

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Teorias de calibre supersimétricas  
formuladas num espaço-tempo não-comutativo  
tridimensional\***

Anderson André Genro Alves Ribeiro

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr.  
Horacio Oscar Girotti e apresentada ao Instituto  
de Física da UFRGS em preenchimento parcial  
dos requisitos para a obtenção do título de  
Doutor em Ciências.

Porto Alegre, RS - Junho de 2005

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## DEDICATÓRIA

A todas as pessoas que passaram na minha vida, é uma honra viver com vocês.

## AGRADECIMENTOS

- ao meu orientador, Horacio Oscar Girotti, pela dedicação, por todo apoio destes últimos seis anos e pelo exemplo de pesquisador;
- a Marcelo Gomes, Adilson José da Silva e Victor Rivelles, pela hospitalidade nas passagens pelo DFMA-USP, pelo companheirismo;
- ao colega e amigo Alysson Fabio Ferrari, que me acompanha desde a graduação, pelo estímulo e ajuda constantes;
- ao colega e amigo Albert Petrov, pela dedicação, presteza e apoio fundamental;
- a minha família, o suporte de todos vocês foi e é essencial. Em especial quero agradecer a Vó Olinda e a tia Jô pela ajuda nos últimos meses;
- aos meus irmãos, Leonardo, Nicolás e Wadie, sem eles essa tese não teria sido escrita porque eu não seria quem sou.

O autor agradece a toda a comunidade de código livre do Brasil e do mundo pela criação e manutenção dos programas que tornaram a editoração deste trabalho possível. A formatação do texto e das referências bibliográficas em conformidade com as regras da ABNT foi implementada através do estilo ABNTEX ([abntex.codigolivre.org.br](http://abntex.codigolivre.org.br)) . O banco de dados de referências bibliográficas foi editado com o JabRef ([jabref.sourceforge.net](http://jabref.sourceforge.net)) e todas as ilustrações foram produzidas com o JaxoDraw (<http://eee.uv.es/JaxoDraw/>).

Tranquei portas, desliguei telefones, janelas cerradas, para longe a internet. Queria estar tão completamente sozinha. Queria escrever. Sentar no meu computador e digitar, procurar verdade, tentar entender... Queria fingir que o líquido não estava dentro de mim. Como uma droga que me tomava os sentidos. Às vezes eu nem sabia quem era enquanto digitava. Uma palavra após a outra, e a frustração ria de mim, usando seu corpo fluído para esfregar em meu rosto respostas inalcançáveis. Me cobri com os lençóis, quase sufoquei com a cabeça no travesseiro. Havia fugido de todos que me deixaram assim, havia destruído o contato, o toque, o macio do pertencer... E ainda assim sentia o líquido. Já não podia mais contar quantas eram as agulhas. Mas eram muitas, disso tenho certeza. Também, não tenho mais nada além disso. Meu apartamento me engoliu. Até onde eu sou eu, e não mais ele? Será que ainda sou? Se não for mais perdi tudo que tinha. Procurei um espelho, tinha curiosidade em ver quem era a pessoa na qual o líquido se manifestava. Haviam lágrimas em meu rosto, e eu sorri. A frustração nascia de dentro de mim.

Luciana de Jesus

# *Resumo*

Teorias de calibre formuladas em um espaço-tempo não comutativo têm sido intensamente estudadas nos últimos anos. O interesse nesse assunto possui motivações provenientes da teoria de cordas. Uma das propriedades mais notáveis das teorias não-comutativas consiste de uma estrutura não usual de divergências, a chamada mistura UV/IR, que pode levar ao aparecimento de divergências infravermelhas não integráveis. A eliminação de tais divergências é crucial já que elas podem provocar o colapso da série perturbativa. Modelos não-comutativos supersimétricos tem um lugar proeminente entre as teorias de campo fisicamente interessantes, uma vez que a supersimetria favorece o cancelamento das divergências perigosas. Eles são os melhores candidatos num programa para definir teorias de campos não-comutativas consistentes. Neste trabalho investigamos a QED e Yang-Mills não-comutativos supersimétricos em três dimensões usando o formalismo de supercampos. Para o caso abeliano provamos que a mistura UV/IR não é fonte de divergências infravermelhas não integráveis. Além disso, o modelo resulta ser finito na aproximação de um laço. O mesmo se aplica ao caso não abeliano porém apenas na representação fundamental do grupo de calibre.

# *Abstract*

During last years noncommutative gauge theories have been intensively studied. The interest in this subject has deep motivations coming mainly from string theory. One of the most remarkable properties of noncommutative theories is the so called UV/IR mixing, that could lead to the appearance of nonintegrable infrared divergences. The elimination of such divergences is crucial since they may invalidate the perturbative solution. Noncommutative supersymmetric models have a prominent place among the physically interesting field theories, because supersymmetry favours the cancellation of these dangerous divergences, they are the best candidates in a program to define consistent noncommutative field theories. In this work the three-dimensional noncommutative supersymmetric QED and Yang-Mills theory are investigated within the covariant superfield approach. For both theories, we prove the absence of the harmful infrared divergences arising from the UV/IR mixing mechanism. For  $NCSQED_3$  we show the cancellation of the linear UV/IR infrared divergences and the absence of the UV and UV/IR infrared logarithmic divergences at the one-loop order. For the non abelian theory, we show that the cancellation of the linear UV/IR infrared divergences is achieved for the  $U_\star(N)$  group but only in the fundamental representation. We also verify the absence of the UV and UV/IR infrared logarithmic divergences in the one-loop approximation.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Breve histórico e desenvolvimento . . . . .	7
1.2	Não-comutatividade em teorias de campo . . . . .	9
1.2.1	Propriedades do produto Groenewold-Moyal . . . . .	10
1.3	Teorias de campo não-comutativas . . . . .	11
1.3.1	A mistura UV/IR . . . . .	11
1.3.2	Unitariedade . . . . .	13
1.3.3	Simetrias discretas . . . . .	14
1.3.4	Não-comutatividade e grupos de simetria . . . . .	15
1.3.5	Renormalizabilidade . . . . .	16
1.4	Teorias quânticas de campo supersimétricas em três dimensões . . . . .	16
1.4.1	Campo escalar . . . . .	18
1.4.2	Campo espinorial . . . . .	18
1.4.3	Modelos não-abelianos de calibre . . . . .	21
1.5	Não-comutatividade e Supersimetria em teorias de campo . . . . .	22
<b>2</b>	<b>QED tridimensional não comutativa supersimétrica no formalismo de supercampos</b>	<b>23</b>
2.1	Ação e regras de Feynman . . . . .	23
2.2	Grau de divergência superficial . . . . .	30
2.3	Acoplamento com a matéria . . . . .	32

2.3.1	Grau de divergência superficial . . . . .	33
2.4	Função de dois pontos do superpotencial espinorial na aproximação de um laço . . . . .	34
2.4.1	Setor de calibre . . . . .	34
2.4.2	Setor de matéria . . . . .	41
2.5	Função de três e quatro pontos do superpotencial espinorial na aproximação de um laço . . . . .	45
2.5.1	Setor de calibre . . . . .	45
2.5.2	Setor de matéria . . . . .	48
2.6	Funções de $N > 4$ pontos de $A_\alpha$ . . . . .	49
2.7	Auto-energia de matéria . . . . .	49
2.8	Resumo dos resultados . . . . .	51
2.9	Algumas reflexões sobre dois laços . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Teoria de Yang-Mills tridimensional não comutativa supersimétrica no formalismo de supercampos</b>	<b>55</b>
3.1	Ação e regras de Feynman . . . . .	55
3.2	Grau de divergência superficial . . . . .	60
3.3	Adição de matéria . . . . .	60
3.4	Função de dois pontos do superpotencial espinorial em um laço . . . . .	62
3.4.1	Setor de Calibre . . . . .	62
3.4.2	Setor de matéria . . . . .	66
3.5	Funções de três e mais pontos do superpotencial espinorial na aproximação de um laço . . . . .	68
3.6	Auto-energia do campo de matéria . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>71</b>
	<b>Apêndice A – Supersimetria em três dimensões</b>	<b>73</b>



A.1	Convenções . . . . .	73
A.2	Superespaço e supercampos . . . . .	74
A.3	Formulação quântica . . . . .	78
	<b>Referências</b>	<b>80</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Breve histórico e desenvolvimento

A idéia de formular teorias de campos em espaço-tempo não-comutativo já existe desde os anos quarenta [1, 2]. Com o intuito de resolver o problema das divergências ultravioletas ( $UV$ ) postulou-se a existência de um comprimento mínimo que serviria como regulador ultravioleta. Esta idéia foi, provavelmente, abandonada em virtude do sucesso do programa de renormalização. O estudo destas teorias recebeu renovado interesse a partir dos resultados obtidos por Seiberg e Witten[3]. Foi mostrado por estes autores que o limite de baixas energias da dinâmica de cordas abertas na presença de  $D$ -branas é uma teoria de calibre que se desenvolve num espaço-tempo não-comutativo. Mas esta não é a única motivação, de fato, a relação de incerteza que emerge da gravitação quântica impede que se façam medições com precisão maior que o comprimento de Planck ( $10^{-33}cm$ ), desde que o momento e a energia necessários para tal medida modificariam a geometria nesta escala [4]. De forma que nosso entendimento do espaço-tempo como uma variedade diferenciável deve ser abandonado nesta escala.

A mais simples relação de não-comutatividade entre as coordenadas do espaço-tempo ( $x^\mu, \mu = 0, 1, \dots, d - 1$ ) que podemos postular é dada por

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $\Theta^{\mu\nu}$  é uma matrix antisimétrica constante com dimensão de área. Transformar as coordenadas em operadores hermitianos que não comutam implica na existência da relação de incerteza

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\Theta^{\mu\nu}|, \quad (1.2)$$

que expressa justamente o fato de não podermos determinar  $x^\mu$  e  $x^\nu$  com precisão absoluta.

Na matemática a idéia de geometria não-comutativa surgiu nos anos 80 com Connes [5] e sua ligação com a teoria de cordas começou com Witten em 1986 [6]. A conexão com a

física de partículas se iniciou em 1991[7] com a introdução deste conceito na elaboração de uma extensão não-comutativa para o modelo padrão. Contudo o estímulo para os grande esforços dos últimos anos nas teorias de campo não-comutativas nasceu da obtenção da teoria de Yang-Mills não-comutativa como limite de baixas energias da teoria de cordas na presença de um campo magnético de fundo [3, 8–10]. A isto se deve a expectativa de que estas teorias de campo sejam livres de inconsistências, ou seja, sejam modelos renormalizáveis, causais e com matriz  $S$  unitária.

Uma das expectativas sobre teorias não-comutativas é a eliminação das divergências ultravioletas que aparecem na expansão perturbativa das respectivas contra-partidas comutativas (teorias não deformadas). Contudo foi mostrado que as teorias não-comutativas apresentam dois tipos diferentes de diagramas de Feynman, os diagramas ditos não planares, onde a deformação elimina as divergências UV, e os planares, onde a não localidade não altera o comportamento ultravioleta. Nestes últimos continuam aparecendo as divergências ultravioletas da correspondente teoria comutativa [11–13]. Surgem também divergências infravermelhas ( $IR$ ) associadas às ultravioletas (mecanismo UV/IR) mesmo no caso de teorias de campo massivas, o que é inesperado. Estas divergências infravermelhas podem ser não integráveis e portanto invalidam a expansão perturbativa da teoria. Por não terem origem em pólos de massa zero, não podem ser contornadas pela estratégia usual de adição de reguladores infravermelhos. É nesse ponto que as teorias supersimétricas se tornam boas candidatas a serem teorias não-comutativas consistentes, pois possuem um comportamento UV mais ameno que as teorias convencionais, o que por sua vez tende a eliminar a aparição de divergências infravermelhas não integráveis. Além de seu papel na renormalização, a supersimetria tem dado origem a interessantes desenvolvimentos como, por exemplo, possíveis generalizações do produto Moyal[14] e soluções exatas para o mapa de Seiberg-Witten[15].

Duas boas revisões sobre teorias quânticas de campo não-comutativas são encontradas em [16, 17]. Para introduções ao superespaço, à supersimetria e a teorias de campo formuladas no superespaço o leitor pode referir-se a [18, 19].

Por motivos de clareza, convém ressaltar que quando dizemos teorias (quânticas) de campo não-comutativas ou teorias não-comutativas estamos nos referindo a teorias (quânticas) de campo formuladas num espaço-tempo não-comutativo.

## 1.2 Não-comutatividade em teorias de campo

Uma das formas de construir teorias não comutativas é a partir da teoria comutativa usual substituindo no lagrangeano o produto ordinário de campos pelo produto Groenewold-Moyal [20, 21] ou produto estrela ( $\star$ ). Este é justamente o produto que provém como limite de baixas energias da teoria de cordas. Vamos utilizar a correspondência de Weyl [22], que relaciona operadores de campos com funções,

$$\widehat{\mathcal{O}}(x) \longleftrightarrow \phi(x), \quad (1.3)$$

para derivar a expressão para o produto  $\star$  em  $D$  dimensões. Associamos o operador de campo com uma função clássica através de sua transformada de Fourier

$$\widehat{\mathcal{O}}(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\hat{x}} \widetilde{\phi}(p), \quad (1.4)$$

onde  $p\hat{x} = p^\mu \hat{x}_\mu = p^\mu \eta_{\mu\nu} \hat{x}^\nu$ , sendo  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$  a métrica do espaço-tempo, de forma que o produto de operadores é dado por

$$\widehat{\mathcal{O}}_1(x) \widehat{\mathcal{O}}_2(x) = \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} e^{-ip_1 \hat{x}} e^{-ip_2 \hat{x}} \widetilde{\phi}_1(p_1) \widetilde{\phi}_2(p_2),$$

usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff<sup>1</sup> e (1.1) temos

$$\widehat{\mathcal{O}}_1(x) \widehat{\mathcal{O}}_2(x) = \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} e^{-i(p_1+p_2)\hat{x}} e^{-\frac{i}{2}p_1^\mu p_2^\nu \Theta_{\mu\nu}} \widetilde{\phi}_1(p_1) \widetilde{\phi}_2(p_2),$$

de forma que, usando (1.3),

$$\widehat{\mathcal{O}}_1(x) \widehat{\mathcal{O}}_2(x) \longleftrightarrow (\phi_1 \star \phi_2)(x), \quad (1.5)$$

onde

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv \left[ e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu} \partial_\mu^x \partial_\nu^y} \phi_1(x) \phi_2(y) \right]_{x=y}, \quad (1.6)$$

define o produto  $\star$ . Quando introduzimos desta forma a não-comutatividade, continuamos com um espaço-tempo comutativo, contudo o produto está deformado por um fator que contém derivadas, o que torna a interação não local[11].

<sup>1</sup>Como  $\Theta^{\mu\nu}$  é constante,  $[\Theta^{\mu\nu}, x^\rho] = 0$ , de forma que a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff fica truncada em  $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$ .

### 1.2.1 Propriedades do produto Groenewold-Moyal

O produto definido em (1.6) possui algumas propriedades que serão importantes no decorrer do trabalho, contudo são de fácil dedução e são encontradas na literatura <sup>2</sup>, então nos limitaremos a citá-las.

1. Diretamente de (1.1),

$$e^{ipx} \star e^{iky} = e^{i(p+k)x} e^{-ip \wedge k}, \quad (1.7)$$

onde  $p \wedge k = \frac{1}{2} p^\mu \Theta_{\mu\nu} k^\nu$ .

2. A transformada de Fourier do produto é

$$(f \star g)(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(p) \tilde{g}(k) e^{-ip \wedge k} e^{-i(p+k)x}, \quad (1.8)$$

onde  $\tilde{f}(p)$  e  $\tilde{g}(k)$  são, respectivamente, as componentes de Fourier de  $f(x)$  e  $g(x)$ .

3. O complexo conjugado do produto Moyal é,

$$(f \star g)^*(x) = (g^* \star f^*)(x), \quad (1.9)$$

onde  $*$  representa o complexo conjugado.

4. O produto é associativo,

$$[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x). \quad (1.10)$$

5. Uma das propriedades mais importantes na obtenção das regras de Feynman é que o produto  $\rightarrow \star$  não modifica a parte quadrática da ação, isso se dá porque a integral do produto de duas funções é igual à integral do produto ordinário,

$$\int d^D x (f \star g)(x) = \int d^D x (g \star f)(x) = \int d^D x f(x) g(x), \quad (1.11)$$

já que a modificação é dada por um fator de fase.

6. Usando (1.10) e (1.11), temos

$$\int d^D x (f_1 \star f_2 \star \dots \star f_n)(x) = \int d^D x (f_n \star f_1 \star f_2 \star \dots \star f_{n-1})(x), \quad (1.12)$$

ou seja, a integral de um produto  $\rightarrow \star$  com  $n$  fatores é ciclicamente invariante.

---

<sup>2</sup>Veja, por exemplo [23].

7. Outra expressão fundamental para a obtenção das regras de Feynman das teorias não-comutativas é obtida escrevendo os campos em termos das correspondentes transformadas de Fourier,

$$\int d^D x (f_1 \star f_2 \star \dots \star f_n)(x) = \int \left( \sum_{j=1}^n d^D x_j \right) V(x_1, \dots, x_n) f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n), \quad (1.13)$$

onde

$$V(x_1, \dots, x_n) = \int \left( \sum_{j=1}^n \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \right) e^{-i \sum k_j x_j} V(k_1, \dots, k_n), \quad (1.14)$$

sendo

$$V(k_1, \dots, k_n) = (2\pi)^D \delta(\sum_j k_j) e^{-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j}. \quad (1.15)$$

## 1.3 Teorias de campo não-comutativas

### 1.3.1 A mistura UV/IR

Um dos aspectos mais interessantes das teorias de campos não comutativas é o aparecimento de uma nova classe de divergências, que surge nos diagramas não planares, onde a não-comutatividade regula o comportamento ultravioleta mas gera divergências infravermelhas. Esse mecanismo ficou conhecido como mistura UV/IR [24, 25]. Estas divergências podem ser tão severas que tornam sem sentido a expansão perturbativa, a persistência destas novas divergências é determinante para decidir se a teoria pode ou não ser renormalizável.

Por exemplo, na extensão não-comutativa da teoria de campo escalar com interação  $\lambda\phi^4$ , a primeira correção quântica à função de vértice a um laço apresenta um termo proporcional a

$$\sqrt{\frac{1}{mp \circ p}} K_1(\sqrt{mp \circ p}), \quad (1.16)$$

sendo  $K_1$  a função de Bessel modificada e

$$p \circ p = p_\mu (\Theta^2)^{\mu\nu} p_\nu. \quad (1.17)$$

Analisando o limite  $p \rightarrow 0$  temos

$$\frac{1}{mp \circ p} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{mp \circ p}}{2} \right), \quad (1.18)$$

onde se percebe a presença de divergências infravermelhas quadrática e logarítmica originadas de um comportamento divergente no ultravioleta. É surpreendente o aparecimento de divergências infravermelhas num modelo massivo. Note também que o limite  $\Theta \rightarrow 0$  é singular, ou seja, o limite comutativo é divergente. Isto ocorre porque as integrais de laço não dependem linearmente de seus respectivos integrandos. A mistura UV/IR dificulta a implementação do programa usual de renormalização, pois diversas inserções de um subdiagrama com o tipo de divergência de (1.18) num diagrama de ordem superior, como mostrado na figura 1, causam a quebra do desenvolvimento perturbativo. De fato, deixando de lado fatores irrelevantes, a amplitude correspondente ao diagrama da figura 1, pode ser escrita

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k \circ k)^n} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{n+1}}, \quad (1.19)$$

cuja parte divergente proveniente da mistura UV/IR dá a contribuição

$$\int \frac{d^d k}{(k \circ k)^n} \propto \begin{cases} \infty, & 2n \geq d \\ \text{const.}, & 2n < d \end{cases} \quad (1.20)$$

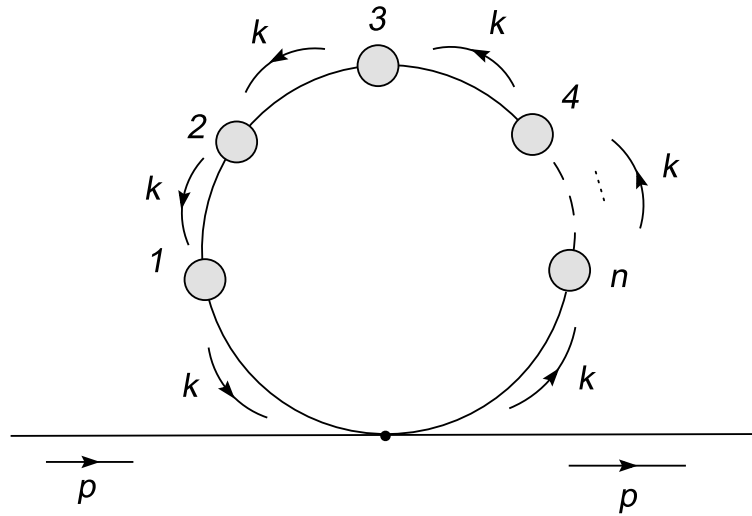
onde  $d$  é a dimensão do subespaço não-comutativo[24]. As únicas divergências infravermelhas UV/IR<sup>3</sup> que não trazem risco à série perturbativa são as logarítmicas pois qualquer potência de logaritmo é dominada pela medida de integração,

$$\int d^d k [\ln(k \circ k)]^n \sim \text{finito}. \quad (1.21)$$

No caso do campo escalar real não-comutativo em quatro dimensões ( $D = 4$ ) com autointeração  $\phi^4$  a renormalizabilidade foi provada explicitamente até dois laços [26, 27]. Na correspondente teoria complexa a renormalizabilidade foi provada até um laço somente se  $|\phi|^4$  é generalizado ao caso não-comutativo como indicado em [28]. O método de Polchinski [29] foi utilizado para estender a prova a todas as ordens. Contudo o problema UV/IR teve que ser contornado através da introdução de um corte infravermelho [30]. Foi provado, no caso do campo escalar, que estas divergências podem ser ressomadas e o corte infravermelho removido [31], contudo não foi possível estender este procedimento a outras teorias. No que diz respeito às teorias de calibre não-comutativas o mecanismo UV/IR também dá origem a divergências IR quadráticas que, em princípio inviabilizam o programa de renormalização[32–34].

---

<sup>3</sup>Neste trabalho denominaremos as divergências infravermelhas provenientes de divergências ultravioletas pela mistura UV/IR de divergências infravermelhas UV/IR, para diferenciar das divergências infravermelhas das teorias de massa zero, que são esperadas em  $p = 0$  devido ao comportamento infravermelho dos propagadores.



**FIGURA 1:** Inserções de um subdiagrama com divergência UV/IR num diagrama de ordem superior.

A dificuldade comum nestes modelos é a presença de singularidades infravermelhas UV/IR quadráticas, originadas a partir de divergências ultravioletas quadráticas. Isto faz suspeitar que no caso de teorias supersimétricas, cujo comportamento UV é mais ameno, o programa de renormalização possa ser implementado a todas as ordens. De fato, somente é conhecido um modelo não-comutativo quadridimensional renormalizável, o modelo de Wess-Zumino [35–37], onde a supersimetria melhora o comportamento ultravioleta, de forma que o mecanismo UV/IR gera apenas divergências infravermelhas logarítmicas, que, como já foi apontado, não comprometem o programa de renormalização. Em três dimensões se conhecem modelos não-comutativos renormalizáveis tais como o modelo supersimétrico  $O(N)$  sigma não linear [38, 39] e o modelo supersimétrico  $O(N)$  sigma linear no limite  $N \rightarrow \infty$  [40]. Neste trabalho mostraremos que a versão tridimensional da QED e da teoria de Yang-Mills não-comutativas supersimétricas, são super-renormalizáveis e finitas a um laço [41, 42].

### 1.3.2 Unitariedade

Teorias de campos com não-comutatividade espaço-temporal possuem uma matriz  $S$  não unitária, pois as regras de Cutkosky são violadas, tanto para teorias escalares [43] quanto para teorias de calibre [44]. Contudo, se considerarmos apenas não comutatividade espacial ( $\Theta^{0i} = 0$ ), a teoria é unitária.

Teorias com  $\Theta^{0i} \neq 0$  possuem um infinito número de derivadas temporais dos campos



no lagrangiano, devido à forma do produto Moyal, são não locais no tempo e podem servir para testar a quebra da noção convencional de tempo na escala de Planck. Porém, apesar de podermos definir um funcional gerador de funções de Green conectadas e obter as regras de Feynman, não é inesperado que a teoria assim construída seja inconsistente, pois a falta de unitariedade a invalida como uma teoria quântica. Teorias com não comutatividade espacial são não locais no espaço mas são locais no tempo, gerando modelos com evolução temporal unitária, o que possibilita a formulação Hamiltoniana dos mesmos [45].

Pelo ponto de vista das teorias de cordas pode-se mostrar que excitações de baixa energia de uma  $D$ -brana na presença de um campo magnético são descritas em termos de teorias quânticas não-comutativas com  $\Theta^{0i} = 0$ . Este limite pode ser entendido a partir do fato que os modos não-massivos da corda aberta desacoplam dos modos massivos da corda fechada quando na presença de um campo magnético de fundo  $B^{0i} = 0$ , gerando assim uma teoria de campos que respeita os requisitos básicos de causalidade e unitariedade da matriz  $S$ . Por outro lado, modelos com não-comutatividade espaço-temporal ( $\Theta^{0i} \neq 0$ ) não descrevem um limite da teoria de cordas. No caso de um campo elétrico de fundo,  $B^{0i} \neq 0$  com  $B^{ij} = 0$ , mostra-se que os modos massivos não desacoplam, ou seja, não temos uma teoria de campos efetiva que descreva essa dinâmica. Apesar disso encontra-se na literatura formulações que tentam quantizar teorias com não-comutatividade espaço-temporal e preservar unitariedade [46–49].

Estes motivos nos levam a adotar neste trabalho apenas não-comutatividade espacial,  $\Theta^{0i} = 0$ , para evitar as patologias da não-comutatividade espaço-temporal e para analisar teorias que, do ponto de vista da teoria de cordas, tem interesse efetivo.

### 1.3.3 Simetrias discretas

A análise das simetrias discretas é outro aspecto interessante destas teorias, visto que a não comutatividade quebra a invariância de Lorentz. Foi mostrado que, com não-comutatividade espacial, a eletrodinâmica quântica não-comutativa é invariante sobre paridade, com a transformação usual dos campos. Contudo apresenta violação de conjugação de carga, a menos que conjuntamente com essa transformação também se troque  $\Theta$  por  $-\Theta$ . Essa troca também é necessária para fazer a teoria invariante sobre reversão temporal. Apesar disso a invariância CPT permanece operacional.

Para  $\Theta^{\mu\nu}$  geral a eletrodinâmica quântica não-comutativa apresenta quebra de paridade, conjugação de carga e reversão temporal, mas permanece invariante sobre CPT [50].

### 1.3.4 Não-comutatividade e grupos de simetria

A extensão não-comutativa dos grupos de calibre e suas representações não é trivial. A deformação introduzida pelo produto Moyal altera as relações de fechamento dos grupos. Por exemplo, sejam  $g_1$  e  $g_2$  duas matrizes hermitianas  $n \times n$  dependentes de posição, geradores de  $SU(n)$ , é fácil verificar que

$$g_1 \star g_2 - g_2 \star g_1 \quad (1.22)$$

não é de traço nulo e, portanto, não pertence à álgebra de  $SU(n)$  [51]. O único grupo que admite uma extensão não-comutativa trivial é o grupo  $U(N)$ , denominaremos por  $U_\star(N)$  esta extensão. A generalização não-comutativa natural para a transformação de calibre de um campo  $A_\mu = A_\mu^a T_a$  é

$$A_\mu \rightarrow e^{-iK^a T_a} \star A_\mu \star e^{iK^a T_a} + ie^{-iK^a T_a} \star \partial_\mu e^{iK^a T_a}, \quad (1.23)$$

onde

$$e^{-iK^a T_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \underbrace{(-iK^a T_a) \star (-iK^a T_a) \star \dots \star (-iK^a T_a)}_{n\text{-vezes}} \right]. \quad (1.24)$$

Na forma infinitesimal esta transformação se reduz a

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= T_a (\partial_\mu K^a) + \frac{i}{2} [T_a, T_b] (K^a \star A_\mu^b + A_\mu^b \star K^a) \\ &\quad + \frac{i}{2} \{T_a, T_b\} (K^a \star A_\mu^b - A_\mu^b \star K^a) + \mathcal{O}[K^a]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

A presença do anti-comutador  $\{T_a, T_b\}$  impede que seja implementada a generalização não-comutativa para os grupos  $SU(N)$ . Os geradores dos grupos de Lie  $U(N)$  na representação fundamental formam uma base do espaço de matrizes  $N \times N$ , portanto

$$\{T_a, T_b\} = d_{abc} T_c, \quad (1.26)$$

garantindo que esta generalização não quebra o fechamento do grupo.

Podemos também construir extensões para os grupos  $SO(N)$  e  $USp(2N)$ , contudo estas generalizações são mais intrincadas, para maiores detalhes sobre elas nos referimos a [52, 53]. A não-comutatividade impõe vínculos sobre a estrutura do grupo de calibre e a representação dos campos de matéria, ainda assim é possível obter uma versão não comutativa para o modelo padrão[54].

Essas considerações são do ponto de vista puramente da teoria de grupos. É interessante que as mesmas restrições aparecem nas teorias de campos não-abelianas que

emergem no limite de baixas energias da teorias de cordas [55, 56], não apenas na escolha do grupo mas também na escolha da representação dos geradores.

### 1.3.5 Renormalizabilidade

As divergências ultravioletas que aparecem nas teorias de campo não-comutativas na aproximação de um laço podem ser eliminadas por contra-termos cuja estrutura é similar aos termos da lagrangiana de partida [34, 57–59]. Contudo a mistura UV/IR ameaça o desenvolvimento perturbativo quando dá origem a divergências infravermelhas não-integráveis. Note que mesmo as integrais regularizadas podem gerar divergências infravermelhas UV/IR com o máximo grau da divergência superficial UV <sup>4</sup>. Por exemplo, no caso da polarização de vácuo da eletrodinâmica quântica não-comutativa em quatro dimensões foi apontada a presença de um pólo infravermelho quadrático do tipo [34, 58]

$$i\Pi^{\mu\nu}(p \sim 0) \sim \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^4}. \quad (1.27)$$

Isto certamente destrói a solução perturbativa desta teoria.

Como dito antes, a supersimetria pode ser uma maneira de suavizar as divergências ultravioletas e livrar a teoria de divergências infravermelhas UV/IR não integráveis. De fato, foi mostrado que na versão supersimétrica da eletrodinâmica quântica não-comutativa o pólo infravermelho (1.27) se torna proporcional à diferença entre o número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos o que, numa teoria supersimétrica, é nula [32]. Isto leva a acreditar que teorias de calibre não-comutativas supersimétricas sejam livres de divergências infravermelhas UV/IR não integráveis e, nesse sentido, consistentes. Os resultados desta tese corroboram esta hipótese.

## 1.4 Teorias quânticas de campo supersimétricas em três dimensões

Modelos de calibre em três dimensões espaço-temporais têm sido bem estudados nos últimos anos [61–64]. A motivação principal vem da possibilidade de obter resultados não perturbativos mais facilmente, além de que a finitude ultravioleta da teoria de Yang-Mills-Chern-Simons ser um aspecto notável [65–69]. Teorias de calibre em  $(2 + 1)$  dimensões

---

<sup>4</sup>A regularização ameniza o comportamento UV divergente se respeita a simetria de calibre, baixando o grau superficial de divergência dos diagramas de quadrático para logarítmico[60]. Porém as divergências infravermelhas que se originam do mecanismo UV/IR continuam sendo quadráticas.

também têm sido utilizadas para investigar problemas em física da matéria condensada, tais como supercondutividade a alta  $T_c$  [70, 71] e efeito Hall quântico[72].

Em três dimensões os dois supercampos mais importantes são o escalar e o espinorial. O supercampo escalar é definido de forma a ter a seguinte expansão na coordenada fermiônica

$$\phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x), \quad (1.28)$$

que termina no termo quadrático pois  $\theta_\alpha$  é uma variável grassmaniana. Os campos componentes são obtidos com as projeções

$$\phi(x) = \phi(x, \theta)|, \quad (1.29a)$$

$$\psi_\alpha(x) = D_\alpha \phi(x, \theta)|, \quad (1.29b)$$

$$F(x) = D^2 \phi(x, \theta)|. \quad (1.29c)$$

O símbolo  $|$  indica que  $\theta$  é colocado como zero após a diferenciação da correspondente expressão,

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}, \quad (1.30)$$

com  $\alpha = 1, 2$  é a derivada espinorial e

$$D^2 = \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha. \quad (1.31)$$

(veja o Apêndice A para maiores detalhes).

O supercampo espinorial é introduzido como

$$A_\alpha(x, \theta) = \chi_\alpha(x) - \theta_\alpha B(x) + i\theta^\beta V_{\beta\alpha}(x) - 2\theta^2 \left[ \lambda_\alpha(x) + \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} \chi^\beta(x) \right], \quad (1.32)$$

com os campos componentes

$$\chi_\alpha(x) = A_\alpha(x, \theta)|, \quad (1.33a)$$

$$B(x) = \frac{1}{2} D^\alpha A_\alpha(x, \theta)|, \quad (1.33b)$$

$$V_{\alpha\beta}(x) = -\frac{i}{2} [D_\alpha A_\beta(x, \theta) + D_\beta A_\alpha(x, \theta)]|, \quad (1.33c)$$

$$\lambda_\alpha(x) = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha A_\beta(x, \theta)|. \quad (1.33d)$$

Estes são os ingredientes básicos para construção de teorias de supercampos em três dimensões.

### 1.4.1 Campo escalar

A ação para modelos envolvendo apenas o supercampo escalar possui a forma

$$S = \int d^5z \left[ \frac{1}{4} D^\alpha \phi D_\alpha \bar{\phi} + \frac{m}{2} \phi \bar{\phi} + f(\phi) \right], \quad (1.34)$$

onde  $f(\phi)$  é uma função arbitrária do supercampo escalar, que, por razões de renormalizabilidade, deve ter até a quarta potência em  $\phi$ . Levando em conta (1.29), a ação (1.34) é escrita em componentes

$$S = \int d^3x \left[ -\frac{1}{2} F^2 + \frac{i}{2} \psi_\alpha \partial^{\alpha\beta} \psi_\beta - \frac{1}{2} \phi \square \phi + m(\psi^2 + \phi F) + f''(\phi) \psi^2 + f'(\phi) F \right], \quad (1.35)$$

onde  $\square$  é o operador d'Alambertiano. O campo auxiliar  $F$  pode ser eliminado usando a equação de movimento

$$F = m\phi + f'(\phi) \quad (1.36)$$

Note que o último termo entre colchetes da equação (1.35) gera o termo de interação  $\phi^6$  para  $f(\phi) = \lambda\phi^4$ .

### 1.4.2 Campo espinorial

Vamos introduzir a transformação de calibre para o supercampo escalar em três dimensões

$$\phi \rightarrow e^{iK} \phi, \quad \bar{\phi} \rightarrow e^{-iK} \bar{\phi}, \quad (1.37)$$

onde  $K$  é um parâmetro da transformação de calibre e  $\bar{\phi}$  é o complexo conjugado de  $\phi$ . Para  $K$  constante o termo cinético,

$$\int d^5z D^\alpha \phi D_\alpha \bar{\phi}, \quad (1.38)$$

é invariante sob esta transformação. Vamos introduzir a derivada supercovariante,

$$\nabla_\alpha \phi = (D_\alpha + iA_\alpha) \phi. \quad (1.39)$$

Para obtermos um termo cinético do tipo (1.38) com a derivada supercovariante, temos que introduzir uma transformação de calibre para o supercampo  $A_\alpha$

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + D_\alpha K, \quad (1.40)$$

com isso  $\nabla_\alpha\phi$  se transforma como,

$$\nabla_\alpha\phi \rightarrow e^{iK}\nabla_\alpha\phi. \quad (1.41)$$

Com uma transformação semelhante para o complexo conjugado, fazendo que  $\nabla^\alpha\phi(\nabla_\alpha\phi)^*$  seja invariante sob transformações de calibre. O tensor intensidade de campo é dado por

$$W_\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha A_\beta, \quad (1.42)$$

que é invariante sob a transformação (1.40). Levando em consideração a estrutura de componentes de  $A_\alpha$ , a transformação (1.40) corresponde a

$$\delta\chi_\alpha = \sigma_\alpha, \quad \delta B = \tau, \quad \delta V_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}\omega, \quad \delta\lambda_\alpha = 0, \quad (1.43)$$

onde definimos as componentes do parâmetro de supercampo de calibre  $K$ , por

$$\omega = K|, \quad (1.44a)$$

$$\sigma_\alpha = D_\alpha K|, \quad (1.44b)$$

$$\tau = D^2 K|. \quad (1.44c)$$

Uma escolha apropriada do parâmetro  $K$  (e conseqüentemente de suas componentes) é a que elimina os campos  $\chi_\alpha$  e  $B$ . Esta escolha é conhecida como calibre de Wess-Zumino, que possui a vantagem que todas as potências  $A_\alpha^n$ , para  $n > 2$  são nulas. Contudo isto quebra a supersimetria, restando apenas uma supersimetria residual. Em termos dos campos componentes,

$$W_\alpha = \lambda_\alpha + i\theta^\beta f_{\alpha\beta} - i\theta^2 \partial_{\alpha\beta}\lambda^\beta. \quad (1.45)$$

Note que  $W_\alpha$  é dado somente em termos do gaugino  $\lambda_\alpha$  e do tensor intensidade  $f_{\alpha\beta}$ ,

$$f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma^{mn})_{\alpha\beta} F_{mn}, \quad (1.46)$$

onde  $F_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$  é o tensor intensidade e  $\sigma^{mn} = [\sigma^m, \sigma^n]$  é um tensor simétrico.

As componente de  $W_\alpha$  podem ser definidas por

$$\lambda_\alpha = W_\alpha|, \quad (1.47a)$$

$$f_{\alpha\beta} = D_\alpha W_\beta|. \quad (1.47b)$$

Das propriedades das derivadas (ver apêndice A) segue a propriedade de transversalidade de  $W_\alpha$ ,

$$D^\alpha W_\alpha = 0. \quad (1.48)$$

Vamos agora construir a ação envolvendo o campo espinorial. O termo cinético mais natural para supercampo de calibre é

$$\frac{1}{2} \int d^5 z W^\alpha W_\alpha, \quad (1.49)$$

que em componentes se reduz a

$$\int d^3 x \left( \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \lambda^\alpha i \partial_{\alpha\beta} \lambda^\beta \right). \quad (1.50)$$

O acoplamento com matéria é dado pelo termo

$$S_M = \frac{1}{2} \int d^5 z \nabla^\alpha \phi (\nabla_\alpha \phi)^*, \quad (1.51)$$

que em componentes é

$$\begin{aligned} S_M = & \int d^3 x \left[ -F\bar{F} + i\bar{\psi}_\alpha \partial^{\alpha\beta} \psi_\beta - \bar{\phi} \square \phi - iV^{\alpha\beta} \phi \partial_{\alpha\beta} \bar{\phi} - iV^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \phi \bar{\phi} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \phi V^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} \bar{\phi} + V^{\alpha\beta} (\psi_\alpha \bar{\psi}_\beta - \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta) + \lambda^\alpha (\phi \bar{\psi}_\alpha - \bar{\phi} \psi_\alpha) + \\ & + (\psi^\alpha \bar{F} - \bar{\psi}^\alpha F) \chi_\alpha + (\partial_{\alpha\beta} \psi^\alpha \bar{\phi} - \partial_{\alpha\beta} \bar{\psi}^\alpha \phi - \partial_{\alpha\beta} \bar{\phi} \psi^\alpha + \partial_{\alpha\beta} \phi \bar{\psi}^\alpha) \chi^\beta + \\ & \left. \frac{1}{2} (\phi B^2 \bar{\phi} + \bar{\phi} \phi \chi^\alpha \lambda_\alpha + (F\bar{\phi} + \bar{F}\phi) \chi^\alpha \chi_\alpha) \right]. \quad (1.52) \end{aligned}$$

No calibre de Wess-Zumino somente os termos nas duas primeiras linhas sobrevivem, a presença dos termos adicionais traz as conhecidas diferenças entre os resultados obtidos no formalismo de supercampos e no cálculo em termos de componentes. Note que a maioria dos trabalhos realizados em componentes usa uma supersimetria simplificada, que é obtida impondo o calibre de Wess-Zumino. O motivo principal é que a teoria possui supersimetria residual e contém menos termos, entretanto, essa formulação não pode ser alcançada projetando diretamente a ação de supercampos em componentes.

Devemos também mencionar mais uma construção invariante de calibre no superespaço que é o análogo em supercampos ao termo de Chern-Simons,

$$S_{CS} = \frac{m}{2g^2} \int d^5 z A^\alpha W_\alpha, \quad (1.53)$$

com a estrutura em componentes,

$$S_{CS} = \frac{m}{g^2} \int d^3 x (V^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \lambda^\alpha \lambda_\alpha). \quad (1.54)$$

### 1.4.3 Modelos não-abelianos de calibre

Vamos generalizar os resultados das duas subseções para o caso de campos não-abelianos. Os supercampos tomam valores numa álgebra de Lie,  $A_\alpha = A_\alpha^a T^a$  e  $\phi = \phi^a T^a$ , onde os  $T^a$  são os geradores da álgebra.

A derivada covariante é introduzida como

$$\nabla^\alpha \phi = D^\alpha \phi + i [\phi, A^\alpha], \quad (1.55)$$

portanto a ação de acoplamento entre os campos de calibre com os campos de matéria  $S_M$  é

$$S_M = \int d^5 z (D^\alpha \phi + i [\phi, A^\alpha]) (D^\alpha \bar{\phi} + i [\bar{\phi}, A^\alpha]), \quad (1.56)$$

enquanto que as transformações de calibre são

$$\phi \rightarrow e^{-iK} \phi e^{iK}, \quad \bar{\phi} \rightarrow e^{-iK} \bar{\phi} e^{iK}, \quad A_\alpha \rightarrow e^{-iK} A_\alpha e^{iK} - i e^{-iK} D_\alpha e^{iK}. \quad (1.57)$$

Devido ao não cancelamento dos comutadores e anti-comutadores do supercampo de calibre e suas derivadas, o tensor intensidade de campo para o caso não-abeliano é exatamente

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha A_\beta - \frac{i}{2} [A^\beta, D_\beta A_\alpha] - \frac{1}{6} [A^\beta, \{A_\beta, A_\alpha\}], \quad (1.58)$$

e se transforma, frente à (1.57),

$$W_\alpha \rightarrow e^{-iK} W_\alpha e^{iK}. \quad (1.59)$$

A ação que é invariante frente a esta transformação é formalmente idêntica à ação para o caso abeliano,

$$S = \text{Tr} \int d^5 z W^\alpha W_\alpha, \quad (1.60)$$

contudo possui um número maior de vértices, provenientes dos termos adicionais de  $W_\alpha$ .

A generalização da ação de Chern-Simons para o caso não-abeliano é dada por

$$S_{CS} = \frac{m}{2g^2} \text{Tr} \int d^5 z \left( A^\alpha W_\alpha + \frac{i}{6} \{A^\alpha, A^\beta\} D_\beta A_\alpha + \frac{1}{12} \{A^\alpha, A^\beta\} \{A_\alpha, A_\beta\} \right). \quad (1.61)$$

Assim encerramos a apresentação de teorias de campo no superespaço tridimensional. Agora estamos aptos a desenvolver a extensão não-comutativa destas teorias e a estabelecer a formulação quântica das mesmas.



## 1.5 Não-comutatividade e Supersimetria em teorias de campo

Esta tese versa sobre a consistência perturbativa de teorias de calibre supersimétricas não-comutativas definidas num espaço-tempo de  $2 + 1$  dimensões. Esta particular escolha de dimensionalidade se baseia em simplicidade. A supersimetria em  $2 + 1$  dimensões é mais simples que em  $3 + 1$ , pois só há um gerador de supersimetria. Aliado a isto temos o fato que o tensor intensidade de campo é polinomial, ao contrário do que ocorre no caso quadrimensional, o que define uma ação com um número finito de termos, tornando o exame da consistência mais fácil e trazendo a possibilidade de obtenção de resultados mais precisos. Investigaremos se a supersimetria também é capaz de melhorar o comportamento UV bem como evitar o aparecimento de singularidades infravermelhas UV/IR não integráveis que invalidem o desenvolvimento perturbativo assim como acontece em quatro dimensões para o modelo de Wess-Zumino [35] e para as funções de dois e três pontos da eletrodinâmica quântica não-comutativa supersimétrica ( $NCSQED_4$ ) [73] e do modelo não-comutativo supersimétrico de Yang-Mills ( $NCSYM_4$ ) [74]. Utilizaremos sistematicamente o formalismo covariante de supercampos.

Os resultados originais desta tese serão apresentados nos capítulos 2 e 3, onde demonstramos a consistência da formulação covariante de supercampos de teorias de calibre supersimétricas não-comutativas tridimensionais.

No capítulo 2 começamos calculando as correções a um laço das funções de vértice de  $n$  pontos da teoria de calibre abeliana tridimensional. Mostraremos que a eletrodinâmica quântica não-comutativa supersimétrica em três dimensões ( $NCSQED_3$ ) é finita no UV e livre de divergências infravermelhas UV/IR em um laço. Também mostraremos que esta teoria é livre de divergências não integráveis em qualquer ordem da teoria de perturbações e que não possui divergências superficiais além de dois laços.

No terceiro capítulo estenderemos o estudo ao caso não abeliano. Provamos que resultados análogos aos obtidos para a  $NCSQED_3$  emergem para a teoria de Yang-Mills não comutativa supersimétrica em três dimensões ( $NCSYM_3$ ), porém com uma importante ressalva: A restrição à representação fundamental do grupo de calibre torna-se condição necessária para a existência da teoria.

No quarto capítulo apresentaremos as conclusões desta tese bem como as perspectivas futuras. O Apêndice A é uma breve introdução à supersimetria em  $2 + 1$  dimensões.

## 2 *QED tridimensional não comutativa supersimétrica no formalismo de supercampos*

Neste capítulo vamos utilizar o formalismo covariante de supercampos para estudar a eletrodinâmica quântica tridimensional não-comutativa supersimétrica. Mostraremos que a teoria é livre de divergências UV/IR não integráveis em todas as ordens de laço e que é finita na aproximação de um laço.

### 2.1 Ação e regras de Feynman

Começaremos introduzindo a transformação de calibre para o superpotencial espinorial  $A_\alpha$ ,

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = e^{-iK} (A_\alpha - iD_\alpha) e^{iK}, \quad (2.1)$$

onde  $K$  é um parâmetro da transformação de calibre. Essa transformação pertence ao grupo  $U_\star(1)$ , que é a extensão não comutativa do grupo  $U(1)$  usual. Na forma infinitesimal se reduz a

$$\delta A_\alpha = D_\alpha K - i[A_\alpha, K]_\star. \quad (2.2)$$

A ação da teoria no caso de uma supersimetria ( $\mathcal{N}=1$ ) é [18],

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^5z W^\alpha \star W_\alpha, \quad (2.3)$$

onde

$$W_\beta = \frac{1}{2} D^\alpha D_\beta A_\alpha - \frac{i}{2} [A^\alpha, D_\alpha A_\beta]_\star - \frac{1}{6} [A^\alpha, \{A_\alpha, A_\beta\}_\star]_\star \quad (2.4)$$

é a intensidade de supercampo construída a partir de  $A_\alpha$  e *gaconstantedeacoplamentodateoria*. Nos comutadores e anti-comutadores, o subscrito  $\star$  indica que os produtos dos operadores envolvidos são produtos Moyais. Como já foi mencionado, a não comutatividade espaço-

tempo traz problemas de unitariedade, então neste trabalho nos limitaremos a considerar apenas não comutatividade espaço-espaço [43].

É simples verificar que a ação  $S$  é invariante sob a transformação de calibre (2.1).

A utilização da formulação covariante de supercampos exige modificar a ação de partida (2.3) pela adição de um termo de fixação de calibre ( $S_{GF}$ ) explicitamente supersimétrico [75]. Escolhemos

$$S_{GF} = -\frac{1}{4\xi g^2} \int d^5z (D^\alpha A_\alpha) \star D^2 (D^\beta A_\beta), \quad (2.5)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro real. Finalmente lembramos que a quantização de sistemas com vínculos de primeira classe através do método de integral funcional prescreve que o correspondente integrando deve também incluir o determinante da matriz cujos elementos são os colchetes de Poisson dos vínculos com as condições de calibre. Este determinante é denominado na literatura determinante de Faddeev-Popov e quando expressado em termos dos campos fantasmas  $c$  e  $c'$  toma a forma<sup>1</sup>

$$\Delta^{-1} [A_\alpha] = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}c' e^{\frac{i}{2g^2} \int d^5z c'(z) D^\alpha \delta A_\alpha|_{K=c}}, \quad (2.6)$$

onde  $\delta A_\alpha$  é dado pela equação (2.2). O expoente da equação (2.6) define a interação dos fantasmas com o campo de calibre ( $S_{FP}$ ). Após levar em conta (2.2) encontramos

$$S_{FP} = \frac{1}{2g^2} \int d^5z (c' D^\alpha D_\alpha c + i c' \star D^\alpha [A_\alpha, c]_\star). \quad (2.7)$$

Logo, na família de calibres covariantes parametrizada por  $\xi$ , a ação da eletrodinâmica supersimétrica não comutativa é dada pela soma de (2.3), (2.5) e (2.7), isto é,

$$S_{NCSQED_3} = S + S_{GF} + S_{FP}. \quad (2.8)$$

Na sequência obteremos as regras de Feynman que derivam de (2.8). A obtenção dos propagadores se dá como nas teorias comutativas, uma vez que o produto Moyal não traz modificações à parte quadrática da ação (2.8). A parte quadrática no campo de calibre

---

<sup>1</sup>Lembramos que  $c$  e  $c'$  são supercampos com paridade grassmaniana ímpar [18].

$A_\alpha (S^2)$  é dada pela soma da parte quadrática de (2.3) e (2.5),

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{2g^2} \int d^5z \frac{1}{4} D^\gamma D^\alpha A_\gamma D^\beta D_\alpha A_\beta - \frac{1}{4\xi g^2} \int d^5z (D^\alpha A_\alpha) \star D^2 (D^\beta A_\beta) \\
&= \frac{1}{2g^2} \int d^5z \left[ \frac{1}{4} D^\gamma D^\alpha A_\gamma D^\beta D_\alpha A_\beta - \frac{1}{2\xi} (D^\alpha A_\alpha) \star D^2 (D^\beta A_\beta) \right] \\
&= \frac{1}{2g^2} \int d^5z \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) A^\alpha \square A_\alpha - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A^\alpha i\partial_{\alpha\beta} D^2 A^\beta \right] \\
&= \frac{1}{2g^2} \int d^5z A^\alpha \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \square C_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) i\partial_{\alpha\beta} D^2 \right] A^\beta, \tag{2.9}
\end{aligned}$$

onde  $C^{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$  é um tensor antisimétrico definido com a normalização  $C^{12} = i$ . Por definição, o propagador de  $A_\alpha (z)$  é a função  $\langle A^\alpha(z_1) A^\beta(z_2) \rangle$  que satisfaz a equação

$$\frac{1}{2g^2} \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \square C_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) i\partial_{\alpha\beta} D^2 \right] \langle A^\alpha(z_1) A^\beta(z_2) \rangle = -i\delta^5(z_1 - z_2). \tag{2.10}$$

É fácil verificar que

$$\langle A^\alpha(z_1) A^\beta(z_2) \rangle = \frac{ig^2}{2} \left[ C^{\alpha\beta} \frac{1}{\square} (\xi + 1) - \frac{1}{\square^2} (\xi - 1) i\partial^{\alpha\beta} D^2 \right] \delta^5(z_1 - z_2), \tag{2.11}$$

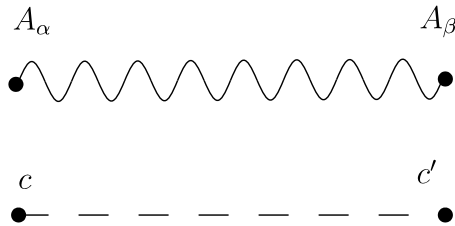
onde a prescrição de Feynman deve ser subentendida, assim como em todos os propagadores restantes. Note que para o calibre de Feynman ( $\xi = 1$ ) a equação (2.11) se reduz a

$$\langle A^\alpha(z_1) A^\beta(z_2) \rangle = ig^2 C^{\alpha\beta} \frac{1}{\square} \delta^5(z_1 - z_2). \tag{2.12}$$

Analogamente, para os campos fantasmas obtemos

$$\langle c'(z_1) c(z_2) \rangle = -ig^2 \frac{D^2}{\square} \delta^5(z_1 - z_2). \tag{2.13}$$

Assumimos que os fantasmas estão na representação adjunta. Os propagadores da teoria estão representados na figura 2.



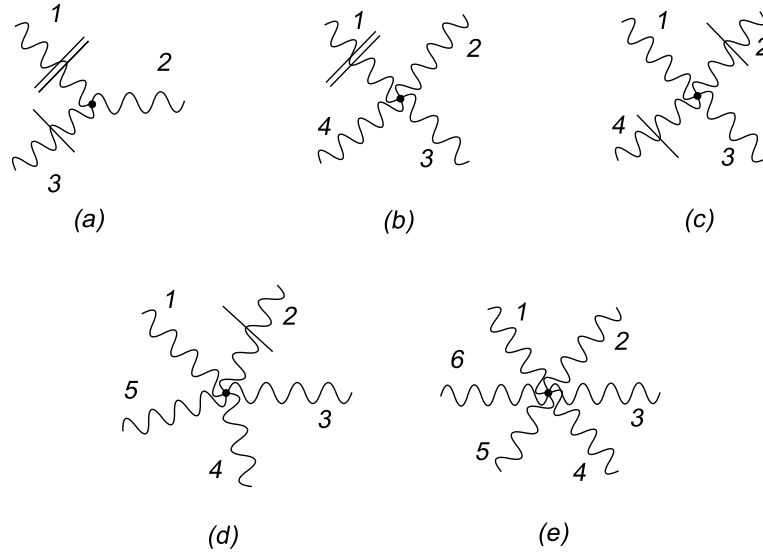
**FIGURA 2:** Propagador do campo de calibre e dos supercampos fantasmas.

O passo seguinte consiste em determinar os vértices do modelo. A ação de interação

( $S_{int}$ ) no setor de calibre é, de acordo com (2.3),

$$\begin{aligned}
S_{int} = & \frac{1}{g^2} \int d^5z \left[ -\frac{i}{4} D^\gamma D^\alpha A_\gamma \star [A^\beta, D_\beta A_\alpha]_\star - \frac{1}{12} D^\gamma D^\alpha A_\gamma \star [A^\beta, \{A_\beta, A_\alpha\}_\star]_\star - \right. \\
& - \frac{1}{8} [A^\gamma, D_\gamma A^\alpha]_\star \star [A^\beta, D_\beta A_\alpha]_\star + \frac{i}{12} [A^\gamma, D_\gamma A^\alpha]_\star \star [A^\beta, \{A_\beta, A_\alpha\}_\star]_\star + \\
& \left. + \frac{1}{72} [A^\gamma, \{A_\gamma, A^\alpha\}_\star]_\star \star [A^\beta, \{A_\beta, A_\alpha\}_\star]_\star \right]. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Vale lembrar que o produto Moyal é cíclico, usamos essa propriedade para agrupar alguns termos da ação de interação de forma a obter o resultado acima. Temos vértices de três a seis pernas, com uma distribuição de derivadas espinoriais conforme está representado na figura 3. A notação adotada para os vértices indica explicitamente o número de derivadas que atuam nas pernas. Por exemplo, o vértice trilinear será denotado por  $V_3$  por conter três derivadas, enquanto que o vértice de seis pernas será denotado  $V_0$  pois não possui derivadas.



**FIGURA 3:** Vértices do campo de calibre. As duas linhas transversais nas pernas dos vértices indicam que temos duas derivadas atuando naquela perna,  $D^\alpha D^\beta$ , enquanto uma linha transversal indica a atuação de uma derivada,  $D^\alpha$ .

Vamos começar calculando o vértice trilinear prestando especial atenção à não comu-

tatividade da interação. Partimos de

$$\begin{aligned}
S_{int}^3 &= -\frac{i}{4g^2} \int d^5z D^\gamma D^\alpha A_\gamma \star [A^\beta, D_\beta A_\alpha] \star \\
&= -\frac{i}{4g^2} \int d^3x d^2\theta [D^\gamma D^\alpha A_\gamma \star A^\beta \star D_\beta A_\alpha - D^\gamma D^\alpha A_\gamma \star D_\beta A_\alpha \star A^\beta] \\
&= -\frac{i}{4g^2} \int d^2\theta \left( \prod_{i=1}^3 d^3x_i \right) \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\Sigma k_j) e^{-i\Sigma k_j x_j} e^{-i\Sigma_{i<j} k_i \wedge k_j} \times \\
&\quad \times [D^\gamma D^\alpha A_\gamma(x_1) A^\beta(x_2) D_\beta A_\alpha(x_3) - D^\gamma D^\alpha A_\gamma(x_1) D_\beta A_\alpha(x_2) A^\beta(x_3)] \\
&= -\frac{i}{4g^2} \int d^2\theta \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\Sigma k_j) e^{-i\Sigma_{i<j} k_i \wedge k_j} \times \\
&\quad \times [D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) A^\beta(k_2) D_\beta A_\alpha(k_3) - D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) D_\beta A_\alpha(k_2) A^\beta(k_3)] \quad (2.15)
\end{aligned}$$

onde os campos foram escritos em termos de suas respectivas transformadas de Fourier. O fator de fase  $e^{-i\Sigma_{i<j} k_i \wedge k_j}$  carrega o efeito da não comutatividade e para  $j = 3$  se reduz a

$$V(k_1, k_2, k_3) = e^{-ik_1 \wedge k_2}, \quad (2.16)$$

de forma tal que (2.15) fica

$$\begin{aligned}
S_{int}^3 &= -\frac{i}{4g^2} \int d^2\theta \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\Sigma k_j) e^{-ik_1 \wedge k_2} [D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) A^\beta(k_2) D_\beta A_\alpha(k_3) - \\
&\quad - D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) A^\beta(k_2) D_\beta A_\alpha(k_3)]. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Mudando variáveis de integração ( $k_2 \rightarrow k_3$  e  $k_3 \rightarrow k_2$ ) no segundo termo entre colchetes de (2.17) obtemos

$$\begin{aligned}
S_{int}^3 &= -\frac{i}{4g^2} \int d^2\theta \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\Sigma k_j) [e^{-ik_1 \wedge k_2} - e^{+ik_1 \wedge k_2}] \times \\
&\quad \times D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) A^\beta(k_2) D_\beta A_\alpha(k_3) \\
&= -\frac{i}{4g^2} \int d^2\theta \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\Sigma k_j) [-2i \sin(k_1 \wedge k_2)] \times \\
&\quad \times D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) A^\beta(k_2) D_\beta A_\alpha(k_3), \quad (2.18)
\end{aligned}$$

onde a conservação de momento  $\delta(\Sigma k_j) = 0$  foi levada em conta. Concluimos então que a não comutatividade incorpora ao vértice trilinear usual o fator trigonométrico  $-2i \sin(k_1 \wedge k_2)$ , então

$$V_3(k_1, k_2, k_3) = -\frac{1}{2g^2} \sin(k_1 \wedge k_2). \quad (2.19)$$

Nesta última fórmula,  $k_1$  é o momento da perna com duas derivadas enquanto  $k_2$  é o da perna sem derivadas, conforme indicado na Fig. 3(a). Devemos notar que a ordem dos termos é importante.

O vértice quártico, que designaremos  $V_2$  por conter duas derivadas espinoriais, possui duas contribuições, uma em que temos duas derivadas na mesma perna e outra em que as derivadas atuam em pernas distintas, as notações são dadas conforme a Fig.3(b) e (c). Encontra-se que

$$V_{2b}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{3g^2} \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4), \quad (2.20a)$$

$$V_{2c}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{2g^2} \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4). \quad (2.20b)$$

A ordem dos campos para  $V_{2b}$  é  $D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k_1) A^\beta(k_2) A_\beta(k_3) A_\alpha(k_4)$  enquanto para  $V_{2c}$  é  $A^\gamma(k_1) D_\gamma A^\alpha(k_2) A^\beta(k_3) D_\beta A_\alpha(k_4)$ .

Para o vértice de cinco pernas obtemos

$$V_1(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = -\frac{2}{3g^2} \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_4 \wedge k_5) \sin(k_3 \wedge k_4 + k_3 \wedge k_5), \quad (2.21)$$

sendo a ordem dos espinores,  $A^\gamma(k_1) D_\gamma A^\alpha(k_2) A^\beta(k_3) A_\beta(k_4) A_\alpha(k_5)$ . O vértice de seis pernas é dado por

$$V_0(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = -\frac{2}{9g^2} [\sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_5 \wedge k_6) - \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_5 \wedge k_4) + \sin(k_2 \wedge k_3) \sin(k_5 \wedge k_6) - \sin(k_2 \wedge k_3) \sin(k_5 \wedge k_4)] \quad (2.22)$$

com a seguinte ordem dos campos,  $A^\alpha(k_1) A^\gamma(k_2) A_\gamma(k_3) A_\alpha(k_4) A^\beta(k_5) A_\beta(k_6)$ .

A parte de interação entre fantasmas e campo de calibre que emerge de (2.7) fornece o vértice que denotaremos  $V_c$ ,

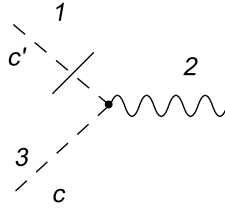
$$V_c = \frac{1}{g^2} \sin(k_2 \wedge k_3), \quad (2.23)$$

cuja representação gráfica é dada na figura 4 com o ordenamento  $D^\alpha c'(k_1) A_\alpha(k_2) c(k_3)$ .

A estrutura do vértice  $V_c$  emerge após carregar uma integração por partes na parte de interação ( $S_{FP_{int}}$ ) de (2.7)

$$S_{FP_{int}} = \frac{i}{2g^2} \int d^5 z c' \star D^\alpha [A_\alpha, c]_\star = \frac{i}{2g^2} \int d^5 z D^\alpha c' \star [A_\alpha, c]_\star. \quad (2.24)$$

O objetivo desse procedimento é ter a derivada atuando em  $c'$  e não no comutador, o que simplifica os cálculos.



**FIGURA 4:** Vértice dos campos de fantasmas. A linha transversal indica a atuação de uma derivada,  $D^\alpha$ .

Concluimos que, como regra geral, a não comutatividade se manifesta na teoria por meio das alterações nos termos de interação. Estas alterações, denominadas nesse trabalho, fatores trigonométricos, envolvem os momentos que entram nos vértices.

Além dos propagadores e vértices, as regras de Feynman para o cálculo de superdiagramas no espaço de momentos devem ser suplementadas pelas seguintes prescrições:

1. Cada vértice traz uma integração na respectiva variável fermiônica  $\int d^2\theta_i$ ,
2. cada laço traz uma integração no momento que corre através dele,  $\int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}$ ,
3. a amplitude associada a todo diagrama é multiplicada por um fator de conservação de momento  $(2\pi)^3 \delta(\Sigma p_i)$ , onde a soma se dá sobre os momentos que entram no supergráfico,
4. para o cálculo da ação efetiva devemos associar a cada uma das linhas externas do diagrama um fator  $\int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \Phi(p_i)$ , sendo  $\Phi$  o supercampo correspondente à linha. Só devem ser levados em conta os diagramas irreduzíveis de uma partícula ( $1PI$ ).
5. os fatores topológicos são determinados como na contrapartida comutativa,
6. o resultado final do diagrama deve ser simetrizado em relação aos momentos externos.

Neste ponto torna-se instrutivo comparar com a situação análoga encontrada na QED tetradimensional não comutativa supersimétrica no formalismo de supercampos ( $NCSQED_4$ ). Observamos algumas peculiaridades da teoria em 2+1 dimensões. Em 3+1 dimensões temos uma transformação de calibre não-linear e uma ação não-polinomial, que leva a um modelo com infinitos termos na interação [73]. Em 2 + 1 dimensões a série de termos na interação termina, devido ao fato que a intensidade de campo  $W_\alpha$  é polinomial. Isto implica que em 2 + 1 dimensões teremos uma simplificação significativa do programa de renormalização.



## 2.2 Grau de divergência superficial

Para estudar a estrutura de divergências ultravioletas ( $UV$ ) do modelo, iniciaremos determinando o grau superficial de divergência,  $\omega[G]$ , associado a um supergráfico genérico com  $L$  laços,  $V$  vértices,  $P$  propagadores e  $N_D$  derivadas espinoriais aplicadas nas pernas externas do campo de calibre. Não há diferença entre a contagem de potências dos casos comutativos e não-comutativos.

O grau de divergência superficial recebe contribuição explícita dos propagadores e implícita das derivadas supercovariantes. Essa última pode ser desvendada com o uso da regra de conversão

$$D_\alpha D_\beta = i\partial_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} D^2 \quad (2.25)$$

e da identidade

$$(D^2)^2 = \square. \quad (2.26)$$

Cada laço contribui com duas potências de momentum para  $\omega[G]$ . Para ver como isso ocorre, note que cada integração  $d^3k$  é decrescida de uma potência de momentum quando o correspondente laço é contraído a um ponto. De fato, ao usar a álgebra das  $D$ 's,

$$\delta_{12} D^2 \delta_{12} = \delta_{12} \quad (2.27)$$

uma potência de momento do numerador é diminuída.

Seja  $V_3$ ,  $V_2$ ,  $V_1$  e  $V_0$  o número de vértices do campo de calibre com três, duas, uma e nenhuma derivada espinorial, respectivamente. Então eles juntos contribuem a  $\omega[G]$  com o fator  $\frac{3}{2}V_3 + V_2 + \frac{1}{2}V_1$ , pois a contagem é dada pelo número de derivadas que cada vértice contém e cada derivada contribui com uma potência de  $k^{1/2}$ . Além disso,  $\omega[G]$  é aumentado por  $\frac{1}{2}V_c$ , sendo  $V_c$  o número de vértices com fantasmas, pois esse vértice contém um operador  $\square$  no denominador.

Cada propagador do campo de calibre (seja  $P_A$  o número desses propagadores) decresce  $\omega[G]$  por dois e cada propagador de fantasmas decresce  $\omega[G]$  por um (seja  $P_c$  o número desses propagadores). Mover uma derivada supercovariante para um campo externo decresce  $\omega[G]$  por  $\frac{1}{2}$ . Vamos chamar de  $N_D$  o número das derivadas atuando em campos externos. Juntando todas estas contribuições, concluímos que  $\omega[G]$  é dado por

$$\omega[G] = 2L + \frac{3}{2}V_3 + V_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_c) - 2P_A - P_c - \frac{1}{2}N_D. \quad (2.28)$$

O número de propagadores de fantasmas é igual ao número de vértices com fantasmas,

$P_c = V_c$ , visto que estas excitações sempre formam laços fechados. Então, após utilizar a identidade topológica

$$L + V - P = 1, \quad (2.29)$$

com  $P = P_A + P_c$  e  $V = V_3 + V_2 + V_1 + V_0 + V_c$ , obtemos

$$\omega[G] = 2 - 2V_0 - \frac{3}{2}V_1 - V_2 - \frac{1}{2}V_3 - \frac{1}{2}V_c - \frac{1}{2}N_D. \quad (2.30)$$

A dependência de  $\omega[G]$  com os vértices, indicada em (2.30), caracteriza a  $QED_3$  não comutativa supersimétrica ( $\mathcal{N} = 1$ ) como uma teoria super-renormalizável no ultravioleta. Veremos que as divergências primitivas estão limitadas aos diagramas com um e dois laços.

Convém esclarecer alguns pontos em relação ao grau de divergência. Foi dito que a contagem de potências é a mesma que para a contrapartida comutativa, mas o significado é um pouco diverso. Em teorias não comutativas temos dois tipos de contribuições provenientes de um diagrama, as planares, que não possuem fatores trigonométricos que dependem dos momentos de integração e se assemelham portanto às do caso comutativo, e as não-planares, cujos fatores trigonométricos dependem dos momentos de integração. Para as primeiras, a contagem tem o mesmo significado que para as teorias comutativas, representa o grau da divergência ultravioleta superficial. Para as não-planares, o fator trigonométrico proveniente da não comutatividade ameniza o comportamento ultravioleta, fazendo com que as integrais sejam UV convergentes, mas em contrapartida apresentam um comportamento infravermelho que incorpora singularidades pelo mecanismo UV/IR. Para essas contribuições  $\omega[G]$  representa a maior potência da divergência infravermelha UV/IR do diagrama em questão.

Ressaltamos que este trabalho está focado na análise das divergências UV e das divergências infravermelhas geradas pelo mecanismo UV/IR. É talvez óbvio assinalar que estas últimas possuem uma origem diversa das divergências infravermelhas usuais, as quais estão invariavelmente relacionadas com a presença de partículas de massa zero. Neste último contexto, fica claro que a presença de um termo proporcional a  $\frac{1}{\square^2}$  no propagador (2.11) traz problemas infravermelhos para a teoria, tal como acontece com o termo semelhante que aparece na QED não supersimétrica no calibre de Landau. Mesmo o termo proporcional a  $\frac{1}{\square}$  traz problemas em correções radiativas de ordem superior [76, 77], ou seja, mesmo para  $\xi = 1$  (calibre de Feynman), a presença de um campo componente de  $A_\alpha$  de massa zero é fonte de problemas infravermelhos. A escolha do calibre de Wess-Zumino ameniza os problemas infravermelhos, porém esse calibre quebra a supersimetria não sendo apropriado, portanto, para trabalhar com supercampos.

As singularidades infravermelhas usuais podem ser tratadas modificando a teoria pela inclusão de uma massa reguladora nos propagadores [78–80] o que provoca uma quebra suave da supersimetria. Mostra-se, com identidades de Ward, que grandezas físicas não dependem dessa massa reguladora e que a supersimetria continua operacional, embora esteja explicitamente quebrada. As divergências infravermelhas UV/IR não aceitam o mesmo tratamento e sua permanência pode destruir a expansão perturbativa da teoria, por isso é importante conferir que isto não acontece.

## 2.3 Acoplamento com a matéria

Até o momento estamos com uma teoria supersimétrica sem acoplamento com a matéria. A presença de matéria é levada em conta pela adição de supercampos escalares  $\phi_a, a = 1, \dots, N$ , incorporando à (2.8) a ação da matéria  $S_m$

$$S_m = \int d^5z \left[ \frac{1}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a + i[\bar{\phi}_a, A^\alpha]_\star) \star (D_\alpha \phi_a - i[A_\alpha, \phi_a]_\star) + m \bar{\phi}_a \phi_a \right], \quad (2.31)$$

onde  $\bar{\phi}_a, a = 1, \dots, N$ , são os correspondentes supercampos conjugados. A ação pode ser posta da seguinte forma,

$$S_m = \int d^5z \left[ \bar{\phi}_a (D^2 - m) \phi_a - \frac{i}{2} ([\bar{\phi}_a, A^\alpha]_\star \star D_\alpha \phi_a - D^\alpha \bar{\phi}_a \star [A_\alpha, \phi_a]_\star) \right] \quad (2.32)$$

$$- \frac{1}{2} [\bar{\phi}_a, A^\alpha]_\star \star [A_\alpha, \phi_a]_\star \Big], \quad (2.33)$$

onde fica fácil perceber a presença do termo cinético, que fornece o propagador, e de dois termos de interação, um trilinear e outro quártico.

O propagador livre do campo escalar é dado por

$$\langle \bar{\phi}_a(z_1) \phi_b(z_2) \rangle = -i \delta_{ab} \frac{D^2 + m}{\square - m^2} \delta^5(z_1 - z_2) \quad (2.34)$$

e será representado como na figura 5.



**FIGURA 5:** Propagador do campo de matéria.

A parte da interação trilinear possui dois termos, diferenciados pela posição da derivada espinorial atuando em  $\phi_a$  ou  $\bar{\phi}_a$ . Denotaremos esse vértice  $V_\phi^D$ , mas devemos lembrar

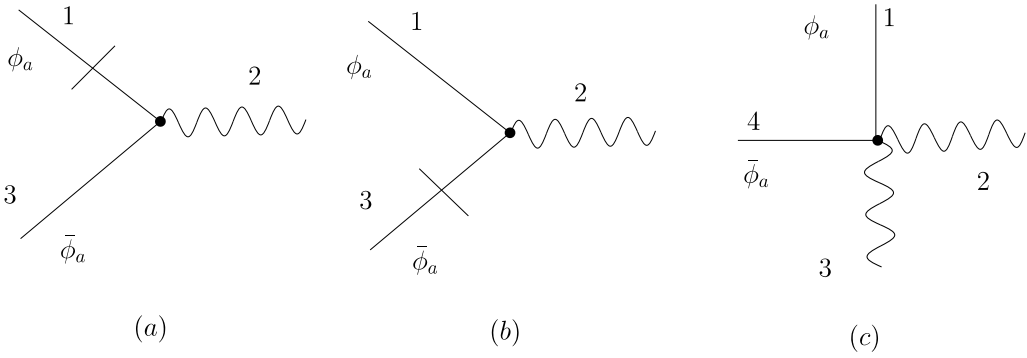
que ele possui dois termos, um sendo  $-\bar{\phi}_a(k_1) A^\alpha(k_2) D_\alpha \phi_a(k_3)$  e o outro  $D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1) A_\alpha(k_2) \phi_a(k_3)$ , sendo o fator trigonométrico comum para ambos

$$V_\phi^D = \sin(k_1 \wedge k_2). \quad (2.35)$$

O fator trigonométrico do vértice quártico,  $\bar{\phi}_a(k_1) A^\alpha(k_2) A_\alpha(k_3) \phi_a(k_4)$  é

$$V_\phi^0 = 2 \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4). \quad (2.36)$$

Os vértices de interação de  $A_\alpha$  com o campo escalar estão representados na figura 6.



**FIGURA 6:** Vértices que envolvem os supercampos de matéria. A linha transversal indica a atuação de uma derivada,  $D^\alpha$ .

### 2.3.1 Grau de divergência superficial

A inclusão de matéria traz modificações na contagem de potências para o cálculo do grau de divergência superficial. Cada vértice trilinear contribui com  $\frac{1}{2}$  e cada propagador com  $-1$ , de forma que

$$\omega[G] = 2L + \frac{3}{2}V_3 + V_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_c + V_\phi^D) - 2P_A - P_c - P_\phi - \frac{1}{2}N_D$$

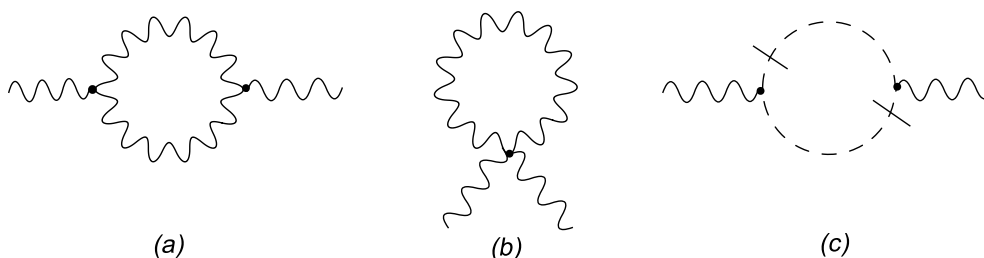
onde, como já foi apontado,  $V_i$  é o número de vértices só com pernas do campo de calibre com  $i$  derivadas espinoriais,  $V_\phi^D$  é o número de ambos vértices trilineares  $D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a$  e  $-\bar{\phi}_a \star A^\alpha \star D_\alpha \phi_a$ ,  $V_\phi^0$  é o número de vértices quárticos  $\bar{\phi}_a \star A^\alpha \star A_\alpha \star \phi_a$  e  $N_D$  é o número de derivadas espinoriais associadas a linhas externas.  $P_\phi$  é o número de propagadores do campo escalar. É simples verificar que  $P_\phi = V_\phi^0 + V_\phi^D - \frac{1}{2}E_\phi$ , sendo  $E_\phi$  o número de pernas externas do campo de matéria. Usando (2.29), com  $P = P_A + P_c + P_\phi$  e  $V = V_3 + V_2 + V_1 + V_0 + V_c + V_\phi^D + V_\phi^0$ , obtemos

$$\omega[G] = 2 - 2V_0 - \frac{3}{2}V_1 - V_2 - \frac{1}{2}V_3 - \frac{1}{2}V_c - V_\phi^0 - \frac{1}{2}V_\phi^D - \frac{1}{2}E_\phi - \frac{1}{2}N_D. \quad (2.37)$$

## 2.4 Função de dois pontos do superpotencial espinorial na aproximação de um laço

### 2.4.1 Setor de calibre

É fácil verificar a partir da equação (2.30) que a  $NCSQED_3$  não contém divergências UV de grau superior a  $\omega[G] = \frac{3}{2}$ . No entanto o gráfico com grau de divergência  $\omega[G] = \frac{3}{2}$ , que aparece para  $V_3 = 1$ , é um "tadpole"<sup>2</sup> cujo fator trigonométrico, proporcional a  $\sin(p \wedge p)$ , é identicamente nulo. No que diz respeito às divergências lineares só podem aparecer nos gráficos com  $V_3 = 2$ , ou  $V_2 = 1$  ou  $V_c = 2$ . As topologias de interesse estão desenhadas na figura 7.

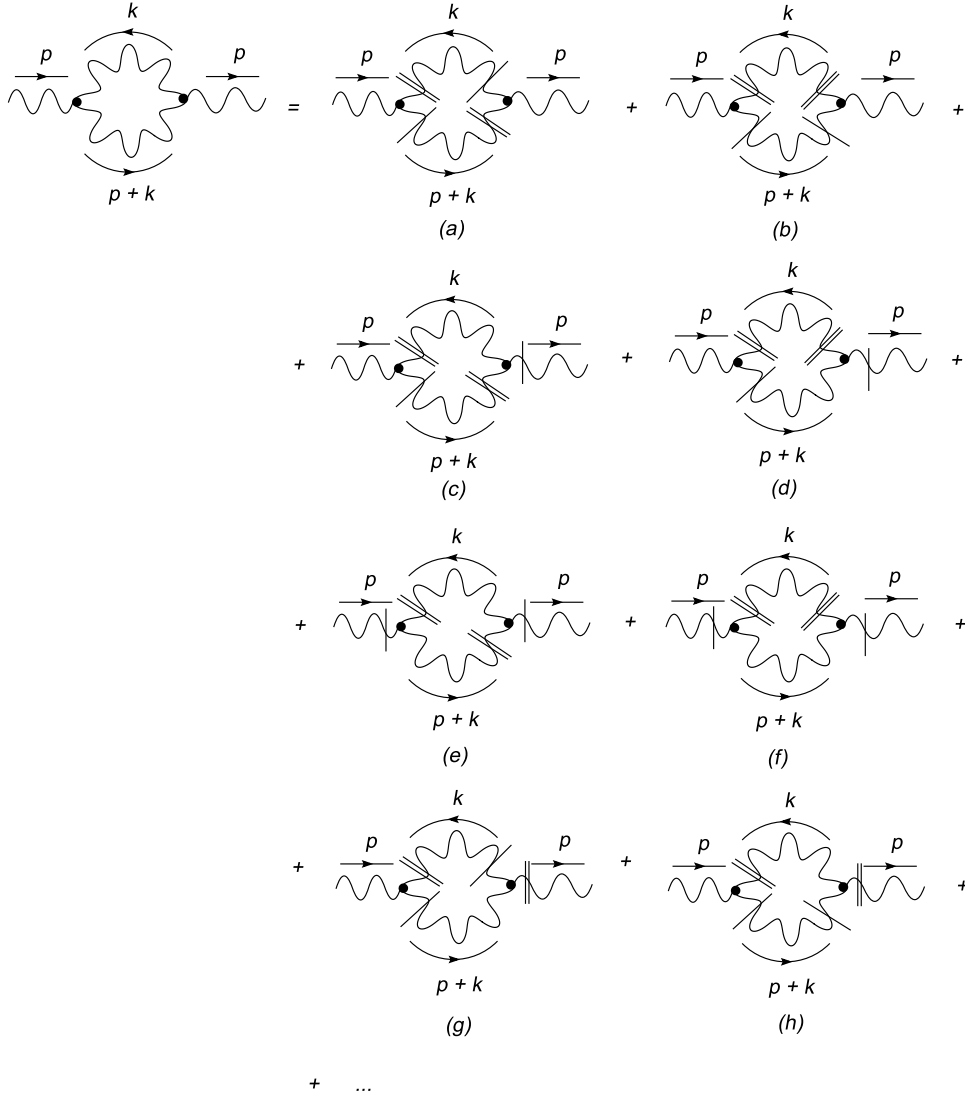


**FIGURA 7:** Topologias com grau superficial de divergência linear que contribuem para a função de dois pontos do campo de calibre.

Vamos analisar detalhadamente a topologia (a) da figura 7. A análise vai exibir o procedimento de montagem da amplitude e a utilização da álgebra de  $D$ 's. As topologias restantes serão analisadas de maneira similar. A topologia (a) da figura 7 é uma soma de diagramas, visto que temos várias combinações possíveis dos vértices trilineares. Esta soma é mostrada explicitamente na figura 8.

Nem todos os gráficos mostrados na figura 8 são linearmente divergentes já que diagramas com derivadas atuando nas pernas externas possuem um grau de divergência menor. De fato, no que diz respeito aos diagramas explicitamente desenhados na referida figura, somente os diagramas (a) e (b) são linearmente divergentes, enquanto que os diagramas (c) e (d) são apenas logaritmicamente divergentes. Vamos calcular a soma das contribuições dos diagramas (a) e (b) isolados na figura 9.

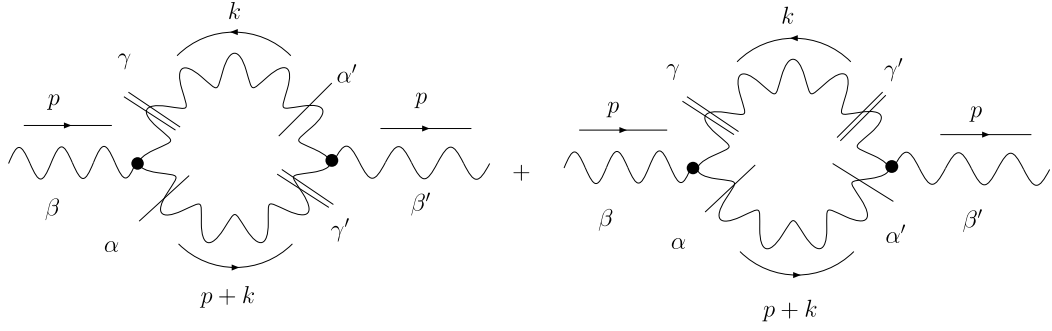
<sup>2</sup>Diagrama com um laço e apenas uma perna externa.



**FIGURA 8:** Diagramas com grau de divergência UV linear e logaritmico que contribuem para a função de dois pontos do campo de calibre. Os pontos representam outras configurações, que por terem um número maior de  $D$ 's nas pernas externas são finitos.

A utilização das regras de Feynman já estabelecidas nos leva a

$$\begin{aligned}
 I_{9a+9b} = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{1}{2g^2} \sin(k \wedge p) \right] \left[ -\frac{1}{2g^2} \sin(k \wedge -p) \right] \times \\
 & \times A^\beta(p, \theta_1) A^{\beta'}(-p, \theta_2) \left[ \langle D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k, \theta_1) D_{\beta'} A_{\alpha'}(-k, \theta_2) \rangle \times \right. \\
 & \times \left. \langle D_\beta A_\alpha(-p-k, \theta_1) D^{\gamma'} D^{\alpha'} A_{\gamma'}(p+k, \theta_2) \rangle - \right. \\
 & - \left. \langle D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k, \theta_1) D^{\gamma'} D^{\alpha'} A_{\gamma'}(-k, \theta_2) \rangle \times \right. \\
 & \times \left. \langle D_\beta A_\alpha(-p-k, \theta_1) D_{\beta'} A_{\alpha'}(p+k, \theta_2) \rangle \right]
 \end{aligned} \tag{2.38}$$



**FIGURA 9:** Diagramas 8(a) e 8(b), com grau superficial de divergência linear.

onde o fator  $\frac{1}{2}$  vem da segunda ordem da teoria de perturbações. Devemos explicitar em qual vértice a derivada  $D_\alpha$  está sendo aplicada, isso é feito utilizando a seguinte notação

$$\langle D_\beta A_\alpha(k, \theta_1) A_\gamma(-k, \theta_2) \rangle = D_{\beta 1} \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\gamma(-k, \theta_2) \rangle, \quad (2.39)$$

$$\langle A_\alpha(k, \theta_1) D_\beta A_\gamma(-k, \theta_2) \rangle = -D_{\beta 2} \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\gamma(-k, \theta_2) \rangle. \quad (2.40)$$

Note a diferença de sinal, que provém da natureza fermiônica da derivada supercovariante e do campo espinorial. O subíndice numérico indica em qual  $\theta$  a derivada está atuando. É importante perceber também que quando há duas derivadas aplicadas no mesmo supercampo e atuando no mesmo vértice essa mudança de sinal não aparece, isto é,

$$\langle A_\alpha(k, \theta_1) D^\sigma D_\beta A_\gamma(-k, \theta_2) \rangle = D_2^\sigma D_{\beta 2} \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\gamma(-k, \theta_2) \rangle. \quad (2.41)$$

Com isso obtemos respectivamente, para os termos entre colchetes na equação (2.38)

$$\begin{aligned} & -D_1^\gamma D_1^\alpha D_{\beta' 2} \langle A_\gamma(k, \theta_1) A_{\alpha'}(-k, \theta_2) \rangle D_{\beta 1} D_2^{\gamma'} D_2^{\alpha'} \langle A_\alpha(-p-k, \theta_1) A_{\gamma'}(p+k, \theta_2) \rangle \\ & + D_1^\gamma D_1^\alpha D_2^{\gamma'} D_2^{\alpha'} \langle A_\gamma(k, \theta_1) A_{\gamma'}(-k, \theta_2) \rangle D_{\beta 1} D_{\beta' 2} \langle A_\alpha(-p-k, \theta_1) A_{\alpha'}(p+k, \theta_2) \rangle \end{aligned} \quad (2.42)$$

Na sequência substituímos  $\langle A_\gamma(k, \theta_1) A_{\alpha'}(-k, \theta_2) \rangle$  pela forma explícita

$$\langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle = \frac{ig^2}{2} \left[ C_{\alpha\beta} \frac{(\xi+1)}{k^2} + \frac{(\xi-1)}{k^4} ik_{\alpha\beta} D^2 \right] \delta_{12}, \quad (2.43)$$

onde  $\delta_{12} \equiv \delta(\theta_1 - \theta_2)$ . Obviamente, (2.43) é a transformada de Fourier de (2.11). Note também que estamos usando a correspondência entre espaço de momentos e coordenadas<sup>3</sup>

$$i\partial_{\alpha\beta} \rightarrow k_{\alpha\beta}. \quad (2.44)$$

<sup>3</sup>Que é equivalente a usar a seguinte regra de transformada de Fourier de espaço de momentos para coordenadas,  $f(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k) e^{-ikx}$ .

A seguir movemos todas as derivadas para a mesma variável fermiônica, com o uso da regra

$$D_2^\alpha \delta_{12} = -D_1^\alpha \delta_{12}, \quad (2.45)$$

de modo que a amplitude se reduz a

$$\begin{aligned} I_{9a+9b} = & \frac{1}{32} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (p+k)^2} A^\beta(p, \theta_1) A^{\beta'}(-p, \theta_2) \times \\ & \times \left[ D^\gamma D^\alpha D_{\beta'} (C_{\gamma\alpha'} (\xi + 1) + k_{\gamma\alpha'} \frac{\xi - 1}{k^2} D^2) \delta_{12} \times \right. \\ & \times D_\beta D^{\alpha'} D^{\gamma'} (C_{\alpha\gamma'} (\xi + 1) + (p+k)_{\alpha\gamma'} \frac{\xi - 1}{(p+k)^2} D^2) \delta_{12} - \\ & - D^\gamma D^\alpha D^{\alpha'} D^{\gamma'} (C_{\gamma\gamma'} (\xi + 1) + k_{\gamma\gamma'} \frac{\xi - 1}{k^2} D^2) \delta_{12} \times \\ & \left. \times D_\beta D_{\beta'} (C_{\alpha\alpha'} (\xi + 1) + (p+k)_{\alpha\alpha'} \frac{\xi - 1}{(p+k)^2} D^2) \delta_{12} \right]. \quad (2.46) \end{aligned}$$

Quando não explicitamente indicado deve ser entendido que a derivada supercovariante age na variável grassmanniana  $\theta_1$ . Os termos onde a derivada supercovariante age nos campos externos foram omitidos pois eles não produzem divergências lineares UV e nem a conseguinte mistura UV/IR. Vamos agora carregar a álgebra das derivadas espinoriais na equação (2.46). Denominamos por  $\mathcal{D}$  o termo entre colchetes nesta última equação. É possível provar que

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (\xi + 1)^2 D^\gamma D^\alpha D_{\beta'} C_{\gamma\alpha'} \delta_{12} D_\beta D^{\alpha'} D^{\gamma'} C_{\alpha\gamma'} \delta_{12} + \\ & + \frac{(\xi^2 - 1)}{(p+k)^2} D^\gamma D^\alpha D_{\beta'} C_{\gamma\alpha'} \delta_{12} D_\beta D^{\alpha'} D^{\gamma'} (p+k)_{\alpha\gamma'} D^2 \delta_{12} + \\ & + \frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} D^\gamma D^\alpha D_{\beta'} k_{\gamma\alpha'} D^2 \delta_{12} D_\beta D^{\alpha'} D^{\gamma'} C_{\alpha\gamma'} \delta_{12} + \\ & + \frac{(\xi - 1)^2}{k^2 (p+k)^2} D^\gamma D^\alpha D_{\beta'} k_{\gamma\alpha'} D^2 \delta_{12} D_\beta D^{\alpha'} D^{\gamma'} (p+k)_{\alpha\gamma'} D^2 \delta_{12} - \\ & - (\xi + 1)^2 D^\gamma D^\alpha D^{\alpha'} D^{\gamma'} C_{\gamma\gamma'} \delta_{12} D_\beta D_{\beta'} C_{\alpha\alpha'} \delta_{12} - \\ & - \frac{(\xi^2 - 1)}{(p+k)^2} D^\gamma D^\alpha D^{\alpha'} D^{\gamma'} C_{\gamma\gamma'} \delta_{12} D_\beta D_{\beta'} (p+k)_{\alpha\alpha'} D^2 \delta_{12} - \\ & - \frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} D^\gamma D^\alpha D^{\alpha'} D^{\gamma'} k_{\gamma\gamma'} D^2 \delta_{12} D_\beta D_{\beta'} C_{\alpha\alpha'} \delta_{12} - \\ & - \frac{(\xi - 1)^2}{k^2 (p+k)^2} D^\gamma D^\alpha D^{\alpha'} D^{\gamma'} k_{\gamma\gamma'} D^2 \delta_{12} D_\beta D_{\beta'} (p+k)_{\alpha\alpha'} D^2 \delta_{12}. \quad (2.47) \end{aligned}$$

O primeiro e o segundo termo da soma na equação (2.47) se anulam individualmente depois de transferir todas as derivadas para uma das deltas e fazer as contrações com o símbolo de Levi-Civita, pois resultam ser proporcionais a  $D_\alpha D_\beta D^\alpha$ , que é identicamente



nulo. O terceiro e o quarto termo de (2.47) também possuem a parte dominante nula, contudo a correspondente prova é um pouco mais intrincada e servirá de exemplo no que se refere à utilização da álgebra das derivadas espinoriais. Vamos focalizar no terceiro termo. Após transferir todas as  $D$ 's para a mesma delta mediante integração por partes, chega-se a

$$\frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} k_{\gamma\alpha'} \delta_{12} D^2 D_{\beta'} D^\alpha D^\gamma D_\beta D^{\alpha'} D^{\gamma'} C_{\alpha\gamma'} \delta_{12}. \quad (2.48)$$

Logo, a regra (2.25) é empregada para converter fatores  $D^\alpha D^\beta$  em momento, com o resultado

$$\begin{aligned} & \frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} k_{\gamma\alpha'} \delta_{12} \left[ k_{\beta'\beta} k^{\alpha\gamma} k^{\alpha'\gamma'} D^2 + k^2 C_{\beta'\beta} C^{\alpha\gamma} k^{\alpha'\gamma'} D^2 \right. \\ & \left. - k^2 C_{\beta'\beta} k^{\alpha\gamma} C^{\alpha'\gamma'} D^2 + k^2 k_{\beta'\beta} C^{\alpha\gamma} C^{\alpha'\gamma'} D^2 \right] C_{\alpha\gamma'} \delta_{12}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde somente os termos proporcionais a  $D^2$  foram mantidos, pois termos com  $D^\alpha$  ou  $D^2 D^\alpha$  são nulos quando entre deltas<sup>4</sup>. É necessário ainda lembrar que  $(D^2)^2 = -k^2$  além de

$$\{D_\alpha, D^2\} = 0. \quad (2.50)$$

Os termos que envolvem o momento externo  $p$  no numerador foram desconsiderados pois não contribuem para a divergência linear. Levando a cabo as contrações o termo sob análise colapsa para

$$\begin{aligned} & \frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} \left[ k_{\beta'\beta} k^{\alpha\gamma} k_{\gamma\alpha'} k^{\alpha'\gamma'} C_{\alpha\gamma'} + k^2 C_{\beta'\beta} C^{\alpha\gamma} k_{\gamma\alpha'} k^{\alpha'\gamma'} C_{\alpha\gamma'} \right. \\ & \left. - k^2 C_{\beta'\beta} k^{\alpha\gamma} k_{\gamma\alpha'} C^{\alpha'\gamma'} C_{\alpha\gamma'} + k^2 k_{\beta'\beta} k_{\gamma\alpha'} C^{\alpha\gamma} C^{\alpha'\gamma'} C_{\alpha\gamma'} \right] \delta_{12} \\ & = \frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} \left[ k_{\beta'\beta} k^{\alpha\gamma} k^2 C_{\alpha\gamma} + 2k^4 C_{\beta'\beta} - 2k^4 C_{\beta'\beta} + k^2 k_{\beta'\beta} k_{\gamma\alpha'} C^{\alpha'\gamma} \right] \delta_{12} = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

O mesmo ocorre com o quarto termo da equação (2.47).

Resumindo,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} & = -2(\xi + 1)^2 \delta_{12} D^\gamma D^2 D_\gamma D_\beta D_{\beta'} \delta_{12} - \\ & - \frac{(\xi^2 - 1)}{(p + k)^2} \delta_{12} D^{\gamma'} D^{\alpha'} D^\alpha D_{\gamma'} D_\beta D_{\beta'} D^2 k_{\alpha\alpha'} \delta_{12} - \\ & - 2 \frac{(\xi^2 - 1)}{k^2} k_{\gamma\gamma'} \delta_{12} D^2 D^{\gamma'} D^\gamma D_\beta D_{\beta'} \delta_{12} - \\ & - \frac{(\xi - 1)^2 k_{\gamma\gamma'}}{k^2 (p + k)^2} \delta_{12} D^2 D^{\gamma'} D^{\alpha'} D^\alpha D_\gamma D_\beta D_{\beta'} D^2 k_{\alpha\alpha'} \delta_{12} \end{aligned} \quad (2.52)$$

<sup>4</sup>Após realizar todas as conversões e contrações, se restarem uma ou três  $D$ 's, o termo é nulo.

inclui a totalidade dos termos que contribuem para a divergência linear. Completamos o isolamento das divergências utilizando (2.25)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & 4(\xi + 1)^2 k^2 \delta_{12} C_{\beta\beta'} D^2 \delta_{12} - 4 \frac{(\xi^2 - 1)}{(p+k)^2} k^2 \delta_{12} D^2 D_\beta D_{\beta'} D^2 \delta_{12} - \\ & - 4(\xi^2 - 1) k^2 \delta_{12} D_\beta D_{\beta'} \delta_{12} - 4 \frac{(\xi - 1)^2 k^4}{(p+k)^2} \delta_{12} C_{\beta\beta'} D^2 \delta_{12} \end{aligned} \quad (2.53)$$

que no limite  $k \rightarrow \infty$  é equivalente a

$$\mathcal{D} = 4k^2 \delta_{12} C_{\beta\beta'} D^2 \delta_{12} [(\xi + 1)^2 - (\xi - 1)^2] = 16\xi k^2 C_{\beta\beta'} \delta_{12}. \quad (2.54)$$

Inserindo (2.54) em (2.46) obtemos

$$I_{9a+9b} = -\frac{\xi}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta), \quad (2.55)$$

que é a parte linearmente divergente da topologia (a) da figura 7, portanto  $I_{7a} = I_{9a+9b}$ .

A topologia 7 (b) possui duas componentes, pois o vértice quártico (2.20) possui dois termos. Vamos denotar a parte proporcional à (2.20a) por  $I_{7b}^1$  e a parte proporcional à (2.20b) por  $I_{7b}^2$ . Para obter as contribuições linearmente divergentes as derivadas devem estar no interior do laço. Para  $I_{7b}^1$  temos que contrair  $A_\gamma(k_1)$  com os três supercampos restantes. A contribuição que resulta de contrair  $A_\gamma(k_1)$  com  $A_\beta(k_2)$  é nula devido ao fator trigonométrico. Logo

$$\begin{aligned} I_{7b}^1 = & -\frac{i}{3g^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) [\langle D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k, \theta) A_\beta(-k, \theta) \rangle A^\beta(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \\ & + \langle D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k, \theta) A_\alpha(-k, \theta) \rangle A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta)]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

A manipulação das derivadas é mais simples que no caso do vértice trilinear<sup>5</sup>,

$$\begin{aligned} \langle D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k, \theta) A_\beta(-k, \theta) \rangle & = D^\gamma D^\alpha \langle A_\gamma(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle |_{\theta_1=\theta_2} \\ & = \frac{ig^2}{2} D^\gamma D^\alpha \left[ C_{\gamma\beta} \frac{(\xi + 1)}{k^2} + \frac{(\xi - 1)}{k^4} i k_{\gamma\beta} D^2 \right] \delta_{12} |_{\theta_1=\theta_2} \\ & = -\frac{ig^2}{k^2} \delta_\gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (2.57)$$

<sup>5</sup>A notação  $\delta_{12}|_{\theta_1=\theta_2}$  é uma abreviatura para  $\int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \delta_{12} \delta_{12}$ . Indica a contração da delta do propagador a um ponto, então  $D^2 \delta_{12}|_{\theta_1=\theta_2} = \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \delta_{12} D^2 \delta_{12} = \int d^2\theta_1$ .

Analogamente

$$\begin{aligned}\langle D^\gamma D^\alpha A_\gamma(k, \theta) A_\alpha(-k, \theta) \rangle &= D^\gamma D^\alpha \langle A_\gamma(k, \theta) A_\alpha(-k, \theta) \rangle|_{\theta_1=\theta_2} \\ &= -2 \frac{ig^2}{k^2}.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Inserindo (2.57) e (2.58) em (2.56) chega-se a

$$I_{7b}^1 = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta). \quad (2.59)$$

No que diz respeito a  $I_{7b}^2$  só temos uma combinação que gera divergências lineares. É aquela na qual as duas pernas com derivadas estão contraídas,

$$I_{7b}^2 = \frac{i}{2g^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \times \quad (2.60)$$

$$\times A^\gamma(p, \theta) A^\beta(-p, \theta) \langle D_\gamma A^\alpha(k, \theta) D_\beta A_\alpha(-k, \theta) \rangle. \quad (2.61)$$

Após inserir a forma explícita do propagador

$$\begin{aligned}\langle D_\gamma A^\alpha(k, \theta) D_\beta A_\alpha(-k, \theta) \rangle &= -D_{\gamma_1} D_{\beta_2} \langle A^\alpha(-k, \theta_1) A_\alpha(k, \theta_2) \rangle|_{\theta_1=\theta_2} \\ &= \frac{ig^2}{2} D_\gamma D_\beta \left[ -2 \frac{(\xi + 1)}{k^2} \right] \delta_{12}|_{\theta_1=\theta_2} \\ &= \frac{ig^2}{k^2} (\xi + 1) C_{\gamma\beta}.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Assim sendo, a parte linearmente divergente do segundo vértice quártico é

$$I_{7b}^2 = \frac{1}{2} (\xi + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta). \quad (2.63)$$

Como resultado,

$$\begin{aligned}I_{7b} &= I_{7b}^1 + I_{7b}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\xi - 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta).\end{aligned}\quad (2.64)$$

Para completar a análise das divergências lineares para o setor de calibre, resta analisar a topologia (c) da figura 7. Com as regras de Feynman (2.13) e (2.23) montamos a amplitude  $I_{7c}$  associada com este diagrama

$$\begin{aligned}I_{7c} &= -\frac{i^2}{2} \frac{1}{g^4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \times \\ &\quad \times \langle D^\alpha c'(k, \theta_1) c(-k, \theta_2) \rangle \langle c(-p - k, \theta_2) D^\beta c'(p + k, \theta_1) \rangle.\end{aligned}\quad (2.65)$$

Após explorar a álgebra das derivadas,

$$\begin{aligned}
& \langle D^\alpha c'(k, \theta_1) c(-k, \theta_2) \rangle \langle c(-p-k, \theta_2) D^\beta c'(p+k, \theta_1) \rangle \\
&= -D_1^\alpha \langle c'(k, \theta_1) c(-k, \theta_2) \rangle D_2^\beta \langle c(-p-k, \theta_2) c'(p+k, \theta_1) \rangle \\
&= D_1^\alpha \left( \frac{ig^2 D^2}{k^2} \delta_{12} \right) D_2^\beta \left( \frac{ig^2 D^2}{(p+k)^2} \delta_{12} \right) \\
&= -\frac{g^4}{k^2 (p+k)^2} D_1^\alpha D^2 \delta_{12} D_2^\beta D^2 \delta_{12} \\
&= \frac{g^4}{(p+k)^2} \delta_{12} D^\alpha D^\beta \delta_{12} = -\frac{g^4}{(p+k)^2} C^{\alpha\beta} \delta_{12}, \tag{2.66}
\end{aligned}$$

$I_{7c}$  se reduz a

$$I_{7c} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k+p)^2} A^\beta(-p, \theta) A_\beta(p, \theta). \tag{2.67}$$

Assim, na aproximação de um laço a função de dois pontos do supercampo de calibre é livre de singularidades ultravioletas e infravermelhas UV/IR, visto que  $I_{7a} + I_{7b} + I_{7c} = 0$ . Note que este cancelamento acontece para qualquer calibre covariante.

É fácil mostrar que as potenciais divergências subdominantes (logarítmicas) de  $I_{7a}$ ,  $I_{7b}$  e  $I_{7c}$ , que envolvem derivadas do supercampo de calibre, são proporcionais à integral

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\alpha\beta} \sin^2(k \wedge p)}{k^2 (k+p)^2} \tag{2.68}$$

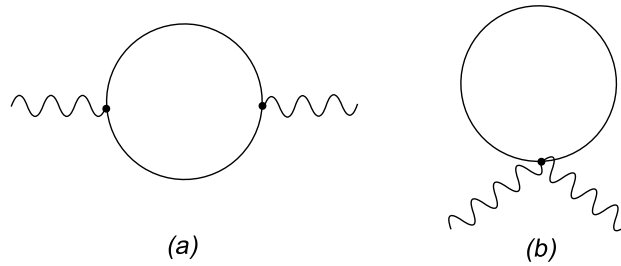
e, portanto, inexistem devido às propriedades de simetria do integrando. De fato, o diagrama (c) da figura 8 possui cinco derivadas aplicadas nos propagadores, convertendo quatro delas para momento ficamos apenas com uma, que é nula entre deltas; movendo uma derivada para um supercampo externo os termos não nulos são proporcionais a (2.68). No diagrama com duas derivadas aplicadas nas pernas externas (diagrama (d) e os outros indicados pelas reticências na figura 8), teremos termos com quatro, seis e oito  $D$ 's, todos gerando contribuições proporcionais à (2.68).

Concluimos que não temos divergências lineares nem logarítmicas, ou seja, a função de dois pontos de  $A^\alpha$  é finita na aproximação de um laço no setor de calibre.

## 2.4.2 Setor de matéria

Passamos agora a analisar a  $NCSQED_3$  acoplada com supercampos de matéria. A questão reside em determinar se o setor de matéria pode ser fonte de divergências lineares na função de dois pontos do supercampo  $A_\alpha$  na aproximação de um laço. Os gráficos

podem agora ser divididos naqueles em que  $E_\phi = 0$  e naqueles em que  $E_\phi \neq 0$ . A divergência principal para os quais  $E_\phi = 0$  é  $\omega = \frac{3}{2}$ , correspondendo a um “tadpole” que é identicamente nulo. A seguir temos gráficos com pernas externas de  $A_\alpha$  que são linearmente divergentes no UV e estão desenhados na Fig. 10. Para os gráficos com  $E_\phi \neq 0$  somente aqueles com  $E_\phi = 2$  são potencialmente logaritmicamente divergentes no UV, aqueles com  $E_\phi > 2$  são finitos, mas esses contribuem para a auto-energia do campo escalar, não para a função de dois pontos do superpotencial  $A_\alpha$ , e serão analisados mais adiante.



**FIGURA 10:** Correções de um laço à auto-energia do campo espinorial de calibre.

Gráficos com  $E_\phi = 0$  verificam a condição  $V_\phi^D > 0$  ou  $V_\phi^0 > 0$  que, exceto para o tadpole já mencionado, implicam em  $\frac{1}{2}V_\phi^D + V_\phi^0 \geq 1$ . Por outro lado, se  $\frac{1}{2}V_\phi^D + V_\phi^0 \geq 2$ , o gráfico correspondente é superficialmente finito de acordo com (2.37). Já que não existem pernas externas de matéria, cada vértice do gráfico de um laço deve envolver matéria. Então temos a seguinte condição para  $\omega$  não ser negativo,

$$1 \leq \frac{1}{2}V_\phi^D + V_\phi^0 \leq 2. \quad (2.69)$$

O limite inferior da inequação corresponde a  $\omega = 1$ , enquanto o limite superior corresponde a  $\omega = 0$ .

O caso linearmente divergente no UV ocorre somente para a correção introduzida pela matéria na aproximação de um laço à função de dois pontos do campo de calibre  $A_\alpha$ ; estas topologias são indicadas na figura 10. A topologia (a) da figura 10 é uma soma de quatro diagramas, dados pelas diferentes possibilidades de combinação dos vértices trilineares  $V_\phi^D$ . Contudo só temos dois diagramas independentes, pois as duas combinações que possuem os vértices iguais e as duas que possuem os vértices diferentes geram o mesmo resultado. Com isso a topologia 10(a) fornece

$$\begin{aligned}
I_{10a} &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \sin^2(k \wedge p) \\
&\times [D_{\alpha 1} \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle (D_{\beta 2} \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_b(2) \rangle) \\
&- (D_{\alpha 1} D_{\beta 2} \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle) \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_b(2) \rangle] ,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

onde os índices 1 e 2 na derivada supercovariante assinalam o campo em que o operador  $D$  é aplicado. Levando em conta a forma explícita do propagador, encontramos

$$\begin{aligned}
I_{10a} &= N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \sin^2(k \wedge p) \\
&\times \left[ \frac{D_{\alpha 1} (D_1^2 + m)}{k^2 + m^2} \delta_{12} \frac{(D_1^2 + m) D_{\beta 2}}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12} \right. \\
&\left. - \frac{D_{\alpha 1} (D_1^2 + m) D_{\beta 2}}{k^2 + m^2} \delta_{12} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12} \right] ,
\end{aligned} \tag{2.71}$$

que, depois de usar  $D_2 \delta_{12} = -D_1 \delta_{12}$ , pode ser posto como

$$\begin{aligned}
I_{10a} &= N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} J(k, p) \\
&\times [2(D_1^2 + m) \delta_{12} D_{\alpha 1} (D_1^2 + m) D_{\beta 1} \delta_{12} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) + \\
&+ (D_1^2 + m) \delta_{12} (D_1^2 + m) D_{\beta 1} \delta_{12} (D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2)] ,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

onde introduzimos a notação

$$J(k, p) = \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2) [(k+p)^2 + m^2]} . \tag{2.73}$$

É conveniente separar  $I_{10a}$  em duas partes,  $I_{10a} = I_{10a}^{(1)} + I_{10a}^{(2)}$ , onde  $I_{10a}^{(1)}$  e  $I_{10a}^{(2)}$  são, respectivamente, associadas ao primeiro e segundo termo no colchete do lado direito da Eq. (2.72). É simples verificar que

$$\begin{aligned}
I_{10a}^{(1)} &= -2N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} J(k, p) \\
&\times [(k^2 + m^2) C_{\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + (k_{\alpha\beta} + m C_{\alpha\beta}) (D^2 A^\alpha(-p, \theta)) A^\beta(p, \theta)]
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Para o segundo termo encontramos

$$I_{10a}^{(2)} = -N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} J(k, p) (k_{\gamma\beta} + m C_{\gamma\beta}) [D^\gamma D^\alpha A_\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta)] . \quad (2.75)$$

Somando as Eqs. (2.74) e (2.75), podemos colocar a contribuição proveniente da topologia (a) da figura 10 como

$$\begin{aligned} I_{10a} &= -2N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2) [(k + p)^2 + m^2]} \\ &\times \left[ (k^2 + m^2) C_{\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + (k_{\alpha\beta} + m C_{\alpha\beta}) [D^2 A^\alpha(-p, \theta)] A^\beta(p, \theta) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (k_{\gamma\beta} + m C_{\gamma\beta}) D^\gamma D^\alpha A_\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right] . \end{aligned} \quad (2.76)$$

As manipulações algébricas para a topologia (b) da figura 10 são mais simples pois dispomos apenas de um vértice e menos derivadas para manipular. Encontramos

$$I_{10b} = 2N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k + p)^2 + m^2} C_{\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) . \quad (2.77)$$

Logo,

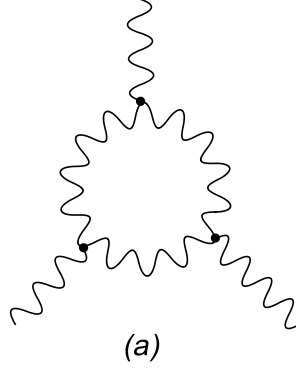
$$\begin{aligned} I_{10} &= I_{10a} + I_{10b} \\ &= -2N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2) [(k + p)^2 + m^2]} \\ &\times (k_{\gamma\beta} + m C_{\gamma\beta}) \left[ (D^2 A^\gamma(-p, \theta)) A^\beta(p, \theta) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right] . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Enfatizamos que as divergências lineares perigosas desapareceram bem como as subdominantes, ou seja, ainda na presença de matéria a função de dois pontos do superpotencial é finita na aproximação de um laço. Esta função de dois pontos pode ser usada para derivar o propagador efetivo na expansão  $\frac{1}{N}$  [81].

## 2.5 Função de três e quatro pontos do superpotencial espinorial na aproximação de um laço

### 2.5.1 Setor de calibre

Vamos examinar agora os diagramas com grau de divergência superficial logaritmico. Correspondem a  $0 \leq \omega < 1$ , o que é possível se  $V_0 = 1$ , ou  $V_1 = 1$ , ou  $V_2 = 2$ , ou  $V_c = 3, 4$ , ou  $V_c = 2$  com  $V_2 = 1$ , ou  $V_3 = 2$  com  $V_2 = 1$ , ou  $V_3 = 2$  com  $V_c = 2$ , ou  $V_3 = 3, 4$ , ou  $V_2 = 1$  com  $V_3 = 1$ . As contribuições dessas topologias são muito similares entre si, de forma que o mesmo mecanismo de cancelamento se aplica à todas elas.



**FIGURA 11:** Diagrama logaritmicamente divergente típico.

Como um protótipo desse mecanismo, vamos considerar o supergráfico com  $V_3 = 3$  na figura 11. Sua amplitude, no calibre de Feynman é

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 d^2 \theta_3 \\
 &\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin(k \wedge p_1) \sin[k \wedge (p_1 + p_2)] \sin[(k + p_1) \wedge p_2]}{k^2 (k + p_1)^2 (k + p_1 + p_2)^2} \\
 &\times A_\beta(p_1, \theta_1) A_{\beta'}(p_2, \theta_2) A_{\beta''}(-p_1 - p_2, \theta_3) \\
 &\times D^\gamma D^\alpha D^{\beta'} \delta_{12} D^{\gamma'} D^{\alpha'} D^{\beta''} \delta_{23} D^{\gamma''} D^{\alpha''} D^\beta \delta_{13} C_{\gamma\alpha'} C_{\gamma'\alpha''} C_{\gamma''\alpha}. \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

Observamos que temos nove derivadas e portanto só temos um resultado não nulo nos termos em que uma delas é movida para uma perna externa. Usando a relação (2.25) e a identidade  $\{D_\alpha, D^2\} = 0$  encontramos que  $I_{11}$  é nulo, pois todas as contribuições são proporcionais a  $D_a D^\beta D^\alpha$ . Esse fato é independente de calibre. Num calibre arbitrário,



após realizar alguma álgebra de  $D$ 's,  $I_{11}^{(\xi)}$  é dado por

$$\begin{aligned}
 I_{11}^{(\xi)} &= I_{11} - i\frac{1}{6} \int d^2\theta \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \sin(p_1 \wedge p_2) - \sum_{i=1}^3 \sin(2k \wedge p_i + p_1 \wedge p_2) \right] \\
 &\times \frac{1}{k^2(k+p_1)^2(k+p_1+p_2)^2} k^2 \xi (\xi^2 - 1) A_\beta(p_1, \theta) A_{\beta'}(p_2, \theta) \\
 &\times \left[ k^{\beta'\beta''} D^\beta A_{\beta''}(p_3, \theta) + k^{\beta\beta''} D^{\beta'} A_{\beta''}(p_3, \theta) + k^{\beta'\beta} D^{\beta''} A_{\beta''}(p_3, \theta) \right], \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

cuja parte planar é proporcional à integral

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^{\beta'\beta}}{(k+p_1)^2(k+p_1+p_2)^2}, \quad (2.82)$$

que é nula por integração simétrica. A parte não planar de  $I_{11}^{(\xi)}$  é composta de dois termos, um proporcional a

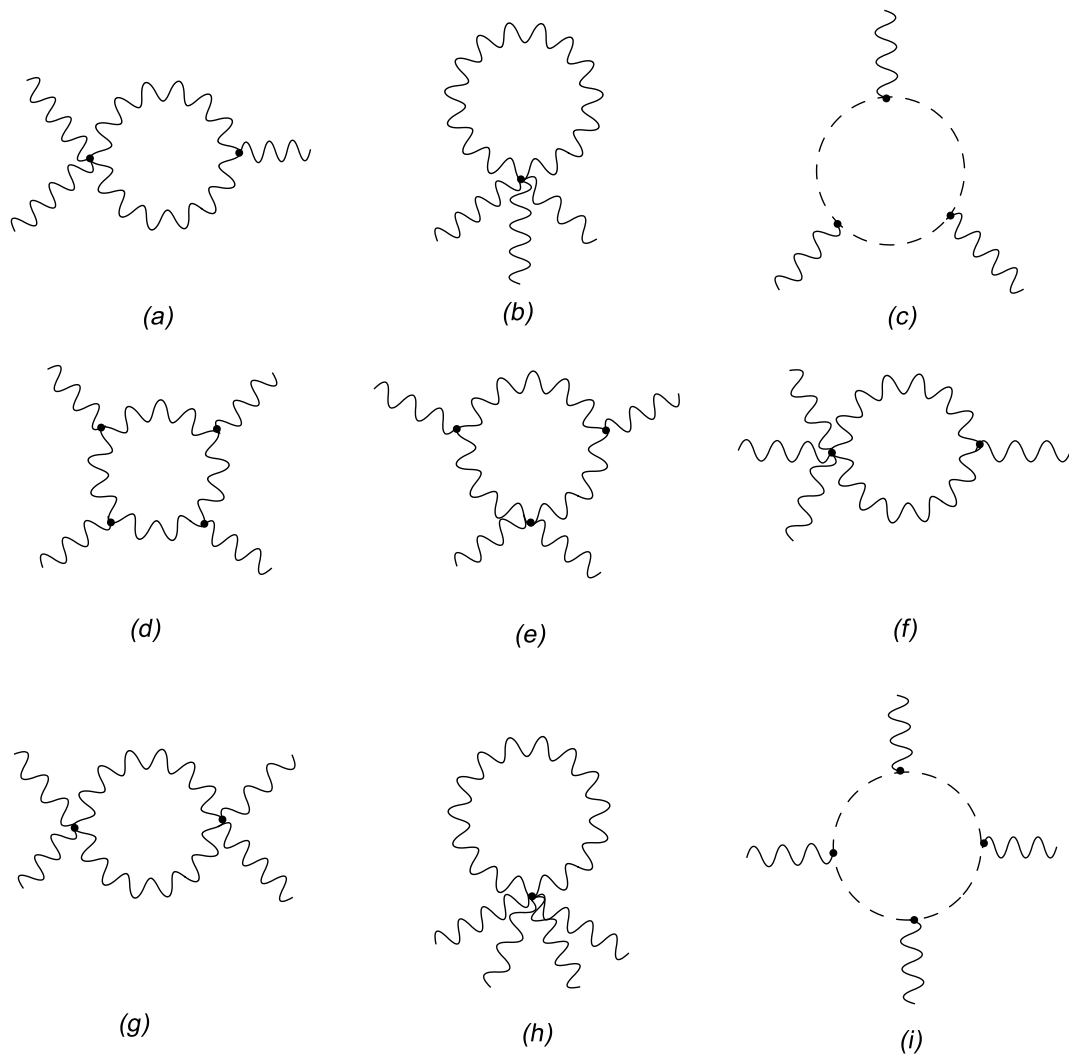
$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\alpha\beta} \cos(2k \wedge p)}{k^2(k+p)^2}, \quad (2.83)$$

que é evidentemente finito, e o outro proporcional a uma combinação linear de integrais da forma

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\alpha\beta} \sin(2k \wedge p)}{k^4} = -\frac{i}{4\pi} \frac{\tilde{p}_{\alpha\beta}}{\sqrt{\tilde{p}^2}}. \quad (2.84)$$

Onde  $\tilde{p}_{\alpha\beta} = \Theta_{mn} p^n (\sigma^m)_{\alpha\beta}$  e  $\Theta_{mn}$  é a matriz antisimétrica constante que caracteriza a não comutatividade do espaço-tempo. Como estamos tratando apenas de não comutatividade espacial  $\Theta^{0i} = 0$ , a última expressão não produz divergências logarítmicas, o que confirma a finitude de  $I_{11}^{(\xi)}$ .

Este mecanismo também assegura o desaparecimento das divergências logarítmicas UV e das infravermelhas logarítmicas UV/IR dos gráficos na figura 12. A finitude UV de todos esses gráficos pode ser demonstrada numa forma análoga. Por exemplo, no calibre de Feynman, o gráfico de um laço com  $V_2 = 2$  contém quatro derivadas espinoriais e sua contribuição principal no UV é proporcional à integral finita da Eq. (2.68). Uma situação similar surge para os gráficos de um laço com  $V_2 = V_3 = 1$ . Os gráficos com  $V_3 = 2$  e  $V_2 = 1$  contém oito fatores  $D$  e, depois de usar a identidade  $(D^2)^2 = \square$ , emergem dois termos, um proporcional à integral (2.68) e outro, onde algumas derivadas são movidas pras pernas externas, que é finito. Os outros gráficos de um laço, potencialmente divergentes, correspondem a  $V_c = 4$  ou  $V_3 = 4$  e, para eles, o mesmo mecanismo se aplica, portanto são finitos. É fácil verificar que isso ocorre para um calibre covariante arbitrário. O cancelamento das singularidades UV/IR infravermelhas para todos estes gráficos tem a mesma origem que aquele para o gráfico da figura 11.

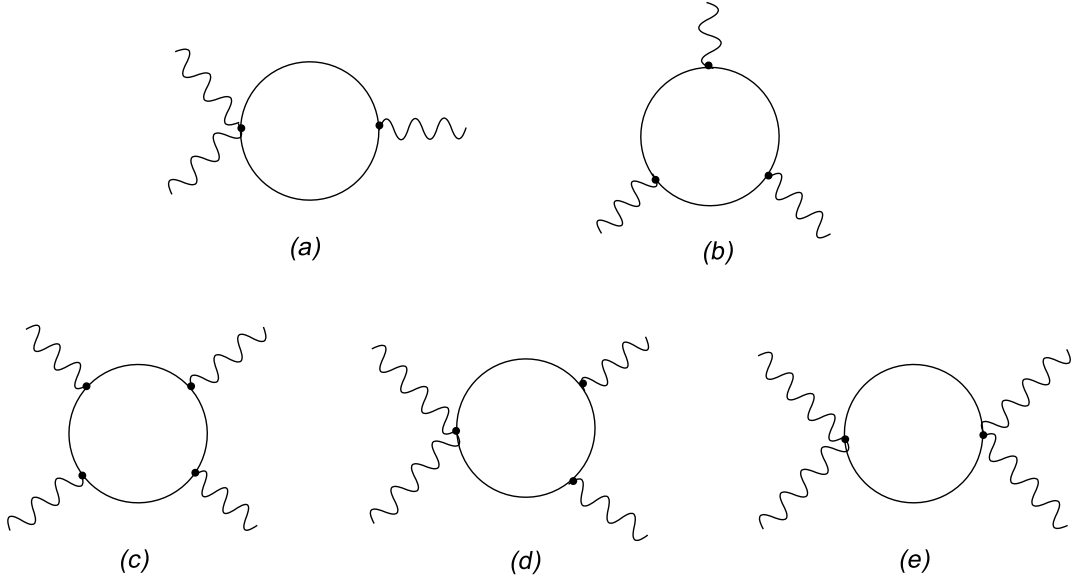


**FIGURA 12:** Contribuições logaritmicamente divergentes para as funções de três e quatro pontos.

Até agora o resultado líquido do nosso estudo é que a teoria sem matéria é finita no UV e no infravermelho UV/IR a um laço. Isto é devido ao fato de que funções de mais de quatro pontos não apresentam divergências superficiais (2.30). É interessante notar que no formalismo de campo de fundo [18, 65, 66], todas as contribuições à ação efetiva são superficialmente finitas. De um ponto de vista formal isso é causado pela presença de duas derivadas espinoriais na expressão para a intensidade de campo  $W_\alpha$  na Eq. (2.4), que faz  $N_D \geq 4$  na equação (2.30), já que correções de laço devem ser no mínimo de segunda ordem na intensidade de campo (compare com [82, 83]).

## 2.5.2 Setor de matéria

Restam a ser considerados os gráficos com  $\omega[G] = 0$  que incluem vértices dos supercampos escalares. Supergráficos com três e quatro pernas externas do campo de calibre são logaritmicamente divergentes no UV, os restantes são finitos. Segue de (2.69) que os únicos gráficos logaritmicamente divergentes envolvendo matéria a um laço que sobram são aqueles desenhados na figura 13.



**FIGURA 13:** Contribuições para as funções de dois e três pontos do campo espinorial de calibre.

Os diagramas (a) e (b) dessa figura são nulos. O primeiro é dado pela soma de dois termos provenientes dos dois diferentes vértices trilineares de matéria,

$$\begin{aligned}
 I_{13a} = & \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 A^\alpha(p_1, \theta_1) A_\alpha(p_2, \theta_1) A_\beta(-p_1 - p_2, \theta_2) \times \\
 & \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin(k \wedge p_1) \sin[k \wedge (p_1 + p_2)] \sin[(k + p_1) \wedge p_2] \times \\
 & \times \left[ \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_b(2) \rangle \left( D_2^\beta \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle \right) \right. \\
 & \left. - \left( D_2^\beta \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_b(2) \rangle \right) \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle \right], \tag{2.85}
 \end{aligned}$$

Inserindo os propagadores, obtemos termos com número ímpar de derivadas, de forma que uma delas tem que ser movida para as pernas externas. Assim, realizando a manipulação

das derivadas,

$$\begin{aligned}
& N \left[ \left( i \frac{D^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \right) \left( i \frac{D^2 + m}{(k + p_1 + p_2)^2 + m^2} \delta_{12} \right) \right. \\
& \left. - \left( i \frac{D^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \right) \left( i \frac{D^2 + m}{(k + p_1 + p_2)^2 + m^2} \delta_{12} \right) \right] D_2^\beta A_\beta(-p_1 - p_2, \theta_2) \\
& = \frac{-2N}{[k^2 + m^2][(k + p_1 + p_2)^2 + m^2]} [m\delta_{12} - m\delta_{12}] D_2^\beta A_\beta(-p_1 - p_2, \theta_2) \quad (2.86)
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. O segundo diagrama é nulo pois é proporcional à amplitude no calibre de Feynman do diagrama da figura 11, Eq.(2.80).

Um cálculo direto mostra que as contribuições planares dos supergráficos (c) e (d) são proporcionais à integral da equação (2.68), que é nula. As divergências infravermelhas UV/IR das contribuições não-planares se calculam de maneira semelhante ao que acontece nos gráficos das figuras 11 e 12. O quinto gráfico é finito. Sua amplitude é dada por

$$\begin{aligned}
I_{13a} & = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 A^\alpha(p_1, \theta_1) A_\alpha(p_2, \theta_1) A^\beta(p_3, \theta_2) A_\beta(p_4, \theta_2) \times \\
& \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin(k \wedge p_1) \sin[(k + p_1) \wedge p_2] \sin[(k + p_1 + p_2) \wedge p_3] \times \\
& \times \sin(k \wedge (p_1 + p_2 + p_3)) \frac{-2mN\delta_{12}}{[k^2 + m^2][(k + p_1 + p_2)^2 + m^2]}, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

que é semelhante ao termo proporcional a  $m$  da integral da Eq. (2.79).

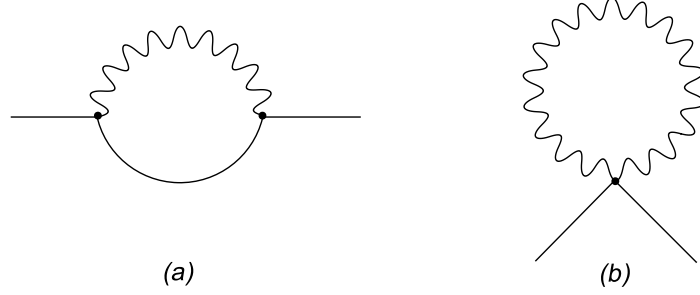
## 2.6 Funções de $N > 4$ pontos de $A_\alpha$

As funções de  $N > 4$  pontos são superficialmente finitas em um laço conforme (2.37). No que diz respeito a superdiagramas de dois ou mais laços com  $V_2 = 1$ , ou  $V_3 = 2$  ou  $V_c = 2$ , ou seja, com  $\omega[G] = 1$ , é fácil perceber que são gráficos de vácuo. Isto garante que não há divergências lineares UV e infravermelhas UV/IR além de um laço e, como consequência, as funções de Green não apresentam divergências infravermelhas não integráveis em qualquer ordem da teoria de perturbações. Claro está, isto não implica na ausência de divergências logarítmicas (subdominantes).

## 2.7 Auto-energia de matéria

Temos agora que tratar dos gráficos com  $E_\phi > 0$ . Esses gráficos não contêm divergências lineares, de acordo com (2.37). Além disso, o número de pernas externas escalares

deve ser par, uma vez que cada vértice carrega um número par de campos escalares e somente um par de campos pode ser contraído num propagador. Como dito antes, as divergências logarítmicas só são possíveis, nesse caso, para  $E_\phi = 2$  com  $V_\phi^D = 2$  e para  $E_\phi = 2$  com  $V_\phi^0 = 1$ . Estes gráficos são mostrados na Fig. 14.



**FIGURA 14:** Correções de um laço para a auto-energia do campo de matéria.

O gráfico (a) da figura 14 dá a contribuição

$$I_{14a} = 2g^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \bar{\phi}_a(-p, \theta_1) \phi_a(p, \theta_2) \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 [(k+p)^2 + m^2]} D^\alpha (D^2 - m) D^\beta \delta_{12} \\ \times \left[ \frac{1}{2}(\xi + 1) C_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\xi - 1) \frac{k_{\alpha\beta}}{k^2} D^2 \right] \delta_{12} + \dots \quad (2.88)$$

Como antes, as reticências representam termos finitos. Após algumas simplificações, obtemos

$$I_{14a} = -2\xi g^2 m \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \bar{\phi}_a(-p, \theta) \phi_a(p, \theta) \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 [(k+p)^2 + m^2]}. \quad (2.89)$$

O segundo gráfico da Fig. 14 gera a amplitude

$$I_{14b} = (\xi - 1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \bar{\phi}_a(-p, \theta_1) \phi_a(p, \theta_2) \frac{k^\alpha}{k^4} \sin^2(k \wedge p) D^2 \delta_{12}|_{\theta_1=\theta_2}, \quad (2.90)$$

que é identicamente nula devido à identidade  $k^\alpha{}_\alpha = 0$ .

Portanto a função de dois pontos do campo escalar é livre da mistura UV/IR e, além do mais, finita em qualquer calibre covariante na aproximação de um laço. Segue da equação (2.37) que os supergráficos com duas ou mais pernas externas de  $\phi$  ( $\bar{\phi}$ ) e uma ou mais pernas de campos de calibre são também superficialmente UV finitos.

## 2.8 Resumo dos resultados

Vamos fazer um resumo dos resultados obtidos neste trabalho, reunindo-os conforme a ordem na aproximação perturbativa. Pela equação (2.37) temos

1. Em um laço,
  - (a) Divergências superficiais lineares somente na função de dois pontos tanto sem ou com matéria. Provamos que estas divergências se cancelam para qualquer calibre covariante;
  - (b) Divergências logarítmicas nas funções de dois, três e quatro pontos. A simetria da parte divergente do integrando destas amplitudes garante a finitude destas funções.

As funções de mais de quatro pontos são superficialmente finitas.

2. Em dois laços,
  - (a) Divergências superficiais lineares somente em diagramas de vácuo.
  - (b) Divergências superficiais logarítmicas nas funções de dois, três e quatro pontos. Contudo estas são divergências integráveis e não ameaçam a série perturbativa.

3. Em  $N > 2$  laços,

Não apresentam divergências superficiais. Somente podem apresentar divergências que são inserções de subdiagramas de dois laços divergentes. Desta maneira, a análise das divergências logarítmicas que podem aparecer na aproximação de dois laços determina a finitude da teoria.

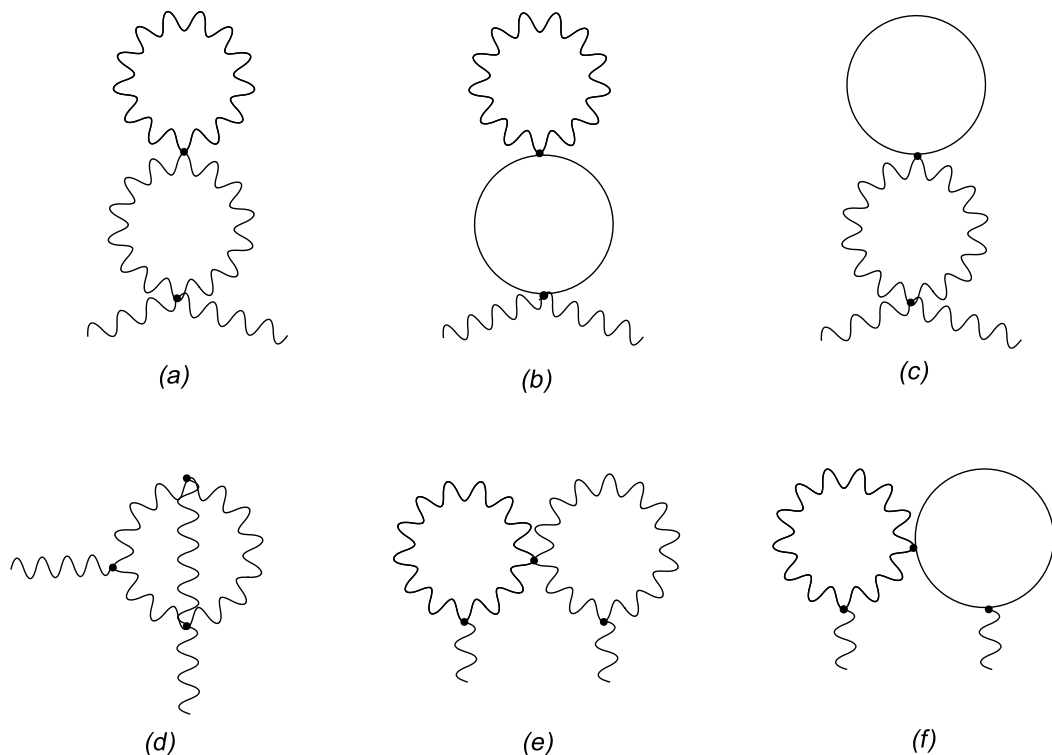
Sumarizando, concluímos que a eletrodinâmica quântica tridimensional não comutativa supersimétrica é finita no UV e no UV/IR infravermelho a um laço tanto com e sem matéria. Além disso não apresenta divergências infravermelhas UV/IR não integráveis.

## 2.9 Algumas reflexões sobre dois laços

Os resultados apresentados até aqui nos garantem que a  $NCSQED_3$  é finita na aproximação de um laço e que temos diagramas com grau de divergência superficial logarítmico

em dois laços. O cálculo dessas contribuições demanda provavelmente computação informatizada, visto que temos vinte e cinco topologias potencialmente divergentes e cada uma com muitos diagramas. Mas podemos fazer algumas reflexões qualitativas sobre o cálculo. Primeiramente é simples verificar, pela equação (2.37) que todas as topologias colaboram para a função de dois pontos do superpotencial  $A_\alpha$  e as funções de três pontos ou mais são finitas.

Começamos considerando os gráficos que possuem um vértice de quatro pernas do campo de calibre,  $V_2$ , ou de  $A_\alpha$  com os campos de matéria,  $V_\phi^0$ , mesmo que contenham pernas de calibre acopladas a vértices trilineares,  $V_3$ , ao invés de acopladas ao vértice quártico, desde que contenham um laço fechado do campo de calibre ou do campo escalar, como exemplificamos na figura 15.



**FIGURA 15:** Algumas das correções de dois laço para a auto-energiado campo de calibre que são finitas.

Podemos mostrar que todos esses diagramas não apresentam divergências UV. De fato, a contribuição de cada um destes diagramas consiste em dois tipos diferentes de termos.

1. Aqueles que envolvem a divergência linear do subdiagrama que contém o laço fechado citado acima. O cancelamento que encontramos para essas divergências subsiste no

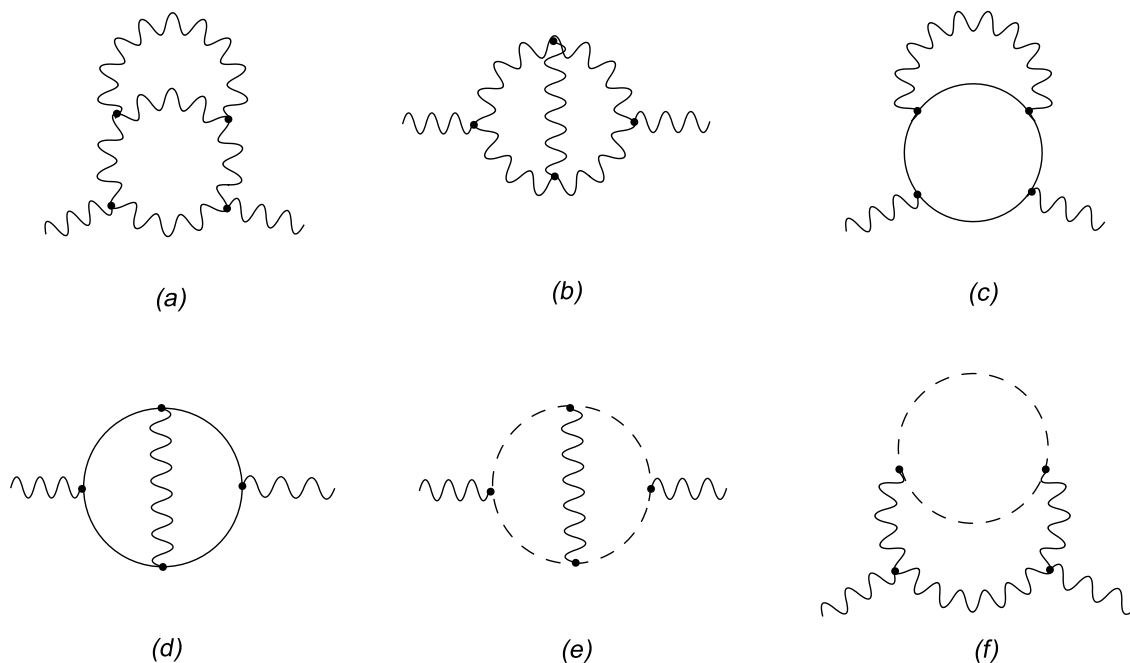
caso de dois laços.

2. No que diz respeito às divergências logarítmicas desse subdiagrama, elas são proporcionais à integral

$$\int d^3k \frac{k^{\alpha\beta} \sin^2(k \wedge p)}{k^4}, \quad (2.91)$$

a qual é finita.

Então, todos os diagramas de dois laços que contém esse subgráfico (com laço fechado de  $A_\alpha$  ou de  $\phi_a$ ) não trazem divergências para a função de dois pontos. Mas restam todos os diagramas que contém apenas os vértices trilineares de calibre e de fantasmas. Esses diagramas possuem uma dificuldade essencial pois a presença de cada vértice triplo  $V_3$  implica em seis possibilidades de combinação das derivadas quando esse vértice não envolve pernas externas e duas possibilidades no caso contrário (a ação de derivadas nas pernas externas desses diagramas torna-os imediatamente finitos, como indica a Eq. (2.37)). Contabilizamos 144 gráficos diferentes deste tipo, de forma que efetuar esse cálculo sem ajuda de um computador se torna proibitivo. A figura (16) ilustra algumas dessas topologias.



**FIGURA 16:** Exemplos de correções de dois laços para a função de dois pontos do campo de calibre formadas com vértices trilineares.

O desenvolvimento de um algoritmo destinado a manipular as derivadas espinoriais seria o objetivo essencial de nossa pesquisa no futuro imediato. Achemos que vale a pena



---

pagar o preço de levar a cabo esta tentativa já que se o resultado final confirmar a ausência de divergências UV e infravermelhas UV/IR na  $NCSQED_3$  estaríamos na presença de uma teoria finita de campos interagentes, e portanto não trivial, em  $2 + 1$  dimensões.

### 3 *Teoria de Yang-Mills tridimensional não comutativa supersimétrica no formalismo de supercampos*

Dando seqüência às investigações sobre a consistência das teorias de campos, vamos utilizar novamente o formalismo de super campos para estudar o modelo de Yang-Mills supersimétrico não comutativo em  $2 + 1$  dimensões ( $NCSYM_3$ ).

No capítulo 1 mostramos que é possível construir uma generalização não-comutativa dos grupos unitários  $U(N)$ , desde que os geradores  $T_a$ ,  $a = 1, \dots, N^2$ , estejam na representação fundamental. Vamos mostrar que o cancelamento das divergências infravermelhas UV/IR dominantes (lineares neste caso), é obtido para o grupo  $U_\star(N)$  somente nesta representação, que já a nível clássico é mandatória para garantir o fechamento da álgebra do grupo [51, 84, 85]. Vamos verificar também a ausência de divergências logarítmicas UV e infravermelhas UV/IR para a teoria na aproximação de um laço.

Os geradores  $T_a$  são matrizes hermitianas  $N \times N$  que satisfazem a álgebra

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (3.1)$$

onde  $f_{abc}$  são as constantes de estrutura de  $U_\star(N)$ . Na representação fundamental os geradores são normalizados segundo

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (3.2)$$

#### 3.1 Ação e regras de Feynman

A ação do modelo  $NCSYM_3$  é [18]

$$S = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^5z W^\alpha \star W_\alpha, \quad (3.3)$$

onde

$$W_\beta = \frac{1}{2} D^\alpha D_\beta \Gamma_\alpha - \frac{i}{2} [\Gamma^\alpha, D_\alpha \Gamma_\beta]_\star - \frac{1}{6} [\Gamma^\alpha, \{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\}_\star]_\star, \quad (3.4)$$

é a intensidade de campo construída a partir do superpotencial espinor  $\Gamma_\alpha$ , que toma valores na álgebra de Lie,  $\Gamma_\alpha(z) = \Gamma_\alpha^a(z) T^a$ ,  $a = 1, \dots, N^2$ . Mais uma vez ficaremos restritos a não-comutatividade espaço-espaço, para evitar problemas de unitariedade.

A ação na equação (3.3) é invariante sob a transformação de calibre de  $U_\star(N)$ , cuja forma infinitesimal é

$$\delta \Gamma_\alpha = D_\alpha K - i [\Gamma_\alpha, K]_\star, \quad (3.5)$$

onde  $K(z) = K^a(z) T^a$  é um parâmetro de calibre.

A formulação covariante implica na necessidade de modificar a ação (3.3) pela adição de um termo de fixação de calibre ( $S_{GF}$ ) explicitamente supersimétrico, que escolhemos

$$S_{GF} = -\frac{1}{4\xi g^2} \text{Tr} \int d^5z (D^\alpha \Gamma_\alpha) \star D^2 (D^\beta \Gamma_\beta), \quad (3.6)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro real. O determinante de Faddeev-Popov é dado por

$$\Delta^{-1} [\Gamma_\alpha] = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}c' e^{\frac{i}{2g^2} \int d^5z c'(z) \delta \Gamma_\alpha|_{K=c}} \quad (3.7)$$

de modo tal que, após levar em conta a equação (3.5), encontramos a ação dos campos fantasmas ( $S_{FP}$ ) e suas interações com o superpotencial espinor

$$S_{FP} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^5z (c' D^\alpha D_\alpha c + i c' \star D^\alpha [\Gamma_\alpha, c]_\star). \quad (3.8)$$

Os campos de fantasmas  $c$  e  $c'$  também tomam valores na álgebra de Lie. Com isto, a ação da teoria de Yang-Mills supersimétrica em três dimensões é a soma de (3.3), (3.6) e (3.8),

$$S_{NCSYM_3} = S + S_{GF} + S_{FP}. \quad (3.9)$$

Obteremos agora as regras de Feynman que derivam de (3.9). Os termos quadráticos no superpotencial e nos supercampos fantasmas definem a parte cinética da ação ( $S^2$ ).

Esta é dada por

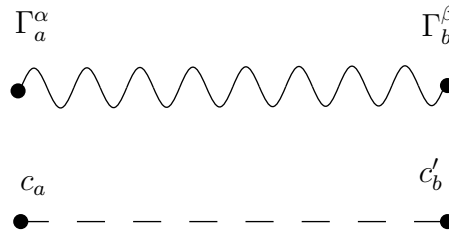
$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^5 z \left[ \frac{1}{4} D^\alpha D^\beta \Gamma_\alpha D^\gamma D_\beta \Gamma_\gamma - \frac{1}{2\xi} D^\alpha \Gamma_\alpha D^2 D^\beta \Gamma_\beta \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^5 z c' D^\alpha D_\alpha c \\
&= \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^5 z \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \Gamma^\alpha \square \Gamma_\alpha - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \Gamma^\alpha i \partial_{\alpha\beta} D^2 \Gamma^\beta + c' D^\alpha D_\alpha c \right]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

e fornece os propagadores livres

$$\langle \Gamma_a^\alpha(z_1) \Gamma_b^\beta(z_2) \rangle = ig^2 \delta_{ab} \left[ C^{\alpha\beta} \frac{1}{\square} (\xi + 1) - \frac{1}{\square^2} (\xi - 1) i \partial^{\alpha\beta} D^2 \right] \delta^5(z_1 - z_2), \quad (3.11)$$

$$\langle c'_a(z_1) c_b(z_2) \rangle = -2ig^2 \delta_{ab} \frac{D^2}{\square} \delta^5(z_1 - z_2), \quad (3.12)$$

representados na figura 17.



**FIGURA 17:** Propagador do superpotencial espinor e dos supercampos fantasmas.

Determinaremos a seguir os vértices do modelo. A ação de interação ( $S_{int}$ ) extraída de (3.9) é

$$\begin{aligned}
S_{int} &= \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^5 z \left\{ -\frac{i}{4} D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma \star [\Gamma^\beta, D_\beta \Gamma_\alpha]_\star - \frac{1}{12} D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma \star [\Gamma^\beta, \{\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha\}_\star]_\star - \right. \\
&\quad - \frac{1}{8} [\Gamma^\gamma, D_\gamma \Gamma^\alpha]_\star \star [\Gamma^\beta, D_\beta \Gamma_\alpha]_\star + \frac{i}{12} [\Gamma^\gamma, D_\gamma \Gamma^\alpha]_\star \star [\Gamma^\beta, \{\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha\}_\star]_\star + \\
&\quad \left. + \frac{1}{72} [\Gamma^\gamma, \{\Gamma_\gamma, \Gamma^\alpha\}_\star]_\star \star [\Gamma^\beta, \{\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha\}_\star]_\star + \frac{i}{2} c' \star D^\alpha [\Gamma_\alpha, c]_\star \right\}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

A notação dos vértices será como no capítulo anterior, ou seja, o número de derivadas será explicitamente indicado. O vértice trilinear, com três derivadas, é denotado  $V_3$ , o vértice quártico, que possui dois termos, com duas derivadas, é denotado  $V_2$  e assim sucessivamente. O vértice com os supercampos fantasmas é denotado por  $V_c$ .

Vamos calcular o vértice trilinear, primeiro termo de (3.13),

$$\begin{aligned}
S_{int}^3 &= -\frac{i}{4g^2} \text{Tr} \int d^5 z D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma \star [\Gamma^\beta, D_\beta \Gamma_\alpha] \star \\
&= -\frac{i}{4g^2} \text{Tr} \int d^5 z [D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma \star \Gamma^\beta \star D_\beta \Gamma_\alpha - D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma \star D_\beta \Gamma_\alpha \star \Gamma^\beta] \\
&= -\frac{i}{4g^2} \int d^2 \theta \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\sum k_j) e^{-ik_1 \wedge k_2} \times \\
&\quad \times [D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k_1) \Gamma^{b\beta}(k_2) D_\beta \Gamma_\alpha^c(k_3) \text{Tr}(T^a T^b T^c) - \\
&\quad - D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k_1) D_\beta \Gamma_\alpha^b(k_2) \Gamma^{c\beta}(k_3) \text{Tr}(T^a T^b T^c)], \tag{3.14}
\end{aligned}$$

onde<sup>1</sup> o superpotencial foi escrito em termos de sua transformada de Fourier e dos geradores do grupo de calibre; também utilizamos o fator de fase inserido pela não comutatividade,  $V(k_1, k_2, k_3) = e^{-ik_1 \wedge k_2}$ . Mudando variáveis de integração no segundo termo entre colchetes ( $k_2 \rightarrow k_3$  e  $k_3 \rightarrow k_2$ ) e fazendo  $b \rightarrow c$  e  $c \rightarrow b$ ,

$$\begin{aligned}
S_{int}^3 &= -\frac{i}{4g^2} \int d^2 \theta \left( \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta(\sum k_j) e^{-ik_1 \wedge k_2} \times \\
&\quad \times D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k_1) \Gamma^{b\beta}(k_2) D_\beta \Gamma_\alpha^c(k_3) \times \\
&\quad \times [e^{-ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^b T^c) - e^{ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^c T^b)]. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Note que neste resultado utilizamos a conservação de momento  $\delta(\sum k_j) = 0$ . Concluimos que no caso não-abeliano a não comutatividade incorpora o fator  $e^{-ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^b T^c) - e^{ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^c T^b)$  ao vértice da teoria comutativa, então

$$V_3(k_1, k_2, k_3) = -\frac{i}{4g^2} [e^{-ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^b T^c) - e^{ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^c T^b)]. \tag{3.16}$$

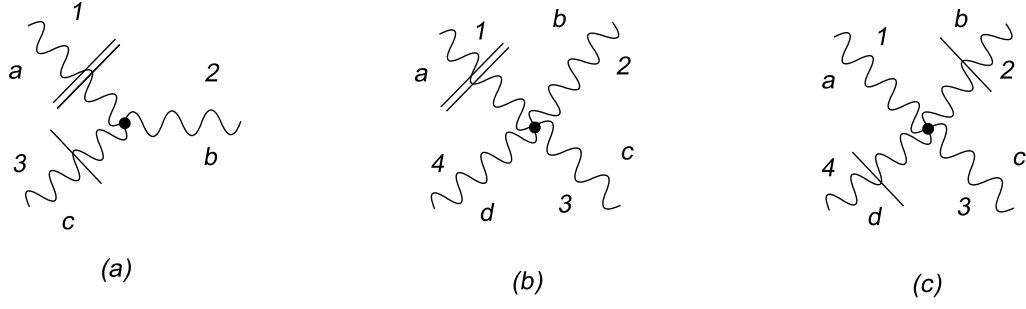
Os momentos são como indicados na figura 18 (a) e a ordem dos termos é  $D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k_1) \Gamma^{b\beta}(k_2) D_\beta \Gamma_\alpha^c(k_3)$  conforme (3.15).

As duas componentes do vértice quártico,  $V_2$ , são

$$\begin{aligned}
V_{2b} &= -\frac{1}{12g^2} [e^{i(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) - e^{i(k_1 \wedge k_2 + k_4 \wedge k_3)} \text{Tr}(T^a T^b T^d T^c) - \\
&\quad - e^{i(k_2 \wedge k_1 + k_3 \wedge k_4)} \text{Tr}(T^a T^c T^d T^b) + e^{i(k_2 \wedge k_1 + k_4 \wedge k_3)} \text{Tr}(T^a T^d T^c T^b)] \tag{3.17}
\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Vale lembrar que  $k \wedge p \equiv \frac{1}{2} k_i \Theta^{ij} p_j$  e  $\Theta^{ij}$  é a matriz antisimétrica que caracteriza a não comutatividade do espaço-tempo. E que estamos restritos ao caso  $\Theta^{0j} = 0$  para evitar problemas de unitariedade.



**FIGURA 18:** Vértices do superpotencial de calibre. As duas linhas indicam a presença duas derivadas enquanto uma linha simples indica a presença de uma.

e

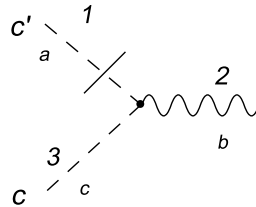
$$V_{2c} = \frac{1}{8g^2} [e^{i(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) - e^{i(k_2 \wedge k_1 + k_3 \wedge k_4)} \text{Tr}(T^b T^a T^c T^d) - e^{i(k_1 \wedge k_2 + k_4 \wedge k_3)} \text{Tr}(T^a T^b T^d T^c) + e^{i(k_2 \wedge k_1 + k_4 \wedge k_3)} \text{Tr}(T^b T^a T^d T^c)], \quad (3.18)$$

com a ordem dos termos dada por  $D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k_1) \Gamma^{b\beta}(k_2) \Gamma_\beta^c(k_3) \Gamma_\alpha^d(k_4)$  para  $V_{2b}$  (figura 18 (b)) e por  $\Gamma^{a\gamma}(k_1) D_\gamma \Gamma^{b\alpha}(k_2) \Gamma^{c\beta}(k_3) D_\beta \Gamma_\alpha^d(k_4)$  para  $V_{2c}$  (figura 18 (c)). Observamos das expressões para  $V_3$  e  $V_2$  que a diferença nos vértices deste modelo para os vértices de  $NCSQED_3$  está unicamente nos traços dos geradores do grupo de calibre, que não permitem combinar as exponenciais para formar os senos. De forma que as expressões para  $V_1$  e  $V_0$  são semelhantes às do caso  $U_\star(1)$ , com os devidos traços.

O vértice da interação entre o superpotencial e os supercampos fantasmas,  $V_c$ , é dado por

$$V_c = \frac{i}{2g^2} [e^{-ik_2 \wedge k_3} \text{Tr}(T^a T^b T^c) - e^{ik_2 \wedge k_3} \text{Tr}(T^a T^c T^b)]. \quad (3.19)$$

A representação gráfica será como indicado na figura 19, e a ordem dos supercampos é  $D^\alpha c^{a'}(k_1) \Gamma_\alpha^b(k_2) c^c(k_3)$ .



**FIGURA 19:** Vértice com os supercampos fantasmas.

Consideramos os momentos como positivos quando entram no vértice. Para completar as regras de Feynman devemos acrescentar as prescrições 1 a 6 da seção 2.1, pois são as

mesmas do caso abeliano.

## 3.2 Grau de divergência superficial

Não há diferença entre a contagem de potencias do caso abeliano e não-abeliano, portanto é fácil verificar que o grau superficial de divergência para esse modelo é

$$\omega = 2 - \frac{1}{2}V_c - 2V_0 - \frac{3}{2}V_1 - V_2 - \frac{1}{2}V_3 - \frac{1}{2}N_D, \quad (3.20)$$

onde  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , é o número de vértices só com pernas do campo de calibre envolvendo  $i$  derivadas supercovariantes espinoriais,  $V_c$  é o número de vértices de fantasmas e  $N_D$  é o número de derivadas movidas para as pernas externas como consequência de transformações da álgebra de  $D$ 's. Invocando a relação topológica que conecta o número de laços, vértices e linhas internas ( $L + V - P = 1$ ), observamos que todos os diagramas além da segunda ordem em laço são superficialmente finitos. De forma que a teoria em análise é super-renormalizável. E o mesmo permanecerá válido com a introdução de campos de matéria, como veremos adiante.

## 3.3 Adição de matéria

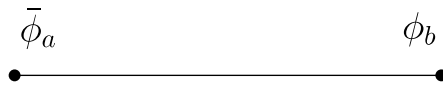
Introduziremos o campo de matéria minimamente acoplado ao campo de calibre. Para este fim adicionamos à ação de calibre (3.9) o termo  $S_M$

$$S_M = \text{Tr} \int d^5z \left[ \frac{1}{2} (D^\alpha \bar{\phi} + i[\bar{\phi}, \Gamma^\alpha]_\star) \star (D_\alpha \phi - i[\Gamma_\alpha, \phi]_\star) + m \bar{\phi} \phi \right], \quad (3.21)$$

onde  $\phi(z) = \phi^a(z)T^a$ , sendo  $\phi(z)$  o campo escalar e  $\bar{\phi}(z)$  seu correspondente conjugado.

O propagador livre do campo escalar, representado na figura 20, é dado por

$$\langle \bar{\phi}^a(z_1) \phi^b(z_2) \rangle = -2i \delta^{ab} \frac{D^2 + m}{\square - m^2} \delta^5(z_1 - z_2). \quad (3.22)$$



**FIGURA 20:** Propagador supercampo escalar.

A interação possui três termos, dois trilineares e um quártico. Como acontece na  $NCSQED_3$ , os vértices trilineares se distinguem pela posição da derivada espinorial, deno-

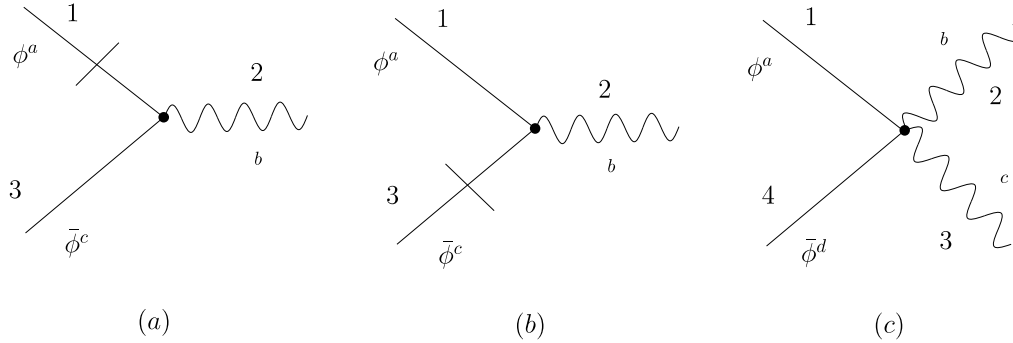
taremos esse vértice  $V_\phi^D$ , lembrando que temos dois termos, um deles  $-\bar{\phi}^a(k_1) \Gamma^{b\alpha}(k_2) D_\alpha \phi^c(k_3)$  e o outro  $D^\alpha \bar{\phi}^a(k_1) \Gamma_\alpha^b(k_2) \phi^c(k_3)$ , sendo o fator introduzido pela não comutatividade para ambos

$$V_\phi^D = [e^{-ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^b T^c) - e^{ik_1 \wedge k_2} \text{Tr}(T^a T^c T^b)]. \quad (3.23)$$

Para o vértice quártico,  $\bar{\phi}^a(k_1) \Gamma^{b\alpha}(k_2) \Gamma_\alpha^c(k_3) \phi^d(k_4)$ , obtemos o fator

$$V_\phi^0 = -\frac{1}{2} [\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) e^{ik_1 \wedge k_2 + ik_3 \wedge k_4} - \text{Tr}(T^b T^a T^c T^d) e^{-ik_1 \wedge k_2 + ik_3 \wedge k_4} - \text{Tr}(T^a T^b T^d T^c) e^{ik_1 \wedge k_2 - ik_3 \wedge k_4} + \text{Tr}(T^b T^a T^d T^c) e^{-ik_1 \wedge k_2 - ik_3 \wedge k_4}]. \quad (3.24)$$

Os vértices desta interação estão representados na figura 21.



**FIGURA 21:** Vértices dos campos de matéria. A linha simples indica a atuação de uma derivada,  $D^\alpha$ .

Com a adição de  $S_M$ , o grau de divergência superficial fica

$$\omega = 2 - \frac{1}{2}V_c - 2V_0 - \frac{3}{2}V_1 - V_2 - \frac{1}{2}V_3 - \frac{1}{2}E_\phi - \frac{1}{2}V_\phi^D - V_\phi^0 - \frac{1}{2}N_D, \quad (3.25)$$

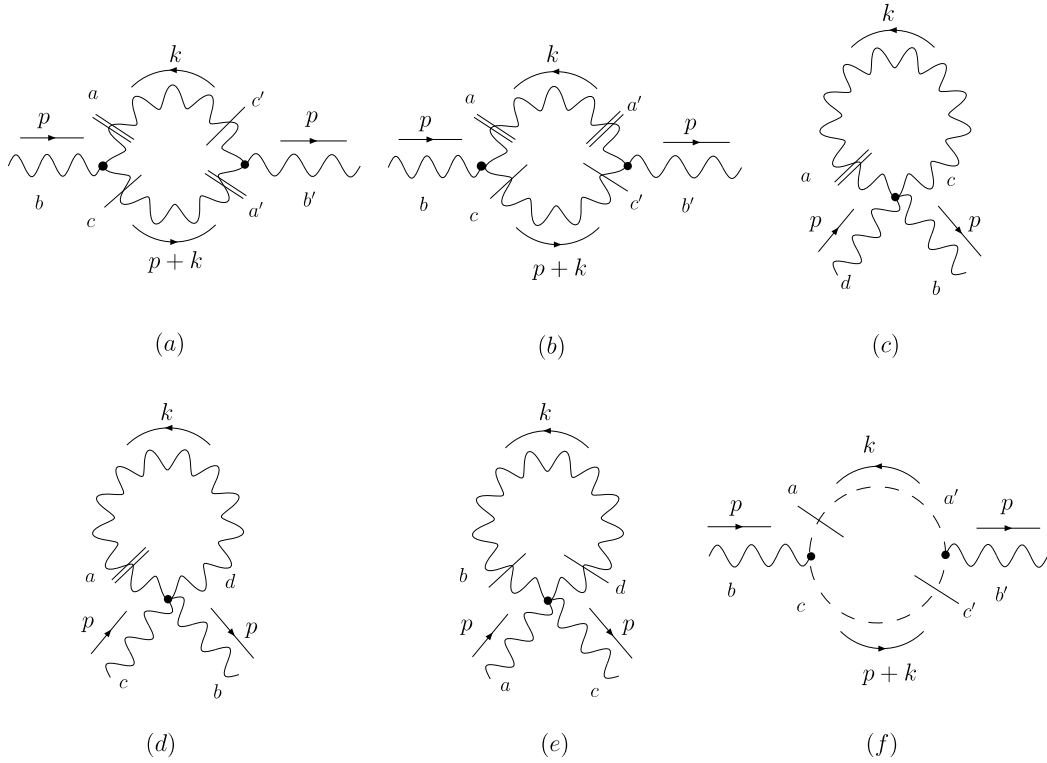
onde  $E_\phi$  é o número de pernas escalares externas,  $V_\phi^D$  é o número de vértices envolvendo o supercampo escalar com uma derivada e  $V_\phi^0$  é o número de vértices com o supercampo escalar sem derivadas.



## 3.4 Função de dois pontos do superpotencial espinorial em um laço

### 3.4.1 Setor de Calibre

Da equação (3.20) obtemos que a topologia com maior grau de divergência superficial, para  $V_3 = 1$ , são *tadpoles*, que, devido ao fator trigonométrico, são identicamente nulos. As divergências lineares aparecem apenas nos diagramas desenhados na figura 22.



**FIGURA 22:** Diagramas com grau de divergência superficial linear.

Note que o diagrama do vértice quártico que contrai  $\Gamma_\gamma^a(k_1)$  com  $\Gamma_\beta^b(k_2)$  é nulo. Fazendo  $k_1 = k_2$  e  $k_3 = -k_4$  em  $V_{2b}$  e lembrando que o propagador insere uma  $\delta_{ab}$ , temos

$$\begin{aligned}
 V_{2b} &= -\frac{1}{12g^2} [\text{Tr}(T^a T^a T^c T^d) - \text{Tr}(T^a T^a T^d T^c) - \\
 &\quad - \text{Tr}(T^a T^c T^d T^a) + \text{Tr}(T^a T^d T^c T^a)] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Denotaremos a soma das amplitudes dos diagramas (a) e (b) desta figura por  $I_a$ , a soma dos diagramas com vértice quártico por  $I_b$  e a amplitude do diagrama de fantasmas

por  $I_c$ . Utilizando as regras de Feynman obtidas na seção 3.1,

$$\begin{aligned}
I_a = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{i}{4g^2} [e^{-ik \wedge p} \text{Tr} (T^a T^b T^c) - e^{ik \wedge p} \text{Tr} (T^a T^c T^b)] \right] \times \\
& \times \left[ -\frac{i}{4g^2} [e^{ik \wedge p} \text{Tr} (T^{a'} T^{b'} T^{c'}) - e^{-ik \wedge p} \text{Tr} (T^{a'} T^{c'} T^{b'})] \right] \times \\
& \times \Gamma^{b\beta}(p, \theta_1) \Gamma^{b'\beta'}(-p, \theta_2) \left[ \left\langle D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k, \theta_1) D_{\beta'} \Gamma_{\alpha'}^{c'}(-k, \theta_2) \right\rangle \times \right. \\
& \times \left\langle D_\beta \Gamma_\alpha^c(-p-k, \theta_1) D^{\gamma'} D^{\alpha'} \Gamma_{\gamma'}^{a'}(p+k, \theta_2) \right\rangle - \\
& - \left\langle D^\gamma D^\alpha \Gamma_\gamma^a(k, \theta_1) D^{\gamma'} D^{\alpha'} \Gamma_{\gamma'}^{a'}(-k, \theta_2) \right\rangle \times \\
& \left. \times \left\langle D_\beta \Gamma_\alpha^c(-p-k, \theta_1) D_{\beta'} \Gamma_{\alpha'}^{c'}(p+k, \theta_2) \right\rangle \right]. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

As manipulações das derivadas espinoriais são as mesmas realizadas na equação (2.38), de forma que o primeiro termo entre colchetes da equação (3.27) possui parte dominante nula. Os propagadores do segundo termo trazem as deltas de cor  $\delta^{aa'}$  e  $\delta^{cc'}$ , de forma que o fator do vértice se reduz a

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} (T^a T^b T^c) \text{Tr} (T^a T^{b'} T^c) - e^{2ik \wedge p} \text{Tr} (T^a T^c T^b) \text{Tr} (T^a T^{b'} T^c) - \\
& - e^{-2ik \wedge p} \text{Tr} (T^a T^b T^c) \text{Tr} (T^a T^c T^{b'}) + \text{Tr} (T^a T^c T^b) \text{Tr} (T^a T^c T^{b'}). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Usando a propriedade cíclica do traço e renomeando as variáveis mudas dos dois últimos termos, obtemos

$$2 \text{Tr} (T^a T^b T^c) \text{Tr} (T^a T^{b'} T^c) - 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr} (T^c T^b T^a) \text{Tr} (T^c T^{b'} T^a),$$

que nos dá uma parte planar, linearmente divergente no UV, proporcional a

$$\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} (T^a T^b T^c) \text{Tr} (T^a T^{b'} T^c)}{k^2} \Gamma^{b\beta}(p, \theta) \Gamma_{\beta'}^{b'}(-p, \theta), \tag{3.29}$$

que é eliminada por regularização dimensional. Note que usamos o resultado obtido no capítulo 2, equação (2.54). A parte não planar é

$$\begin{aligned}
I_a = & -\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} \times \\
& \times \text{Tr} (T^c T^b T^a) \text{Tr} (T^c T^{b'} T^a) \Gamma^{b\beta}(p, \theta) \Gamma_{\beta'}^{b'}(-p, \theta), \tag{3.30}
\end{aligned}$$

onde percebemos a presença de uma divergência linear infravermelha UV/IR. O fator

trigonométrico do diagrama (c) da figura 22 é

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12g^2} \left[ e^{i(-2k \wedge p)} \text{Tr}(T^a T^b T^a T^d) - \text{Tr}(T^a T^b T^d T^a) - \right. \\ & \left. - \text{Tr}(T^a T^a T^d T^b) + e^{i(2k \wedge p)} \text{Tr}(T^a T^d T^a T^b) \right] \\ = & -\frac{1}{12g^2} \left[ 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr}(T^a T^b T^a T^d) - \text{Tr}(T^a T^b T^d T^a) - \text{Tr}(T^a T^a T^d T^b) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde a delta proveniente do propagador,  $\delta^{ac}$ , foi utilizada. Os dois últimos termos deste fator trigonométrico são planares e são eliminados por regularização dimensional. Do resultado das manipulações das derivadas 2.57, obtemos para a parte não planar

$$I_{22(c)} = -\frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} \times \quad (3.32)$$

$$\times \text{Tr}(T^a T^b T^a T^d) \Gamma^{b\beta}(p, \theta) \Gamma_\beta^d(-p, \theta). \quad (3.33)$$

Analogamente para o diagrama 22(d), obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12g^2} \left[ \text{Tr}(T^a T^b T^c T^a) - e^{i(2k \wedge p)} \text{Tr}(T^a T^b T^a T^c) - \right. \\ & \left. - e^{i(-2k \wedge p)} \text{Tr}(T^a T^c T^a T^b) + \text{Tr}(T^a T^a T^c T^b) \right] \\ = & -\frac{1}{12g^2} \left[ \text{Tr}(T^a T^b T^c T^a) + \text{Tr}(T^a T^a T^c T^b) - 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr}(T^a T^b T^a T^c) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

de modo que a parte não planar da amplitude, levando em conta 2.58, é

$$I_{22(d)} = -\frac{2}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} \times \quad (3.35)$$

$$\times \text{Tr}(T^a T^b T^a T^c) \Gamma^{b\beta}(p, \theta) \Gamma_\beta^c(-p, \theta). \quad (3.36)$$

O último diagrama com vértice quártico da figura 22, é proveniente do vértice  $V_{2c}$ , sendo o fator trigonométrico dado por

$$\frac{1}{8g^2} \left[ 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr}(T^a T^b T^c T^b) - \text{Tr}(T^b T^a T^c T^b) - \text{Tr}(T^a T^b T^b T^c) \right], \quad (3.37)$$

então a parte infravermelha UV/IR divergente da amplitude fica,

$$I_{22(e)} = \frac{(\xi + 1)}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} \times \quad (3.38)$$

$$\times \text{Tr}(T^b T^a T^c T^b) \Gamma^{a\beta}(p, \theta) \Gamma_\beta^c(-p, \theta). \quad (3.39)$$

Somando as equações (3.32), (3.35) e (3.38), obtemos  $I_b$ ,

$$I_b = \frac{\xi - 1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} \times \quad (3.40)$$

$$\times \text{Tr}(T^a T^b T^a T^b) \Gamma^{b\beta}(p, \theta) \Gamma_\beta^{b'}(-p, \theta). \quad (3.41)$$

Resta calcular o diagrama de fantasmas, figura 22 (f), para completar a análise do setor de calibre da teoria. O diagrama possui dois vértices, portanto o fator trigonométrico é a multiplicação de dois  $V_c$ . Inserindo o fluxo de momentos deste diagrama em (3.19),

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2g^2} [e^{-ik \wedge p} \text{Tr} (T^a T^b T^c) - e^{ik \wedge p} \text{Tr} (T^a T^c T^b)] \times \\ & \times \frac{i}{2g^2} [e^{ik \wedge p} \text{Tr} (T^c T^{b'} T^a) - e^{-ik \wedge p} \text{Tr} (T^c T^a T^{b'})] \\ = & -\frac{1}{4g^4} [2 \text{Tr} (T^a T^b T^c) \text{Tr} (T^c T^{b'} T^a) - \\ & - 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr} (T^c T^b T^a) \text{Tr} (T^c T^{b'} T^a)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde foram usadas as deltas de cor provenientes dos propagadores,  $\delta^{ac'}$  e  $\delta^{ca'}$ . Utilizando o resultado da álgebra das  $D'$ s do diagrama equivalente do capítulo anterior,

$$I_c = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} \times \quad (3.43)$$

$$\times \text{Tr} (T^a T^c T^b) \text{Tr} (T^a T^c T^{b'}) \Gamma^{b\beta}(p, \theta) \Gamma_{\beta}^{b'}(-p, \theta). \quad (3.44)$$

É fácil mostrar que as partes subdominantes da função de dois pontos são proporcionais a integrais do tipo ( $\tilde{p}^\alpha = \theta^{\alpha\beta} p_\beta$ )

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha e^{2ik \wedge p}}{k^4} = -\frac{i}{4\pi} \frac{\tilde{p}^\alpha}{\sqrt{\tilde{p}^2}}, \quad (3.45)$$

que é finita independente da direção que tomamos  $\tilde{p} \rightarrow 0$ .

Das equações (3.27), (3.40) e (3.43), encontramos que as divergências lineares infravermelhas UV/IR são canceladas se e somente se

$$\text{Tr} (T^a T^b T^a T^{b'}) = 2 \text{Tr} (T^a T^c T^b) \text{Tr} (T^a T^c T^{b'}). \quad (3.46)$$

Escolhemos  $T_0 \propto 1$  e  $\text{Tr} T_a = 0$  para  $a \neq 0$ . Com isso e lembrando do fato de que o conjunto  $\{T_a, a = 1, \dots, N^2\}$  forma uma base no espaço das matrizes  $T_a$  na representação fundamental obtemos

$$(T^a)_{ij} (T^a)_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (3.47)$$

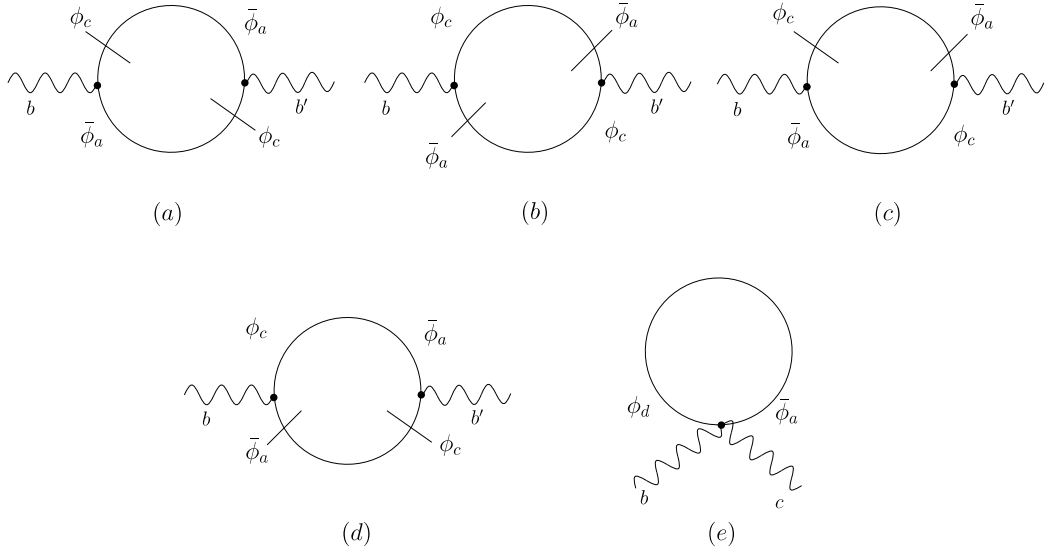
onde foi utilizada a equação (3.2). Esta relação nos informa que (3.46) se verifica apenas na representação fundamental das matrizes  $T_a$ . Comparando com a  $NCSEQ_3$  [41], a equação (3.46) constitui um novo requerimento proveniente do caráter não abeliano do grupo de calibre. Surpreendentemente esse mesmo requerimento assegura o cancelamento das divergências infravermelhas UV/IR quadráticas no caso não abeliano em quatro dimensões [73], apesar das profundas diferenças nas estruturas destas teorias. Para uma discussão

detalhada do cancelamento das divergências infravermelhas UV/IR na teoria de Yang-Mills supersimétrica não comutativa no espaço tetradimensional referimos o leitor à [73].

Resumindo, como no caso abeliano, a função de dois pontos do superpotencial de calibre é livre de singularidades UV e infravermelhas UV/IR na aproximação de uma laço.

### 3.4.2 Setor de matéria

Para o estudo completo da função de dois pontos resta analisar se a inclusão de supersimetrias pode ser fonte de singularidades não integráveis. Como no setor de calibre, a maior divergência é proveniente de *tadpoles*,  $V_\phi^D = 1$ , que são identicamente nulos. Os diagramas linearmente divergentes incluindo vértices de matéria são, de acordo com (3.25), aqueles desenhados na figura 23. O fator trigonométrico para os primeiros quatro



**FIGURA 23:** Diagramas com grau de divergência superficial linear.

diagramas desta figura é o mesmo, pois a posição dos campos é igual, só se diferenciando pela posição das derivadas. Portanto basta calcular o fator para um deles, por exemplo o diagrama 23(a), com o resultado

$$2\text{Tr} (T^a T^b T^c) (T^a T^c T^b) - 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr} (T^a T^c T^b) \text{Tr} (T^a T^c T^b). \quad (3.48)$$

Depois das manipulações das  $D'$ s, obtemos a contribuição não planar

$$\begin{aligned}
I_d &= 4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{(k^2 + m^2) [(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[ (k^2 + m^2) C_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha b}(-p, \theta) \Gamma^{\beta b'}(p, \theta) + (k_{\alpha\beta} + m C_{\alpha\beta}) [D^2 \Gamma^{\alpha b}(-p, \theta)] \Gamma^{\beta b'}(p, \theta) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} (k_{\gamma\beta} + m C_{\gamma\beta}) D^\gamma D^\alpha \Gamma_\alpha^b(-p, \theta) \Gamma^{\beta b'}(p, \theta) \right] \text{Tr} (T^a T^c T^b) \text{Tr} (T^a T^c T^{b'}) , \quad (3.49)
\end{aligned}$$

para os diagramas com vértice trilinear da figura 23, onde utilizamos o resultado da topologia equivalente em  $NCSQED_3$ , equação (2.76). O diagrama com vértice quártico tem fator trigonométrico

$$\begin{aligned}
V_\phi^0 &= -\frac{1}{2} [\text{Tr} (T^a T^b T^c T^a) + \text{Tr} (T^b T^a T^c T^c) - \\
&\quad - 2 \cos(2k \wedge p) \text{Tr} (T^b T^a T^c T^a)] , \quad (3.50)
\end{aligned}$$

de forma que a amplitude  $I_e$ , associada a este gráfico é

$$I_e = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{(k+p)^2 + m^2} C_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha b}(-p, \theta) \Gamma^{\beta b'}(p, \theta) \text{Tr} (T^a T^b T^a T^{b'}) . \quad (3.51)$$

Percebemos então que o cancelamento do termo linearmente divergente em (3.49),

$$-(k^2 + m^2) C_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha b}(-p, \theta) \Gamma^{\beta b'}(p, \theta), \quad (3.52)$$

está condicionado a que a relação (3.46) seja satisfeita. Como acontece no caso abeliano, as integrais primitivamente com divergências logarítmicas são canceladas por integração simétrica. Com isso, a relação (3.47) também assegura que o modelo  $NCSYM_3$  é finito na aproximação de um laço mesmo com supersimetria estendida. A contagem de divergências superficiais (3.25) implica na ausência de divergências além da segunda ordem da teoria de perturbações.

Podemos também analisar o efeito de incluir supercampos escalares na representação fundamental ao invés da representação adjunta, ou seja, ao invés de termos supercampos tomando valores na álgebra de Lie, tomamos um vetor coluna com  $N$  componentes. Com isso  $S_M$  fica

$$S_M = \int d^5 z \left[ \frac{1}{2} (D^\alpha \bar{\phi} + i \bar{\phi} \Gamma^\alpha) \star (D_\alpha \phi - i \phi \Gamma_\alpha) + m \bar{\phi} \phi \right] . \quad (3.53)$$

Neste caso, os diagramas da figura 23 são totalmente planares. A modificação incorporada pela não comutatividade é

$$e^{-ik_1 \wedge k_2} \quad (3.54)$$

para os dois vértices trilineares envolvendo matéria e

$$e^{-ik_1 \wedge k_2 - ik_3 \wedge k_4} \quad (3.55)$$

para o vértice quártico. Assim, o fator trigonométrico dos gráficos (a) – (d) da figura 23 é

$$e^{ik \wedge p} e^{-ik \wedge p} = 1, \quad (3.56)$$

enquanto para o digrama 23(e),

$$e^{ik \wedge p + ip \wedge k} = 1. \quad (3.57)$$

Estas contribuições planares são eliminadas por regularização dimensional. Portanto a teoria é consistente com supercampos escalares tanto na representação adjunta quanto na representação fundamental. Note que o fato dos campos estarem na representação fundamental,

$$\nabla_\alpha = D_\alpha \phi - i\phi \Gamma_\alpha,$$

ou adjunta

$$\nabla_\alpha = D_\alpha \phi - i[\phi, \Gamma_\alpha]_\star, \quad (3.58)$$

são significa que as matrizes do grupo de calibre estejam numa ou noutra. A exigência da teoria para ser consistente, equação (3.46), é que o grupo de calibre esteja na representação fundamental.

### 3.5 Funções de três e mais pontos do superpotencial espinorial na aproximação de um laço

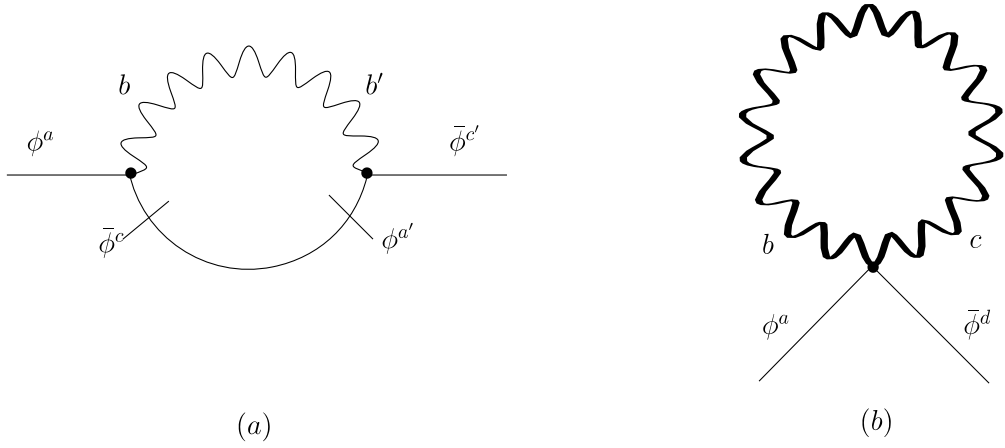
As funções de três e quatro pontos de  $\Gamma^\alpha$  são primitivamente logaritmicamente divergentes, tanto no setor de calibre quando no setor de matéria, como mostram as contagens de divergências (3.20) e (3.25). Contudo é fácil notar, levando em conta o resultado obtido no segundo capítulo para as funções correspondentes, que as citadas divergências não aparecem. De fato, os cancelamentos para os diagramas das figuras 11, 12 e 13 não dependem de nenhum balanço especial, ocorrem individualmente para cada diagrama e provém principalmente do resultado das manipulações das derivadas espinorias, que permanecem as mesmas para o caso não abeliano. Os termos não nulos por álgebra de  $D$ 's são, neste caso, proporcionais à integral 3.45.

As funções de  $N > 4$  pontos são superficialmente finitas em um laço conforme (3.25). Quanto a superdiagramas de dois ou mais laços, vale o resultado discutido no capítulo

2, ou seja, não há divergências lineares UV e infravermelhas UV/IR além de um laço e, como conseqüência, as funções de Green não apresentam divergências infravermelhas não integráveis em qualquer ordem da teoria de perturbações. Contudo restam ser analisadas as potenciais divergências superficiais logarítmicas na aproximação de dois laços.

### 3.6 Auto-energia do campo de matéria

De acordo com (3.25), gráficos com pernas externas do supercampo escalar não possuem divergências lineares, pois o número de pernas externas deve ser par. Os diagramas com grau de divergência superficial logarítmico estão desenhados na figura 24. Para o



**FIGURA 24:** Diagramas com grau de divergência superficial logarítmico que contribuem para a auto-energia de matéria.

diagrama (a) da figura 24 obtemos a contribuição não planar

$$I_{14a} = -4\xi g^2 m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \bar{\phi}_a(-p, \theta) \phi_a(p, \theta) \times \quad (3.59)$$

$$\times \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2 [(k+p)^2 + m^2]} \text{Tr}(T^a T^b T^c) \text{Tr}(T^b T^c T^a), \quad (3.60)$$

que é finita. A amplitude do segundo diagrama da figura 24 é nula. Isso ocorre porque do propagador do superpotencial de calibre, para esta configuração,

$$\langle \Gamma^{b\alpha}(k, \theta) \Gamma_\alpha^c(-k, \theta) \rangle \quad (3.61)$$

somente o termo proporcional a  $(\xi - 1)$  possui fatores  $D$  suficientes para contrair a  $\delta_{12}$ , contudo este é proporcional a  $k^\alpha_\alpha = 0$ . Portanto a auto-energia do campo de matéria é finita em qualquer calibre covariante e, conseqüentemente, livre da mistura UV/IR. Todos



os outros supergráficos envolvendo pernas externas de  $\phi$  ( $\bar{\phi}$ ), com ou sem pernas externas do supercampo de calibre, são UV finitos e não geram divergências infravermelhas UV/IR.

Concluimos que a  $NCSYM_3$  é uma teoria consistente, sem divergências infravermelhas UV/IR não integráveis, tanto com ou sem supercampos de matéria.

## 4 *Conclusões*

A teoria de cordas atraiu a atenção sobre teorias de campo não-comutativas. As teorias de calibre são de particular interesse intrínseco, basta lembrar a sistemática utilizada na construção da extensão não-comutativa do modelo padrão [54]. A mistura UV/IR trouxe novo obstáculo para a renormalização destas teorias e, até o momento, somente foi mostrado que modelos não-comutativos supersimétricos são renormalizáveis a todas as ordens da teoria de perturbações tanto em três quanto em quatro dimensões [35, 38–40]. Por isso o foco desta tese é em teorias de calibre não-comutativas supersimétricas.

Vamos comentar agora as contribuições originais deste trabalho. No capítulo 2 apresentamos um estudo detalhado das correções radiativas de um laço às funções de vértice de dois, três e quatro pontos da teoria de calibre supersimétrica não comutativa abeliana, verificando o cancelamento tanto das divergências dominantes quanto as subdominantes no UV e infravermelho UV/IR [41]. No capítulo 3 estendemos os estudos para teorias de calibre não-abelianas [42].

Nossos resultados indicam que a supersimetria mais uma vez garante a consistência da expansão perturbativa das teorias de calibre não-comutativas no formalismo de supercampos. Mostramos que a eletrodinâmica quântica tridimensional não-comutativa supersimétrica é finita no UV e no UV/IR infravermelho a um laço tanto com e sem matéria. Além disso nenhum diagrama de três laços ou mais apresenta divergências superficiais, o que caracteriza a teoria como super-renormalizável. Na aproximação de dois laços temos apenas divergências logarítmicas que não ameaçam o desenvolvimento perturbativo. Para a teoria de Yang-Mills mostramos que os mesmos resultados são obtidos. Entretanto requer o uso da representação fundamental de  $U_\star(N)$ .

A extensão natural deste trabalho é o cálculo das divergências logarítmicas a dois laços. É fundamental averiguar se temos teorias de calibre não-comutativas finitas, uma vez que mostramos que estas são finitas na aproximação de um laço e não contém divergências superficiais além de dois laços. Não são esperadas novas relações entre traços dos gera-

dores para a teoria não-abeliana, estas relações surgem no cancelamento de divergências lineares, o cancelamento das divergências logarítmicas se dá individualmente para cada topologia. Contudo se novas relações surgirem, necessariamente devem ser satisfeitas na representação fundamental do grupo de calibre. Como citado no final do capítulo 2, estas verificações demandam o uso de algoritmos computacionais, em vista do número de diagramas envolvidos.

O cancelamento das divergências infravermelhas UV/IR nas teorias de calibre não-comutativas supersimétricas reforça a idéia de que a supersimetria é ingrediente fundamental na construção de teorias quânticas de campo não-comutativas consistentes, sendo livres de divergências não integráveis, respeitando unitariedade e causalidade. O estudo em  $2 + 1$  dimensões permitiu estudar efeitos em ordens mais altas da teoria de perturbações, onde mostramos a ausência de mistura UV/IR.

## *APÊNDICE A – Supersimetria em três dimensões*

Vamos apresentar uma breve introdução à supersimetria em  $(2 + 1)$  dimensões espaço-temporais, aproveitando a mesma para introduzir as convenções que foram utilizadas neste trabalho. A idéia básica de supersimetria é que existe uma nova simetria com parâmetros fermiônicos que mistura as componentes bosônicas e fermiônicas da teoria.

### A.1 Convenções

A métrica utilizada será  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +)$ . Utilizaremos, seguindo [18], a notação de bi-espinores para representar vetores, isto é, escreveremos  $x^\mu \rightarrow x^{\alpha\beta} = x^\mu (\gamma_\mu)^{\alpha\beta}$ , com as matrizes gama

$$(\gamma^0)^\alpha_\beta = -i\sigma^2, \quad (\gamma^1)^\alpha_\beta = \sigma^1, \quad (\gamma^2)^\alpha_\beta = \sigma^3, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli, e

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

As matrizes gama com os dois índices em baixo,  $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} = (-\mathbf{1}, -\sigma^3, \sigma^1)$ , são simétricas, de modo que todos os vetores são representados por bi-espinores simétricos.

Para baixar e levantar índices utilizaremos o símbolo antisimétrico de segundo grau  $C_{\alpha\beta}$ , dado por

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} = -C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

com a propriedade

$$C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta. \quad (\text{A.4})$$

A convenção de contração de índices será a *north-western*,

$$\psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}, \quad \psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (\text{A.5})$$

e a formação do escalar é implementada por

$$\psi^2 = \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha = i \psi^1 \psi^2. \quad (\text{A.6})$$

Estamos usando o símbolo  $C_{\alpha\beta}$  ao invés do convencional  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  para simplificar as regras de conjugação hermitianas, convém ressaltar que  $\psi^\alpha$  é real enquanto  $\psi_\alpha$  é imaginário, de forma que  $\psi^2$  é hermitiano. Usamos também a identidade

$$A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha = -C_{\alpha\beta} A^\gamma B_\gamma, \quad (\text{A.7})$$

que segue de (A.6) usando (A.4).

O grupo de Lorentz é  $SL(2, R)$  e a representação fundamental age sobre um espinor real de duas componentes (espinor de Majorana),  $\psi^\alpha = (\psi^1, \psi^2)$ . Todos os espinores utilizados pertencem a uma álgebra de Grassmann, ou seja, são anti-comutantes

$$\psi^\alpha \psi^\beta = -\psi^\beta \psi^\alpha, \quad (\text{A.8})$$

$$(\psi^\alpha \psi^\beta)^* = (\psi^\beta)^* (\psi^\alpha)^*. \quad (\text{A.9})$$

Segue imediatamente que  $\psi^\alpha \psi^\alpha = 0$  e, como  $\alpha = 1, 2$ , temos que  $\psi^{\alpha_1} \psi^{\alpha_2} \dots \psi^{\alpha_n} = 0$ ,  $\forall n > 2$ .

## A.2 Superespaço e supercampos

O superespaço é dado por três coordenadas espaço-temporais,  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$  e duas coordenadas espinoriais anti-comutantes  $\theta^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , que representaremos conjuntamente por  $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha)$ . Vamos definir uma função no superespaço por  $f(z^M) = f(x, \theta)$ , que pode ter índices de Lorentz e de simetrias internas. As transformações destas funções frente aos geradores do grupo de Poincaré,  $P_{\alpha\beta}$  para translações e  $M_{\mu\nu}$  para rotações, são da forma usual. A álgebra graduada de Poincaré (ou superálgebra) é obtida adicionando

geradores espinoriais supersimétricos  $Q_\alpha$ , que verificam

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2P_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.10})$$

$$[Q_\alpha, P_{\beta\gamma}] = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$[P_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] = 0, \quad (\text{A.12})$$

bem como as relações de comutação usuais com  $M_{\mu\nu}$ . Os geradores são escritos como

$$Q_\alpha = i\partial_\alpha + \theta^\beta \partial_{\beta\alpha}, \quad P_{\alpha\beta} = i\partial_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.13})$$

Essa álgebra é realizada sobre os supercampos  $F(x, \theta)$  por

$$F(x', \theta') = e^{i(\zeta^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + \epsilon^\gamma Q_\gamma)} F(x, \theta), \quad (\text{A.14})$$

de modo que  $\zeta^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + \epsilon^\gamma Q_\gamma$  gera a supertransformação de coordenadas

$$x'^{\mu\nu} = x^{\mu\nu} + \zeta^{\mu\nu} - \frac{i}{2}(\epsilon^\mu \theta^\nu + \epsilon^\nu \theta^\mu), \quad (\text{A.15})$$

$$\theta'^\mu = \theta^\mu + \epsilon^\mu. \quad (\text{A.16})$$

Vamos definir a derivada em relação às variáveis grassmanianas da maneira seguinte

$$\partial_\alpha \theta^\beta \equiv \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \theta^\alpha} = \delta_\alpha^\beta, \quad (\text{A.17})$$

sendo que esta derivação obedece à regra de Leibniz. As derivadas em relação às coordenadas  $x^{\alpha\beta}$ , são definidas como segue:

$$\partial_{\alpha\beta} x^{\gamma\sigma} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma + \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\sigma), \quad (\text{A.18})$$

$$\square = \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} \partial^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.19})$$

O operador de momento tem a propriedade de hermiticidade

$$(i\partial_{\alpha\beta})^\dagger = +i\partial_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.20})$$

A integração de variáveis anti-comutantes é definida de forma a ser translacionalmente invariante, de forma que

$$\int d\theta_\alpha = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (\text{A.22})$$

Com isto temos que a integração nas variáveis grassmanianas é equivalente à diferenciação,

$$\int d\theta_\alpha f(x, \theta) = \partial^\alpha f(x, \theta). \quad (\text{A.23})$$

A integração por partes é

$$\int d\theta_\alpha f(x, \theta) \partial_\beta g(x, \theta) = -(-1)^{n_f} \int d\theta_\alpha [\partial_\beta f(x, \theta)] g(x, \theta), \quad (\text{A.24})$$

onde  $n_f$  é o número fermiônico da função  $f(x, \theta)$ . É interessante notar que uma função  $f(x, \theta)$  possui uma expansão finita em série de Taylor,

$$f(x, \theta) = f_0(x) + f_1^\alpha(x) \theta_\alpha + f_2(x) \theta^2. \quad (\text{A.25})$$

No caso geral estas funções podem ser tensores de postos diferentes e são chamadas de componentes de  $f(x, \theta)$ .

Podemos definir a função delta como sendo

$$\delta^2(\theta) = -\theta^2 = -\frac{1}{2} \theta^\alpha \theta_\alpha, \quad (\text{A.26})$$

visto que

$$\int d^2\theta \theta^2 = \frac{1}{4} \int d\theta^\alpha d\theta_\alpha \theta^\beta \theta_\beta = -1. \quad (\text{A.27})$$

Com isto

$$\int d^2\theta f(\theta_1) \delta(\theta_1 - \theta_2) = f(\theta_2), \quad (\text{A.28})$$

satisfazendo a condição usual da função delta.

As funções definidas no superespaço  $z^M$  são denominadas supercampos e as transformações de supersimetria num dado supercampo  $\phi(x, \theta)$  com um parâmetro infinitesimal  $\epsilon^\alpha$  são definidas como

$$\begin{aligned} \delta\phi(x, \theta) &= \epsilon^\alpha Q_\alpha \phi(x, \theta) \\ &= \epsilon^\alpha (i\partial_\alpha + \theta^\beta \partial_{\beta\alpha}) \phi(x, \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Expandindo  $\phi(x, \theta)$  em  $\theta$  e definindo

$$\delta\phi(x, \theta) = \delta A(x) + \theta^\alpha \delta\psi_\alpha(x) - \theta^2 \delta F(x), \quad (\text{A.30})$$

sendo  $A(x)$ ,  $\psi_\alpha(x)$  e  $F(x)$  as componentes do supercampo  $\phi(x, \theta)$ , encontramos compa-

rando potências de  $\theta$  entre (A.29) e (A.30),

$$\delta A(x) = -\epsilon^\alpha \psi_\alpha(x), \quad (\text{A.31a})$$

$$\delta \psi_\alpha(x) = -\epsilon^\beta (C_{\alpha\beta} F(x) + i\partial_{\alpha\beta} A(x)), \quad (\text{A.31b})$$

$$\delta F(x) = -\epsilon^\alpha i\partial_\alpha^\beta \psi_\beta(x), \quad (\text{A.31c})$$

as transformações de supersimetria para as componentes.

As derivadas supercovariantes  $D_\alpha$  são definidas de forma a serem anti-comutantes com os geradores de supersimetria  $Q_\beta$  e comutantes com os geradores de translações  $P_{\beta\gamma}$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$[D_\alpha, P_{\beta\gamma}] = 0. \quad (\text{A.33})$$

Estas propriedades são satisfeitas pela escolha

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}, \quad (\text{A.34})$$

a qual por sua vez verifica

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 2i\partial_{\alpha\beta}, \quad [D_\alpha, D_\beta] = -2C_{\alpha\beta} D^2. \quad (\text{A.35})$$

Somando estas duas expressões obtemos

$$D_\alpha D_\beta = i\partial_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} D^2, \quad (\text{A.36})$$

que é fundamental para simplificar as contribuições das derivadas nas amplitudes dos superdiagramas. Outra importante relação,

$$D_\alpha D_\beta D^\alpha = 0, \quad (\text{A.37})$$

é obtida notando que o objeto totalmente anti-simétrico com três índices espinoriais deve ser nulo. Partindo de (A.37) é também possível mostrar que

$$\{D_\alpha, D^2\} = 0. \quad (\text{A.38})$$

Multiplicando a equação (A.37) por  $D^\beta$  pela esquerda e usando (A.38) chega-se a

$$D^\beta D_\alpha D_\beta D^\alpha = -D^\beta D^\alpha D_\beta D_\alpha = 0. \quad (\text{A.39})$$



Aplicando (A.36) temos que

$$\begin{aligned} (i\partial^{\beta\alpha} - C^{\beta\alpha}D^2)(i\partial_{\beta\alpha} - C_{\beta\alpha}D^2) &= -\partial^{\beta\alpha}\partial_{\beta\alpha} + C^{\beta\alpha}C_{\beta\alpha}(D^2)^2 \\ &= -2\Box + 2(D^2)^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

onde usamos (A.4). Isto fornece

$$(D^2)^2 = \Box, \quad (\text{A.41})$$

a qual constitui a última relação que é necessária para carregar a álgebra das derivadas espinoriais,

Para encerrar este apêndice vamos observar como as  $D$ 's se comportam na presença das funções  $\delta^2(\theta_1 - \theta_2)$ . Como definido anteriormente em (A.26),

$$\delta^2(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)^\alpha(\theta_1 - \theta_2)^\beta C_{\beta\alpha}, \quad (\text{A.42})$$

de forma tal que

$$\delta^2(\theta_1 - \theta_2)\delta^2(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (\text{A.43})$$

devido à natureza grassmaniana das  $\theta$ 's. Assim

$$\begin{aligned} \delta^2(\theta_1 - \theta_2)D_\alpha\delta^2(\theta_1 - \theta_2) &= \delta^2(\theta_1 - \theta_2)(\partial_\alpha + \theta^\beta k_{\beta\alpha})\delta^2(\theta_1 - \theta_2) \\ &= -\delta^2(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_2)_\alpha + \theta^\beta k_{\beta\alpha}\delta^2(\theta_1 - \theta_2)\delta^2(\theta_1 - \theta_2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

É fácil mostrar também que

$$\delta(\theta_1 - \theta_2)D^2\delta(\theta_1 - \theta_2) = \delta(\theta_1 - \theta_2). \quad (\text{A.45})$$

## A.3 Formulação quântica

Vamos utilizar a formulação funcional, generalizada para teorias definidas no superespaço [19], para quantização das teorias estudadas.

O funcional gerador das funções de Green conectadas,  $W[J]$ , é dado por

$$e^{iW[J]} = N_0 \int [\mathcal{D}F] e^{iS[F] + i \int d^5z F(z)J(z)}, \quad (\text{A.46})$$

onde  $N_0$  é uma constante de normalização,  $[\mathcal{D}F]$  é a medida de integração funcional,  $S[F]$  é a ação que define a teoria e  $J(z)$  é a fonte para o supercampo  $F(z)$ .

Neste método o principal objeto de interesse é a ação efetiva, para obtê-la definimos um campo clássico

$$F_c(z) \equiv F_c[J|z] \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(z)}, \quad (\text{A.47})$$

onde  $F_c$  depende funcionalmente de  $J$  e é, ao mesmo tempo, uma função de  $z$ . Sendo possível inverter esta última relação, obtemos  $J_c(z) = J_c[F_c|z]$ , que nos permite fazer uma transformação de Legendre em  $W[J]$ ,

$$\Gamma[F_c] = W[J_c] - \int d^5z J_c(z) F_c(z). \quad (\text{A.48})$$

Definindo assim a ação efetiva,  $\Gamma[F_c]$ , que tem a propriedade de gerar diagramas próprios da teoria. O desenvolvimento perturbativo de  $\Gamma[F_c]$  é

$$\Gamma[F_c] = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \int d^5z_1 \dots d^5z_n \Gamma^{(n)}(z_1, \dots, z_n) F_c(z_1) \dots F_c(z_n). \quad (\text{A.49})$$

O coeficiente  $\Gamma^{(n)}(z_1, \dots, z_n)$  é chamado de função de vértice de  $n$ - pontos do supercampo  $F(z)$  e será o objeto que calcularemos nesse trabalho. Para tanto somaremos todos os diagramas próprios que contribuem para a função de  $n$ - pontos, amputaremos as linhas externas e multiplicaremos por  $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_c(p)$ , representando os supercampos clássico externo.

## *Referências*

- 1 SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, New York, v. 71, n. 1, p. 38–41, Jan. 1947.
- 2 SNYDER, H. S. The electromagnetic field in quantized space-time. *Phys. Rev.*, New York, v. 72, n. 1, p. 68–71, July 1947.
- 3 SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 9, 32 99p., Jan. 1999.
- 4 de Wit, B. Quantization of supersymmetric gauge theories. *Phys. Rev. D*, New York, v. 12, n. 6, p. 1628–1642, Sept. 1975.
- 5 CONNES, A. *Noncommutative geometry*. London: Academic Press, 1994.
- 6 WITTEN, E. Non-commutative geometry and string field theory. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 268, n. 2, p. 253–294, May 1986.
- 7 CONNES, A.; LOTT, J. Particle models and non commutative geometry. *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.*, Amsterdam, v. 18, n. 2, p. 29–47, Jan. 1991.
- 8 DOUGLAS, M. R; HULL, C. D-branes and the noncommutative torus. *J. High Energy Phys.*, Bologna, n. 2, 8 5p., Feb. 1998.
- 9 ARDALAN, F.; ARFAEI, H.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative geometry from strings and branes. *J. High Energy Phys.*, Bologna, v. 2, May 1999. 16 20p.
- 10 CHU, C. S.; HO, P. M. Noncommutative open string and D-brane. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 550, n. 1/2, p. 151–168, June 1999.
- 11 FILK, T. Divergencies in a field theory on quantum space. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 376, n. 1, p. 53–58, May 1996.
- 12 VARILLY, J. C.; GRACIA-BONDIA, J. M. On the ultraviolet behaviour of quantum fields over noncommutative manifolds. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 14, n.8, p. 1305–1314, Mar. 1999.
- 13 CHAICHIAN, M.; DEMICHEV, A.; PRESNAJDER, P. Quantum field theory on noncommutative space-times and the persistence of ultraviolet divergences. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 567, n. 1/2, p. 360–390, Feb. 2000.
- 14 LIU, H.; MICHELSON, J. \*-Trek: the one-loop N=4 noncommutative SYM action. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 614, n. 1/2, p. 279–304, Oct. 2001.

- 15 OKAWA, Y.; OOGURI, H. Exact solution to Seiberg-Witten equation of noncommutative gauge theory. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 64, n. 4, 046009 11p., July 2001.
- 16 DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, Melville, v. 73, n. 4, p. 977–1029, Oct. 2001.
- 17 SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 378, n. 4, p. 207–299, May 2003.
- 18 GRISARU, M. T.; GATES JR., S. J.; ROCEK, M.; SIEGEL, W. *Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry*. New York: Benjamin/Cummings, 1983. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0108200>>. Acesso em: 01 ago. 2004.
- 19 BUCHBINDER, I. L.; KUZENKO, S. M. *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity*. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1995.
- 20 GROENEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, Amsterdam, v. 12, n. 7, p. 405–460, Oct. 1946.
- 21 MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, London, v. 45, n. 1, p. 99–124, Jan. 1949.
- 22 WEYL, H. *The theory of groups and quantum mechanics*. Princeton: Dover, 1950.
- 23 GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum field theories. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0301237>>. Acesso em: 01 sept. 2004.
- 24 MINWALLA, S.; van RAAMSDONK, M.; SEIBERG, N. Noncommutative perturbative dynamics. *J. High Energy Phys.*, Bologna, n. 2, 20 30p., Feb. 2000.
- 25 van RAAMSDONK, M.; SEIBERG, N. Comments on noncommutative perturbative dynamics. *J. High Energy Phys.*, Bologna, n. 3, 35 21p.. Mar. 2000.
- 26 AREF'EVA, I. Y.; BELOV, D. M.; KOSHELEV, A. S. Two-loop diagrams in noncommutative  $\phi^4$  theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 476, n. 3/4, p. 431–436, Mar. 2000.
- 27 AREF'EVA, I. Y.; BELOV, D. M.; KOSHELEV, A. S.; RYTCHKOV, O. A. Renormalizability and UV/IR mixing in noncommutative theories with scalar fields. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 487, p. 357, 2000.
- 28 AREF'EVA, I. Y.; BELOV, D. M.; KOSHELEV, A. S. A note on UV/IR for noncommutative complex scalar field. Disponível em: <<http://arxiv.org/hep-th/0001215>>. Acesso em: 01 june 2004.
- 29 POLCHINSKI, J. Renormalization and effective lagrangians. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 231, n. 2, p. 269–295, Jan. 1984.
- 30 GRIGUOLO, L.; PIETRONI, M. Wilsonian renormalization group and the non-commutative IR/UV connection. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 5, 32 27p., May 2001.

- 31 GRIGUOLO, L.; PIETRONI, M. Hard noncommutative loops resummation. *Phys. Rev. Lett.*, Melville, v. 88, n. 7, p. 071601 4p, Feb. 2002.
- 32 MATUSIS, A.; SUSSKIND, L.; TOUMBAS, N. The IR/UV connection in the non-commutative gauge theories. *J. High Energy Phys.*, Bologna, n. 12, 2 17p., Dec. 2000.
- 33 MARTÍN, C. P.; SÁNCHEZ-RUIZ, D. One-loop UV divergent structure of U(1) Yang-Mills theory on noncommutative  $R^4$ . *Phys. Rev. Lett.*, Melville, v. 83, n. 3, p. 476–479, July 1999.
- 34 HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on  $R^4$ . *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 478, n. 1/3, p. 394–400, Apr. 2000.
- 35 GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. A consistent noncommutative field theory: the Wess-Zumino model. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 587, n. 1/3, p. 299–310, Oct. 2000.
- 36 WESS, J.; ZUMINO, B. Supergauge transformations in four dimensions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 70, n. 1, p. 39–50, Feb. 1974.
- 37 ILIOPOULOS, J.; ZUMINO, B. Broken supergauge symmetry and renormalization. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 76, n. 2, p. 310–332, July 1974.
- 38 GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. The three-dimensional noncommutative nonlinear sigma model in superspace. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 521, n. 1/2, p. 119–126, Nov. 2001.
- 39 GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. The noncommutative supersymmetric nonlinear sigma model. *Int. J. Mod. Phys. A.*, Singapore, v. 17, n. 11, p. 1503–1516, Apr. 2002.
- 40 GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. Spontaneous symmetry breaking in noncommutative field theories. *Phys. Rev. D.*, Melville, v. 67, n. 12, 125003 10p., June 2003.
- 41 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; SILVA, A. J. da. On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED<sub>3</sub> in the covariant superfield formulation. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 577, n. 1/2, p. 83–92, Dec. 2003.
- 42 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; SILVA, A. J. da. On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 601, n. 1/2, p. 88–92, Oct. 2004.
- 43 GOMIS, J.; MEHEN, T. Space-time noncommutative field theories and unitarity. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 591, n. 1/2, p. 265–276, Dec. 2000.
- 44 BASSETTO, A.; VIAN, F.; GRIGUOLO, L.; NARDELLI, G. On the unitarity of quantum gauge theories on non-commutative spaces. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 7, 8 27p., July 2001.

- 45 GOMIS, J.; KAMIMURA, K.; LLOSA, J. Hamiltonian formalism for space-time non-commutative theories. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 63, n. 4, Feb. 2001. 045003 6p.
- 46 BAHNS, D.; DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; PIACITELLI, G. On the unitarity problem in space/time noncommutative theories. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 533, n. 1/2, p. 178–181, May 2002.
- 47 LIAO, Y.; SIBOLD, K. Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime: basic rules. *Eur. Phys. J. C*, New York, v. 25, n. 3, p. 469–477, Oct. 2002.
- 48 LIAO, Y.; SIBOLD, K. Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime II: unitarity. *Eur. Phys. J. C*, New York, v. 25, n. 3, p. 479–486, Oct. 2002.
- 49 MORITA, K.; OKUMURA, Y.; UMEZAWA, E. Lorentz invariance and unitarity problem in non-commutative field theory. *Progr. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 110, n. 5, p. 989–1001, Nov. 2003.
- 50 SHEIKH-JABBARI, M. M. Discrete symmetries (C,P,T) in noncommutative field theories. *Phys. Rev. Lett.*, Melville, v. 84, n. 23, p. 5265–5268, June 2000.
- 51 CHAICHIAN, M.; PRESNAJDER, P.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Noncommutative gauge field theories: a no-go theorem. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 526, n. 1/2, p. 132–136, Jan. 2002.
- 52 BONORA, L.; SCHNABL, M.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TOMASIELLO, A. Noncommutative SO(n) and Sp(n) gauge theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 589, n. 1/2, p. 461–474, Nov. 2000.
- 53 BARS, I.; SHEIKH-JABBARI, M.; VASILIEV, M. Noncommutative  $O^*(N)$  and  $Usp^*(2N)$  algebras and the corresponding gauge field theories. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 64, n. 8, 086004 13p., Sept. 2001.
- 54 CHAICHIAN, M.; PRESNAJDER, P.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Noncommutative standard model: model building. *Eur. Phys. J. C*, New York, v. 29, n. 3, p. 413–432, July 2003.
- 55 MARCUS, N.; SAGNOTTI, A. Tree-level constraints on gauge groups for type I superstrings. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 119, n. 1/3, p. 97–99, Dec. 1982.
- 56 SCHWARZ, J. Superstring theory. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 89, n. 3, p. 223–322, Sept. 1982.
- 57 SHEIKH-JABBARI, M. M. Renormalizability of the supersymmetric Yang-Mills theories on the noncommutative torus. *J. High Energy Phys.*, Bologna, n. 6, 15 16p., June 1999.
- 58 HAYAKAWA, M. Perturbative ultraviolet and infrared dynamics of noncommutative quantum field theory. Disponível em: <<http://arxiv.org/hep-th/0009098>>. Acesso em: 17 maio 2005.

- 59 BONORA, L.; SALIZZONI, M. Renormalization of noncommutative  $U(N)$  gauge theories. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 504, n. 1, p. 80–88, Apr. 2001.
- 60 ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- 61 LINDE, A. Phase transitions in gauge theories and cosmology. *Rep. Progr. Phys.*, London, v. 42, n. 3, p. 389–437, Mar. 1979.
- 62 DESER, S.; JACKIW, R. W.; TEMPLETON, S. Three-dimensional massive gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 48, n. 15, p. 975–978, Apr. 1982.
- 63 ANDRADE, M. A. de.; CIMA, O. M. Del.; COLATTO, L. P.  $N=1$  super-Chern-Simons coupled to parity-preserving matter from Atiyah-Ward space-time. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 370, n. 1-2, p. 59–64, Mar. 1996.
- 64 COLATTO, L. P.; ANDRADE, M. A. de.; CIMA, O. M. Del.; FRANCO, D. H. T.; HELAYËL-NETO, J. A.; PIGUET, O. Renormalization of the  $N=1$  abelian super-Chern-Simons theory coupled to parity-preserving matter. *J. Phys. G.*, Bristol, v. 24, n. 7, p. 1301–1307, July 1998.
- 65 RUIZ, F. R.; NIEUWENHUIZEN, P. van. BRS symmetry versus supersymmetry in Yang-Mills-Chern-Simons theory. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 486, n. 1/2, p. 443–465, Feb. 1997.
- 66 RUIZ, F.; NIEUWENHUIZEN, P. van. Supersymmetric Yang-Mills-Chern-Simons theory. *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.*, Amsterdam, v. 56B, p. 269–274, July 1997.
- 67 DELDUC, F.; LUCCHESI, C.; PIGUET, O.; SORELLA, S. P. Exact scale invariance of the Chern-Simons theory in the Landau gauge. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 346, n. 2/3, p. 313–328, Dec. 1990.
- 68 BLASI, A.; PIGUET, O.; SORELLA, S. P. Landau gauge and finiteness. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 356, n. 1, p. 154–162, June 1991.
- 69 GAJDOSIK, T.; KUMMER, W. Finiteness of Chern-Simons theory for noncovariant gauges. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 48, n. 6, p. 2897–2904, Sept. 1993.
- 70 DOREY, N.; MAVROMATOS, N. Superconductivity in  $2+1$  dimensions without parity or time-reversal violation. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 250, n. 1/2, p. 107–116, Nov. 1990.
- 71 DOREY, N.; MAVROMATOS, N.  $QED_3$  and two-dimensional superconductivity without parity violation. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 386, n. 3, p. 614–680, Nov. 1992.
- 72 SCHONFELD, J. A mass term for three-dimensional gauge fields. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 185, n. 1, p. 157–171, July 1981.
- 73 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V.; SILVA, A. J. da. Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric  $QED_4$ . *Phys. Rev. D*, Melville, v. 69, n. 2, 025008 15p., Jan. 2004.

- 74 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V.; SILVA, A. J. da. Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: superfield covariant analysis. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 70, n. 8, 085012 11p., Oct. 2004.
- 75 FERRARA, S.; PIGUET, O. Perturbation theory and renormalization of supersymmetric Yang-Mills theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 93, n. 2, p. 261–302, July 1975.
- 76 CLARK, T. E.; PIGUET, O.; SIBOLD, K. Renormalization theory in superspace. *Ann. Phys.*, New York, v. 109, n. 2, p. 418–467, Dec. 1977.
- 77 JUER, J. W.; STOREY, D. One-loop renormalization of superfield Yang-Mills theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 216, n. 1, p. 185–208, Apr. 1983.
- 78 PIGUET, O.; SIBOLD, K. The off-shell infrared problem in N=1 supersymmetric Yang-Mills theories. I. Pure super-Yang-Mills. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 248, n. 2, p. 336–364, Dec. 1984.
- 79 PIGUET, O.; SIBOLD, K. Gauge independence in N=1 supersymmetric Yang-Mills theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 248, n. 2, p. 301–335, Dec. 1984.
- 80 PIGUET, O.; SIBOLD, K. The off-shell infrared problem in N=1 supersymmetric Yang-Mills theories. II. General massless models. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 249, n. 3, p. 396–412, Jan. 1985.
- 81 ASANO, E.; GIROTTI, H.; GOMES, M.; PETROV, A.; RODRIGUES, A.; SILVA, A. da. Coupling of fermions to the three-dimensional noncommutative  $CP^{N-1}$  model: minimal and supersymmetric extensions. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 69, n. 10, 105012 11p., May 2004.
- 82 ZANON, D. Noncommutative N=1,2 super U(N) Yang-Mills: UV/IR mixing and effective action results at one loop. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 502, n. 1/4, p. 265–273, Mar. 2001.
- 83 ZANON, D. Noncommutative perturbation in superspace. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 504, n. 1/2, p. 101–108, Apr. 2001.
- 84 TERASHIMA, S. A note on superfields and noncommutative geometry. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 482, n. 1/3, p. 276–282, June 2000.
- 85 MATSUBARA, K. Restrictions on gauge groups in noncommutative gauge theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 482, n. 4, p. 417–419, June 2000.