguinte maneira. Consideremos um sistema tri-dimensional contendo um atrator caótico Ω no qual há dois pontos fixos p e q de índices distintos. Digamos que $\dim E_p^u = 2$ e $\dim E_q^u = 1$ (ver figura 13). Trajetórias típicas no atrator têm segmentos arbitrariamente longos nos quais a órbita é repulsora em duas direções e segmentos arbitrariamente longos nos quais a órbita é repulsora em uma direção apenas (KOSTELICH et al., 1997). Em outras palavras, trajetórias típicas no conjunto invariante Ω passam tempos arbitrariamente longos perto de cada um dos pontos fixos. Uma esfera de condições iniciais perto de q será afinada em uma linha L de pequena espessura. Consideremos uma δ -pseudo-órbita *começando na esfera de condições iniciais*; para efeitos práticos pensemos que é uma órbita gerada por computador com erro de truncamento igual a δ . Essa órbita computacional ficará tipicamente a uma distância δ de L . Quando a região ao redor da trajetória numérica desenvolver uma segunda direção expansiva ao passar na vizinhança de p , a trajetória numérica será repelida exponencialmente de L , resultando em uma trajetória não sombreável (DAWSON et al., 1994).

Observe que, havendo continuidade na mudança do comportamento dinâmico das autodireções, há um ponto no qual podemos observar a transição atra-

tivo/repulsivo. Isso sugere uma ligação com a teoria de variedades centrais (MANNEVILLE, 1991) e podemos nos perguntar se UDV não pode ser caracterizada pela existência de uma variedade central mergulhada no atrator.

4.2 Quantificando UDV

Uma maneira de medir a quantidade de órbitas periódicas (em um atrator) com diferente número de direções instáveis é o *expoente de Lyapunov a tempo finito* (ABARBANEL; BROWN; KENNEL, 1991). O cálculo do expoente a tempo finito é feito da mesma maneira que o expoente de Lyapunov usual, exceto pelo fato de que é usado um tempo finito (usualmente curto (VIANA et al., 2003)) de iterações. O método que utilizamos para o cálculo numérico dos expoentes é elaborado em (ECKMANN; RUELLE, 1985).

UDV pode ser identificada através da presença de um expoente a tempo finito que flutua em torno de zero por períodos arbitrários de tempo. A idéia é que se há UDV então ao menos um dos expoentes da dinâmica (correspondente a uma direção cujo caráter dinâmico alterna-se entre expansivo e contrativo) é hora computado como positivo (autodireção expansiva) e hora como negativo (autodireção contrativa) (DAWSON et al., 1994). É sabido que o expoente de Lyapunov independe da condição inicial caso o sistema possua uma medida ergódica (KATOK; HASSEMBLAT, 1995). O expoente a tempo finito, no entanto, sempre depende da condição inicial (ABARBANEL; BROWN; KENNEL, 1991).

Seja Ω um atrator caótico com presença de UDV. Como mencionamos a pouco, é esperado que um dos expoentes da dinâmica flutue erraticamente em torno de zero. Esse comportamento “aleatório” sugere uma aproximação através de uma distribuição de probabilidade $P(\lambda^{(i)}(T), T)$ para o i -ésimo expoente a tempo finito T (também chamado i -ésimo expoente de tempo- T), denotado por $\lambda^{(i)}(T)$, com condição inicial escolhida randomicamente (de acordo com a medida natural do atrator ¹, caso a mesma exista).

¹Lembramos que a medida natural é o que garante que as instabilidades locais nos atratores possam ser compreendidas a partir de estatísticas sobre órbitas iniciando-se na bacia de atração.

Para sabermos como modelar essa distribuição de probabilidade pensemos da seguinte maneira. Se há UDV, há um momento no qual uma autodireção muda seu caráter de repulsivo para atrativo ou vice-versa. Sabemos que isso vai ocorrer para as órbitas típicas do atrator, mas não sabemos quando. A probabilidade de eventos desse tipo ocorrerem é usualmente modelada pela distribuição de Poisson (REICHL, 1998). Assim, tomando N grande o suficiente podemos aproximar (ABARBANEL; BROWN; KENNEL, 1991; VIANA et al., 2003):

$$P(\lambda^{(i)}(T), T) \approx \sqrt{\frac{TG''(\lambda^{(i)})}{2\pi}} e^{-TG(\lambda^{(i)}(T))}$$

onde $\lambda^{(i)}$ é o limite infinito de $\lambda^{(i)}(T)$ (i.e.: o i -ésimo expoente) e a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz:

$$G(\lambda^{(i)}) = G'(\lambda^{(i)}) = 0, \quad G''(\lambda^{(i)}) > 0$$

Essas condições sobre G significam que localmente G é quadrática, positiva definida e que está distribuída simetricamente em torno de zero.

Expandindo G encontramos que $P(\lambda^{(i)}(T), T)$ pode ser aproximada por uma gaussiana:

$$P(\lambda^{(i)}(T), T) \approx \sqrt{\frac{TG''(\lambda^{(i)})}{2\pi}} e^{-\frac{TG''(\lambda^{(i)})}{2}(\lambda^{(i)}(T) - \lambda^{(i)})^2} \quad (4.1)$$

Uma aproximação numérica para a distribuição $P(\lambda^{(i)}, T)$ pode ser calculada a partir de uma grande número de trajetórias de tempo- T com condições iniciais escolhidas randomicamente em Ω .

Note que ao dizermos que UDV é identificada por um expoente que flu-

Ocorre que o atrator é em geral um ente de medida de Lebesgue nula, donde condições iniciais sorteadas ao acaso nunca estarão no atrator. Por outro lado, não há razão *a priori* para que uma estatística feita sobre a órbita na bacia de atração traga informações acerca do atrator. A validade dessa relação é garantida pela existência de uma medida natural. Matematicamente isso significa que a soma das medidas atômicas suportadas na órbita converge para uma medida suportada no atrator — exceto para um conjunto de medida de Lebesgue nula na bacia de atração. Ver (NEWHOUSE,)

tua em torno de zero não estamos afirmando que a distribuição deva estar centrada em zero. De fato, pela expressão (4.1) a distribuição é centrada no limite de tempo infinito do expoente. Portanto, flutuação em torno de zero significa que a distribuição *cruza* o valor zero — não no sentido de que haja conjuntos $V \subset (-\infty, 0)$ e $V' \subset (0, \infty)$ de medida de Lebesgue positiva para os quais $\int_V P(\lambda^{(i)}(T), T) d\lambda^{(i)}(T) > 0$ e $\int_{V'} P(\lambda^{(i)}(T), T) d\lambda^{(i)}(T) > 0$ (já que isso sempre acontece em uma gaussiana), mas sim no sentido de que a distribuição cruza zero perto da região delimitada pela variância da distribuição. E isso obviamente depende da relação entre o valor da média e o valor do segundo momento.

A distribuição de expoentes a tempo finito não precisa ser, contudo, gaussiana. A gaussianidade da distribuição está assentada nas hipóteses feitas sobre a função G . Todavia, mesmo no caso não gaussiano, ainda podemos falar em média e variância da distribuição. Logo, o critério de identificação de UDV que usa a existência de uma distribuição cruzando zero ainda é válido (note que o argumento desenvolvido no segundo parágrafo deste capítulo não implica nem pressupõe uma distribuição gaussiana).

Exemplo 3 — Parte II Agora que introduzimos o expoente a tempo finito podemos voltar ao exemplo 3 e mostrar que o sistema apresenta UDV. A figura 14 mostra a densidade de probabilidade do segundo expoente de tempo-10 para $A = 0.6$. Da distribuição fica óbvio que há oscilação do expoente.

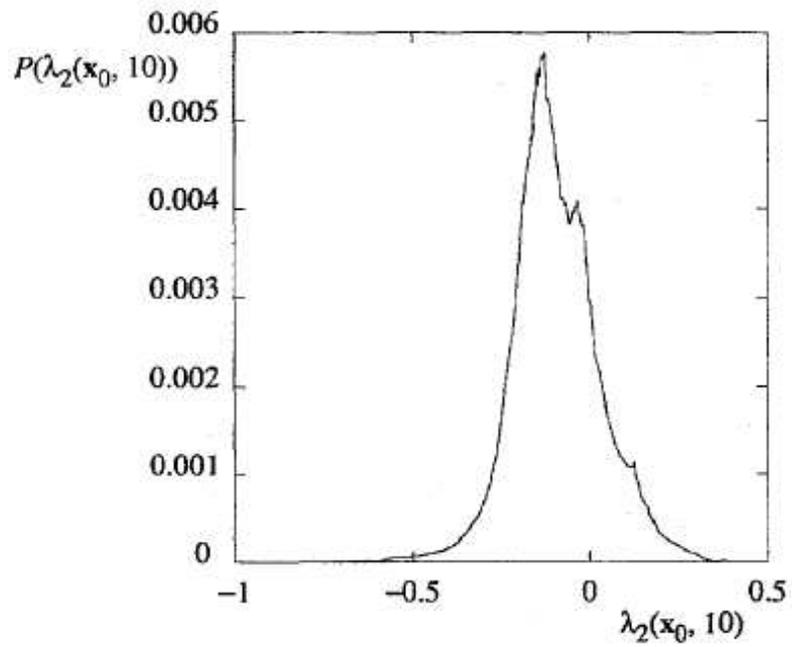


Figura 14: Distribuição de expoente a tempo finito para o segundo expoente do sistema apresentado no exemplo 3. Foram usadas 10^7 condições iniciais para o cálculo da distribuição. Extraído de (KOSTELICH et al., 1997).

5 *UDV e sistemas acoplados*

Vamos agora expor os principais resultados concernentes à teoria de sobre-
amento para sistemas acoplados.

Definição 10. *Seja $\mathcal{M} = I^\Xi$, onde I é um intervalo fechado da reta — que podemos tomar sem perda de generalidade como $[0, 1]$ — e Ξ é um subconjunto de \mathbb{Z}^n . \mathcal{M} é chamada de rede n -dimensional. Cada componente conexa de \mathcal{M} é um intervalo $[0, 1]$ e é chamada de sítio. Seja $f : I \rightarrow I$. Definimos então a aplicação produto de f , $\Pi(f) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ por $(\Pi(f)(x))_i = f(x_i)$ onde $x \in \mathcal{M}$ e $(\cdot)_i$ denota a projeção na i -ésima coordenada. Seja $A_\epsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ uma família a um parâmetro de transformações com $\epsilon \in [0, 1]$ satisfazendo: $A_0 =$ identidade e $(A_1(x))_i$ independe de x_i ; A_ϵ é dito acoplamento da dinâmica. Uma rede de mapas acoplados n -dimensional consiste em um par $(F_\epsilon, \mathcal{M})$, onde \mathcal{M} é uma rede n -dimensional e $F_\epsilon = A_\epsilon \circ \Pi(f) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. f é chamada de dinâmica local e ϵ de parâmetro de acoplamento.*

Observação 4. *São possíveis definições mais gerais de redes de mapas acoplados. A primeira generalização óbvia seria permitir dinâmicas locais d -dimensionais ao invés de aplicações do intervalo no intervalo. Aqui não precisaremos disso.*

Em nosso trabalho estaremos interessados em estudar um caso particular das transformações acopladas. Tomaremos $\Xi = \{1, \dots, N\} \subset \mathbb{Z}$ e A_ϵ da forma:

$$(A_\epsilon(x))_i = (1 - \epsilon)x_i + \epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}h(x_j) \quad (5.1)$$

onde $x_{i-1} = x_N$ se $i = 1$ e $x_{i+1} = x_1$ se $i = N$ — o que equivale a condições

de contorno periódicas e $\epsilon \in [0, 1]$. Condições de contorno periódicas estarão doravante sempre subentendidas caso não seja dito o contrário. O acoplamento do tipo dado pela equação 5.1 consiste precisamente no tipo de acoplamento obtido pela discretização do Laplaciano. Isso que torna as dinâmicas governadas por 5.1 de grande interesse físico.

A variedade de sincronização \mathcal{S} é definida como $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{M} : x_1 = \dots = x_N\}$. Observamos que se a dinâmica local possui um atrator caótico e $\sum_j g_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, N$ segue-se que \mathcal{S} é (trivialmente) um conjunto caótico invariante para F_ϵ . Note que a dimensão da variedade de sincronização é igual à dimensão da dinâmica local — que no nosso caso tomamos como igual a 1.

O estudo da estabilidade da variedade de sincronização desempenha um papel importante na teoria de sombreamento para sistemas acoplados (LAI; GREBOGI, 1999). Seja Ω um atrator caótico da dinâmica local. Se o sistema é inicializado na variedade de sincronização então as infinitas órbitas periódicas instáveis mergulhadas em Ω são também órbitas periódicas do sistema acoplado (estamos assumindo que vale $\sum_j g_{ij} = 1$ o que, na maioria dos casos de interesse, é verdade). Ao acoplar o sistema, introduzimos $N - 1$ autodireções unidimensionais em cada uma dessas órbitas periódicas; e essas autodireções são *transversais* à variedade de sincronização. Nesses espaços transversais as órbitas periódicas em Ω *podem* (mas não há uma prova formal de que necessariamente *devem*) ter um número diferente de autodireções instáveis em razão do acoplamento — caso no qual o sistema apresentará UDV.

Achamos pertinente introduzir aqui uma pequena digressão para observarmos possíveis conexões que podem existir entre a teoria de sombreamento e o conceito de comportamento coletivo (CHATÉ, 1998; CHATÉ et al., 1996). O argumento desenvolvido no último parágrafo baseia-se principalmente na existência de uma variedade invariante \mathcal{S} (a variedade de sincronização) mergulhada no conjunto caótico. Essa variedade \mathcal{S} é dinamicamente equivalente a um sistema de baixa dimensão (o mapa local). Diz-se que um sistema apresenta *comportamento coletivo* quando, além da variedade de sincronização, ele possui um atrator global de baixa dimensão. Esse fenômeno tem sido relatado na literatura para todos os

sistemas caóticos acoplados difusivamente (BRUNET; CHATÉ; MANNEVILLE, 1994; CHATÉ, 1998; CHATÉ et al., 1996; BRUNET; GALLAS, 1998; MARTINS; BRUNET, 2001). Levantamos então duas questões: (i) Isso significaria que UDV seria também encontrada em sistemas com comportamento coletivo? (ii) E em caso afirmativo, como se dá nesses sistemas (com comportamento coletivo) a relação entre UDV e sombreabilidade, uma vez que os dados para comportamento coletivo parecem ser de inteira confiabilidade, inclusive com respaldo experimental (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS, 2001; MANNEVILLE, 1991)? Não é o objetivo do presente trabalho tentar responder a quaisquer uma das questões acima, mas achamos salutar levantá-las aqui.

Experimentos numéricos sugerem a presença de UDV em redes de mapas de Hénon acoplados, com acoplamento da forma 5.1, para qualquer valor não nulo de ϵ . UDV ainda pode ser encontrada em outros tipos de sistemas acoplados, incluindo fluxos (VIANA et al., 2003). Como muitos dos resultados dinâmicos em redes de mapas acoplados independem da forma particular da transformação local (KANEKO, 1986, 1989; BRUNET; CHATÉ; MANNEVILLE, 1994), é razoável a suposição de que UDV possa ser um fenômeno típico desses sistemas.

6 *A construção de um contra-exemplo*

Apesar de um grande número de sistemas não-hiperbólicos de alta dimensão exibirem UDV (LAI et al., 1999), (VIANA et al., 2003), (BARRETO; SO, 2000), (LAI, 1999), (VIANA; GREBOGI, 2000), (VIANA et al.,), (SAUER, 2002), (SAUER; GREBOGI; YORKE, 1997), (VIANA; PINTO; GREBOGI, 2002), (LAI; GREBOGI, 1999), essa não é uma propriedade universal de tais sistemas como mostraremos nesta seção através de um contra-exemplo. Observamos que nos trabalhos relacionados ao tema não foi conjecturado que *todos* os sistemas de alta-dimensão não hiperbólicos apresentam UDV; o que é afirmado é que UDV é um fenômeno *típico* desses sistemas. Mesmo assim, até agora não foi exibido (até onde temos conhecimento) um contra-exemplo que mostre que a conjectura não possa ser universalizada.

A idéia para mostrar isso será construir um sistema cuja dinâmica (global) aproxima-se da dinâmica de sistemas hiperbólicos se a rede é suficientemente grande. Observe que por *dimensão* entendemos a dimensão do espaço de fases. No nosso caso ela é igual ao número de sítios da rede pois nossa dinâmica local é unidimensional. Todavia, se a dinâmica local tem d -dimensão e temos N sítios, a dinâmica global tem dimensão Nd .

6.1 Sistema desacoplado

Consideremos $f : I \rightarrow I$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-L}x & 0 \leq x \leq \frac{1-L}{2} \\ 1 & \frac{1-L}{2} < x < \frac{1+L}{2} \\ \frac{2}{1-L}(1-x) & \frac{1+L}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

O gráfico da aplicação é mostrado na figura 15.

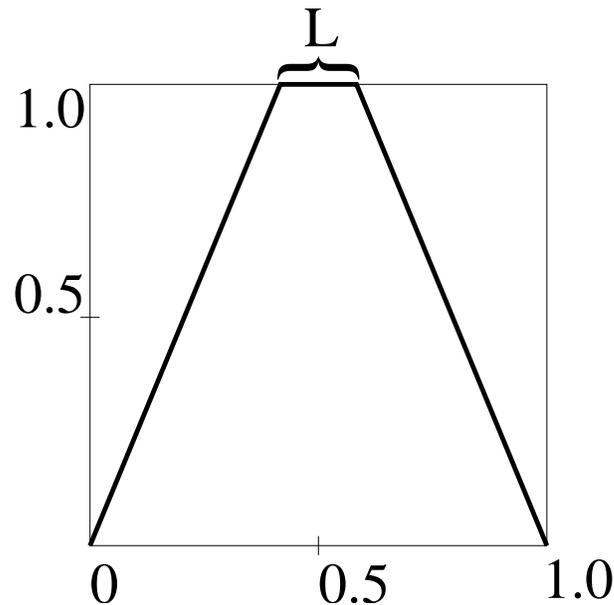


Figura 15: O Mapa local

Observe que uma vez que uma órbita de f atinja $\mathcal{C} = (\frac{1-L}{2}, \frac{1+L}{2})$, sua próxima iterada é igual a 1 e depois zero. Como a dinâmica fora de \mathcal{C} é expansiva, temos que $x = 0$ é um atrator global da dinâmica. O ponto $x = 0$ é também um ponto fixo linearmente instável, o que faz com que qualquer δ -pseudo-órbita se afaste de zero após passar por sua vizinhança. Conseqüentemente, o sistema não é sombreável: qualquer órbita necessariamente passará pela região \mathcal{C} e portanto será atraída para $x = 0$, enquanto as δ -pseudo-órbitas se afastarão de $x = 0$.

A perda de sombreabilidade ocorre quando as órbitas visitam a região \mathcal{C} — de fato, no limite $L \rightarrow 0$ temos o tradicional mapa da tenda, que é sombreável (COVEN; KAN; YORKE, 1988). Por isso chamamos \mathcal{C} de *região crítica*. O parâmetro L determina por quanto tempo as órbitas ficarão sem serem atraídas para

o atrator global. Isto é: com L maior as órbitas chegam em $x = 0$ em um número menor de iteradas.

6.2 Sistema acoplado

A situação muda radicalmente quando acoplamos o sistemas. Tomamos um acoplamento do tipo 5.1 com $g_{i,i-1} = g_{i,i+1} = 1/2$, $g_{ij} = 0$ nos demais casos e $h(x) = x$. Então podemos escrever para a dinâmica do i -ésimo sítio

$$x_i^{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_i^t) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_{i-1}^t) + f(x_{i+1}^t)) \quad (6.2)$$

Consideremos uma configuração na qual $x_i^t \in \mathcal{C}$ e $x_{i-1}^t \notin \mathcal{C}$ para algum i . Consideremos também que ϵ é muito pequeno mas não nulo. Então pela definição da dinâmica local temos $f(x_i^t) = 1$ e $0 \leq f(x_{i-1}^t) < 1$, o que implica:

$$1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{2}f(x_{i+1}^t) \leq x_i^{t+1} < (1 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{2}(1 + f(x_{i+1}^t)) \quad (6.3)$$

Como $0 \leq f(x_{i+1}^t) \leq 1$, nós podemos colocar cotas superiores e inferiores para x_i^{t+1} como $x_i^{t+1} \in [1 - \epsilon, 1)$. Agora, f mapeia $[1 - \epsilon, 1)$ na vizinhança de zero sem atingir exatamente o valor zero. A hipótese $\epsilon \ll 1$ implica que a próxima iterada de cada sítio será fortemente governada pela dinâmica local (ver figura 16). Visto que 0 é um ponto fixo linearmente instável para a dinâmica local a órbita do sítio i afastar-se-á de zero. Portanto quando o acoplamento é ligado a órbita de x_i não é mais atraída para zero. Isso não acontecerá somente quando $x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t \in \mathcal{C}$. Dado que i é um sítio arbitrário em nossa rede, inferimos que no caso acoplado a região crítica é $\mathcal{C}^N = \mathcal{C} \times \dots \times \mathcal{C}$ (N vezes).

Em resumo: quando $\epsilon \ll 1$ a dinâmica de cada sítio fora da região \mathcal{C} é similar à da dinâmica local. Entretanto, diferentemente do caso local, quando a órbita de um dado sítio, digamos i , atinge a região \mathcal{C} ela *não* é atraída (como no caso desacoplado) para $x = 0$ (conforme exposto no último parágrafo). Isto é, podemos dizer que a dinâmica de cada sítio no caso acoplado asselha-se à dinâmica local,

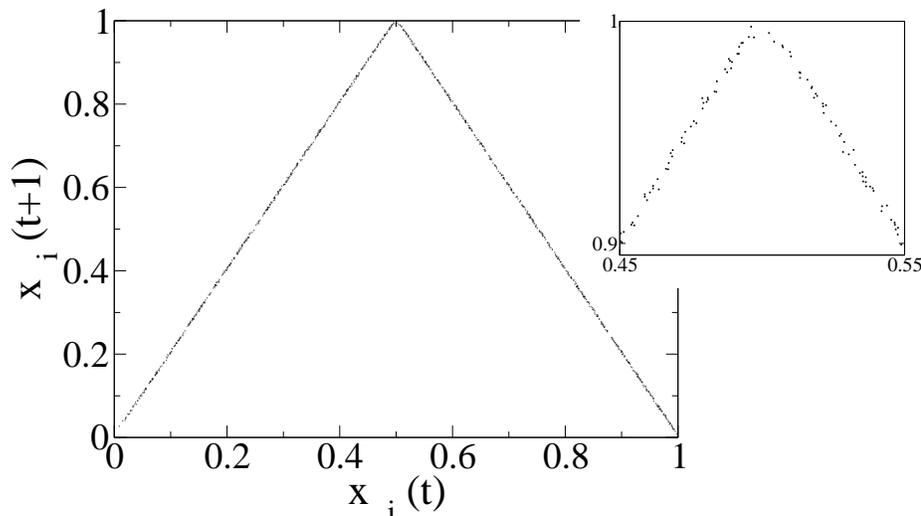


Figura 16: Mapa de primeiro retorno para um sítio escolhido ao acaso em uma rede 10-dimensional com $\epsilon = 0.01$ e $L = 0.01$. A linha vertical corresponde a $y = 1$. Observamos que a dinâmica desse sítio não atinge o valor 1.0: olhando diretamente no arquivo de dados descobrimos que o maior valor é 0.9977.

com a exceção de que agora a imagem (mais precisamente, a segunda iterada) da região crítica \mathcal{C} não é mais $x = 0$ e sim um ponto na vizinhança de zero. Assim, o mecanismo pelo qual a órbita real é atraída para zero enquanto as δ -pseudo-órbitas se afastam dele não mais existe. Claro, esse argumento só pode ser levado em conta quando a órbita (do sistema acoplado) não entrar na região crítica \mathcal{C}^N . Portanto, podemos evitar o mecanismo que tínhamos anteriormente de perda de sombreabilidade desde que possamos assegurar que o sistema não visite a região \mathcal{C}^N .

Lembremos agora que estamos interessados em uma situação na qual não somente ϵ é muito pequeno mas também L . Isso implica o volume de \mathcal{C}^N ser muito pequeno em comparação com o volume da região $[0, 1]^N - \mathcal{C}^N$ (que corresponde ao volume do complementar da região crítica). Donde se segue que para N muito grande $vol(\mathcal{C}^N)$ é desprezável em relação a $vol([0, 1]^N - \mathcal{C}^N)$. Como a probabilidade de escolhermos uma condição inicial cuja órbita atinge a região \mathcal{C}^N depende de $vol(\mathcal{C}^N)$, somos levados a concluir que *tipicamente as órbitas do*

sistema acoplado não entram em \mathcal{C}^N se N é suficientemente grande.

Para a não hiperbolicidade observamos a dinâmica de cada componente, a qual é ilustrada graficamente na figura 16. O platô fornece uma derivada nula nessa componente. Se por um lado isso não garante com absoluta certeza que a dinâmica global não seja hiperbólica, por outro também não há razão para o acoplamento introduzir hiperbolicidade na dinâmica global — e até onde temos conhecimento não há exemplos de tal caso na literatura. Além do mais, para acoplamento fraco — que é o caso de nosso interesse — sabemos que a dinâmica é fortemente governada pela forma local. Voltaremos a esse ponto no final do trabalho.

Esses argumentos teóricos são reforçados por evidências numéricas, as quais são discutidas abaixo.

6.3 Medidas numéricas

O primeiro passo que damos para investigar a dependência dos expoentes a tempo finito com a dimensão é a construção de um gráfico indicando a menor dimensão para a qual há oscilação versus os parâmetros ϵ e L . Mais precisamente, procedemos da seguinte maneira. Para cada tripla (N, ϵ, L) medimos o expoente a tempo finito e identificamos se há ou não oscilação. Para cada par (ϵ, L) existem valores de N para os quais há flutuação e valores para os quais não há. Para $N = 10$ fixo, as primeiras simulações indicaram inexistência de flutuação para valores não nulos de L e ϵ menores ou iguais a 5×10^{-3} e 10^{-2} , respectivamente. A conjectura em questão afirma que para N suficientemente grande sempre encontramos UDV. Assim, para cada par (ϵ, L) fixado, começamos a aumentar N até encontrarmos a *dimensão crítica* N^* a partir da qual há oscilação de pelo menos um dos expoentes a tempo finito. Dessa forma obtemos o gráfico da dimensão crítica versus acoplamento para diferentes valores de L . O resultado para simulações variando a dimensão até $N = 100$ é mostrado na figura 17.

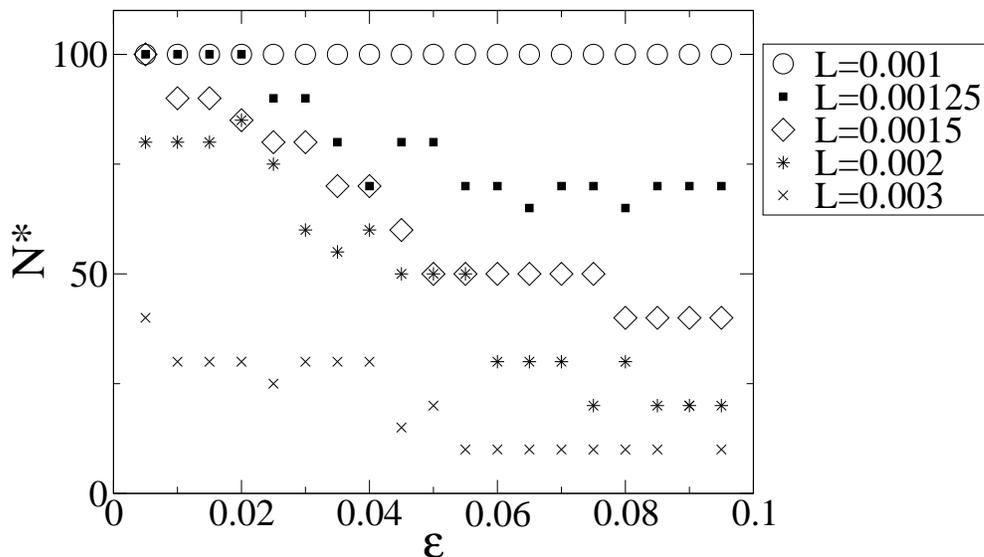


Figura 17: Gráfico indicando a dimensão crítica para diferentes valores de ϵ e L . Foi utilizado $\Delta N = 5$ e a média é realizada sob 30 condições iniciais. O tempo para o cálculo do expoente finito foi igual a 50. Sobre a razão para utilizarmos poucas condições iniciais e ΔN grande ver seção 8.

O que observamos é que à medida que ϵ e L aumentam a dimensão crítica diminui. No entanto, para $L = 10^{-3}$ temos $N^* = 100$ para todos valores de ϵ . Neste caso, o valor $N^* = 100$ indica não a presença de UDV mas sim que as simulações atingiram $N = 100$ e nenhuma oscilação foi registrada. Portanto, a rigor não deveríamos incluir essa curva no gráfico. Fizemo-lo somente para enfatizar a diferença de comportamento entre o parâmetro $L = 10^{-3}$ e os demais. Isso parece indicar que para L suficientemente pequeno não há oscilação dos expoentes a tempo finito. Centramo-nos então nos valores $L \leq 10^{-3}$.

A figura 18 mostra o número P de expoentes a tempo finito positivos para diferentes tamanhos N de rede versus tempo para $\epsilon = L = 10^{-3}$. O que observamos é que sempre todos os expoentes são positivos, o que significa que não há oscilação.

Esse resultados são animadores: não há registro na literatura (até onde temos conhecimento) de sistemas que precisaram ser simulados até dimensões tão altas para apresentarem UDV; muito menos sistemas que não apresentam UDV em

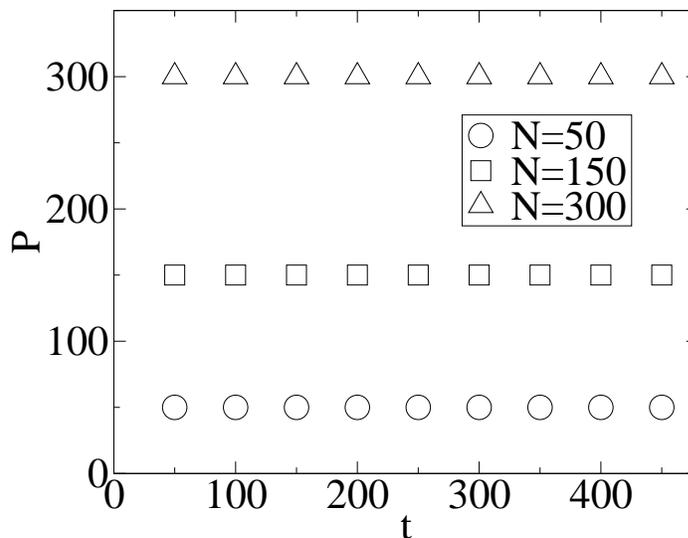


Figura 18: Número de expoentes positivos versus tempo para diferentes tamanhos N de rede. O tempo para o cálculo do expoente finito foi igual a 50.

dimensões dessa magnitude. Por exemplo, um dos trabalhos seminais na teoria de sombreamento para sistemas acoplados (LAI et al., 1999) encontra UDV em simulações para um sistema de dimensão 10.

Todavia, para que possamos extrapolar nossos dados esse tipo de procedimento não é suficiente. Isso porque estamos procurando algo negativo; quer dizer, se temos (tal como na figura 18) que UDV não foi presenciada até valores de $N = 50, 150, 300$ isso não significa que não será encontrada em simulações para valores maiores de N . Significa tão somente que não foi possível detectá-la até onde rodamos a simulação. Já uma extrapolação pode ser feita quando temos a tendência de uma curva que indica a *presença* (e não a ausência) de um comportamento (como diz o jargão, “a ausência de evidência não é evidência da ausência”).

6.3.1 Distribuição de expoentes a tempo finito

Para resolvermos esse problema procedemos da seguinte maneira. Calculamos a distribuição de expoentes para diferentes valores de N . As distribuições que obtemos não são gaussianas (ver figura 19). Todavia, a aproximação por uma gaussiana melhora quando aumentamos a dimensão (ver 20).

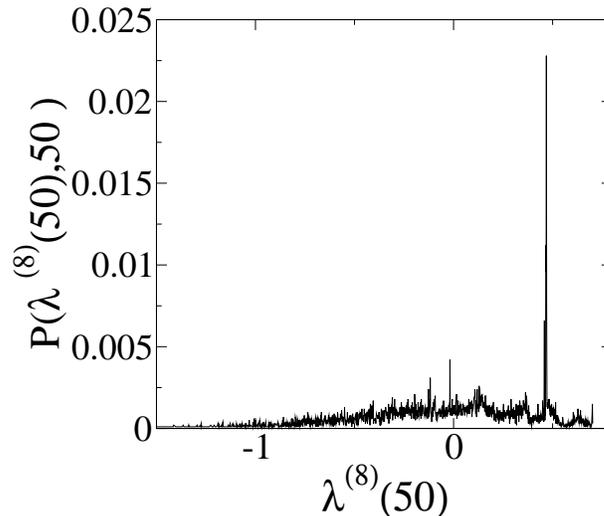


Figura 19: Distribuição referente ao menor expoente de tempo finito (tempo igual a 50) para uma rede de tamanho $N = 8$ e $L = \epsilon = 10^{-3}$. Foram usadas 10^4 condições iniciais.

A partir dessas distribuições obtemos o valor da média da distribuição do menor expoente versus N . Podemos nos fixar apenas no menor expoente porque se ele não atinge valores negativos — não apresentando portanto oscilação — o mesmo não ocorre com os demais. A tabela abaixo mostra a média $\langle \lambda^{(N)}(50) \rangle$ e o a variância σ da distribuição do menor expoente para diferentes tamanhos de rede e $L = \epsilon = 10^{-3}$. Como para esses valores de N a aproximação por uma gaussiana é boa *desde que deprezemos pequenas flutuações à esquerda do valor médio*, também calculamos a média $\langle \lambda^{(N)}(50) \rangle_G$ e o a variância σ_G obtidas por um *fitting* gaussiano. O tempo finito para o cálculo do expoente foi escolhido igual a 50 pois com esse valor obtemos uma boa definição das quantidades mensuradas.

Da tabela fica claro que a média não se desloca em direção a zero e que σ e

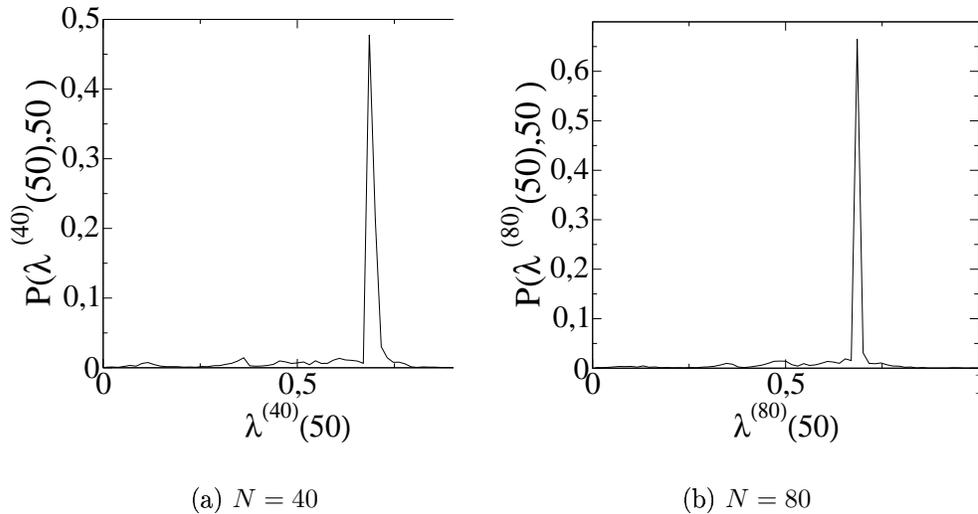


Figura 20: Distribuição referente ao menor expoente de tempo finito (tempo igual a 50) para diferentes tamanhos de rede e $L = \epsilon = 10^{-3}$. Foram usadas 10^4 condições iniciais.

σ_G são ambas funções *não crescentes* de N . Extrapolando esses dados, podemos concluir que a distribuição do menor expoente a tempo finito não cruza zero à medida que N aumenta.

Já observamos que a dimensão crítica N^* aumenta com a diminuição de N (ver figura 17). No entanto, a inexistência de UDV para $L = \epsilon = 10^{-3}$ aponta uma *transição* - já que os argumentos até aqui desenvolvidos indicam que esse comportamento deve persistir com a diminuição de ϵ e L por ser característico de pequenos valores dos parâmetros. A transição fica mais visível se compararmos os resultados das figuras 20 com 19.

Portanto, fixando $N \geq 40$, a região no espaço de parâmetros (L, ϵ) dada por $(0, 10^{-3}] \times (0, 10^{-3}]$ define uma família de transformações acopladas sem UDV.

N	$\langle \lambda^{(N)}(50) \rangle$	σ	$\langle \lambda^{(N)}(50) \rangle_G$	σ_G
40	0.636445	0.1411238	0.685446	0.0131350
50	0.625132	0.1468947	0.685446	0.0096396
60	0.626850	0.1467468	0.685446	0.0112120
70	0.629224	0.1477443	0.685446	0.0100170
80	0.635342	0.1329479	0.685446	0.0113740

Tabela 1: Tabela mostrando a média e a variância da distribuição para diferentes valores de N . Observamos que o fato de obtermos o mesmo valor de $\langle \lambda^{(N)}(50) \rangle_G$ para todos N deve-se a limitações de precisão numérica. A distribuição é construída fazendo-se um histograma. O intervalo de variação dos expoentes é dividido em várias partes de tamanho, digamos, h . O que fazemos então é contar quantas vezes foi obtido um expoente com valor pertencente aos intervalos: $\dots, [-2h, -h], [-h, 0], [0, h], [h, 2h], \dots$

7 Observações numéricas

Há algumas observações numéricas cuja exposição consideramos pertinente. A primeira e mais importante delas refere-se ao custo computacional do cálculo dos expoentes.

Como é sábio, os expoentes de Lyapunov podem ser obtidos a partir da matriz de Oseledec (ECKMANN; RUELLE, 1985). Mais precisamente, se denotamos $df_x^n = T^n(x)$ então a matriz de Oseledec $M(x)$ é dada por (ECKMANN; RUELLE, 1985):

$$M(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((T^n(x))^* T^n(x))^{\frac{1}{2n}}$$

onde $*$ denota o adjunto. No entanto, não podemos proceder com um cálculo direto dessa matriz. Por isso utilizamos o método de (ECKMANN; RUELLE, 1985), o qual envolve não somente a multiplicação como também a decomposição QR da matriz jacobiana em espaços curtos de tempo. Para a decomposição QR adotamos a rotina de (PRESS et al., 1993).

Para um sistema N -dimensional a matriz jacobiana tem tamanho $N \times N$. Portanto o cálculo dos expoentes envolve multiplicação e decomposição QR de matrizes muito grandes. Outrossim, a cada passo da dinâmica devemos exercer um controle de erros sobre a matriz para que não sejam encontradas singularidades, dado que (pela própria definição de expoente de Lyapunov) há divergência exponencial dos termos da matriz. Somando-se a isso o fato de que para o cálculo dos expoentes a tempo finito somos obrigados a fazer média sobre um grande número de condições iniciais, resulta que há um custo computacional muito grande

para a obtenção dos resultados aqui apresentados. Por essa razão não foi possível fazer uma varredura fina dos parâmetros, o que certamente traria mais precisão aos nossos resultados. Isso, contudo, não invalida os dados numéricos anteriormente descritos.

Há outros problemas que precisaram ser contornados para a realização do presente trabalho. O uso de matrizes muito grandes não é, em geral, suportado pelo compilador C que usamos — gcc 3.3.1 (Mandrake Linux 9.2 3.3.1-2mdk). Isso nos forçou ao desenvolvimento de rotinas e bibliotecas específicas que nos permitissem colocar em funcionamento as simulações.

8 *Considerações finais*

Neste trabalho apresentamos inicialmente uma revisão das razões existentes na literatura para estabelecer-se uma conexão entre ausência de sombreabilidade e UDV tenha sido estabelecida, seja mediante provas formais ou evidências numéricas. Introduzimos a definição de δ -pseudo-órbita e sombreamento e explicamos por que tais conceitos são de muita relevância para grande parte da comunidade física que apela a simulações numéricas em seus trabalhos de pesquisa. Em seguida introduzimos a definição de sistemas hiperbólicos e tentamos deixar claro as razões pelas quais hiperbolicidade desempenha um papel de destaque quando o assunto é sombreamento. Fizemos a demonstração do *Shadowing Lemma* para que a importância da estrutura hiperbólica não possa ser negligenciada no contexto do presente trabalho.

Depois passamos a explorar o conceito de UDV e tentar extrair suas implicações mais importantes. Na seção 4.1 chamamos a atenção para o fato de que não há uma prova de que a existência de UDV implique não-sombreabilidade (embora isso seja verdade para certas classes de sistemas, como mencionado na introdução). Mesmo assim, tentamos fornecer um argumento geométrico para endossar a conjectura de que UDV necessariamente implique ausência de sombreabilidade.

Deparamo-nos então com o problema de identificar UDV. Dado um sistema dinâmico, como podemos saber se ele apresenta ou não UDV? Isso parece poder ser feito pelo uso do expoente de Lyapunov a tempo finito. UDV estaria presente em sistemas que apresentem flutuação em torno de zero de um ou mais expoentes a tempo finito — embora, mais uma vez, não tenhamos uma prova formal que o garanta.

Uma vez realizados esses passos de caráter mais geral, centramo-nos na classe de sistemas que têm sido mais investigados no contexto da teoria de sombreamento: sistemas acoplados. Investigamos então as relações existentes e supostas entre sistemas acoplados e UDV. Foi então que detivemo-nos com mais cuidado na conjectura de que UDV seja um fenômeno típico de sistemas acoplados de alta dimensão.

Como já observamos, não foi exibida explicitamente uma transformação não-hiperbólica de alta dimensão sem UDV. A construção desse contra-exemplo é o principal resultado de nosso trabalho. Embora nosso contra-exemplo mostre que a existência de UDV para sistemas não-hiperbólicos de alta dimensão não valha sempre, de maneira alguma contraria a idéia de que UDV possa ser encontrada em vários sistemas de alta dimensão; de fato, a literatura exhibe vários exemplos nos quais isso acontece. Ou seja, o que mostramos é que (i) UDV não é um fenômeno *universal* de sistemas de alta dimensão e (ii) seja ou um fenômeno *típico* de tais sistemas, estamos fornecendo explicitamente um exemplo no qual isso não acontece. Quanto à questão de sabermos se UDV de fato é ou não encontrada na maioria dos sistemas (tal como foi conjecturado em (LAI; GREBOGI, 1999; VIANA et al., 2003)), em nossa opinião isso permanece uma questão em aberto, embora os resultados até aqui pesem em favor dessa conjectura.

Apoiamos nossas conclusões em argumentos teóricos de grande plausibilidade e em uma série de evidências numéricas. Embora a carência de uma demonstração formal seja evidentemente uma limitação aos nossos resultados, de modo algum isso significa que devemos considerá-los de menor importância, mormente se lembrarmos que grande parte da teoria de sombreamento encontra-se no mesmo patamar. Comentaremos agora os pontos que acreditamos que devem ser melhorados.

A *especificidade* da transformação é o primeiro deles. Seria de fundamental importância a construção de outros exemplos de alta dimensão que não exibam UDV. Acreditamos que o estudo do presente trabalho possa servir como um ponto de partida para essa empreitada. De fato, é inegável que nossa dinâmica local é construída *à mão*, ao contrário de alguns exemplos de sistemas apresentando

UDV que são baseados em transformações de grande relevância física tais como o rotor duplo (DAWSON et al., 1994) ou o mapa de Hénon (LAI et al., 1999). Todavia, vale lembrar que muitas vezes a modelagem de sistemas físicos se dá através de dinâmicas locais particulares e sem nenhum apelo físico direto, uma vez que várias propriedades globais e padrões espaciais sob investigação dependem fracamente da forma local das transformações (KANEKO, 1986, 1989; BRUNET; CHATÉ; MANNEVILLE, 1994).

Ligada à essa questão da especificidade está o problema da *robustez*. Em nenhum momento investigamos a robustez da família de transformações que aqui apresentamos. Essa é uma pergunta natural na investigação das propriedades dinâmicas de qualquer sistema e esse seria passo subsequente no desenvolvimento do trabalho. De fato, a existência de um aberto (em alguma topologia adequada) de transformações acopladas exibindo as propriedades do sistema sob investigação é de grande relevância para a teoria de sombreamento.

Num contexto mais geral, não há nenhuma ligação estabelecida (até onde temos conhecimento) entre *entropia* e UDV. Dado que há relações entre os expoentes de Lyapunov e a entropia de um sistema (KATOK; HASSEMBLAT, 1995; BRIN; STUCK, 2002) e que os expoentes entram de forma indireta na identificação de UDV, é apropriada uma investigação entre as possíveis conexões desses assuntos.

Uma última observação deve ser feita. Poder-se-ia argumentar que a ausência de oscilação para valores de N grande e ϵ, L pequenos ocorre porque nessas condições o sistema é hiperbólico. De fato, embora tenhamos fornecido argumentos bastante razoáveis em favor da não hiperbolicidade, não temos uma prova formal para tal. Todavia, seria uma situação deveras incomum obter um sistema hiperbólico a partir do acoplamento de dinâmicas não hiperbólicas, uma vez que não há sequer garantia de que o simples acoplamento difusivo de dinâmicas hiperbólicas possa resultar em um sistema global hiperbólico. Portanto, se esse for o caso, nossos resultados ainda seriam inéditos pois mostrariam um exemplo de “criação” de hiperbolicidade ainda não relatado na literatura. Obviamente, seria animador se obtivéssemos uma demonstração matemática de todos resultados

aqui indicados. Entretanto, tendo em vista os trabalhos mais recentes versando sobre o assunto e o grau de complexidade que isso demandaria, não podemos deixar de ser céticos quanto à sua efetiva realização.

Referências

- ABARBANEL, H. D.; BROWN, R.; KENNEL, M. B. Variation of lyapunov exponents on a strange attractor. *Journal of Nonlinear Sciences*, New York, v. 1, p. 175–199, Jan. 1991.
- ABRAHAM, R.; SMALE, S. Non-genericity of ω -stability. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Providence, v. 14, p. 5–9, 1970.
- ANOSOV, D. V. Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, Providence, n. 90, p. 1–231, 1967.
- BARRETO, E.; SO, P. Mechanisms for the development of unstable dimension variability and the breakdown of shadowing in coupled chaotic systems. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 85, n. 12, p. 2490–2493, Sept. 2000.
- BERGÉ, P.; POMEAU, Y.; VIDAL, C. *L'ordre dans le chaos*. Paris: Hermann, 1988.
- BONATTI, C.; DÍAZ, L. J.; TURCAT, G. Pas de "shadowing lemma" pour les dynamiques partiellement hyperboliques. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie I*, Paris, v. 330, n. 7, p. 587–592, avril 2000.
- BOWEN, R. ω -limit sets for axiom a diffeomorphisms. *Journal of Differential Equations*, New York, v. 18, n. 2, p. 333–339, July 1975.
- BRIN, M.; STUCK, G. J. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- BRUNET, L. G.; CHATÉ, H.; MANNEVILLE, P. Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled odes. *Physica D*, Amsterdam, v. 78, n. 3/4, p. 141–154, Nov. 1994.
- BRUNET, L. G.; GALLAS, J. A. Exploring collective behaviors with a multi-attractor quartic map. *Physica A*, Amsterdam, v. 257, n. 1/4, p. 329–333, Aug. 1998.
- CHATÉ, H. Emergence of collective behavior in large chaotic dynamical systems. *International Journal of Modern Physics B*, Singapore, v. 12, n. 3, p. 229–308, Jan. 1998.

- CHATÉ, H. et al. Non-trivial collective behavior in extensively-chaotic dynamical systems: an update. *Physica A*, Amsterdam, v. 224, n. 1/2, p. 447–457, Feb. 1996.
- COVEN, E. M.; KAN, I.; YORKE, J. Pseudo-orbit shadowing in the family of tent maps. *Transactions of the American Mathematical Society*, Providence, v. 308, n. 1, p. 227–241, July 1988.
- DAWSON, S. et al. Obstructions to shadowing when a lyapunov exponent fluctuates about zero. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 73, n. 14, p. 1927–1930, Oct. 1994.
- ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 57, n. 3, p. 617–656, July 1985.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Non-linear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- HASSEMBLAT, B.; KATOK, A. *A first course in dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- KANEKO, K. *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*. Singapore: World Scientific, 1986.
- KANEKO, K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos. *Physica D*, Amsterdam, v. 34, n. 1/2, p. 1–41, Jan./Feb. 1989.
- KATOK, A.; HASSEMBLAT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- KOSTELICH, E. J. et al. Unstable dimension variability: a source of nonhyperbolicity in chaotic systems. *Physica D*, Amsterdam, v. 109, n. 1/2, p. 81–90, Nov. 1997.
- LAI, Y.; GREBOGI, C. Modeling of coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, Melville, v. 82, n. 24, p. 4803–4806, June 1999.
- LAI, Y.-C. Unstable dimension variability and complexity in chaotic systems. *Physical Review E*, Melville, v. 59, n. 4, p. 3807–3810, Apr. 1999.
- LAI, Y. C. et al. Unstable dimension variability in coupled chaotic systems. *Physical Review E*, Melville, v. 60, n. 5, p. 5445–5454, Nov. 1999.
- MANNEVILLE, P. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Saclay: Collection Aléa Saclay, 1991.
- MARTINS, L. C.; BRUNET, L. G. Multi-state coupled map lattices. *Physica A*, Amsterdam, v. 296, n. 1/2, p. 119–130, July 2001.

- NEWHOUSE, S. E. Lectures on dynamical systems. In: GUCKENHEIMER, J. *Dynamical systems*. Boston: Birkhauser, 1980. p. 1-114.
- PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical recipes in C*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics*. New York: John Wiley, 1998.
- ROMEIRAS, F. J. et al. Controlling chaotic dynamical systems. *Physica D*, Amsterdam, v. 58, n. 1/4, p. 165–192, Sept. 1992.
- SAUER, T. Shadowing breakdown and large errors in dynamical simulations of physical systems. *Physical Review E*, Melville, v. 65, n. 3, 036220 5p., Mar. 2002.
- SAUER, T.; GREBOGI, C.; YORKE, J. How long do numerical chaotic solutions remain valid? *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 79, n. 1, p. 59–62, July 1997.
- VIANA, R. et al. Pseudo-deterministic chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v. 13, n. 11, p. 3235–3253, Nov. 2003.
- VIANA, R. L.; GREBOGI, C. Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, Melville, v. 62, n. 1, p. 462–468, July 2000.
- VIANA, R. L. et al. Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems. *Physical Review E*, Melville, v. 68, n. 6, 067204 4p., Dec. 2003.
- VIANA, R. L.; PINTO, S. E.; GREBOGI, C. Chaotic bursting at the onset of unstable dimension variability. *Physical Review E*, Melville, v. 66, n. 4, 046213, 9 p., Oct. 2002.
- YUAN, G.; YORKE, J. An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Menasha, v. 128, n. 3, p. 909–918, May 1999.