UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ROSSANO EVALDT STEINMETZ RIBEIRO

# UMA PROPOSTA DE ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

PORTO ALEGRE

2012

**ROSSANO EVALDT STEINMETZ RIBEIRO**

# UMA PROPOSTA DE ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana.

Porto Alegre, agosto de 2012

**ROSSANO EVALDT STEINMETZ RIBEIRO**

# UMA PROPOSTA DE ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Arno Bayer (PPGECIM – ULBRA)

Prof. Dr. João Feliz Duarte de Moraes (PPGEMat – UFRGS)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan (PPGEMat – UFRGS)

Porto Alegre, agosto de 2012

Agradecimentos:

Agradeço a meus pais, que sempre incentivaram meus estudos.

Agradeço a minha esposa Elisa pelo incentivo e paciência.

Agradeço aos professores do Mestrado, que nos mostraram a importância do conhecimento.

Agradeço a meu orientador, Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana, pelo seu empenho e dedicação, que possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Agradeço a professora Elena Chemale pelas contribuições.

**RESUMO**

Este trabalho desenvolve, analisa e valida uma sequência didática para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio. As atividades foram aplicadas em uma turma de vinte e cinco alunos do Ensino Médio noturno de uma escola da rede pública estadual. Estas atividades possibilitaram a exploração de conceitos de Probabilidade, nas quais os alunos foram convidados a questionar, conjecturar e criar respostas ou explicações para os problemas propostos. Utiliza-se como referencial teórico, os cenários para investigação de Skovsmose e a resolução de problemas fundamentada em Polya e Pozo. A metodologia de pesquisa utilizada foi o Estudo de Caso. A descrição das atividades foi divida em três etapas, nas quais são apresentadas o planejamento, objetivos, expectativas, descrição das aulas, observações do professor e análise. Realiza-se também a classificação das atividades, momento em que observa-se que estas ocorreram em diferentes Ambientes de Aprendizagem, gerando interesse e participação dos alunos, possibilitando discussões sobre conceitos de probabilidade e permitindo o confronto entre estes conceitos e a intuição dos alunos. Destaca-se também a importância da postura do professor no desenvolvimento das atividades, muito mais como orientador e instigador. O produto desta dissertação é uma sequência didática para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio, elaborada e testada, e que pode ser utilizada por outros professores. Este produto encontra-se no apêndice A.

Palavras-chave: Cenários para Investigação. Resolução de Problemas. Ensino de Probabilidade no Ensino Médio. Sequência Didática.

**ABSTRACT**

This work develops, analyzes and validates a didactical sequence for the teaching of probability in High School. The activities were applied in a twenty-five students class of a nightshift High School from a state public school. These activities enabled the exploration probability concepts, in which the students were invited to question, conjecture and create answers or explanations for the proposed problems. The Landscapes of Investigation of Skovsmose and the resolution of problems grounded in Polya and Pozo are used as theorical referential. The research methodology used is the study of case. The description of the activities is divided in three steps, in which are presented the planning, goals, expectations, description of the classes, teacher's observations and analysis. The classification of activities is also conducted, when we observe that these activities happened in different Milieu of Learning, generating students' interest and participation, making the discussion about probability concepts possible and allowing the confrontation between these concepts and the students' intuition. The importance of the teacher's attitude in the development of the activities, more like advisor and instigator, is highlighted. The product of this dissertation is a didactical sequence for the teaching of probability in High School, elaborated and tested, that can be used by other teachers. This product is located on appendix A.



Keywords: Landscapes of Investigation. Resolution of Problems. Teaching of Probability in High School. Didactical Sequence.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Neste trabalho, analisamos uma sequência didática na qual propusemos aos alunos atividades que possibilitaram a exploração de alguns conceitos do conteúdo de Probabilidade e que fossem uma alternativa ao paradigma do exercício. Convidamos os alunos a participarem das atividades questionando, conjecturando e elaborando respostas ou explicações para as questões propostas, ou seja, que os alunos tivessem uma postura ativa no processo de aprendizagem.

A escolha do tema desta pesquisa tem muitos motivos: um deles é a formação escolar e acadêmica do autor, pois enquanto aluno do Ensino Médio, na época 2º grau, o conteúdo de Probabilidade não foi estudado. Posteriormente, na graduação, o assunto foi abordado de forma muito superficial e na especialização também não se abordou o conteúdo.

Em quatro anos como professor de Matemática do 3º ano do Ensino Médio, nunca conseguimos trabalhar o conteúdo; no máximo, apresentamos algumas questões de Probabilidade após o estudo do conteúdo de Análise Combinatória.

Por que então a escolha de um conteúdo no qual não temos uma formação sólida? A escolha ocorre pela curiosidade e interesse pela área, mas também pela necessidade, pois, a partir do 2º semestre de 2009, assumimos uma disciplina de Probabilidade num curso Técnico de Informática e, desde então, nos dedicamos ao estudo deste assunto, percebendo assim sua importância e utilidade. Essas características são destacadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra da população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra quanto será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p. 44.)

Outro aspecto sobre a Probabilidade é a presença de questões sobre o tema no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), e como professor de uma escola pública em que todos os alunos realizam o exame, sentimos necessidade de que os mesmos tenham conhecimento de tal conteúdo, estando assim melhor preparados para a prova. Gostaríamos de observar que a proposta não tem como objetivo apenas preparar o aluno para um exame, pois concordamos com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio quando colocam que:

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras idéias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. (BRASIL, 2006, p. 79)

Portanto, a compreensão de um modelo probabilístico proporciona ao estudante conhecimentos e habilidades úteis em sua vida.

Um outro motivo de nossa escolha é a percepção de que o conteúdo de Probabilidade tem sido trabalhado superficialmente nas escolas da rede estadual do município de Osório ou nem tem sido apresentado. Justificamos esta impressão pela vivência como docente em muitas escolas da cidade nos últimos anos; Contudo essa deficiência no ensino de Probabilidade não se restringe somente ao nosso município, como podemos ver nas palavras de BAYER (2005):

> ... a inclusão da probabilidade e da estatística nos programas de matemática no Ensino Fundamental e Médio. Embora esta inclusão tenha ocorrido no ano de 1997, hoje ainda observa-se um número muito reduzido de professores que ensinam probabilidade e estatística. Vários motivos foram destacados: falta de preparo do professor, falta de tempo, falta de material didático (Echeveste, Bayer, Bittencourt & Rocha, 2003), o que se observa é que o professor de matemática necessita, assim como foi feito com os programas de matemática, uma atualização em sua formação. (BAYER, 2005, p.2)

Assim, além de contribuir com nossa formação e prática docente, acreditamos que a realização deste trabalho pode auxiliar outros colegas professores no ensino deste conteúdo.

Os principais objetivos de nosso trabalho são elaborar, investigar e analisar atividades para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio, tendo em vista as possibilidades de estas despertarem o interesse dos alunos, e também contribuírem para o desenvolvimento da compreensão do seu cotidiano, quando este apresenta relações com aspectos ou conceitos de Probabilidade.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro, apresentamos o Referencial Teórico que fundamenta as atividades elaboradas, a ação docente, as análises e conclusões. No capítulo seguinte, descrevemos e analisamos as atividades desenvolvidas com um grupo de alunos. E no último capítulo, apresentamos nossas conclusões.

Apresentamos nos apêndices uma sequência didática, resultado de nossa pesquisa, bem como o modelo dos materiais utilizados como listas, questionário e avaliação, enquanto que nos anexos estão cópias de atividades realizadas pelos alunos e a autorização da escola para a realização das mesmas.

# 1 REFERENCIAL TEÓRICO

Nossa prática docente, bem como a análise que realizamos, estão fundamentadas nos conceitos de Ambientes de Aprendizagem de Skovsmose e na Resolução de Problemas, segundo Polya e Pozo. Estes referenciais, além de outros autores como Penteado e Pais, são trabalhados nas duas primeiras seções deste capítulo. A terceira seção é dedicada a uma revisão bibliográfica, na qual destacamos três pesquisas relacionadas com a nossa. A quarta seção finaliza este capítulo, com a caracterização da pesquisa realizada neste trabalho.

## 1.1 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO E AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

Conforme Skovsmose,“Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações.” (SKOVSMOSE, 2008, p.21). Além disso, o autor afirma também que, para uma atividade tornar-se um cenário para investigação, esta deve ser aceita pelos alunos, sendo responsabilidade do professor o convite para a participação destes em tal atividade. Portanto, um Ambiente de Aprendizagem pode, ou não, ser caracterizado como um cenário para investigação dependendo do aceite dos alunos. É fundamental o papel do professor na apresentação ou convite deste cenário para que este proporcione momentos de questionamentos e explicações por parte dos alunos.

Ainda sobre os cenários para investigação, Skovsmose coloca que a validação, ou não, de um Ambiente de Aprendizagem como um cenário para investigação se dá de forma empírica, através da relação entre professor e alunos em sala de aula.

Concordamos com Skovsmose, que as aulas de matemática em que o professor, na maior parte do tempo, faz exposição de conceitos, resolvendo exemplos ou demonstrando fórmulas, na esperança de que o aluno, passivamente, observe e aprenda o conteúdo, ou aulas em que o aluno deva resolver exaustivamente muitas listas de exercícios, nos quais a única tarefa é repetir procedimentos apresentados pelo professor, são momentos que exemplificam o paradigma do exercício.

É importante salientar nestas aulas, a postura exigida do aluno, que é passiva e de mera observação ou repetição. Nas palavras de Skovsmose,

> a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correta. (SKOVSMOSE, 2008, p.15)

Skovsmose (2008) classifica os Ambientes de Aprendizagem, caracterizando-os entre paradigma do exercício ou cenários para investigação com diferentes referências. A seguir reproduzimos a matriz apresentada por Skovsmose, na qual cada Ambiente de Aprendizagem é identificado com um número que servirá como referência.

Quadro 1: Classificação dos Ambientes de Aprendizagem.

| | Exercícios | Cenário para investigação |
|---|---|---|
| Referências à matemática pura | (1) | (2) |
| Referências à semi-realidade | (3) | (4) |
| Referências à realidade | (5) | (6) |

Fonte: SKOVSMOSE, Ole. Desafios da reflexão em educação matemática crítica. Campinas: Papirus, 1º ed. 2008, p.23.

Apresentamos a seguir uma caracterização de cada Ambiente de Aprendizagem, pois iremos classificar as atividades por nós propostas nos diferentes Ambientes de aprendizagem acima apresentados.

O Ambiente de Aprendizagem baseado no paradigma do exercício com referências à matemática pura, identificado como o do tipo (1), é um dos mais comuns nas salas de aula, e normalmente aquele em que o professor apresenta o conteúdo, resolvendo um ou mais exemplos para, em seguida, apresentar aos alunos exercícios em que estes repetirão os passos apresentados pelo professor.

Encontramos na definição de problema rotineiro dada por Polya: "... um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo batido." (POLYA, 1995, p. 124), uma descrição do que compreendemos como uma atividade que ocorre no paradigma do exercício com referência à matemática pura.

Os Ambientes de Aprendizagem do tipo (3) são aqueles com base no paradigma do exercício que fazem referência a uma semi-realidade, normalmente criada pelo professor ou pelo autor de livro didático. Neste tipo de situação todas as informações necessárias já estão presentes no problema, não havendo necessidade de investigação por parte do aluno nem cabendo a este questionar sobre outros aspectos do contexto apresentado. Por exemplo, no exercício proposto por Paiva:

> Um fazendeiro colheu milho, feijão e café, num total de 14400 sacas, sendo que a quantidade de sacas de café foi o quádruplo da quantidade de sacas de feijão. Se tivesse colhido mais 2400 sacas de feijão, o total dessas sacas atingiria o total de sacas de milho. Calcule o total de sacas de café. (PAIVA, 2009, p.43)

A questão acima caracteriza muitos exercícios que não são reais, pois fica claro que para o sujeito da situação a informação ou o valor que está sendo perguntado já é conhecido; ou seja, esta é uma realidade criada pelo autor.

Outro olhar sobre a questão pode ser no sentido do valor das sacas de cada produto, ou ainda os alunos podem questionar o professor sobre como são cheias estas sacas: todas têm o mesmo volume ou todas têm o mesmo peso? Se estes questionamentos ou outros surgissem, poderia o professor sair do paradigma do exercício e propor aos alunos um cenário para investigação, em que estes tivessem que desenvolver uma postura ativa, buscando informações. No momento em que os alunos questionam o problema, podemos caracterizar uma quebra no contrato didático[1], sendo esta uma oportunidade para o professor encaminhar a atividade, dando um rumo diferente ao inicialmente proposto. Para isso é necessário que o professor se aventure em um novo Ambiente de Aprendizagem. Skovsmose chama nossa atenção para estes momentos de ruptura: “Um contrato didático pode ser quebrado de muitas maneiras, como, por exemplo, quando alunos começam a questionar detalhes de uma semi-realidade, ..... Em geral, melhorias na educação matemática estão intimamente ligadas à quebra de contrato. ” (SKOVSMOSE, 2008, p.35).

A quebra do contrato didático e a possibilidade de desenvolver a atividade num outro ambiente são para o professor uma mudança de uma zona de conforto para uma zona de risco, e o professor deve estar disposto a enfrentar essa mudança.

Os conceitos de zona de conforto e zona de risco apresentados por Penteado dentro de um ambiente de tecnologia da informação (TI) se aplicam também aos cenários para investigação, pois o professor irá encontrar nestes ambientes os aspectos de imprevisibilidade e incerteza que a autora coloca:

[1] “Com relação à ideia de ambiente de aprendizagem, um contrato didático pode ser definido em termos de um “equilíbrio no ambiente de aprendizagem”. Assim, um contrato didático refere-se à harmonia entre os parâmetros do ambiente de aprendizagem, isto é, à harmonia entre a maneira como o significado é produzido, as tarefas são organizadas, o livro didático é estruturado, a comunicação é desenvolvida etc.” (Skovsmose, 2008, p. 34)

> Um uso que explore as vantagens das TI para ampliar as experiências de ensino e aprendizagem requer um movimento em direção a situações imprevisíveis e com alto nível de surpresa. Essa dimensão – caracterizada por incerteza, flexibilidade e surpresa – é a zona de risco. (PENTEADO, 2000, p. 32)

Por outro lado, situações que não surpreendem o professor caracterizam uma zona de conforto. Conforme a autora: "Entendo "zona de conforto" como a dimensão da prática docente em que estão presentes a previsibilidade e o controle" (PENTEADO, 2000, p. 32).

Finalmente, o terceiro Ambiente de Aprendizagem caracterizado como paradigma do exercício é o tipo (5), que são aqueles em que o professor traz dados reais, normalmente da mídia, legitimando desta forma o ensino do conteúdo que vai ser abordado a partir daqueles dados. O ensino ou aprendizagem de determinado conteúdo que se dá a partir de um material que faz referência à realidade pode ainda assim estar no paradigma do exercício, na medida em que exige do aluno o uso de uma regra ou uma comparação com um problema parecido, não lhe possibilitando uma postura investigativa ou reflexiva. Ao encontro estão as palavras de Polya:

> Ao apresentar um problema o professor põe à frente do aluno uma resposta imediata e decisiva à indagação: *Conhece um problema correlato?* Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter a oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas. (POLYA, 1995. p.124)

Os ambientes do tipo (1), (3) e (5), embora diferentes quanto às referências, apresentam a característica descrita por Polya de não incentivar, ou não possibilitar ao aluno um momento de reflexão ou investigação, para que encontre ou crie um caminho a fim de resolver um problema posto.

Por outro lado, os Ambientes de Aprendizagem dos tipos (2), (4) e (6) são todos cenários para investigação, diferenciando-se pelas referências de cada um.

Os Ambientes de Aprendizagem do tipo (2) são cenários para investigação com referências à matemática pura. São aqueles ambientes em que a investigação dá-se apenas no contexto da matemática, nos quais os problemas apresentados aos alunos não partem da realidade ou de uma semi-realidade. Os enigmas matemáticos, chamados por alguns de "jogos" ou "brincadeiras", possibilitam um ótimo cenário para investigação se tal atividade for bem encaminhada pelo professor. Aqui chegamos a outro ponto importante: para que um Ambiente de Aprendizagem se caracterize como um cenário para investigação é importante o aceite dos alunos em relação à atividade proposta.

Este aceite se caracteriza por sua exploração ativa deste cenário; ou seja, são os alunos que fazem as perguntas e encontram explicações, cabendo ao professor o papel de orientar e propor atividades que contribuam para a compreensão das questões levantadas.

Skovsmose nos alerta que um Ambiente de Aprendizagem pode tornar-se, ou não, um cenário para investigação, dependendo do aceite dos alunos, e quem lhes faz o convite é o professor, sendo que existem muitas formas de fazê-lo. Essa propriedade é muito bem colocada pelo autor:

> ... o cenário somente torna-se um cenário para investigação se os alunos aceitam o convite. Ser um cenário para investigação é uma propriedade relacional. A aceitação do convite depende de sua natureza, ... depende do professor, (um convite pode ser feito de muitas maneiras e para alguns alunos um convite do professor pode soar como um comando), e depende, certamente, dos alunos (no momento, eles podem ter outras prioridades). O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que tem que ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos. (SKOVSMOSE, 2008. p.21)

Voltando aos diferentes tipos de ambientes, os cenários para investigação que fazem referência à semi-realidade, identificados com o número (4) na matriz, fazem uso de uma semi-realidade em que os questionamentos dos alunos sobre esta devem ser aceitos e explorados pelos mesmos, para que, juntamente com o professor, definam quais são as limitações da situação. Diferente do ambiente tipo (3), a semi-realidade aqui apresentada pode ser questionada, sendo as questões um ótimo ponto de partida para que os alunos investiguem e aproximem a semi-realidade da realidade por eles vivenciada.

Um exemplo de atividade que pode se tornar um cenário para investigação com referência à semi-realidade é a Corrida de cavalos, proposta por Skovsmose. Nesta atividade os alunos são convidados a participar, como apostadores ou donos de agências de apostas de uma corrida de cavalos, sendo estes numerados de dois a doze. Os cavalos “correm” quando têm seu número como resultado da soma no lançamento de dois dados. Em nosso trabalho aplicamos a atividade com algumas alterações em relação a que é proposta por Skovsmose. O autor justifica a classificação da Corrida de Cavalos como um cenário para investigação do tipo (4):

> Depois de várias corridas, não há cheiro de cavalos na sala de aula. A grande corrida de cavalos está acontecendo numa semi-realidade, mas não no paradigma do exercício. E as muitas observações sobre as habilidades dos diferentes cavalos (o cavalo número 11 precisa de algumas pílulas de vitamina) não são percebidas como obstruções. A lógica estrita que governa a semi-realidade do ambiente de aprendizagem número (3) não está em operação. A atividade toda está localizada num cenário para investigação. Muitas descobertas estão esperando as crianças. Estratégias estão para ser produzidas e aperfeiçoadas. E, uma vez que essa atividade foi escolhida para ser descrita, o aluno certamente aceitou o convite para participar da grande corrida de cavalos. (SKOVSMOSE, 2008, p.11)

Finalmente, os Ambientes de Aprendizagem do tipo (6) são os cenários para investigação com referência à realidade. Nestes cenários a situação problema proposta pelo professor ou mesmo pelos alunos, surge da realidade. Como exemplo Skovsmose cita um projeto realizado com alunos de sete anos que participam da elaboração de um plano para construção de um parque infantil.

Concordamos com Skovsmose (2008) que o ensino da Matemática não deve se dar apenas em um cenário para investigação do tipo (6), mas que as aulas possam transitar entre os diferentes Ambientes de Aprendizagem. Essa liberdade possibilita uma análise de quais movimentos dentro da matriz do quadro 1, são positivos no ensino e na aprendizagem.

## 1.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para falarmos em resolução de problemas, primeiro temos que esclarecer o que é um problema. Uma resposta clássica, fornecida por Lester (apud POZO, 1998, p.15), diz que um problema é: “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. Para complementar o conceito de problema, apresentamos uma definição de exercício.

> De forma sintética, podemos dizer que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas *sobreaprendidas* (ou seja, transformadas em rotinas automatizadas como conseqüência de uma prática contínua). Limitamo-nos a exercitar uma técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, poder ser resolvidas pelos caminhos ou meios habituais. (POZO, 1998, p.16)

Aproximando os conceitos de Resolução de Problemas e cenário para investigação, lembramos da necessidade de um aceite por parte dos alunos em participar da atividade proposta de forma ativa buscando informações, refletindo, questionando e criando estratégias, para que esta seja um cenário para investigação. Da mesma forma, uma questão só pode ser entendida como um problema, na medida em que o aluno entenda aquela situação como um problema, e que a solução exija mais do que a reprodução de um procedimento repetido e decorado. Pozo observa que:

> Esse caráter relativo e móvel da fronteira entre exercícios e problemas está ligado ao fato de que um problema só existe para quem o considera como tal. Uma mesma tarefa pode representar um problema para um aluno, enquanto que para outro é somente um exercício; ou, inclusive, para um mesmo aluno, em dois momentos diferentes, uma mesma tarefa pode ser considerada de formas diferentes. O fato de uma tarefa chegar a ser um problema dependerá não somente dos conhecimentos prévios do aluno, tanto conceituais como procedimentais, mas também da sua atitude diante da tarefa. (POZO, 1998, p. 159)

Pozo é mais um autor que destaca o papel do professor em transformar uma tarefa em um problema ou exercício:

> Mas a aceitação de uma tarefa como um problema não depende somente dos alunos. Depende também, em grande parte, de como ela foi apresentada e como o professor conduz a aula. Uma mesma tarefa tirada de qualquer livro-texto pode ser percebida pelos alunos como um exercício ou como um problema, dependendo de como percebam a sua *funcionalidade* dentro da aprendizagem, a partir da forma como o professor a apresenta, orienta a sua solução e a avalia. (POZO, 1998, p. 159)

Skovsmose não afirma que se trabalhe apenas em cenários para investigação do tipo (6), mas que se desenvolvam atividades nos diversos Ambientes de Aprendizagem. Nesse sentido, os exercícios, segundo Pozo, "...servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para a posterior solução de problemas..."(POZO, 1998, p. 49).

Observamos que, mesmo com definições e exemplos do que são problemas ou exercícios, é muito tênue a linha que separa estas atividades. Tendo em vista o que já foi colocado pelos autores, destacamos que é a prática docente que permitirá caracterizar uma determinada atividade. Mas ficamos com as palavras de Pozo como um indicativo do caminho a seguir.

> Para que se configuram verdadeiros problemas que obriguem o aluno a tomar decisões, planejar e recorrer à sua bagagem de conceitos e procedimentos adquiridos, é preciso que as tarefas sejam abertas, diferentes umas das outras, ou seja, imprevisíveis. Um problema é sempre uma situação de alguma forma surpreendente. (POZO, 1998, p. 160)

Muitos problemas exigem algum conhecimento, conceito ou habilidade adquirida em sala de aula para sua resolução. Portanto a escola, entre outros objetivos, deve preparar o aluno para que tenha as habilidades ou ferramentas necessárias à resolução de problemas.

Os PCN, desde (2000) apontam nesse sentido:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000, p.40)

Os PCN, nos indicam como a Matemática pode participar deste processo:

> ...aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.
>
> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p.41)

Concordamos com os PCN, que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um processo de longo prazo que deve ocorrer durante todo o período escolar. Pozo também se posiciona desta forma ao afirmar que:

> ensinar a resolver problemas matemáticos não é uma tarefa fácil. Este fato não se deve somente a que a solução de problemas seja um processo complexo no qual entram em jogo diversos componentes, mas também a que a aprendizagem da solução de problemas somente é levada a cabo a longo prazo.(POZO, 1998, p. 65)

No decorrer desse processo, o professor deve auxiliar o aluno a perceber os questionamentos e também os caminhos que são comuns na resolução de problemas distintos. Polya (1995) nos oferece uma lista de indagações e afirma que:

> Se o leitor ficar suficientemente familiarizado com essa lista e conseguir perceber, por detrás da sugestão, a ação sugerida, ele verá que a lista enumera, indiretamente, operações mentais típicas, úteis para a resolução de problemas. (POLYA, 1995, p. 1)

A seguir, o quadro 2 apresenta uma sequência de procedimentos, proposta por Polya (1995), para resolução de problemas:

Quadro 2: Sequência de passos para resolução de problemas

## Como Resolver Um Problema

| | |
|---|---|
| **Primeiro**<br>É preciso *compreender* o problema. | **COMPREENSÃO DO PROBLEMA**<br>*Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*<br>É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?<br>Trace uma figura. Adote uma notação adequada.<br>Separa as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? |
| **Segundo**<br>*Encontre* a conexão entre os dados e a incógnita.<br><br>É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.<br>É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução | **ESTABELECIMENTO DE UM PLANO**<br>Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?<br>*Conhece um problema correlato*? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?<br>*Considere a incógnita*! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.<br>*Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo?* É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu resultado? ? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?<br>É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.<br>Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?<br>Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema? |
| **Terceiro**<br>*Execute* o seu plano | **EXECUÇÃO DO PLANO**<br>Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto |
| **Quarto**<br>*Examine* a solução obtida | **RETROSPECTO**<br>É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento?<br>É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?<br>É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? |

Fonte: POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Interciência, Rio de Janeiro, 2º edição, 1995, p. XII e XIII.

Assim como o autor, não entendemos e não pretendemos que esta sequência seja tratada como um algoritmo e nem que deve ser seguida de forma linear, mas pensamos que ela pode ser mais um aspecto a ajudar o aluno no processo de resolução de problemas.

Ressaltamos a importância de que o aluno perceba que existem estratégias diversas para resolver um problema, embora essa não seja uma percepção muito comum, pois segundo Pozo: "...a maioria dos alunos acredita que existe somente uma forma possível de resolver as tarefas matemáticas. Eles consideram a Matemática como uma ciência acabada e fechada em si mesma, na qual qualquer inovação é impossível." (POZO, 1998, p. 64). Segundo Pozo, as atividades em pequenos grupos podem contribuir para mudar essa concepção da Matemática, pois nelas os alunos podem perceber diferentes estratégias propostas pelos colegas. O autor destaca alguns aspectos das atividades em grupo: "A discussão com os colegas obriga o aluno a tornar explícita e a justificar a forma como compreende uma tarefa, as ferramentas e as técnicas com as quais procura abordá-la, o objetivo a que se propõe ao utilizar cada uma dessas técnicas e a ordem na quais as usará." (POZO, 1998, p.64)

Ainda sobre a resolução de problemas, Pais (2002) nos aponta aspectos positivos do uso desta estratégia didática:

> ... o aluno encontra-se em uma situação de pesquisa de solução de um problema, diversos procedimentos de raciocínios ocorrem sem o controle do professor. A riqueza de idéias provenientes do imaginário do aluno resume a busca de solução do problema. (PAIS, 2002. p. 71)

Enxergamos, nessa riqueza de ideias e nesses raciocínios que ocorrem sem o controle do professor, os momentos de incerteza e imprevisibilidade que Penteado nos coloca e que podem levar o professor a uma zona de risco, mas que também podem levar o aluno a uma exploração única tornando o processo de resolução de um problema um cenário para investigação. Estes momentos devem ser incentivados e possibilitados pelo professor, e, durante o processo, é importante a postura deste diante das ações dos alunos, não apenas respondendo, mas também os questionando. Nesse ponto é fundamental a atuação do professor, as intervenções, quando necessárias, devem auxiliar o aluno, mas não fazer todo o trabalho. Polya nos fala sobre isso:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 1995. p.1)

Polya nos indica um dos principais fatores para que tenhamos sucesso nesse processo:

> ... o professor que realmente deseja ajudar o aluno deve, antes de tudo, estimular a sua curiosidade, incutir-lhe certo desejo de resolver o problema. O professor deve também conceder algum tempo ao aluno, para que ele tome a decisão e se dedique à sua tarefa. (POLYA, 1995. p.114)

Como colocado por Polya, cabe ao professor despertar o interesse dos alunos pelos problemas ou atividades propostas. Conforme vemos no quadro 2, o autor sugere a utilização de problemas auxiliares ou correlatos, porém mais simples. Em nossa sequência didática utilizamos problemas auxiliares, sempre que os alunos demonstraram necessidade. No entanto, os consideramos menos atrativos que os propostos inicialmente, sendo este o principal motivo de não iniciarmos as atividades com problemas correlatos.

Polya, Pozo e Skovsmose destacam a importância de cativar os alunos nas aulas de Matemática. Cada um, a sua maneira, destaca a necessidade de desenvolver no aluno a curiosidade pelo problema apresentado, bem como a importância do aceite do aluno para participar de um cenário para investigação, ou resolução de um problema, sendo esta postura um indicativo do interesse do aluno pela atividade ou problema proposto. Os autores também afirmam que é função do professor despertar esse interesse no aluno.

## 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dentre as leituras de revisão bibliográfica, destacamos três pesquisas que estão relacionadas com a nossa, cuja leitura contribuiu para o desenvolvimento do nosso trabalho. Observamos que existe um número razoável de pesquisas relacionadas ao ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental, no entanto, para o Ensino Médio não ocorre o mesmo.

Iniciamos com a Dissertação de Mestrado de Amari Goulart que tem o título de “O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a Escola Básica”. Segundo a autora, a pesquisa teve como objetivo “analisar o discurso institucional dos conceitos probabilísticos na Escola Básica e verificar se esse discurso instrumentaliza o professor para que ele trabalhe com esses conceitos, de forma que, os alunos aprendam esse conceito de forma significativa.” (GOULART, 2007, p.8). Para a análise dos documentos oficiais, Goulart utilizou Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard, como referencial teórico.

O enfoque sobre os conceitos de probabilidade foi justificado pela afinidade da autora com o tema, a recente inclusão deste no Ensino Fundamental e por dificuldades intrínsecas que a Probabilidade apresenta. Quanto às dificuldades intrínsecas relacionadas à Probabilidade, Goulart afirma que essas "são responsáveis por parte dos professores que atuam na Educação Básica acharem a probabilidade um assunto complexo ou não dominarem esse conteúdo, e, por isso deixam de abordar esses tópicos nas suas aulas." (GOULART, 2007, p.8). Conforme a introdução do trabalho, percebemos essas dificuldades nas escolas de nosso município e, embora tenhamos prática no Ensino Médio, nossa atuação docente exemplifica o cenário colocado por Goulart, pois como relatamos, sempre abordamos superficialmente os conceitos de Probabilidade. Evidentemente, compartilhamos com a autora a afinidade pelo tema, ainda que o nosso interesse tenha surgido tardiamente. Também concordamos que a Probabilidade apresenta dificuldades inerentes a ela bem como ao seu ensino.

Em sua pesquisa, Goulart realizou uma análise das noções básicas de Probabilidade, formas de avaliação e sugestões de abordagens dos conceitos de Probabilidade presentes em documentos oficiais, a saber: Parâmetros Curriculares Nacionais, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Também é feita uma análise das questões de probabilidade presentes em edições do ENEM bem como suas influências nos livros didáticos.

Além das análises já citadas, o trabalho apresenta também uma descrição sobre outras pesquisas na área da Educação Matemática que abordam o ensino e aprendizagem de conceitos de Probabilidade.

Em suas considerações finais a autora conclui que: "Os documentos voltados para o ensino médio, exigem do professor um trabalho autônomo, e, embora possam ser usados como diretrizes, eles não fornecem uma ajuda concreta para a prática docente." (GOULART . 2007, p.79).

Na avaliação sobre o ENEM, a pesquisa conclui que este é uma boa referência em relação ao que deve ser ensinado. Quanto aos livros didáticos, a autora destacou uma tendência de mudança que está relacionada com os conteúdos presentes no ENEM. Mas a pesquisa indica que "todos os trabalhos apontam abordagem compartimentalizada de conteúdos e insuficiência de orientações para os professores." (GOULART. 2007, p.79).

A segunda pesquisa tratada em nossa revisão bibliográfica é a dissertação de Mestrado em Educação Matemática de Marcelo Rivelino Rodrigues, cujo título é "A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de Probabilidade". Em seu trabalho o autor propõe uma sequência de ensino de conceitos probabilísticos de base, com alunos do quarto ciclo, quando abordados no *modelo laplaciano*[2] e no *modelo frequentista*[3]. Em seu referencial teórico são utilizadas as teorias de Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud e a Teoria das Situações de Guy Brousseau.

A sequência didática desenvolvida na pesquisa tem como objetivo "buscar a resposta à questão da utilização da urna de Bernoulli como modelo fundamental para o ensino de Probabilidade. Quais as contribuições que o modelo de urna de Bernoulli poderia trazer na construção dos conceitos probabilísticos de base?" (RODRIGUES, 2007, p.13)

Foi utilizada a atividade "Garrafa de Brousseau": "A atividade baseia-se em estimar a composição das bolas dentro de uma garrafa não transparente, ou seja, em buscar uma estratégia para estimar a proporção de bolas brancas na garrafa na qual foram colocadas bolas brancas e pretas."(RODRIGUES, 2007, p.60). Ainda sobre a atividade o autor coloca que:

> Vale salientar que a opção da variável garrafa não transparente é a de limitar ao aluno, executor da atividade, pois a curiosidade de pegar as bolas contá-las ou mesmo verificar a sua cor fica prejudicado, uma vez que o aluno somente poderá olhar as bolas uma a uma pelo gargalo transparente da garrafa. (RODRIGUES, 2007, p.62)

A atividade da "Garrafa de Brousseau", conforme o autor, que é uma representação concreta da urna de Bernoulli, foi utilizada após a resolução de três atividades que possibilitaram a observação de estratégias desenvolvidas pelos alunos: "todas as anteriores à atividade 4 têm o objetivo implícito de fazer com que o modelo da urna de Bernoulli, utilizado nesta atividade, sirva de modelo para as demais também". (RODRIGUES, 2007, p.88)

O autor conclui que a sequência desenvolvida teve sucesso, pois possibilitou aos alunos construírem os conceitos de probabilidade introduzidos. Outra consideração importante é que "no sistema didático, todos os elementos (aluno, saber, professor) devem interagir de forma a não tirar a autonomia do aluno na construção de seus conhecimentos, como ficou comprovado no decorrer das atividades." (RODRIGUES, 2007, p.94)

---

[2] "cálculo a priori de uma probabilidade pela definição Laplaciana (razão entre o número de sucessos e o número total de casos possíveis". (COUTINHO, 2004, p.18).

[3] "Enfoque freqüentista: atividades experimentais que levam à observação da estabilização das freqüências relativas de um evento quando repetimos a experimentação um número muito grande de vezes." (COUTINHO, 2004, p.17).

Consideramos importante a leitura desta pesquisa, pois nos permitiu entrar em contato com referenciais distintos do que escolhemos, percebendo que nossa proposta poderia ter um olhar diferente do planejado. Por outro lado, nosso referencial (Ambientes de Aprendizagem e Resolução de Problemas) possibilitou um olhar diferente sobre a pesquisa de Rodrigues.

A observação de que uma atividade desenvolvida em um cenário para investigação do tipo semi-realidade foi bem sucedida em seus objetivos, encorajando-nos em nossa caminhada. Salientamos também que o autor destaca a deficiência na formação de professores de matemática em relação aos conceitos de probabilidade. Embora este se refira à região de São Paulo, percebemos em nossa região o mesmo problema, conforme comentado anteriormente.

Além das duas dissertações, destacamos, em nossa revisão bibliográfica, um capítulo do livro "Estudos e reflexões em educação estatística" (LOPES; TEODORO; REZENDE, 2010) no qual é apresentada, no capítulo cinco, a pesquisa: "O ensino de probabilidade por meio de um jogo e da resolução de problemas", realizada por José Marcos Lopes, João Vitor Teodoro e Josiane de Carvalho Rezende. Segundo os autores, o projeto de pesquisa tem como principal objetivo: "apresentar uma nova proposta para o ensino de Probabilidade, utilizando-se um jogo de dados associado à metodologia de resolução de problemas" (LOPES; TEODORO; REZENDE, 2010, p. 138). O trabalho teve duração de dois anos, e a proposta de ensino foi desenvolvida por três professoras em quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública de uma cidade do estado de São Paulo.

Os autores desenvolveram um jogo disputado por duas pessoas que utiliza o lançamento de dados. Foi aplicado um pré-teste e, em seguida, os alunos foram apresentados ao jogo e familiarizados com suas regras. A partir do jogo foram formulados problemas relacionados aos conceitos de Probabilidade. As atividades duraram aproximadamente trinta horas/aula em que foram desenvolvidos os conteúdos de Probabilidade na seguinte ordem: experimento aleatório, espaço amostral e evento, definição de probabilidade, probabilidade da união de dois eventos, probabilidade do evento complementar, probabilidade condicional, eventos independentes e soma e produto de probabilidades. O trabalho utiliza a definição clássica de Probabilidade, também conhecida como Probabilidade de Laplace em que o espaço amostral é finito e os eventos elementares são equiprováveis. Após o desenvolvimento das atividades foi aplicado um pós-teste utilizado com o pré-teste para uma análise comparativa entre os dois.

Na pesquisa, foi salientada pelos alunos a utilização ou apresentação de fórmulas apenas no final das atividades. Foi destacado que os alunos gostaram do jogo, mas observaram que as atividades de resolução de problemas não tiveram a mesma aceitação.

Os autores afirmam que os alunos devem tornar-se ativos na construção dos seus próprios conhecimentos e que atividades de jogos e resolução de problemas propiciam ou facilitam este processo. Concordamos com os autores e acreditamos que atividades de resolução de problemas que possibilitem um Ambiente de Aprendizagem do tipo cenário para investigação, mobilizam os alunos a desenvolverem uma postura ativa.

Finalizamos esta seção observando que os três trabalhos apresentados aqui trazem aspectos diferentes sobre o ensino de Probabilidade. No trabalho de Goulart temos uma análise sobre o tratamento dado ao ensino de Probabilidade em alguns documentos oficiais, enquanto que nos outros dois trabalhos temos propostas de ensino de Probabilidade. Sendo que na pesquisa de Rodrigues o referencial utilizado é diferente do escolhido por nós, enquanto que no trabalho de Lopes, Teodoro e Rezende também é utilizada a resolução de problemas como referencial.

## 1.4 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

### 1.4.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

Esta pesquisa tem como objetivo elaborar, investigar e validar uma sequência didática que auxilie no ensino e na aprendizagem de Probabilidade no terceiro ano do Ensino Médio. Apresentamos a seguir algumas questões que nortearão nossa caminhada: Como desenvolver um ensino de Probabilidade de forma interessante e contextualizada? A compreensão de conceitos de Probabilidade pode auxiliar o aluno na compreensão de sua realidade? É possível desenvolver o ensino de Probabilidade através da resolução de problemas em um cenário para investigação com referências à realidade?

### 1.4.2 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nossa pesquisa foi desenvolvida em sala de aula durante os períodos da disciplina de Matemática, sendo que o pesquisador também é professor titular da turma. Na coleta de dados foram utilizados vídeos, anotações feitas pelos alunos e descrições de situações; portanto, é de grande interesse o desenvolvimento de cada aula. Será no decorrer destas que poderemos observar e questionar os alunos para compreender como está ocorrendo a aprendizagem dos conceitos propostos. Estes aspectos caracterizam nossa pesquisa como qualitativa. Segundo Bodgan e Biklen (apud LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p.13) "a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes".

Dentro da pesquisa qualitativa utilizaremos a abordagem de Estudo de Caso, conforme Lüdke e André:

> O estudo de caso é o estudo de *um* caso, seja ele simples e específico, [...] ou complexo e abstrato. O caso é sempre bem delimitado devendo ter contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. (LÜDKE e ANDRÉ,1986, p.17)

A sequência didática que pretendemos validar em nossa pesquisa contará com atividades desenvolvidas e testadas em outras pesquisas encontradas durante nossa revisão bibliográfica, e com atividades adaptadas ou criadas por nós, dando uma forma singular à sequência didática proposta.

Duas características do estudo de caso, segundo Lüdke e André, que estarão presentes em nossa pesquisa são:

> "Os estudos de caso enfatizam a "interpretação em contexto". Um princípio básico desse tipo de estudo é que, para uma apreensão mais completa do objeto, é preciso levar em conta o contexto em que ele se situa. Assim, para compreender melhor uma manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas devem ser relacionadas à situação específica onde ocorrem ou à problemática a determinada a que estão ligadas." (LÜDKE e ANDRÉ,1986, p.18)

Como dito anteriormente, o pesquisador é também o professor que desenvolve as atividades e suas interações com os alunos são também parte da pesquisa; portanto, não é possível olhar apenas para a proposta ou resultado de uma atividade, mas para todo o processo ou contexto em que ela ocorre.

A outra característica, colocada por Lüdke e André (1986), é a da linguagem utilizada: “Os relatos do estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa. [...] geralmente, um estilo informal, narrativo, ilustrado por figuras de linguagem, citações, exemplos e descrições.” O que está de acordo com nosso trabalho, uma vez que a principal forma de coleta de dados será pela descrição das atividades feita pelo professor.

Estamos cientes dos problemas relacionados a esta metodologia, pois conforme Gouveia:

> A decisão sobre o caso ser ou não “típico”, isto é, empiricamente representativo de uma população determinada, afeta necessariamente a questão da generalização. Como cada “caso” é tratado como único, singular, a possibilidade de generalização passa a ter menor relevância.(GOUVEIA apud LÜDKE e ANDRÉ,1986, p.23)

Pelas características e aspectos citados, uma pesquisa qualitativa com a abordagem de estudo de caso representa a melhor escolha como metodologia para nosso trabalho.

### 1.4.3 CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE

Este trabalho foi desenvolvido no segundo semestre de 2010, na Escola Estadual de Educação Básica Prudente de Morais, localizada no município de Osório, Litoral Norte do Rio Grande do Sul. A escola é a única da rede pública estadual no município que oferece Educação Fundamental, Séries Iniciais e Finais, Ensino Médio e Ensino Técnico. O Ensino Médio oferecido na escola apresenta duas modalidades, uma seriada no turno da manhã e uma semestral, no turno da noite. O Ensino Médio noturno é dividido em seis semestres. Uma das características importantes dos estudantes do noturno é que trabalham durante o dia.

Foi escolhida para aplicação das atividades uma turma do sexto semestre, que corresponde ao terceiro ano do Ensino Médio, pois o autor desta pesquisa é também o professor da disciplina de Matemática da mesma.

A turma tem em sua lista de chamada vinte e cinco alunos matriculados, mas frequentaram regularmente, até o final do semestre, dezenove alunos. Observamos que a evasão ocorre com maior frequência no Ensino Médio Noturno em comparação ao Ensino Médio diurno. No turno da noite as aulas iniciam às dezenove horas, mas é comum o atraso de muitos alunos, pois como afirmamos anteriormente, a grande maioria trabalha. Além dos atrasos é comum a ausência de pelo menos um aluno em cada aula, não sendo sempre o mesmo.

No 6º semestre a disciplina de Matemática tem uma carga horária semanal de quatro períodos divididos em dois encontros. Estando previstos para esse semestre os conteúdos de Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística. Desenvolvemos no primeiro bimestre do semestre o conteúdo de Análise Combinatória, ficando para o segundo bimestre o estudo da Probabilidade e Estatística.

O professor pesquisador lecionou Física para a turma no primeiro semestre de 2010, quando os alunos estavam no quinto semestre. No sexto semestre, cursado na segunda metade do ano de 2010, o autor desta pesquisa assumiu a disciplina de Matemática. Em ambos semestres, no quinto e no sexto, foi escolhido pelos alunos como professor conselheiro.

# 2 DESCRICÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo faremos a descrição e análise de sete aulas, incluindo uma avaliação formal, que ocorreram em uma turma do Ensino Médio noturno da Escola Estadual de Educação Básica Prudente de Morais, localizada no município de Osório/RS, no segundo semestre de 2010.

Organizamos a descrição e análise de cada aula em três etapas:

A primeira etapa corresponde ao "planejamento, objetivos e expectativas" na qual decidimos manter, sem alterações, o texto produzido antes da realização das aulas. Portanto, surgem expressões que remetem ao futuro que neste momento já ocorreu. Em nosso planejamento visamos elaborar atividades com potencial para o desenvolvimento das aulas dentro de Ambientes de Aprendizagem do tipo cenários para investigação. Para isso escolhemos tarefas que tenham a capacidade de se tornarem problemas, no sentido proposto por Polya e Pozo.

A segunda etapa é a "descrição da aula e observações do professor" na qual apresentamos o desenrolar das aulas enquanto tecemos algumas observações. Esta narrativa é um aspecto importante do Estudo de Caso, metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho. Outra característica do Estudo de Caso é que os relatos costumam apresentar um tom informal, ou com uma narrativa que mantém expressões cotidianas, o que iremos respeitar, principalmente em relação às intervenções dos alunos.

A terceira e última etapa de cada descrição e análise das aulas são as "conclusões do professor: expectativas x observações", momento em que podemos analisar nosso planejamento e prática docente apresentados nos dois itens anteriores à luz do nosso referencial teórico.

Para não identificarmos os alunos, iremos chamá-los de aluno A, de aluno B e assim sucessivamente, permitindo uma referência dentro do texto, mas não revelando seus nomes. Salientamos que os pais dos alunos menores de idade e os alunos maiores de idade autorizaram através da assinatura de um termo a participação nesta pesquisa.

A avaliação dos alunos foi feita através de registros do professor referente à participação destes nas atividades propostas durante cada aula. Também recolhemos, no quinto encontro, uma ficha de respostas produzidas pelos estudantes. Além disso, realizamos uma avaliação formal no último encontro. Uma cópia desta avaliação encontra-se disponível no apêndice C.

## 2.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO INICAL

Antes de iniciarmos o desenvolvimento de nossa sequência didática, consideramos relevante aplicar um questionário com o objetivo de sondar concepções e conceitos que os alunos têm acerca do conteúdo Probabilidade, além de verificar algumas expectativas que tínhamos, independentemente do fato de os alunos não terem estudado Probabilidade anteriormente.

O questionário foi dividido em duas partes, sendo que os alunos receberam a segunda parte somente após termos recolhido a primeira já preenchida. A seguir, apresentamos as questões trabalhadas no questionário, bem como uma breve análise das respostas. Uma cópia do questionário se encontra no apêndice B.

Questionário Inicial

Parte 1:

1) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico, o paciente decidiu que não iria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso.

Escolha a opção correta:

a) O doente tem razão, se as primeiras 99 correram bem a centésima tem que correr mal para que a probabilidade de sucesso seja 99%.

b) O doente está errado, a probabilidade de a sua operação ser bem sucedida é de 50%.

c) O doente está errado, a probabilidade de sua operação ser bem sucedida é 99%.

d) O doente está certo.

2) Justifique sua escolha na questão anterior:

3) Ao lançarmos uma moeda, qual a chance de obtermos:

a) cara?

b) coroa?

4) Ao lançarmos duas moedas, simultaneamente, qual a chance de obtermos:

a) duas coroas?

b) uma cara e uma coroa?

c) duas coroas, sabendo que numa das moedas caiu coroa?

5) Dois jogadores de tênis de mesa A e B jogaram entre si, no passado, muitas partidas e cada um ganhou metade das partidas disputadas. Na rodada final de um torneio recente, os mesmos jogadores A e B disputam o prêmio de R$ 600,00. Segundo as regras, partidas serão realizadas até que um dos jogadores consiga 3 vitórias, sendo declarado o vencedor do torneio. Entretanto, quando o jogador A tinha duas vitórias e B uma, faltou luz no local, e a rodada foi interrompida. Na impossibilidade de continuar a rodada e também de marcar para outro dia, o diretor do torneio determinou que o prêmio fosse dividido entre os dois finalistas. Qual a forma correta de fazer a divisão do prêmio?

Parte 2

1) O que você entende por evento aleatório?

2) O que você entende por probabilidade? Escreva um exemplo relacionando com algum fato/situação presente no seu cotidiano?

Na primeira parte do questionário, nas questões 1 e 2, pretendíamos observar se os alunos iriam responder a questão 1 considerando que os 99 resultados anteriores influenciam, ou não, no evento que vai ocorrer, no caso a cirurgia do paciente em questão. Com base em nossa experiência docente, é provável que os alunos considerem que para que a eficiência de 99% se confirme, é necessário que a centésima cirurgia não seja bem sucedida uma vez que as noventa e nove anteriores tiveram sucesso. Na questão número 3, queremos observar apenas a representação que os alunos utilizam para indicar a probabilidade de cada resultado. Já na questão número 4, nos itens a e b queremos confirmar nossa hipótese de que os alunos não distinguem o evento coroa-cara do evento cara-coroa e, portanto suas respostas terão como espaço amostral apenas três eventos. Com o item c da questão 4 verificamos se os alunos conseguem lidar com uma situação em que lhe é apresentada uma condição. Finalmente, na questão 5, os alunos devem sugerir a divisão de um prêmio. Temos a expectativa de que os alunos não levarão em conta as informações relativas a chances de vitória bem como a probabilidade de cada jogador vencer a série, ou seja, supomos que os alunos iriam propor uma divisão com base apenas nos eventos ocorridos. Na segunda parte do questionário, o objetivo é conhecer as concepções que os alunos têm sobre evento aleatório e probabilidade, bem como qual relação que cada um deles estabelece com seu cotidiano.

### 2.1.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO

No dia em que os alunos responderam o questionário estavam presentes no início da aula dezoito alunos, dos quais cinco não conseguiram terminar em tempo a primeira parte. No momento em que muitos alunos estavam respondendo a segunda parte do questionário, chegaram dois colegas, e optamos por pedir a estes que respondessem diretamente a segunda parte. Assim, ficamos com dezoito questionários com a primeira parte preenchida e quinze com a segunda parte.

Em relação à questão 1 da primeira parte, 14 alunos marcaram a alternativa correta, neste caso a alternativa c). As alternativas a) e d) foram escolhidas por apenas 1 aluno cada uma, e a alternativa b) foi marcada por 2 alunos.

Na questão número 2, na qual os alunos deveriam justificar a resposta da questão anterior, consideramos que a metade dos alunos que responderam corretamente a primeira questão justificaram adequadamente sua escolha. Entre os outros 7 alunos que responderam corretamente a primeira pergunta suas respostas foram confusas ou muito curtas, o que pode ter ocorrido pela compreensão incompleta do enunciado. A figura abaixo mostra uma resposta que apresenta a ideia principal presente nas justificativas corretas elaboradas pelos estudantes.

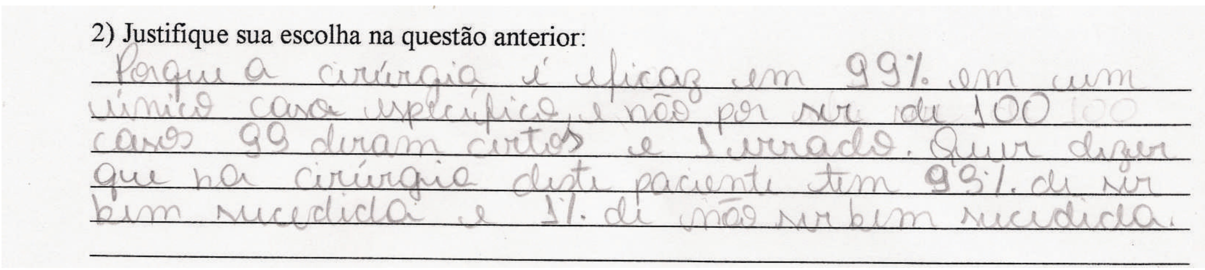
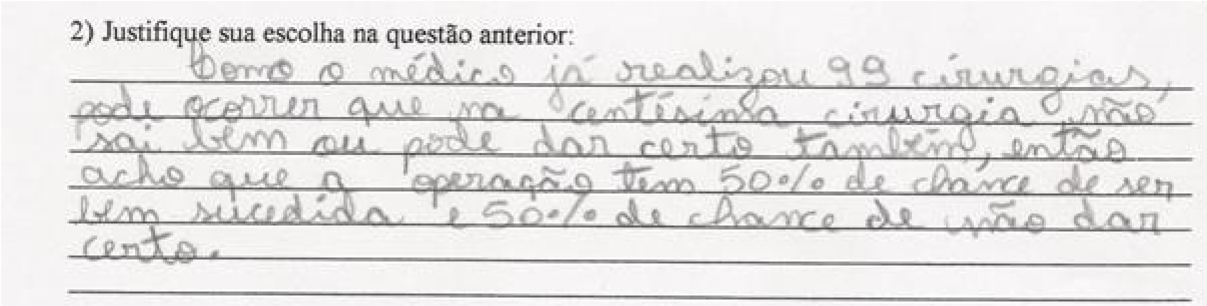

2) Justifique sua escolha na questão anterior:
Porque a cirúrgia é eficaz em 99% em um único caso específico, e não por ser de 100 casos 99 deram certos e 1 errado. Quer dizer que na cirúrgia deste paciente tem 99% de ser bem sucedida e 1% de não ser bem sucedida.

Figura 1: Justificativa dada pela escolha da alternativa c).

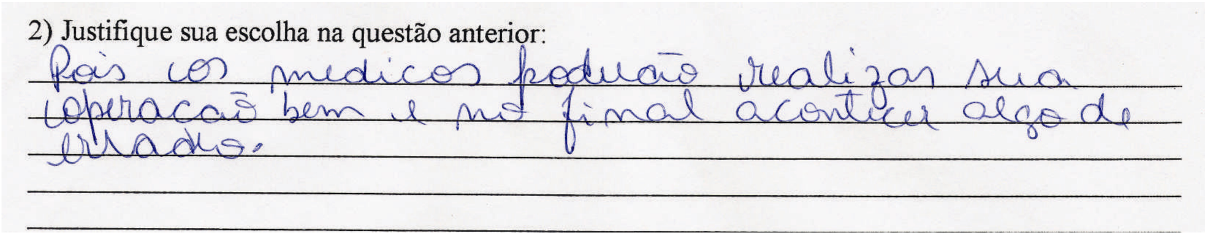
A seguir apresentamos as respostas dos outros quatro alunos:



2) Justifique sua escolha na questão anterior:

Como o médico já realizou 99 cirurgias, pode ocorrer que na centésima cirurgia não sai bem ou pode dar certo também, então acho que a operação tem 50% de chance de ser bem sucedida e 50% de chance de não dar certo.

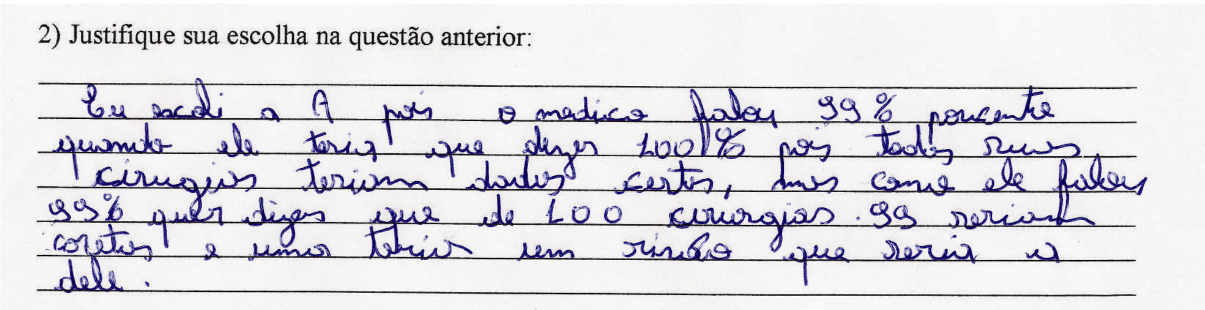
Figura 2: Justificativa dada pela escolha da alternativa b).



2) Justifique sua escolha na questão anterior:

Pois os medicos poderão realizar sua operação bem e no final acontecer algo de errado.

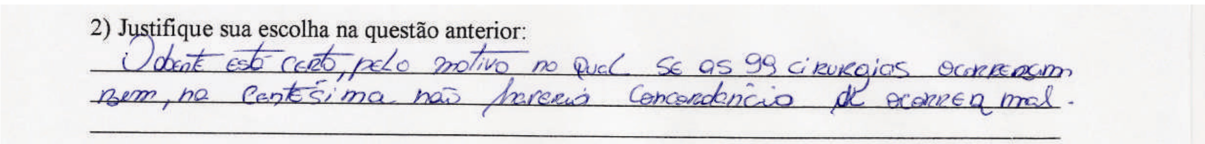
Figura 3: Justificativa dada pela escolha da alternativa b).



2) Justifique sua escolha na questão anterior:

Eu escolhi a A pois o medico falou 99 porcento quando ele teria que dizer 100% pois todas suas cirurgias teriam dados certos, mas como ele falou 99% quer dizer que de 100 cirurgias 99 seriam corretas e uma teria um risco que seria a dele.

Figura 4: Justificativa dada pela escolha da alternativa a).



2) Justifique sua escolha na questão anterior:

Odente está certo, pelo motivo no qual se as 99 cirurgias ocorreram bem, na centésima não haverá concordância de ocorrer mal.

Figura 5: Justificativa dada pela escolha da alternativa d).

Nas justificativas das figuras 2 e 3, podemos ver que os alunos desconsideraram as informações sobre a eficiência obtida na cirurgia, entendendo que são duas as possibilidades, bem sucedida ou mal sucedida sendo 50% de chance para cada situação. Na figura 4 a justificativa do aluno coincidiu com nossa expectativa e na explicação que observamos na figura 5 consideramos a resposta confusa.

Foi surpreendente o fato de que quatorze de dezoito respostas tenham sido corretas na questão número 1. Entretanto, as justificativas não foram satisfatórias na mesma proporção.

Nossa expectativa, em relação à terceira questão, era de que todos acertariam a resposta. Nosso objetivo era observar a forma como os alunos iriam representar sua resposta. Entretanto as respostas não atenderam nossas expectativas. Nas respostas, 6 alunos responderam corretamente aos itens a) e b) com a expressão 50%. Outros 6 alunos deram a resposta "1 chance" ou "1 possibilidade" sendo que um destes alunos ainda escreveu " Pois a moeda tem uma cara e uma coroa". Ainda temos que 2 alunos utilizaram os dois tipos de resposta, dizendo "uma chance" e 50%. Finalmente, tivemos 2 alunos que responderam incorretamente e 1 aluno que deixou a questão em branco.

Ao lermos as respostas, concluímos que a pergunta 3 ficou mal formulada tendo em vista nosso objetivo. Mesmo assim, faremos duas observações:

- Consideramos que a resposta "uma chance" dada por 6 alunos não pode ser considerada errada, pois a questão permite esta interpretação. Ainda assim, é interessante notar que para estes alunos não foi necessário dizer que "uma chance" era em duas possibilidades o que outros representaram como 50%.
- As respostas não foram apresentadas em forma de fração.

Uma vez que interpretamos que a questão 3 ficou mal formulada, propomos aqui uma formulação adequada, visando a uma próxima aplicação da sequência didática:

3) Ao lançarmos uma moeda uma única vez, qual a probabilidade de obtermos:

a) uma cara?

b) uma coroa?

Na questão 4, sobre o lançamento simultâneo de duas moedas, as respostas foram muito variadas, ocorrendo novamente o mesmo tipo de resposta da questão anterior em que os alunos colocaram apenas o número de chances sem indicar em relação a um total de possibilidades. Os dois quadros abaixo apresentam as respostas obtidas para a questão 4:

Quadro 3: Respostas ao item a) da questão 4

| Respostas questão 4 item a: | Número de alunos |
|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 2 |
| 25% | 2 |
| 50% | 3 |
| 1 chance ou 1 possibilidade | 4 |
| 2 chances ou 2 possibilidades | 4 |
| Outras respostas: 16, 30% e 3 chances | 3 |
| Total | 18 |

Quadro 4: Resposta ao item b) da questão 4.

| Respostas questão 4 item b: | Número de alunos |
|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 2 |
| 50% | 5 |
| 2 chances ou 2 possibilidades | 6 |
| 25% | 1 |
| Outras respostas: 2 caras e 2 coroas, 1 possibilidade e 6 chances | 4 |
| Total | 18 |

Assim como na questão 3, a questão 4 permitiu aos alunos uma interpretação que não foi útil aos nossos propósitos. Mesmo que 5 alunos tenham respondido corretamente o item b), respondendo "50%" e que 6 alunos responderam " 2 chances", colocamos em dúvida a compreensão dos alunos em relação ao total de resultados possíveis, pois a maioria dos alunos não justificou sua resposta. Além disso, ao observarmos as respostas de 2 alunos, percebemos que interpretações diferentes levaram a mesma resposta, como vemos nas duas figuras dadas abaixo:

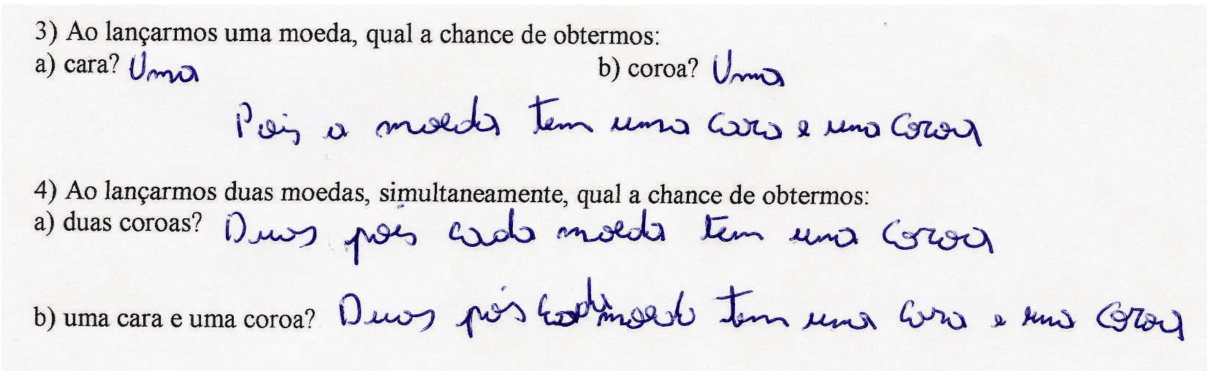

3) Ao lançarmos uma moeda, qual a chance de obtermos:
a) cara? Uma b) coroa? Uma
Pois a moeda tem uma cara e uma coroa
4) Ao lançarmos duas moedas, simultaneamente, qual a chance de obtermos:
a) duas coroas? Duas pois cada moeda tem uma coroa
b) uma cara e uma coroa? Duas pois cada moeda tem uma cara e uma coroa

Figura 6: Respostas questões 3 e 4.

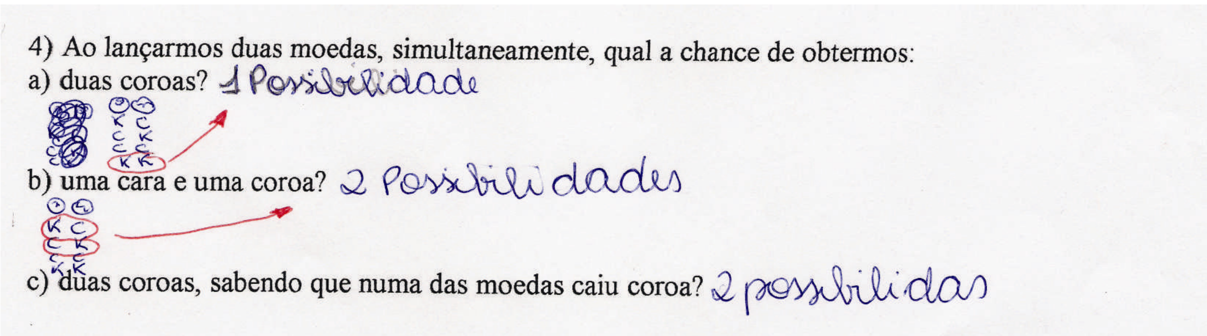

4) Ao lançarmos duas moedas, simultaneamente, qual a chance de obtermos:
a) duas coroas? 1 Possibilidade
b) uma cara e uma coroa? 2 Possibilidades
c) duas coroas, sabendo que numa das moedas caiu coroa? 2 possibilidas

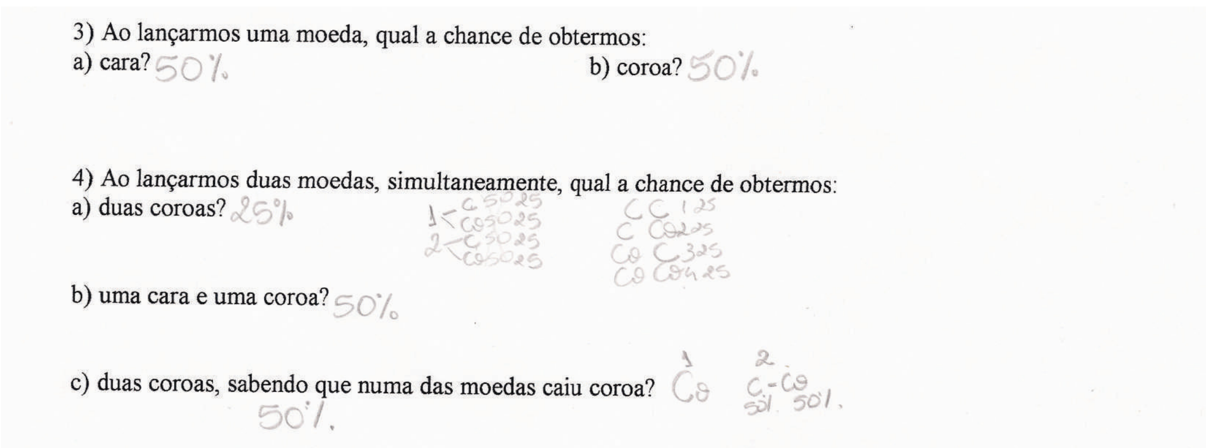
Figura 7: Respostas questões 3 e 4.

Na figura 7 percebemos que o aluno construiu todas as combinações possíveis, ou seja, apresentou o espaço amostral, para o lançamento de duas moedas e indicou o número de resultados para a questão 4. Na figura 6, essa compreensão não fica clara, e nos faz supor que o aluno apenas somou o número de faces de cada moeda, coerente com sua resposta à questão 3. Finalizando a questão número 4, apresentamos a seguir as respostas dos alunos para o item c).

Quadro 5: Respostas ao item c) da questão 4.

| Respostas questão 4 item c: | Número de alunos |
|---|---|
| 1 chance | 4 |
| 50% | 3 |
| 50% e 100% | 2 |
| 75% | 2 |
| Em branco | 3 |
| Outras respostas: 4p, 60% e 2 possibilidades | 4 |
| Total | 18 |

Assim como no item b), a maioria dos alunos não apresentou desenvolvimento ou justificativa para suas respostas. Desta forma não podemos afirmar que os 4 alunos que responderam "1 chance" compreendem que esta "1 chance" representa $\frac{1}{3}$ das possibilidades. Nas figuras abaixo apresentamos as respostas dos 2 únicos alunos, sendo que essas contém também algum desenvolvimento.

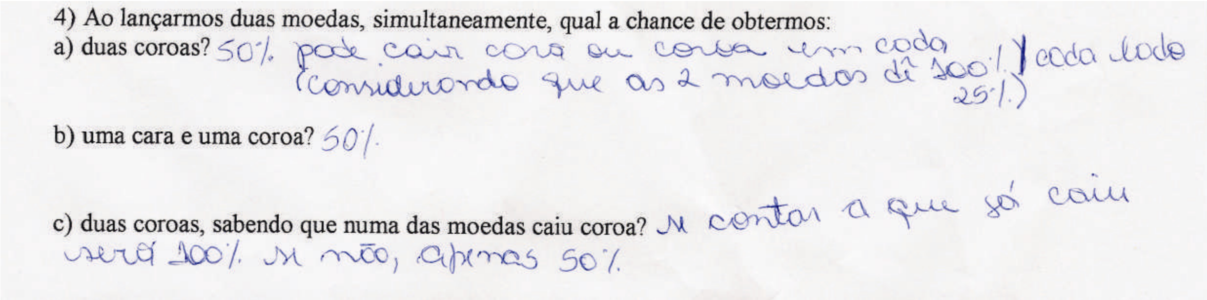

3) Ao lançarmos uma moeda, qual a chance de obtermos:
a) cara? 50% b) coroa? 50%

4) Ao lançarmos duas moedas, simultaneamente, qual a chance de obtermos:
a) duas coroas? 25%

b) uma cara e uma coroa? 50%

c) duas coroas, sabendo que numa das moedas caiu coroa?
50%

Figura 8: Respostas questões 3 e 4.


4) Ao lançarmos duas moedas, simultaneamente, qual a chance de obtermos:

a) duas coroas? 50% pode cair cara ou coroa em cada (considerando que as 2 moedas dê 100%) cada lado 25%.)

b) uma cara e uma coroa? 50%

c) duas coroas, sabendo que numa das moedas caiu coroa? se contar a que só caiu será 100%. se não, apenas 50%.

Figura 9: Respostas questões 3 e 4.

Na figura 8, o aluno justifica a resposta “50%” indicando que em uma das moedas o resultado foi cara e, portanto, na segunda moeda os resultados podem ser cara ou coroa, ou seja, “50%” cada um. Destacamos que o aluno conseguiu listar corretamente o espaço amostral para o lançamento de duas moedas e com isso responder aos itens a) e b), mas não conseguiu utilizar a listagem das possibilidades que ele construiu para analisar e responder o item c).

Na figura 9 consideramos, ao observar as respostas do itens a), b) e c), que o aluno não compreendeu a questão, pois ele coloca que cada face representa 25% e desta forma justifica as respostas dos itens a) e b), sendo que sua resposta para o item c) é confusa.

Tendo em vista que as questões 3 e 4 permitiram uma interpretação, por parte dos alunos, diferente da que pretendíamos, e que a maioria dos alunos não justificou suas respostas, iremos apenas expor uma interpretação baseada nas respostas destas questões. Consideramos que os alunos apresentaram dificuldades na interpretação das questões, não entendendo as situações que estavam sendo propostas, ou mesmo que tenham compreendido as questões, não construíram o espaço amostral corretamente, principalmente na questão 4.

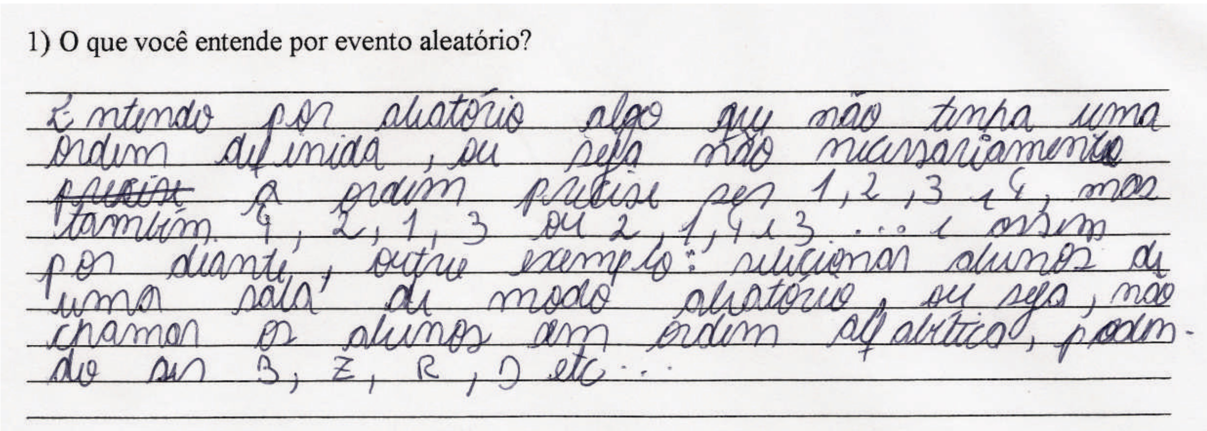
Na questão número 5 confirmamos nossa suposição inicial quanto à divisão do prêmio, pois 10 alunos sugeriam dividir o prêmio em R\$ 400,00 $\left(\frac{2}{3}\right)$ para o jogador A e R\$ 200,00 $\left(\frac{1}{3}\right)$ para o jogador B. Eles utilizaram o número de vitórias como critério para a divisão. As outras respostas se dividiram em:

- 2 alunos sugerindo que deveria ser 50% do prêmio para cada jogador.
- 1 aluno respondeu que o jogador A deveria ganhar tudo.
- outro aluno sugeriu 60% para o jogador A e 40% para o jogador B.
- 3 alunos ficaram na dúvida, pois em suas respostas não sugerem nenhuma divisão.
- 1 aluno deixou a questão em branco.

Considerávamos provável a dificuldade para a resolução da questão número 5, uma vez que para resolvê-la, os alunos precisariam considerar os resultados possíveis de acontecer, ao invés de utilizar os resultados ocorridos. Observamos que 2 alunos, em suas respostas, utilizaram a ideia de dividir o prêmio, levando em consideração o que poderia ocorrer, mas neste caso entendiam que A e B teriam a mesma chance. Com o intuito de explicitar a intenção de que se utilize a probabilidade de vitória de cada jogador como critério para divisão sugerimos uma alteração na formulação da questão. Ficando esta com o seguinte enunciado:

5) Dois jogadores de tênis de mesa A e B jogaram entre si, no passado, muitas partidas e cada um ganhou metade das partidas disputadas. Na rodada final de um torneio recente, os mesmos jogadores A e B disputam o prêmio de R$ 600,00. Segundo as regras, partidas serão realizadas até que um dos jogadores consiga 3 vitórias, sendo declarado o vencedor do torneio. Entretanto, quando o jogador A tinha duas vitórias e B uma, faltou luz no local, e a rodada foi interrompida. Na impossibilidade de continuar a rodada e também de marcar para outro dia, o diretor do torneio determinou que o prêmio fosse dividido entre os dois finalistas. Como fazer a divisão do prêmio considerando a probabilidade de vitória de cada jogador na hipótese da disputa continuar?

Na parte dois as questões pediam que os alunos expressassem o que entendiam por evento aleatório e por probabilidade, além de dar um exemplo relacionado com seu cotidiano. Na primeira questão, selecionamos uma resposta que representa a ideia principal dada por muitos alunos.


1) O que você entende por evento aleatório?

Entendo por aleatório algo que não tenha uma ordem definida, ou seja não necessariamente ~~precisa~~ a ordem precise ser 1, 2, 3 e 4, mas também 4, 2, 1, 3 ou 2, 1, 4 e 3 ... e assim por diante, outro exemplo: selecionar alunos de uma sala de modo aleatório, ou seja, não chamar os alunos em ordem alfabética, podendo ser B, Z, R, D etc...

Figura 10: Resposta da questão 1 da parte 2.

Muitos alunos relacionaram o conceito de aleatório com a ideia de ordenação, sem um critério de organização, como crescente ou ordem alfabética. Muitos usaram a palavra sequência, dizendo que seria uma organização “sem seguir uma sequência”.

Na questão 2 da segunda parte, as respostas fornecidas pelos alunos foram muito variadas. Quatro alunos misturaram os conceitos de Análise Combinatória, conteúdo recentemente estudado, em suas explicações sobre o que entendiam por probabilidade. Em outro tipo de resposta, seis alunos relacionaram probabilidade com a chance de algo acontecer. Nos exemplos apresentados muitos colocaram situações com apenas duas possibilidades de resultado, por exemplo, certo ou errado, chover ou não chover, ser atropelado ou não, entre outros.

Relembramos que nosso objetivo foi sondar alguns conceitos relacionados ao tema de nossa pesquisa. Portanto, sem uma análise detalhada das respostas, nossa impressão é que os alunos, em geral, conhecem superficialmente o significado de aleatório e probabilidade, tendo como base suas experiências cotidianas.

Após a análise das respostas que encontramos nos questionários, entendemos que as atividades propostas deveriam contemplar a exploração dos conceitos básicos de Probabilidade. De acordo com Polya, também consideramos que estas atividades deveriam propor problemas correlatos, mais simples, que auxiliassem na compreensão das atividades principais que iremos propor.

## 2.2 AULA 1 – LANÇANDO MOEDAS E DADOS

### 2.2.1 PLANEJAMENTO, OBJETIVOS E EXPECTATIVAS

Destacamos novamente que nas sessões iniciais de cada aula, em que são apresentados os planejamentos, objetivos e expectativas, optamos por manter o texto produzido anteriormente a aplicação das atividades, e desta forma, o tempo verbal apresentado estará, em alguns momentos, no futuro.

A aula inicial é de grande importância: é nela que o primeiro e principal convite do professor aos alunos para a exploração de um cenário para investigação ocorre. Portanto, para nossa primeira aula, escolhemos uma atividade similar à “Corrida de cavalos” proposta por Skovsmose, e já comentada anteriormente, na qual fizemos adaptações. Além da corrida de cavalos, realizaremos uma atividade mais simples com lançamento de moedas que será complementar à corrida de cavalos.

Entre os objetivos desta primeira aula, o principal é o aceite dos alunos em participar da atividade, criando assim um cenário para investigação. Para isso é fundamental despertar o interesse destes pelo estudo da Probabilidade. Estando os alunos envolvidos e curiosos, discutiremos os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, cálculo de probabilidade além de propiciar aos alunos subsídios que os permitam compreender a Lei dos Grandes Números.

A aula foi planejada para dois períodos de quarenta e cinco minutos e ocorrerá de forma expositiva dialógica, com atividade coletiva e em pequenos grupos. Usaremos como recursos o quadro branco (lousa), dados, moedas e calculadora.

Nos primeiros trinta minutos iremos propor a atividade "Corrida de cavalos": numeramos os "cavalos" de um a doze e lançamos dois dados. Os resultados obtidos serão somados, e o cavalo com o número igual ao da soma obtida avança uma linha, sendo vencedor o cavalo (número) que chegar primeiro na décima casa (linha).

No quadro a seguir mostra a tabela que será construída e preenchida na lousa. A cada lançamento de dois dados, registra-se o resultado da soma destes na tabela, sendo que o número que obtiver dez resultados primeiro será o vencedor.

Quadro 6: Espaço para registro dos lançamentos

Número dos Cavalos

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

Antes de iniciarmos a corrida, cada aluno deve escolher um cavalo e se este for o vencedor o aluno ganha um prêmio que varia de acordo com o cavalo escolhido. O quadro abaixo apresenta o prêmio oferecido por cavalo:

Quadro 7: Premiação oferecida por cavalo.

| Número do cavalo | Prêmio | Número do cavalo | Prêmio |
|---|---|---|---|
| 1 | Uma caixa de bombons; | 7 | Cinco balas; |
| 2 | Uma barra de chocolate; | 8 | Três pirulitos; |
| 3 | Um prensado; | 9 | Três pirulitos; |
| 4 | Dois bombons; | 10 | Dois bombons; |
| 5 | Cinco pirulitos; | 11 | Um prensado; |
| 6 | Três pirulitos; | 12 | Uma barra de Chocolate; |

Realizada a corrida, discutiremos com os alunos sobre as chances de cada cavalo avançar uma casa a cada lançamento do par de dados, justificando, assim, a introdução do conceito de espaço amostral. A seguir, questionaremos os alunos se o lançamento de dados é um evento aleatório, e também serão levantadas questões sobre outros eventos que eles entendam como sendo eventos aleatórios.

Com base em nossa experiência docente temos uma percepção de que os alunos poderão ter dificuldades na compreensão do total de possibilidades para cada resultado no lançamento dos dois dados. Observamos que os alunos tendem a tratar como um único evento dois eventos distintos que geram a mesma soma, como por exemplo, os resultados 2+1 e 1+2 que produzem soma três, motivo pelo qual o cavalo número três tem, a cada lançamento dos dados, duas possibilidades em trinta e seis.

O fato de nunca terem estudado probabilidade, bem como nossa experiência docente, leva-nos a crer que, na corrida de cavalos, os alunos irão escolher o número do cavalo de acordo com o prêmio oferecido por este e não com base em sua probabilidade de avanço a cada lançamento dos dados. Acreditamos, também, que o cavalo número um não será escolhido, mesmo assim resolvemos colocá-lo no páreo, pois ele nos servirá de exemplo, posteriormente, para evento impossível.

Para resolver um problema, Polya (1995) nos indica que em determinadas situações pode ser interessante voltarmos nossa atenção a um problema auxiliar ou correlato que seja mais simples, mas que, com sua solução possamos encontrar algo para resolver nosso problema inicial. Portanto, como atividade seguinte, questionaremos os alunos sobre qual o espaço amostral para o lançamento de uma moeda e para o lançamento simultâneo de duas moedas idênticas, pois essa atividade poderá ajudar os alunos na compreensão da situação do lançamento de dois dados.

Nesta segunda atividade poderá haver dificuldade quanto à compreensão do espaço amostral e da probabilidade de cada resultado no lançamento de duas moedas. É possível que os alunos entendam cara-coroa e coroa-cara como um mesmo evento. Neste caso, esperamos que a atividade dos lançamentos das moedas pelos grupos ajude a desfazer essa concepção.

Organizados em grupos, iremos pedir aos alunos que façam vinte lançamentos de um par de moedas idênticas e anotem os resultados. Após os grupos encerrarem os lançamentos, faremos os registros dos resultados. Possivelmente a tabela a ser elaborada em parceira com os alunos seja próxima à apresentada na figura abaixo.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cara-cara | | | | | | | |
| Cara-coroa<br>Coroa-cara | | | | | | | |
| Coroa-coroa | | | | | | | |

Figura 11: Tabela para registro dos resultados dos lançamentos de um par de moedas.

Com os resultados colocados na tabela, confrontaremos a solução proposta pela turma com o resultado obtido no total de lançamentos. Nesse momento esperamos que os alunos concluam o correto espaço amostral para o lançamento de duas moedas; além desta conclusão, questionaremos os alunos sobre os resultados dos lançamentos das moedas obtidos nos grupos e no total comparando com as probabilidades previstas. Nosso objetivo é que os alunos, a sua maneira, enunciem a Lei dos Grandes Números. Com estes objetivos alcançados poderemos retomar a discussão relativa ao lançamento de dois dados.

### 2.2.2 DESCRIÇÃO DA AULA E OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR

Iniciamos a aula convidando os alunos a participarem de uma corrida de cavalos na sala de aula em que poderiam obter algum prêmio se escolhessem o cavalo ganhador. Com a atenção conquistada, explicamos o funcionamento da corrida e listamos os prêmios oferecidos, já apresentados, no quadro 7. O professor também escreveu na lousa a "pista de corrida", apresentada, no quadro 6, na qual foram registrados os resultados dos lançamentos.

Explicada a atividade, convidamos os alunos a participarem escolhendo o número de um dos cavalos. Foram anotados na lousa o nome do aluno e o número escolhido, para que ao final da corrida entregássemos o prêmio ao vencedor ou vencedores.

Diferentemente da corrida de cavalos proposta por Skovsmose, já descrita anteriormente, em nossa atividade não há uma banca de apostas, ou alunos que organizem apostas com base nas chances de cada cavalo ou com o decorrer da corrida. Neste momento inicial os alunos devem escolher um cavalo, acreditando que possa lhes trazer algum prêmio. Como já dissemos, não ocorrerá um investimento, ou aposta, por parte dos alunos, apenas uma avaliação, individual, dos prêmios oferecidos e das possibilidades de vitória de cada cavalo.

Ao escolherem seus cavalos, para nossa surpresa, dois alunos escolheram o cavalo número 1, e nenhum aluno escolheu o cavalo número 7. De forma geral as escolhas se concentraram nos cavalos de melhores prêmios, sendo estes os de números 2, 3, 4, 10, 11 e 12. Os cavalos 8 e 9 não foram escolhidos. Como dois alunos escolheram o cavalo número 1, explicamos novamente as regras da corrida, com exemplos do que iria ocorrer. Após essa nova explicação foi perguntado se alguém gostaria de trocar o número do seu cavalo. Os alunos que haviam escolhido o cavalo número 1 mantiveram a escolha, mas alguns alunos optaram por trocar. Entre os que mudaram o número, apenas o aluno A escolheu o número 7. Após a corrida, o professor questionou o aluno A sobre sua nova escolha, e ele afirmou que percebeu que o cavalo 7 tinha maiores chances. A aluna B comentou que o colega, aluno A, havia dito isso a ela, mas ela não se convenceu e permaneceu com o número escolhido previamente.

Convidamos seis alunos para jogar os dados, distribuindo seis dados entre eles. Em cada rodada escolhíamos dois alunos para lançar os seus respectivos dados, cuja soma indicaria o número do cavalo que iria avançar.

Um pouco depois que a corrida teve início, a aluna C que havia escolhido o cavalo número 1, questionou, num tom de desconfiança, o outro colega, aluno D, que havia escolhido o mesmo cavalo sobre suas chances de vencer. Ao ouvir os comentários, percebemos que eles haviam compreendido que não teriam chances e, portanto, entendido o funcionamento da corrida.

Conforme os lançamentos aconteciam, o cavalo número 7 tomou a liderança e coincidentemente o aluno A, que apostou no cavalo 7, havia recebido um dado para os lançamentos. Quando este era solicitado a fazer o lançamento junto com outro aluno, e o resultado da soma era 7, alguns alunos, em tom de brincadeira, falaram que ele estava manipulando o resultado. Como não seria surpresa o cavalo 7 vencer, passamos o dado deste aluno para outro, evitando que o comentário se repetisse ou que a possível vitória do cavalo 7 fosse questionada.

A corrida chegou ao final com a vitória do cavalo 9, e, curiosamente, ninguém o havia escolhido. Após a corrida, o professor fez alguns questionamentos. Primeiro, perguntando se os cavalos tinham chances iguais de ganhar, e os alunos responderam que não, pois o cavalo 1 não tinha chance. Então reformulamos a pergunta: “Desconsiderando o cavalo número 1, os outros tinham chances iguais?” Inicialmente alguns alunos responderam que sim, mas então outros alunos disseram que não. Perguntados por que, disseram que, por exemplo, a soma 7 tinha “mais maneiras” de acontecer do que a soma 2. O professor pediu que explicassem, e eles responderam que a soma 7 poderia acontecer de três maneiras: 1+6, 2+5, 3+4 e a soma 2 só com o resultado 1+1.

Chegamos ao momento em que havíamos previsto, e então perguntamos se os resultados 1+6 e 6+1 eram o mesmo. Para a turma, “era a mesma coisa”. Questionamos novamente, com a suposição de termos dois dados com cores diferentes: se obtivermos em um dado vermelho o resultado 1 e em um dado verde o resultado 6, ou invertendo os valores, 6 no dado vermelho e 1 no dado verde, os resultados são diferentes? Os alunos disseram que apenas se a cor importasse, caso contrário, seriam iguais. Neste momento o professor não disse que estavam certos ou errados.

Questionamos, então, sobre o total de maneiras de ocorrer o lançamento de dois dados, sem chamar de espaço amostral. Houve alguma dúvida e, então, mostramos os resultados dos lançamentos da corrida, observando que aqueles eram alguns dos resultados possíveis. Então, com a participação dos alunos listamos os resultados. Ao escrever a segunda linha de resultados, perguntamos novamente se o resultado 1+2 (que foi escrito na primeira linha) era igual a 2+1. Os alunos disseram que sim, portanto o apagamos. Nas linhas seguintes escrevemos seis resultados por linha, mas, ao final, os alunos disseram que o professor deveria apagar alguns, pois já estavam escritos. Então, em vez do quadro com trinta e seis possíveis somas, apresentadas a seguir na figura 12, ficamos com o quadro, na forma de triângulo, com dezoito somas, apresentadas abaixo na figura 13.

Resultados possíveis

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1+1 | 1+2 | 1+3 | 1+4 | 1+5 | 1+6 |
| 2+1 | 2+2 | 2+3 | 2+4 | 2+5 | 2+6 |
| 3+1 | 3+2 | 3+3 | 3+4 | 3+5 | 3+6 |
| 4+1 | 4+2 | 4+3 | 4+4 | 4+5 | 4+6 |
| 5+1 | 5+2 | 5+3 | 5+4 | 5+5 | 5+6 |
| 6+1 | 6+2 | 6+3 | 6+4 | 6+5 | 6+6 |

Figura 12: Resultados possíveis apresentados pelo professor.

Resultados possíveis elaborados pelos alunos

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1+1 | 1+2 | 1+3 | 1+4 | 1+5 | 1+6 |
| | 2+2 | 2+3 | 2+4 | 2+5 | 2+6 |
| | | 3+3 | 3+4 | 3+5 | 3+6 |
| | | | 4+4 | 4+5 | 4+6 |
| | | | | 5+5 | 5+6 |
| | | | | | 6+6 |

Figura 13: Resultados possíveis sugeridos pelos alunos.

O professor fez um breve comentário sobre o que havia sido escrito, dizendo que a resolução elaborada não encerrava a discussão sobre quais eram as somas possíveis, isto é, o professor, neste momento, não deixou claro qual dos dois quadros dados acima apresentava o espaço amostral.

Com base em nossa experiência docente, acreditamos que neste momento o professor, assim como muitos outros professores, teria dado a resposta correta aos alunos. Gostaríamos de destacar a postura apresentada neste momento, pois ao não corrigir a resposta elaborada pelos alunos, o professor demonstra estar considerando o que os alunos estão produzindo. Além disso, uma correção em que apenas se apresenta a resposta correta ou mesmo uma resposta com justificativa, contradiz a nossa proposta de um aluno que participa ativamente das atividades, questionando e elaborando explicações ou respostas para as situações propostas.

Outro fato a destacar é a atitude dos alunos quando dizem que o quadro inicial, apresentado na figura 12, que o professor construiu com as trinta e seis possibilidades, está errado. Observamos essa participação ativa na elaboração da solução como uma demonstração do aceite dos alunos e pensamos ser este um sinal positivo de que a atividade pode ser caracterizada como um cenário para investigação. Acreditamos que no paradigma do exercício uma intervenção como a realizada pelos alunos é um caso raro, uma vez que neste ambiente o aluno, por sua postura passiva, se sente alheio ao problema e à solução apresentada pelo professor.

Para uma parte da turma, o quadro construído e apresentado na figura 13, respondia o questionamento sobre os resultados possíveis, embora percebêssemos que, para alguns alunos, faltava a ratificação do professor de tal resultado. Quando o professor fez o comentário, dizendo que a discussão sobre as somas possíveis não estava concluída, possivelmente, sugeriu que a resposta poderia não ser aquela. Aproveitamos a dúvida e sugerimos que outra atividade, mais simples, fosse realizada, pois esta poderia auxiliar na compreensão da situação, eliminando qualquer dúvida. Este é um momento em que aplicamos uma recomendação de Polya, apresentada no quadro 2, e mencionada no planejamento, que foi a utilização de uma atividade correlata, porém mais simples para em seguida retomarmos o problema inicial.

Antes de propor o lançamento com duas moedas iguais, questionamos os alunos sobre o lançamento de uma moeda, o total de resultados possíveis e a chance de acontecer o resultado cara. A resposta para a chance de ocorrer cara foi “cinquenta por cento”. Nenhum aluno usou a expressão um meio $\left(\frac{1}{2}\right)$. Apresentamos então essa possibilidade de escrita relembrando que já havíamos visto esta representação em questões da prova do ENEM. Em seguida, o professor propôs aos alunos a situação de lançamento simultâneo de duas moedas iguais. Perguntamos a eles quais os resultados possíveis e, como suposto, os alunos responderam que cara-coroa e coroa-cara eram um único resultado. Neste momento, confirmamos que os alunos ainda não haviam percebido que tal resultado poderia ocorrer de duas maneiras. Então questionamos a chance de cada resultado, e o quadro 8 abaixo apresenta a resposta fornecida pelos alunos:

Quadro 8: Quadro, elaborado pelos alunos, com resultados e possibilidades no lançamento de duas moedas.

| Resultados | Possibilidade | Porcentagem |
|---|---|---|
| cara – cara | $1/3$ | 33,33% |
| coroa – coroa | $1/3$ | 33,33% |
| cara – coroa | $1/3$ | 33,33% |

Pedimos que os alunos realizassem o lançamento simultâneo de duas moedas iguais. A turma se organizou em seis grupos, sendo que cada grupo realizou vinte lançamentos de um par de moedas iguais. Registramos os resultados obtidos em cada grupo, apresentados no quadro abaixo:

Quadro 9: Resultados obtidos pelos grupos e frequência relativa por resultado.

| **Resultados** | **grupo 1** | **grupo 2** | **grupo 3** | **grupo 4** | **grupo 5** | **grupo 6** | **Total da Turma** | **Frequência relativa por resultado (%)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **cara – cara** | 6 | 4 | 6 | 8 | 6 | 4 | 34 | 28,3 |
| **coroa – coroa** | 3 | 4 | 3 | 3 | 8 | 7 | 28 | 23,3 |
| **cara – coroa** | 11 | 12 | 11 | 9 | 6 | 9 | 58 | 48,3 |

Antes de continuarmos com a descrição da atividade, gostaríamos de observar dois comentários que aconteceram durante a realização da mesma e que no momento não foram explorados. Num dos grupos os alunos questionaram o professor sobre como deveriam registrar o resultado com faces diferentes, se cara-coroa ou coroa-cara, o professor deixou que escolhessem. E durante o registro no quadro, um grupo ao observar que o professor havia escrito cara-coroa disse que "haviam anotado coroa-cara e se tinha algum problema em fazer assim", foi respondido que "tudo bem". Neste momento poderíamos ter questionado se estas duas possibilidades eram diferenciáveis.

Com os resultados de todos os grupos anotados no quadro branco, realizamos a soma de cada resultado possível bem como o cálculo da frequência relativa de cada resultado.

Chegamos num momento importante, com o quadro 8 ao lado do quadro 9, questionamos os alunos sobre os resultados que calculamos e o que obtivemos com os lançamentos das moedas.

Os alunos observaram a diferença entre o resultado cara-coroa para os outros dois resultados possíveis, sendo esta quase 50% do total. Mas não surgiu, neste momento, nenhum comentário que indicasse que os alunos haviam entendido que o resultado cara-coroa tivesse sido contado como dois resultados diferentes, uma vez que as moedas eram iguais e, portanto os resultados cara-coroa e coroa-cara não eram distinguíveis.

O professor propôs a ideia de analisar a situação no caso em que as duas moedas têm cores diferentes, questionando como poderia ser obtido o resultado cara-coroa. Observando que poderia ocorrer de duas maneiras, voltamos para a situação de moedas iguais e perguntamos se o fato de não conseguirmos diferenciar as moedas mudava algo. Neste ponto os alunos manifestaram a compreensão de que cara-coroa e coroa-cara eram eventos diferentes, mas contabilizados para um único resultado.

Convictos de que os alunos haviam compreendido esta diferença, sugerimos que os alunos elaborassem um novo quadro com os resultados cara-coroa e coroa-cara como resultados distintos. O quadro que segue apresenta o resultado obtido:

Quadro 10: Resultados possíveis no lançamento de duas moedas e respectivas probabilidades.

| Resultados | Possibilidade | Porcentagem |
|---|---|---|
| cara – cara | $1/4$ | 25% |
| coroa – coroa | $1/4$ | 25% |
| cara – coroa | $1/4$ | 25% |
| coroa – cara | $1/4$ | 25% |

Com o quadro pronto pedimos que os alunos observassem as porcentagens e ficou claro para eles que os resultados cara-coroa e coroa-cara se somavam, resultando então na porcentagem 50%, algo muito próximo do obtido nos lançamentos (conforme quadro 9).

Comentamos que tínhamos quatro resultados possíveis, sendo a chance de um quarto para cada resultado, mas que dois eventos diferentes (cara-coroa e coroa-cara) não poderiam ser diferenciados (pois utilizamos duas moedas iguais), portanto eram contados como um único evento.

Ainda não satisfeito, o professor propôs a uma aluna se ela jogaria com ele o seguinte jogo: lançar duas moedas, caindo cara-cara, ela venceria; caindo uma coroa e uma cara, o professor ganharia. Após este comentário, aliada à observação de que o resultado que daria vitória ao professor podia ocorrer de duas formas, consolidou-se a ideia de que são eventos diferentes.

Após o esclarecimento de que cara-coroa é um resultado que pode ser obtido de duas maneiras, enquanto que cara-cara ou coroa-coroa apenas de uma, voltamos à situação da corrida de cavalos, pensando no total de resultados possíveis para o lançamento dos dois dados. Nesse momento, completamos o triângulo formando o quadrado com os trinta e seis resultados possíveis apresentados anteriormente na figura 12. Então, perguntamos aos alunos sobre as chances de cada cavalo.

Escrevemos as possibilidades de cada um deles na lousa, apresentado no quadro 11, observando que os cavalos não tinham as mesmas probabilidades e comentamos sobre como foi feita a distribuição dos prêmios por cavalo.

Quadro 11: Probabilidade de cada cavalo.

| Cavalo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilibade | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Neste momento a aluna E perguntou por que o cavalo 9 foi o vencedor, sendo que o cavalo 7 é o que tem maiores chances. A pergunta ficou para ser respondida na aula seguinte já que acabara o tempo.

### 2.2.3 CONCLUSÕES DO PROFESSOR: EXPECTATIVAS X OBSERVAÇÕES

Destacamos que o principal objetivo que era despertar o interesse dos alunos, deixando-os curiosos e fazendo-os participar ativamente da aula, foi alcançado, pois a turma interagiu durante a aula, ficando atenta aos lançamentos, comentando resultados, “corrigindo” a escrita do professor no quadro, quando preenchemos a primeira tabela com os trinta e seis resultados possíveis nos lançamentos dos dados, perguntando e respondendo questões.

Com relação às perguntas feitas pelos alunos, destacamos a questão levantada no final da aula pela aluna E, relativa à vitória do cavalo 9, pois consideramos importante tal reflexão. A pergunta da aluna nos permite supor que ela entendeu que o cavalo 7 tinha mais chances de ganhar, porém o fato do cavalo 9 ter vencido a corrida, de certo modo, contradiz sua expectativa. O questionamento da aluna E demonstra seu interesse e, principalmente, um posicionamento investigativo o que, juntamente com a participação da turma, evidencia que o convite foi aceito.

Algumas das expectativas foram confirmadas, como por exemplo, a dúvida sobre o resultado 1+2 e 2+1 serem eventos diferentes contados, pelos alunos, para o mesmo resultado. No entanto, não esperávamos uma dificuldade tão grande em fazer os alunos compreender este detalhe. Este fato acabou atrasando a aula, e a maioria dos objetivos não foram atingidos, ficando então para a aula seguinte. O fato de não abordamos todos os conceitos que havíamos planejado para a primeira aula, inicialmente nos pareceu um atraso e, em termos de cronograma, realmente se trata de um atraso.

Questionamo-nos sobre o planejamento, se não havíamos preparado uma atividade muito maior que o tempo disponível. Mas podemos ter um outro olhar sobre nossa prática, pois se pensarmos em termos de zona de conforto e zona de risco, caracterizamos a utilização passo a passo do planejamento, sem a possibilidade de mudanças no desenvolvimento da aula, como uma situação de conforto para o professor. Ao permitirmos e, principalmente, incentivarmos a participação dos alunos na aula, o professor deve estar disposto a modificar seu planejamento, dando espaço no desenvolvimento da mesma às intervenções dos alunos. Esta disposição do professor o levará para uma zona de risco, pois não é possível prever os questionamentos que virão. Portanto, o que gerou o atraso em nosso cronograma foi, até certo ponto, os espaços abertos à participação dos alunos, sendo que a participação ativa dos alunos é um dos nossos objetivos principais.

Gostaríamos de salientar o papel do professor no que se refere a sua postura diante das intervenções dos alunos. Não basta que os alunos sintam-se à vontade e instigados a intervir através de questionamentos ou colocações sobre o assunto, é necessário que o professor considere essas participações no seguimento da aula. Além disso, o professor deve estar atento à compreensão, demonstrada pelos alunos, do assunto que está sendo abordado. Para tal, este deve propiciar a turma que, em geral, entenda e responda os questionamentos feitos pelos colegas, em princípio ao professor.

Nestas situações é muito comum que o professor responda diretamente ou rapidamente, o que não contribui com o desenvolvimento de uma postura investigativa por parte dos alunos, pois a resposta interrompe um processo de investigação que permitiria aos alunos encontrarem ou produzirem uma solução para o seu questionamento, o que seria para eles muito mais relevante do que uma resposta dada pelo professor. Portanto, em vez do professor responder diretamente ou rapidamente, ele deve trabalhar para que seus alunos respondam os questionamentos que surgirem.

Neste momento, é importante a orientação do professor, no sentido de propor atividades que possibilitem uma continuidade na investigação iniciada pelos alunos e que auxiliem a turma a solucionar o problema. Esta postura se apóia nas palavras de Polya, já citadas no capitulo 1, sobre a utilização de problemas correlatos para a compreensão de um problema mais complexo, bem como na importância de que ao aluno caiba uma parte da tarefa e que este disponha de algum tempo para sua resolução.

Um modo de manter esta postura é retomarmos um questionamento anterior, com um enfoque diferente sobre o mesmo conceito, quando percebemos que alguns alunos não demonstram compreensão ou não estão satisfeitos com o que está sendo discutido. A pergunta elaborada pela aluna E no final da aula, e que já comentamos aqui, será de grande importância em nossa sequência didática, pois a resposta ao questionamento da aluna passa pelo conhecimento da Lei dos Grandes Números. Para isso, as atividades que serão desenvolvidas devem propiciar a compreensão deste conceito.

Destacamos que num cenário para investigação, diferentemente do paradigma do exercício, a participação dos alunos também interfere na preparação da sequência didática, pois como já colocamos, é papel do professor orientar os alunos, e uma das formas de realizar esta orientação é propondo atividades no decorrer das aulas. Consequentemente, a participação dos alunos irá influenciar na escolha das atividades e em sua abordagem.

Por meio das observações e análise apresentadas até aqui, classificamos a atividade desenvolvida nesta aula como um Ambiente de Aprendizagem do tipo (4) na matriz apresentada no quadro 1. Como já dissemos, a atividade despertou o interesse dos alunos, sendo que os mesmos propuseram soluções para algumas questões e apresentaram perguntas sobre o que ocorreu durante a aula, o que evidencia a participação e, principalmente, a investigação dos alunos em relação à atividade proposta.

## 2.3 AULA 2: FORMALIZANDO CONCEITOS

### 2.3.1 PLANEJAMENTO, OBJETIVOS E EXPECTATIVAS

No início da segunda aula faremos uma retomada das atividades realizadas no encontro anterior, questionando os alunos sobre o que eles entenderam por evento aleatório e se as atividades como o lançamento de moedas ou dados são eventos deste tipo.

A retomada da aula anterior servirá também para definirmos eventos equiprováveis e espaço amostral, pois daremos como exemplos a corrida de cavalos em que temos o lançamento de dois dados, além de falar do lançamento de uma ou duas moedas. Questionaremos os alunos sobre outros eventos e possíveis espaços amostrais, como baralhos ou jogos como Mega-sena.

Também iremos definir o conceito de Probabilidade e relembrar situações em que a usamos. Percebemos que os alunos já a usam intuitivamente, como por exemplo, quando responderam que a chance de ocorrer 3 no lançamento de um dado é de um sexto $\left(\frac{1}{6}\right)$.

Como destacamos na aula anterior, não foi respondido o questionamento colocado pela aluna E, sobre o porquê da vitória do cavalo número 9, uma vez que era mais provável a vitória do cavalo número 7. Esperamos que, após os alunos compreenderem a Lei dos Grandes Números, eles consigam responder a esta questão.

A aula ocorrerá de forma expositiva e dialógica e utilizaremos quadro branco (lousa), pincel e calculadora.

### 2.3.2 OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A AULA

Após retomarmos a aula anterior questionamos os alunos sobre o que eles entendem por experimento aleatório. Em suas respostas alguns alunos falaram sobre o software Windows Média Player[4] (WMP) que, segundo eles, tem a opção de executar músicas de forma aleatória. Questionamos se poderia numa lista de músicas, ocorrer de ouvirmos a mesma música consecutivamente e alguns alunos disseram que não. Mas a aluna B disse que no aparelho de celular isto pode ocorrer. Tivemos a impressão de que alguns alunos não entenderam a diferença entre as duas situações. Para esclarecer a situação, fizemos uma comparação entre uma lista de músicas colocadas em execução e um dado sendo lançado. Se o resultado do dado for o número dois, no lançamento seguinte pode acontecer de cair o número dois novamente e, segundo os alunos, no WMP, caso a música dois da lista fosse executada, a música seguinte não poderia ser a mesma, já no celular isso poderia ocorrer. Concluímos, juntamente com os alunos, que o programa que executa as músicas no celular se assemelha ao lançamento de um dado ou uma moeda quanto a ser um experimento aleatório, enquanto que no WMP a cada música sorteada, a partir da segunda, existe uma restrição nas músicas que podem ser sorteadas. Após essa discussão apresentamos a definição de Experimento Aleatório segundo Silva:

*Qualquer processo de observação que pode ser repetido à vontade em condições análogas, com a condição de que o resultado não possa ser previsto antes de cada uma de suas realizações.* (Silva, 1999. p. 67).

[4] Programa computacional da Microsoft Corporation.

Como havíamos listado algumas músicas para a comparação entre o lançamento do dado e o funcionamento do WMP, utilizamos este como primeiro exemplo para espaço amostral. Em seguida exemplificamos o espaço amostral com o lançamento de um dado ou de uma moeda. Após os exemplos, apresentamos a seguinte definição de espaço amostral: *"Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento"* (Silva, 1999. p. 68).

Após apresentarmos a definição, perguntamos qual seria o espaço amostral para o lançamento de dois dados. Alguns alunos responderam doze. Observamos que estava havendo uma confusão com a atividade dos cavalos da aula anterior. Os alunos não diferenciaram os resultados possíveis no lançamento de dois dados (trinta e seis) das somas possíveis no lançamento de dois dados (onze) e ainda incluíram o número um, por causa do cavalo 1, presente na atividade da aula anterior. Como alguns alunos estavam com dúvida, e a aluna F havia faltado na aula anterior, achamos oportuno construir novamente o quadro da figura 12, mostrando os trinta e seis resultados possíveis e diferenciando estes das somas possíveis. Comentamos sobre a corrida de cavalos e sobre os prêmios oferecidos por cada cavalo e percebemos que ficou claro para os alunos o motivo da distribuição de prêmios que escolhemos. Alguns alunos observaram que cavalos como o 2 e o 12 têm a mesma probabilidade de avançar, portanto tinham o mesmo prêmio. Aproveitamos o comentário dos alunos para exemplificar e diferenciar Evento Simples, sendo aquele com apenas uma maneira de ocorrer, de Evento Composto, em que há mais de uma maneira para o evento ocorrer. Utilizamos como exemplos as somas possíveis no lançamento de dois dados, retomando as respostas que havíamos elaborado com os alunos na aula anterior. Observamos que as somas 2 e 12 são eventos simples, pois só podem ocorrer de uma forma, sendo elas, respectivamente, 1+1 e 6+6, o que exemplifica dois eventos que são equiprováveis, enquanto que as outras somas possíveis são eventos compostos. Também comentamos que as somas 2 e 12 são chamadas de eventos equiprováveis, pois têm a mesma probabilidade de ocorrer, assim como as somas 3 e 11. Por outro lado, as somas 3 e 4, por exemplo, não têm a mesma probabilidade de ocorrer. De fato, a "soma 3" ocorre de duas maneiras diferentes, a saber, 1+2 e 2+1, enquanto que a "soma 4" ocorre de três formas diferentes, a saber, 1+3, 2+2 e 3+1. Consequentemente, os eventos "soma 3" e "soma 4" não são equiprováveis.

Como havíamos retomado a discussão sobre a corrida, perguntamos se todos tiveram a mesma chance de vencer, e os alunos responderam que não, conforme quadro 10. Comentamos que em alguns jogos de cassinos o jogador sempre está em desvantagem quanto à probabilidade de vitória. Os alunos fizeram perguntas sobre jogos como "Mega-Sena" e "Tri Legal" e, na discussão sobre estes, surgiu o comentário de um aluno sobre apostar em "bolões", uma vez que havia sido dito que a chance de vitória nestes jogos é muito pequena, sendo o "bolão" uma alternativa para aumentar as chances sem maiores custos. Informamos aos alunos que os "bolões" organizados por lotéricas não são autorizados pela Caixa Econômica Federal. Portanto, há riscos em participar de um "bolão" e, no caso de ser sorteado, não receber o prêmio, pois ele é pago apenas à pessoa que tem o comprovante do jogo.

Na primeira aula já havíamos determinado a probabilidade de cada cavalo avançar uma casa, além de termos construído o quadro da figura 14 no qual indicamos quais resultados no lançamento de dois dados resultariam nos números dos cavalos.

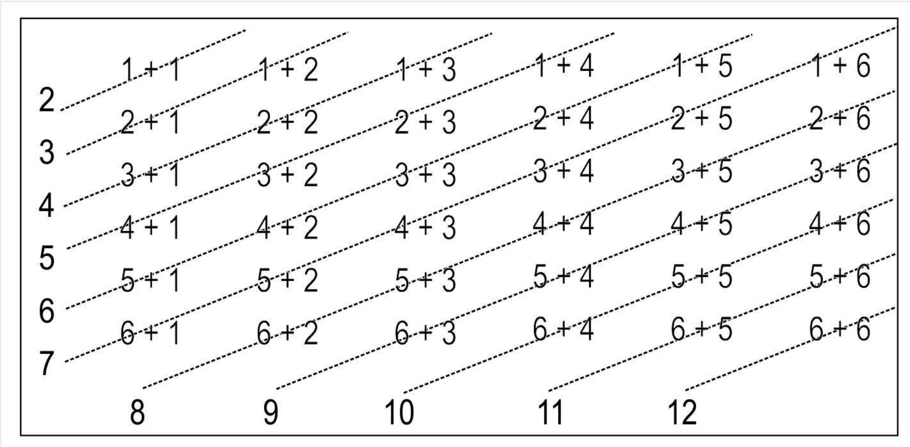



Figura 14: Somas possíveis no lançamento de dois dados.

Como esperávamos e havíamos verificado, os alunos já tinham algum conhecimento de como calcular probabilidade, principalmente para eventos simples, como no lançamento de uma moeda ou dado. Observamos que os alunos responderam aos questionamentos sobre a probabilidade de um evento ocorrer de diferentes formas. Alguns utilizaram a porcentagem, dizendo, por exemplo, que a possibilidade de ocorrer "cara" em um lançamento de uma moeda era de cinquenta por cento. Enquanto outros disseram que, no lançamento de um dado, a possibilidade de obter o número dois é de um sexto.

Portanto, após discutirmos qual o espaço amostral para o lançamento de dois dados, a apresentação da fórmula para calcular a probabilidade de um evento ocorreu de forma natural para os alunos. Abaixo, a definição que apresentamos:

A probabilidade de ocorrer um evento A, indicado por p(A), é um número que mede essa chance e é dada por:

$$p(A) = \frac{\text{Número de vezes que pode ocorrer o evento A}}{\text{Número de elementos de E}} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

ou

$$p(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número total de resultados possíveis}}$$

Com o tempo esgotado, encerramos a aula neste ponto, ficando para o próximo encontro a discussão sobre a vitória do cavalo 9.

### 2.3.3 CONCLUSÕES DO PROFESSOR: EXPECTATIVAS X OBSERVAÇÕES

Havíamos planejado retomar o encontro anterior, mas o fato de uma aluna ter faltado na primeira aula, suscitou alguns comentários mais detalhados das atividades para que ela entendesse, sendo estas explicações feitas pelo professor, mas às vezes por algum colega.

Durante o resgate das atividades e os questionamentos dos alunos, definimos muitos conceitos que estavam sendo discutidos. Observamos que estas definições pareceram naturais ou até óbvias, para alguns. Os alunos entenderam como chegamos às definições a partir das atividades realizadas na aula anterior.

Destacamos que, apesar de em boa parte da aula termos formalizado alguns conceitos, não classificamos a aula como totalmente tradicional. De fato, em uma aula tradicional, sob paradigma do exercício, o professor apresenta os conceitos, resolve alguns exemplos para em seguida propor questões que serão, na sua maioria, repetições dos exemplos. Nesta aula, as definições foram apenas um momento de formalização de conceitos discutidos com os alunos e que surgiram de atividades que despertaram o interesse, provocaram a participação dos alunos e propiciaram exemplos para as definições e conceitos que estavam sendo trabalhados. Observamos que as atividades transitaram entre os cenários para investigação que fazem referência à semi-realidade; no caso da corrida de cavalos, e a realidade; no caso da discussão proposta pelos alunos sobre os programas para reproduzir músicas em computadores ou celulares. Portanto, os conceitos foram construídos a partir de uma atividade em que os alunos participaram propondo exemplos, e as definições tiveram apenas uma função de formalizar um conceito que já era conhecido e compreendido pelos alunos.

Novamente destacamos o espaço para a intervenção dos alunos, pois em nosso planejamento não havíamos pensado no programa WMP como exemplo para experimento aleatório. Aceitamos como legítimas as afirmações dos alunos sobre as funcionalidades deste programa bem como as do programa do aparelho de celular, embora o professor não conheça detalhadamente tal aplicativo nem tenha certeza sobre o funcionamento do WMP. A discussão sobre as diferenças entre os dois exemplos trazidos pelos alunos foi muito interessante e com grande participação destes, pois observaram que o professor não conhecia os detalhes de funcionamento dos aplicativos citados e estava interessado nas explicações sobre estes. A discussão foi muita profícua, inclusive gerando uma situação que serviu de primeiro exemplo para espaço amostral como citado anteriormente. Percebemos aqui, novamente, a transição entre as zonas de conforto e zona de risco, pois mesmo sem conhecer completamente os aplicativos que estavam sendo utilizados como exemplos, o professor possibilitou que os alunos discutissem, explicassem e chegassem a um consenso sobre o funcionamento dos aplicativos. É importante salientar que esta discussão propiciou à turma observar semelhanças e diferenças entre os dois aplicativos e o lançamento de um dado, que foi o exemplo proposto pelo professor como comparativo. Seguindo o sentido contrário de uma aula tradicional, em que se define um conceito para então se apresentar exemplos que ilustram ou explicam este, a definição de Experimento Aleatório sucedeu discussões em que os alunos puderam compreender o conceito, pois um dos aspectos de diferenciação entre os aplicativos era a possibilidade de repetição, ou não, de uma música em uma sequência. Além do conceito de Experimento Aleatório, os demais conceitos definidos em aula surgiram das atividades desenvolvidas na aula anterior.

Repetiu-se o fato de não conseguirmos realizar todas as atividades planejadas. Não vemos isso como um problema, uma vez que o tempo foi utilizado para discutir questões e dúvidas apresentadas pelos alunos. Outro aspecto a se considerar sobre o possível atraso no planejamento, é perceber que a discussão promovida possibilitou uma compreensão mais profunda dos conceitos o que pode facilitar o entendimento de outros temas que serão trabalhados mais adiante. Em geral quando trabalhamos sob o paradigma do exercício, é mais fácil administrarmos o tempo, e nesta abordagem os conceitos apresentados aos alunos são decorados e aplicados mecanicamente, demonstrando uma concepção de utilização em curto prazo, visando a uma possível avaliação. Já a construção dos conceitos da forma como desenvolvemos, possibilita uma compreensão mais sedimentada, o que vai ao encontro da concepção de que os alunos não devem apenas decorar conceitos, pelo contrário, devem compreendê-los para que, tanto na sua vida escolar como no dia a dia, possam utilizá-los. Esta construção contempla o que encontramos nos PCN em relação ao papel da Matemática, quando afirma que esta ciência tem, também, uma função de ampliação da visão científica da realidade, bem como do desenvolvimento de habilidades de leitura e interpretação desta realidade.

## 2.4 AULA 3: LEI DOS GRANDES NÚMEROS

### 2.4.1 PLANEJAMENTO, OBJETIVOS E EXPECTATIVAS

Na aula anterior alguns conceitos não foram apresentados e neste encontro encerraremos as atividades planejadas para as aulas anteriores. Além disto, ficou para ser respondida uma questão colocada pela aluna E, sobre o motivo da vitória do cavalo número 9, uma vez que era mais provável a vitória do cavalo número 7. Para que os alunos compreendam a Lei dos Grandes Números iremos relembrar e discutir a questão colocada pela colega, e para isso vamos retomar os resultados registrados no quadro 9, fazendo algumas observações e comparações.

Selecionamos algumas questões que serão propostas após realizarmos a atividade sobre a Lei dos Grandes Números e responderemos a questão da aluna E. No final deste terceiro encontro teremos apresentado e discutido, a partir de problemas que permitiram a criação de cenários para investigação, vários conceitos do conteúdo de Probabilidade. Percebemos, através de nossa atividade docente bem como nas palavras de Pozo, que é necessário um momento em que os alunos possam aplicar os conceitos estudados, consolidando as estratégias que foram discutidas, em outras questões ou problemas. Este momento se caracteriza como uma atividade de resolução de exercícios, mas relembrando Skovsmose, concordamos que devem ocorrer momentos nos diferentes Ambientes de Aprendizagem.

A aula será expositiva e dialógica e com atividades em pequenos grupos. O material utilizado será o quadro branco, pincel e calculadora.

## 2.4.2 OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A AULA

No início da aula recolocamos na lousa o quadro com as chances que calculamos para cada resultado no lançamento de duas moedas, quadro 10, e os resultados dos lançamentos das moedas realizados por cada grupo, quadro 9.

Com os quadros prontos relembramos que no lançamento simultâneo de duas moedas iguais são quatro os resultados possíveis, e cada resultado tem um quarto, ou vinte e cinco por cento, de probabilidade de ocorrer.

Após a retomada dos quadros e breve discussão sobre os resultados, pedimos aos alunos que calculassem as porcentagens, e frequências relativas, de cada resultado por grupo e da turma. Completamos o quadro, apresentado na figura 15, no qual colocamos os valores calculados pelos alunos.

| | Grupo 1 | | Grupo 2 | | Grupo 3 | | Grupo 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequência<br>Resultados | Absoluta | Relativa | Absoluta | Relativa | Absoluta | Relativa | Absoluta | Relativa |
| cara – cara | 6 | 30% | 4 | 20% | 6 | 30% | 8 | 40% |
| coroa – coroa | 3 | 15% | 4 | 20% | 3 | 15% | 3 | 15% |
| cara – coroa | 11 | 55% | 12 | 60% | 11 | 55% | 9 | 45% |

| | Grupo 5 | | Grupo 6 | | Total da turma | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequência<br>Resultados | Absoluta | Relativa | Absoluta | Relativa | Absoluta | Relativa |
| cara – cara | 6 | 30% | 4 | 20% | 34 | 28,3% |
| coroa – coroa | 8 | 40% | 7 | 35% | 28 | 23% |
| cara – coroa | 6 | 30% | 9 | 45% | 58 | 48% |

Figura 15 : Frequências absoluta e relativa no lançamento de duas moedas.

Com o quadro completo, questionamos os alunos sobre os resultados encontrados em cada grupo em comparação com as possibilidades que estimamos na aula anterior, quadro 10. Em seguida, pedimos aos alunos que comparassem o resultado do total de lançamentos da turma com os valores calculados. Os alunos verificaram que o total estava mais próximo da tabela que tínhamos calculado. E então solicitamos uma explicação: a aluna F disse que era porque tínhamos um número maior de lançamentos. Colocamos para seus colegas a resposta apresentada, mas a turma não se manifestou, dando a impressão de que alguns concordavam, mas esperavam uma resposta do professor. Ao insistir mais, não obtivemos sucesso, e então dissemos que a resposta da colega estava correta. Em seguida apresentamos o enunciado da Lei dos Grandes Números: “É muito pouco provável que, se efetuarmos um número suficientemente grande de experimentos, a frequência relativa de um acontecimento se afaste muito da sua probabilidade". (SILVA, 1999. p. 67)

Como os alunos demonstraram ter entendido a Lei dos Grandes Números, colocamos para a turma a questão levantada pela aluna E, que era sobre o fato do cavalo número 9 ter vencido. Esperávamos que os alunos relacionassem com a Lei dos Grandes Números, o que não ocorreu. Alguns alunos disseram que o cavalo 7 tinha mais chance ou maior probabilidade, mas como não era "cem por cento", outro cavalo poderia ganhar. Relembramos que na corrida, na qual o cavalo 9 havia vencido, fizemos sessenta e oito lançamentos, e, em seguida perguntamos à turma: "O resultado será o mesmo se realizarmos uma nova corrida com um número maior de lançamentos?" Os alunos não se manifestaram, e então o professor explicou esta questão com base na Lei dos Grandes Números.

Após, foram trabalhadas, em pequenos grupos, algumas questões para familiarizar os alunos com os conceitos discutidos até o momento, e com a fórmula para calcular Probabilidade, apresentada na segunda aula. Nestas questões verificamos quais estratégias os estudantes utilizaram para determinar o espaço amostral e os eventos favoráveis. As questões trabalhadas estão no apêndice D. Durante a atividade o professor foi chamado nos grupos para auxiliar na compreensão ou resolução das questões, momento em que utilizamos as intervenções sugeridas por Polya, quadro 2, como por exemplo: "O que a questão está pedindo?"; "Qual o espaço amostral nesta situação?"; e "Quais são os eventos favoráveis?" entre outras. Depois de algum tempo, foi realizada a correção, no quadro branco, com a participação dos alunos. Na resolução construímos a árvore de possibilidades e também usamos métodos de análise combinatória.

Observamos que alguns alunos já perceberam e começaram, em algumas situações, a aplicar o Princípio Multiplicativo, multiplicando as probabilidades de cada evento, embora não tenhamos definido eventos independentes ainda.

### 2.4.3 CONCLUSÕES DO PROFESSOR: EXPECTATIVAS X OBSERVAÇÕES

É importante observar que este terceiro encontro é uma continuação, no sentido de dar seguimento às atividades das duas primeiras aulas, pois a Lei dos Grandes Números é um conceito que pretendíamos desde o início abordar com os alunos e, felizmente, o questionamento de uma aluna justificou ainda mais a necessidade de desenvolvermos esse conceito com a turma.

Observamos uma menor participação da turma no início da aula, quando realizamos os questionamentos sobre o quadro da figura 15. Não podemos ter certeza do motivo da pequena participação, mas o fato de estarmos trabalhando neste terceiro encontro com atividades que ocorreram uma semana antes, no primeiro encontro, tenha diminuído o interesse da turma. Se tivéssemos abordado a Lei dos Grandes Números na primeira aula ou na segunda aula, provavelmente a participação seria maior. Ao aplicar esta sequência didática novamente, sugerimos que a Lei dos Grandes Números seja trabalhada, no máximo, na segunda aula.

Tínhamos a expectativa que mais alunos concluíssem e manifestassem sua compreensão da Lei dos Grandes Números, o que não ocorreu, pois apenas a aluna F respondeu ao questionamento, sobre a comparação entre os quadros das figuras 23 e 26, justificando que foi o maior número de lançamentos que tornava a porcentagem obtida mais próxima da calculada anteriormente.

Percebemos que muitos colegas entenderam quando a aluna F deu a resposta, mas preferiram não se expressar. Depois que o professor colocou no quadro o enunciado da Lei dos Grandes Números e fez alguns comentários, a maioria da turma demonstrou ter compreendido o que a colega havia dito e o enunciado apresentado. Embora a Lei dos Grandes Números seja intuitiva para muitas pessoas, e no contexto da atividade ela tenha sido óbvia para alguns alunos, consideramos o entendimento de seu significado muito importante na compreensão da relação entre a probabilidade calculada e a frequência relativa observada. Com isto, julgamos fundamental no estudo do conteúdo de Probabilidade a exploração deste tópico, apesar de não estar presente nas abordagens dos livros didáticos adotados pela escola.[5]

Como relatamos na descrição da aula, logo após termos apresentado o enunciado da Lei dos Grandes Números, retomamos o questionamento feito pela aluna E na primeira aula, relativa à vitória do cavalo 9, contrariando a expectativa de que o cavalo 7 fosse o vencedor. Como relatado anteriormente, os alunos não relacionaram o conceito que havia acabado de ser formalizado com a questão que estava sendo posta. Os alunos entenderam que o cavalo 7 teria uma chance maior, mas, nas suas palavras, “não tem cem por cento” e, portanto, não seria certo que ele fosse o ganhador. No entanto, esperávamos uma percepção mais direta da relação com a Lei dos Grandes Números, através de uma colocação, na linguagem dos alunos, que demonstrasse que eles entendiam que para um número maior de lançamentos a soma 7

[5] Das sete coleções aprovadas para o Plano Nacional do Livro Didático em 2012 (PNLD-2012) tivemos acesso, em nossa escola, a cinco coleções e verificamos que nos livros do Ensino Médio que abordam o conteúdo de Probabilidade, em apenas um deles é feita uma menção a Lei dos Grandes Números.

tem probabilidade de ocorrer com maior frequência, embora não pudéssemos garantir que cavalo 7 fosse o vencedor.

Percebemos hoje, ao analisarmos nossa prática, que deveríamos ter dado mais tempo aos alunos. Uma alternativa seria dar mais espaço à resposta da aluna F, discutindo esta questão do número de repetições em outro contexto, para, em seguida, abordar a questão da aluna E. Somente após ter sido respondida a questão é que deveríamos ter formalizado a Lei dos Grandes Números. Mais uma vez no referimos a Polya, que nos diz "...que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho." (POLYA, 1995. p.1).

No segundo momento da aula, em que apresentamos algumas questões para que os alunos trabalhassem em grupo, a turma demonstrou interesse e se dedicou à resolução das questões. Como já dissemos no planejamento, classificamos o Ambiente de Aprendizagem construído neste momento como uma atividade no paradigma do exercício. Gostaríamos de observar que o professor explicou para turma que a atividade tinha como objetivo possibilitar-lhes aplicar os conceitos que haviam sido discutidos até aquela aula, e que eles deveriam discutir com os colegas as questões e, se necessário, solicitar o auxilio do professor no esclarecimento de possíveis dúvidas.

Como já indicamos no parágrafo anterior, classificamos a segunda parte da aula como um Ambiente de Aprendizagem do tipo (3), mas gostaríamos de analisar as atividades desenvolvidas, comparando-as com uma atividade clássica de resolução de exercícios, em um ambiente sob o paradigma do exercício. Percebemos algumas semelhanças, porém algumas diferenças entre as duas situações. Enquanto a resolução dos exercícios, sob o paradigma do exercício, normalmente sucede um exemplo e, em geral, exige apenas a repetição de um procedimento, as questões que apresentamos, embora possam ser exercícios no sentido tradicional, não sucederam a exemplos semelhantes e exigiram, no contexto em que foram apresentadas, mais do que a repetição de procedimentos previamente apresentados pelo professor. Mesmo assim, classificamos as questões como exercícios, pois as condições estavam bem delimitadas, e os alunos não tiveram espaço para uma investigação, sendo exigido deles a utilização dos conceitos que haviam sido discutidos até o momento, embora alguns grupos utilizassem estratégias diferentes de resolução.

Devemos lembrar que o aceite e a participação dos alunos são motivados, em grande parte, pelo professor, ressaltando a importância deste e como suas intervenções na aula são fundamentais. Consideramos, por meio da descrição e análise apresentadas, que nesta aula a participação do professor pode ter limitado os resultados das atividades que ocorreram no início da mesma.

Concluímos a análise desta aula lembrando Skovsmose, quando o autor coloca a possibilidade, e até mesmo a necessidade de movimento entre os diversos Ambientes de Aprendizagem, o que pudemos observar nos três encontros descritos e analisados até este momento.

## 2.5 AULA 4: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

### 2.5.1 PLANEJAMENTO, OBJETIVOS E EXPECTATIVAS

Em alguns momentos das aulas anteriores perguntamos ou comentamos com os alunos sobre a possibilidade de influência, ou não, de um evento sobre outro, mas não formalizamos este conceito. Como observamos na aula anterior, alguns alunos já usam a multiplicação das probabilidades de dois eventos independentes, Princípio Multiplicativo[6], para calcular a chance de que eles ocorram simultaneamente. Portanto, nesta aula iremos apresentar aos alunos o conceito de Eventos Independentes.

Iniciaremos com duas questões, apresentadas a seguir, que podem ser resolvidas com a árvore das possibilidades, mas temos a expectativa de que alguns alunos resolvam como eventos independentes, multiplicando suas probabilidades.

1) No lançamento, simultâneo de um dado e uma moeda, qual a probabilidade de obtermos o resultado (2 – cara)?

2) (UFRGS)[7] Uma parteira prevê, com 50% de chance de acerto, o sexo de cada criança que vai nascer. Num conjunto de três crianças, qual é a probabilidade de ela acertar pelo menos duas previsões?

Discutiremos com os alunos as situações em que podemos utilizar a estratégia de multiplicação das probabilidades, para em seguida apresentarmos o conceito de eventos independentes.

Após a definição serão propostas questões que permitem várias estratégias de solução e esperamos que os alunos entendam que podem utilizar mais de um método de resolução para um mesmo problema.

---

[6]" Se um evento *A* pode ocorrer de *m* maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas *m* maneiras possíveis de *A* ocorrer, um outro evento *B* pode ocorrer de *n* maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento *A* seguido do evento *B* é *m.n*." (SANTOS, 2007, p. 39)

[7] Questão número 30 do vestibular da UFRGS no ano de 1999.

### 2.5.2 OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A AULA

Na primeira questão proposta, os alunos não tiveram dificuldade e como esperávamos, muitos utilizaram o Princípio Multiplicativo. No segundo problema houve mais dificuldade, e poucos alunos resolveram. A única estratégia utilizada foi a da árvore de possibilidades.

Colocamos as duas soluções desenvolvidas pelos alunos para a primeira questão e resolvemos no quadro a segunda questão. Na resolução utilizamos primeiro a árvore das possibilidades e, em seguida, a multiplicação das probabilidades. Logo após apresentamos a definição de Silva para eventos independentes:

> "Aqueles em que a ocorrência de um dos eventos não fornece informação a respeito da ocorrência ou não do outro evento, ou seja, a ocorrência de um evento não tem influência na ocorrência do outro. Sendo os eventos independentes, a probabilidade de eles ocorrerem simultaneamente é igual ao produto de suas probabilidades" (SILVA, 1999. p. 68)

Em seguida foi feito o convite aos alunos para que resolvessem em grupos alguns problemas, apresentados no apêndice D. Conversando com os alunos, explicamos que até aquela aula havíamos discutido muitos conceitos e utilizado estratégias diferentes para calcular a probabilidade de um evento. Portanto, a atividade proposta tinha como objetivo propiciá-los um momento em grupo no qual pudessem discutir com os colegas e utilizar estes conceitos e estratégias.

Nas questões propostas após a definição, momento em que a turma se dividiu em grupos, os alunos tiveram dificuldades na questão número três, apresentada a seguir:

3) O atirador A tem probabilidade $\frac{3}{5}$ de acertar um alvo e o atirador B tem probabilidade de $\frac{4}{7}$ de acertar o mesmo alvo. Se ambos atiram juntos (um tiro cada um), qual a probabilidade de o alvo ser atingido?

Nas questões seguintes os grupos, de uma forma geral, resolveram todos os problemas com estratégias diversas. Notamos que alguns alunos usaram a ideia de complementar em uma questão, sendo que esta estratégia havia sido discutida durante o estudo de Análise Combinatória no bimestre anterior.

### 2.5.3 CONCLUSÕES DO PROFESSOR: EXPECTATIVAS X OBSERVAÇÕES

Como havíamos observado no planejamento, muitos alunos já utilizavam o Princípio Multiplicativo para determinar a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. Existem várias explicações possíveis para este fato, entre elas, podemos supor que os alunos tenham observado que o professor, por vezes, utilizou o Princípio Multiplicativo, como na primeira aula, na atividade das moedas após construirmos o quadro 9. Observamos que o espaço amostral para o lançamento de dois dados era trinta e seis, portanto resultado da multiplicação de seis por seis. Estas intervenções, entre outras, podem ter servido como exemplo para os alunos que vêm usando esta estratégia. Mas não podemos afirmar que eles tenham observado estes detalhes ou percebido, sozinhos, esta possibilidade de resolução.

Como observamos, na primeira questão, a maioria dos alunos não demonstrou dificuldades, mesmo assim ficamos surpresos com o fato de haver alunos com dificuldade de construir a árvore das possibilidades.

A definição do conceito de eventos independentes não despertou muito interesse nos alunos, talvez porque alguns deles já fizessem uso desta estratégia.

Embora a atividade de resolução de uma pequena listagem de questões seja algo mais tradicional para os alunos, o convite feito pelo professor teve boa aceitação, tendo em vista que todos os grupos se dedicaram a sua resolução e, durante a aula, o professor foi muito requisitado pelos alunos para tirar alguma dúvida ou, muitas vezes, para conferir uma resposta. Observamos que os grupos não tiveram muita dificuldade na resolução das questões propostas.

Embora a definição do conceito de Eventos Independentes não tenha sido algo completamente novo, pois muitos alunos já utilizavam essa estratégia, a apresentação do conceito não ocorreu por causa de uma necessidade demonstrada pelos alunos. Além da formalização de um conceito, a aula serviu para fixar, através da resolução de uma lista de questões, alguns conceitos e habilidades trabalhadas até este momento. Desta forma, classificamos esta aula como um Ambiente de Aprendizagem no paradigma do exercício com referências à semi-realidade, tipo (3).

## 2.6 AULA 5 : ESTRATÉGIAS

### 2.6.1 PLANEJAMENTO, OBJETIVOS E EXPECTATIVAS

Neste encontro iremos propor aos alunos uma atividade de resolução de problemas num ambiente de semi-realidade. Utilizaremos fichas de papel para registro das soluções desenvolvidas pelos alunos, dois sacos pretos de tecido e quatro bolinhas, duas vermelhas e duas amarelas. Os alunos deverão discutir, em grupos, a melhor maneira de distribuir as quatro bolinhas nos dois sacos, propiciando a uma pessoa, que não viu as bolinhas serem colocadas nestes, a maior probabilidade de pegar uma bolinha vermelha em uma tentativa.

Vamos propor que a atividade seja desenvolvida em grupos, para incentivar momentos de discussão entre os alunos.

Além de chegar a um consenso sobre a estratégia de distribuição das bolinhas, os grupos deverão determinar a probabilidade de, em uma tentativa, retirar uma bolinha vermelha. Com isso pretendemos verificar a capacidade dos alunos em calcular probabilidade. Como nunca aplicamos a atividade, não temos ideia de como será o desempenho dos alunos na solução do problema. Mas nossa experiência docente com a turma nos indica que os alunos terão dificuldade em determinar a probabilidade da solução que encontrarem. Em função do pequeno número de aulas disponíveis, não iremos definir o conceito de probabilidade condicional, apenas comparar a atividade desta aula com as das aulas anteriores.

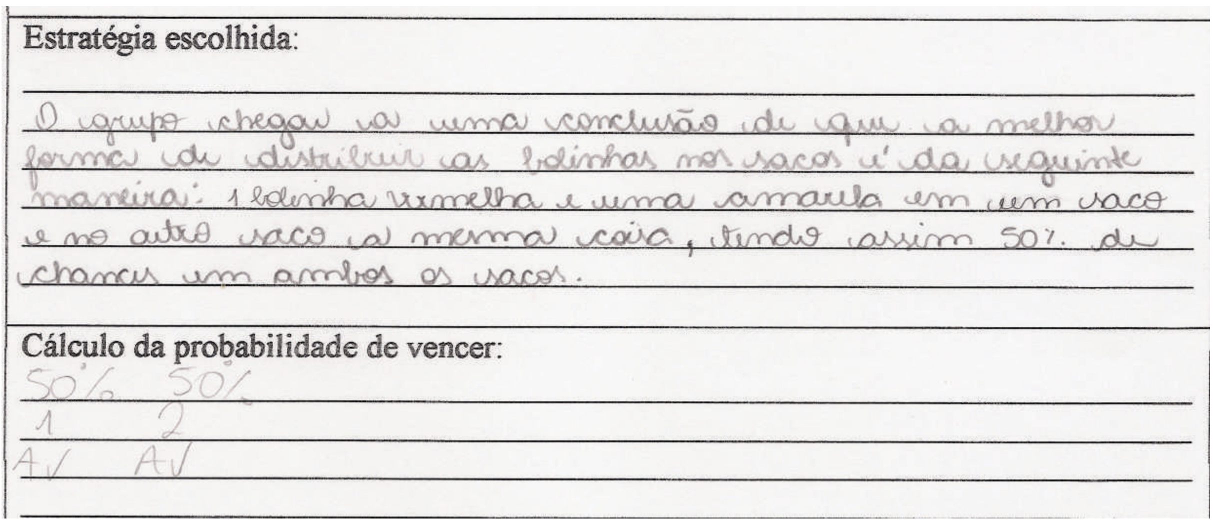
### 2.6.2 OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A AULA

Com a turma dividida em cinco grupos, a atividade foi apresentada, e explicamos que deveriam encontrar a melhor estratégia, descrevendo-a na ficha entregue, e também que calculassem a probabilidade de sucesso naquela situação escolhida. Ressaltamos para os alunos que, pelo volume dos sacos, não era possível saber o número de bolinhas que havia dentro deles. Também ficou estabelecido que nenhum dos sacos poderia ficar vazio e que nenhuma das quatro bolinhas poderiam ficar fora dos sacos.

Enquanto os grupos discutiam qual a melhor estratégia e registravam a escolha, o professor andou pela sala observando e respondendo algumas dúvidas sobre as condições estabelecidas. Observamos que, inicialmente, quatro grupos optaram por colocar uma bolinha amarela (1A) e uma bolinha vermelha (1V) em cada saco, que denotaremos de estratégia 1A1V, e apenas um grupo optou em colocar 1V em um saco e 2A e 1V no outro, que denotaremos por 2A1V.

Durante a atividade o aluno A, que chegou atrasado, sentou com um dos grupos que até então tinha optado por uma bolinha amarela e uma vermelha em cada saco (estratégia 1A1V). O professor foi até este grupo e explicou a atividade novamente. O aluno discordou dos colegas e explicando seu raciocínio acabou convencendo o grupo que a melhor estratégia era 2A1V.

O professor aguardou até que todos os grupos definissem qual distribuição de bolinhas iriam escolher e calculassem a probabilidade. Em seguida foi pedido que cada grupo apresentasse para a turma qual a estratégia escolhida, sendo registrada no quadro a solução proposta. No final dois grupos escolheram a estratégia 2A1V, e três grupos optaram por 1A1V. Um grupo, aparentemente não tinha entendido que poderiam ser quantidades diferentes de bolinhas em cada saco. Também observamos que em um dos grupos que escolheu a estratégia 1A1V, o aluno H discordava dos colegas e achava que o melhor seria 2A1V. No entanto, ele não conseguiu justificar sua resposta para os demais colegas e o restante do grupo acabou permanecendo com a escolha inicial, apresentada na figura 16 abaixo.


Estratégia escolhida:

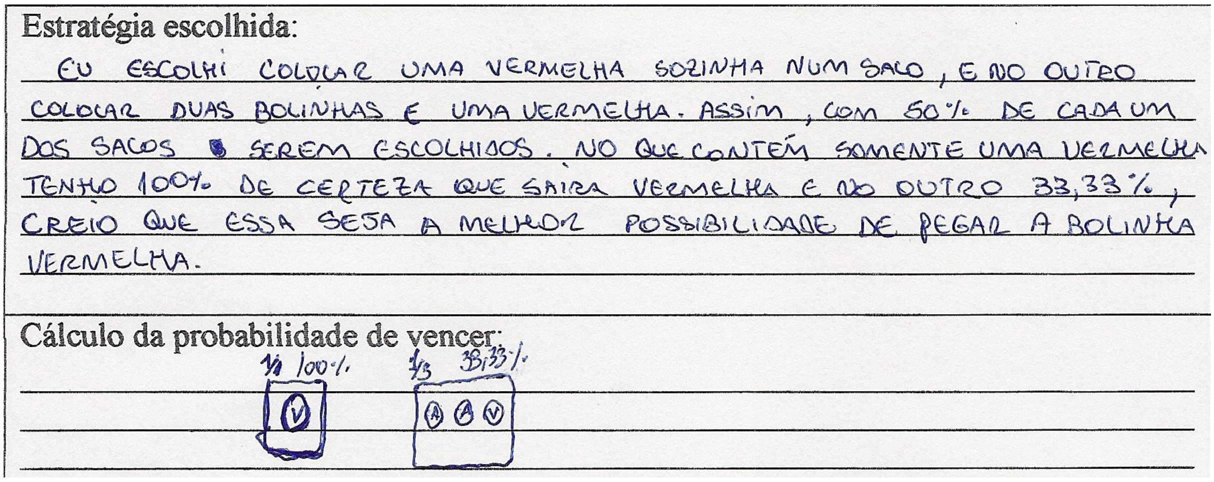
O grupo chegou a uma conclusão de que a melhor forma de distribuir as bolinhas nos sacos é da seguinte maneira: 1 bolinha vermelha e uma amarela em um saco e no outro saco a mesma coisa, tendo assim 50% de chances em ambos os sacos.

Cálculo da probabilidade de vencer:

50% 50%
1 2
AV AV

Figura 16: Resolução de um grupo de alunos para o problema da distribuição das bolinhas.

Como não houve consenso, o professor pediu que o aluno H preenchesse uma das fichas com a resposta que ele considerava correta. Na figura 17 apresentamos a solução elaborada pelo aluno H.



Estratégia escolhida:

EU ESCOLHI COLOCAR UMA VERMELHA SOZINHA NUM SACO, E NO OUTRO COLOCAR DUAS BOLINHAS E UMA VERMELHA. ASSIM, COM 50% DE CADA UM DOS SACOS SEREM ESCOLHIDOS. NO QUE CONTÉM SOMENTE UMA VERMELHA TENHO 100% DE CERTEZA QUE SAIRA VERMELHA E NO OUTRO 33,33%, CREIO QUE ESSA SEJA A MELHOR POSSIBILIDADE DE PEGAR A BOLINHA VERMELHA.

Cálculo da probabilidade de vencer:



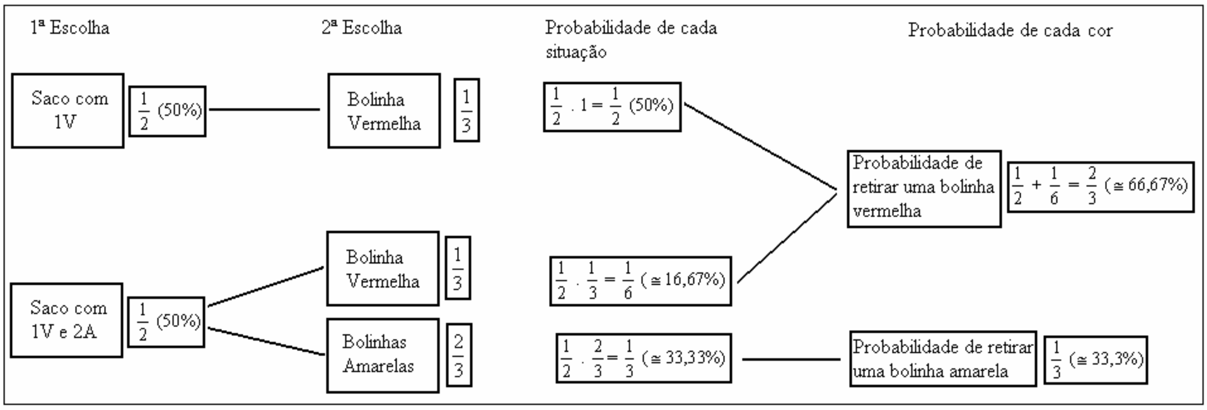
Figura 17: Solução encontrada pelo aluno H para o problema da distribuição das bolinhas.

Em seguida o professor pediu que cada grupo dissesse qual a probabilidade de tirar uma bolinha vermelha na solução que foi encontrada. O aluno D explicou que, na distribuição 1A1V em cada saco, a chance era de cinquenta por cento, pois independente do saco escolhido haveria uma bolinha vermelha e uma amarela. Os alunos dos outros grupos que haviam chegado à mesma solução concordaram com a explicação do colega. Dos três grupos que escolheram colocar uma bolinha de cada cor em cada saco, dois escreveram na ficha de respostas que a chance de tirar uma bolinha vermelha era de cinquenta por cento, e um grupo deixou esta questão em branco. Os outros dois grupos tiveram mais dificuldade para calcular a probabilidade da estratégia escolhida. Entendiam que era a situação mais vantajosa, mas não souberam calcular. Aparentemente a dificuldade foi em verificar que ocorriam dois eventos, um era a escolha do saco e o outro a escolha das bolinhas. Observamos que as resoluções que foram citadas, mas não aparecem no texto acima, estão disponíveis no anexo A.

O professor pediu ao aluno A que explicasse sua estratégia à turma. O aluno disse que se o saco escolhido tivesse uma bolinha vermelha apenas, a probabilidade seria de cem por cento e no saco com uma bolinha vermelha e duas amarelas, a chance de pegar uma vermelha era de trinta e três por cento. Percebemos que a maioria dos alunos concordou que a estratégia proposta pelo aluno A era melhor, mas a aluna E questionou o fato de ser mais do que cem por cento. O professor falou que os valores indicavam as chances após a escolha de um dos sacos. Os alunos ainda pareciam confusos quanto às probabilidades desta distribuição, então o professor propôs analisar as duas situações usando a árvore de possibilidades, apresentada na figura 18 abaixo. Antes de elaborar a árvore de possibilidades, o professor relembrou a questão 1 da aula anterior, salientando a utilização do Princípio Multiplicativo. Após esta retomada e com a árvore construída juntamente com a utilização dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, os alunos afirmaram ter entendido as probabilidades de cada caso.

Figura 18: Árvore de possibilidades e sorteio de bolinhas amarelas e vermelhas.

Ao construir na lousa a árvore das possibilidades, o professor questionou os alunos




sobre as probabilidades em cada escolha. A turma não teve problemas em responder corretamente à chance de escolha de cada saco bem como de cada bolinha. No entanto, a utilização dos Princípios Multiplicativo e Aditivo não pareceu suficiente. Entendemos que a explicação do professor, dizendo que "os 50% de chance de escolha no segundo saquinho, se divide em três" deu sentido ou clareza aos cálculos apresentados.

Um aluno pediu para testar a estratégia. Então o professor colocou uma bolinha vermelha em um saco e uma vermelha e duas amarelas em outro, sem que os alunos vissem qual saco tinha mais bolinhas e solicitou ao aluno A que escolhesse um saco e retirasse uma bolinha. O aluno escolheu o saco com apenas uma bolinha e, portanto, a bolinha vermelha foi a sorteada. Os alunos de um grupo que haviam escolhido a estratégia de colocar duas bolinhas de cores diferentes em cada saco pediram para testar esta possibilidade. O professor pediu que um aluno deste mesmo grupo sorteasse uma bolinha, e foi retirada uma bolinha amarela. O professor disse então que faria mais uma vez o sorteio e, novamente, com uma bolinha vermelha e um saco e uma vermelha e duas amarelas no outro. Desta vez uma aluna retirou uma bolinha amarela. O professor perguntou aos alunos se eles lembravam da Lei dos Grandes Números. A aluna G lembrou da atividade de lançamento das moedas, observando que quanto maior o número de sorteios das bolinhas, mais próximo da porcentagem calculada. O professor comentou que aqueles três sorteios não eram significativos para confirmar as probabilidades calculadas e ressaltou o que a colega havia dito sobre a necessidade de um grande número de sorteios para que pudéssemos observar uma porcentagem próxima da que foi obtida através da árvore de possibilidades.

Foram discutidas rapidamente as outras possíveis distribuições. Após a atividade foi proposta a seguinte questão:

1) Dois jogadores de tênis de mesa A e B jogaram entre si, no passado, muitas partidas e cada um ganhou metade das partidas disputadas. Na rodada final de um torneio recente, os mesmos jogadores A e B disputam o prêmio de R$ 600,00. Segundo as regras, partidas serão realizadas até que um dos jogadores consiga 3 vitórias, sendo declarado o vencedor do torneio. Entretanto, quando o jogador A tinha duas vitórias e B uma, faltou luz no local, e a rodada foi interrompida. Na impossibilidade de continuar a rodada e também de marcar para outro dia, o diretor do torneio determinou que o prêmio fosse dividido entre os dois finalistas. Qual a forma correta de fazer a divisão do prêmio?

Como havia pouco tempo, a discussão da questão ficou para a aula seguinte.

### 2.6.3 CONCLUSÕES DO PROFESSOR: EXPECTATIVAS X OBSERVAÇÕES

Iniciamos a análise desta quinta aula, relembrando as palavras de Pais, citadas no primeiro capítulo, referentes à importância e possibilidades que a realização de atividades em pequenos grupos produz. Quando um aluno sente-se motivado e disposto a discutir com o grupo de colegas suas opiniões e estratégias, este precisará organizar seu raciocínio para expor ao grupo sua solução. Ao mesmo tempo, os colegas do grupo devem compreender tal explicação e poderão desta forma concordar ou apontar falhas na argumentação. Portanto, uma atividade que possibilita estas discussões pode apresentar resultados que ultrapassam as expectativas do professor, pois estes diálogos não estão sob controle do mesmo.

Apoiados nas observações feitas durante a aula e apresentadas na seção anterior, podemos dizer que o convite feito à turma para elaboração da melhor estratégia na situação proposta foi aceito pelos alunos, pois como relatamos, os grupos se envolveram na resolução do problema proposto e, em especial, pudemos observar em dois grupos discussões entre os alunos em função de opiniões diferentes sobre a melhor estratégia para resolver a questão.

Pelo que observamos, nos dois grupos em que houve divergência sobre a melhor forma de distribuição das bolinhas, os alunos não utilizaram estratégias vistas nas aulas de matemática, como a árvore das possibilidades, portanto a escolha das estratégias foi apenas intuitiva. Outro indicativo é o fato de apenas dois grupos terem escolhido a estratégia de maior chance, mas não conseguiram calcular sua probabilidade. Precisamos comentar que num dos três grupos que escolheu a estratégia 1A1V os alunos entenderam que o número de bolinhas deveria ser igual nos dois sacos, portanto sua solução não pode ser considerada.

Queremos salientar a participação dos alunos A e H em seus respectivos grupos. Como relatado, o aluno A chegou atrasado na aula e juntou-se a um grupo que havia escolhido como solução a estratégia 1A1V, sendo que o aluno não concordou com a solução e convenceu os colegas de que a melhor estratégia seria a 2A1V, mesmo sem conseguir determinar corretamente as probabilidades desta estratégia. O aluno H também entendia que a estratégia 2A1V era a melhor, mas não conseguiu convencer os colegas do grupo de que estava correto. Salientamos que o professor não se envolveu na discussão que ocorreu em cada grupo, embora tenha sido chamado e questionado sobre a solução correta; os comentários foram apenas no sentido de esclarecer as condições do problema. Em especial, no grupo do aluno H, o professor incentivou-o a apresentar sua solução, mesmo sem haver consenso no grupo.

Com relação à determinação exata da probabilidade da estratégia escolhida em cada grupo, vimos que a distribuição de uma bolinha vermelha e uma amarela em cada saco tem uma probabilidade mais fácil de determinar. Por isso os alunos não tiveram tanta dificuldade em estimar ou indicar esse valor. No caso dos grupos que escolheram a estratégia 2A1V o cálculo da probabilidade é mais difícil, uma vez que a escolha do saco interfere no sorteio das bolinhas, e os alunos não perceberam este detalhe; consequentemente não conseguiram calcular os valores corretos, embora tenham intuído uma probabilidade maior do que a estratégia dos outros grupos.

Mesmo sem uma determinação correta das probabilidades, o aluno A conseguiu explicar ao grande grupo, de forma satisfatória, os motivos que levaram seu grupo escolher a estratégia 2A1V.

Como não dispomos de muitas aulas, não apresentamos o conceito de probabilidade condicional. Mesmo assim, na resolução desenvolvida no quadro branco, o professor destacou a diferença desta atividade em relação às questões até então trabalhadas.

Para classificarmos a atividade realizada neste encontro, lembramos as palavras de Pozo que nos falam sobre a linha tênue que divide problemas e exercícios, sendo um fator importante nesta distinção, a relação do indivíduo com a situação. As atitudes dos alunos nos permitem concluir que, para grande parte da turma, a situação proposta se caracterizou como um problema. Em relação à classificação da aula na matriz de referência de Skovsmose, apresentada no quadro 1, o fato de o professor ter levado as bolinhas e sacos para aula nos leva a uma classificação da aula em um ambiente de semi-realidade, mas nos questionamos se isso é o suficiente para não classificarmos a atividade como um Ambiente de Aprendizagem com referência à matemática pura. Ainda sobre a classificação, consideramos que a atividade se caracteriza como um cenário para investigação em que, mesmo com algumas regras definidas, possibilitou-se a discussão de várias estratégias de resolução do problema.

## 2.7 AULA 6: OBMEP

### 2.7.1 PLANEJAMENTO, OBJETIVOS E EXPECTATIVAS

Na aula anterior não conseguimos explorar a contento todos os aspectos da atividade proposta, além de não termos feito uma discussão sobre o problema proposto no final da mesma. Portanto, iniciaremos a aula retomando o problema colocado no final do encontro anterior.

Como este será o último encontro antes da avaliação escrita, iremos propor aos alunos um problema que abrange muitos conceitos e raciocínios trabalhados ao longo das aulas anteriores.

O problema será uma adaptação da questão número 5, itens a e b, da segunda fase do nível 3 da 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP-2010)[8]. Esperamos que a atividade do encontro anterior contribua para que os alunos consigam solucionar este problema. A seguir apresentamos o enunciado original da questão.

André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

a) Qual a probabilidade de André ganhar o livro?

b) Qual a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Utilizaremos um saco de tecido preto e quatro bolinhas idênticas, sendo que em uma delas será marcada com caneta para diferenciá-la das demais. É importante que os alunos não consigam distinguir pelo tato essa bolinha das outras.

[8] Disponível em http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n3-2010.pdf.

### 2.7.2 OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A AULA

No início da aula questionamos os alunos se alguém havia conseguido resolver o problema dos mesatenistas proposto no encontro anterior. Poucos alunos haviam tentado, e não sabiam se estavam certo. A aluna F comentou que já tínhamos feito esta questão. O professor lembrou que este problema tinha sido apresentado no questionário respondido antes do início das atividades sobre Probabilidade. O professor combinou com os alunos que eles teriam alguns minutos para pensar no problema, e a correção seria feita no quadro em grande grupo. Na correção alguns alunos sugeriram que o prêmio deveria ser divido igualmente, uma vez que a competição não havia acabado. Mas outros alunos comentaram que o jogador A havia vencido duas partidas e o jogador B apenas uma e então propuseram dividir o prêmio com base no número de vitórias de cada um, portanto dois terços do prêmio para o jogador A e um terço para o jogador B. A maioria da turma concordou com a solução proposta pelos colegas. O professor comentou que esta divisão se baseava nos resultados dos três jogos, mas não levava em consideração o que poderia ocorrer nos próximos jogos. Foi sugerido que os alunos pensassem numa divisão do prêmio com base no que poderia ocorrer, ou seja, na probabilidade de vitória de cada jogador caso fossem realizadas as partidas restantes. Não houve nenhuma sugestão dos alunos, então o professor propôs construir a árvore das possibilidades para os jogos seguintes. O professor relembrou a atividade da aula anterior, destacando que em ambos os problemas a escolha ou resultado de um evento alteraria as condições do evento seguinte. Gostaríamos de observar que não foi apresentada uma definição do conceito de Probabilidade Condicional nem a fórmula de cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento A condicionada a um evento B.

Os alunos tiveram poucas dúvidas na construção da árvore das possibilidades, e na divisão do prêmio decorrente desta. A figura abaixo ilustra a resolução que foi construída na lousa pelo professor com a participação dos alunos. No entanto, alguns alunos pareciam desconfiados que esta fosse a forma mais justa de divisão.

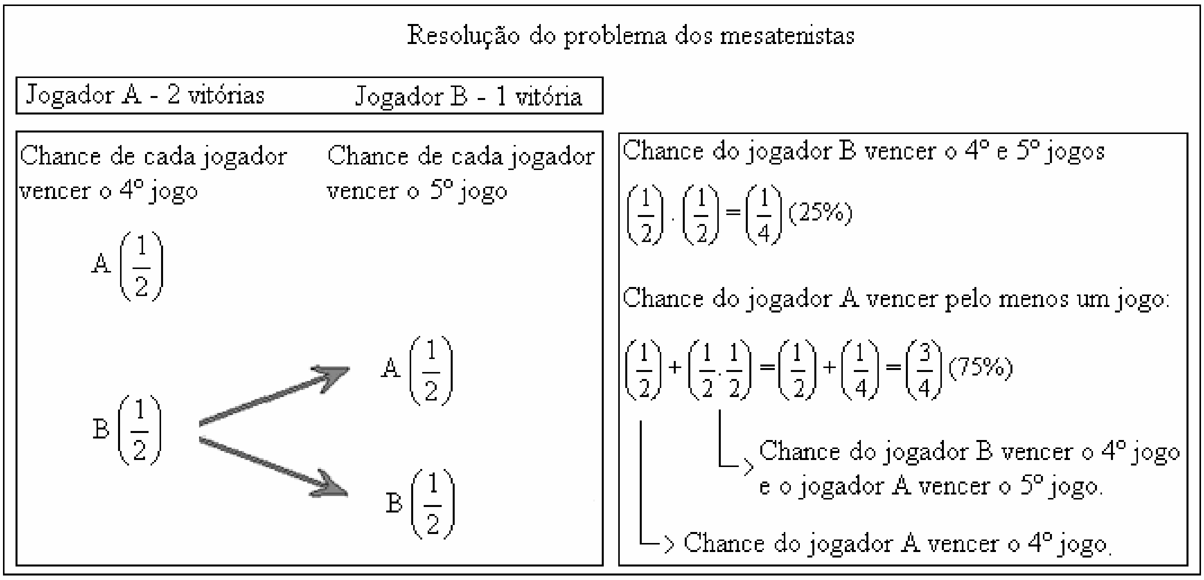



Figura 19: Árvore das possibilidades para problema dos mesatenistas.

Para iniciar a atividade seguinte, baseada em uma questão da OBMEP, o professor convidou os alunos para realizar um sorteio, e a turma deveria julgar se as regras eram justas, ou seja, se permitiam probabilidades iguais de vitória para cada concorrente. Foram escolhidos e listados no quadro os nomes de quatro alunos. Em seguida foram mostradas as quatro bolinhas idênticas, e uma delas foi marcada com um “x”, representando a bolinha que daria o prêmio para quem a retirasse. Todas foram colocadas no saco. Foi explicado à turma que cada aluno escolhido retiraria uma bolinha do saco, sendo um por vez e na ordem que haviam sido listados. Definidas as regras, os alunos foram questionados se o sorteio era justo. Houve grande participação dos alunos, gerando até alguma desordem na aula, pois muitos acharam que o último seria prejudicado, mas não sabiam como explicar o motivo. Os comentários de muitos alunos podem ser representados pela afirmação a seguir: “O primeiro tem vinte e cinco por cento de chance de pegar a bolinha certa, mas se ele não acertar o segundo vai ter trinta e três por cento de chance”. Como resposta a estes comentários, outros alunos fizeram afirmações do tipo: “Mas se o primeiro pegar a bolinha, os outros não terão oportunidade de tentar”.

Dadas as dificuldades apresentadas pelos estudantes, consideramos importante a utilização de um problema correlato mais simples. O professor propôs, então, uma situação de duas bolinhas em um saco, com dois jogadores retirando uma bolinha, um de cada vez. Os alunos foram questionados se algum jogador teria vantagem e qual a chance de cada um. Novamente, houve um pouco de confusão com a situação do segundo jogador, pois os alunos entendiam que este poderia ter cem por cento ou zero por cento de chance de ganhar. Foi simulada a mesma situação, mas sem que o primeiro jogador revelasse a bolinha que retirou, e questionamos se haveria agora uma diferença nas probabilidades, ou seja, se a situação havia mudado apenas por não sabermos o que foi tirado na primeira escolha. Os alunos perceberam que ter, ou não, a informação de qual bolinha foi retirada pelo primeiro jogador não mudava as chances do segundo jogador. Neste momento o professor relembrou a Lei dos Grandes Números e perguntou aos alunos se o experimento fosse repetido inúmeras vezes o que ocorreria. Eles concluíram que os dois jogadores tinham as mesmas chances, mas foi observado por alguns alunos que o segundo jogador "não tinha escolha". Esta postura de alguns alunos, com relação às chances do segundo jogador, chamou-nos a atenção, pois mesmo concordando que o primeiro pegaria a bola certa em cinquenta por cento dos casos, e desta forma o segundo teria a bola certa na outra metade dos casos, o fato do primeiro jogador poder "fazer a escolha", segundo os alunos, dava a ele alguma vantagem.

Ao retomar a atividade anterior, o professor propôs uma pequena modificação. Identificar as quatro bolinhas como A, B, C e D, sendo o ganhador o jogador que pegasse a bolinha D. Os alunos afirmaram, rapidamente, que cada jogador tinha vinte e cinco por cento de chance de pegar a bolinha D, mas não sabiam justificar a resposta. O professor perguntou qual o total de maneiras de tirar as quatro bolinhas. Os alunos utilizaram permutação e concluíram que havia vinte e quatro possibilidades de retirar as quatro bolinhas. Em seguida um grupo resolveu a questão da probabilidade do último ganhar usando permutação do anagrama ABCD, mantendo o D fixo na posição final, encontrando seis e percebendo que $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ era a solução do problema. O professor pediu que um aluno do grupo apresentasse a ideia para a turma. Juntamente com a solução dos alunos, o professor construiu no quadro a árvore das possibilidades, apresentada na figura 20 a seguir, exemplificando a resposta do grupo.

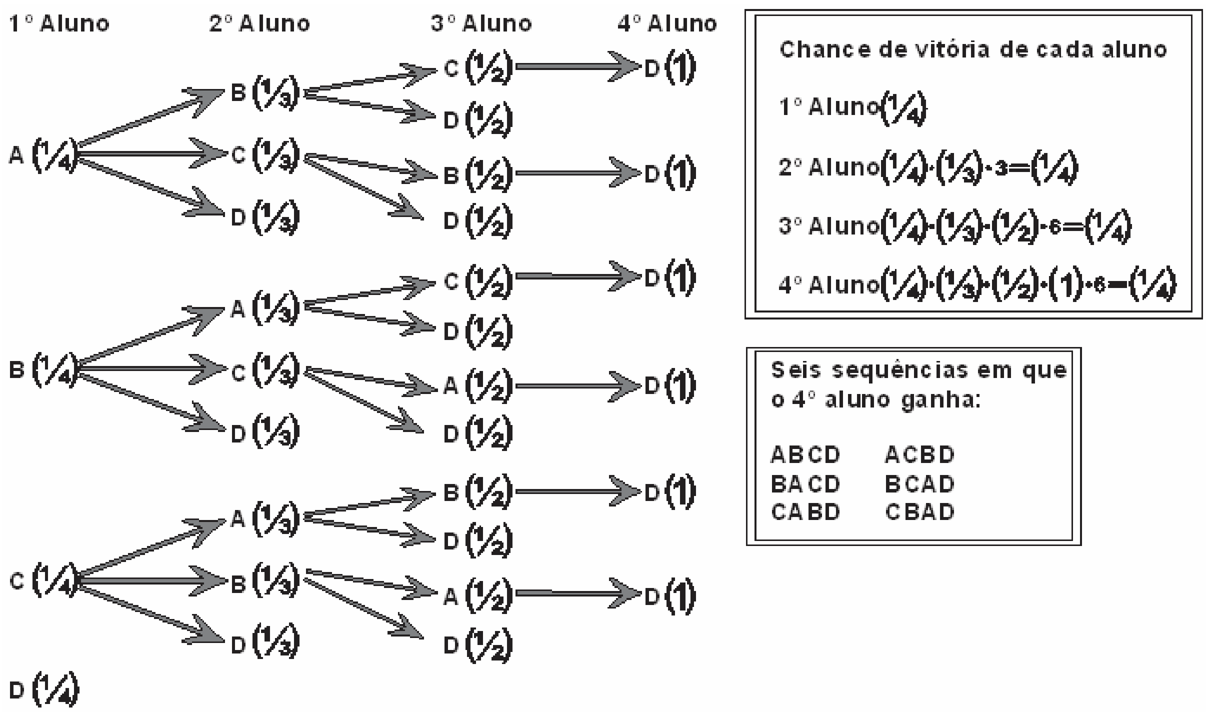



Figura 20: Árvore das possibilidades, chance de vitória e sequências possíveis na atividade de sorteio de 4 bolas.

### 2.7.3 CONCLUSÕES DO PROFESSOR: EXPECTATIVAS X OBSERVAÇÕES

Na resolução do problema dos mesatenistas, os alunos repetiram a solução proposta pela maioria no questionário aplicado antes das aulas, que foi calcular a divisão do prêmio com base nos resultados ocorridos, ou seja, olharam para o passado ao invés de pensar na probabilidade dos eventos que poderiam ocorrer. Gostaríamos de salientar que os alunos compreenderam a solução proposta pelo professor, embora alguns tenham demonstrado uma desconfiança quanto a esta ser a melhor ou mais justa forma de divisão do prêmio. Observamos novamente a dificuldade dos alunos em calcular a probabilidade de um evento, bem como justificar uma resposta com base em uma probabilidade, o que nos sugere que a intuição é a primeira, e às vezes única, ferramenta utilizada na resolução dos problemas.

A atividade das quatro bolinhas suscitou muitos comentários entre os alunos quanto às chances de cada jogador, pois os alunos opinavam com base em alguma hipótese, como por exemplo, supor que “o primeiro havia retirado a bolinha errada, o que dava trinta e três por cento de chance para o segundo”. Mas este argumento era rebatido por outro aluno, supondo que “se o segundo pegasse também uma bolinha errada o terceiro teria cinquenta por cento de chance”. Outro argumento utilizado foi que o primeiro jogador tinha “realmente” uma chance enquanto que os demais teriam que contar com o insucesso dos anteriores. Outra vez os alunos tiveram dificuldades em interpretar a situação e calcular a probabilidade de cada jogador. Entretanto a atividade mais simples proposta pelo professor teve grande êxito, uma vez que os alunos conseguiram em seguida solucionar o problema. Embora tenham calculado corretamente a chance de vitória do último jogador, utilizando a permutação, consideramos importante a construção da árvore das possibilidades, uma vez que esta estratégia permite uma visualização do que ocorre a cada sorteio, possibilitando assim uma compreensão mais detalhada do problema e sua solução. Destacamos que este procedimento é sugerido nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, quando esta coloca que “A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.”(BRASIL, 2006, p.79). Orientação com a qual concordamos e que fica evidenciada na larga utilização desta ao longo da sequência didática que apresentamos.

Neste encontro, durante a discussão sobre o problema da chance de cada jogador na retirada das bolinhas, sentimos a necessidade de recorrer, novamente, ao conselho de Polya em relação à utilização de um problema correlato, porém mais simples. Ao longo de nossa sequência didática, aplicamos essa orientação várias vezes. Poderíamos nos perguntar: por que não iniciarmos a atividade pelo problema mais simples? Consideramos que estas atividades correlatas podem ser menos interessantes ou instigadoras que o problema inicial que colocamos. Pensamos que a utilização, ou não, de uma atividade correlata depende da observação do professor na sala de aula. É ele que deve orientar a aula, propondo atividades para que os alunos compreendam o problema. Mesmo assim, esta alternativa de começar pelas atividades que consideremos mais simples, é uma possibilidade a ser testada. Como colocado por Skovsmose, para que uma atividade se transforme em um cenário para investigação, é necessária a aceitação dos alunos, e este é um aspecto que só pode ser verificado empiricamente, e mesmo assim, uma mesma atividade pode não produzir o mesmo resultado quando aplicado em outros contextos.

Diferentemente do problema dos mesatenistas, em que os alunos compreenderam a solução, mas alguns manifestaram dúvida quanto a esta ser a forma mais justa de divisão, no problema envolvendo os quatro jogadores e a retirada da bolinha premiada, a solução desenvolvida satisfez muito mais os alunos, mesmo estes tendo uma intuição inicial diferente do resultado final. Observamos que problemas de Probabilidade Condicional, como os trabalhados nesta aula e na aula anterior, foram ao mesmo tempo provocadores e difíceis para os alunos, pois suas soluções contrariaram a intuição dos alunos e, também, por isso, representam um obstáculo. É importante salientar que devido ao tempo disponível não definimos formalmente o conceito de Probabilidade Condicional e não apresentamos a expressão matemática para o cálculo da mesma. As soluções destes problemas foram obtidas via árvore de possibilidades, o que é trabalhoso em geral.

Encontramos dificuldades em argumentar contra posicionamentos intuitivos ou que usam a ideia de sorte ou azar, apresentados por alguns alunos na atividade do sorteio das bolinhas. Para muitos, os dois jogadores não estão em condições iguais, pois o primeiro fará a escolha de uma das bolinhas e poderá ter a sorte de pegar a premiada. Essa possibilidade de sortear uma das bolinhas faz alguns alunos acreditarem que este jogador tem vantagem em relação ao segundo. Muitos responderam corretamente que o jogador A iria pegar a bolinha certa em cerca de cinquenta por cento das situações, mesmo assim mantêm a postura descrita acima. Consideramos que apenas o reconhecimento de uma probabilidade não é o suficiente para a mudança de postura apresentada pelos alunos, essa deve vir associada à compreensão, também, da Lei dos Grandes Números, e assim essa atitude possa ser discutida.

Finalmente, percebemos dois momentos neste encontro: inicialmente com a atividade de resolução da questão dos mesatenistas, a qual os alunos demonstraram dificuldades em resolvê-la, bem como em concordar com a solução que foi proposta; e o segundo momento, com a atividade de retirada das bolinhas, que despertou o interesse e obteve grande participação dos alunos. Classificamos os ambientes constituídos por estas atividades, respectivamente, como Ambientes de Aprendizagem dos tipos (3) e (4).

## 2.8 AVALIAÇÃO FORMAL E PARECER DAS ATIVIDADES

No sétimo encontro aplicamos uma avaliação, que além de servir como indicativo dos resultados de nossa sequência didática, constituiu em uma nota na disciplina de Matemática. Esta avaliação foi realizada individualmente e sem consulta ao material.

A seguir, apresentamos e comentamos as questões desta avaliação cuja cópia está no apêndice C. Observamos que a avaliação foi realizada em um encontro de dois períodos.

Ao elaborarmos a avaliação pretendíamos que as questões não fossem apenas exercícios no sentido de repetição ou aplicação de uma regra ou procedimento estudado. Pelo contrário, gostaríamos que as questões estivessem o mais próximo de um problema. Consideramos que as questões 1, 2, 5, 7 e 8 estão mais próximas ao paradigma do exercício, enquanto que as questões restantes se aproximam mais de problemas, pois exigem mais do que a reprodução de um raciocínio. Por exemplo, a questão 4 apresenta uma situação que não foi abordada em sala de aula e coloca os alunos diante de um contexto conhecido que precisará ser modelado. Para isso, os alunos deverão utilizar os conceitos de probabilidade. Outra questão que destacamos, é a questão 3-b), na qual não há apenas uma resposta correta. Salientamos que em todas as questões os alunos devem justificar suas repostas.

Relembrando as palavras de Pozo, as quais afirmam que entre os aspectos para que uma atividade possa ser considerada um problema, estão a atitude do aluno e a condução dada pelo professor na apresentação e desenvolvimento da atividade. Assim, o fato de tratar-se de uma avaliação, estabelece um contexto diferente dos observados durante as aulas, pois aspectos como o convite inicial feito pelo professor, com o objetivo de despertar o interesse dos alunos, e as discussões entre os alunos nos grupos, não ocorrem. Também a motivação para a realização das questões não é a mesma, pois em uma avaliação o aluno tem a necessidade de obter um bom resultado visando sua aprovação. Consequentemente, as atitudes do aluno nestas ocasiões são diferente em relação as apresentadas durante as aulas, diferença esta estabelecida pelo interesse em compreender ou investigar a solução dos problemas propostos.

Fazemos a seguir uma descrição e análise das respostas e resultados da avaliação, que foi realizada por 19 alunos. No quadro abaixo apresentamos o número de acertos obtidos pelos alunos em seis questões das nove questões presentes na avaliação. Observamos que as três questões que não estão apresentadas no quadro abaixo serão comentadas a seguir, e justificamos a ausência destas neste ponto pelo fato de sua correção não termos considerado as respostas apenas como certas ou erradas.

Quadro 12: Número de acertos por questão na avaliação formal.

| Questão | 1 | 2 | 5 | 7ª | 7b | 7c | 8a | 8b | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de acertos | 18 | 8 | 17 | 14 | 12 | 11 | 14 | 8 | 3 |

A seguir apresentamos as questões da avaliação formal, e comentamos sobre o correspondente desempenho dos estudantes.

**Questão 1)** Lançou-se uma moeda “honesta” e saiu coroa. Se voltarmos a lançar a moeda:

a) é mais provável sair coroa.

b) é mais provável sair cara.

c) é tão provável sair cara como coroa.

d) a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

Apenas um aluno não a respondeu corretamente. Lembramos o questionário inicial, no qual a maioria dos alunos acertou a correspondente questão da primeira parte, que coloca o problema da influência de resultados anteriores em um evento a ocorrer.

**Questão 2)** Se lançarmos uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de obtermos três caras e uma coroa?

Poucos alunos acertaram completamente a questão número 2, embora alguns alunos tenham determinado corretamente o espaço amostral, mas erraram na determinação dos eventos favoráveis. A situação inversa também ocorreu, com alguns alunos calculando corretamente os eventos favoráveis, dentre estes, alguns utilizaram permutação para isso, mas erraram a determinação do total de eventos possíveis.

**Questão 5)** (ENEM -2006) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: — Tive uma idéia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.

Tadeu, camisa 2: — Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

Ricardo, camisa 12: — Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Desse diálogo conclui-se que

a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.

b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.

d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

e) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

Não nos surpreende o bom desempenho na questão número 5, uma vez que ela se assemelha matematicamente à atividade da corrida dos cavalos.

**Questão 7)** A probabilidade de um inseticida matar uma barata é de $\frac{8}{10}$, e a probabilidade de matar um pernilongo e de $\frac{7}{10}$. Um dia, ao chegar a sua casa, uma pessoa encontra uma barata e um pernilongo e aplica o inseticida. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos morram?

b) nenhum morra?

c) apenas o pernilongo morra?

A questão 7 é a que mais caracteriza um exercício, pois os alunos resolveram questões semelhantes em aulas anteriores e sua resolução exige a utilização específica de uma estratégia desenvolvida nas aulas: a aplicação do Princípio Multiplicativo. Desta forma, consideramos razoável o desempenho dos alunos na questão.

**Questão 8)** (OBMEP-2010) André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

a) Qual a probabilidade de André ganhar o livro?

b) Qual a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Na questão número 8, percebemos que a atividade realizada com as bolinhas na aula anterior não foi bem compreendida pela maior parte da turma.

Observamos um número razoável de alunos acertando a resposta do item a), mas o mesmo não se repete no item b). O item a) é uma questão mais simples, pois não se trata de probabilidade condicional, uma vez que não houve sorteio. Entretanto, o item b) coloca os alunos diante de uma questão de probabilidade condicional.

**Questão 9)** Dois indivíduos, Marcos e Pedro, vão jogar cara ou coroa com uma moeda "honesta". Eles combinam lançar a moeda 5 vezes, e ganha o jogo aquele que acertar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta 40 reais. Feito os dois primeiros lançamentos, em ambos dos quais Marcos vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico, de que forma devem ser repartidos os 80 reais? (Justifique com cálculos)

Assim, como a questão 8, a 9 também demonstrou ser uma questão difícil. Lembramos que no questionário inicial apresentamos uma questão similar em que os alunos utilizaram a estratégia de dividir o prêmio com base nos resultados anteriores. A questão foi reapresentada aos alunos na quinta aula e resolvida na sexta aula. Como apenas três alunos resolveram corretamente esta questão, consideramos que não compreenderam completamente a resolução.

O desempenho dos alunos nas questões 8-b) e 9, além de nossas observações em sala de aula, mostram-nos as dificuldades que as questões de Probabilidade Condicional impõem. Diante deste fato, consideramos que o tempo que dispusemos para a abordagem do conteúdo foi pequeno frente aos obstáculos colocados pelo conteúdo.

Retomamos agora as questões 3, 4 e 6 que não foram incluídas no quadro anterior, pois em sua correção não consideramos as respostas apenas como certas ou erradas.

**Questão 3)** Paulo pretende sortear um livro entre seus três amigos. As regras serão as seguintes:

* Cada amigo ficará com uma das três sequências abaixo:

| Sequência 1 | Sequência 2 | Sequência 3 |
|---|---|---|
| 3-4-5 | 6-7-8 | 9-10-11 |

* Serão lançados dois dados e os resultados serão somados.

* Quem tiver a sequência que contém o número obtido no resultado da soma será o vencedor.

* Será realizado mais de um lançamento apenas se o resultado obtido na soma do primeiro lançamento for 2 ou 12, pois estes são as somas que não constam nas sequências 1, 2 ou 3.

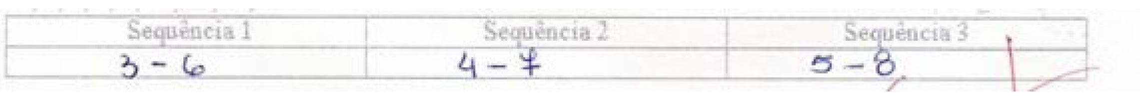
a) Suponha que você é um dos amigos de Paulo, qual sequência você escolheria para ter a maior probabilidade de ganhar? Justifique.

b) Você acha que o jogo de Paulo é justo (todos têm a mesma chance de ganhar)? Se você acha que não, elabore outra tabela com três sequências, cada uma com, pelo menos, dois valores dos onze possíveis (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) e sem repetição destes valores entre as sequências.

| Sequência 1 | Sequência 2 | Sequência 3 |
|---|---|---|
| | | |

Nesta questão, os alunos deveriam determinar as chances de cada bilhete somando as probabilidades dos três números que compõem a sequência. Esta situação é similar à atividade da corrida de cavalos da primeira aula, portanto os alunos têm subsídios para sua resolução. Consideramos que a interpretação das questões é sempre um obstáculo à sua resolução. Mesmo assim, 13 alunos determinaram que a sequência 2 apresenta a maior probabilidade de ganhar e justificaram adequadamente sua escolha. Outros dois alunos também escolheram a sequência 2 como resposta, mas consideramos suas justificativas incompletas.

Na questão 3-b), apenas 6 alunos conseguiram elaborar três sequências com a mesma probabilidade de sorteio, enquanto que 6 alunos montaram as três sequências e somente duas delas com a mesma probabilidade de vitória, como na solução da aluna I, apresentada na figura abaixo.

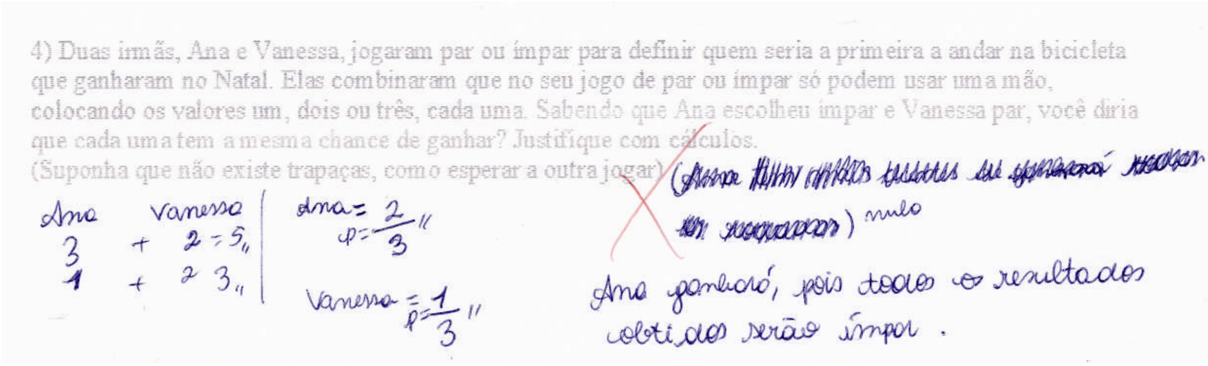


| Sequência 1 | Sequência 2 | Sequência 3 |
|---|---|---|
| 3 - 6 | 4 - 7 | 5 - 8 |

Figura 21: Resolução desenvolvida pela aluna I.

Como podemos observar, a aluna criou três novas sequências das quais, as sequências 2 e 3 têm probabilidade de $\frac{9}{36}$, enquanto que a sequência 1 tem probabilidade $\frac{7}{36}$. O que pode explicar o erro da aluna I é o fato dos valores que ela escolheu para a sequência 1 somarem 9, enquanto que suas probabilidade somam $\frac{7}{36}$. Portanto, ela pode ter confundido a soma dos valores na sequência 1 com a soma das probabilidades nas outras duas sequências e ter considerado todas iguais.

Tivemos na questão 4 o menor número de acertos: apenas dois alunos conseguiram determinar corretamente a chance de cada jogadora, justificando sua resposta adequadamente. Apresentamos nas quatro figuras a seguir algumas resoluções que resumem os principais erros cometidos pelos alunos


4) Duas irmãs, Ana e Vanessa, jogaram par ou ímpar para definir quem seria a primeira a andar na bicicleta que ganharam no Natal. Elas combinaram que no seu jogo de par ou ímpar só podem usar uma mão, colocando os valores um, dois ou três, cada uma. Sabendo que Ana escolheu ímpar e Vanessa par, você diria que cada uma tem a mesma chance de ganhar? Justifique com cálculos.
(Suponha que não existe trapaças, como esperar a outra jogar)

Ana Vanessa
3 + 2 = 5
1 + 2 3

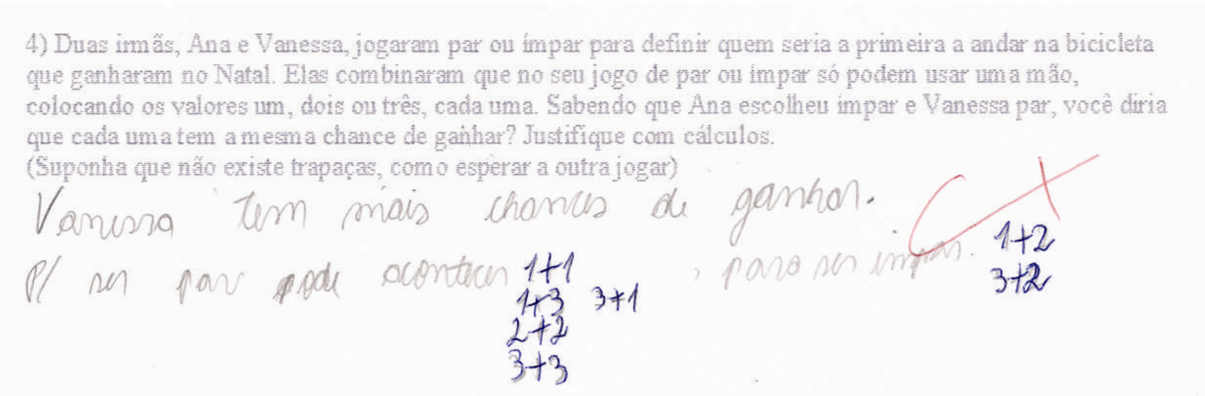
Ana = $\frac{2}{3}$

Vanessa = $\frac{1}{3}$

nulo

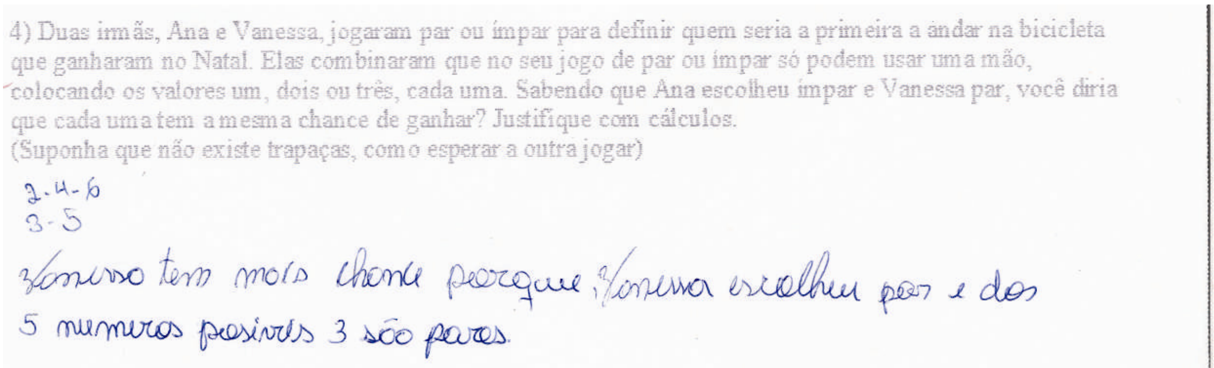
Ana ganhará, pois todos os resultados obtidos serão ímpar.

Figura 22: Resolução desenvolvida pela aluna B.


4) Duas irmãs, Ana e Vanessa, jogaram par ou ímpar para definir quem seria a primeira a andar na bicicleta que ganharam no Natal. Elas combinaram que no seu jogo de par ou ímpar só podem usar uma mão, colocando os valores um, dois ou três, cada uma. Sabendo que Ana escolheu ímpar e Vanessa par, você diria que cada uma tem a mesma chance de ganhar? Justifique com cálculos.
(Suponha que não existe trapaças, como esperar a outra jogar)

Vanessa tem mais chances de ganhar.
P/ ser par pode acontecer 1+1, 1+3, 3+1, 2+2, 3+3, para ser ímpar. 1+2, 3+2

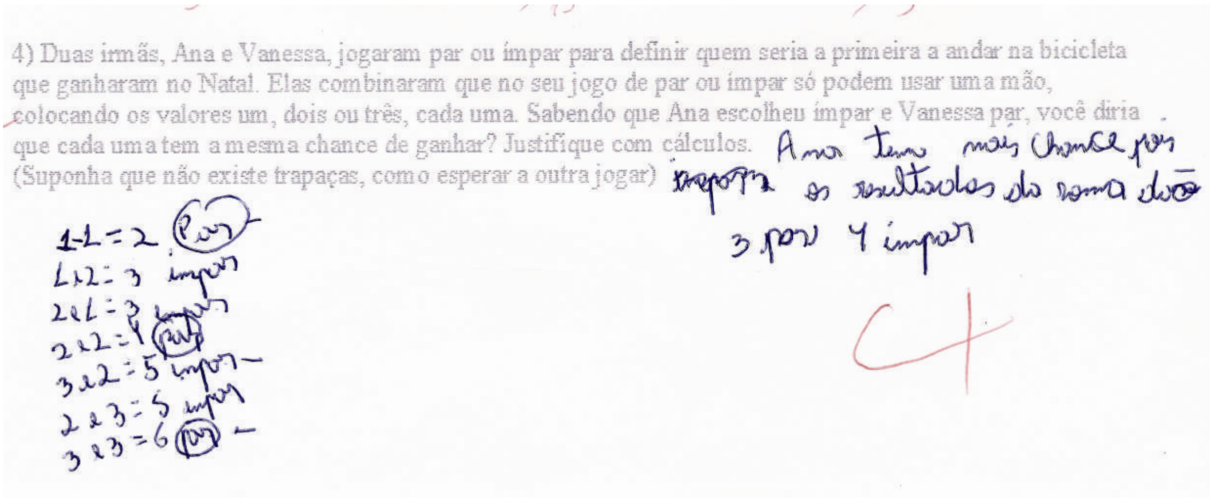
Figura 23: Resolução desenvolvida pela aluna J.


4) Duas irmãs, Ana e Vanessa, jogaram par ou ímpar para definir quem seria a primeira a andar na bicicleta que ganharam no Natal. Elas combinaram que no seu jogo de par ou ímpar só podem usar uma mão, colocando os valores um, dois ou três, cada uma. Sabendo que Ana escolheu ímpar e Vanessa par, você diria que cada uma tem a mesma chance de ganhar? Justifique com cálculos.
(Suponha que não existe trapaças, como esperar a outra jogar)

2-4-6
3-5

Vanessa tem mais chance porque Vanessa escolheu par e dos 5 numeros possiveis 3 são pares.

Figura 24: Resolução desenvolvida pela aluna K.


4) Duas irmãs, Ana e Vanessa, jogaram par ou ímpar para definir quem seria a primeira a andar na bicicleta que ganharam no Natal. Elas combinaram que no seu jogo de par ou ímpar só podem usar uma mão, colocando os valores um, dois ou três, cada uma. Sabendo que Ana escolheu ímpar e Vanessa par, você diria que cada uma tem a mesma chance de ganhar? Justifique com cálculos.
(Suponha que não existe trapaças, como esperar a outra jogar)

Ana tem mais chance por causa os resultados da soma deu 3 par 4 impar

1+1=2 Par
1+2=3 impar
2+1=3 impar
2+2=4 par
3+2=5 impar
2+3=5 impar
3+3=6 par

C+

Figura 25: Resolução desenvolvida pela aluna L.

Na figura 22 podemos verificar que a aluna não interpretou corretamente a questão e consideramos que essa foi a dificuldade de muitos alunos. Nas figuras 35 e 36 os estudantes não conseguiram montar todo o espaço amostral da situação. Um erro que ocorreu, em menor número, foi observado na figura 25, na qual o aluno L determinou corretamente quem tinha maior chance de vencer, mas sua justificativa não está completa, pois as somas indicadas por ele têm probabilidades diferentes.

Consideramos que a interpretação do enunciado da questão foi um dos principais obstáculos à resolução da questão, talvez por esta apresentar um contexto diferente dos que foram trabalhados em aula. Em segundo plano, percebemos a dificuldade de organização para elaboração do espaço amostral, pois alguns alunos esqueceram alguma combinação possível.

Na questão número 6, os alunos deveriam justificar sua resposta à questão anterior, na qual 17 alunos marcaram a alternativa correta. Destes, 13 justificaram satisfatoriamente suas respostas, enquanto que 4 apresentaram respostas incompletas. Percebemos que a maioria dos alunos conseguiu determinar a probabilidade de vitória de cada jogador, verificando que Pedro, o camisa 6, tinha probabilidade $\frac{5}{36}$ de vencer, enquanto que os outros dois jogadores tinham, cada um, probabilidade de vitória de $\frac{1}{36}$. Portanto, juntos, tinham probabilidade igual a $\frac{2}{36}$.

Analisando o rendimento geral dos alunos, juntamente com nossa experiência docente concluímos que a avaliação apresentou um nível de dificuldade acima dos padrões que os alunos estavam habituados, principalmente se levarmos em conta o contexto em que estamos trabalhando. Desta forma, consideramos que os alunos tiveram um bom rendimento na avaliação.

Utilizando a avaliação formal como uma ferramenta para analisarmos e melhorarmos nossa sequência didática, percebemos que esta aponta principalmente para a dificuldade dos alunos com relação à Probabilidade Condicional, o que já comentamos anteriormente. Além disso, as atividades que suscitaram e permitiram maior participação, bem como dispuseram de maior tempo, apresentaram melhores resultados na avaliação. Por outro lado, é importante observar que a avaliação não contemplou todos os conceitos que foram estudados.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nossas considerações finais relembrando os objetivos que colocamos quando iniciamos este trabalho. Primeiramente, temos o questionamento em relação à forma de desenvolver um ensino interessante e contextualizado dos conceitos de Probabilidade. Neste aspecto, ao analisarmos as atividades que propusemos e a postura apresentada pelos alunos, concluímos que tivemos sucesso em despertar o interesse dos mesmos. Isto fica evidente pela participação deles nas atividades, pelos questionamentos dos resultados obtidos, como a vitória do cavalo 9 na corrida de cavalos, ou na solução desenvolvida pelo professor. Também percebemos a participação ativa dos alunos pelas discussões e resoluções dos problemas envolvendo toda a turma, ou em pequenos grupos, às vezes sem que houvesse um consenso, com o grupo apresentando mais de uma resposta ao que foi colocado. Observamos que os Ambientes de Aprendizagem que classificamos como cenários para investigação foram desenvolvidos com referências à semi-realidade, pois não foram contextualizados na realidade dos alunos, e sim em realidades inventadas. Porém, estas atividades aliadas à forma de atuar do professor, propiciaram grande participação dos alunos. Por exemplo, a discussão sobre os aplicativos que executam músicas em aparelhos de celular e computador, e a relação destes com o conceito de experimento aleatório. Este é um exemplo de contextualização de um conceito que ocorreu em um movimento que partiu dos alunos. Em uma situação como esta, os alunos sentem-se valorizados, pois seus conhecimentos ou experiências são considerados no processo de ensino e aprendizagem, e ao mesmo tempo assumem maior responsabilidade em relação à aprendizagem.

Estas considerações nos remetem e respondem parcialmente outra questão colocada inicialmente, referente à “possibilidade de desenvolver o ensino de Probabilidade através da resolução de problemas em um cenário para investigação com referências à realidade”. Ao final desta etapa da pesquisa, como as atividades foram realizadas dentro de um ambiente de semi-realidade, não podemos afirmar se essa possibilidade é verdadeira ou falsa. Podemos afirmar que nossa sequência didática propiciou a construção de um Ambiente de Aprendizagem de cenários para investigação e abriu espaço para movimentos dentro da matriz proposta por Skovsmose, apresentada no quadro 1. Também possibilitou o ensino dos conceitos de Probabilidade de forma envolvente, com a participação ativa dos alunos; e não passiva, muito comum em ambientes sob o paradigma do exercício.

Nossa resposta ao questionamento que colocamos no início da pesquisa, sobre a importância da aprendizagem dos conceitos de Probabilidade para os estudantes tendo em vista a realidade destes, iniciou-se com as afirmações dos PCN, citadas no capítulo um, que coloca a importância do estudo deste conteúdo. Durante a aplicação desta sequência didática, verificamos na prática situações que também corroboram as palavras citadas dos PCN e justificam a importância do estudo da Probabilidade. Pois ao longo das seis aulas, observamos como a intuição esteve presente na participação e resolução das atividades e dos problemas propostos. O uso da intuição de forma pouco crítica, no dia a dia, acaba nos levando a tomar decisões desfavoráveis, a partir de conclusões enganosas, que poderiam ser evitadas com o conhecimento dos conceitos de Probabilidade.

Consideramos que a metodologia utilizada pelo professor, juntamente com as atividades propostas, possibilitaram aos estudantes uma experiência de aprendizagem dos conceitos de Probabilidade que não foi apenas de memorização e reprodução, mas que possivelmente possibilitará a estes construir uma visão diferente de sua realidade a partir da compreensão e utilização dos conceitos estudados.

Além de responder os questionamentos que colocamos inicialmente, apresentamos algumas reflexões que surgiram durante o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo dois, para cada aula, foi elaborado o tópico “Conclusões do professor: Expectativas x Observações”. Eles foram escritos na mesma época da aplicação das atividades e refletem um momento de transição na vida docente do autor desta dissertação, no que se refere à forma de atuação bem como na maneira de perceber o ensino e aprendizagem da Matemática. Ao fazer a análise da primeira aula, inicialmente consideramos que houve um atraso no cronograma, pois os objetivos não foram alcançados. Depois, refletindo sobre as atividades, percebemos que este atraso é fruto do olhar de um professor sob o paradigma do exercício, que planeja uma aula com um roteiro fixo, sem imprevistos. Percebemos também que o “atraso” é uma confirmação de que a aula, de fato, ocorreu em um Ambiente de Aprendizagem classificado por Skovsmose como um cenário para investigação, no qual o roteiro inicial foi abandonado e as dúvidas e colocações dos alunos deram uma nova direção às atividades. Foi importante entender que, em um cenário para investigação, o roteiro planejado pelo professor pode e provavelmente irá sofrer mudanças em decorrência da participação ativa dos alunos.

Outra reflexão que colocamos é a necessidade da aula 4 ter ocorrido. Nesta aula foi definido um conceito que permite a utilização de uma estratégia que já era aplicada pelos alunos, sem que estes tivessem visto explicitamente o conceito. Após a definição, os alunos trabalharam em grupos na resolução de exercícios. Em alguns destes exercícios deveriam aplicar uma estratégia previamente apresentada, já em outras questões esta não era necessariamente a única estratégia possível. Como já dissemos, esta aula é classificada como um Ambiente de Aprendizagem do tipo (3), mas a questão que estamos propondo é se esta aula é importante em nossa sequência didática, ou será que poderíamos não ter realizado as atividades deste encontro, sem prejuízo no resultado final?

Adiantamos que não temos a resposta para este questionamento. É necessário que outras pessoas apliquem a sequência para que possamos tê-la. Mas gostaríamos de compartilhar algumas reflexões que surgem do questionamento agora apresentado. A aula 4, em especial a atividade de resolução de uma listagem de questões, vem atender às necessidades do professor. Para justificar essa afirmação, é preciso lembrar que o autor desta dissertação foi também o professor que elaborou e aplicou a sequência didática aqui apresentada, e esta se deu durante um momento de transformação, pois percebemos que a postura como professor sofreu influência das disciplinas do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, bem como das leituras e reflexões necessárias para a realização deste trabalho. Portanto, podemos dizer que o professor estava em um momento de ruptura com o paradigma do exercício, ou seja, tentava abandonar uma postura tradicional, tornando-se mais crítico de sua própria ação docente. Enxergamos nesta aula a preocupação do professor com a avaliação final que seria realizada. De certo modo, a resolução da lista de questões treina os alunos para uma avaliação tradicional, e como pode ser conferida no apêndice C, a avaliação que foi aplicada difere em alguns aspectos de uma avaliação tradicional, pois, ao mesmo tempo que apresenta exercícios, também contém questões que exigem mais do que repetição, que podem ser entendidas como problemas.

Outro aspecto que, de certa forma, pressiona-nos a realizar as atividades do quarto encontro são as possíveis provas como ENEM ou vestibular que os alunos poderão vir a realizar. Questionamos então, se esta atividade de resolução de exercícios pode auxiliar os alunos nestas provas, ou as atividades dentro dos cenários para investigação já são suficientes?

Mesmo sem uma resposta definitiva para estes questionamentos, consideramos importante a permanência da aula quatro em nossa sequência didática se lembrarmos de Skovsmose, quando nos fala sobre os movimentos entre os diferentes Ambientes de Aprendizagem.

Ainda sobre as atividades desenvolvidas, queremos observar a dificuldade que todos tivemos, alunos e professor, com a Probabilidade Condicional. Consideramos que o pouco tempo para a abordagem foi um dos entraves no ensino e aprendizagem do tema em nossa sequência didática, mas este não é o único e principal motivo, pois percebemos a Probabilidade Condicional como um conteúdo naturalmente difícil. Portanto, quando consideramos o pouco tempo, a grande dificuldade inerente ao assunto, combinados à desconfiança dos alunos em relação aos problemas que apresentavam resoluções contra intuitivas, entendemos a dificuldade apresentada. Por isso, consideramos que as atividades de Probabilidade Condicional em nossa sequência didática têm um objetivo mais introdutório ou provocador do interesse dos alunos pelo conteúdo e que devem ser utilizadas em uma proposta que disponha de maior tempo para a abordagem do assunto.

Mais um aspecto a considerar, foram os resultados da avaliação final, os quais consideramos positivos tendo em vista nossa experiência com turmas do noturno em anos anteriores. Lembramos que a totalidade dos alunos trabalha durante o dia, e com isso queremos dizer que os mesmo apresentam uma dedicação menor aos estudos, principalmente em casa, quando comparados com alunos do diurno. Outro fato que já mencionamos é a frequência, que nunca é de 100% da turma, o que dificulta o desenvolvimento de uma atividade que não tem um fechamento em um único encontro.

Encerramos com uma reflexão sobre a importância da postura do professor: Consideramos que o potencial da sequência didática que propomos depende em muito da postura adotada pelo professor em seu desenvolvimento. Ao longo do trabalho pontuamos alguns comportamentos ou ações que o professor apresentou que prejudicaram ou potencializaram as atividades que estavam sendo desenvolvidas. Essa postura se fundamenta em nosso referencial teórico, desde exemplos mais evidentes como a utilização de problemas correlatos, sugeridos por Polya, como a importância do convite aos alunos, colocado por Skovsmose. Menos explícita, mas de grande importância, é a transformação de um professor que deve responder a todas as perguntas dos alunos, em outro que deve provocá-los, questionando-os e orientando-os na investigação das respostas de suas próprias dúvidas e essa transformação se reflete, também, na atuação do professor em um momento anterior ao da aula, quando planeja as atividades tendo como referência os questionamentos dos alunos no encontro anterior. Este movimento altera uma sequência didática, uma vez que o enfoque no assunto não é ditado exclusivamente pelo professor. Tendo como referência esta postura, olhamos para as aulas desenvolvidas e percebemos que em muitos momentos tivemos sucesso. Mas, certamente percebemos ações ou atitudes que não seriam as mesmas hoje, pois, como já colocamos, este trabalho se deu durante um processo de amadurecimento do autor como docente, muito em função do Curso de Mestrado Profissionalizante, mas também pelas leituras e reflexões realizadas durante a elaboração do referencial teórico e das atividades para a sequência didática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BAYER, Arno; ECHEVESTE, Simone; ROCHA, Josy; BITTENCOURT, Hélio Radke. **Probabilidade na Escola.** In: III Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2005, Canoas. Vol. 1, p. 1-12. Disponível em: <http://www.exatas.net/artigo_ciem2.pdf> acesso em: 23 ago. 2010.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio vol. 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf> acesso em: 17 ago. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria Média e Tecnológica. ***Parâmetros curriculares nacionais*: ensino médio -** Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> acesso em: 10 ago. 2010.

COUTINHO, Cileida de Queiroz e Silva. **Conceitos probabilísticos, os parâmetros curriculares nacionais e os livros didáticos.** Artigo publicado nos anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Universidade Federal de Pernambuco - Recife 2004.

GOULART, Amari. **O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a Escola Básica.** São Paulo: PUC/SP, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/amari_goulart.pdf> acesso em: 29 ago. 2010.

LOPES, José Marcos. TEODORO, João Vitor. REZENDE, Josiane de Carvalho. O ensino de probabilidade por meio de um jogo e da resolução de problemas. In: LOPES, Celi Espasandin; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; ALMOULOUD, Sado Ag. (org.). **Estudos e Reflexões em Educação Estatística.** Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 47-64.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU. 1986.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. Autêntica, Belo Horizonte, 2º edição, 2002.

PAIVA, Manuel. **Matemática, volume 1.** Moderna, São Paulo, 1º edição, 2009.

PENTEADO, Miriam. Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: PENTEADO, Miriam; BORBA, Marcelo C. (orgs). **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão.** São Paulo: Olho d'Água, 2000. p. 23-34.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Interciência**, Rio de Janeiro, 2º edição, 1995.

POZO, Juan Ignacio (org); ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RODRIGUES, Marcelo Rivelino. **A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de probabilidade.** São Paulo: PUC/SP, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcelo_rivelino_rodrigues.pdf> acesso em: 18 set. 2010.

SANTOS, José Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SILVA, Paulo Afonso Lopes da, **Probabilidades e Estatística.** Rio de Janeiro: Reichmann e Affonso Editores, 1999.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 1º ed. 2008.

## APÊNDICE A – Sequência didática

Apresentamos a seguir uma sequência didática para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio. Nossa proposta baseia-se na resolução de problemas, segundo Polya e Pozo, e no movimento entre os diferentes Ambientes de Aprendizagem definidos por Skovsmose. Segundo os autores, a caracterização das atividades como cenários para investigação, bem como a percepção das questões como problemas pelos alunos, são características observadas apenas empiricamente.

As atividades um, dois e três possibilitam a introdução de conceitos básicos de Probabilidade enquanto que a atividade quatro aborda também o conceito de Probabilidade Condicional.

Destacamos que a distribuição das atividades não é exatamente a aplicada em nossa pesquisa. Apresentamos a seguir, estas atividades em uma organização que julgamos mais adequada. Ao professor que vier a aplicar esta sequência didática, sugerimos que não a utilize como um procedimento a ser repetido passo a passo, mas que esteja atento às dificuldades, questionamentos e curiosidades dos seus estudantes.

A avaliação ocorreu durante os encontros através da observação, feita pelo professor, da participação dos alunos nas atividades e também por meio de materiais recolhidos dos alunos, como fichas de respostas. Além destas avaliações ao longo do processo, sugerimos uma avaliação formal que está disponível no apêndice C.

### ATIVIDADE 1: Corrida de cavalos e lançamento de moedas

**Tempo Estimado:** 4 horas.

**Justificativa:**

O estudo da Probabilidade possibilita ao aluno conhecer ou mesmo refletir sobre situações ou expressões que surgem no cotidiano, como por exemplo, chance, probabilidade, incerteza e evento aleatório. Para que o estudo desses conceitos seja atrativo e estimulante, a aula inicial é de grande importância. É nela que o primeiro e principal convite do professor aos alunos para a exploração de um cenário para investigação ocorre. Para nossa primeira aula, escolhemos uma atividade denominada “Corrida de cavalos”. Além desta, escolhemos também uma atividade mais simples com lançamento de moedas que será complementar à corrida de cavalos.

**Objetivos:**

- Despertar o interesse dos alunos pelo estudo de probabilidade;
- Discutir e definir o conceito de experimento aleatório;
- Discutir e definir o conceito de espaço amostral;
- Determinar o cálculo de probabilidade;
- Possibilitar aos alunos enunciar a Lei dos Grandes Números; e
- Discutir e a Lei dos Grandes Números.

**Metodologia:**

Aula expositiva dialógica, com atividade coletiva e em pequenos grupos.

**Recursos Materiais:**

Quadro branco (lousa), dados, moedas e calculadora.

**Atividades e procedimentos:**

*1º Momento:*

No primeiro momento iremos propor a atividade "Corrida de cavalos". Numeramos os "cavalos" de um a doze. Serão lançados dois dados, e os resultados obtidos serão somados. Assim, o cavalo com o número igual a da soma obtida avança uma linha, sendo o vencedor o cavalo (número) que chegar primeiro na décima casa (linha).

O quadro a seguir mostra a tabela que será construída e preenchida na lousa. A cada lançamento de dois dados, registra-se o resultado da soma destes na tabela, sendo que o número que obtiver primeiro dez resultados será o vencedor.

Número dos Cavalos

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

Antes de iniciarmos a corrida, cada aluno deve escolher um cavalo, e, se este for o vencedor, o aluno ganha um prêmio que varia de acordo com o cavalo escolhido. O quadro abaixo apresenta uma sugestão de prêmios oferecidos por cada cavalo:

| Número do cavalo | Prêmio | Número do cavalo | Prêmio |
|---|---|---|---|
| 1 | Uma caixa de bombons; | 7 | Cinco balas; |
| 2 | Uma barra de chocolate; | 8 | Três pirulitos; |
| 3 | Um prensado; | 9 | Três pirulitos; |
| 4 | Dois bombons; | 10 | Dois bombons; |
| 5 | Cinco pirulitos; | 11 | Um prensado; |
| 6 | Três pirulitos; | 12 | Uma barra de Chocolate; |

Realizada a corrida, discutir com a turma sobre as chances de cada cavalo avançar uma casa a cada lançamento do par de dados, justificando, assim, a introdução do conceito de espaço amostral. A seguir, questionar se o lançamento de dados é um evento aleatório e também levantar questões sobre outros eventos que os alunos entendem como sendo eventos aleatórios.

Definição de Experimento Aleatório:

*Qualquer processo de observação que pode ser repetido à vontade em condições análogas, com a condição de que o resultado não possa ser previsto antes de cada uma de suas realizações.* (Silva, 1999. p. 67).

Definição de Espaço Amostral: *"Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento"* (Silva, 1999. p. 68)..

Possíveis dificuldades na compreensão do espaço amostral no lançamento simultâneo de dois dados idênticos podem ser elucidadas com a utilização da atividade apresentada no segundo momento.

*2º Momento:*

Questionar os alunos sobre qual o espaço amostral para o lançamento simultâneo de duas moedas idênticas, possivelmente um dentre os dois quadros dadas a seguir:

| Resultados | Possibilidade | Porcentagem |
|---|---|---|
| cara – cara | $\frac{1}{3}$ | 33,33% |
| coroa – coroa | $\frac{1}{3}$ | 33,33% |
| cara – coroa | $\frac{1}{3}$ | 33,33% |

| Resultados | Possibilidade | Porcentagem |
|---|---|---|
| cara – cara | $\frac{1}{4}$ | 25% |
| coroa – coroa | $\frac{1}{4}$ | 25% |
| cara – coroa | $\frac{1}{4}$ | 25% |
| coroa – cara | $\frac{1}{4}$ | 25% |

Com os alunos organizados em grupos, solicitar que façam vinte lançamentos de um par de moedas idênticas e anotem os resultados. Na lousa, construir o quadro dado abaixo com os resultados obtidos por cada grupo. Possivelmente a tabela a ser elaborada em parceira com os alunos seja uma das duas apresentadas nas figuras abaixo.

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cara-cara | | | | | | | |
| Cara-coroa<br>Coroa-cara | | | | | | | |
| Coroa-coroa | | | | | | | |

| | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 | Grupo 5 | Grupo 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cara-cara | | | | | | | |
| Cara-coroa | | | | | | | |
| Coroa-coroa | | | | | | | |

Com os resultados colocados na tabela, confrontar a solução proposta pela turma na questão do espaço amostral com o resultado obtido no total de lançamentos.

Construir a tabela a seguir para questionar os alunos sobre os resultados dos lançamentos das moedas obtidos nos grupos e no total, comparando com as probabilidades previstas. Sugerimos que o número de lançamentos seja o maior possível; neste exemplo, temos seis grupos, o que resulta em cento e vinte lançamentos. O objetivo é que os alunos, a sua maneira, enunciem a Lei dos Grandes Números.

| Frequência Resultados | Grupo 1 Absoluta | Grupo 1 Relativa | Grupo 2 Absoluta | Grupo 2 Relativa | Grupo 3 Absoluta | Grupo 3 Relativa | Grupo 4 Absoluta | Grupo 4 Relativa |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cara – cara | | | | | | | | |
| coroa – coroa | | | | | | | | |
| cara – coroa | | | | | | | | |

| Frequência Resultados | Grupo 5 Absoluta | Grupo 5 Relativa | Grupo 6 Absoluta | Grupo 6 Relativa | Total da turma Absoluta | Total da turma Relativa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cara – cara | | | | | | |
| coroa – coroa | | | | | | |
| cara – coroa | | | | | | |

Enunciado da Lei dos Grandes Números: "É muito pouco provável que, se efetuarmos um número suficientemente grande de experimentos, a frequência relativa de um acontecimento se afaste muito da sua probabilidade". (Silva, 1999. p. 67)

Caso seja necessário, retomar a atividade do primeiro momento, comparando e relacionando com a segunda atividade.

**Avaliação:**

Registros numa ficha de observação do professor referente à participação dos alunos nas atividades propostas durante a aula

## ATIVIDADE 2: Definições de conceitos e cálculo de probabilidade.

**Tempo estimado:** 2 horas.

**Justificativa:**

Para compreender e fazer o uso correto de raciocínios probabilísticos, é necessário que os alunos conheçam alguns conceitos básicos além dos apresentados na atividade 1. O estudante deve ser capaz de determinar o número de elementos de um evento bem como determinar a equiprobabilidade entre eventos.

**Objetivos:**

- Discutir e definir Evento simples;
- Discutir e definir Evento composto;
- Discutir e definir Eventos equiprováveis;
- Discutir e definir Eventos não equiprováveis;
- Discutir e definir a fórmula para o cálculo de probabilidade; e
- Aplicar os conceitos discutidos na resolução de problemas ou exercícios.

**Metodologia:**

Aula expositiva dialógica, com atividade coletiva e em pequenos grupos.

**Recursos materiais:**

Quadro branco, pincel e calculadora.

**Atividades e procedimentos:**

*1º Momento:*

Utilizar, como exemplos, as somas possíveis no lançamento de dois dados, retomando a atividade um. Por exemplo, observamos que as somas 2 e 12 são eventos simples, pois só podem ocorrer de uma forma, sendo elas, respectivamente, 1+1 e 6+6, o que exemplifica dois eventos que são equiprováveis, enquanto que as outras somas possíveis são eventos compostos. Exemplo, a soma 3 ocorre de duas maneiras diferentes, a saber, 1+2 e 2+1, e a soma 4 ocorre de três formas diferentes, que são elas 1+3, 2+2 e 3+1, sendo o evento soma 3 e o evento soma 4 não equiprováveis.

Fórmula para o cálculo de probabilidade de um evento A ocorrer.

$$\mathrm{p(A)} = \frac{\text{Número de vezes que pode ocorrer o evento A}}{\text{Número de elementos de E}} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

ou

$$\mathrm{p(A)} = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número total de resultados possíveis}}$$

*2º Momento:*

Propor aos alunos a resolução de problemas ou exercícios com o objetivo de consolidar as estratégias que foram discutidas. O leitor pode encontrar no apêndice D as questões utilizadas no terceiro encontro, e que sugerimos para este momento.

**Avaliação:**

Registros numa ficha de observação do professor referente à participação dos alunos nas atividades propostas durante a aula.

**ATIVIDADE 3: Eventos independentes e a utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas.**

**Tempo Estimado:** 2 horas.

**Justificativa:**

A resolução de problemas de probabilidade permite, em muitos casos, que o estudante utilize diferentes estratégias em suas solução, entre elas está o Princípio Multiplicativo que se aplica em questões em que temos eventos independentes. Portanto, é necessário que alunos conheçam e compreendam que um problema possibilita mais de uma estratégia de resolução.

**Objetivos:**

- Definir o conceito de eventos independentes; e
- Utilizar diferentes estratégias de resolução de problemas de probabilidade.

**Metodologia:**

Aula expositiva dialógica e resolução de problemas em pequenos grupos.

**Recursos materiais:**

Quadro branco, pincel e calculadora.

**Atividades e procedimentos:**

Iniciar com duas questões, apresentadas a seguir, que podem ser resolvidas com a árvore das possibilidades, mas também com o Princípio Multiplicativo.

1) No lançamento de um dado e uma moeda, qual a probabilidade de obtermos o seguinte resultado (2 – cara)?

2) (UFRGS-1999) Uma parteira prevê, com 50% de chance de acerto, o sexo de cada criança que vai nascer. Num conjunto de três crianças, qual é a probabilidade de ela acertar pelo menos duas previsões?

Discutir com os alunos as situações em que podemos utilizar a estratégia de multiplicação das probabilidades, para em seguida apresentarmos o conceito de Eventos Independentes.

Definição de eventos independentes:

"Aqueles em que a ocorrência de um dos eventos não fornece informação a respeito da ocorrência ou não do outro evento, ou seja, a ocorrência de um evento não tem influência na ocorrência do outro.

Sendo os eventos independentes, a probabilidade de eles ocorrerem simultaneamente é igual ao produto de suas probabilidades" (Silva, 1999. p. 68)

Após a definição, propor questões que permitam várias estratégias de solução. O leitor pode encontrar no apêndice D as questões sugeridas para este momento.

**Avaliação:**

Registros numa ficha de observação do professor referente à participação dos alunos nas atividades propostas durante a aula.

**ATIVIDADE 4: Resolução de problemas e Probabilidade Condicional.**

**Tempo Estimado:** 4 horas.

**Justificativa:**

A probabilidade condicional oferece a realização de atividades que colocam os alunos diante de situações diferentes das encontradas até então e que desafiam a intuição da maioria dos estudantes. Em nossa pesquisa não dispusemos de muito tempo na abordagem da Probabilidade Condicional. Desta forma, não apresentamos a definição deste conceito, nem a fórmula para o seu cálculo. Portanto, as atividades aqui apresentadas podem ser motivadoras ou introdutórias de um estudo deste conteúdo.

**Objetivos:**

- Discutir e diferenciar as atividades anteriores da atividade de probabilidade condicional aqui proposta; e

- Desenvolver e avaliar a capacidade de aplicação de conceitos, anteriormente estudados, na resolução de problemas.

**Metodologia:**

Aula expositiva dialógica e resolução de problemas em pequenos grupos.

**Recursos materiais:**

Quadro branco, pincel, calculadora, fichas de papel para registro das soluções desenvolvidas pelos alunos, dois sacos pretos de tecido e algumas bolinhas. No nosso caso, utilizamos seis bolinhas, duas vermelhas e quatro amarelas.

| **Atividades e procedimentos:** |
|---|

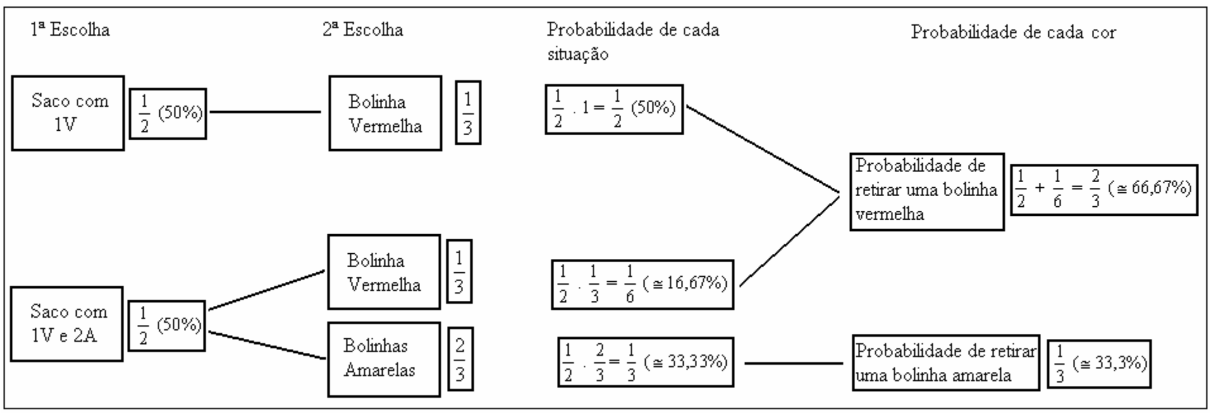
<u>*1º Momento:*</u>

Os estudantes deverão discutir, em grupos, a melhor maneira de distribuir quatro bolinhas, duas vermelhas e duas amarelas, nos dois sacos, propiciando a uma pessoa, que não viu as bolinhas serem colocadas nestes, a maior probabilidade de pegar uma bolinha vermelha em uma tentativa. Definir que nenhum dos sacos pode ficar vazio e que nenhuma das quatro bolinhas pode ficar fora dos sacos.

Ressaltar que os dois sacos não permitem que se observem, pelo volume, quantas bolinhas há dentro deles.

Os alunos devem descrever na ficha de papel, disponível no apêndice E, a distribuição escolhida e calcular a probabilidade de sucesso naquela situação escolhida.

Sugerimos que, na discussão e resolução da atividade, seja elaborada no quadro, com a participação dos alunos, uma árvore de possibilidades.



*2º Momento:*

Neste momento utilizaremos um saco de tecido preto e quatro bolinhas idênticas, sendo que uma delas será marca com caneta para diferenciá-la das demais. É importante que os alunos não consigam distinguir pelo tato essa bolinha das outras.

A atividade que apresentamos a seguir é uma aplicação, com material concreto, de uma questão da segunda fase do nível 3 da 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP-2010).

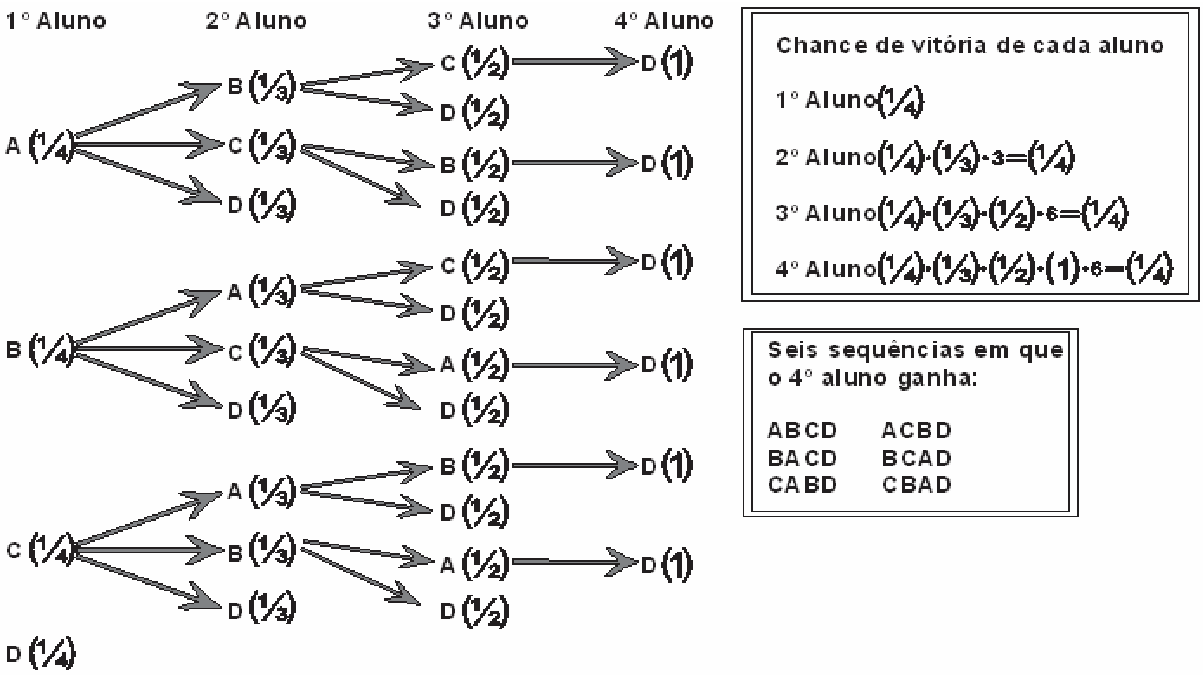
Iniciar a atividade selecionando quatro alunos e listando em ordem alfabética seus nomes no quadro. Em seguida dizer aos estudantes que será feito um sorteio em que a turma deverá julgar se as regras são justas, ou seja, permitiam probabilidades iguais de vitória para cada concorrente.

Mostrar as quatro bolinhas idênticas, indicando que uma delas está marcada com um "x", representando a bolinha que dará o prêmio para quem a retirar. Explicar aos estudantes que cada aluno, dos quatro alunos escolhidos para o sorteio, irá retirar uma bolinha do saco, sendo que as retiradas ocorrem uma por vez e na ordem que os nomes foram listados.

Após a realização do sorteio, que pode ser repetido algumas vezes, questionar a turma se o mesmo é justo.

Caso haja muitas dificuldades apresentadas pelos estudantes, sugerimos a utilização de um problema correlato mais simples. Que seria, propor, então, uma situação de sorteio similar a anterior, porém com apenas duas bolinhas em um saco e com dois jogadores, retirando uma bolinha um de cada vez.

Assim como no momento anterior, também sugerimos que, na discussão e resolução desta atividade, seja elaborada no quadro, com a participação dos alunos, uma árvore de possibilidades como a apresentada na seguinte figura.




**Avaliação:**

Registros numa ficha de observação do professor referente à participação dos alunos nas atividades propostas durante a aula e resoluções desenvolvidas pelos alunos nas fichas de papel.

## APÊNDICE B – Questionário Inicial

Parte 1

1) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso.

Escolha a opção correta:

a) O doente tem razão, se as primeiras 99 correram bem, a centésima tem que correr mal para que a probabilidade de sucesso seja 99%.
b) O doente está errado, a probabilidade de a sua operação ser bem sucedida é de 50%.
c) O doente está errado, a probabilidade de sua operação ser bem sucedida é 99%.
d) O doente está certo.

2) Justifique sua escolha na questão anterior:

3) Ao lançarmos uma moeda uma única vez, qual a probabilidade de obtermos:
a) uma cara?
b) uma coroa?

4) Ao lançarmos duas moedas, simultaneamente, qual a probabilidade de obtermos:
a) duas coroas?
b) uma cara e uma coroa?
c) duas coroas, sabendo que numa das moedas caiu coroa?

5) Dois jogadores de tênis de mesa A e B jogaram entre si, no passado, muitas partidas e cada um ganhou metade das partidas disputadas. Na rodada final de um torneio recente, os mesmos jogadores A e B disputam o prêmio de R$ 600,00. Segundo as regras, partidas serão realizadas até que um dos jogadores consiga 3 vitórias, sendo declarado o vencedor do torneio. Entretanto, quando o jogador A tinha duas vitórias e B uma, faltou luz no local, e a rodada foi interrompida. Na impossibilidade de continuar a rodada e também de marcar para outro dia, o diretor do torneio determinou que o prêmio fosse dividido entre os

dois finalistas. Como fazer a divisão do prêmio considerando a probabilidade de vitória de cada jogador na hipótese da disputa continuar?

Parte 2

1) O que você entende por evento aleatório?

2) O que você entende por probabilidade? Escreva um exemplo relacionando com algum fato ou situação presente no seu cotidiano.

## APÊNDICE C – Instrumento de Avaliação

Todas as questões sem múltipla escolha devem **apresentar** desenvolvimento (cálculos ou justificativas).

1) Lançou-se uma moeda “honesta” e saiu coroa. Se voltarmos a lançar a moeda:

a) é mais provável sair coroa.

b) é mais provável sair cara.

c) é tão provável sair cara como coroa.

d) a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

2) Se lançarmos uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de obtermos três caras e uma coroa?

3) Paulo pretende sortear um livro entre seus três amigos. As regras serão as seguintes:

* Cada amigo ficará com uma das três sequências abaixo:

| Sequência 1 | Sequência 2 | Sequência 3 |
|---|---|---|
| 3-4-5 | 6-7-8 | 9-10-11 |

* Serão lançados dois dados e os resultados serão somados.

* Quem tiver a sequência que contém o número obtido no resultado da soma será o vencedor.

* Será realizado mais de um lançamento apenas se o resultado obtido na soma do primeiro lançamento for 2 ou 12, pois estes são as somas que não constam nas sequências 1, 2 ou 3.

a) Suponha que você é um dos amigos de Paulo, qual sequência você escolheria para ter a maior probabilidade de ganhar? Justifique.

b) Você acha que o jogo de Paulo é justo (todos têm a mesma chance de ganhar)? Se você acha que não, elabore outra tabela com três sequências, cada uma com, pelo menos, dois valores dos onze possíveis (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) e sem repetição destes valores entre as sequências.

| Sequência 1 | Sequência 2 | Sequência 3 |
|---|---|---|
| | | |

4) Duas irmãs, Ana e Vanessa, jogaram par ou ímpar para definir quem seria a primeira a andar na bicicleta que ganharam no Natal. Elas combinaram que no seu jogo de par ou ímpar só poderiam usar uma mão, colocando os valores um, dois ou três, cada uma. Sabendo que Ana escolheu ímpar e Vanessa par, você diria que cada uma teria a mesma chance de ganhar? Justifique com cálculos.

(Considere que não exista trapaça como, por exemplo, esperar a outra jogar)

5) (ENEM -2006) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: — Tive uma idéia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.

Tadeu, camisa 2: — Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

Ricardo, camisa 12: — Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Desse diálogo conclui-se que

a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.

b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.

d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

e) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

6) Justifique corretamente a sua escolha na questão anterior com cálculos ou com conceitos de probabilidade estudados:

7) A probabilidade de um inseticida matar uma barata é de $\frac{8}{10}$, e a probabilidade de matar um pernilongo e de $\frac{7}{10}$. Um dia, ao chegar a sua casa, uma pessoa encontra uma barata e um pernilongo e aplica o inseticida. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos morram?

b) nenhum morra?

c) apenas o pernilongo morra?

8) (OBMEP-2010) André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

a) Qual a probabilidade de André ganhar o livro?

b) Qual a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

9) Dois indivíduos, Marcos e Pedro, vão jogar cara ou coroa com uma moeda "honesta". Eles combinam lançar a moeda 5 vezes, e ganha o jogo aquele que ganhar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta 40 reais. Feito os dois primeiros lançamentos, em ambos dos quais Marcos vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico, de que forma devem ser repartidos os 80 reais? (Justifique com cálculos)

**APÊNDICE D – Listas de questões utilizadas em aula.**

## Questões utilizadas na aula 3

1) (ENEM 2009) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é:

2) Ao lançarmos uma moeda 3 vezes, qual a probabilidade de obtermos cara, cara, cara.

3) Lançando uma moeda 3 vezes,qual a probabilidade de obtermos exatamente duas caras.

4) Num jogo disputado por 3 amigos, serão lançados 2 dados. Se o resultado da soma destes for 2, 3, 4 ou 5, Luiz será o vencedor; caso a soma seja 6, 7 ou 8, o Pedro vence; e as somas restantes dão a vitória ao Iuri. Qual a probabilidade de vitória de cada jogador?

## Questões utilizadas na aula 4

1) No lançamento de um dado e uma moeda, qual a probabilidade de obtermos o resultado 2 – cara ?

(UFRGS) 2) Uma parteira prevê, com 50% de chance de acerto, o sexo de cada criança que vai nascer. Num conjunto de três crianças, qual é a probabilidade de ela acertar pelo menos duas previsões?

3) O atirador A tem probabilidade $\frac{3}{5}$ de acertar um alvo e o atirador B tem probabilidade de $\frac{4}{7}$ de acertar o mesmo alvo. Se ambos atiram juntos (um tiro cada um), qual a probabilidade de o alvo ser atingido?

4) A probabilidade de um certo homem viver mais de 25 anos é de $\frac{3}{7}$ e de sua mulher é $\frac{4}{5}$.

Calcule a probabilidade de, daqui a 25 anos, somente o homem estar vivo.

5) A probabilidade de um inseticida matar uma barata é de 95%, e a probabilidade de matar um pernilongo é de 80%. Um dia, ao chegar a sua casa, uma pessoa encontra uma barata e um pernilongo e aplica o inseticida. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos morram?

b) apenas a barata morra?

c) nenhum morra?

d) pelo menos um deles morra?

6) Um casal tem 5 filhos. Qual a probabilidade de que sejam os 5 homens?

7) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a bola não ser amarela?

b) a bola ser branca ou amarela?

c) a bola não ser branca nem amarela?

8) Perguntou-se a 200 pessoas se viam telenovelas. Os resultados foram registrados na tabela:

| | Sim | Não |
|---|---|---|
| Homens | 50 | 30 |
| Mulheres | 10 | 20 |

Escolhida uma pessoa ao acaso,

a) qual a probabilidade de ser homem?

b) qual a probabilidade de ser mulher ou ver telenovelas?

c) qual a probabilidade de ser mulher e ver telenovelas?

## Questão utilizada na aula 5

1) Dois jogadores de tênis de mesa A e B jogaram entre si, no passado, muitas partidas e cada um ganhou metade das partidas disputadas. Na rodada final de um torneio recente, os mesmos jogadores A e B disputam o prêmio de R$ 600,00. Segundo as regras, partidas serão realizadas até que um dos jogadores consiga 3 vitórias, sendo declarado o vencedor do torneio. Entretanto, quando o jogador A tinha duas vitórias e B uma, faltou luz no local, e a rodada foi interrompida. Na impossibilidade de continuar a rodada e também de marcar para outro dia, o diretor do torneio determinou que o prêmio fosse dividido entre os dois finalistas. Qual a forma correta de fazer a divisão do prêmio?

## Questão utilizada na aula 6

Na sexta aula foi apresentado um problema adaptado da questão número 5, itens a e b, da segunda fase do nível 3 da 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP-2010)[1] .A seguir apresentamos o enunciado original da questão.

André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

a) Qual a probabilidade de André ganhar o livro?

b) Qual a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

[1] Disponível em http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n3-2010.pdf.

**APÊNDICE E – Ficha de respostas.**

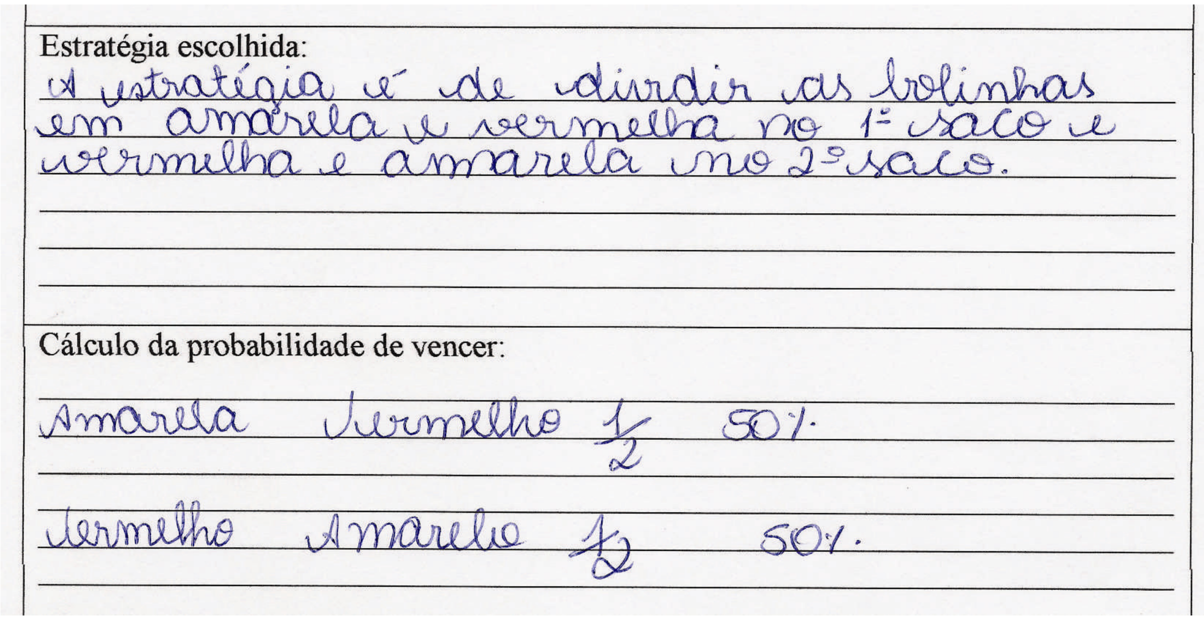
Estratégia escolhida:

__________________________________________________________________

Cálculo da probabilidade de vencer:

__________________________________________________________________

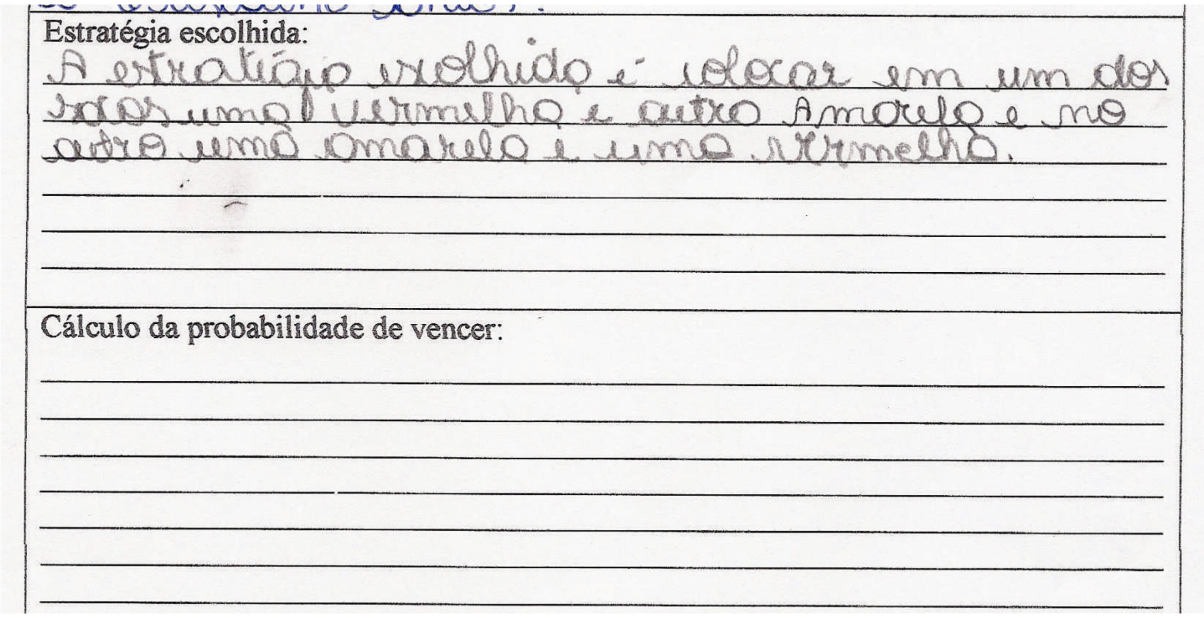
**ANEXO A – Resolução desenvolvidas pelos alunos na aula 5.**



Estratégia escolhida:
A estratégia é de dividir as bolinhas em amarela e vermelha no 1º saco e vermelha e amarela no 2º saco.

Cálculo da probabilidade de vencer:
Amarela Vermelho $\frac{1}{2}$ 50%
Vermelho Amarelo $\frac{1}{2}$ 50%

Figura 1: Resolução do problema da distribuição das bolinhas.



Estratégia escolhida:
A estratégia escolhido é colocar em um dos sacos uma vermelha e outro Amarelo e no outro uma amarela e uma vermelha.

Cálculo da probabilidade de vencer:

Figura 2: Resolução apresentada pelo grupo B.

Estratégia escolhida:

1 bola vermelha em 1 saquinho. E o restante no outro saco. Pois se eu escolher o saco que tem 1 bola, é 100% de chance de vencer. E o outro saco que contém as outras 3 será 33% de chance.

Cálculo da probabilidade de vencer:

saco A: 100% saco B: 33%

$\frac{1}{1}$ X $\frac{1}{3}$

Figura 3: Resolução apresentada pelo grupo

Estratégia escolhida:

Em um dos saquinhos ficará uma bolinha vermelha e no outro saquinho ficará duas bolinhas amarelas e uma bolinha vermelha

Cálculo da probabilidade de vencer:

O saquinho que tem apenas uma bolinha (vermelha) tem 100% de chance de ganhar e no outro saquinho (amarelo-amarelo-vermelho) as chances de ganhar é 33% e de perder é 66%

Figura 4: Resolução apresentada pelo grupo

## ANEXO B – Autorização da escola.

Autorização

A Escola Estadual de Educação Básica Prudente de Morais, escola da rede pública estadual, localizada na cidade de Osório, neste ato, representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Rossano Evaldt Steinmetz Ribeiro, brasileiro, solteiro, estudante, residente e domiciliado na Rua Joanim Gamba, 530, em Osório, RS, RG 4083866642, a utilizar o projeto "Uma proposta de ensino de Probabilidade no Ensino Médio", em sua dissertação que é exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Autorizado, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram do projeto.

Osório, 8 de novembro de 2010.

Direção

Escola Estadual de Educação Básica
PRUDENTE DE MORAIS
OSÓRIO
Decreto de Transf nº 31651 de 05/10/84
Diário Oficial de 09/10/84
Port ato/SE 0075/2000 altera designação

ANA MARIA ROCHA RUFINO
Diretora
Id. Func. 1446630/02
D.O. 10/05/2011 Pág. 39

Rossano Evaldt Steinmetz Ribeiro