

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

KARINA GIRARDI ROGGIA

**Categoria de Grafos Parciais com
Homomorfismos Totais: teoria e
aplicações**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Paulo Blauth Menezes
Orientador

Porto Alegre, janeiro de 2005

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Roggia, Karina Girardi

Categoria de Grafos Parciais com Homomorfismos Totais: teoria e aplicações / Karina Girardi Roggia. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2005.

76 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 2005. Orientador: Paulo Blauth Menezes.

1. Grafos parciais. 2. Modelos categoriais. 3. Teoria dos autômatos. 4. Grafos parciais internos. I. Menezes, Paulo Blauth. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Vice-Reitor: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca

Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof^a. Valquíria Linck Bassani

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Philippe Olivier Alexandre Navaux

Coordenador do PPGC: Prof. Flávio Rech Wagner

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

*À minha família, toda a “árvore” que ela forma,
desde as raízes, minhas avós Ângela e Elena,
até a mais nova folha, minha sobrinha Laura.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos que foram, são e continuarão sendo mestres na minha vida:

- Minha mãe, Elenir, que me ensinou de tudo, mas principalmente a batalhar e acreditar no que se quer.

- Minha irmã Fernanda, que me ensinou a ser paciente, a ouvir e a falar quando se precisa.

- Minha irmã Patrícia, que me ensinou minha primeira conta de matemática em um pequeno quadro de giz.

- Meu pai, Neris, que me ensinou que não preciso conquistar o mundo com 20 e poucos anos (posso esperar até os 30 ;-)).

- Meu querido “daddy” Esis, que me ensinou a mexer em um computador (mesmo que meu principal objetivo na época com isso fosse saber achar os joguinhos).

- Minhas avós, Ângela e Elena, que me ensinaram a doçura de pertencer a uma família numerosa.

- Meu orientador, Prof. Paulo Blauth Menezes, que me orientou desde a graduação e me ensinou não somente Categorias, mas também a ter calma e ser objetiva com meu trabalho.

- Prof. Tiarajú, que me ensinou que professores também são amigos.

- Minha professora de matemática da 7a. série, Angélica Kafrouni, que me ensinou a ser apaixonada pela matemática.

- Meu colega de mestrado, Marnes Augusto Hoff, que me ensinou sobre pares monos, spans, números perfeitos, teoria de grupos e a ser rigorosa com provas e definições. Um grande colega de trabalho.

- Todos os meus amigos: os dos laboratórios 202, 228, 207; os do coral “Sons do Vale” do Instituto de Informática e os que sempre estiveram comigo: Viviane, Tami, Marcelo, Clarissa, Machado, Sanger, Diego, Vianna, Tiago, Drebes, Émerson, Priscilla, Kassick, Laura, Cacá, Link, Pitoni, Anelise ... que me ensinaram que “desligar” um pouco do trabalho aumenta a qualidade dele.

- Minha sobrinha Laura, que me ensinou a ser uma madrinha coruja :-)

- Meu namorado Daniel, que me ensinou a amar alguém que se queira viver junto e construir uma vida inteira.

Obrigada a todos vocês pelo carinho, paciência e amizade. Não seria possível a realização deste trabalho sem vocês.

Gostaria também de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	9
LISTA DE SÍMBOLOS	11
LISTA DE FIGURAS	13
LISTA DE TABELAS	15
LISTA DE DEFINIÇÕES	17
LISTA DE TEOREMAS	19
RESUMO	21
ABSTRACT	23
1 INTRODUÇÃO	25
1.1 Parcialidade e Morfismos Parciais	25
1.2 Grafos e Grafos Parciais	26
1.3 Trabalho Correlato	27
1.4 Objetivos	27
1.5 Organização do Texto	28
2 MORFISMOS PARCIAIS	29
2.1 Conceito	29
2.2 Exemplos	32
2.3 Propriedades	34
3 CATEGORIA DAS SETAS PARCIAIS	39
3.1 Categoria das Setas	39
3.1.1 Conceito e Exemplos	39
3.1.2 Propriedades e Herança de (Co)Limites	41
3.2 Categoria das Setas Parciais	42
3.2.1 Conceito e Exemplos	42
3.2.2 Herança de Colimites	44
4 GRAFOS PARCIAIS	45
4.1 Categoria dos Grafos Parciais: $\mathcal{G}r_p$	45
4.2 Grafos Parciais Internos	47

5	BICOMPLETUDE EM $\mathcal{G}R_P$	49
5.1	Limites	49
5.1.1	Produto Binário	49
5.1.2	Objeto Terminal	56
5.1.3	Equalizadores	57
5.2	Colimites	58
5.2.1	Coprodutos	59
5.2.2	Coequalizador	60
6	AUTÔMATOS PARCIAIS	63
6.1	Definição	63
6.1.1	Bicompletude	65
6.2	Composição de Spans e Computações	66
6.2.1	Composição de Spans Estendida para Grafos	67
6.2.2	Composição de Transições de Autômatos Parciais	69
7	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

\mathcal{Pfn} categoria dos conjuntos e funções parciais

\mathcal{Set} categoria dos conjuntos e funções totais

$Mor_{\mathcal{C}}$ coleção de morfismos da categoria \mathcal{C}

$Ob_{\mathcal{C}}$ coleção de objetos da categoria \mathcal{C}

iso isomorfismo

mono monomorfismo

sse se e somente se

LISTA DE SÍMBOLOS

\wedge	conectivo lógico “conjunção”
\Rightarrow	conectivo lógico “condição”
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais
\emptyset	conjunto vazio
■	“como quisemos demonstrar”
\amalg_A^n	coproduto n-ário do conjunto A em Set
*	composição horizontal de transformações naturais
ι_A	identidade de A
\cap	intersecção de conjuntos
\leftrightarrow	isomorfismo
\hookrightarrow	monomorfismo
\twoheadrightarrow	morfismo parcial
$\circ_{\mathcal{C}}$	operação de composição na categoria \mathcal{C}
ε	palavra vazia
\exists	quantificador lógico existencial
\forall	quantificador lógico universal
\subseteq	relação de continência
\cong	relação de isomorfismo
\in	relação de pertinência
\cup	união de conjuntos

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Função Parcial (esquerda) e a mesma como um Par de Funções (direita)	29
Figura 2.2: Diagrama Comutativo para Morfismos Parciais	30
Figura 2.3: Diagrama Comutativo para Composição de Morfismos Parciais . .	31
Figura 2.4: Diagrama da Composição com Morfismo Identidade	31
Figura 2.5: Diagrama Comutativo para Associatividade da Composição de Morfismos Parciais	31
Figura 2.6: Diagrama Comutativo de Pré-Produto Fibrado de $\langle g, h_h \rangle$	32
Figura 2.7: Diagrama Comutativo de Pré-Produto Fibrado de $\langle f, m_g \circ m_h \rangle$.	32
Figura 2.8: Diagrama Comutativo	32
Figura 2.9: Categorias 1 e $1 + 1$	33
Figura 2.10: Categorias 2 e $p(2)$	33
Figura 2.11: Categoria $p\langle \{1, 2, 3, \}, \leq \rangle$	33
Figura 2.12: Diagrama Quadrado em uma Categoria com Morfismos Parciais .	35
Figura 2.13: Diagrama da Composição de Morfismos em $p(\mathcal{C}^2)$	36
Figura 2.14: Morfismo em $p(pSet)$	37
Figura 2.15: Morfismo em $pSet$ visto em $p(pSet)$	37
Figura 2.16: Diagramas de $xx \circ xx$ e $xx \circ \iota_A$	37
Figura 2.17: Diagramas de xx e ι_A	38
Figura 2.18: Diagramas de $m \circ xx$ e $m \circ \iota_A$	38
Figura 2.19: Esboço de m e m_2	38
Figura 3.1: Diagrama Comutativo para Categoria das Setas	40
Figura 3.2: Diagrama Comutativo na Categoria Set/Ω^2	40
Figura 3.3: Categoria $\mathcal{G}r$	41
Figura 3.4: Categoria das Setas Parciais	43
Figura 4.1: Diagrama Comutativo para Homomorfismo de Grafos Parciais . .	46
Figura 4.2: Grafos Parciais G (à esquerda) e H (à direita)	46
Figura 5.1: Equalizadores em $\mathcal{P}fn$	50
Figura 5.2: As Quatro Classes de Arestas	51
Figura 5.3: Produto Fibrado de $\langle vv, vf \rangle$	51
Figura 5.4: Produto Fibrado de $\langle \partial'_1, \neg\partial_1 \rangle$	52
Figura 5.5: Pré-produto-fibrado de $\langle \partial'_1, \neg\partial_1 \rangle$ em Set	52
Figura 5.6: Grafo Parcial	53
Figura 5.7: Objeto Domínio do Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$	54
Figura 5.8: Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$	55

Figura 5.9: Exemplo de Produto de Grafos Parciais	56
Figura 5.10: Objeto Terminal em $\mathcal{G}r_p$	57
Figura 5.11: Equalizador em $\mathcal{G}r_p$	57
Figura 5.12: Exemplo de Equalizador em $\mathcal{G}r_p$	58
Figura 5.13: Coproduto em $\mathcal{G}r_p$	59
Figura 5.14: Exemplo de Coproduto em $\mathcal{G}r_p$	59
Figura 5.15: Coequalizador em $\mathcal{G}r_p$	60
Figura 5.16: Exemplo de Derivação de Grafos Parciais	61
Figura 6.1: Autômatos Parciais A (à esquerda) e B (à direita)	65
Figura 6.2: Diagrama para Adjunção $\langle \mathbf{arcos}_p, \eta_1, \mathbf{livre}_T \rangle$	66
Figura 6.3: Diagrama para Adjunção $\langle \mathbf{u}_{classe}, \eta_2, \mathbf{coprod}_4 \rangle$	66
Figura 6.4: Diagrama Comutativo para Spans	67
Figura 6.5: Diagrama Comutativo para Composição de Spans	68
Figura 6.6: Composição Binária de Arestas de Grafos	68
Figura 6.7: Composição de Transições de Autômatos Parciais	69
Figura 6.8: Autômato Resultante da Composição de Spans do Autômato da Figura 6.1	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Composições de $p\langle\{1, 2, 3\}, \leq\rangle$	34
Tabela 4.1: Homomorfismos Totais de G para H	46

LISTA DE DEFINIÇÕES

Definição 2.1: Morfismo Parcial	30
Definição 2.2: Categoria de Morfismos Parciais	30
Definição 3.1: Categoria das Setas	39
Definição 3.2: Categoria das Setas Parciais	42
Definição 4.1: Categoria dos Grafos Parciais	45
Definição 4.2: Grafo Interno	47
Definição 4.3: Categoria de Grafos Internos	47
Definição 4.4: Categoria de Grafos Parciais Internos	48
Definição 5.1: Subdivisão de T em classes	50
Definição 5.2: Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$	54
Definição 5.3: Objeto Terminal em $\mathcal{G}r_p$	56
Definição 5.4: Equalizador em $\mathcal{G}r_p$	57
Definição 5.5: Objeto Inicial	59
Definição 5.6: Coproduto Binário em $\mathcal{G}r_p$	59
Definição 5.7: Coequalizador em $\mathcal{G}r_p$	60
Definição 6.1: Funtor \mathbf{arcos}_p	64
Definição 6.2: Funtor \mathbf{coprod}_4	64
Definição 6.3: Categoria $\mathcal{A}ut_p$	64
Definição 6.4: Span	67
Definição 6.5: Categoria de Spans	67
Definição 6.6: Composição Binária de Arestas	68
Definição 6.7: Composição de Transições de Autômatos Parciais	69
Definição 6.8: Computações Finitas de Autômato Parcial	70

LISTA DE TEOREMAS

Teorema 2.1: $p\mathcal{C}$ é Categoria	31
Teorema 2.2: Diagrama Quadrado em $p\mathcal{C}$	34
Teorema 2.3: Produto de Categoria Parcial	35
Teorema 2.4: Preservação de colimites por \mathbf{inc}_p	36
Teorema 2.5: \mathbf{inc}_p não preserva limites	36
Teorema 2.6: $p(pSet)$ é isomorfo a $pSet$	36
Teorema 2.7: Endomorfismos em $p\mathcal{C}$	37
Teorema 2.8: Monomorfismos em $p\mathcal{C}$	37
Teorema 2.9: Categoria Parcial de uma Categoria Parcial	38
Teorema 3.1: Transformação Natural na Categoria das Setas	41
Teorema 3.2: Propriedade Universal da Categoria das Setas	42
Teorema 3.3: Herança de (Co)Limites na Categoria das Setas	42
Teorema 3.4: Colimites na Categoria das Setas Parciais	44
Teorema 4.1: Bicompletude de $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$	47
Teorema 4.2: Cocompletude de $\mathcal{G}r_p(\mathcal{C})$	48
Teorema 5.1: Propriedades das Classes de T	50
Teorema 5.2: Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$	54
Teorema 5.3: $\mathcal{G}r_p$ é cocompleta	58
Teorema 6.1: Bicompletude de $\mathcal{A}ut_p$	65

RESUMO

O conceito de parcialidade é importante em diversas áreas como a Matemática e a Ciência da Computação; ele pode ser utilizado, por exemplo, para expressar computações que não terminam e para definir funções recursivas parciais. Com relação a grafos, categorias de homomorfismos parciais são comuns (por exemplo, em gramáticas de grafos com a técnica de *single-pushout*). Este trabalho propõe uma abordagem diferente: a parcialidade é usada na estrutura interna dos objetos (não nos morfismos). Isto é feito utilizando uma extensão do conceito de Categoria das Setas, chamada de Categoria das Setas Parciais. É definida então a categoria $\mathcal{G}r_p$ de grafos parciais (tais que arcos podem possuir ou não vértices de origem e/ou destino) e homomorfismos totais. A generalização deste modelo resulta em categorias de grafos parciais internos. É mostrado que $\mathcal{G}r_p$ é bicompleta e, se \mathcal{C} é um topos, a categoria dos grafos parciais internos a \mathcal{C} é cocompleta. Grafos parciais podem ser utilizados para definir modelos computacionais tais como autômatos. Uma categoria de Autômatos Parciais, denominada $\mathcal{A}ut_p$, é construída a partir da categoria de Grafos Parciais. Usando uma extensão de composição de spans de grafos para autômatos, chamada de Composição de Transições, é possível definir as computações de autômatos. Brevemente, uma composição de transições de dois autômatos parciais resulta em um autômato parcial onde cada transição representa um caminho de tamanho dois (entre vértices), tal que a primeira metade é uma transição do primeiro autômato e a segunda metade é uma transição do segundo. É possível compor um autômato consigo mesmo diversas vezes; no caso de n sucessivas composições de transições, pode-se obter as palavras da linguagem aceita pelo autômato que necessitam de $n + 1$ passos de computação nos arcos que não possuem origem e nem destino definidos do autômato parcial resultante.

Palavras-chave: Grafos parciais, modelos categoriais, teoria dos autômatos, grafos parciais internos.

Categories of Partial Graphs with Total Homomorphisms: Theory and Applications

ABSTRACT

The concept of partiality is important in several areas such as Mathematics and Computer Science; for example, it can be used to express computations that don't terminate, to define partial recursive functions. In the context of graphs, categories of partial graphs homomorphisms are usual (for instance, graph grammars with single-pushout approach). This work proposes a different approach: partiality is used in the internal structure of objects (not in the morphisms). This is done using an extension of the concept of Comma Categories, named Partial Comma Category. We define the category $\mathcal{G}r_p$ of partial graphs (arcs with or without source/target nodes) and total morphisms. The generalization of the framework results in categories of internal partial graphs. We show that $\mathcal{G}r_p$ is bicomplete and, if \mathcal{C} is a topos, the category of internal partial graphs of \mathcal{C} is cocomplete. Partial graphs can be used to define computational models like automata. A category of Partial Automata, named $\mathcal{A}ut_p$ is constructed over the category of Partial Graphs. Using an extension of Span Composition of graphs to automata, named Composition of Transitions, is possible to define the computations of automata. Briefly, a composition of transitions of two partial automata results in a partial automata where each edge represents a path of length two (between nodes), which first half is some edge of the first automaton and which second half is some edge of the second one. It is possible to compose the same automaton with itself several times; in the case of n successive compositions of transitions, we can obtain all the words of its accepted language whose needs $n + 1$ steps of computation in the arcs of the partial automaton that don't have source neither target.

Keywords: partial graphs, categorical models, automata theory, internal partial graph.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Parcialidade e Morfismos Parciais

Parcialidade é um conceito extremamente usual em diversas áreas do conhecimento. Dentro da Matemática e da Ciência da Computação podemos visualizar este conceito em diversas situações. A representação numérica dos computadores, composta de seqüências de bits, na realidade simula apenas parte do que se deseja quando se representa, por exemplo, o conjunto dos números reais. A Máquina de Turing em sua função programa, é definida como uma função parcial, as Funções Turing-Computáveis nada mais são do que as Funções Recursivas Parciais (DIVERIO; MENEZES, 1999) (sendo que é justamente o fato deste tipo de função ser parcial que a torna um modelo com o mesmo poder computacional que a Máquina de Turing). Uma simples operação de divisão é definida parcialmente sobre o conjunto dos números racionais. Em geral, a noção de composição é parcial, como em composição de funções, de relações e, em especial, na definição de categoria tem-se que a composição é uma operação parcial sobre a coleção de morfismos. Segundo (MOGGI, 1988a), funções parciais aparecem naturalmente em várias teorias matemáticas relevantes à Ciência da Computação, tais como álgebra e teoria dos domínios. Em álgebra, funções parciais ocorrem em relação a álgebras parciais, e (em especificação algébrica) são utilizadas para modelar operações que podem causar uma exceção abortiva, ou em conexão com “equivalência comportamental”. Na teoria dos domínios, funções parciais são modificadas como funções contínuas totais entre espaços de elementos parciais.

A Teoria das Categorias vem se tornando uma ferramenta útil para a formalização de conceitos abstratos facilitando a construção de provas e a investigação de propriedades em diversas áreas, como por exemplo semântica e teoria dos tipos. Construções universais, como limites e adjunções, com relação à composicionalidade de sistemas, têm interpretações úteis. Dentro da Matemática tradicional existem diversos estudos sobre parcialidade, porém em estudos tipicamente categoriais o volume de trabalhos é menor.

Dentro da Teoria das Categorias a noção de parcialidade é dada pelo conceito de *morfismo parcial*, que pode ser visto como a generalização de função parcial. Além disso, segundo (ASPERTI; LONGO, 1991), a principal conexão metodológica entre Teoria das Categorias e Teoria de Linguagens de Programação é o fato de que ambas são essencialmente “teorias de funções”.

Foram encontrados diversos artigos relacionados ao estudo de morfismos parciais e de aplicações. Di Paola e Heller (PAOLA; HELLER, 1987) apresentaram “Dominical Categories”, em um estudo abstrato da teoria da recursão, capturando

axiomaticamente a idéia de uma categoria de morfismos parciais. Também, Plotkin (PLOTKIN, Stanford: C.S.L.I. Summer School, 1985) descreveu porque as funções contínuas de Scott entre ordens parciais completas são parciais e utilizou categorias parciais para fins da semântica denotacional. Robinson e Rosolini (ROBINSON; ROSOLINI, 1988) descrevem algumas aproximações para formalizar o conceito de categorias de morfismos parciais. Enquanto que Fiore em sua tese de doutorado (FIORE, 1994) estuda Teoria Axiomática de Domínios em categorias de morfismos parciais, mostrando que, uma vez que parcialidade é dada como uma primitiva, é possível derivar uma noção de aproximação.

Morfismos Parciais foram relacionados com a Teoria dos Topos, Rosolini (ROSOLINI, 1986), em sua tese de doutorado “Continuity and Effectiveness in Topoi”, baseia-se que a teoria da recursão além de concentrar a idéia de “computação” deve também representar a “efetividade”, geralmente descartada, embora sabendo que qualquer computação mecanizável seja efetiva. Argumenta também que é necessário representar as possibilidades de falhas, ou seja, uma computação deve divergir para alguma entrada. Portanto, a teoria também deve incluir a noção de parcialidade. Defende que no tratamento de computações é conveniente e instrutivo ter uma atitude intuicionista e por isso, a aproximação feita utiliza a teoria dos topos, pois acredita ser a melhor ligação entre teoria das categorias e intuicionismo. Além disso, todo objeto em um topos possui uma seta parcial classificadora, isto é, em um topos todos morfismos parciais são representáveis (GOLDBLATT, 1983). A linguagem interna de um topos para setas parciais é estendida em (PHOA, 1992). Embora elas não apareçam explicitamente na linguagem, afirma que é seguro argumentar sobre elas, uma vez que podem ser definidas na linguagem de forma natural.

Em Barry Jay (JAY, 1990), tem-se que setas parciais são naturalmente ordenadas de acordo com sua “extensão” de definição e que construções sobre morfismos parciais deveriam preservar esta ordem, isto é, se os componentes ou módulos em uma construção (por exemplo, pareamento ou composição) “tornam-se mais definidos”, então a construção também “se torna mais definida”. O artigo trata do Princípio da Modularidade e argumenta que, para tal, setas parciais devem ser vistas como morfismos de uma categoria ordenada e que a teoria dos limites deve ser vista neste contexto (a teoria dos limites é inadequada para categorias ordenadas, desde que mesmo se os limites usuais existem, suas construções irão violar esta ordem).

Segundo (MOGGI, 1988b) o propósito da semântica de linguagens de programação é caracterizar tipos de dados (e funções sobre estes) de forma independente a qualquer mecanismo de representação e devido a isto utiliza-se com frequência uma abordagem categorial através de propriedades universais. Porém o conceito de parcialidade muitas vezes é ignorado no contexto categorial e, portanto, neste artigo é dada a noção de Categoria Cartesiana Fechada Parcial (CCFP) utilizada para construir tipos de dados parciais, ou seja, tipos de dados que contenham mapeamentos parciais, assim como (MULRY, 1992, 1994), porém este último dá ênfase não tanto a morfismos parciais, mas em setas parciais classificadoras.

1.2 Grafos e Grafos Parciais

A estrutura de grafos tem uso em diversas áreas dentro da Ciência da Computação: podem ser usados como tipos abstratos de dados, no estudo de Redes de Computadores para determinar rotas de transmissão de pacotes, no estudo de

modelos de sistemas e composição entre estes, etc. Deste último tópico pode-se citar diversos modelos baseados em grafos como, por exemplo, autômatos (HOPCROFT, 1979; ADAMEK; TRNKOVA, 1990), Redes de Petri (PETERSON, 1981; MESEGUER; MONTANARI, 1990; MENEZES, 2000), autômatos não-sequenciais (MENEZES, 1997).

Com relação a sistemas baseados em grafos e parcialidade grande parte dos trabalhos relacionados utilizam a parcialidade nos morfismos da categoria de grafos, como é o caso em (KENNAWAY, 1991), que utiliza morfismos parciais em uma categoria de grafos (totais) para a reescrita destes ser por meio da técnica de *single pushout*. Em (KORFF, 1992, 1993) define-se grafos onde as operações de origem e destino das arestas são relações, mas restringe-se a somente relações totais. Neste trabalho também são usados homomorfismos parciais de grafos (e neste caso estruturas algébricas mais elaboradas) para tratar do *single pushout*.

Como dito anteriormente, Redes de Petri podem ser consideradas estruturas baseadas em grafos. Em (MENEZES, 2000, 1998) tem-se uma categoria de Redes de Petri parciais com homomorfismos parciais que satisfaz a composicionalidade diagonal com relação a composição paralela e a reificação. Estas Redes de Petri parciais são definidas sobre categoria de grafos estruturados e “transições parciais” são interpretadas como fontes e/ou sumidouros.

Neste trabalho a parcialidade foi utilizada não nos morfismos da categoria, mas na estrutura interna dos objetos desta, resultando em Grafos Parciais. O termo “grafo parcial” é encontrado frequentemente na literatura no sentido de um subgrafo com todos os vértices do grafo original (PREPARATA; YEH, 1973), porém o sentido que se empregará aqui é o de grafos com função de origem e destino parciais. Esse sentido já fora anteriormente definido em (SCHMIDT; STRÖHLEIN, 1993), página 83. Em (SCHMIDT, 1981a,b) grafos parciais foram utilizados para controle de fluxo de programas, porém os homomorfismos destes grafos são definidos através de uma relação de continência entre relações, diferentemente dos homomorfismos tratados aqui.

1.3 Trabalho Correlato

O presente trabalho tem forte relação com o trabalho desenvolvido pelo mestrando Marnes Augusto Hoff dentro do mesmo grupo de pesquisa e também sob orientação do professor Paulo Blauth Menezes. Enquanto que este trabalho parte da estrutura de morfismos parciais, a dissertação “Grafos Internos e Multirrelações como “Spans” — Propriedades e Composicionalidade” tem foco em *spans*, que são pares de morfismos mais gerais do que os morfismos parciais (de fato, um morfismo parcial é um tipo específico de *span*). Ambos os trabalhos tratam sobre a composicionalidade de *spans* empregada em estruturas como grafos e autômatos, porém com enfoques diferenciados. Aqui, a composicionalidade de *spans* será utilizada para definir computações em Autômatos Parciais: estrutura esta definida ao longo da dissertação.

1.4 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo definir, através de modelos categoriais, uma estrutura de grafos que tenham parcialidade em sua estrutura interna e apresentar

aplicações desta. Dentre os objetivos específicos, podemos dividi-los em dois grupos:

Teoria – resultados teóricos a serem alcançados.

- Encontrar ou desenvolver resultados com relação a categorias de morfismos parciais necessários ao desenvolvimento do objetivo principal;
- Investigar um modo de construção de categorias com estruturas parciais nos objetos tendo em vista herança de resultados;
- Instanciar a construção do item anterior para definir uma Categoria de Grafos Parciais com Homomorfismos Totais;
- Investigar propriedades desta categoria, como bicompletude.

Aplicações – aplicações dos resultados anteriores no contexto da Ciência da Computação.

- Definir Grafos Parciais Internos;
- Mostrar interpretações computacionais de operações de limites e colimites da categoria de Grafos Parciais;
- Utilizar a categoria de Grafos Parciais para definir uma categoria de Autômatos Parciais herdando propriedades;
- Utilizar composição de *spans* (como em (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004)) para dar semântica a estes.

1.5 Organização do Texto

No próximo capítulo desse documento são abordados morfismos parciais: conceito, exemplos, propriedades e aplicações. O conceito de morfismo parcial foi o ponto de partida da pesquisa documentada aqui e a partir dele pôde-se definir as estruturas parciais abordadas no texto. O capítulo 3 é a respeito de Categoria das Setas: definição e propriedades e a proposição de uma extensão desse conceito para utilizar parcialidade. Categorias das Setas e a sua extensão aqui definida – Categoria das Setas Parciais – é a construção que permite a definição de categorias como grafos e autômatos herdando importantes propriedades categoriais. No capítulo 4 está a definição da categoria de Grafos Parciais e categorias de grafos parciais internos. No capítulo 5 encontra-se a prova da bicompletude da categoria de Grafos Parciais com Homomorfismos Totais, juntamente com exemplos e interpretações do resultado das operações de limites e colimites. O capítulo 6 apresenta uma aplicação de Grafos Parciais, utilizando-os para definir uma categoria de um tipo diferente de autômatos, nomeados aqui por autômatos parciais, para a qual se verifica os resultados do capítulo 5. Neste capítulo também é utilizado o conceito de composição de *spans* para calcular as computações de um autômato. Por último, tem-se o capítulo de conclusões e trabalhos futuros que surgiram conforme o andamento deste.

2 MORFISMOS PARCIAIS

Neste capítulo são abordados conceito, exemplos e aplicações de morfismos parciais e categorias de morfismos parciais. Inicia pela seção onde estão as definições tanto de morfismos parciais quanto de categoria de morfismos parciais, sendo, após, apresentados exemplos simples destes conceitos para um melhor entendimento dos mesmos. A seguir são apresentadas propriedades a respeito, principalmente, de categorias de morfismos parciais, muitas das quais importantes para o desenvolvimento de capítulos posteriores.

2.1 Conceito

A definição de morfismos parciais vem da generalização do conceito de função parcial. Na figura 2.1 (esquerda) podemos ver uma função parcial f do conjunto A para o conjunto B . A mesma função parcial pode ser vista como duas funções totais como na figura 2.1 (direita). Na realidade, uma função parcial qualquer $f : A \rightarrow B$ pode ser vista como um par de funções totais, para isto, é necessário um conjunto $D \subseteq A$ tal que $(\forall a \in A)[f(a) \text{ é definida} \Rightarrow a \in D]$. Assim, pode-se definir f da seguinte maneira:

- i. uma função (inclusão) $m : D \rightarrow A$, onde cada elemento de D é levado ao seu correspondente em A ;
- ii. a função $f : D \rightarrow B$.

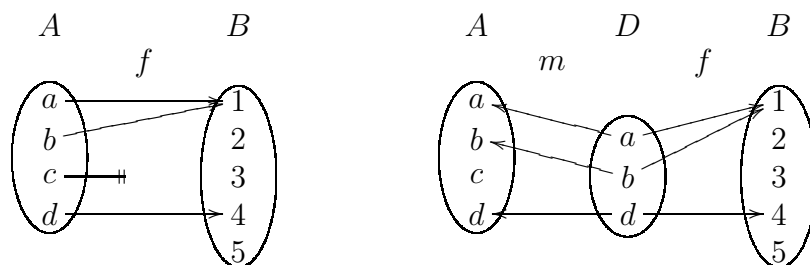


Figura 2.1: Função Parcial (esquerda) e a mesma como um Par de Funções (direita)

Note que pode haver mais de um conjunto D que satisfaça a descrição acima, logo, tem-se vários pares de funções representando a mesma.

As definições de morfismos parciais e de categorias de morfismos parciais a seguir seguem a abordagem de (ASPERTI; LONGO, 1991; BARR; WELLS, 1995).

Definição 2.1 (Morfismo Parcial) *Considere uma categoria qualquer \mathcal{C} . Um morfismo parcial em \mathcal{C} é uma classe de equivalência de pares de morfismos da forma $\langle m : D_f \rightrightarrows A, f : D_f \rightarrow B \rangle$, determinada pela relação $\langle m : D_f \rightrightarrows A, f : D_f \rightarrow B \rangle \text{parc} \langle m' : D_{f'} \rightrightarrows A, f' : D_{f'} \rightarrow B \rangle$ se e somente se existe um isomorfismo $iso : D_f \rightarrow D_{f'}$ tal que o diagrama ilustrado na figura 2.2 comuta.*

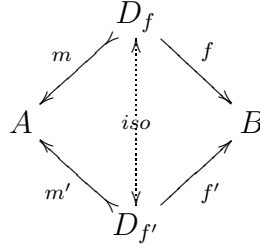


Figura 2.2: Diagrama Comutativo para Morfismos Parciais

Na realidade, um morfismo parcial é um tipo especial de *span*, conceito que será introduzido posteriormente na seção 6.2.1.

Todo \mathcal{C} -morfismo $f : A \rightarrow B$ pode ser representado como um morfismo parcial $[\langle \iota_A : A \rightarrow A, f : A \rightarrow B \rangle] : A \rightarrow B$.

Suponha o morfismo parcial $[\langle m, f \rangle] : A \rightarrow B$ onde $\langle m : D_f \rightrightarrows A, f : D_f \rightarrow B \rangle$ é um elemento representativo da classe. Então $[\langle m, f \rangle]$ é denotado também por:

- $\langle m, f \rangle : A \rightarrow B$,
- $f : A \leftarrow D_f \rightarrow B$,
- $A \xleftarrow{m} \xrightarrow{f} B$,
- $f : A \dashrightarrow B$, ou simplesmente
- $f : A \rightarrow B$ quando é claro que se trata de um morfismo parcial.

Tendo-se a definição de morfismos parciais, é possível construir uma categoria que utilize esta construção como base. Obtém-se, então, uma categoria com morfismos parciais a partir de uma categoria de origem; os objetos continuam os mesmos da categoria original, os morfismos é que “perderão” a noção de “totais” para se tornarem estruturas parciais.

Definição 2.2 (Categoria de Morfismos Parciais) *Considere a Categoria $\mathcal{C} = \langle Ob_{\mathcal{C}}, Mor_{\mathcal{C}}, \partial_0, \partial_1, \iota, \circ \rangle$ com todos os produtos fibrados. A categoria de morfismos parciais em \mathcal{C} denotada por $p\mathcal{C} = \langle Ob_{p\mathcal{C}}, Mor_{p\mathcal{C}}, \partial_{0_{p\mathcal{C}}}, \partial_{1_{p\mathcal{C}}}, \iota_{p\mathcal{C}}, \circ_{p\mathcal{C}} \rangle$ onde $Mor_{p\mathcal{C}}, \partial_{0_{p\mathcal{C}}}, \partial_{1_{p\mathcal{C}}}$ são determinados pela definição de morfismos parciais em \mathcal{C} e a composição de dois morfismos $f = \langle m_f, f \rangle : A \rightarrow B$, $g = \langle m_g, g \rangle : B \rightarrow C$ é $g \circ_{p\mathcal{C}} f = \langle m_f \circ m'_g, g \circ f' \rangle : A \rightarrow C$ determinada pelo produto fibrado como o ilustrado no diagrama comutativo da figura 2.3.*

Esta definição é encontrada, por exemplo, em (ASPERTI; LONGO, 1991). Porém a prova de que $p\mathcal{C}$ constitui, de fato, uma categoria é omitida. Para deixar este trabalho completo e auto-contido, desenvolveu-se a prova a seguir.

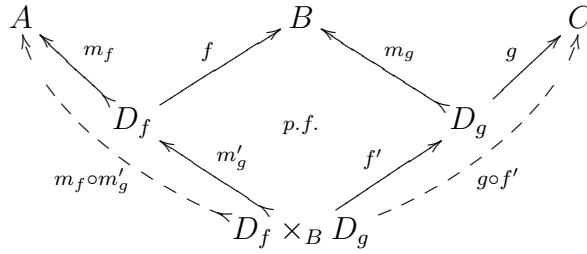


Figura 2.3: Diagrama Comutativo para Composição de Morfismos Parciais

Teorema 2.1 ($p\mathcal{C}$ é Categoria) *Considere a categoria \mathcal{C} , então $p\mathcal{C} = \langle Ob_{\mathcal{C}}, Mor_{p\mathcal{C}}, \partial_{0_{p\mathcal{C}}}, \partial_{1_{p\mathcal{C}}}, \iota_{p\mathcal{C}}, \circ_{p\mathcal{C}} \rangle$ é, de fato, categoria.*

Prova: [Propriedade da Identidade] Considere $f = \langle m_f, f \rangle : A \rightarrow B$ um morfismo parcial qualquer, a composição $f \circ_{p\mathcal{C}} \iota_A$ é mostrada na figura 2.4.

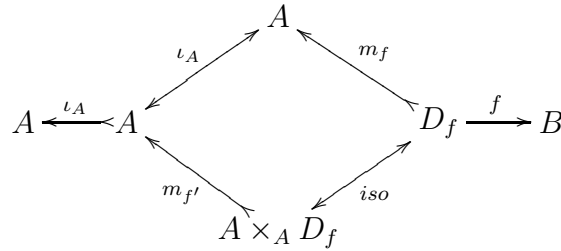


Figura 2.4: Diagrama da Composição com Morfismo Identidade

Sabe-se que produtos fibrados transferem isomorfismo, logo, $f \circ_{p\mathcal{C}} \iota_A = \langle m_f, f \rangle$. O mesmo ocorre em $\iota_B \circ_{p\mathcal{C}} f$. Portanto, $\iota_B \circ_{p\mathcal{C}} f = f \circ_{p\mathcal{C}} \iota_A = \langle m_f, f \rangle$.

[Associatividade da Composição] Considere os morfismos parciais $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow X$ e $h : X \rightarrow Y$, $(h \circ g) \circ f$ está na parte superior do diagrama na figura 2.5 e é referido como P_1 , e $h \circ (g \circ f)$ está na parte inferior (referido como P_2).

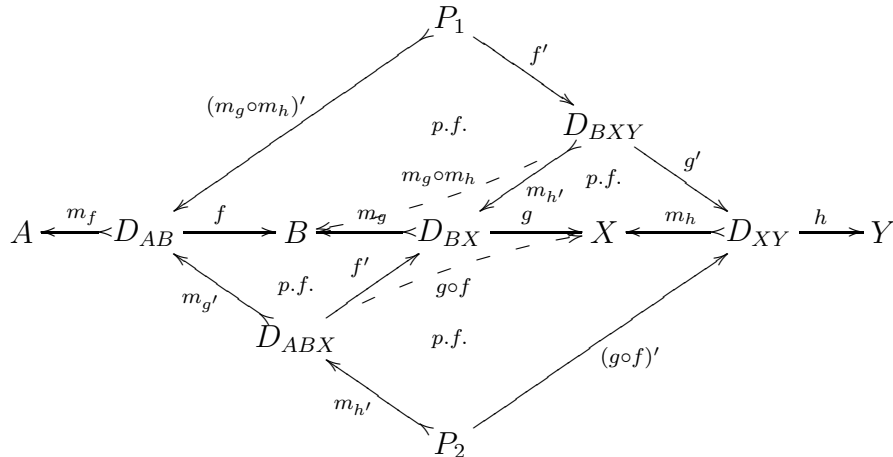


Figura 2.5: Diagrama Comutativo para Associatividade da Composição de Morfismos Parciais

Pode-se notar que $\langle P_2, f' \circ m_{h'}, (g \circ f)' \rangle$ é pré-produto fibrado de $\langle g, m_h \rangle$ como mostrado na figura 2.6. Portanto, existe uma seta única $p : P_2 \rightarrow D_{BXY}$ tal que o diagrama da figura 2.6 comuta.

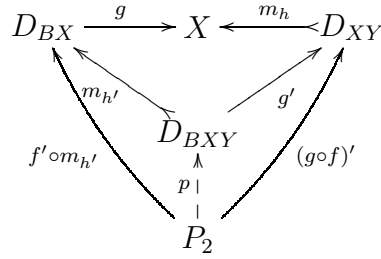


Figura 2.6: Diagrama Comutativo de Pré-Produto Fibrado de $\langle g, h_h \rangle$

A partir da seta p é evidente que $\langle P_2, m_{g'} \circ m_{h'}, p \rangle$ é pré-produto fibrado de $\langle f, m_g \circ m_h \rangle$ como mostrado na figura 2.7.

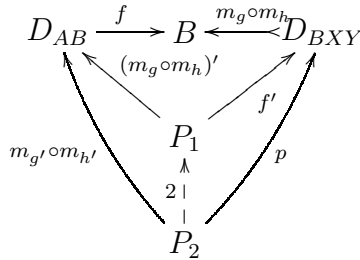


Figura 2.7: Diagrama Comutativo de Pré-Produto Fibrado de $\langle f, m_g \circ m_h \rangle$

Então, existe uma seta única $2: P_2 \rightarrow P_1$ comutando o diagrama. Analogamente, existe uma seta única $1: P_1 \rightarrow P_2$, resultando no diagrama da figura 2.8.

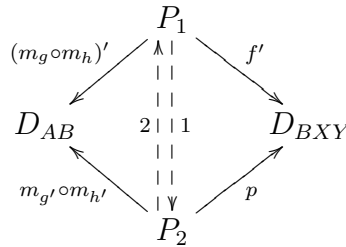


Figura 2.8: Diagrama Comutativo

Na figura 2.8 tem-se que $(m'_g \circ m'_h) \circ 1 = (m_g \circ m_h)'$ e $f' \circ 2 = p$. Pode-se dizer que $\langle P_1, (m_g \circ m_h)' \circ 2 \circ 1, f' \circ 2 \circ 1 \rangle$ é pré-produto fibrado de P_1 . Conseqüentemente existe um morfismo único $u: P_1 \rightarrow P_1$ tal que $f' \circ u = f' \circ 2 \circ 1$ e $(m_g \circ m_h)' \circ u = (m_g \circ m_h)' \circ 2 \circ 1$, levando a $u = 2 \circ 1$. Adicionalmente, tem-se que $f' \circ u = f' \circ 2 \circ 1 = p \circ 1 = f' = f' \circ \iota_{P_1}$, i.e., $f' \circ u = f' \circ \iota_{P_1}$ e, do mesmo modo, $(m_g \circ m_h)' \circ u = (m_g \circ m_h)' \circ \iota_{P_1}$. Pela unicidade de u tem-se que $u = 2 \circ 1 = \iota_{P_1}$. A prova de que $1 \circ 2 = \iota_{P_2}$ é análoga. Pode-se concluir que P_1 é isomorfo a P_2 . ■

2.2 Exemplos

Os exemplos de Categorias de Morfismos Parciais criados e apresentados a seguir e algumas aplicações destes ou resultados encontrados têm como finalidade apresentar um apanhado geral do que se obteve sobre morfismos parciais para, posteriormente, ter noções de sua aplicação e onde encontrar referências sobre o assunto.

Como exemplos iniciais, vamos obter a categoria dos morfismos parciais de algumas categorias pequenas.

Exemplo 2.1 ($p(\emptyset)$) *A categoria dos morfismos parciais de $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$ é a própria.*

Exemplo 2.2 ($p(1), p(1+1), p(2)$) *Supondo as categorias 1 e $1+1$ representadas no diagrama da Figura 2.9 à esquerda e à direita respectivamente. As categorias de morfismos parciais destas são as próprias. Já a categoria 2 representada na Figura 2.10 à esquerda tem como $p(2)$ a categoria representada na mesma figura à direita, onde*

- $\iota_A = \langle \iota_A, \iota_A \rangle$, $f = \langle \iota_A, f \rangle$, $f^- = \langle f, \iota_A \rangle$, $ff = \langle f, f \rangle$ e $\iota_B = \langle \iota_B, \iota_B \rangle$;
- $ff \circ f = f$, $f^- \circ ff = f^-$, $ff \circ ff = ff$, $f \circ f^- = ff$ e $f^- \circ f = \iota_A$.



Figura 2.9: Categorias 1 e $1+1$

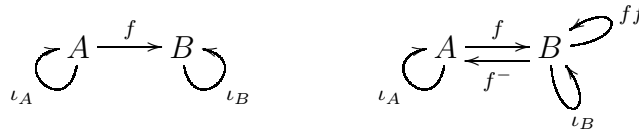


Figura 2.10: Categorias 2 e $p(2)$

É interessante visualizar que, ao construir a categoria de morfismos parciais, são perdidas algumas propriedades da categoria. Podemos ver pelo exemplo que segue.

Exemplo 2.3 (Categoria de Morfismos Parciais de Ordem Parcial) *A partir da ordem parcial $\langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle$ vista como uma categoria, a categoria de morfismos parciais desta é ilustrada na Figura 2.11 e as suas composições são conforme a tabela 2.1.*

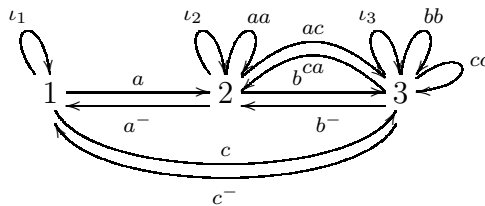


Figura 2.11: Categoria $p(\langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle)$

É simples notar que, ao fazer a categoria dos morfismos parciais de $\langle \{1, 2, 3\}, \leq \rangle$ o objeto terminal não foi preservado.

Tabela 2.1: Composições de $p\langle\{1, 2, 3\}, \leq\rangle$

o	a	a ⁻	aa	ac	b	b ⁻	bb	c	c ⁻	cc	ca
a	-	aa	-	-	-	-	-	-	ca	-	-
a ⁻	ι_1	-	a ⁻	-	-	c ⁻	-	-	-	-	c ⁻
aa	a	-	aa	-	-	ca	-	-	-	-	ca
ac	c	-	ac	-	-	cc	-	-	-	-	cc
b	c	-	ac	-	-	bb	-	-	-	-	-
b ⁻	-	-	-	aa	ι_2	-	b ⁻	a	-	ca	-
bb	-	-	-	ac	b	-	bb	c	-	cc	-
c	-	ac	-	-	-	-	-	-	cc	-	-
c ⁻	-	-	-	a ⁻	a ⁻	-	c ⁻	ι_1	-	c ⁻	-
cc	-	-	-	ac	ac	-	cc	c	-	cc	-
ca	-	-	-	aa	aa	-	ca	a	-	ca	-

Exemplo 2.4 ($p\mathcal{N}ad$) $\mathcal{N}ad$ é a categoria (com um único objeto) do monóide $\langle\mathbb{N}, +, 0\rangle$ e todos os morfismos são mono. A categoria dos morfismos parciais $p\mathcal{N}ad$ é a categoria (com um único objeto) do monóide $\langle\mathbb{N}^2, \ddagger, \langle 0, 0\rangle\rangle$ tal que \ddagger é definida como (dados $\langle x, y\rangle, \langle w, z\rangle \in \mathbb{N}^2$):

$$\langle x, y\rangle \ddagger \langle w, z\rangle = \begin{cases} \langle x, z + y - w\rangle & \text{se } y > w \\ \langle x, z\rangle & \text{se } y = w \\ \langle x + w - y, z\rangle & \text{se } y < w \end{cases}$$

Uma categoria de morfismos parciais bastante utilizada é a categoria de morfismos parciais de $\mathcal{S}et$, chamada de $p\mathcal{S}et$ ou também $\mathcal{P}fn$.

Exemplo 2.5 ($p\mathcal{S}et$) $p\mathcal{S}et$ é a categoria de morfismos parciais a partir da categoria $\mathcal{S}et$ como em (ASPERTI; LONGO, 1991).

Esta categoria será comumente utilizada durante o desenvolvimento de categorias de estruturas parciais baseadas em conjuntos. Sabe-se, por (MENEZES; HAEUSLER, 2001) que $p\mathcal{S}et$ é bicompleta (sendo $p\mathcal{S}et$ também rotulada como $\mathcal{P}fn$).

2.3 Propriedades

Nessa seção serão discutidas algumas propriedades e demonstrados alguns teoremas a respeito de morfismos parciais e categorias de morfismos parciais. Os teoremas que seguem não foram encontrados na bibliografia pesquisada.

O teorema a seguir é especialmente interessante uma vez que o diagrama quadrado apresentado aparecerá na Categoria de Grafos Parciais que será estudada, sendo que serão utilizados justamente diagramas quadrados em $\mathcal{S}et$ no desenvolvimento de Grafos Parciais.

Teorema 2.2 (Diagrama Quadrado em $p\mathcal{C}$) Considere a categoria $p\mathcal{C}$, os morfismos parciais $f : A \leftarrow D_f \rightarrow B$, $g : B \leftarrow D_g \rightarrow E$, $u : A \leftarrow D_u \rightarrow C$, $v : C \leftarrow D_v \rightarrow E$ são tais que $g \circ_{p\mathcal{C}} f = v \circ_{p\mathcal{C}} u$. Então, existem os morfismos $p : D_f \leftarrow M \rightarrow D_v$, $q : D_u \leftarrow M \rightarrow D_g$ onde o objeto do meio M é único (a menos de isomorfismo) e é tal que o diagrama da figura 2.12 comuta. Além disso, **1** e **2** são produtos fibrados.

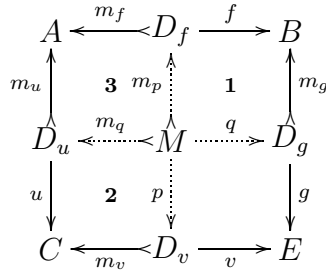


Figura 2.12: Diagrama Quadrado em uma Categoria com Morfismos Parciais

Prova: As composições $g \circ_{p\mathcal{C}} f$ e $v \circ_{p\mathcal{C}} u$ são dadas pelos produtos fibrados em **1** e **2** onde $D_f \times_B D_g$ e $D_u \times_C D_v$ são os objetos do produto fibrado. Tendo-se $g \circ_{p\mathcal{C}} f = v \circ_{p\mathcal{C}} u$, existe um isomorfismo $iso : D_f \times_B D_g \rightarrow D_u \times_C D_v$ sendo assim, os dois objetos representam o objeto do meio M . ■

Observação 2.1 (Diagrama Quadrado em $pSet$) Na figura 2.12, para algumas categorias base, o quadrado **3** (onde todos os morfismos são mono) também é produto fibrado. Por exemplo, em Set , **3** é simultaneamente produto fibrado e soma amalgamada.

Teorema 2.3 (Produto de Categoria Parcial) Dada \mathcal{C} uma categoria qualquer com todos os produtos-fibrados, então $p(\mathcal{C}^2) = (p\mathcal{C})^2$.

Prova: Primeiramente, é importante provar que em \mathcal{C}^2 um morfismo é mono quando os dois componentes do morfismo são mono em \mathcal{C} . Então supondo $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ dois monos em \mathcal{C} , o morfismo $\langle f, g \rangle : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle B, D \rangle$ de \mathcal{C}^2 é mono pois, dado um \mathcal{C}^2 -objeto $\langle X, Y \rangle$ qualquer e dois \mathcal{C}^2 -morfismos $\langle h, k \rangle, \langle j, l \rangle : \langle X, Y \rangle \rightarrow \langle A, C \rangle$ tais que

$$\langle f, g \rangle \circ \langle h, k \rangle = \langle f, g \rangle \circ \langle j, l \rangle;$$

temos que a composição de morfismos em \mathcal{C}^2 é dada pela composição em \mathcal{C} das funções componentes, portanto

$$\langle f \circ h, g \circ k \rangle = \langle f \circ j, g \circ l \rangle;$$

como f e g são mono em \mathcal{C} , podemos “cancelá-los”, tendo-se, então que

$$\langle h, k \rangle = \langle j, l \rangle.$$

Podemos construir um funtor $\mathbf{F} : (p\mathcal{C})^2 \rightarrow p(\mathcal{C}^2)$ tal que dado um $(p\mathcal{C})^2$ -objeto $\langle A, C \rangle$, $\mathbf{F}\langle A, C \rangle = \langle A, C \rangle$ sendo $\langle A, C \rangle$ também um $p(\mathcal{C}^2)$ -objeto e, dado um $(p\mathcal{C})^2$ -morfismo $f = \langle \overleftarrow{a} \overleftarrow{b}, \overleftarrow{c} \overleftarrow{d} \rangle : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle B, D \rangle$ (onde a, b, c, d são morfismos de \mathcal{C}), $\mathbf{F}f = \langle \overleftarrow{a,c} \overleftarrow{b,d} \rangle : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle B, D \rangle$.

Note-se que \mathbf{F} é realmente um funtor pois, dados os $(p\mathcal{C})^2$ -morfismos $f = \langle \overleftarrow{a} \overleftarrow{b}, \overleftarrow{c} \overleftarrow{d} \rangle : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle B, D \rangle$ e $g = \langle \overleftarrow{x} \overleftarrow{y}, \overleftarrow{z} \overleftarrow{w} \rangle : \langle B, D \rangle \rightarrow \langle X, Y \rangle$ tem-se o $(p\mathcal{C})^2$ -morfismo $h = \langle \overleftarrow{a \circ x'} \overleftarrow{y \circ b'}, \overleftarrow{c \circ z'} \overleftarrow{w \circ d'} \rangle = g \circ f$ onde $h : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle X, Y \rangle$. Por outro lado, se compormos em $p(\mathcal{C}^2)$ os morfismos $\mathbf{F}f$ e $\mathbf{F}g$ teremos o diagrama da figura 2.13, ou seja, $\mathbf{F}h$. Logo, $\mathbf{F}(g \circ_{(p\mathcal{C})^2} f) = \mathbf{F}f \circ_{p(\mathcal{C}^2)} \mathbf{F}g$.

$$\begin{array}{ccccc}
\langle A, C \rangle & \xleftarrow{\langle a, c \rangle} M_1 & \xrightarrow{\langle b, d \rangle} & \langle B, D \rangle & \xleftarrow{\langle x, z \rangle} M_2 & \xrightarrow{\langle y, w \rangle} & \langle X, Y \rangle \\
& & \searrow & \uparrow p.f. & \nearrow & & \\
& & \langle x', z' \rangle & \langle B, D \rangle' & \langle b', d' \rangle & &
\end{array}$$

Figura 2.13: Diagrama da Composição de Morfismos em $p(\mathcal{C}^2)$

Da mesma maneira, tem-se o funtor $\mathbf{G} : p(\mathcal{C}^2) \rightarrow (p\mathcal{C})^2$ tal que, dado um $p(\mathcal{C}^2)$ -objeto $\langle A, C \rangle$, $\mathbf{G}\langle A, C \rangle = \langle A, C \rangle$ e, dado um $p(\mathcal{C}^2)$ -morfismo $f = \langle \xleftarrow{a} \xrightarrow{c}, \xleftarrow{b} \xrightarrow{d} \rangle : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle B, D \rangle$, $\mathbf{G}f = \langle \xleftarrow{\langle a, c \rangle} \xrightarrow{\langle b, d \rangle} \rangle : \langle A, C \rangle \rightarrow \langle B, D \rangle$.

É trivial notar que $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \iota_{(p\mathcal{C})^2}$ e $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \iota_{p(\mathcal{C}^2)}$. ■

A seguir podemos ver propriedades com relação à preservação de limites e colimites do funtor inclusão $\mathbf{inc}_p : \mathcal{C} \rightarrow p\mathcal{C}$. Apesar de não preservar limites, o funtor \mathbf{inc}_p preserva colimites dependendo da categoria base.

Teorema 2.4 (Preservação de colimites por \mathbf{inc}_p) *Se \mathcal{C} é um topos, o funtor $\mathbf{inc}_p : \mathcal{C} \rightarrow p\mathcal{C}$ preserva colimites.*

Prova: Em (BARR; WELLS, 2000; PIERCE, 1991) tem-se o teorema que indica que se um funtor tem adjunto direito, então ele preserva colimites. Em (FREYD; SCEDROV, 1990), página 167, tem-se que o funtor \mathbf{inc}_p tem adjunto direito caso \mathcal{C} seja topos. Tendo-se, assim, a condição necessária para a preservação de colimites. ■

Teorema 2.5 (\mathbf{inc}_p não preserva limites) *O funtor $\mathbf{inc}_p : \mathcal{C} \rightarrow p\mathcal{C}$ não preserva limites.*

Prova: Esta proposição é de fácil verificação pelos exemplos 2.2 e 2.3 onde tanto na categoria $p2$ quanto na categoria $p(\{1, 2, 3\}, \leq)$ não há a preservação do objeto terminal (na realidade ambas as categorias não possuem objeto terminal). Também é possível observar tal propriedade ao calcularmos o produto de objetos em $\mathcal{S}et$ e $p\mathcal{S}et$ (note que $\mathcal{S}et$ é topos logo, mesmo com a condição da categoria \mathcal{C} sendo topos sendo satisfeita, \mathbf{inc}_p não preserva limites, diferentemente do caso para colimites). Em $\mathcal{S}et$ o produto categorial é o produto cartesiano, enquanto que em $p\mathcal{S}et$ o produto de dois conjuntos é o produto cartesiano unido com a união disjunta dos conjuntos. Ou seja, o produto em $p\mathcal{S}et$ não é calculado através do produto em $\mathcal{S}et$. ■

Pôde-se notar que, ao “parcializarmos” uma categoria, esta pode permanecer a mesma; foi o que ocorreu com as categorias \emptyset , 1 e $1 + 1$ dos exemplos 2.1 e 2.2. Isto também pode ocorrer com categorias grandes, como na proposição abaixo.

Teorema 2.6 ($p(p\mathcal{S}et)$ é isomorfo a $p\mathcal{S}et$)

Prova: Considere a categoria $p\mathcal{S}et$. Um morfismo qualquer $f : A \rightrightarrows B$ em $p\mathcal{S}et$ pode ser representado por $f = \langle m_f : D_f \rightrightarrows A, f : D_f \rightarrow B \rangle$, onde m_f e f são funções totais (“herdadas” de $\mathcal{S}et$).

Em $p(p\mathcal{S}et)$, qualquer morfismo $f : A \rightrightarrows B$ pode ser visto como mostrado no diagrama da figura 2.14, sendo $\langle m_{1_f}, f \rangle$ e m_{2_f} morfismos em $p\mathcal{S}et$.

$$A \xleftarrow{m_{2f}} D_{2f} \xleftarrow{m_{1f}} D_{1f} \xrightarrow{f} B$$

Figura 2.14: Morfismo em $p(pSet)$

$$A \xleftarrow{\iota_A} A \xleftarrow{m} D \xrightarrow{f} B$$

Figura 2.15: Morfismo em $pSet$ visto em $p(pSet)$

Pode-se definir o funtor $\mathbf{F} : pSet \rightarrow p(pSet)$ tal que $Ob_{pSet} = Ob_{p(pSet)}$ e todo morfismo $f : A \rightarrow B$ de $pSet$ é mapeado no morfismo ilustrado na figura 2.15.

Da mesma forma, pode-se definir o funtor $\mathbf{G} : p(pSet) \rightarrow pSet$ tal que $Ob_{p(pSet)} = Ob_{pSet}$ e todo morfismo $f : A \rightarrow B$ de $p(pSet)$ é levado ao morfismo $\langle m_{1f} \circ m_{2f} : D_{1f} \rightarrow A, f : D_{1f} \rightarrow B \rangle$ (lembrando que a composição de dois monomorfismos em $pSet$ resulta em uma função total).

É trivial que $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \iota_{pSet}$ e, pela relação de equivalência entre morfismos parciais, $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \iota_{p(pSet)}$. ■

De fato, a categoria parcial de uma categoria parcial é a própria, qualquer que seja a categoria base. Isso pode ser comprovado pelos teoremas enunciados a seguir. Os dois primeiros demonstram que não há monomorfismos na categoria $p\mathcal{C}$ que não pertençam a \mathcal{C} , isso faz com que não seja possível a “criação” de novos morfismos parciais a partir de $p\mathcal{C}$. A prova de que $p\mathcal{C} = p(p\mathcal{C})$ é feita por absurdo.

Teorema 2.7 (Endomorfismos em $p\mathcal{C}$) *Qualquer monomorfismo $x : X \rightarrow A$ numa categoria \mathcal{C} que não seja isomorfismo gera um endomorfismo $xx : A \rightarrow A$ na categoria $p\mathcal{C}$ que não é mono.*

Prova: Dado um morfismo qualquer $x : X \rightarrow A$ em \mathcal{C} o qual não é iso. Em $p\mathcal{C}$ haverá o morfismo $xx : A \rightarrow A$ (que é o morfismo parcial $\langle x : X \rightarrow A, x : X \rightarrow A \rangle$) que não é mono, pois

$$xx \circ xx = xx = xx \circ \iota_A$$

(a figura 2.16 ilustra as composições em questão) e xx é diferente de $\iota_A = \langle \iota_A : A \rightarrow A, \iota_A : A \rightarrow A \rangle$. ■

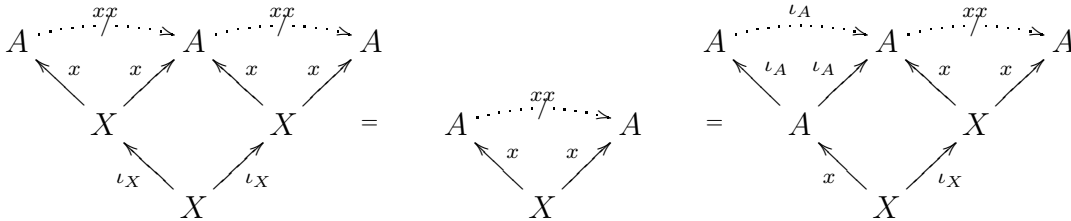


Figura 2.16: Diagramas de $xx \circ xx$ e $xx \circ \iota_A$

Teorema 2.8 (Monomorfismos em $p\mathcal{C}$) *Qualquer morfismo $m : A \rightarrow B$ pertencente à categoria $p\mathcal{C}$ que não pertença à categoria \mathcal{C} não é mono.*

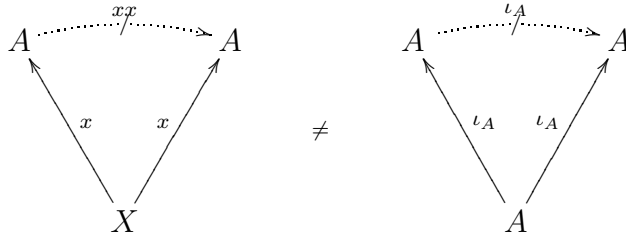


Figura 2.17: Diagramas de xx e ι_A

Prova: Dado o morfismo de $p\mathcal{C}$ $m = \langle x : C \rightarrow A, y : C \rightarrow B \rangle : A \rightarrow B$ onde, em \mathcal{C} , o morfismo x é mono mas não é iso. Então existe em $p\mathcal{C}$ o morfismo $xx = \langle x : C \rightarrow A, x : C \rightarrow A \rangle$ (o qual é diferente de $\iota_A = \langle \iota_A : A \rightarrow A, \iota_A : A \rightarrow A \rangle$) em que

$$m \circ xx = m = m \circ \iota_A$$

(como mostra a figura 2.18). Portanto m não é monomorfismo. ■

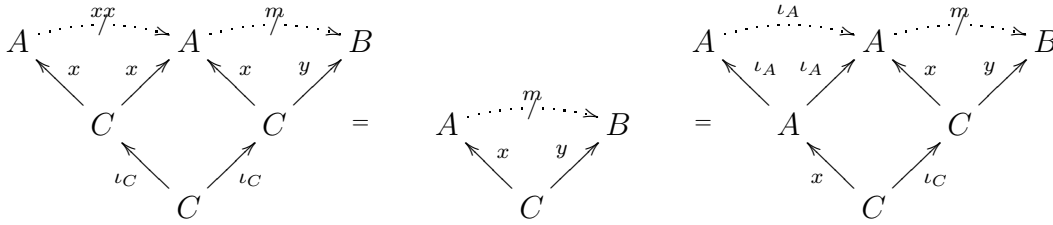


Figura 2.18: Diagramas de $m \circ xx$ e $m \circ \iota_A$

Teorema 2.9 (Categoria Parcial de uma Categoria Parcial) Dada \mathcal{C} uma categoria com todos os produtos fibrados, então, caso $p\mathcal{C}$ tenha todos os produtos fibrados, $p\mathcal{C} \cong p(p\mathcal{C})$.

Prova: A prova será por contradição, supondo $p\mathcal{C} \neq p(p\mathcal{C})$.

Então existe um morfismo m que pertence à categoria $p(p\mathcal{C})$ mas não à $p\mathcal{C}$ onde $m = \langle m_1, m_2 \rangle$ sendo m_1, m_2 morfismos de $p\mathcal{C}$, m_1 é mono porém não é iso (pois, se o fosse, o morfismo m seria equivalente ao morfismo m_2 de $p\mathcal{C}$). Por sua vez, o morfismo m_2 é o morfismo parcial $\langle m_{21}, m_{22} \rangle$ onde m_{21} e m_{22} são morfismos de \mathcal{C} e m_{21} é mono e não iso. Então $m_1 \circ m_{21}$ é um monomorfismo de \mathcal{C} (já que não há monomorfismos em $p\mathcal{C}$ que não pertençam a \mathcal{C} pelo teorema 2.8). Então o morfismo parcial $\langle m_1 \circ m_{21}, m_{22} \rangle = \langle m_1, \langle m_{21}, m_{22} \rangle \rangle = \langle m_1, m_2 \rangle = m$ pertence à $p\mathcal{C}$.

Logo, $p\mathcal{C} = p(p\mathcal{C})$. ■

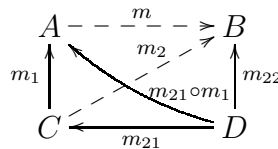


Figura 2.19: Esboço de m e m_2

3 CATEGORIA DAS SETAS PARCIAIS

O conceito de Categoria das Setas assim como exemplos e principais propriedades deste tipo de construção são dados na primeira parte deste capítulo. Utilizando categorias de morfismos parciais introduz-se a definição de Categoria das Setas Parciais que é tratada na segunda metade do capítulo. Tal estrutura permite a definições de estruturas baseadas em funções parciais, dentre estas destacam-se o que denominou-se grafos parciais, que serão tratados no capítulo posterior.

3.1 Categoria das Setas

A construção de categorias a partir de outras é comum dentro da Teoria das Categorias. Na realidade, uma das vantagens desta teoria é justamente a possibilidade de construir estruturas mais complexas a partir de outras simples e conhecidas. Construções deste tipo vêm geralmente ainda com vantagens de herança de propriedades das categorias que serviram de base para a nova, e a construção de Categorias das Setas é um destes tipos de construções de novas categorias. Categoria das Setas (também referenciadas por seu termo em inglês *comma categories*) podem ser utilizadas tanto para a construção de uma categoria de grafos, autômatos, Redes de Petri e outras categorias de sistemas baseados em grafos quanto para a construção de *slice categories* comumente utilizada em estudos relacionados à topologia (GOLDBLATT, 1983).

3.1.1 Conceito e Exemplos

Em (GOLDBLATT, 1983) é dito que “ $\mathcal{C} \downarrow a$ e $\mathcal{C} \uparrow a$ são conhecidas como comma-categories” onde $\mathcal{C} \downarrow a$ é o que aqui chamamos de *slice category* e $\mathcal{C} \uparrow a$ (que aqui notaremos por $a \downarrow \mathcal{C}$) é *counterslice category* como em (FREYD; SCEDROV, 1990). Porém durante este texto iremos utilizar uma definição mais generalizada de categoria das setas como em (MENEZES; HAEUSLER, 2001; BORCEUX, 1994).

Através de Categorias das Setas é possível definir uma nova categoria a partir de outras. Para isso são necessárias três categorias quaisquer \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} e dois funtores $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$. A nova categoria a ser construída terá como objetos essencialmente morfismos da categoria \mathcal{C} (morfismos que relacionam objetos “vindos” de \mathcal{A} com objetos “vindos” de \mathcal{B}). Os mapeamentos destes objetos são na realidade pares de morfismos das categorias \mathcal{A} e \mathcal{B} . Durante o texto que segue, comumente as categorias \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} serão referenciadas com o termo *categorias base*.

Definição 3.1 (Categoria das Setas) *Sejam $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. A Categoria das Setas $\mathbf{f} \downarrow \mathbf{g}$ é tal que:*

- um objeto S é a tripla $\langle A, f, B \rangle$ onde A é um \mathcal{A} -objeto, B é um \mathcal{B} -objeto e $f : \mathbf{f}A \rightarrow \mathbf{g}B$ é um \mathcal{C} -morfismo;
- um morfismo $h : S_1 \rightarrow S_2$ onde $S_1 = \langle A_1, f_1, B_1 \rangle$ e $S_2 = \langle A_2, f_2, B_2 \rangle$ é um par de morfismos $h = \langle h_A, h_B \rangle$ onde $h_A : A_1 \rightarrow A_2$ é um \mathcal{A} -morfismo e $h_B : B_1 \rightarrow B_2$ é um \mathcal{B} -morfismo e são tais que $f_2 \circ \mathbf{f}h_A = \mathbf{g}h_B \circ f_1$ como no diagrama da figura 3.1;
- a composição de dois morfismos $f = \langle f_A, f_B \rangle : S_1 \rightarrow S_2$ e $g = \langle g_A, g_B \rangle : S_2 \rightarrow S_3$ é dada pela composição dos morfismos componentes, ou seja, $g \circ f = \langle g_A \circ f_A, g_B \circ f_B \rangle : S_1 \rightarrow S_3$.

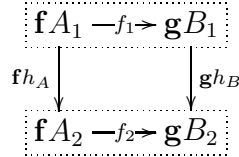


Figura 3.1: Diagrama Comutativo para Categoria das Setas

Para um melhor entendimento dessa construção, seguem-se alguns exemplos comuns de Categorias das Setas.

Exemplo 3.1 Dados os funtores $\mathbf{a}, \mathbf{b} : 1 \rightarrow \mathcal{C}$, onde 1 é a categoria com um único objeto \bullet e seu morfismo identidade e $\mathbf{a}(\bullet) = A$ e $\mathbf{b}(\bullet) = B$ (sendo A e B objetos de \mathcal{C}). A Categoria das Setas $\mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$ é a categoria onde objetos são todas as setas $f : A \rightarrow B$ de \mathcal{C} e morfismos são somente a seta identidade de cada objeto, ou seja, $\mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$ é a categoria discreta dos morfismos de A para B de \mathcal{C} .

Exemplo 3.2 (Categoria \mathbf{Set}/Ω^2) Dados os funtores $\iota_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ e $\mathbf{Omega}^2 : 1 \rightarrow \mathbf{Set}$ onde $\mathbf{Omega}^2(\bullet) = \Omega^2$ sendo Ω o objeto $\{v, f\}$ de \mathbf{Set} . A categoria \mathbf{Set}/Ω^2 é a categoria das setas $\iota_{\mathbf{Set}} \downarrow \mathbf{Omega}^2$.

Um objeto em \mathbf{Set}/Ω^2 é então uma função $m : A \rightarrow \Omega^2$ também denotado por $\langle A, m \rangle$ e um morfismo $f : \langle A, m \rangle \rightarrow \langle B, n \rangle$ é uma função em \mathbf{Set} de A para B tal que o diagrama da figura 3.2 comute. Um elemento do objeto $\langle A, m \rangle$ será representado por $\langle a, \langle p, q \rangle \rangle$ onde $a \in A$ e $p, q \in \{v, f\}$, isto indica que o elemento a é mapeado em $\langle p, q \rangle$ por m .

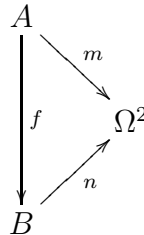


Figura 3.2: Diagrama Comutativo na Categoria \mathbf{Set}/Ω^2

Tendo-se o functor diagonal $\mathbf{\Delta} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^2$ tal que para todo objeto $A \in \mathbf{Obj}_{\mathbf{Set}}$, $\mathbf{\Delta}A = \langle A, A \rangle$ e para toda função $h : A \rightarrow B$, $\mathbf{\Delta}h = \langle h, h \rangle : \langle A, A \rangle \rightarrow \langle B, B \rangle$; podemos definir a categoria dos grafos como a seguir.

Exemplo 3.3 (Categoria $\mathcal{G}r$) $\mathcal{G}r$ é a categoria das setas $\Delta \downarrow \Delta$.

Na figura 3.3 tem-se a visualização desta categoria. Através da definição de Categoria das Setas, podemos ver que um objeto G_1 em $\mathcal{G}r$ é a tripla $\langle T, \langle \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle, V \rangle$ e morfismos são duplas de morfismos $\langle h_T, h_V \rangle : G_1 \rightarrow G_2$ tal que $\langle \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle \circ \langle h_T, h_V \rangle = \langle h_T, h_V \rangle \circ \langle \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle$.

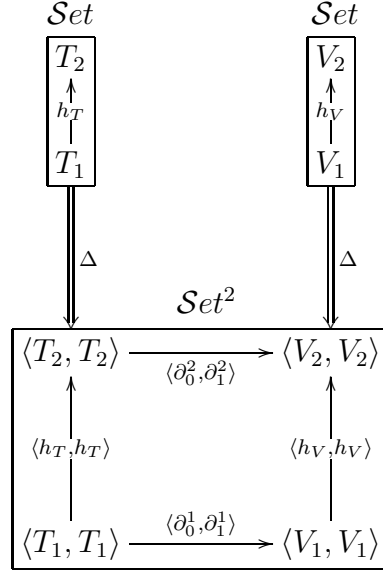


Figura 3.3: Categoria $\mathcal{G}r$

Para construir uma categoria de autômatos por Categoria das Setas é necessária a utilização de dois funtores: $\iota_{\text{Set}} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, o funtor identidade da categoria Set , e o funtor esquecimento **arcos** : $\mathcal{G}r \rightarrow \text{Set}$. **arcos** é tal que, dado um grafo $G = \langle T, \langle \partial_0, \partial_1 \rangle, V \rangle$, **arcos** $G = T$ e dado um homomorfismo de grafos $h = \langle h_T, h_V \rangle : G_1 \rightarrow G_2$, **arcos** $h = h_T$.

Exemplo 3.4 (Categoria $\mathcal{A}ut$) A categoria dos Autômatos $\mathcal{A}ut$ é a categoria das setas **arcos** \downarrow ι_{Set}

Um objeto de $\mathcal{A}ut$ será então a tupla $\langle G, \text{eti}q, \Sigma \rangle$ onde $G = \langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ é um grafo e $\text{eti}q : T \rightarrow \Sigma$ é a função de etiquetagem de arcos do autômato; enquanto que um morfismo em $\mathcal{A}ut$ de um autômato $A_1 = \langle G_1, \text{eti}q_1, \Sigma_1 \rangle$ para o autômato $A_2 = \langle G_2, \text{eti}q_2, \Sigma_2 \rangle$ será o par de funções constituído por um homomorfismo de grafos $h = \langle h_V, h_T \rangle : G_1 \rightarrow G_2$ e um mapeamento de alfabetos $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ onde $\text{eti}q_2 \circ h_T = f \circ \text{eti}q_1$.

3.1.2 Propriedades e Herança de (Co)Limites

Em Categorias das Setas também é satisfeita a chamada Propriedade Universal que é como segue.

Teorema 3.1 (Transformação Natural na Categoria das Setas) *Considere os funtores $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ e a categoria das setas $\mathbf{f} \downarrow \mathbf{g}$. Existem dois funtores $\mathbf{u} : \mathbf{f} \downarrow \mathbf{g} \rightarrow \mathcal{A}$ e $\mathbf{v} : \mathbf{f} \downarrow \mathbf{g} \rightarrow \mathcal{B}$, além disso existe uma transformação natural canônica $\alpha : \mathbf{f} \circ \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{g} \circ \mathbf{v}$.*

Teorema 3.2 (Propriedade Universal da Categoria das Setas) *Tendo-se os funtores, categorias e a transformação natural da proposição 3.1, considere uma categoria \mathcal{D} , dois funtores $\mathbf{u}' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ e $\mathbf{v}' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ e a transformação natural $\alpha' : \mathbf{f} \circ \mathbf{u}' \Rightarrow \mathbf{g} \circ \mathbf{v}'$. Então existe um único funtor $\mathbf{w} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{f} \downarrow \mathbf{g}$ tal que*

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{w} = \mathbf{u}'; \mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \mathbf{v}'; \alpha * \mathbf{w} = \alpha'$$

Prova: As provas de ambas proposições estão em (BORCEUX, 1994), páginas 21 e 22. ■

Porém, uma propriedade que traz muitas vantagens na utilização de Categorias das Setas é a herança de limites e colimites. Através da proposição abaixo, tem-se como saber de forma simples e direta se a Categoria das Setas construída possui (co)limites.

Teorema 3.3 (Herança de (Co)Limites na Categoria das Setas) *Considere os funtores $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ e a categoria das setas $\mathbf{f} \downarrow \mathbf{g}$*

- i. se \mathcal{A} e \mathcal{B} são completas e \mathbf{g} preserva limites, então $\mathbf{f} \downarrow \mathbf{g}$ é completa;*
- ii. se \mathcal{A} e \mathcal{B} são cocompletas e \mathbf{f} preserva colimites, então $\mathbf{f} \downarrow \mathbf{g}$ é cocompleta.*

Prova: A prova está em (CASLEY, 1991), páginas 46 à 48. ■

3.2 Categoria das Setas Parciais

Nesta seção a construção de Categoria das Setas é estendida de maneira a possibilitar a construção de estruturas parciais. A esta extensão dá-se o nome de *Categoria das Setas Parciais*. Tal construção permite a definição de categorias com parcialidade dentro dos objetos tendo-se, por exemplo, a categoria dos grafos parciais $\mathcal{G}r_p$ que será explorada neste trabalho.

3.2.1 Conceito e Exemplos

Uma idéia interessante com relação à utilização de estruturas parciais na Teoria das Categorias é a de estender a definição de Categoria das Setas utilizando morfismos parciais, deste modo foi definida a Categorias das Setas Parciais como a seguir. A diferença estrutural da definição de Categoria das Setas e da Categoria das Setas Parciais é que nessa última é necessária a utilização do funtor inclusão de uma categoria \mathcal{C} para sua categoria de morfismos parciais $p\mathcal{C}$. Justamente por isso a categoria \mathcal{C} deve ser finitamente completa para se garantir a existência de $p\mathcal{C}$. Na figura 3.4 tem-se um diagrama desta construção.

Definição 3.2 (Categoria das Setas Parciais) *Considere a categoria finitamente completa \mathcal{C} e os funtores $\mathbf{inc}_p : \mathcal{C} \rightarrow p\mathcal{C}$ (o funtor inclusão canônica), $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.*

A Categoria das Setas Parciais $p\text{Comma}(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ (ou $\mathbf{f} \downarrow_p \mathbf{g}$) é tal que:

- *objetos são triplas $S = \langle A, s, B \rangle$, onde A é um \mathcal{A} -objeto, B é um \mathcal{B} -objeto e $s : \mathbf{inc}_p \circ \mathbf{f}A \rightarrow \mathbf{inc}_p \circ \mathbf{g}B$ é um $p\mathcal{C}$ -morfismo;*

- um morfismo $h : S_1 \rightarrow S_2$ onde $S_1 = \langle A_1, s_1, B_1 \rangle$, $S_2 = \langle A_2, s_2, B_2 \rangle$ é um par $h = \langle h_A : A_1 \rightarrow A_2, h_B : B_1 \rightarrow B_2 \rangle$ onde h_A e h_B são morfismos em \mathcal{A} e \mathcal{B} respectivamente, e são tais que, em $p\mathcal{C}$:

$$(\mathbf{inc}_p \circ \mathbf{g}h_B) \circ s_1 = s_2 \circ (\mathbf{inc}_p \circ \mathbf{f}h_A)$$

- o morfismo identidade de um objeto $S = \langle A, s, B \rangle$ é $\iota_S = \langle \iota_A : A \rightarrow A, \iota_B : B \rightarrow B \rangle$;
- a composição de $u = \langle u_A, u_B \rangle : S_1 \rightarrow S_2$ e $v = \langle v_A, v_B \rangle : S_2 \rightarrow S_3$ é $v \circ u = \langle v_A \circ_{\mathcal{A}} u_A, v_B \circ_{\mathcal{B}} u_B \rangle : S_1 \rightarrow S_3$

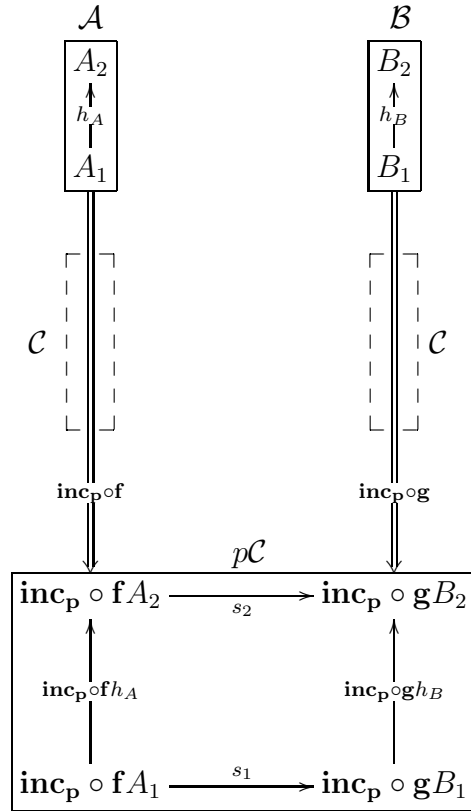


Figura 3.4: Categoria das Setas Parciais

Nota-se que a parcialidade em uma Categoria das Setas Parciais está obrigatoriamente na estrutura interna dos objetos da categoria resultante (podendo estar presente ou não nos morfismos dependendo das categorias base utilizadas). Podemos observar isto através dos exemplos a seguir.

Exemplo 3.5 Dados os funtores $\mathbf{a}, \mathbf{b} : 1 \rightarrow \mathcal{C}$ do exemplo 3.1, a Categoria das Setas Parciais $p\mathbf{Comma}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é a categoria onde objetos são todos os morfismos parciais $f : A \rightarrow B$ de $p\mathcal{C}$ e morfismos são somente a seta identidade de cada objeto.

Exemplo 3.6 Dado o funtor identidade da categoria \mathbf{Set} , $\iota_{\mathbf{Set}}$, a Categoria das Setas Parciais $p\mathbf{Comma}(\iota_{\mathbf{Set}}, \iota_{\mathbf{Set}})$ é a categoria onde objetos são funções parciais e morfismos são pares de funções totais tais que, dados $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ objetos da categoria, $h : f \rightarrow g$ é o par $\langle j : A \rightarrow C, l : B \rightarrow D \rangle$ tal que $l \circ f = g \circ j$.

3.2.2 Herança de Colimites

O teorema a seguir vem a ser uma instanciação do teorema 3.3.

Teorema 3.4 (Colimites na Categoria das Setas Parciais) *Considere a categoria com todos os produtos-fibrados \mathcal{C} , os funtores $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ e a categoria das setas parciais $pComma(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, então se \mathcal{A} e \mathcal{B} são cocompletas, \mathbf{f} preserva colimites e \mathcal{C} é um topos, então $pComma(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ é cocompleta.*

Prova: Pelo teorema 3.3, para $pComma(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ ser cocompleta é necessário que \mathcal{A} e \mathcal{B} sejam cocompletas e $\mathbf{inc}_{\mathbf{p}} \circ \mathbf{f}$ preserve colimites. No teorema 2.4 temos que o funtor $\mathbf{inc}_{\mathbf{p}}$ preserva colimites se \mathcal{C} é topos, o que prova o teorema enunciado. ■

4 GRAFOS PARCIAIS

Neste capítulo encontra-se a definição da categoria de grafos parciais com homomorfismos totais e possíveis interpretações da estrutura dos objetos dessa categoria. Na segunda parte tem-se a definição de grafos parciais internos e um teorema sobre cocompletude destes.

Estruturas baseadas em grafos utilizam a definição de que um grafo é uma estrutura formada por vértices e arcos *entre* vértices (usualmente estes arcos estão ligando dois vértices, mas pode-se encontrar arcos ligando um número maior de vértices como no caso de *hipergrafos* (BERGE, 1989)). A estrutura de grafo definida neste trabalho difere das outras neste ponto: serão definidos grafos parciais, onde arcos podem eventualmente não estar ligando vértices entre si, ou seja, um grafo parcial é um grafo onde arcos podem ter a função de origem e/ou destino indefinida.

4.1 Categoria dos Grafos Parciais: $\mathcal{G}r_p$

Na literatura, na maior parte dos casos, quando utiliza-se estruturas parciais com grafos e categorias, esta parcialidade é usada nos morfismos da categoria de grafos. Tal estrutura categorial é utilizada para empregar a técnica de *single-pushout* em gramáticas de grafos (RAOULT, 1984; LÖWE; EHRIG, 1990; KENNAWAY, 1991). A categoria de grafos parciais aqui definida possui como morfismo homomorfismos *totais* de grafos parciais: a parcialidade está presente na estrutura interna dos objetos, não nos morfismos. Grafos parciais (porém com um tipo diferente de morfismo) foram utilizados em (SCHMIDT, 1981a,b) para modelar fluxo de controle de programas e recursão. A categoria aqui definida, pelo que se sabe, é inédita.

Definição 4.1 (Categoria dos Grafos Parciais) *A categoria dos grafos parciais é a categoria das setas parciais $p\mathcal{Comma}(\Delta, \Delta)$.*

Um objeto em $p\mathcal{Comma}(\Delta, \Delta)$ é $\langle V, T, \langle \partial_0, \partial_1 \rangle \rangle$ onde (sendo $i \in \{0, 1\}$) $\partial_i = \langle m_{D_{\partial_i}} : D_{\partial_i} \rightarrow T, \partial_i : D_{\partial_i} \rightarrow V \rangle$.

Um morfismo entre o objeto $G_1 = \langle V_1, T_1, \langle \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle \rangle$ para o objeto $G_2 = \langle V_2, T_2, \langle \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle \rangle$ é $h = \langle h_V, h_T \rangle$ sendo $h_V : V_1 \rightarrow V_2$, $h_T : T_1 \rightarrow T_2$ morfismos de \mathcal{Set} e são tais que, em $p\mathcal{Set}$ (para $k = \{0, 1\}$):

$$\partial_k^2 \circ h_T = h_V \circ \partial_k^1$$

Nota-se que a igualdade $\partial_k^2 \circ h_T = h_V \circ \partial_k^1$ em $p\mathcal{Set}$ para o morfismo $\langle h_V, h_T \rangle$ equivale ao diagrama em \mathcal{Set} da figura 4.1 comutar. Neste diagrama é possível ver

que $\langle h_V, h_T \rangle$ induz um morfismo $h_D : D_{\partial_k} \rightarrow D_{\partial'_k}$. Por simplicidade, quando não é necessário, nada é dito sobre h_D .

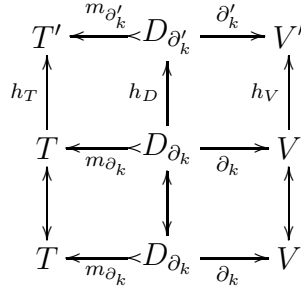


Figura 4.1: Diagrama Comutativo para Homomorfismo de Grafos Parciais

Por simplicidade na notação, um grafo parcial $\langle V, T, \langle \partial_0, \partial_1 \rangle \rangle$ será denotado como $\langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$.

Exemplo 4.1 (Grafos Parciais e Homomorfismo Total de Grafos Parciais)
 Considere os Grafos Parciais $G = \langle \{A, B, C\}, \{a, b, c, d, e, f\}, \partial_0^G, \partial_1^G \rangle$ e $H = \langle \{X, Y\}, \{t, u, v, w, x, y, z\}, \partial_0^H, \partial_1^H \rangle$ onde $\partial_0^G, \partial_1^G, \partial_0^H, \partial_1^H$ são dados através da figura 4.2. Existem, então, quatro Homomorfismos Totais de Grafos Parciais de G para H conforme a tabela 4.1 e não há homomorfismos de H para G .

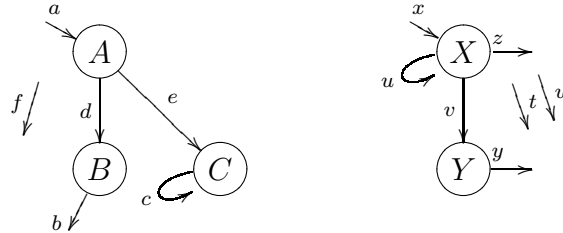


Figura 4.2: Grafos Parciais G (à esquerda) e H (à direita)

Tabela 4.1: Homomorfismos Totais de G para H

origem	h_1	h_2	h_3	h_4
A	X	X	X	X
B	X	X	Y	Y
C	X	X	X	X
a	x	x	x	x
b	z	z	y	y
c	u	u	u	u
d	u	u	v	v
e	u	u	u	u
f	w	t	w	t

Ao vermos um grafo como um modelo de sistema – onde vértices são estados e arcos são ações – é possível pensar no significado dos arcos de um grafo sem origem e/ou sem destino. Arcos sem origem mas com destino em um estado qualquer

podem ser vistos, por exemplo, como uma ação ou um ponto de entrada no sistema ou fonte; assim como arcos sem destino podem ser vistos como uma ação ou um ponto de saída ou sumidouro. Já arcos sem origem e sem destino definidos podem ser interpretados como transações ou simultaneamente fonte e sumidouro (uma espécie de “elemento neutro”).

Neste trabalho é explorada a interpretação de entrada, saída e transação. Com relação a transações esta interpretação fica clara quando se utiliza, por exemplo, composição de *spans* para dar semântica à sistemas baseados em grafos como em (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004) e será melhor esclarecido no capítulo 6. Mas é interessante notar que, vendo as arestas do grafo parcial como ações de um sistema, ações como a e x na figura 4.2 acontecem *antes* de o sistema assumir qualquer estado; e ações como b , z e y acontecem *após* o sistema assumir seu estado de saída. Ações como f , w e t acontecem sem o sistema precisar assumir nenhum estado.

4.2 Grafos Parciais Internos

Nesta seção será apresentada a definição de Grafos Internos para, logo em seguida, extê-la para Grafos Parciais Internos. Grafos Internos serão apresentados como em (MENEZES, 1997).

Um grafo, como já visto anteriormente, é uma 4-upla $\langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ onde V e T são conjuntos e $\partial_0, \partial_1 : T \rightarrow V$ são funções. Portanto podemos dizer que um grafo é definido sobre a categoria $\mathcal{S}et$ (o que é óbvio uma vez que a categoria $\mathcal{G}r$ de grafos foi definida como uma categoria das setas utilizando a categoria $\mathcal{S}et$ como base). Se, ao invés de $\mathcal{S}et$, for utilizada uma outra categoria qualquer \mathcal{C} como base na construção de uma categoria de grafos por categoria das setas, teremos a Categoria dos Grafos Internos a \mathcal{C} .

Definição 4.2 (Grafo Interno) *Dada uma categoria \mathcal{C} , um grafo interno à \mathcal{C} é a 4-upla $\langle R, S, d_0, d_1 \rangle$ onde R e S são \mathcal{C} -objetos e $d_0, d_1 : S \rightarrow R$ são \mathcal{C} -morfismos.*

Definição 4.3 (Categoria de Grafos Internos) *Considere a categoria \mathcal{C} e o funtor diagonal $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^2$. A Categoria dos Grafos Internos à \mathcal{C} , denotada por $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$, é a categoria das setas $\Delta_{\mathcal{C}} \downarrow \Delta_{\mathcal{C}}$.*

Pela definição, então, homomorfismos de grafos internos à \mathcal{C} é um par de \mathcal{C} -morfismos $\langle h_R, h_S \rangle$ onde, dados dois grafos internos G_1 e G_2 (e sendo $k \in \{0, 1\}$) $h_R \circ d_{k_1} = d_{k_2} \circ h_S$.

Note que $\mathcal{G}r_p$ é uma subcategoria larga da categoria de grafos internos à $\mathcal{P}fn$.

Devido ao modo como foi definida a Categoria dos Grafos Internos, o seguinte teorema tem prova simples.

Teorema 4.1 (Bicompletude de $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$) *Dada a Categoria dos Grafos Internos à \mathcal{C} , $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$, tem-se que:*

- se \mathcal{C} é completa, então $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$ é completa,
- se \mathcal{C} é cocompleta, então $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$ é cocompleta.

Prova: Como o funtor diagonal $\Delta_{\mathcal{C}}$ preserva limites e colimites (MACLANE, 1971), então, pelo teorema 3.3, basta \mathcal{C} ser bicompleta para $\mathcal{G}r(\mathcal{C})$ também o ser. ■

Assim como $\mathcal{G}r$ estão definidos sobre $\mathcal{S}et$, $\mathcal{G}r_p$ também estão. A partir deste contexto, podemos definir Grafos Parciais Internos a uma dada categoria \mathcal{C} e, devido a sua construção, a categoria construída herda colimites de forma simples quando \mathcal{C} é topos.

Definição 4.4 (Categoria de Grafos Parciais Internos) *Seja \mathcal{C} uma categoria com todos os produtos-fibrados e o funtor diagonal $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^2$. A Categoria dos Grafos Parciais Internos à \mathcal{C} , denotada por $\mathcal{G}r_p(\mathcal{C})$ é a categoria das setas parciais $p\mathcal{C}omma(\Delta_{\mathcal{C}}, \Delta_{\mathcal{C}})$.*

Teorema 4.2 (Cocompletude de $\mathcal{G}r_p(\mathcal{C})$) *Se a categoria \mathcal{C} for um topos, a categoria $\mathcal{G}r_p(\mathcal{C})$ de grafos parciais internos à \mathcal{C} é cocompleta.*

Prova: A prova é consequência direta do teorema 2.4 (preservação de colimites por \mathbf{inc}_p), de $\Delta_{\mathcal{C}}$ preservar colimites (MACLANE, 1971) e do teorema 3.3 de herança de colimites da categoria das setas. ■

5 BICOMPLETUDE EM $\mathcal{G}R_p$

A demonstração de que $\mathcal{G}r_p$ é (finitamente) bicompleta não é trivial uma vez que, apesar da categoria ser construída através de Categoria das Setas, limites não são herdados. Devido a isto foi necessária a definição e prova de limites. Em especial na construção de produtos foi preciso definir construções adicionais no que diz respeito às arestas dos grafos parciais.

Além da construção e prova de limites e colimites, neste capítulo também é encontrado exemplos e interpretações destes.

5.1 Limites

Para provar que $\mathcal{G}r_p$ possui todos os limites (finitos) são dadas as construções dos produtos binários, do objeto terminal e dos equalizadores em $\mathcal{G}r_p$. Pelo teorema da existência de limites (BARR; WELLS, 2000; GOLDBLATT, 1983) tendo-se estas três construções a categoria é (finitamente) completa.

5.1.1 Produto Binário

$\mathcal{G}r_p$ não herda limites, uma vez que o funtor \mathbf{inc}_p não os preserva, como mostrado no teorema 2.5. Portanto, o produto em $\mathcal{G}r_p$ é construído diferentemente do produto em $\mathcal{G}r$, ou seja, o produto de dois grafos parciais não é obtido com a simples operação de produto em $\mathcal{S}et$ nos vértices e nas arestas dos grafos.

Para construir o produto de dois grafos parciais, primeiramente é necessário dividir o conjunto de arestas em quatro subconjuntos. Cada subconjunto representa um tipo diferente de arestas, “classificadas” de acordo com a definição ou não das funções de origem e/ou de destino. A separação nesses subconjuntos, os quais chamaremos de *classes* se dá pelo seguinte procedimento:

- obtenção de quatro conjuntos: arestas com origem definida, arestas sem origem definida, arestas com destino definido e arestas sem destino definido,
- obtenção das classes: arestas em que as funções ∂_0 e ∂_1 estão ambas definidas, arestas em que somente ∂_0 está definida, arestas em que somente ∂_1 está definida e arestas em que nenhuma das duas funções estão definidas.

Os primeiros quatro conjuntos são obtidos através de equalizadores; e as classes, através de produtos fibrados. Para a obtenção desses conjuntos é necessário “estender” as funções de origem e de destino para um conjunto unitário, isto é feito utilizando o morfismo $tot_V : V \rightarrow \{*\}$ que é a única função total de um conjunto

V para o conjunto $\{*\}$ (em termos de morfismos parciais, isto corresponde ao único morfismo parcial onde o morfismo $m_D : D \rightarrow V$ é iso).

Definição 5.1 (Subdivisão de T em classes) *Seja $G = \langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ um grafo parcial, $\emptyset : T \rightarrow \{*\}$ a função vazia, $tot : T \rightarrow \{*\}$ a função total de T para $\{*\}$ e $\partial_0^* = tot_V \circ \partial_0$, $\partial_1^* = tot_V \circ \partial_1$ funções. Obtêm-se os seguintes subobjetos a partir dos equalizadores em $\mathcal{P}fn$ conforme a figura 5.1:*

- $\langle K_0, \neg\partial_0 \rangle$ equalizador de ∂_0^* e \emptyset . Arestas de G que têm origem indefinida;
- $\langle K_1, \neg\partial_1 \rangle$ equalizador de ∂_1^* e \emptyset . Arestas de G que têm destino indefinido;
- $\langle E_0, \partial'_0 \rangle$ equalizador de ∂_0^* e tot . Arestas de G que têm origem definida;
- $\langle E_1, \partial'_1 \rangle$ equalizador de ∂_1^* e tot . Arestas de G que têm destino definido.

$$\begin{array}{c} K_0 \xrightarrow{\neg\partial_0} T \xrightarrow[\emptyset]{\partial_0^*} \{*\} \\ K_1 \xrightarrow{\neg\partial_1} T \xrightarrow[\emptyset]{\partial_1^*} \{*\} \\ E_0 \xrightarrow{\partial'_0} T \xrightarrow[tot]{\partial_0^*} \{*\} \\ E_1 \xrightarrow{\partial'_1} T \xrightarrow[tot]{\partial_1^*} \{*\} \end{array}$$

Figura 5.1: Equalizadores em $\mathcal{P}fn$

As quatro classes são os produtos fibrados da figura 5.2, onde:

- $\langle VV, vv \rangle$, sendo $vv = \partial'_0 \circ vv_0 = \partial'_1 \circ vv_1$, representa as arestas que possuem tanto ∂_0 quanto ∂_1 definidos;
- $\langle VF, vf \rangle$, sendo $vf = \partial'_0 \circ vf_0 = \neg\partial_1 \circ vf_1$, representa as arestas que possuem somente ∂_0 definida;
- $\langle FV, fv \rangle$, sendo $fv = \neg\partial_0 \circ fv_0 = \partial'_1 \circ fv_1$, representa as arestas que possuem somente ∂_1 definido;
- $\langle FF, ff \rangle$, sendo $ff = \neg\partial_0 \circ ff_0 = \neg\partial_1 \circ ff_1$, representa as arestas que não possuem nem ∂_0 nem ∂_1 definidos;

Estas chamadas classes não são exatamente classes de equivalência pois podem haver classes vazias, porém elas devem ser disjuntas e a união das classes deve ser o conjunto de arestas T .

Teorema 5.1 (Propriedades das Classes de T) *Dadas as classes $\langle VV, vv \rangle$, $\langle VF, vf \rangle$, $\langle FV, fv \rangle$, $\langle FF, ff \rangle$ a partir de um conjunto T de arcos de um grafo parcial, tem-se que:*

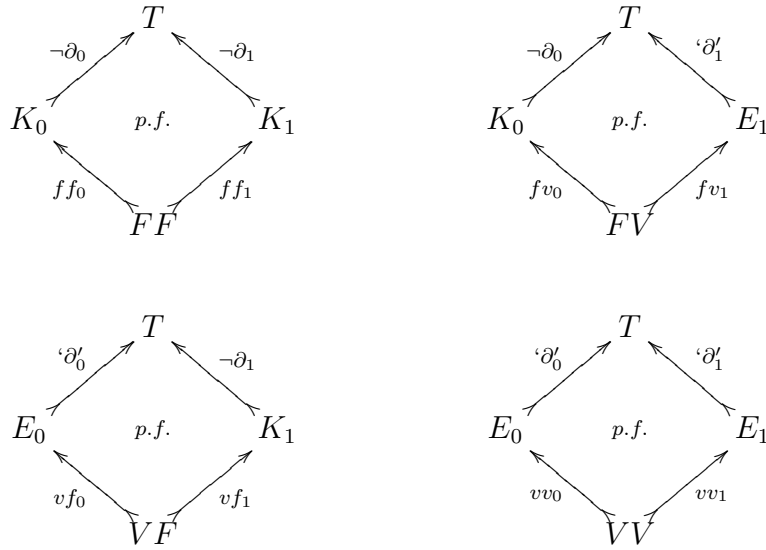


Figura 5.2: As Quatro Classes de Arestas

- i. $VV \cap VF = \emptyset$
- ii. $VV \cap FV = \emptyset$
- iii. $VV \cap FF = \emptyset$
- iv. $VF \cap FV = \emptyset$
- v. $VF \cap FF = \emptyset$
- vi. $FV \cap FF = \emptyset$
- vii. $VV \cup VF \cup FV \cup FF = T$

Prova: Para provar *i.* deve-se mostrar que o produto-fibrado dos morfismos vv e vf é o conjunto vazio. Então, consideremos $\langle P, p_1, p_2 \rangle$ o produto-fibrado de vv e vf conforme a figura 5.3.

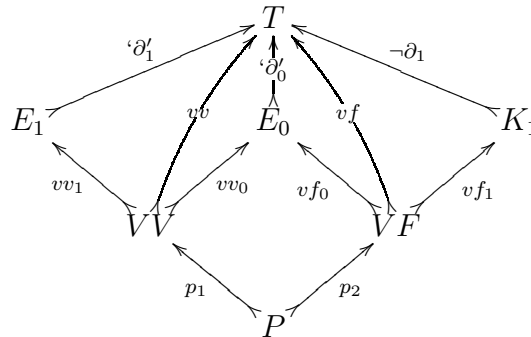


Figura 5.3: Produto Fibrado de $\langle vv, vf \rangle$

Agora, considere $\langle Q, q_1, q_2 \rangle$ o produto-fibrado de ∂'_1 e $-\partial_1$, ilustrado na figura 5.4. Sabendo-se que $\langle E_1, \partial'_1 \rangle$ é equalizador em \mathcal{Pfn} de $\langle \text{tot}, \partial_1 \rangle$ e $\langle K_1, -\partial_1 \rangle$ é equalizador em \mathcal{Pfn} de $\langle \partial_1, \emptyset \rangle$, temos

$$\langle Q, q \rangle \text{ é pré-equalizador de } \langle \text{tot}, \partial_1 \rangle \quad (5.1)$$

$$\langle Q, q \rangle \text{ é pré-equalizador de } \langle \partial_1, \emptyset \rangle \quad (5.2)$$

Então, por (5.1), $\text{tot} \circ q = \partial_1 \circ q$ e por (5.2), $\partial_1 \circ q = \emptyset \circ q$, chegando-se a $\text{tot} \circ q = \emptyset \circ q$. Como $\emptyset \circ q = \emptyset$, então $\text{tot} \circ q = \emptyset$. Como tot é uma função total, então $q = \emptyset$. Como q é um monomorfismo, $Q = \emptyset$, ou seja, $E_1 \cap K_1 = \emptyset$.

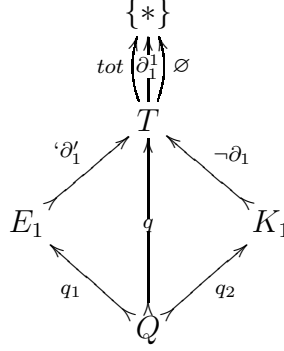


Figura 5.4: Produto Fibrado de $\langle \partial'_1, -\partial_1 \rangle$

A partir disso, sabe-se que $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$ é o produto-fibrado de $\langle \partial'_1, -\partial_1 \rangle$. Por sua vez, $\langle P, vv_1 \circ p_1, vf_1 \circ p_2 \rangle$ é pré-produto-fibrado de $\langle \partial'_1, -\partial_1 \rangle$ como na figura 5.5.

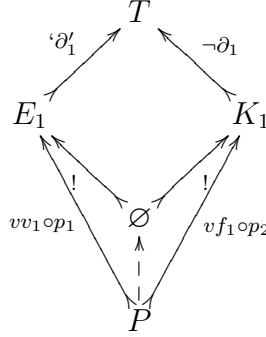


Figura 5.5: Pré-produto-fibrado de $\langle \partial'_1, -\partial_1 \rangle$ em Set

Logo existe uma seta única de P para \emptyset . Em Set só há uma seta com destino no conjunto vazio: a identidade do conjunto vazio. Logo, $P = \emptyset$.

As provas de *ii.* a *vi.* são análogas à *i.*

A prova de *vii.* será por absurdo.

Suponhamos primeiramente que $a \in T \Rightarrow a \notin VV \cup VF \cup FV \cup FF$.

- i. Se $a \notin VV$, então $\partial_0(a)$ ou $\partial_1(a)$ são indefinidos.
 - Se somente $\partial_0(a)$ é indefinido, então $a \in VF$;
 - se somente $\partial_1(a)$ é indefinido, então $a \in FV$;
 - se $\partial_0(a)$ e $\partial_1(a)$ são indefinidos, então $a \in FF$.
- ii. Se $a \notin VF$, então $\partial_0(a)$ é indefinido ou $\partial_1(a)$ é definido.
 - Se somente $\partial_0(a)$ é indefinido, então $a \in FF$;
 - se somente $\partial_1(a)$ é definido, então $a \in VV$;
 - se $\partial_0(a)$ é indefinido e $\partial_1(a)$ é definido, então $a \in FV$.

- iii. Se $a \notin FV$, então $\partial_0(a)$ é definido ou $\partial_1(a)$ é indefinido.
 Se somente $\partial_0(a)$ é definido, então $a \in VV$;
 se somente $\partial_1(a)$ é indefinido, então $a \in FF$;
 se $\partial_0(a)$ é definido e $\partial_1(a)$ é indefinido, então $a \in VF$.
- iv. Se $a \notin FF$, então $\partial_0(a)$ ou $\partial_1(a)$ são definidos.
 Se somente $\partial_0(a)$ é definido, então $a \in VF$;
 se somente $\partial_1(a)$ é definido, então $a \in FV$;
 se $\partial_0(a)$ e $\partial_1(a)$ são definidos, então $a \in VV$.

Portanto, $a \in T \Rightarrow a \in VV \cup VF \cup FV \cup FF$.

Agora suponhamos que $a \in VV \cup VF \cup FV \cup FF \Rightarrow a \notin T$.

- i. se $a \in VV$. Sabe-se que $VV \subseteq T$, logo $a \in T$;
 ii. se $a \in VF$. Sabe-se que $VF \subseteq T$, logo $a \in T$;
 iii. se $a \in FV$. Sabe-se que $FV \subseteq T$, logo $a \in T$;
 iv. se $a \in FF$. Sabe-se que $FF \subseteq T$, logo $a \in T$.

Ou seja, $a \in VV \cup VF \cup FV \cup FF \Rightarrow a \in T$, concluindo que $T = VV \cup VF \cup FV \cup FF$. ■

No texto que segue, dado um grafo parcial $G_n = \langle V_n, T_n, \partial_0^n, \partial_1^n \rangle$ (sendo $n \in \mathbb{N}$), as suas classes de T_n serão VV^n , VF^n , FV^n e FF^n .

Para um melhor entendimento das classes de arestas de um grafo parcial, podemos visualizá-las através do exemplo a seguir.

Exemplo 5.1 (Classes de Arestas de um Grafo Parcial) *Seja o grafo parcial $G = \langle \{A, B, C\}, \{u, v, w, x, y, z\}, \partial_0, \partial_1 \rangle$ ilustrado na figura 5.6. Então, $VV = \{u, v, w\}$, $VF = \{y, z\}$, $FV = \{x\}$ e $FF = \emptyset$.*

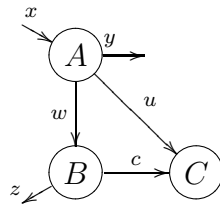


Figura 5.6: Grafo Parcial

O produto de dois grafos parciais é calculado pelo produto em \mathcal{Set} dos vértices e das classes de arestas dos grafos. Ou seja, o conjunto de vértices do grafo parcial resultante será o produto em \mathcal{Set} dos conjuntos de vértices dos grafos a serem operados; e o conjunto de arestas do grafo resultante será a união dos produtos em \mathcal{Set} das classes de arestas dos grafos a serem operados. As funções de origem e destino são induzidas pelo produto dos vértices.

Note que, se as arestas não fossem separadas em classes, o objeto calculado pelo produto em \mathcal{Set} poderia não ter homomorfismo total para os grafos que estariam o “originando”.

Definição 5.2 (Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$) Sendo $G_1 = \langle V_1, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle$ e $G_2 = \langle V_2, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle$ grafos parciais, o produto binário é o objeto $G_1 \times G_2 = \langle V_1 \times V_2, \bigcup_T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ onde (sendo $k \in \{0, 1\}$):

- $V_1 \times V_2$ é o produto em Set de V_1 e V_2 ;
- \bigcup_T é o objeto do coproduto em Set de $\langle \times_{VV}, \times_{VF}, \times_{FV}, \times_{FF} \rangle$;
- ∂_k é o morfismo parcial $\langle m_{\partial_k} : \bigcup_{D_{\partial_k}} \rightharpoonup \bigcup_T, \partial_k : \bigcup_{D_{\partial_k}} \rightarrow V_1 \times V_2 \rangle$ onde
 - $\bigcup_{D_{\partial_k}}$ é o produto-fibrado de $\langle inc_{\times T}, m_{\times D_{\partial_k}} \rangle$ como mostra a figura 5.7;
 - $m_{\partial_k} : \bigcup_{D_{\partial_k}} \rightharpoonup \bigcup_T$ é uma das projeções deste mesmo produto-fibrado da figura 5.7;
 - $\partial_k : \bigcup_{D_{\partial_k}} \rightarrow V_1 \times V_2$ é a seta induzida pelo produto $V_1 \times V_2$, ou seja, (tendo-se $j \in \{1, 2\}$) tal que $\pi_{V_j} \circ \partial_k = \partial_{k_1} \circ \pi_{\bigcup_{D_k^j}}$ onde $\pi_{\bigcup_{D_k^j}} = inc_{\times D_{\partial_k}} \circ \pi_{D_j}$ sendo π_{D_j} a projeção do produto $D_1 \times D_2$;

juntamente com os morfismos de projeção $\pi_1 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1$ e $\pi_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$ tais que (sendo $j \in \{1, 2\}$) $\pi_j = \langle \pi_{V_j}, \pi_{\bigcup_{T_j}} \rangle$ onde:

- $\pi_{V_j} : V_1 \times V_2 \rightarrow V_j$ é a projeção do produto em Set ;
- $\pi_{\bigcup_{T_j}} : \bigcup_T \rightarrow T_j$ é a seta tal que $\pi_{\bigcup_{T_j}} \circ im_{\times_{VV}} = v v^j \circ \pi_{VV^j}$ e $\pi_{\bigcup_{T_j}} \circ im_{\times_{VF}} = v f^j \circ \pi_{VF^j}$ e $\pi_{\bigcup_{T_j}} \circ im_{\times_{FV}} = f v^j \circ \pi_{FV^j}$ e $\pi_{\bigcup_{T_j}} \circ im_{\times_{FF}} = f f^j \circ \pi_{FF^j}$

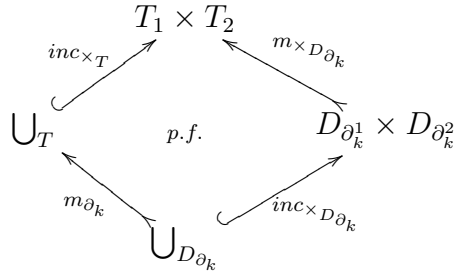


Figura 5.7: Objeto Domínio do Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$

Teorema 5.2 (Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$) Dados G_1 e G_2 , grafos parciais. O produto binário $G_1 \times G_2$ é $\langle \langle V_1 \times V_2, \bigcup_T, \partial_0, \partial_1 \rangle, \pi_1, \pi_2 \rangle$.

Prova: Dado um grafo parcial $G = \langle V_G, T_G, \partial_0^G, \partial_1^G \rangle$ e os homomorfismos totais $f : G \rightarrow G_1$ (sendo $f = \langle f_V : V_G \rightarrow V_1, f_T : T_G \rightarrow T_1 \rangle$) e $g : G \rightarrow G_2$ (sendo $g = \langle g_V : V_G \rightarrow V_2, g_T : T_G \rightarrow T_2 \rangle$), tem-se a seta $h : G \rightarrow G_1 \times G_2$ sendo $h = \langle h_V : V_G \rightarrow V_1 \times V_2, h_T : T_G \rightarrow \bigcup_T \rangle$ tal que

$$h_V(X) = \langle f_V(X), g_V(X) \rangle$$

$$h_T(x) = \langle f_T(x), g_T(x) \rangle$$

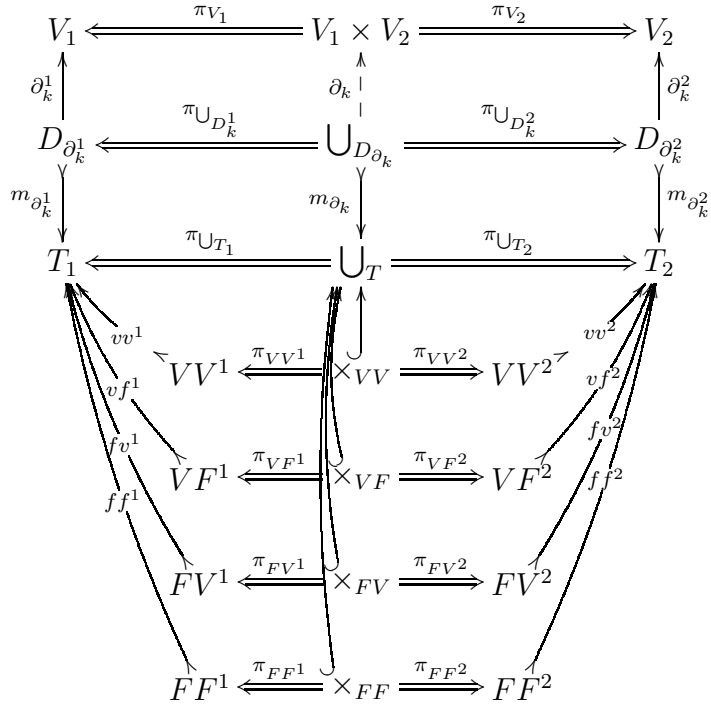


Figura 5.8: Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$

Sendo assim, temos que

$$\pi_{V_1}(h_V(X)) = \pi_{V_1}(\langle f_V(X), g_V(X) \rangle) = f_V(X)$$

$$\pi_{T_1}(h_T(x)) = \pi_{T_1}(\langle f_T(x), g_T(x) \rangle) = f_T(x)$$

$$\pi_{V_2}(h_V(X)) = \pi_{V_2}(\langle f_V(X), g_V(X) \rangle) = g_V(X)$$

$$\pi_{T_2}(h_T(x)) = \pi_{T_2}(\langle f_T(x), g_T(x) \rangle) = g_T(x)$$

Tendo-se, então, a seta h . Resta provar a unicidade desta seta no que diz respeito à comutatividade do diagrama do produto categorial.

Supondo $m : G \rightarrow G_1 \times G_2$ tal que (sendo $m = \langle m_V, m_T \rangle$)

$$\pi_{V_1} \circ m_V = f_V \tag{5.3}$$

$$\pi_{V_2} \circ m_V = g_V \tag{5.4}$$

$$\pi_{T_1} \circ m_T = f_T \tag{5.5}$$

$$\pi_{T_2} \circ m_T = g_T \tag{5.6}$$

então, sendo $m_V(X) = \langle Y, Z \rangle$ e $m_T(x) = \langle y, z \rangle$ tem-se que

$$\pi_{V_1}(m_V(X)) = \pi_{V_1}(\langle Y, Z \rangle) = Y$$

Então, por (5.3), $Y = f_V(X)$.

Da mesma forma, por (5.4), $\pi_{V_2}(m_V(X)) = \pi_{V_2}(\langle Y, Z \rangle) = Z = g_V(X)$; por (5.5), $\pi_{T_1}(m_T(x)) = \pi_{T_1}(\langle y, z \rangle) = y = f_T(x)$ e por (5.6), $\pi_{T_2}(m_T(x)) = \pi_{T_2}(\langle y, z \rangle) = z = g_T(x)$.

Logo, $m = h$. ■

Exemplo 5.2 (*Produto Binário em $\mathcal{G}r_p$*) Dados os grafos parciais da figura 5.9 (acima), o objeto do produto destes grafos é o grafo parcial da mesma figura, desenhado abaixo e as projeções são as projeções óbvias a partir dos nomes dos vértices e arestas.

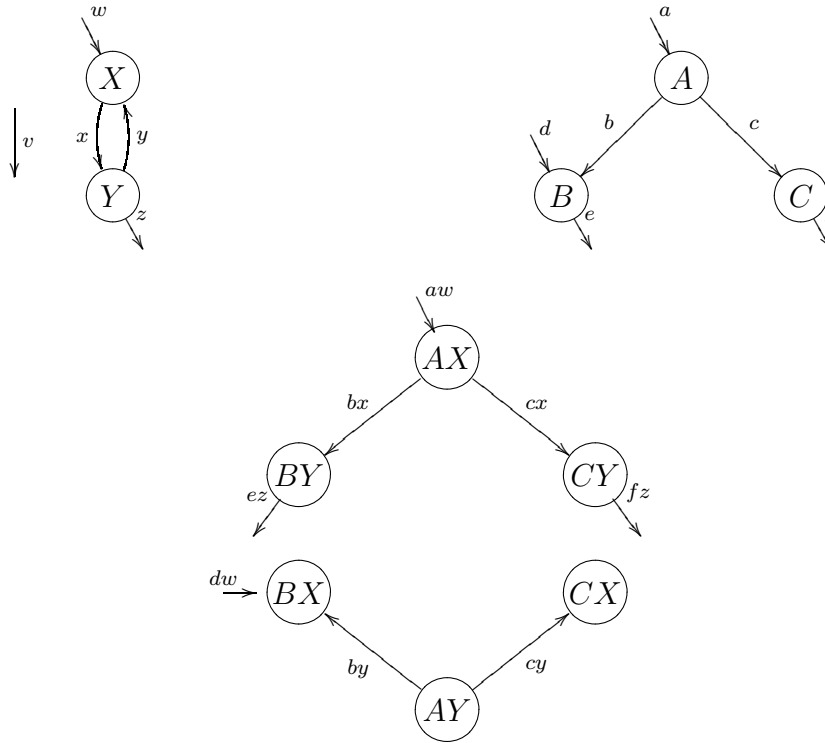


Figura 5.9: Exemplo de Produto de Grafos Parciais

Vendo grafos parciais como sistemas, o objeto resultante do produto destes pode ser visto como a composição síncrona. Note que a composição das ações somente ocorre quando elas são da mesma classe (no sentido da definição 5.1): somente haverá algum ponto de entrada, por exemplo, no sistema resultante se ambos sistemas componentes possuírem pontos de entrada.

5.1.2 Objeto Terminal

Como os morfismos em $\mathcal{G}r_p$ são homomorfismos totais de grafos parciais, o objeto terminal desta categoria deve ser um grafo onde seu conjunto de arestas tenha representantes das quatro classes de aresta. É esta, então, a principal diferença entre o objeto terminal de $\mathcal{G}r$ e o de $\mathcal{G}r_p$.

Definição 5.3 (Objeto Terminal em $\mathcal{G}r_p$) O objeto terminal em $\mathcal{G}r_p$ é o grafo $\mathbf{1} = \langle \{\bullet\}, \{vv, vf, fv, ff\}, \partial_0, \partial_1 \rangle$ ilustrado na figura 5.10.

Prova: Dado um grafo parcial $G = \langle V, T, \partial_0^G, \partial_1^G \rangle$ qualquer, o único morfismo possível $! : G \rightarrow \mathbf{1}$ é tal que $!_V(v) = \bullet$ (para todo $v \in V$) e, dado $t \in T$

$$!_T(t) = \begin{cases} vv & \text{se } t \in VV \\ vf & \text{se } t \in VF \\ fv & \text{se } t \in FV \\ ff & \text{se } t \in FF \end{cases}$$

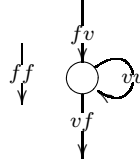


Figura 5.10: Objeto Terminal em $\mathcal{G}r_p$

■

5.1.3 Equalizadores

O cálculo de equalizadores em $\mathcal{G}r_p$ é basicamente o cálculo dos equalizadores em $\mathcal{S}et$ das funções componentes dos homomorfismos totais de grafos parciais, ou seja, é o equalizador dos mapeamentos entre vértices, arestas e domínios das funções de origem e destino.

Definição 5.4 (Equalizador em $\mathcal{G}r_p$) *Dados dois grafos parciais $G_1 = \langle V_1, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle$ e $G_2 = \langle V_2, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle$ e os homomorfismos de grafos $f = \langle f_V, f_T \rangle, g = \langle g_V, g_T \rangle : G_1 \rightarrow G_2$, o equalizador de f e g é induzido pelo cálculo do equalizador em $\mathcal{S}et$ das componentes dos homomorfismos, ou seja, é o par $\langle G_0, eq \rangle$ tal que $G_0 = \langle V_0, T_0, \partial_0^0, \partial_1^0 \rangle$ e $eq = \langle eq_V, eq_T \rangle$ tal que (diagrama na figura 5.11):*

- $\langle V_0, eq_V \rangle$ é o equalizador em $\mathcal{S}et$ de $\langle f_V, g_V \rangle$;
- $\langle T_0, eq_T \rangle$ é o equalizador em $\mathcal{S}et$ de $\langle f_T, g_T \rangle$;
- ∂_k^0 , sendo $k \in \{0, 1\}$, é o morfismo parcial $\langle m_{D_{\partial_k^0}} : D_{\partial_k^0} \rightarrow T_0, \partial_k^0 : D_{\partial_k^0} \rightarrow V_0 \rangle$ onde
 - $\langle D_{\partial_k^0}, eq_{D_{\partial_k^0}} \rangle$ é o equalizador em $\mathcal{S}et$ de $\langle f_{D_{\partial_k^0}}, g_{D_{\partial_k^0}} \rangle$;
 - $m_{D_{\partial_k^0}}$ é a seta induzida pelo equalizador $\langle f_T, g_T \rangle$;
 - ∂_k^0 é a seta induzida pelo equalizador $\langle f_V, g_V \rangle$.

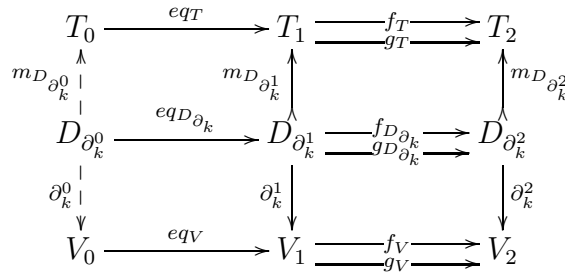


Figura 5.11: Equalizador em $\mathcal{G}r_p$

Prova: Primeiramente é importante notar que $m_{D_{\partial_k^0}}$ é realmente mono. Save-se que toda seta de equalizador é monomorfismo (MENEZES; HAEUSLER, 2001) e que a composição de monomorfismos resulta em monomorfismos (BORCEUX, 1994).

Portanto, $m_{D_{\partial_k^1}} \circ eq_{D_{\partial_k}}$ é monomorfismo. Em (BORCEUX, 1994) tem-se que, se $g \circ f$ é mono, então f é mono. Como $eq_T \circ m_{D_{\partial_k^0}} = m_{D_{\partial_k^1}} \circ eq_{D_{\partial_k}}$, então $m_{D_{\partial_k^0}}$ é monomorfismo.

Resta então, provar a existência e a unicidade da seta de um pré-equalizador qualquer para G_0 .

Seja X um vértice de V_1 e x um arco de T_1 . Como eq é monomorfismo, podemos afirmar que $eq_V(X) = X$ e $eq_T(x) = x$ caso $X \in V_0$ e $x \in T_0$.

Seja $Q = \langle V_Q, T_Q, \partial_0^Q, \partial_1^Q \rangle$ um grafo parcial e $q : Q \rightarrow G_1$ um homomorfismo de grafos parciais ($q = \langle q_V, q_T \rangle$) tal que $f \circ q = g \circ q$. Então existe um homomorfismo $h : Q \rightarrow G_0$, onde $h = \langle h_V, h_T \rangle$, tal que $h_T(x) = q_T(x)$ (tendo-se $x \in T_Q$) e $h_V(X) = q_V(X)$ (tendo-se $X \in V_Q$).

Supondo a seta $j = \langle j_V, j_T \rangle : Q \rightarrow G_0$ tal que $eq_V \circ j_V = q_V$ e $eq_T \circ j_T = q_T$. Então $eq_V(j_V(X)) = j_V(X) = q_V(X)$ e $eq_T(j_T(x)) = j_T(x) = q_T(x)$.

Logo, $j = h$. ■

Exemplo 5.3 (Equalizador em $\mathcal{G}r_p$) Dados os grafos G e H da figura 4.2 e os homomorfismos totais $h_2, h_4 : G \rightarrow H$ da tabela 4.1, o equalizador destes morfismos é o grafo parcial da figura 5.12 juntamente com o homomorfismo de inclusão no grafo G .

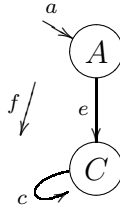


Figura 5.12: Exemplo de Equalizador em $\mathcal{G}r_p$

Um homomorfismo de grafos parciais pode ser visto como uma simulação ou uma implementação de um sistema em outro. Desta maneira, o objeto resultante do equalizador de duas implementações de um dado sistema em outro é o maior sub-sistema do primeiro em que ambas as implementações são idênticas.

5.2 Colimites

A construção de colimites em $\mathcal{G}r_p$ se dá através da herança de colimites nas categorias das setas como mostrado no teorema 3.3.

Teorema 5.3 ($\mathcal{G}r_p$ é cocompleta) A categoria $\mathcal{G}r_p$ de grafos parciais e homomorfismos totais de grafos parciais é cocompleta.

Prova: Como $\mathcal{S}et^2$ é um topos, pelo teorema 2.4 temos que $\mathbf{inc}_p : \mathcal{S}et^2 \rightarrow p(\mathcal{S}et^2)$ preserva colimites. Do mesmo modo, o funtor Δ também tem adjunto direito como demonstrado em (MACLANE, 1971), página 87. Como a composição de adjunções também é uma adjunção (BARR; WELLS, 2000; MACLANE, 1971), tem-se que o funtor $\mathbf{inc}_p \circ \Delta$ tem adjunto direito, ou seja, preserva colimites. Tendo-se que

$\text{inc}_p \circ \Delta$ preserva colimites e como Set é bicompleta, temos que $\mathcal{G}r_p$ é co-completa. ■

Uma vez que os colimites em $\mathcal{G}r_p$ são herdados de Set , a construção de colimites é trivial. Apesar disto, as próximas subseções abordarão as definições destes além de exemplo e interpretação em grafos parciais vistos como sistemas.

5.2.1 Coprodutos

Como o objeto inicial nada mais é do que o coproduto zero-ário, ele será também abordado nesta seção. Após, ter-se-á a definição do coproduto binário, um exemplo deste e uma interpretação do mesmo.

Uma observação interessante é a de que, apesar da definição de coprodutos limitar-se a coprodutos finitos, $\mathcal{G}r_p$ possui também coprodutos infinitos uma vez que estes são herdados pela construção da categoria.

Definição 5.5 (Objeto Inicial) *O objeto inicial da categoria $\mathcal{G}r_p$ é o grafo vazio $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$.*

Definição 5.6 (Coproduto Binário em $\mathcal{G}r_p$) *Dados os grafos parciais $G_1 = \langle V_1, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle$ e $G_2 = \langle V_2, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle$, o coproduto destes dois é o grafo parcial $G_1 + G_2 = \langle V_1 + V_2, T_1 + T_2, \partial_0, \partial_1 \rangle$ onde $V_1 + V_2$ e $T_1 + T_2$ são coprodutos em Set e ∂_0 e ∂_1 são morfismos univocamente induzidos pelo cálculo do coproduto em Set de acordo com o diagrama da figura 5.13.*

$$\begin{array}{ccccc}
 T_1 & \xrightarrow{q_{T_1}} & T_1 + T_2 & \xleftarrow{q_{T_2}} & T_2 \\
 \uparrow m_{\partial_k^1} & \nearrow & \uparrow m_{\partial_k} & \nwarrow & \uparrow m_{\partial_k^2} \\
 D_1 & \xrightarrow{q_{D_1}} & D_1 + D_2 & \xleftarrow{q_{D_2}} & D_2 \\
 \downarrow \partial_k^1 & \searrow & \downarrow \partial_k & \swarrow & \downarrow \partial_k^2 \\
 V_1 & \xrightarrow{q_{V_1}} & V_1 + V_2 & \xleftarrow{q_{V_2}} & V_2
 \end{array}$$

Figura 5.13: Coproduto em $\mathcal{G}r_p$

Exemplo 5.4 (Coproduto em $\mathcal{G}r_p$) *O coproduto dos grafos da figura 4.2 é o grafo da figura 5.14 juntamente com os morfismos de imersão óbvios.*

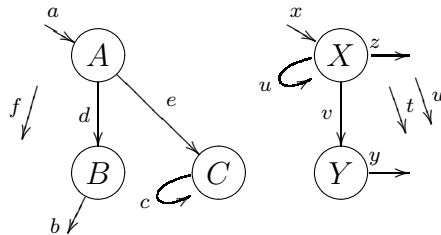


Figura 5.14: Exemplo de Coproduto em $\mathcal{G}r_p$

Novamente vendo grafos parciais como sistemas, o objeto resultante do coproduto de dois (ou mais) grafos parciais pode ser visto como a composição não-determinista dos sistemas componentes, sem nenhum dos sistemas interferir no comportamento do outro, independentemente.

5.2.2 Coequalizador

O cálculo de coequalizadores em $\mathcal{G}r_p$ é basicamente o cálculo dos coequalizadores em $\mathcal{S}et$ das funções componentes dos homomorfismos totais de grafos parciais, assim como os demais colimites.

Definição 5.7 (Coequalizador em $\mathcal{G}r_p$) *Dados dois grafos parciais $G_1 = \langle V_1, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle$ e $G_2 = \langle V_2, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle$ e os homomorfismos de grafos $f = \langle f_V, f_T \rangle, g = \langle g_V, g_T \rangle : G_1 \rightarrow G_2$, o coequalizador de f e g é induzido pelo cálculo do coequalizador em $\mathcal{S}et$ das componentes dos homomorfismos, ou seja, é o par $\langle G, co \rangle$ tal que $G = \langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ e $co = \langle co_V, co_T \rangle$ tal que (diagrama na figura 5.15):*

- $\langle V, co_V \rangle$ é o coequalizador em $\mathcal{S}et$ de $\langle f_V, g_V \rangle$;
- $\langle T, co_T \rangle$ é o coequalizador em $\mathcal{S}et$ de $\langle f_T, g_T \rangle$;
- ∂_k , sendo $k \in \{0, 1\}$, é o morfismo parcial $\langle m_{D_{\partial_k}} : D_{\partial_k} \rightarrow T, \partial_k : D_{\partial_k} \rightarrow V \rangle$ onde
 - $\langle D_{\partial_k}, co_{D_{\partial_k}} \rangle$ é o coequalizador em $\mathcal{S}et$ de $\langle f_{D_{\partial_k}}, g_{D_{\partial_k}} \rangle$;
 - $m_{D_{\partial_k}}$ é a seta induzida pelo coequalizador $\langle f_T, g_T \rangle$;
 - ∂_k^0 é a seta induzida pelo equalizador $\langle f_V, g_V \rangle$.

$$\begin{array}{ccccc}
 T_1 & \xrightarrow{f_T} & T_2 & \xrightarrow{co_T} & T \\
 \uparrow m_{D_{\partial_k^1}} & \xrightarrow{g_T} & \uparrow m_{D_{\partial_k^2}} & & \uparrow m_{D_{\partial_k}} \\
 D_{\partial_k^1} & \xrightarrow{f_{D_{\partial_k^1}}} & D_{\partial_k^2} & \xrightarrow{co_{D_{\partial_k}}} & D_{\partial_k} \\
 \downarrow \partial_k^1 & \xrightarrow{g_{D_{\partial_k^1}}} & \downarrow \partial_k^2 & & \downarrow \partial_k \\
 V_1 & \xrightarrow{f_V} & V_2 & \xrightarrow{co_V} & V
 \end{array}$$

Figura 5.15: Coequalizador em $\mathcal{G}r_p$

Tendo-se colimites podemos, por exemplo, definir gramáticas de grafos parciais. Para isso deve ser utilizada a técnica do *double pushout* (CORRADINI et al., 1997) uma vez que os homomorfismos de grafos parciais são totais. Através desse tipo de gramática é possível definir, por exemplo, sistemas que se modificam durante a computação (como em (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004)).

Exemplo 5.5 (Double-pushout em $\mathcal{G}r_p$) *A figura 5.16 ilustra a aplicação de uma regra de gramática de grafos (parciais) com double pushout em um dado grafo (parcial). Na figura a parte superior representa a regra a ser aplicada, o grafo parcial inferior à esquerda é o grafo parcial a ser modificado e o grafo parcial resultante da aplicação é o grafo parcial inferior à direita. Os homomorfismos são de acordo com os nomes de vértices e arestas.*

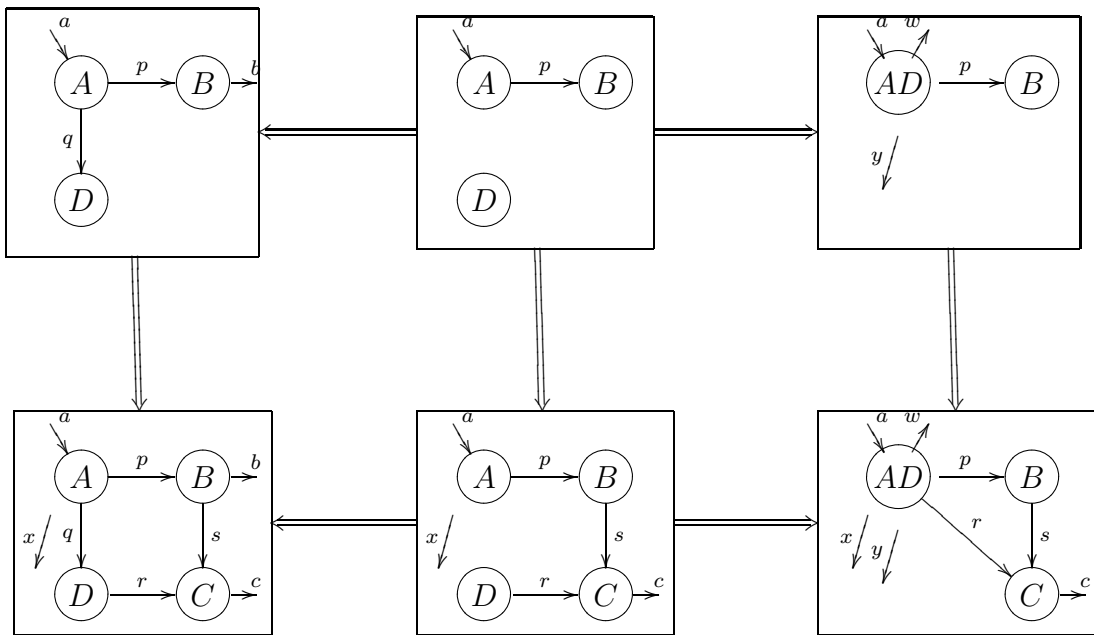


Figura 5.16: Exemplo de Derivação de Grafos Parciais

6 AUTÔMATOS PARCIAIS

Neste capítulo a categoria dos Grafos Parciais é utilizada para definir a categoria dos Autômatos Parciais. A principal vantagem de definir estes autômatos é a de que, devido à estrutura dos diferentes tipos de arcos de um Grafo Parcial, de acordo com a interpretação que aqui utilizada, estados finais e iniciais do autômato estão na estrutura. Após a definição da categoria \mathcal{Aut}_p tem-se a prova de que esta é bicompleta, herdando limites e colimites das categorias em que fora construída. Por último é dada uma forma de calcular as computações finitas de Autômatos Parciais através de composição de *spans*.

6.1 Definição

O termo “autômato parcial” já fora anteriormente utilizado para definir uma estrutura algébrica baseada na definição de autômatos. Uma definição frequentemente referenciada de autômato parcial é a dada em (RUTTEN, 1998), nesse artigo um autômato parcial sobre um alfabeto A é uma tripla $\langle S, o, t \rangle$ onde S é o conjunto de estados, $o : S \rightarrow \{v, f\}$ uma função que indica se o estado é final ou não e $t : S \rightarrow (S + 1)^A$ (onde $1 = \{\uparrow\}$) é a função de transição. A diferença entre um autômato (determinístico) e um autômato parcial, nesta definição, é a de que a função de transição em um autômato é $t : S \rightarrow S^A$. O fato de $t(s)(a) = \uparrow$ representa que o símbolo a é indefinido para o estado s . Tal autômato parcial aceita um tipo diferente de linguagem com relação às linguagens abordadas em (HOPCROFT, 1979; MENEZES, 2001) que são um dos objetos de estudo deste trabalho. A saber, a linguagem aceita por um autômato parcial nesse artigo engloba palavras com marcação de *deadlock* e palavras infinitas. Em (HINES, 2003) também é utilizada uma função parcial em transições de autômatos para permitir a possibilidade de computações que não terminam.

Devido a isto, o termo *Autômato Parcial* utilizado nesta dissertação é diferente do já empregado na literatura. Aqui, um autômato parcial é um autômato (possivelmente não-determinístico) onde transições podem ocorrer sem a necessidade de assumir algum estado prévio e/ou transições podem ocorrer e, após, o sistema não assumir estado algum; ou seja, é um autômato definido a partir de grafos parciais.

Para definir a categoria de Autômatos Parciais, será necessária a definição de dois funtores: \mathbf{arcos}_p e \mathbf{coprod}_4 (lembrando que a categoria \mathcal{Set}/Ω^2 foi definida no exemplo 3.2).

O funtor esquecimento \mathbf{arcos}_p leva cada grafo parcial de \mathcal{Gr}_p no seu conjunto de arcos T em \mathcal{Set} juntamente com uma função $m : T \rightarrow \Omega^2$. Esta função m é a função que classifica cada arco de T em sua devida classe de acordo com a definição 5.1.

Definição 6.1 (Funtor arcos_p) O funtor $\text{arcos}_p : \mathcal{G}r_p \rightarrow \text{Set}/\Omega^2$ é tal que, sendo $\langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ um grafo parcial qualquer, $\text{arcos}_p(\langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle) = \langle T, m \rangle$ onde $m : T \rightarrow \Omega^2$ é tal que (dado $t \in T$):

$$m(t) = \begin{cases} \langle v, v \rangle & \text{se } t \in VV \\ \langle v, f \rangle & \text{se } t \in VF \\ \langle f, v \rangle & \text{se } t \in FV \\ \langle f, f \rangle & \text{se } t \in FF \end{cases}$$

e sendo $h = \langle h_V, h_T \rangle : \langle V_1, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle \rightarrow \langle V_2, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle$ um homomorfismo total de grafos parciais, $\text{arcos}_p(h) = h_T$.

Pode-se dizer que o funtor coprod_4 “quadruplica” um conjunto qualquer de Set . Isto é feito levando um conjunto A no seu coproduto quaternário. Como coprod_4 é definido de Set para Set/Ω^2 , também é associado à este coproduto uma função com codomínio em $\Omega^2 = \{vv, vf, fv, ff\}$. Como estaremos trabalhando com o coproduto quaternário de um conjunto qualquer A , podemos dizer que o conjunto resultante deste coproduto tem cada elemento de A quatro vezes; a função α é tal que cada elemento de A seja levado aos quatro elementos de Ω^2 .

Definição 6.2 (Funtor coprod_4) O funtor $\text{coprod}_4 : \text{Set} \rightarrow \text{Set}/\Omega$ é tal que, dado um conjunto A qualquer, $\text{coprod}_4(A) = \langle \Pi_A^4, \alpha \rangle$ onde $\alpha : \Pi_A^4 \rightarrow \Omega^2$ é tal que (suponha $a_i \in \Pi_A^4$ onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ indica a origem do elemento no coproduto – primeira, segunda, terceira ou quarta imersão):

$$\alpha(a_i) = \begin{cases} \langle v, v \rangle & \text{se } i = 1 \\ \langle v, f \rangle & \text{se } i = 2 \\ \langle f, v \rangle & \text{se } i = 3 \\ \langle f, f \rangle & \text{se } i = 4 \end{cases}$$

e sendo $f : A \rightarrow B$ uma função, $\text{coprod}_4(f) = f^* : \langle \Pi_A^4, \alpha \rangle \rightarrow \langle \Pi_B^4, \beta \rangle$ onde:

$$\begin{aligned} f^*(\langle a, \langle v, v \rangle \rangle) &= \langle f(a), \langle v, v \rangle \rangle \\ f^*(\langle a, \langle v, f \rangle \rangle) &= \langle f(a), \langle v, f \rangle \rangle \\ f^*(\langle a, \langle f, v \rangle \rangle) &= \langle f(a), \langle f, v \rangle \rangle \\ f^*(\langle a, \langle f, f \rangle \rangle) &= \langle f(a), \langle f, f \rangle \rangle \end{aligned}$$

Definição 6.3 (Categoria Aut_p) A categoria dos Autômatos Parciais, chamada Aut_p , é a categoria das setas $\text{arcos}_p \downarrow \text{coprod}_4$.

Um objeto em Aut_p é, então, uma 6-upla $A = \langle V, T, \partial_0, \partial_1, \Sigma, \text{eti}q \rangle$ onde $\langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ é um grafo parcial (indica a “forma” do autômato parcial, será referenciado como o grafo parcial G), Σ é um conjunto de símbolos (comumente referenciado como *alfabeto*) e $\text{eti}q : T \rightarrow \Sigma$ é a função (total) de etiquetagem dos arcos (note que, na definição da categoria parcial, $\text{eti}q : \langle T, m \rangle \rightarrow \langle \Pi_\Sigma^4, \alpha \rangle$, porém é simples vê-la como uma função de T para Σ). Um morfismo em Aut_p é um homomorfismo total de autômatos parciais f onde, dados os autômatos parciais $A_1 = \langle V_1, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1, \Sigma_1, \text{eti}q_1 \rangle$ e $A_2 = \langle V_2, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2, \Sigma_2, \text{eti}q_2 \rangle$, $f = \langle h, s \rangle : A_1 \rightarrow A_2$ tendo $h : G_1 \rightarrow G_2$ um homomorfismo de grafos parciais ($h = \langle h_V, h_T \rangle$) e $s : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ uma função total tais que, em Set/Ω^2 :

$$\text{eti}q_2 \circ h_T = s^* \circ \text{eti}q_1.$$

Exemplo 6.1 (Autômatos Parciais e Homomorfismo) Dados Autômatos Parciais $A = \langle \{X, Y, Z\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}, \partial_0^A, \partial_1^A, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \text{eti}_{q_A} \rangle$ e $B = \langle \{A, B\}, \{t, u, v, w, x, y, z\}, \partial_0^B, \partial_1^B, \{0, 1\}, \text{eti}_{q_B} \rangle$ onde as funções $\partial_0^A, \partial_0^B, \partial_1^A, \partial_1^B, \text{eti}_{q_A}$ e eti_{q_B} são de acordo com a figura 6.1 (o “nome” da aresta está indicada entre parênteses). Um possível Homomorfismo na categoria Aut_p de A para B é tal que:

$$h_T = \begin{cases} a \mapsto x \\ b \mapsto y \\ c \mapsto z \\ d \mapsto z \\ e \mapsto w \\ f \mapsto u \\ g \mapsto u \\ h \mapsto t \\ i \mapsto t \\ j \mapsto w \\ k \mapsto t \\ l \mapsto t \\ m \mapsto v \\ n \mapsto v \end{cases} \quad h_V = \begin{cases} X \mapsto A \\ Y \mapsto B \\ Z \mapsto B \end{cases} \quad s = \begin{cases} \alpha \mapsto 0 \\ \beta \mapsto 1 \\ \gamma \mapsto 1 \end{cases}$$

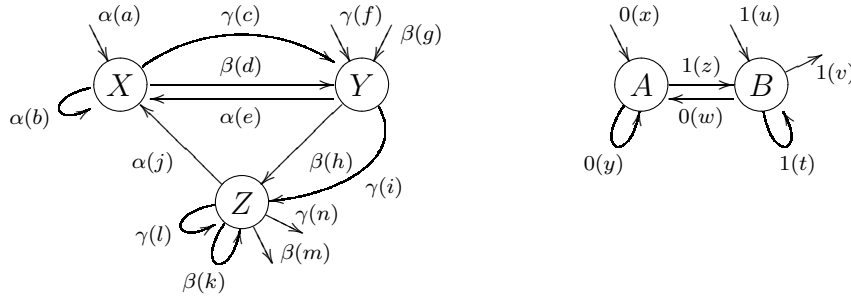


Figura 6.1: Autômatos Parciais A (à esquerda) e B (à direita)

6.1.1 Bicompletude

Aut_p é bicompleta por herança de limites na Categoria das Setas. Devido a isto, limites e colimites podem ser construídos a partir de Set e de $\mathcal{G}r_p$, que têm estas construções já definidas. As interpretações destas construções são simplesmente extensões das interpretações dadas de grafos parciais para Autômatos Parciais.

Teorema 6.1 (Bicompletude de Aut_p) A categoria Aut_p é bicompleta.

Prova: Para provar que Aut_p é bicompleta, basta provar que \mathbf{arcs}_p preserva colimites e que \mathbf{coprod}_4 preserva limites.

Para \mathbf{arcs}_p preservar colimites, é necessário encontrar seu adjunto direito. O funtor $\mathbf{livre}_T : \text{Set}/\Omega^2 \rightarrow \mathcal{G}r_p$ definido a seguir é adjunto direito de \mathbf{arcs}_p .

Dado $\langle C, w \rangle$ um Set/Ω^2 -objeto, $\mathbf{livre}_T(\langle C, w \rangle) = \langle \{\bullet\}, C, \partial_0, \partial_1 \rangle$ onde, dado $c \in C$,

$$\partial_0(c) = \begin{cases} \bullet & \text{se } w(c) = \langle v, v \rangle \text{ ou } w(c) = \langle v, f \rangle \\ \text{indef.} & \text{se } w(c) = \langle f, v \rangle \text{ ou } w(c) = \langle f, f \rangle \end{cases}$$

$$\partial_1(c) = \begin{cases} \bullet & \text{se } w(c) = \langle v, v \rangle \text{ ou } w(c) = \langle f, v \rangle \\ \text{indef.} & \text{se } w(c) = \langle v, f \rangle \text{ ou } w(c) = \langle f, f \rangle \end{cases}$$

e dado $f : \langle A, \alpha \rangle \rightarrow \langle B, \beta \rangle$ um $\mathcal{S}et/\Omega^2$ -morfismo, $\mathbf{livre}_T(f) = \langle \iota_{\{\bullet\}}, f \rangle$.

A figura 6.2 ilustra o diagrama da adjunção $\langle \mathbf{arcos}_p, \eta_1, \mathbf{livre}_T \rangle$, onde $\eta_1 = \langle g_V, \iota_T \rangle : \mathcal{G}_{r_p} \rightarrow \mathbf{livre}_T \circ \mathbf{arcos}_p$ tal que $g_V(v) = \bullet, \forall v \in V$.

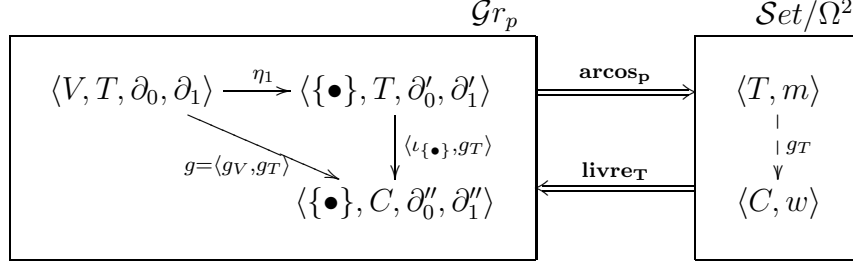


Figura 6.2: Diagrama para Adjunção $\langle \mathbf{arcos}_p, \eta_1, \mathbf{livre}_T \rangle$

Já para o funtor \mathbf{coprod}_4 preservar limites, é necessário mostrar que ele possui adjunto esquerdo, que no caso é o funtor $\mathbf{u}_{\text{classe}} : \mathcal{S}et/\Omega^2 \rightarrow \mathcal{S}et$ tal que, dado $\langle C, w \rangle$ um objeto de $\mathcal{S}et/\Omega^2$, $\mathbf{u}_{\text{classe}}(\langle C, w \rangle) = C$ e dada uma função qualquer $f : \langle A, \alpha \rangle \rightarrow \langle B, \beta \rangle$ de $\mathcal{S}et/\Omega^2$, $\mathbf{u}_{\text{classe}}(f) = f : A \rightarrow B$.

A figura 6.3 ilustra o diagrama da adjunção $\langle \mathbf{u}_{\text{classe}}, \eta_2, \mathbf{coprod}_4 \rangle$ onde $\eta_2 : \mathcal{S}et/\Omega^2 \rightarrow \mathbf{coprod}_4 \circ \mathbf{u}_{\text{classe}}$ é tal que, dado $\langle d, \langle p, q \rangle \rangle \in \langle D, \delta \rangle$, $\eta_2(\langle d, \langle p, q \rangle \rangle) = \langle d, \langle p, q \rangle \rangle$ onde $p, q \in \{v, f\}$ (na figura, $k(a) = j(a) \forall a \in A$). ■

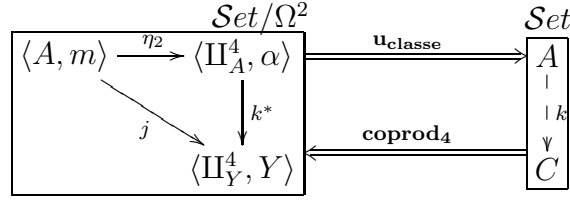


Figura 6.3: Diagrama para Adjunção $\langle \mathbf{u}_{\text{classe}}, \eta_2, \mathbf{coprod}_4 \rangle$

6.2 Composição de Spans e Computações

A principal diferença entre autômatos de $\mathcal{A}ut$ e de $\mathcal{A}ut_p$ é a de os autômatos parciais terem em sua estrutura marcação de estados diferenciados, segundo a interpretação de que arestas sem origem (destino) representam pontos de entrada (saída) em Grafos Parciais. Por exemplo, a partir de $\mathcal{A}ut$, para se ter marcação de estado inicial, define-se uma categoria das setas utilizando $\mathcal{A}ut$ como uma das categorias base. Já em $\mathcal{A}ut_p$ um estado com uma aresta que não possui origem mais com destino nele pode ser dito um estado inicial. Mais ainda: esta marcação representa também um passo da computação do autômato parcial.

Para ilustrar esta diferença de construção podemos brevemente estruturar a categoria de autômatos com estados finais a partir de $\mathcal{A}ut$. A construção seria através de uma categoria das setas $\mathcal{A}ut\mathcal{F}im = \mathbf{vertices} \downarrow \mathbf{VF}$ onde $\mathbf{vertices} : \mathcal{A}ut \rightarrow \mathcal{S}et$ leva um autômato ao seu conjunto de estados e $\mathbf{VF} : 1 \rightarrow \mathcal{S}et$ leva o único objeto

no conjunto $\{v, f\}$, a função em \mathcal{Set} seria a que indica se o estado é ou não um estado final.

Com relação a reconhecimento de palavras de linguagens, podemos dizer que uma palavra é reconhecida por um autômato parcial se o primeiro símbolo for reconhecido através de uma aresta sem origem e o último, através de uma aresta sem destino; sendo que, reconhecido um símbolo qualquer e a computação estiver em um estado s , o próximo símbolo deverá ser reconhecido por um arco com origem neste estado, como em um autômato comum. Nos autômatos do exemplo 6.1 a linguagem do autômato A (a esquerda da figura 6.1) é a dada pelas palavras sobre o alfabeto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ que tem como sufixo uma das subpalavras: $\gamma\gamma\gamma$, $\gamma\gamma\beta$, $\gamma\beta\gamma$, $\gamma\beta\beta$, $\beta\gamma\gamma$, $\beta\gamma\beta$, $\beta\beta\gamma$, $\beta\beta\beta$. Já a linguagem reconhecida pelo autômato B (a direita da figura 6.1) são as palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ terminadas por 11.

6.2.1 Composição de Spans Estendida para Grafos

Um *span* em uma categoria \mathcal{C} de um objeto A para outro B é basicamente um par de \mathcal{C} -morfismos com origem em um mesmo objeto qualquer da categoria e destino em A e B . A definição de span e de categorias de span pode ser encontrada em (BÉNABOU, 1967), onde há a informação que este conceito foi originalmente introduzido por Yoneda no caso de $\mathcal{C} = \mathcal{Cat}$, a categoria de categorias pequenas. Em (BRUNI; GADDUCCI, 2001) pode-se encontrar uma série de propriedades algébricas de categorias de spans em \mathcal{Set} .

Definição 6.4 (Span) *Considere uma categoria qualquer \mathcal{C} . Um span em \mathcal{C} é uma classe de equivalência de pares de morfismos da forma $\langle r : C \rightarrow A, s : C \rightarrow B \rangle$, determinada pela relação $\langle r : C \rightarrow A, s : C \rightarrow B \rangle \text{parc} \langle r' : D \rightarrow A, s' : D \rightarrow B \rangle$ se e somente se existe um isomorfismo $iso : C \leftrightarrow D$ tal que o diagrama ilustrado na figura 6.4 comuta.*

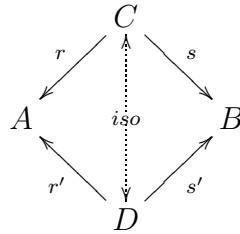


Figura 6.4: Diagrama Comutativo para Spans

Como dito no capítulo 2, um morfismo parcial pode ser visto como um tipo restrito de Span, onde o primeiro morfismo componente deve ser um monomorfismo.

A partir da definição de spans é possível a construção de uma categoria que utilize esta construção como base (assim como com morfismos parciais). Obtém-se, então, uma categoria com spans a partir de uma categoria de origem; os objetos continuam os mesmos da categoria original.

Definição 6.5 (Categoria de Spans) *Considere a Categoria $\mathcal{C} = \langle Ob_{\mathcal{C}}, Mor_{\mathcal{C}}, \partial_0, \partial_1, \iota, \circ \rangle$ com todos os produtos fibrados. A categoria de spans em \mathcal{C} denotada por $s\mathcal{C} = \langle Ob_{s\mathcal{C}}, Mor_{s\mathcal{C}}, \partial_{0_{s\mathcal{C}}}, \partial_{1_{s\mathcal{C}}}, \iota_{s\mathcal{C}}, \circ_{s\mathcal{C}} \rangle$ onde $Mor_{s\mathcal{C}}, \partial_{0_{s\mathcal{C}}}, \partial_{1_{s\mathcal{C}}}$ são determinados pela definição de spans em \mathcal{C} e a composição de dois morfismos $\langle r, s \rangle : A \rightarrow B, \langle p, q \rangle :$*

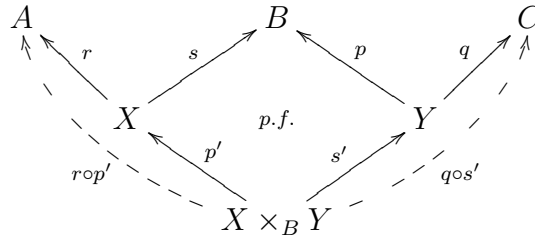


Figura 6.5: Diagrama Comutativo para Composição de Spans

$B \rightarrow C$ é $\langle r, s \rangle \circ_{pC} \langle p, q \rangle = \langle r \circ p', q \circ s' \rangle : A \rightarrow C$ determinada pelo produto fibrado como o ilustrado no diagrama comutativo da figura 6.5.

A definição da composição de spans pode ser estendida para definir um tipo diferente de composição de grafos, introduzida em (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004). Este tipo de composição possibilita dar semântica a sistemas baseados em grafos que se modificam ao longo do tempo. Uma vez que um grafo está definido através de suas funções de origem e destino, que tem o mesmo objeto de origem (portanto, caracteriza um span), a definição desta composição, chamada de *Composição Binária de Arestas* é como segue:

Definição 6.6 (Composição Binária de Arestas) Dado V um conjunto de vértices e os grafos $G_1 = \langle V, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1 \rangle$ e $G_2 = \langle V, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2 \rangle$, a Composição Binária de Arestas, ou simplesmente *Composição de Arestas*, de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \triangleright G_2 = \langle V, T, \partial_0, \partial_1 \rangle$ onde T é o objeto resultante do produto-fibrado do diagrama da figura 6.6, $\partial_0 = \partial_0^1 \circ p_0$ e $\partial_1 = \partial_1^2 \circ p_1$. O diagrama está definido na categoria base da construção do grafo.

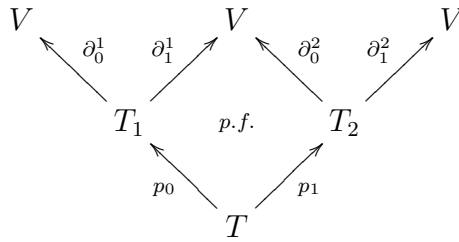


Figura 6.6: Composição Binária de Arestas de Grafos

Cada aresta no grafo resultante $G_1 \triangleright G_2$ representa um caminho de comprimento dois (entre vértices), onde a primeira metade é uma aresta do grafo G_1 e a segunda metade é uma aresta do grafo G_2 . Em sistemas baseados em grafos, a aresta composta de $G_1 \triangleright G_2$ pode ser vista como uma computação resultante de uma composição sequencial de outras duas arestas: a primeira ocorre no sistema G_1 e a segunda, no sistema G_2 (nesta ordem).

Note que a Composição de Arestas pode ser feita em qualquer objeto de categoria de grafos, desde que a categoria utilizada como base possua produtos-fibrados. No caso de grafos parciais, por exemplo, o diagrama da figura 6.6 está em $pSet$.

6.2.2 Composição de Transições de Autômatos Parciais

Pode-se estender a Composição Binária de Arestas de Grafos para Composição Binária de Transições de Autômatos Parciais. Para utilizar este tipo de composição para dar semântica a Autômatos Parciais – mais especificamente para ter as computações de um dado autômato parcial – deve-se estender a definição para ter-se também a estrutura de etiquetação das arestas.

Definição 6.7 (Composição de Transições de Autômatos Parciais) *Considere os autômatos parciais $A_1 = \langle V, T_1, \partial_0^1, \partial_1^1, \Sigma_1, \text{eti}q_1 \rangle$ e $A_2 = \langle V, T_2, \partial_0^2, \partial_1^2, \Sigma_2, \text{eti}q_2 \rangle$ (com o mesmo conjunto de estados). A Composição Binária de Transições, ou simplesmente Composição de Transições, de A_1 e A_2 é o autômato parcial $A_1 \triangleright A_2 = \langle V, T, \partial_0, \partial_1, \Sigma, \text{eti}q \rangle$ onde T é o objeto resultante do produto-fibrado, $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ e $\text{eti}q$ é a função induzida pelo produto do diagrama em \mathbf{pSet} da figura 6.7 e $\partial_0 = \partial_0^1 \circ p_0$ e $\partial_1 = \partial_1^2 \circ p_1$.*

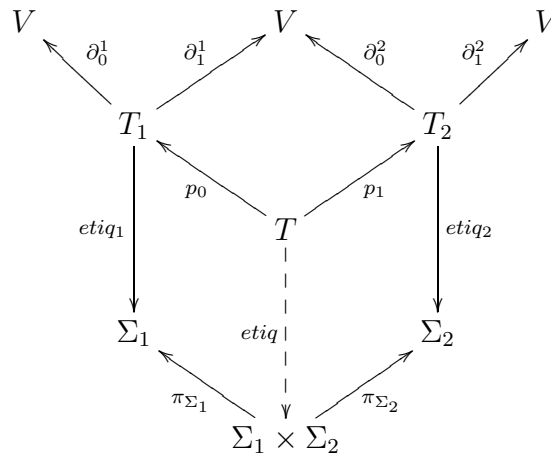


Figura 6.7: Composição de Transições de Autômatos Parciais

A interpretação dada para a Composição de Arestas de grafos pode ser estendida para Autômatos Parciais. Portanto um Autômato Parcial composto consigo mesmo uma vez terá como transições subpalavras de seu processamento para o reconhecimento de sua Linguagem; no caso de n composições sucessivas pode-se obter as palavras da linguagem aceita pelo Autômato em que são necessários até $n + 1$ passos de computação nos arcos do Autômato Parcial que não possuem origem e nem destino. A partir do exemplo a seguir teremos estas noções com mais clareza.

Exemplo 6.2 (Composição de Transições) *Dado o Autômato Parcial B da figura 6.1 (a direita), o Autômato Parcial resultante da Composição de Transições $B \triangleright B$ é tal como o ilustrado na figura 6.8.*

Em um primeiro momento pode-se pensar que o Autômato Parcial resultante de uma Composição de Transições deste exemplo consigo mesmo tenha transições etiquetadas com palavras de comprimento dois. Porém, no Autômato resultante do exemplo há transições etiquetadas com palavras de tamanho um. Isto ocorre pois, por exemplo, o Autômato Parcial pode, no primeiro momento, não ter assumido nenhum estado (e não ter “executado” nenhuma transição) e somente no segundo

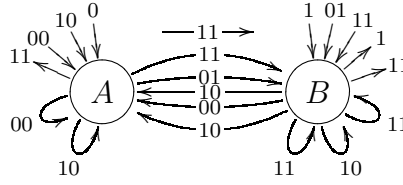


Figura 6.8: Autômato Resultante da Composição de Spans do Autômato da Figura 6.1

momento ter “executado” uma transição de entrada, reconhecendo o símbolo ‘0’ e assumido o estado A , resultando na transição sem origem e com destino em A etiquetada com ‘0’. Do mesmo modo há transições que em um primeiro momento é executada uma transição de saída e, no segundo passo, o sistema fica sem assumir nenhum estado e não “passa” por nenhuma transição.

Já a transição sem origem e sem destino rotulada por ‘11’ é resultante da execução da transição de entrada no estado B no primeiro passo; e no segundo, da transição de saída do estado B , ambas etiquetadas por ‘1’. Devido a isto podemos ver o sentido de “transação” deste tipo de aresta. Mais ainda: a palavra que etiqueta uma transição sem origem e sem destino é uma palavra reconhecida pelo autômato.

Uma observação interessante a fazer é de que esta Composição pode ser feita sucessivamente. Isto se deve ao fato de a Composição de Arestas de um grafo ser associativa (prova em (HOFF; ROGGIA; MENEZES, 2004)) assim como o produto também o ser (para o caso dos alfabetos).

Definição 6.8 (Computações Finitas de Autômato Parcial) *Dado um Autômato Parcial $A = \langle V, T, \partial_0, \partial_1, \Sigma, etiq \rangle$, as computações finitas de tamanho até $n + 1$ deste é a classe de transições FF (no sentido da definição 5.1) do autômato resultante da Composição de Transições consigo mesmo n vezes.*

Dado então um Autômato Parcial que computa a linguagem L , se ele for composto consigo mesmo “*ad infinitum*”, através da Composição de Transições, as arestas do grafo que formam este Autômato que possuem origem e destino indefinidos podem ser vistas como o fecho transitivo L^+ . Se o Autômato Parcial for composto consigo mesmo n vezes, esta classe de transições do Autômato será o subconjunto de L^+ tais que o comprimento das palavras está limitado a $n + 1$, isto é, as computações do Autômato com $n + 1$ passos.

7 CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho, a saber: definir uma estrutura de grafos que contenham parcialidade em sua estrutura interna através de modelos categoriais, foi atingido resultando em algumas contribuições aqui listadas.

- Resultados com relação a categorias de morfismos parciais: foram desenvolvidos resultados úteis ao desenvolvimento posterior do objetivo principal com relação a morfismos parciais. Dentre os principais resultados deste tipo pode-se destacar $p(p\mathcal{C}) \cong p\mathcal{C}$ e $p(\mathcal{C}^2) \cong (p\mathcal{C})^2$. O primeiro mostra que há um limite para uma estrutura “ser parcializada” enquanto que o segundo é útil para a definição de grafos internos parciais;
- Introdução de um modo de construir categorias de estruturas parciais herdando propriedades: dada pela definição de Categoria das Setas Parciais (*pComma*) que permite herança de colimites;
- Construção de uma categoria de Grafos Parciais com Homomorfismos Totais: $\mathcal{G}r_p$, feita através da construção definida anteriormente utilizando o funtor diagonal de *Set* e sua categoria de morfismos parciais *pSet*. A partir disso obteve-se grafos tais que arestas sem origem e/ou sem destino são permitidas;
- Interpretações das estruturas definidas: dadas de acordo com a visão de que um grafo pode ser visto como um sistema, identificou-se interpretações para ações ou pontos de entrada e saída ou fontes e sumidouros;
- Prova da bicompletude de $\mathcal{G}r_p$: onde colimites foram herdados, porém o mesmo não ocorreu com limites, que foram construídos e dadas as provas. Para os principais tipos de limites e colimites foi dada também uma correspondente interpretação computacional destas operações;
- Definição de Grafos Parciais Internos: que permite a construção de grafos baseados em categorias diferentes de *Set*;
- Definição de Autômatos Parciais: autômatos baseados em Grafos Parciais, sendo um exemplo de aplicação de $\mathcal{G}r_p$ em uma área importante da Ciência da Computação;
- Definição de computação finita de Autômatos Parciais: baseada em uma extensão de composição de *spans*, definindo uma semântica para esses Autômatos.

A respeito dos resultados obtidos neste trabalho foram escritos alguns artigos que foram publicados ou aguardam avaliação para publicação.

- **“Composition of Transformations: a framework for systems with dynamic topology”**, apresentado em *CASYS'03 – 6th International Conference on Computing Anticipatory Systems* e aguardando publicação nos anais do evento no International Journal of Computing Anticipatory Systems. Autores: Marnes Augusto Hoff, Karina Girardi Roggia e Paulo Blauth Menezes (artigo como segunda autora). Apresenta a Composição Binária de Arestas de grafos (totais), principais propriedades e o seu uso em sistemas com topologia dinâmica.
- **“Partial Graphs with Total Homomorphisms: a Categorical Framework”**, submetido à *FOSSACS 2005 – Foundations of Software Science and Computation Structures*, conferência integrante da European Joint Conferences on Theory and Practice of Software (ETAPS). Autores: Karina Girardi Roggia, Paulo Blauth Menezes e Marnes Augusto Hoff. Apresenta a estrutura de Grafos Parciais, a categoria $\mathcal{G}r_p$ e suas construções de limites e colimites juntamente com interpretações computacionais das mesmas.
- **“Bicompleteness in the Category of Partial Graphs with Total Homomorphisms”**, submetido ao *Electronic Journal on Mathematics of Computation (EJMC)*. Autores: Karina Girardi Roggia, Paulo Blauth Menezes e Marnes Augusto Hoff. Apresenta a prova da bicompletude de $\mathcal{G}r_p$.
- **“Computation of Partial Automata through Span Composition”**, extended abstract aceito para *EUROCAST 2005 – 10th Conference on Computer Aided Systems Theory* no workshop *Systems Theory and Simulation: formal approaches and applications*. Autores: Karina Girardi Roggia, Marnes Augusto Hoff e Paulo Blauth Menezes. Apresenta Autômatos Parciais e discorre sobre computações destes através da Composição de Transições apresentada nesta dissertação.

Dentre os trabalhos futuros a partir deste podemos citar a investigação de outras propriedades com relação a $\mathcal{G}r_p$ como, por exemplo, se é uma categoria cartesiana fechada e um topos e suas interpretações computacionais; explorar computações de autômatos parciais e estender estes autômatos para autômatos com saída; estender o conceito de grafos parciais para grafos parciais reflexivos e estudá-los; investigar diferentes tipos de composições de grafos parciais como, por exemplo, composição sequencial explorando a interpretação de pontos de entrada e de saída; explorar grafos parciais internos em categorias diferentes a *Set*; estender a definição de composição de arestas (grafos) e de transições (autômatos) para uma estrutura de categoria; e relacionar estas categorias estudadas com Categorias de Álgebras Parciais.

REFERÊNCIAS

- ADAMEK, J.; TRNKOVA, V. **Automata and Algebras in Categories**. Dordrecht: Kluwer, 1990.
- ASPERTI, A.; LONGO, G. **Categories, Types, and Structures - An Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist**. Cambridge, USA: MIT Press, 1991. 306p.
- BARR, M.; WELLS, C. **Category Theory for Computing Science**. 2nd ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. (Prentice Hall International Series in Computer Science).
- BARR, M.; WELLS, C. **Toposes, Triples and Theories**. Electronic.ed. [S.l.: s.n.], 2000. Disponível em <ftp://ftp.math.mcgill.ca/pub/barr/ttt/>. Acesso em: 26 abr. 2005.
- BÉNABOU, J. Introduction to Bicatogories. In: BÉNABOU, J.; DAVIS, R.; DOLD, A. (Ed.). **Reports of the Midwest Category Seminar**. Berlin: Springer-Verlag, 1967. p.1-77. (Springer Lecture Notes in Mathematics, n. 47).
- BERGE, C. **Hypergraphs**. Amsterdam: North Holland, 1989. 255p.
- BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra 1: basic category theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v.50).
- BRUNI, R.; GADDUCCI, F. **Some algebraic laws for spans**. [S.l.]: Elsevier Science, 2001. (Electronic Notes in Theoretical Computer Science, n.44, v.3).
- CASLEY, R. T. **On the specification of concurrent systems**. 1991. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Stanford University.
- CORRADINI, A.; MONTANARI, U.; ROSSI, F.; EHRIG, H.; HECKEL, R.; LÖWE, M. Algebraic Approaches to Graph Transformation I: basic concepts and double pushout approach. In: ROZENBERG, G. (Ed.). **Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph transformation**. Singapore: World Scientific, 1997. v.1.
- DIVERIO, T. A.; MENEZES, P. B. **Teoria da Computação: máquinas universais e computabilidade**. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 1999. 205p.
- FIORE, M. P. **Axiomatic domain theory in categories of partial maps**. 1994. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — University of Edinburgh.

FREYD, P. J.; SCEDROV, A. **Categories, Allegories**. Amsterdam: North-Holland, 1990. xviii+296p. (North-Holland Mathematical Library, v.39).

GOLDBLATT, R. **Topoi: the categorial analysis of logic**. Revised.ed. [S.l.]: North-Holland, 1983. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 98).

HINES, P. A Categorical Framework For Finite State Machines. **Math Struct. in Comp. Science**, [S.l.], v.13, p.451–480, 2003.

HOFF, M. A.; ROGGIA, K. G.; MENEZES, P. B. Composition of Transformations: a framework for systems with dynamic topology. **International Journal Of Computing Anticipatory Systems**, [S.l.], v.14, p.259–270, 2004.

HOPCROFT, J. E. **Introduction to automata theory, languages and computation**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1979.

JAY, C. B. Partial Functions, Ordered Categories, Limits and Cartesian Closure. In: HIGHER ORDER WORK., HOW, 4., 1990. **Proceedings...** [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. p.151–161. (Workshops in Computing).

KENNAWAY, R. Graph Rewriting in Some Categories of Partial Morphisms. In: INT. WORKSHOP ON GRAPH GRAMMARS AND THEIR APPLICATION TO COMPUTER SCIENCE, 4., 1991. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1991. p.490–504. (Lecture Notes in Computer Science, v.532).

KORFF, M. **Algebraic transformation of equationally defined graph structures**. [S.l.]: Technische Universität Berlin, 1992. (92/32).

KORFF, M. **Single Pushout Transformations of Generalized Graph Structures**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1993. (RP-220).

LÖWE, M.; EHRIG, H. Algebraic approach to graph transformation based on single pushout derivations. In: INTERN. WORKSHOP ON GRAPH-THEORETIC CONCEPTS IN COMPUTER SCIENCE, 16., 1990. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1990. p.338–353. (Lecture Notes in Computer Science, v.484).

MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. New York, USA: Springer Verlag, 1971.

MENEZES, P. B. **Reificação de Objetos Concorrentes**. 1997. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Instituto Técnico de Lisboa.

MENEZES, P. B. Compositional Reification of Concurrent, Interacting Systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON PARALLEL AND DISTRIBUTED PROCESSING TECHNIQUES AND APPLICATIONS, PDPTA, 1998. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1998. p.1754–1761.

MENEZES, P. B. Diagonal Compositionality of Partial Petri Nets. In: US-BRAZIL JOINT WORKSHOPS ON THE FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 1997, 2., 2000. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2000. (Electronic Notes in Theoretical Computer Science, v.14).

- MENEZES, P. B. **Linguagens Formais e Autômatos**. 4.ed. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 2001. 165p.
- MENEZES, P. B.; HAEUSLER, E. H. **Teoria das Categorias para Ciência da Computação**. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 2001. 324p.
- MESEGUER, J.; MONTANARI, U. Petri Nets Are Monoids. **Information and Computation**, [S.l.], v.88, n.2, p.105–155, Oct. 1990.
- MOGGI, E. **The Partial Lambda-Calculus**. 1988. 351p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Edinburgh University.
- MOGGI, E. Partial Morphisms in Categories of Effective Objects. **Information and Computation**, [S.l.], v.76, n.2/3, p.250–277, 1988.
- MULRY, P. S. Monads and algebras in the semantics of partial data types. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v.99, n.1, p.141–155, 1992.
- MULRY, P. S. Partial map classifiers and partial cartesian closed categories. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v.136, n.1, p.109–123, 1994.
- PAOLA, R. A. D.; HELLER, A. Dominical Categories: recursion theory without elements. **The Journal of Symbolic Logic**, [S.l.], v.52, n.3, 1987.
- PETERSON, J. L. **Petri Net Theory and the Modelling of Systems**. Englewoods Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1981.
- PHOA, W. **An Introduction to Fibrations, Topos Theory, the Effective Topos and Modest Sets**. [S.l.]: Lab. for Foundations of Computer Science, University of Edinburgh, 1992. Research report. (ECS-LFCS-92-208).
- PIERCE, B. C. **Basic Category Theory for Computer Scientists**. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.
- PLOTKIN, G. D. **Denotational semantics with partial functions**. Stanford: C.S.L.I. Summer School, 1985.
- PREPARATA, F. P.; YEH, R. T. **Introduction to Discrete Structures**. Reading: Addison-Wesley, 1973.
- RAOULT, J. C. On graph rewritings. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v.32, n.1-2, p.1–24, July 1984.
- ROBINSON, E.; ROSOLINI, G. Categories of partial maps. **Information and Computation**, [S.l.], v.79, n.2, p.95–130, 1988.
- ROSOLINI, G. **Continuity and Effectiveness in Topoi**. 1986. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Merton College, Oxford.
- RUTTEN, J. J. M. M. Automata and Coinduction (an Exercise in Coalgebra). In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONCURRENCY THEORY, CONCUR, 9., 1998, Nice, France. **Concurrency Theory: proceedings**. Berlin: Springer-Verlag, 1998. p.194–218. (Lecture Notes in Computer Science, v.1466).

SCHMIDT, G. Programs as partial graphs. I. Flow equivalence and correctness. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v.15, n.1, p.1–25, July 1981.

SCHMIDT, G. Programs as Partial Graphs II: recursion. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], v.15, n.2, p.159–179, 1981.

SCHMIDT, G.; STRÖHLEIN, T. **Relations and Graphs, Discrete Mathematics for Computer Scientists**. [S.l.]: Springer, 1993. (EATCS-Monographs on Theoretical Computer Science).