

**USO DO MÉTODO DAS INTERFACES COESIVAS  
NA ANÁLISE DA SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO  
DE FRATURA EM MATERIAIS FRÁGEIS**

Uziel Cavalcanti de Medeiros Quinino

Porto Alegre  
Fevereiro 2004

**UZIEL CAVALCANTI DE MEDEIROS QUININO**

**USO DO MÉTODO DAS INTERFACES COESIVAS  
NA ANÁLISE DA SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO  
DE FRATURA EM MATERIAIS FRÁGEIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre  
Fevereiro 2004

**UZIEL CAVALCANTI DE MEDEIROS QUININO**

**USO DO MÉTODO DAS INTERFACES COESIVAS  
NA ANÁLISE DA SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO  
DE FRATURA EM MATERIAIS FRÁGEIS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 27 de fevereiro de 2004

**Prof. Eduardo Bittencourt ( UFRGS )**  
DSc. pelo CPGEC / UFRGS  
Orientador

**Prof. Américo Campos Filho ( UFRGS )**  
DSc. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Coordenador do PPGEC / UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Guillermo Juan Creus ( CPGEC-UFRGS )**  
DSc. pela COOPE / Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Ignacio Iturrioz ( CPGEM-UFRGS )**  
DSc. pelo CPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila ( CPGEC-UFRGS )**  
DSc. pelo CPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**QUININO, Uziel Cavalcanti de Medeiros**

**Uso do Método das Interfaces Coesivas na Análise da Simulação do Comportamento de Fratura em Materiais Frágeis. – PPGEC/UFRGS, 2004.**

150 p.

Dissertação de Mestrado, Programa de Pós –Graduação em Engenharia Civil; UFRGS; Mestre em Engenharia.  
Orientador: Eduardo Bittencourt.

1. Assunto I. Mecânica da Fratura
2. Assunto II. Interfaces Coesivas
3. Assunto III. Método dos Elementos Finitos

CCAA2

*Dedico*

*ao meu pai, Sr. Izaque Quinino, exemplo de pessoa íntegra, correta, que me ensinou a ter tantos dos predicados que ele possui, e agradeço-lhe os exemplos /realidade que me tem mostrado de como se deve ter um verdadeiro caráter de um ser humano e por tudo aquilo que me tem transmitido e que ainda continua a transmitir;*

*à minha mãe, Sra. Lenice Cavalcanti, exemplo vivo de uma verdadeira lutadora, incansável, trabalhadora, detentora de características que marcam qualquer filho, lutando sempre ao lado da família. Por tudo aquilo que me tem transmitido e por todos valores que só se adquirem com uma boa educação.*

*" ... Seja, pois, o motivo de tuas ações e  
dos teus pensamentos sempre  
o cumprimento do dever,  
e fazes as tuas obras sem procurares recompensa,  
sem te preocupares com o teu sucesso ou insucesso,  
com teu ganho ou o teu prejuízo pessoal.  
Não caias, porém, em ociosidade e inação,  
como acontece facilmente  
aos que perderam a ilusão  
de esperar uma recompensa  
das suas ações. ..."  
( Baghavad-Gita )*

## AGRADECIMENTOS

Meus primeiros agradecimentos são a Deus, pois n'Ele acreditei. Apesar das dificuldades de cada dia, eu soube entender o Seu silêncio, me acompanhando, dando-me força de vontade para chegar ao fim de mais uma etapa na vida profissional.

Muitas pessoas merecem agradecimentos por suas participações durante essa pesquisa me oferecendo sugestões valiosas. Sem menosprezar todas as contribuições, gostaria de referir as mais substanciais.

Eu agradeço o amplo apoio e orientação do professor Eduardo Bittencourt, inclusive pelos indispensáveis ensinamentos, discussões proveitosas e por proporcionar-me maturidade propícia para o andamento da pesquisa científica. Por sua amizade, compreensão e satisfação de trabalharmos juntos.

Aos demais professores que colaboraram com sugestões e questionamentos fundamentais para a ratificação de vários tópicos abordados nesta dissertação, com ressaltos aos professores Ignácio Iturrioz e Virgínia R. D'Avila, sendo generosos em compartilhar suas experiências.

A minha gratidão ao *Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul* pela oportunidade de realizar o curso de mestrado e aos responsáveis do *Centro de Mecânica Aplicada e Computacional – CEMACOM* – durante o período de desenvolvimento deste trabalho pelo ambiente propício e encorajador para seguir.

Também é digna do meu reconhecimento, em sua imensa generosidade, minha namorada, a Otaciana Costa da Silva, que sempre esteve ao meu lado ajudando-me no meu trabalho com palavras doces de apoio, carinho e amor. Pela atenção e dedicação prestados, não só nos momentos de alegria, mas, principalmente, nas dificuldades enfrentadas no transcorrer desta dissertação. Sua tranquilidade, incentivo, serenidade e paciência para me ouvir sempre, foram importantes. Além disso, contribuiu decisivamente com companheirismo em nossas atividades extra profissionais.

Sou grato a todos os meus amigos e colegas que conviveram comigo em sala de aula e dentro dos laboratórios do *PPGEC*, pelo clima de companheirismo e respeito mútuo, requisitos importantes na origem de condições de trabalho adequadas.

Ainda sim, aos velhos amigos que ficaram na minha região de origem e aos novos que conheci em Porto Alegre, tendo a oportunidade de conviver com alguns deles.

Dentre todos, insisto em querer reconhecer meu débito a: Prof. Clóvis Dias, Profa. Sônia Borba, Prof. Pablo Lopez, pela recomendação direcionada ao programa de mestrado e pela formação profissional. Aos queridos amigos, Profa. Zandre Vasconcelos, Wallacy Roberto e Antônio Cosmo, bem como seus familiares, pela amizade e companhia. Aos amigos Adriano Rolim, Luis Gustavo, Eduardo Bueno e Márcio Nóbrega, pela força e apoio, sendo complacentes para comigo, assistindo-me nos primeiros momentos nesta cidade.

Aos caros Everton Luiz, Daniel F. Sias, Rodrigo Malysz, Letícia Fleck (familiares), Alexandra Passuello (familiares), Cristiane Salerno, dentre outros, pela afinidade e parceria nos momentos de desopilação.

A minha gratidão aos nobres amigos Marcus Cruz e Francilene Amaral, pelo forte apoio e companhia. Suas participações nos momentos finais deste trabalho foram bem ativas, inclusive através de laços de amizade e incentivo.

Ao querido Padre Edgar e toda equipe de liturgia da *Paróquia Santa Cecília*, sendo responsáveis pelo acolhimento e a oportunidade de participar de um grupo de afeição e união.

Aos meus pais e irmãos, que apesar da distância dos últimos anos, acompanharam minha jornada, desde os primórdios momentos de vida até os dias de hoje.

À *CAPES* pela utilização de recurso financeiro, permitindo-me o atendimento adequado das necessidades, assim como contribuindo diretamente para a formação e geração do pesquisador.

A todos agradeço, profundamente e dedico o resultado do projeto, assumindo a responsabilidade de tudo que nele consta.



## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	iv
LISTA DE SIGLAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	ix
RESUMO.....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
1. INTRODUÇÃO.....	p.1
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	p.1
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO.....	p.2
1.3. CONTRIBUIÇÃO PRINCIPAL.....	p.3
1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	p.4
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	p.6
2.1. EVOLUÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA.....	p.6
2.2. MECÂNICA DA FRATURA E ESTRUTURAS DE CONCRETO	p.8
2.3. ABORDAGEM DE RUPTURA NO CONCRETO.....	p.9
2.3.1. Modelos de Fratura.....	p.9
2.4. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA.....	p.14
2.5. TEORIA DA FRATURA DE BARENBLATT E DUGDALE.....	p.17
3. METODOLOGIA EMPREGADA.....	p.20
3.1. ELEMENTOS DE INTERFACES COESIVAS APLICADAS A MECÂNICA DA FRATURA.....	p.20
3.2. FORMULAÇÃO BÁSICA DOS ELEMENTOS DE INTERFACE COESIVA.....	p.21
3.3. DESCRIÇÃO DAS INTERFACES COESIVAS.....	p.22

3.4. PROPRIEDADES DAS INTERFACES.....	p.27
3.5. APLICAÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	p.29
4. APLICAÇÕES.....	p.33
4.1. ANÁLISE DA FISSURAÇÃO DE TIRANTES DE CONCRETO SIMPLES.....	p.33
4.1.1. Propriedades do material.....	p.34
4.1.2. Solução analítica.....	p.34
4.1.2.1. Malhas empregadas.....	p.37
4.1.2.2. Resultados da análise.....	p.38
4.1.3. Situação real com trinca.....	p.40
4.1.3.1. Malha empregada.....	p.42
4.1.3.2. Resultados da análise.....	p.42
4.2. INFLUÊNCIA DAS PROPRIEDADES DE INTERFACES COESIVAS NA BIFURCAÇÃO DE TRINCAS EM MATERIAIS FRÁGEIS.....	p.44
4.2.1. Malha empregada.....	p.46
4.2.2. Dimensões mínimas dos elementos da malha.....	p.46
4.2.3. Influência das tensões na ponta da trinca a diferentes velocidades de impacto.....	p.47
4.2.3.1. Resultados da análise.....	p.49
4.2.4. Influência do comprimento característico $d$ .....	p.53
4.2.4.1. Resultados da análise.....	p.54
4.2.5. Influência da energia de fratura $G_f$ .....	p.57
4.2.5.1. Resultados da análise.....	p.58
4.2.6. Influência da rigidez das interfaces.....	p.60
4.2.6.1. Resultados da análise.....	p.62
4.2.7. Discussão de resultados.....	p.63
4.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE FRATURA EM UMA VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO EM TRÊS PONTOS.....	p.64
4.3.1. Malha empregada.....	p.65
4.3.2. Propriedades do material.....	p.66

4.3.3. Leis Constitutivas das interfaces.....	p.66
4.3.4. Resultados da análise.....	p.68
4.3.5. Influência da massa específica $r$ .....	p.70
4.4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE FRATURA EM MODOS MISTOS DE PROPAGAÇÃO ( MODOS I E II ) – ANÁLISE DE PARÂMETROS DE FRATURA.....	p.73
4.4.1. Ensaio e material empregado.....	p.73
4.4.2. Resultados numéricos e discussão.....	p.76
4.4.2.1. Malha empregada.....	p.76
4.4.2.2. Efeitos dinâmicos na análise.....	p.77
4.4.2.3. Efeito da energia de fratura dos modos I e II.....	p.83
4.4.2.4. Efeito do comprimento característico $\delta$ .....	p.84
4.4.2.5. Efeito das condições de contorno.....	p.86
4.4.2.6. Comparação dos resultados.....	p.88
4.4.2.7. Discussão dos resultados.....	p.90
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	p.91
5.1. CONCLUSÃO.....	p.91
5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	p.95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	p.96
APÊNDICE A – Algoritmo do gerados de malhas.....	p.102

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Histórico da Mecânica da Fratura:.....	p.7
Figura 02: Representação esquemática do modelo de Hillerborg.....	p.11
Figura 03: Modos básicos de deformação de uma trinca.....	p.15
Figura 04: Forças coesivas na ponta da trinca - modelo de Barenblatt.....	p.18
Figura 05: Crescimento da trinca segundo a teoria de Barenblatt.....	p.18
Figura 06: Corpo em estudo.....	p.21
Figura 07: Esquema da interface coesiva.....	p.22
Figura 08a: Tensões normais na interface - Xu e Needleman (1994).....	p.25
Figura 08b: Tensões tangencias na interface - Xu e Needleman (1994).....	p.25
Figura 09a: Tensões normais nas interfaces - Leis bilineares.....	p.26
Figura 09b: Tensões tangenciais nas interfaces - Leis bilineares.....	p.26
Figura 10: Área formada pela relação bilinear onde $G_C=G_f$ .....	p.28
Figura 11: Sistema de coordenadas naturais no elemento de interface.....	p.30
Figura 12: Discretização global da malha de elementos finitos.....	p.32
Figura 13: Tipos de ligação entre os nós dos elementos.....	p.32
Figura 14: Tirante de concreto simples.....	p.33
Figura 15: Relação constitutiva.....	p.35
Figura 16: Curva <i>tensão x deslocamento</i> total da seção livre.....	p.36
Figura 17: Malhas utilizadas para o tirante de $L=100\text{ mm}$ .....	p.38
Figura 18: Curvas <i>tensão x deslocamento</i> para diferentes malhas.....	p.39
Figura 19: Curvas <i>tensão x deslocamento</i> para as malhas 1, 4 e 5.....	p.40
Figura 20: Tirante com uma trinca inicial de 5 mm.....	p.41
Figura 21: Lei de separação normal das interfaces ( apenas a parte positiva é mostrada ).....	p.42
Figura 22: Malha de 2400 elementos finitos quadriláteros e 2542 nós.....	p.43

Figura 23: Tensão $\times$ deslocamento na face excitada - caso real com trinca.....	p.43
Figura 24: Esquema da placa de <i>PMMA</i> com trinca central.....	p.44
Figura 25: Placa de <i>PMMA</i> com trinca central - Geometria e carregamento.....	p.45
Figura 26: Malha de 6400 elementos e 19200 nós para a placa de <i>PMMA</i> .....	p.46
Figura 27a: Curvas das leis constitutivas normal das interfaces (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.48
Figura 27b: Curvas das leis constitutivas tangenciais das interfaces (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.48
Figura 28a: Comportamento da propagação da trinca para $\sigma_{máx} = E/10$ .....	p.49
Figura 28b: Comportamento da propagação da trinca para $\sigma_{máx} = E/25$ .....	p.50
Figura 28c: Comportamento da propagação da trinca para Xu e Needleman (1994).....	p.50
Figura 29a: Comportamento da propagação da trinca para $\sigma_{máx} = E/10$ .....	p.51
Figura 29b: Comportamento da propagação da trinca para $\sigma_{máx} = E/25$ .....	p.52
Figura 29c: Comportamento da propagação da trinca para Xu e Needleman (1994).....	p.52
Figura 30a: Leis de separação normal para diferentes valores de $d_n$ (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.53
Figura 30b: Leis de separação tangencial para diferentes valores de $d_t$ (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.54
Figura 31a: Configuração deformada para posição A. ....	p.54
Figura 31b: Configuração deformada para posição AO .....	p.55
Figura 31c: Configuração deformada para posição O .....	p.55
Figura 31d: Configuração deformada para posição BO .....	p.56
Figura 31e: Configuração deformada para posição B .....	p.56
Figura 32a: Relações constitutivas na direção normal - Variação da energia de fratura (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.57
Figura 32b: Relações constitutivas na direção tangencial - Variação da energia de fratura (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.58
Figura 33a: Configuração deformada da placa de <i>PMMA</i> com energia de $G_f$ -40%.....	p.58
Figura 33b: Configuração deformada da placa de <i>PMMA</i> com energia original $G_f$ .....	p.59

Figura 33c: Configuração deformada da placa de <i>PMMA</i> com energia de $G_f + 40\%$ .....	p.59
Figura 34a: Relações constitutivas normais das interfaces - variação da rigidez inicial (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.61
Figura 34b: Relações constitutivas tangenciais das interfaces - variação da rigidez inicial (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.61
Figura 35a: Deformada da placa <i>PMMA</i> - Modelo quasi-rígido após 10ms.....	p.62
Figura 35b: Deformada da placa <i>PMMA</i> - Modelo não-rígido após 10ms .....	p.63
Figura 36: Esquema da viga sujeita à flexão em três pontos.....	p.64
Figura 37: Características geométricas da viga.....	p.65
Figura 38: Malha de 6400 elementos finitos triangulares para a viga.....	p.65
Figura 39a: Lei de separação normal das interfaces - $dn = 5,196 \times 10^{-05} \text{ mm}$ (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.67
Figura 39b: Lei de separação tangencial das interfaces - $dt = 3,7411 \times 10^{-05} \text{ mm}$ (apenas a parte positiva é mostrada).....	p.67
Figura 40: Configuração deformada da viga bi apoiada sujeita à flexão em três pontos.....	p.68
Figura 41: Carga $P$ x deslocamento no centro do vão $df$ .....	p.69
Figura 42: Configuração deformada após a ruptura para a viga bi-apoiada.....	p.70
Figura 43: Curvas $Pr$ x $df$ com massas específicas distintas.....	p.71
Figura 44: Deformada para a massa específica $r_2 = 25.000 \text{ kg} / \text{m}^3$ .....	p.72
Figura 45: Deformada para a massa específica $r_3 = 250.000 \text{ kg} / \text{m}^3$ .....	p.72
Figura 46: Esquema da viga submetida a corte em quatro pontos.....	p.74
Figura 47: Distribuição das forcas aplicadas e geometria da viga.....	p.74
Figura 48: Máquina usada na análise experimental desenvolvida por Schlangen (1993)....	p.75
Figura 49: Malha de 4003 elementos triangulares para a viga com 04 pontos de corte.....	p.76
Figura 50: Representação de $CMOD$ e $CMSD$ no entalhe da viga.....	p.77
Figura 51: Curvas $F1$ x $CMOD$ para a) tensão máxima na interface coesiva de $E/20$ ; b) tensão máxima de $E/25$ ; velocidades de 0,01 m/s , 0,1 m/s e 1 m/s.....	p.78
Figura 52: Morfologia da trinca para diferentes velocidades de aplicação das cargas e tensão máxima na interface de $E/10$ .....	p.79

Figura 53: Morfologia final, após a ruptura total.....	p.80
Figura 54: Morfologia final após a ruptura, malha refinada (7872 elementos e 23616 nós)	p.80
Figura 55: Morfologia da trinca para diferentes velocidades de aplicação das cargas e tensão máxima na interface de $E/20$ .....	p.81
Figura 56: Morfologia da trinca para diferentes velocidades de aplicação das cargas e tensão máxima na interface de $E/25$ .....	p.82
Figura 57: Morfologia da trinca para leis tangenciais adotadas.....	p.83
Figura 58: Curvas $F1$ x $CMOD$ para diferentes posições do “pico“.....	p.85
Figura 59: Morfologia da trinca - variação dos comprimentos $dn$ e $dt$ para o deslocamento prescrito de $5\text{ mm}$ .....	p.86
Figura 60: Variadas condições de contorno do comportamento da viga.....	p.87
Figura 61: Configuração da peça para as três condições de contorno adotadas.....	p.88
Figura 62: Carga $P$ x $CMOD$ - Resultado experimental do Schlangen (1993).....	p.88
Figura 63: Morfologia da trinca para o exemplo estudado. Estudos anteriores.....	p.89

## LISTA DE SIGLAS

CMOD:	<i>Crack Mouth Open Displacement</i>
CMSD:	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
EPD:	Estado Plano de Deformações
MEF:	Método dos Elementos Finitos
PMMA:	Polimetacrilato de Metila – Acrílico
PTV:	Princípio dos Trabalhos Virtuais



## LISTA DE SÍMBOLOS

### - LETRAS ROMANAS

$a$ :	Comprimento inicial da trinca
<b>B</b> :	Vetor de forças de volume
$c_d$ :	Velocidade da onda de pressão
$d$ :	Comprimento da zona de atuação das forças coesivas
$d_f$ :	Deslocamento vertical no centro do vão da viga
$E$ :	Módulo de elasticidade longitudinal
$e$ :	Base natural
<b>F</b> :	Vetor de forças aplicadas ao contorno
<b>F<sub>ext</sub></b> :	Vetor de forças externas
<b>F<sub>int</sub></b> :	Vetor de forças internas
$f_{ij}$ :	Funções Adimensionais
$G$ :	Taxa de liberação de energia
$G_f$ :	Energia de fratura do material
$G_m$ :	Distribuição de forças coesivas
$I, II, III$ :	Índices indicadores do modo de ruptura
$J$ :	Jacobiano
$K_C$ :	Valor crítico do fator de intensidade de tensão
$K_I$ :	Fator de intensidade de tensão para o Modo I de deformação de uma trinca
$K_{II}$ :	Fator de intensidade de tensão para o Modo II de deformação de uma trinca
$K_{III}$ :	Fator de intensidade de tensão para o Modo III de deformação de uma trinca
$l$ :	Comprimento da barra
$l_i$ :	Comprimento da interface
$l_{min}$ :	Comprimento mínimo dos elementos
<b>M</b> :	Matriz de massa consistente

$N$ :	Número do nó da interface coesiva
$n$ :	Vetor unitário que define a direção normal da interface coesiva
$NPG$ :	Número de pontos de Gauss
$P$ :	Carga aplicada na estrutura
$P_r$ :	Carga reativa
$q$ :	Variável adimensional
$r$ :	Variável adimensional
$r_p$ :	Distância radial da ponta da trinca
$\mathbf{T}$ :	Vetor de tensões coesivas na interface
$T_n$ :	Tensão normal da interface coesiva
$T_t$ :	Tensão tangencial da interface coesiva
$t$ :	Vetor unitário que define a direção tangencial da interface coesiva
$\mathbf{U}$ :	Vetor de deslocamentos ao longo do corpo
$\ddot{\mathbf{U}}$ :	Vetor de acelerações nodais
$\mathbf{U}^N$ :	Vetor de deslocamentos dos nós da interface coesiva
$U_n$ :	Deslocamento normal do nó da interface coesiva
$U_t$ :	Deslocamento tangencial do nó da interface coesiva
$u$ :	Deslocamento
$W_p$ :	Peso no ponto de Gauss
$w_C$ :	Abertura da fissura
$w_{C\max}$ :	Abertura máxima da fissura
$V$ :	Velocidade
$V_i$ :	Velocidade de impacto da borda inferior
$V_s$ :	Velocidade de impacto da borda superior
$x,y$ :	Coordenadas cartesianas

- **LETRAS GREGAS**

$G^F$ :	Contorno de aplicação das forças
$G^T$ :	Contorno da trinca
$G^U$ :	Contorno da superfície
$G^{T,e}$ :	Superfície do elemento de interface
$\gamma$ :	Energia de superfície
$D$ :	Vetor de deslocamentos da interface
$\Delta_n$ :	Abertura da interface coesiva na direção normal
$\Delta_t$ :	Abertura da interface coesiva na direção tangencial
$d_n$ :	Comprimento característico normal
$d_t$ :	Comprimento característico tangencial
$d_{nmáx}$ :	Máxima abertura normal das interfaces
$d_{tmáx}$ :	Máxima abertura tangencial das interfaces
$e$ :	Deformação
$h$ :	Coordenada natural normal à interface coesiva
$q$ :	Ângulo
$n$ :	Coefficiente de Poisson
$r$ :	Massa específica do material
$s$ :	Tensor de tensões de Cauchy
$s_{máx}$ :	Máxima tensão normal da interface coesiva
$s_{ij}$ :	Campos de tensões na ponta da trinca
$s_e$ :	Tensão de escoamento
$s_t$ :	Resistência máxima a tração
$t_{máx}$ :	Máxima tensão tangencial da interface coesiva
$F$ :	Funções de interpolação para a abertura da interface coesiva
$f$ :	Potencial da interface coesiva

$f_n$ :	Trabalho de separação normal da interface coesiva
$f_t$ :	Trabalho de separação tangencial da interface coesiva
$j$ :	Função de forma
$W$ :	Domínio do corpo estudado
$x$ :	Coordenada natural tangencial à interface

## RESUMO

QUININO, U. C. M. Uso do Método das Interfaces Coesivas na Análise da Simulação do Comportamento de Fratura em Materiais Frágeis. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Este trabalho apresenta uma abordagem numérica da fratura baseada no Método dos Elementos Finitos na qual são considerados materiais frágeis como objeto de estudo. As simulações realizadas são possíveis através de um algoritmo computacional que consiste na implementação de molas entre as faces dos elementos finitos. Esta composição constitui o método denominado Interfaces Coesivas. As molas fornecem o efeito de coesão e é representado por leis constitutivas do tipo bi-linear. Sua descrição é apresentada, bem como sua implementação na análise. Tanto o modo *I* como o modo *II* de ruptura são considerados. Com o objetivo de verificar o presente modelo com outros resultados e soluções, são analisados exemplos numéricos e experimentais extraídos da literatura. Tais exemplos tratam da nucleação, propagação e eventuais paradas de trincas em peças estruturais submetidas aos mais diversos carregamentos e condições de contorno. É ainda discutido como os parâmetros de fratura do material interferem no processo de ruptura. Uma tentativa é feita de determinar estes parâmetros, em especial no caso de concreto.

Palavras-chave: elementos finitos; interface coesiva; materiais frágeis.

## ***ABSTRACT***

QUININO, U. C. M. Uso do Método das Interfaces Coesivas na Análise da Simulação do Comportamento de Fratura em Materiais Frágeis. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

This work presents a numerical analysis of fracture based on the Finite Element Method where brittle materials are considered. The simulations are possible through an algorithm where springs are implemented between the faces of the finite elements. This composition constitutes the so called Cohesive Interface Method. The springs give the cohesive effect and they are represented by a bi-linear constitutive law. Its description as well as its implementation is detailed. Mode I and mode II of rupture are considered in this work. In order to verify the present model results are compared with numerical and experimental results obtained in the literature. These examples consider nucleation, propagation and eventual arrest of the cracks in structural pieces under different boundary and loading conditions. Finally the way fracture material parameters change the rupture process is discussed. An attempt is made to determine these parameters specifically for the case of concrete.

Key word: finite elements; cohesive surface; brittle materials.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O fenômeno da ruptura em componentes estruturais é dependente da geometria considerada, condições de carregamento e do material que constitui a mesma. Normalmente, são usados métodos de análises diversos que buscam, da melhor forma, capturar as características e propriedades do comportamento da fratura, por meio de critérios energéticos e de resistência, procurando considerar a propagação das trincas ao longo de toda a estrutura.

Neste trabalho, encontra-se uma análise numérica deste comportamento em peças de materiais elástico-lineares frágeis e homogêneos. Desta forma, os conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica são suficientes para descrever o processo. Como exemplo destes materiais podem-se mencionar vários materiais refratários, cerâmicas, polímeros, rochas e concreto.

Neste estudo será empregado uma metodologia de superfícies coesivas, tendo como objetivo maior investigar os modos de propagação frente a situações diversas de carregamento. As trincas são representadas por falhas ou descontinuidades geométricas no material e analisadas discretamente pelo método das interfaces coesivas. A maneira como essa descontinuidade é implementada, por meio de um modelo, consiste na inserção de molas entre as faces dos elementos finitos de modo a representar a nucleação e propagação das trincas, bem como garantir a coesão do material.

Uma vez inseridas as interfaces coesivas, a energia de fratura do material e a tensão máxima são consideradas na análise e transmitidas às interfaces, as quais governam todo o processo pelas curvas de relação tensão *vs* deslocamento das interfaces. Essas leis constitutivas apresentam um ramo ascendente, ou carregamento elástico, até atingir a tensão máxima e um outro ramo, agora descendente, que caracteriza um amolecimento, onde as tensões pós-pico nas interfaces decrescem com o aumento de deslocamento.

O fenômeno da origem, crescimento, propagação e ramificação das trincas é investigado sob diversas considerações no que tange a distribuição das tensões macroscópicas ao longo do contínuo, tensões na ponta da trinca como função das propriedades do material, localização e bifurcação de trincas como dependência das cargas de impactos diferentes, bem como a influência das dimensões mínimas dos elementos adjacentes a trajetória da trinca.

Esse trabalho se propõe a também contribuir com o estudo, levantando questões relacionadas à dinâmica de propagação das trincas. É sabido que (ver Xu e Needleman (1990)), quando a velocidade de propagação das trincas chega próximo das velocidades limites de propagação das ondas no meio, há uma tendência das trincas bifurcarem e ramificarem. Efeitos dinâmicos na propagação de trincas podem ocorrer mesmo para cargas aplicadas de forma lenta, dependendo da energia armazenada antes do início da propagação. Assim, parece difícil que uma análise que pretenda estudar a influência dos modos *I e II* e de suas correspondentes energias, possa prescindir da análise dinâmica.

Em adição ao estudo, a variação de parâmetros como tensão máxima e abertura na qual a mesma é atingida, para uma mesma energia de fratura, é de grande importância. Sendo assim, dentro de um intervalo de valores considerados aceitáveis na literatura, a determinação destes é investigada com fins de avaliar como estes venham a interferir no comportamento final.

## 1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

Dada a importância de uma avaliação mais completa acerca do processo de ruptura em estruturas, o presente estudo tem como objetivo geral um melhor entendimento da formação e propagação de trincas nas peças constituídas de materiais do tipo frágil, fazendo uso do *MEF* acoplado ao método das interfaces coesivas, comparando os resultados obtidos desta análise com valores oriundos do emprego de metodologias diferentes, bem como com exemplos numéricos apresentados na literatura.

A pesquisa apresenta os seguintes objetivos específicos:

- Aplicar a metodologia à exemplos em que o concreto simples é utilizado e tentar verificar a aplicabilidade do método à tais materiais, ainda que considerado-os homogêneos



- Analisar o comportamento das peças procurando observar a direção de propagação das trincas e suas ramificações e verificar se a resposta é consistente com o esperado. Ênfase será dada aos efeitos dinâmicos nas direção de propagação;
- Observar a influência das dimensões e distribuição dos elementos finitos que irão compor a malha;
- Variar os parâmetros de ruptura na tentativa de investigar a influência destes no comportamento da fratura e/ou na análise numérica, relacionando-os a um fenômeno físico;
- Investigar até que ponto a teoria das interfaces coesivas é adequada para a simulação de materiais heterogêneos como o concreto; e que propriedades do material caracterizam a fratura, tanto no Modo *I* como no Modo *II*;

### 1.3. CONTRIBUIÇÃO PRINCIPAL

Neste trabalho será empregado o mesmo algoritmo utilizado por Fedrigo (2001) que por sua vez, baseia-se na idéia original de Needleman (1987). Neste caso, os elementos finitos são ligados por molas que simulam a separação entre átomos. Essas molas são as interfaces coesivas, cuja aplicação está voltada para o conceito onde a trinca é tida como uma descontinuidade, e sua abertura é controlada por leis constitutivas que estabelecem a relação entre forças e deslocamentos.

Uma característica principal do modelo é a ausência da obrigatoriedade de deslocamentos iguais em nós comuns pertencentes a elementos diferentes, ou seja, cada elemento deve ter o seu conjunto de nós que se mantém ligado nos demais através de forças de coesão. Uma vez que essas forças são excedidas do limite, os elementos finitos se separam, dando início ao fenômeno da ruptura.

Fedrigo adotou uma relação constitutiva das molas como sendo do tipo exponencial, o que dificulta a análise paramétrica proposta nesta pesquisa.

Desta forma, uma maneira alternativa para analisar os parâmetros de ruptura é a mudança na forma dessas relações constitutivas. O estudo da influência destes parâmetros fica facilitado, inclusive, no que tange à dedução de uma matriz tangente analítica, embora este tema não seja abordado aqui.

No que diz respeito a esta dissertação, sua principal contribuição reside na consideração de leis bi-lineares para representar tais relações constitutivas, tendo em vista que as relações lineares permitem maior liberdade para a variação de parâmetros de fratura – como por exemplo, a energia de fratura do sistema, as tensões e aberturas nas interfaces, rigidez inicial do modelo – que serão examinados mais adiante com maiores detalhes. Em adição ao estudo contido nesta pesquisa, o modelo proposto será aplicado a análise do comportamento de ruptura em materiais frágeis.

Tal metodologia é específica para materiais homogêneos, no entanto, este trabalho estende em termos de aplicações ao concreto, um material notoriamente heterogêneo. Dados experimentais são usados para embasar e determinar parâmetros que tornem o método aplicável ao concreto.

#### 1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada em mais 4 capítulos além do presente, descritos na seqüência.

No Capítulo 2, uma revisão geral dos conceitos, teorias e análises desenvolvidas por pesquisadores da área, contendo um resumo das principais descobertas e modelos que até hoje são adotados como alicerce para simulação do comportamento de fratura em peças estruturais, cuja parte principal é direcionada aos conceitos de fratura discreta com o emprego numérico de interfaces coesivas.

No Capítulo 3, é detalhada a metodologia do estudo empregado, algoritmo computacional, sua implementação no contexto do Método dos Elementos Finitos, bem como definição de relações constitutivas de fratura. Também são discutidos os parâmetros materiais que fazem parte da formulação dos elementos de interface.

No Capítulo 4, são detalhados exemplos de aplicação da metodologia empregada, subdivididos em 4 seções descritas a seguir.

Na Seção 4.1, a primeira aplicação, contém um exemplo de tração pura, onde um tirante de concreto simples é simulado numericamente, procurando enfatizar o comportamento analítico, uma situação real sem trinca, assim como o fenômeno ocorrido no caso real com trinca.

Em seguida, na Seção 4.2, é analisado um exemplo de uma placa retangular com uma trinca inicial central, a fim de avaliar as formas da propagação da trinca frente a diferentes velocidades de impacto, bem como a influência da malha empregada.

Uma viga sujeita à flexão em três pontos, inicialmente trincada, é submetida ao método, na Seção 4.3, onde a análise é direcionada ao comportamento da fratura, no caso de tração indireta. Ainda neste exemplo, uma influência da massa específica do material, na simulação numérica, é levada em conta na obtenção dos resultados e performance computacional da simulação.

Uma investigação paramétrica é o objetivo da Seção 4.4, na qual uma viga com quatro pontos de corte é usada como modelo. Além da reprodução da morfologia da trinca principal, perfis de carga são estudados sob a combinação de variados parâmetros que caracterizam a fratura, como a velocidade de aplicação das cargas, nível de tensões nas interfaces para materiais frágeis, energias de fratura para o modo *I* e modo *II*, comprimento característico, efeito tangencial das interfaces, refinamento da malha e condições de contorno.

Conclusões e as sugestões para trabalhos são devidamente descritos no capítulo final.

Por fim, um apêndice é apresentado no qual consta uma descrição sucinta do algoritmo de gerador de malha desenvolvido em *FORTTRAN*, para criar as malhas que são empregadas na maior parte dos modelos.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo serão apresentados conceitos, teorias e análises desenvolvidas por estudiosos da Mecânica da Fratura, que serviram de fundamento para o desenvolvimento desta pesquisa.

Antes disso, um breve histórico da Mecânica da Fratura é apresentado a seguir, procurando evidenciar algumas contribuições clássicas na área.

### 2.1. EVOLUÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura surgiu a partir da necessidade de entender e prever o comportamento de peças trincadas.

O discurso deste ramo da engenharia como corpo teórico-científico pode ser visualizado sucintamente conforme esquema abaixo, que busca situar no tempo, alguns dos seus principais pesquisadores, bem como suas principais contribuições. Obviamente é uma revisão não completa e reflete apenas alguns marcos no estudo da Mecânica da Fratura.

1913	INGLIS	Apresentou solução do estado bidimensional de uma placa com um furo elíptico submetida à uma carga uniforme e de tração, verificando um aumento significativo de tensões na borda do furo, quando o mesmo tende a uma trinca. (Owen e Fawkes, 1983)
1922	A. A. GRIFFITH	Foi o primeiro a estabelecer uma análise energética entre resistência à fratura e o tamanho da trinca, através de experimentos com vidro, a partir da qual explicou porque, mesmo na presença de trincas, os materiais ainda têm a capacidade de resistir a esforços. (Kanninen e Popelar, 1985)
1939	WEIBULL	A partir de técnicas estatísticas, demonstrou o aumento na tensão de ruptura, à medida que as dimensões do corpo de prova diminuíam, relacionando este efeito de escala à presença de fissuras no material. (Owen e Fawkes, 1983)
1948	GEORGE IRWIN	Introduziu o conceito de "Fator de Intensidade de Tensões" e o relacionou com a energia de fratura. Considerou o efeito de dissipação da energia plástica a uma região circular próxima à ponta da trinca. (Kanninen e Popelar, 1985)

1960	BARENBLATT e DUGDALE	Apresentaram modelos de simulação de fratura atômica para materiais frágeis e dúcteis, a partir dos quais modelavam a região da ponta da trinca com forças coesivas que uniam o material impedindo a propagação da trinca. (Liebowitz, 1968)
1961	M. F. KAPLAN	Tentou obter a resistência de fratura do concreto. Observou, que não havia um valor consistente para representar a rigidez de fratura para o concreto. Focalizou o emprego da Mecânica da Fratura Linear Elástica para o concreto. (Ceriolo, 1998)
1963	WELLS	Introduziu um conceito alternativo para modelagem da zona plástica nas pontas de trinca. A idéia foi baseada no deslocamento crítico na ponta da trinca, conhecido como "Crack Opening Displacement - COD", que poderia ser usado para caracterizar a extensão da trinca. (Branco, Fernandes e Castro, 1986)
1968	J. R. RICE	Introdução de uma integral de contorno (Integral "J"), parâmetro de fraturamento que quantifica o fluxo de energia através de um contorno fechado em torno da ponta da fissura, que permite a determinação do "Fator de Intensidade de Tensões" em materiais lineares ou não. (Liebowitz, 1968)
1968	HUTCHINSON, RICE e ROSEGREN	Relações de tensões e deformações plásticas por meio de leis de potencial, obtendo as equações singularidades HRR. (Kanninen e Popelar, 1985)
1976	A. HILLERBORG	Desenvolveu o modelo de fratura fictícia ("Fictitious Fracture Model") através de ensaios de tração uniaxial em corpos de prova de concreto, no qual foi possível observar que após a carga máxima, a fissura inicial surgia numa pequena região com localização de deformações.
1977	TRACEY, D.M. COOK, T.S. et al	Desenvolveram os quarter point elements para melhor a representar a singularidade na ponta da trinca para materiais elásticos, empregando funções de interpolação que pudessem representar o campo singular em elementos finitos. (Owen e Famkes, 1983)
1980	A. CARPINTERI	Propôs um parâmetro $\sigma = K_{IC} / \sigma_c h \sqrt{a}$ como medida da fragilidade do concreto. Posteriormente, introduziu o Número de Carpinteri que é função da dimensões características da estrutura. (Saouma, 1997)
1984	Z. P. BAZANT	Quantificou o efeito de escala no concreto, através da fórmula de efeito de tamanho generalizada. Essa teoria relaciona o efeito de escala do concreto a um comprimento característico do material, geralmente ao tamanho nominal do agregado. (Saouma, 1997)
1987	NEEDLEMAN	Empregou o Modelo de Interfaces Coesivas para simular fratura discreta. Neste método, molas são introduzidas entre os elementos finitos de modo a representar a nucleação e propagação de trincas. (Needleman, 1987)

Figura 01: Histórico da Mecânica da Fratura

Mais adiante, serão descritas algumas metodologias alternativas, especificamente aplicadas ao concreto, que permitem o mapeamento de toda a cinemática da trinca.

## 2.2. MECÂNICA DA FRATURA E ESTRUTURAS DE CONCRETO

Como é sabido, o concreto é um material pouco resistente quando tracionado, tendo sua resistência à tração 8% a 15% da resistência de compressão. Muitas falhas e trincas internas existem no concreto, antes mesmo que o carregamento seja aplicado. O comportamento mecânico do concreto é governado pela iniciação e propagação destas trincas durante o carregamento.

A propagação das trincas é função da intensidade e do modo de carregamento aplicado. Por exemplo, estruturas de concreto sujeitas à tração apresentam trincas que se propagam em uma direção perpendicular à carga de tração aplicada. Todavia, o mesmo não pode ser afirmado quando a peça é submetida à compressão uniaxial pura, pois a direção da carga de compressão aplicada coincide com a direção de propagação das trincas ( Shah, Swartz e Ouyang, 1995).

Em aplicações de engenharia civil, esta característica do concreto de ser frágil à tração é amenizada com a introdução de reforços, como barras de aço e fibras, por exemplo. Essa introdução de reforços é feita no provável local onde as trincas iniciam e nas direções principais das tensões de tração.

Para avaliar estruturas de concreto, além de levar em conta a performance em serviço do componente, a análise de limite último é considerada a fim de determinar a capacidade de carregamento das mesmas.

Outro ponto importante, conforme a teoria de Weibull, é a influência das dimensões da estrutura na resistência do concreto. Resultados experimentais indicaram que a resistência nominal do concreto diminui com o aumento do tamanho da estrutura, até se tornar constante (Shah, et al, 1995).

## 2.3. ABORDAGEM DE RUPTURA NO CONCRETO

### 2.3.1. Modelos de fratura

A abordagem numérica acerca do processo de fratura pode ser classificada conforme abaixo:

- Fratura discreta: a trinca é tida como uma descontinuidade explícita.
- Fratura distribuída ou difusa: o corpo trincado é tido como um contínuo. Baseada na mecânica dos meios contínuos, a fratura é considerada como resultado da alteração das propriedades constitutivas do material.

Abaixo, alguns trabalhos que abordaram a fratura no concreto são citados, sem que se pretenda fazer uma revisão completa sobre o tema:

#### *Modelos de Fratura Discreta*

Uma tentativa pioneira de modelar fissuras discretas via elementos finitos foi realizada por Ngo e Scordelis (1967). Nos seus estudos, vigas simples foram analisadas com modelos, nos quais o concreto e barras de reforço eram representados por elementos triangulares de deformação constante; além disso, elementos de ligação foram utilizados para pré-definir a trinca principal, e assim, determinar as tensões principais no interior do concreto, e as tensões nas barras. Uma vez detectada a ruptura, a trinca era modelada através da criação de nós duplos na malha de elementos finitos criando, desta forma, uma fissura discreta.

Nilson (1968) introduziu propriedades não lineares nas relações constitutivas. Nas análises combinou quatro elementos triangulares de modo a formar um elemento quadrilátero, condensado em um nó central. A fratura era registrada parando o processo de solução, quando os elementos atingiam a tensão de resistência, e recarregando incrementalmente a estrutura, após redefinir a estrutura trincada.

Posteriormente, Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) aplicaram o conceito de fratura coesiva (fratura de transmissão de esforços entre suas faces) ao concreto e propuseram o modelo de fratura fictícia (*"Fictitious Crack Model"*).

Além destes, trabalhos como o de Rots (1988) e de Rots-Blaauwendraad (1989) se basearam na introdução de fissuras previamente existentes no material, utilizando fissura discreta, com o objetivo de fazer estudos comparativos com outros modelos de fissura. Nestes estudos, elementos de interfaces são incorporados no interior da malha original. A rigidez inicial dos elementos é fixada para simular o estado não fissurado com conexão rígida entre nós superpostos. Uma vez violada a condição de ruptura inicial, para uma tensão máxima dada, a rigidez dos elementos varia conforme uma relação constitutiva pré-definida.

Mais recentemente, Soprano e Cernuschi (2000) aplicaram o método de fissuração discreta em vigas de concreto simples sujeitas à flexão, levando em conta o efeito de escala. Neste caso, Soprano e Cernuschi calculam a resistência à flexão que permite quantificar o efeito do tamanho, comparando os resultados com a fórmula aproximada dada pelo Código Modelo *CEB-FIP* 1990.

Os modelos de fratura discreta são normalmente aplicados a problemas, em que as peças estruturais apresentam trincas localizadas, ou seja, a formação e propagação das falhas se dão por meio de uma trinca principal, cuja abertura se torna predominante junto às eventuais ramificações e microfissuras adjacentes. Esse método possui a vantagem da representação da fissura explícita, pela separação das faces dos elementos. Todavia, este exige uma malha de elementos finitos muito mais densa, pois o estado de tensões na ponta da trinca deve ser resolvido, fazendo com que seja inviável para casos onde haja fissuras distribuídas ao longo do corpo. Como exemplo, têm-se as peças constituídas de concreto simples, sem elementos de reforço, onde trincas predominantes normalmente ocorrem.

#### *Modelos de Fratura Difusa*

O método da fissura distribuída, introduzida por Rashid (1968), está baseado em uma formulação da mecânica do contínuo, a partir de parâmetros da mecânica da fratura. A descrição da trinca é função das relações tensão-deformação do contínuo, ou seja, a fissura é representada pela alteração nas propriedades constitutivas. A resposta global obtida é satisfatória e, na zona de fratura, admite-se uma aproximação do fenômeno, mediante uma distribuição da fissura em uma região de dimensões finitas. Esta aproximação permite definir a deformação desta zona, evitando, assim, o problema de singularidade no caso de fratura discreta.



Diversos modelos foram propostos, em seguida, levando em conta o efeito da perda de rigidez, devido à diminuição das tensões, após atingirem a tensão máxima, à medida que as deformações crescem. Por exemplo, Hillerborg et al (1976) definiu um estado de comportamento em função das tensões principais, admitindo um comportamento elástico até alcançar o limite de ruptura. Ao atingir esse limite, se admite que uma falha é produzida e o material adota a forma de um sólido ortotrópico, com resposta diferenciada segundo a direção das tensões principais maior e menor.

Na zona fissurada se considera uma perda de resistência na direção normal à fissura, proporcional ao deslocamento,  $u$ .

Na figura 02, é representado esquematicamente o modelo de Hillerborg, no qual, uma barra de comprimento inicial  $l$ , submetida à tração,  $S$ , é dividida em duas zonas,  $A$  e  $B$ , zona não-fissurada e zona fissurada, respectivamente.

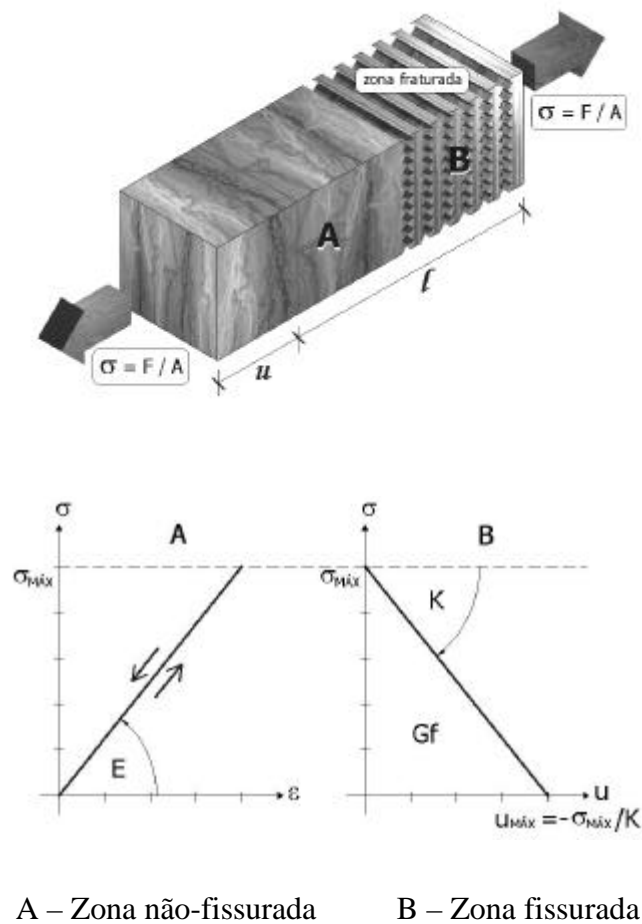


Figura 02: Representação esquemática do modelo de Hillerborg

Para se explicar o conceito teórico em que se baseia este modelo, considera-se a barra da figura 02. Nesta, o deslocamento  $u$ , no extremo vale:

$$u = l \frac{\mathbf{s}}{E} + \frac{1}{K} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{m\acute{a}x}) \quad (2.1)$$

$$l \frac{\mathbf{s}}{E} \Rightarrow \text{Parte Elástica}$$

$$\frac{1}{K} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{m\acute{a}x}) \Rightarrow \text{Parte Inelástica}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\mathbf{s}_{m\acute{a}x}$  é a resistência máxima a tração. Pode-se observar também que a área do diagrama  $\mathbf{s} \times u$  na zona fissurada corresponde à energia de fratura.

Outros modelos de fissuração distribuída foram propostos. Rots (1986) aplicou o método de fissura distribuída, cuja principal característica o diferencia do modelo de Hilleborg, que é a formulação de uma lei constitutiva na zona fraturada, expressa em termos de tensão x deformação ( $\mathbf{s} \times \epsilon$ ) e não tensão x deslocamento ( $\mathbf{s} \times u$ ).

Um modelo constitutivo baseado na elasticidade não-linear foi proposto por Ottosen (1979). O modelo simula o comportamento não-linear antes da ruptura, bem como o comportamento após a ruptura. Além disso, este modelo reflete a dilatação que acontece quando o concreto é carregado em compressão e a influência de todos os três invariantes de tensão.

Estudos atuais apontam outros efeitos, como o efeito de escala, por exemplo, na análise do comportamento *tensão x deformação*, baseado na teoria da plasticidade, que interferem na abertura das fissuras. É o caso de Einsfeld, Bittencourt e Martha (1999).

No caso do modelo de fissuração distribuída, a aplicação típica difere do caso no qual as fissuras são discretamente modeladas, no que tange à morfologia das trincas. Neste modelo, como o próprio nome indica, o corpo é danificado com várias microfissuras que se espalham através de todo o meio. Um exemplo característico onde essa técnica é amplamente usada, são estruturas de concreto armado, nas quais as trincas surgem ao longo de toda a superfície de contorno da armadura e das regiões de tração do concreto.

Numericamente, o modelo distribuído de fissuração apresenta deficiências - uma delas, a sensibilidade da malha. O que acontece, é que a fissura é representada em termos das deformações e largura dos elementos finitos e não pela abertura entre eles, como no modelo discreto. O refinamento da malha define melhor a banda de fissuração da peça. Porém, este refinamento dos elementos é viável até certo ponto, pois, para largura de elemento muito pequena, as deformações tendem a valores infinitamente altos, tornando impossível a captura da fratura do material. Outra desvantagem deste método está na indefinição da localização exata das fissuras na peça estudada.

Existem algumas controvérsias em torno da eficácia dos modelos no que se refere ao modo como a fissura deve ser contemplada. Apesar do método discreto identificar a trinca como uma falha geométrica, cuja propagação requer técnicas para sua simulação. Autores como Rots (1982) consideram que a fratura difusa pode ser considerada mais realista, devido à consideração de trincas presentes em regiões microscópicas em materiais compósitos, como o concreto armado. No entanto, deve-se considerar que mesmo sendo microscópicas, trincas são sempre trincas, no qual um estado de tensões complexo será associado. Esta informação é perdida pela formulação distribuída. Portanto, a mesma sempre fornecerá uma aproximação do problema.

### *Modelos Alternativos*

Além das categorias até o momento apresentadas, uma outra linha vem sendo aplicada para melhor representar a fissuração em estruturas de concreto, são os modelos do tipo fratura incorporada. Neste tipo de modelo, inicialmente estudado por Ortiz et al. (1987) e posteriormente, desenvolvida por Belytschko, Fish e Engelmenn (1988), a simulação da fissuração é baseada na idéia de que exista descontinuidades implementadas no interior de elementos finitos padrões que compõem a malha. O estudo do modelo com fissura incorporada é formulado, considerando que o surgimento das trincas, bem como seu crescimento, se dá em qualquer direção, e a discretização da malha de elementos finitos não interfere nos resultados finais. Autores como Dvorkin et al (1990, 1991), Klisinski et al.(1991), Tano e Klisinski (1998), Lotfi e Shing (1995), Bolzon e Corigliano (2000), Jirásek e Zimmermann (2001), d'Avila (2003), consideram os modelos incorporados a fim de determinar a direção das fissuras e representar o comportamento destas fissuras que se

desenvolvem dentro dos elementos, assim como modelar zonas de grande localização de deformação.

Este modelo combina os pontos vantajosos das duas técnicas anteriores: as trincas podem se propagar em qualquer direção e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada.

Uma outra alternativa encontrada pelos pesquisadores para analisar o comportamento de estruturas de concreto consiste na adoção do Método dos Elementos Discretos (MED). É o caso de Iturrioz (1995), Rocha (1989) e Hayashi (1982), onde um modelo teórico é implementado para prever, por simulação, o comportamento de estruturas laminares de concreto armado. Neste modelo, o contínuo é discretizado usando elementos de barra dispostos em um arranjo espacial de treliça onde se realiza uma equivalência mecânica entre o comportamento da treliça e o comportamento do contínuo que se deseja representar. A modelagem da fratura e representação das trincas e defeitos era feito através da desativação das barras na região de interesse.

## 2.4. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Para estudar qualquer aplicação relacionada com a fratura de uma peça estrutural, é necessário identificar os possíveis modos em que esta peça pode se romper. Esta sistematização relacionada com as formas de ruptura foi introduzida por Irwin (1948) e permite estudar a concentração de tensões na ponta da trinca e os seus modos de propagação.

Em geral, há três componentes de deformação perto da ponta da trinca, ou seja, uma trinca pode se deformar de três maneiras diferentes. Existem três movimentos cinemáticos das superfícies, superior e inferior, da trinca que são independentes um do outro, conforme classificação dada por Irwin.

Esquemáticamente, a figura 03 ilustra os três modos básicos para um corpo trincado.

A ocorrência das formas básicas de deformação na propagação de trincas, chamadas Modos Fundamentais de Fratura, depende do tipo de solicitação à qual a fissura é submetida.

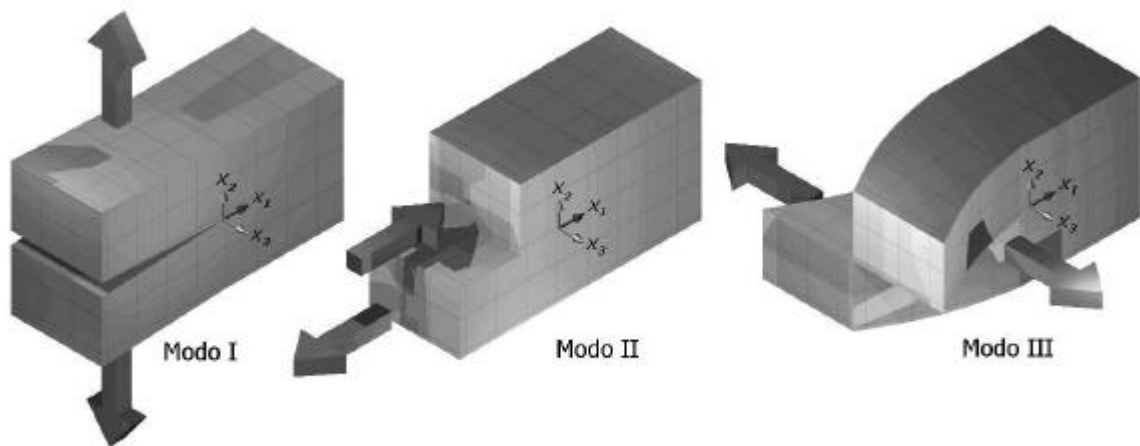


Figura 03: Modos básicos de deformação de uma trinca

O modo I é caracterizado pela abertura normal das superfícies devido a um carregamento de tração. O modo II tem como característica principal o deslizamento ou deslocamento tangencial entre as superfícies, mas, perpendicular à frente de propagação, devido a uma tensão de corte. No modo III, as superfícies deslizam paralelamente entre si e à frente de propagação.

A relevância de cada modo de fratura no processo de propagação depende da resistência que o material oferece aos esforços causados por cada um deles. Os campos de tensões para cada caso foram apresentados, inicialmente, por Irwin, onde os campos de tensões  $\mathbf{s}_{ij}$  na proximidade da ponta da trinca são expressos como uma função da distância radial da ponta  $r_p$  e dependente do ângulo  $\mathbf{q}$ , bem como do respectivo fator de intensidade de tensão,  $K_I, K_{II}$  e  $K_{III}$ .

$$\mathbf{s}_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p}} f_{ij}^I(\mathbf{q}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{s}_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_p}} f_{ij}^{II}(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{s}_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_p}} f_{ij}^{III}(\mathbf{q}) \quad (2.4)$$

Nas equações acima,  $f_{ij}(\mathbf{q})$  representam as funções independentes do tipo de carga e geometria da peça, onde os índices *I*, *II* e *III* indicam o modo de deformação.

De todos os modos de ruptura, o de maior importância é o Modo I. Na prática, o Modo I é o que mais tem sido estudado e donde se tem encontrado resultados satisfatórios em comparação aos experimentos. A maioria dos materiais tende a se fraturar com maior facilidade quando sujeitos a esforços normais de tração do que a tensões de corte. O problema é que em poucas ocasiões se dão estes três modos em forma separada, os casos de propagação mais complexos resultam da combinação destes três modos básicos.

A deformação de qualquer trinca pode ser representada pela superposição destes três modos, neste caso se diz que se ocorre o *Modo Misto de Ruptura*.

Todo material apresenta um valor crítico,  $K_C$ , que é propriedade do material. Uma maneira de aferir se uma trinca se propaga de maneira instável, é compará-lo com o valor de  $K$ , calculado a partir da geometria e da carga aplicada no corpo. Para valores de  $K \geq K_C$ , as trincas se propagam.

Além deste parâmetro, a energia de fratura pode ser encarada como um critério de propagação. Ou seja, a taxa de liberação de energia para a formação de novas superfícies de ruptura  $G$ , pode ser relacionada com o fator de intensidade de tensões e o módulo de elasticidade longitudinal do material,  $E'$ . Para tanto, temos a relação de Irwin (1948):

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.5)$$

onde  $E' = E$  para Estado Plano de Tensões e  $E' = E/(1-\nu^2)$  para Estado Plano de Deformações.

De maneira análoga, pode-se avaliar o comportamento das trincas, simplesmente comparando os valores de  $G$  com valores críticos de  $G_C$ , onde  $G_C$  representa a energia necessária a propagação e pode ser interpretada como a resistência do material ao crescimento da trinca.

Valores de  $K_C$  e  $G_C$  podem ser determinados experimentalmente, enquanto valores de  $K$  e  $G$  podem ser calculados. A comparação destes valores constitui a forma usual, em engenharia,

para a determinação do início de propagação de trincas. Esta metodologia tem algumas desvantagens, pois, não fornece nenhuma informação quanto ao que vai acontecer com a trinca, após o início da propagação.

## 2.5. TEORIA DA FRATURA COESIVA DE BARENBLATT E DUGDALE

Existe uma zona onde se processa a fratura na ponta da trinca que pode ser resultado do escoamento no caso de materiais dúcteis, ou da formação de microfissuras para materiais frágeis homogêneos. Tendo em vista a existência da referida zona, Barenblatt (1962), citado por Liebowitz (1968), desenvolveu modelos que a levam em consideração. Um modelo baseado no conceito de comprimento de fissura fictícia, cujo objetivo era representar de forma simplificada a zona de processos inelásticos na ponta da trinca. Esses modelos são considerados coesivos, uma vez que assumem a presença de forças coesivas agindo ao longo da zona de processamento da fratura.

Através de uma teoria, composta de três postulados, Barenblatt representou explicitamente as forças de coesão como sendo uma distribuição de forças atuando em pequenas zonas de comprimento  $d$  desprezível quando comparada ao tamanho da trinca.

A figura 04 ilustra uma zona coesiva nos extremos da trinca. A separação das faces começa na tensão de tração  $s_{m\acute{a}x}$ , definida por Barenblatt como uma resistência teórica, geralmente, várias ordens de magnitude acima da resistência macroscópica do material, e a propagação da trinca é modelada considerando a transferência de tensões ao longo da zona coesiva como dependente do deslocamento relativo entre as faces da trinca. A relação constitutiva entre a tensão de coesão e a abertura de separação tem sido considerada uma propriedade do material.

Observando a figura 04, uma trinca, inicialmente definida por uma linha fina, assume a forma de uma elipse esbelta, quando esta é submetida a uma tensão normal de tração, partindo da consideração de que as faces da trinca estejam livres de quaisquer forças aplicadas, segundo a teoria elástica linear.

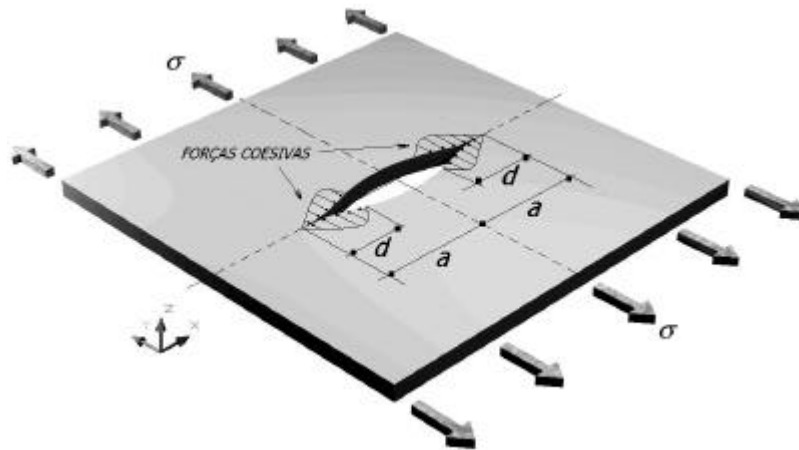


Figura 04: Forças coesivas na ponta da trinca – modelo de Barenblatt

O primeiro postulado da teoria diz que as forças coesivas induzem tensões singulares de compressão nas pontas da trinca, enquanto que as singularidades induzidas pela tensão externa são de caráter trativo, fazendo com que o campo final das tensões seja não singular devido a um cancelamento entre elas. Assim sendo, após uma deformação, as faces da trinca voltam a se unir suavemente nos seus extremos, resultando na forma indicada na figura 04 (ver também figura 05).

Para o segundo postulado, Barenblatt se refere à região de atuação das forças coesivas, indicando que a distribuição de forças coesivas  $G_m(\mathbf{x})$  é limitada a uma zona pequena dentro de uma distância  $d$ , que se estende da ponta da trinca em  $x = a$  como indica a figura 05. Assim,  $G_m(\mathbf{x})$  é significativa na zona coesiva  $a-d < x < a$ , mas desaparece para  $0 < x < a-d$ , sendo que  $d/a$  é pequeno, comparado com a unidade.

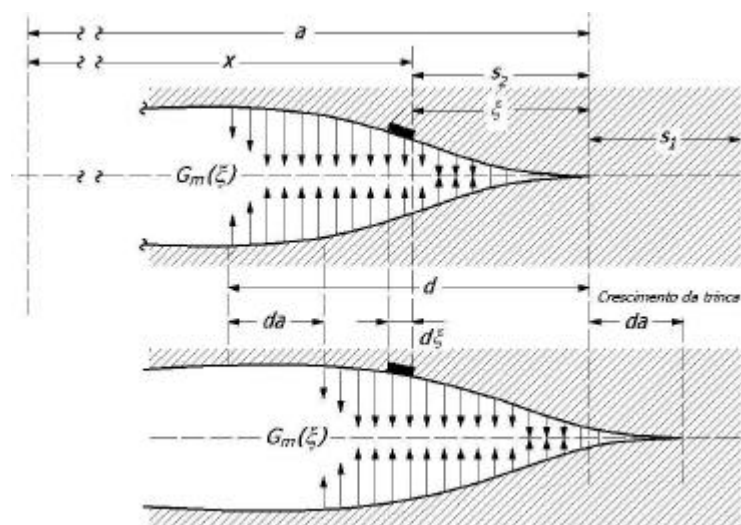


Figura 05: Crescimento da trinca segundo a teoria de Barenblatt



De acordo com a figura 05, é possível observar a ocorrência de uma atração atômica ou molecular em uma pequena zona coesiva nos extremos da trinca, para uma peça com uma trinca já existente, em que as cargas são aplicadas, partindo do zero, aumentando de maneira proporcional. À medida que as cargas aplicadas crescem, as forças coesivas, representadas pelos  $G_m(\mathbf{x})$ , tendem a aumentar, a fim de garantir a integridade da trinca, evitando que a mesma se propague (estágio de equilíbrio imóvel). Para que a trinca se propague (estágio de equilíbrio móvel), é necessário que esse aumento das forças atinja um limite. Esse limite é proposto pela teoria como sendo uma função de constantes elásticas e da energia de superfície.

Conforme citado em Liebowitz (1968), o terceiro postulado de Barenblatt refere que: “A forma da seção normal da superfície da trinca nas regiões de seus extremos – e conseqüentemente, a distribuição local das forças de coesão sobre a superfície trincada – não depende das cargas aplicadas e é sempre a mesma para um dado material sob as mesmas condições ( temperatura, composição e pressão ambiente )”.

Em seu modelo, Barenblatt constata que a forma da ponta e a distribuição das forças coesivas  $G_m(\mathbf{x})$  permanece constante, porém translada junto ao extremo da trinca, conforme a figura 05.

Para materiais elasto-plásticos, Dugdale (1960) formulou independentemente uma teoria semelhante, na qual a tensão de escoamento desempenha função similar à tensão coesiva, no caso do modelo de Barenblatt.

### 3. METODOLOGIA EMPREGADA

#### 3.1. ELEMENTOS DE INTERFACES COESIVAS APLICADAS A MECÂNICA DA FRATURA

Adotando o modelo de fratura discreta, utilizou-se como base para a metodologia desta pesquisa, o método das interfaces coesivas. Basicamente, o método consiste em representar a fissura através da implementação de elementos de ligação entre as faces dos elementos finitos.

Elementos virtuais, as interfaces coesivas permitem controlar a abertura de eventuais trincas que venham a aparecer, por meio de relações constitutivas entre o deslocamento e a tensão aplicada nos elementos excitados. Assim, permite representar o comportamento de fissuras apresentadas numa região capaz de transmitir esforços entre suas faces. Os esforços transmitidos diminuem de forma gradual até não haver transmissão de esforços entre as faces da fissura.

Baseados nos fundamentos de Dugdale e Baremblat, vários trabalhos foram realizados empregando leis constitutivas coesivas formuladas independentemente entre si, sendo o caso de Needleman (1987), Rots (1988), Schlangen (1993) e Tijssens et al (2000),etc.

Ao discretizar a malha de elementos finitos, juntamente com a aplicação de elementos de interface coesiva, comuns entre todos os elementos finitos, é possível mapear a propagação da trinca ao longo do contorno dos elementos, já que elementos adjacentes possuem deslocamentos relativos independentes. A ruptura é alcançada, uma vez que estas forças de ligação ultrapassem os parâmetros de resistência do material. O método é descrito abaixo.

### 3.2. FORMULAÇÃO BÁSICA DOS ELEMENTOS DE INTERFACE COESIVA

No presente trabalho, a implementação computacional das interfaces coesivas, por meio do método dos elementos finitos, é caracterizada pela inclusão de um termo de trabalho interno da interface no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). O problema pode ser descrito, então, através da equação de equilíbrio que o governa, dada por:

$$\int_{\Omega} \mathbf{s} : \left( \frac{\partial \mathbf{d}U}{\partial x} \right) dV + \int_{\Omega} \mathbf{r} \ddot{U} \cdot \mathbf{d}U \cdot dV + \int_{\Gamma^T} \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}\Delta \cdot dS = \int_{\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}U \cdot dV + \int_{\Gamma^F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}U \cdot dS \quad (3.1)$$



➤ termo devido às interfaces coesivas.

onde,  $U$  representa os deslocamentos ao longo do corpo ( $W$ ),  $F$  define o vetor de forças aplicadas no contorno  $\Gamma^F$ ,  $B$  representa as forças de volume,  $s$  as tensões de Cauchy,  $r$  a massa específica do material,  $T$  indica o vetor de tensões coesivas nas interfaces da trinca,  $\Gamma^T$  é o local onde estão localizadas as superfícies das trincas e  $D$  é a abertura da trinca. Além disso,  $d$  define uma variação arbitrária, virtual e compatível.

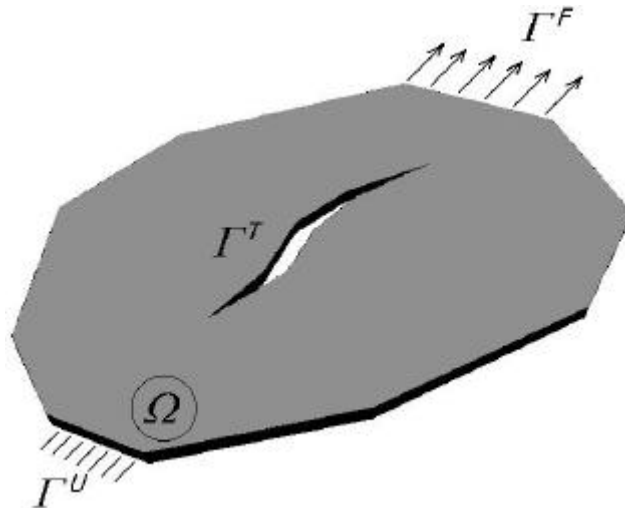


Figura 06: Corpo em estudo

De modo geral, o contorno externo do corpo (ver figura 06) é formado por  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^U + \mathbf{G}^F$ , onde o  $\mathbf{G}^U$  é o contorno referente à superfície, à qual são aplicados os deslocamentos prescritos e restrições, enquanto que as forças são aplicadas no contorno  $\mathbf{G}^F$ .

Com o modelo de elementos finitos definido para o corpo com os deslocamentos nodais virtuais eliminados, a equação de equilíbrio se transforma em uma equação diferencial ordinária e não-linear do equilíbrio, na forma:

$$M \cdot \ddot{U} + F_{int} - F_{ext} = 0 \quad (3.2)$$

Sendo  $M$  a matriz de massa consistente,  $\ddot{U}$  as acelerações nodais, e  $F_{int}$  e  $F_{ext}$  representando as forças internas e externas, respectivamente atuantes nos nós dos elementos. Cabe salientar que, devido à implementação das interfaces coesivas, o vetor de forças internas será contribuído por uma parcela de forças, correspondente as forças coesivas.

### 3.3. DESCRIÇÃO DAS INTERFACES COESIVAS

O elemento de interface coesiva é formado por quatro nós e colocado entre as faces adjacentes de dois elementos finitos. Inicialmente, as interfaces coesivas não estão excitadas, portanto as conectividades 1 e 4, assim como os nós 2 e 3, possuem coordenadas iguais entre si, conforme a figura 07, que ilustra o elemento de interface com a disposição de suas conectividades e as direções normal e tangencial.

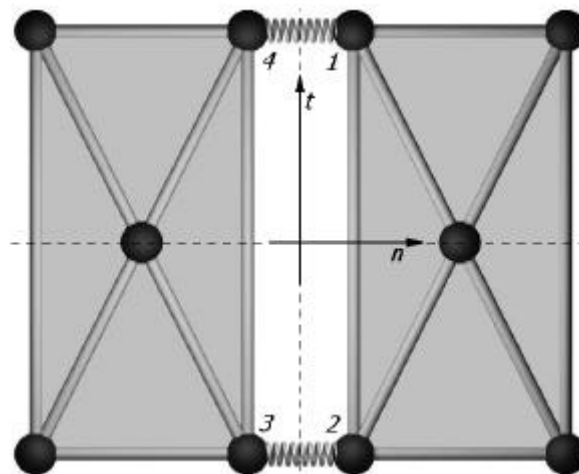


Figura 07: Esquema da interface coesiva

Uma vez que os elementos finitos que compartilham a mesma interface são submetidos a um estado de tensão, estes, por sua vez, fazem com que a interface seja também solicitada, gerando um trabalho para sua abertura dado por:

$$W^e = \int_{\Gamma^{T,e}} T^e \Delta^e dS \quad (3.3)$$

onde  $T^e = \{T^n \ T^t\}^e$  corresponde ao vetor de tensões e  $\Delta^e = \left\{ \begin{matrix} \Delta^n \\ \Delta^t \end{matrix} \right\}^e$ , ao vetor de deslocamentos da interface, ambos com suas componentes normal e tangencial. Com isso, à medida que os elementos finitos tendem a se afastar entre si, a interface inicia um processo de coesão, que tenderá a reaproximá-los, mantendo-os unidos. Fenômeno semelhante é gerado quando os elementos são submetidos de forma a gerar uma interpenetração entre si, pois a interface impedirá tal processo.

As tensões em uma interface devido aos deslocamentos relativos entre os elementos que a compartilham são dadas por:

$$T = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Delta} \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{f}$  é o potencial da interface. Baseados em Rose, Ferrante e Smith (1981), Xu e Needleman (1994) definem o potencial da interface  $\mathbf{f}$  conforme a equação abaixo:

$$\mathbf{f}(\Delta) = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\mathbf{d}_n}\right) \left\{ \left[ 1 - r + \frac{\Delta_n}{\mathbf{d}_n} \right] \frac{1-q}{r-1} - \left[ q + \left( \frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\mathbf{d}_n} \right] \exp\left(\frac{\Delta_t^2}{\mathbf{d}_t^2}\right) \right\} \quad (3.5)$$

onde  $q = \mathbf{f}_t / \mathbf{f}_n$  (  $\mathbf{f}_n$  e  $\mathbf{f}_t$  os trabalhos de separação normal e tangencial respectivamente ),  $\mathbf{D}_n = n \cdot \mathbf{D}$  (abertura da interface na direção normal),  $\mathbf{D}_t = t \cdot \mathbf{D}$  (abertura na direção tangencial),  $r = \mathbf{D}_n^* / \mathbf{d}_n$ , no qual  $\mathbf{D}_n^*$  é o valor de  $\mathbf{D}_n$  após a separação total por cisalhamento com tensão normal nula ( $T_n = 0$ ). Os sub-índices  $n$  e  $t$  são os vetores unitários que definem as direções normal e tangencial.

Conforme Xu e Needleman (1994), a resistência do material ao crescimento da trinca pode ser representada pelos trabalhos  $f_n$  e  $f_t$ , os quais podem ser escritos como:

$$f_n = e s_{\max} d_n \quad (3.6)$$

$$f_t = \sqrt{\frac{e}{2}} t_{\max} d_t \quad (3.7)$$

onde,  $e \cong 2,7182$ ,  $s_{\max}$  e  $t_{\max}$  são as resistências normal e tangencial que a interface suporta, e os valores  $d_n$  e  $d_t$  os comprimentos característicos nas direções normal e tangencial, respectivamente.

Sendo assim, as tensões na interface podem ser escritas como:

a) Para as tensões normais:

$$T_n = -\frac{f_n}{d_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{d_n}\right) \left\{ \frac{\Delta_n}{d_n} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{d_t^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{d_t^2}\right) \right] \left[ r - \frac{\Delta_n}{d_n} \right] \right\} \quad (3.8)$$

b) Para as tensões tangenciais:

$$T_t = -\frac{f_t}{d_n} \left( 2 \frac{d_n}{d_t} \right) \frac{\Delta_t}{d_t} \left[ q + \left( \frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{d_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_n}{d_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{d_t^2}\right) \quad (3.9)$$

De maneira gráfica, as tensões podem ser representadas por curvas, conforme as figuras 08a e 08b. A área coberta pelas curvas  $T_n$  e  $T_t$  correspondem às energias de separação normal ( $f_n$ ) e tangencial ( $f_t$ ) das interfaces que precisam ser liberadas para que se dê início ao processo de ruptura, possibilitando, então, o crescimento da trinca.

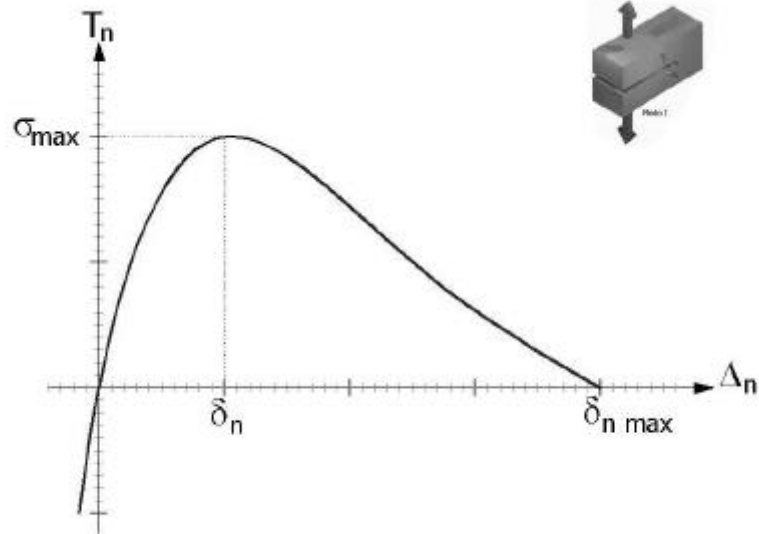


Figura 08a: Tensões normais na interface – Xu e Needleman (1994)

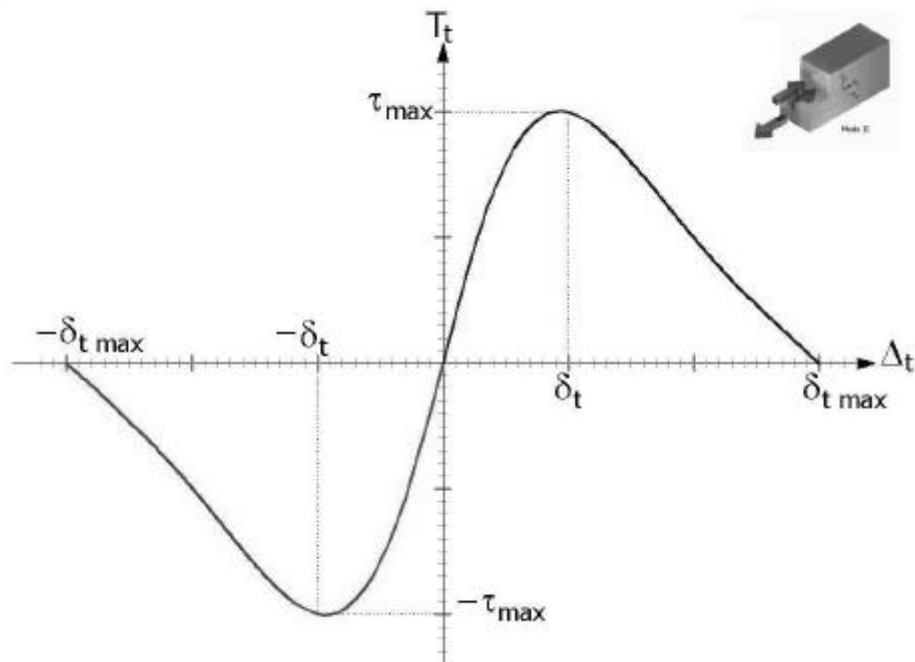


Figura 08b: Tensões tangenciais na interface – Xu e Needleman (1994)

Neste trabalho, a proposta é adotar leis de separação bi-lineares para as interfaces. Procurando aproximar as curvas exponenciais por duas retas, as curvas de tensões normal e tangencial assumem o formato ilustrado pelas figuras 09a e 09b:

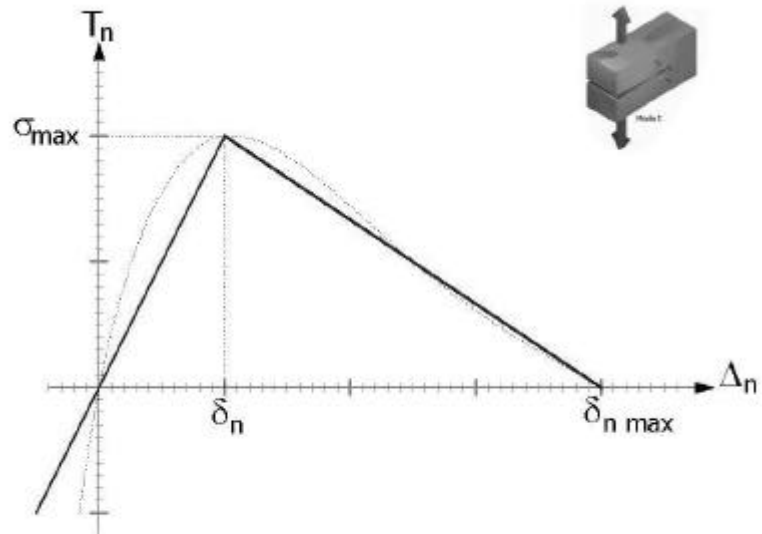


Figura 09a: Tensões normais nas interfaces – Leis bilineares

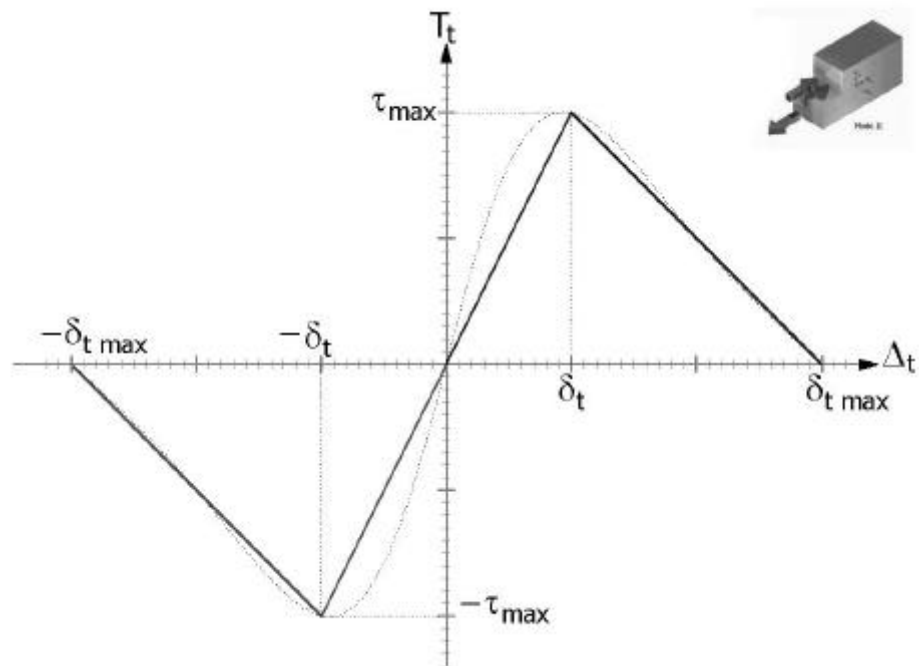


Figura 09b: Tensões tangenciais nas interfaces – Leis bilineares

A seguir, são apresentadas as propriedades das interfaces coesivas.



### 3.4. PROPRIEDADES DAS INTERFACES

As interfaces coesivas representam as forças de coesão, que variam de acordo com o material a ser empregado. Para essa representação, alguns parâmetros precisam ser conhecidos.

De acordo com a metodologia empregada nas análises de Xu e Needleman (1994), na qual as relações constitutivas eram do tipo exponenciais, a resistência do material ao crescimento da trinca no Modo I de deformação pode ser representada pelo trabalho de separação normal ou abertura normal da interface  $f_n$ , indicado pela equação 3.6.

Para definir o comportamento da interface coesiva de um dado material, apenas dois parâmetros materiais deveriam ser conhecidos,  $f_n$  e  $s_{max}$ , pois as três variáveis  $f_n$ ,  $s_{max}$  e  $d_n$  podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$d_n = \frac{f_n}{e \cdot s_{max}} \quad (3.10)$$

onde  $d_n$ , é um comprimento característico do material, porém não tem representação física definida,  $f_n$  é o trabalho de abertura da interface correspondente à energia de fratura do material  $G_f$ , (Xu e Needleman, 1994),  $s_{max}$  é a máxima tensão normal da interface cuja abertura corresponde ao comprimento característico  $d_n$  e a constante  $e @ 2,7182$ .

Observe que  $f_n$  corresponde à energia de fratura normalmente identificado por  $G_f$ .

Na presente metodologia, onde as relações constitutivas são representadas por retas dispostas de tal forma que melhor se aproxime das curvas, em princípio foram mantidos os mesmos valores de comprimento característico  $d_n$ , proveniente da curva exponencial adotada na metodologia original. No entanto, para tirar proveito da maior liberdade que a presente formulação dá, este valor foi modificado nas análises para verificar sua influência nos resultados.

Porém, em virtude da área de um triângulo formada pela lei bi-linear, como indicado na figura 10, um outro parâmetro fica automaticamente definido,  $d_{nmax}$ , abertura máxima das interfaces, pela expressão.

$$d_{n\max} = \frac{2.G_f}{s_{\max}} \quad (3.11)$$

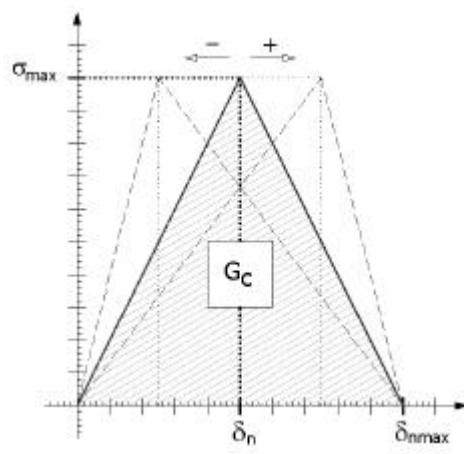


Figura 10: Área formada pela relação bilinear, onde  $G_c = G_f$ .

O valor de  $s_{m\acute{a}x}$  é função do tipo de material no que tange ao seu comportamento, ou seja, dúctil ou frágil. Para os materiais dúcteis, essa tensão é função da tensão de escoamento  $s_e$ . De acordo com o indicado na literatura, o valor de  $s_{m\acute{a}x}$  assume:

$$s_{\max} \cong (3 \text{ a } 3,5)s_e \quad (3.12)$$

Needleman (1987, 1990a,b) sugere  $s_{\max} \cong 3s_e$ , Tvergaard e Hutchinson (1992) e Siegmund e Needleman (1997),  $s_{\max} \cong 3,5s_e$ .

Para materiais frágeis, os valores de tensão são adotados dentro do seguinte intervalo:

$$s_{\max} \cong \left( \frac{E}{100} \text{ a } \frac{E}{10} \right) \quad (3.13)$$

em que  $E$  consiste no módulo de elasticidade longitudinal do material.

Para autores como Xu e Needleman (1994), o valor sugerido é  $s_{\max} \cong E/10$ ; para Needleman e Rosakis (1999),  $s_{\max} \cong E/10$ , e para Ferney et al. (1999),  $s_{\max} \cong E/100$  e  $E/30$ .

Para que o material resista ao crescimento de trincas, tendo em vista o modo II de fraturamento, é necessário consumir um trabalho de separação tangencial  $f_t$ . De maneira similar, esse trabalho é definido pela máxima tensão de corte e o comprimento característico,  $t_{max}$  e  $d_t$ , respectivamente, além da abertura máxima  $\delta_{máx}$ . O valor de  $\delta_t$  a ser utilizado nas relações constitutivas bi-lineares, advém das leis exponenciais normal e tangencial, nas quais os respectivos comprimentos característicos obedecem a seguinte relação:

$$d_t = d_n / 1,38888 \quad (3.14)$$

Xu e Needleman (1994) e Arata e Needleman (1998), como também outros autores, igualam os valores dos comprimentos característicos e os trabalhos de separação, normal e tangencial, com o intuito de encontrar o valor de  $t_{max}$ . Ou seja:

$$d_n = d_t \quad (3.15)$$

$$f_n = f_t \quad (3.16)$$

$$t_{max} = \sqrt{2e} s_{max} \cdot \frac{d_n}{d_t} \Rightarrow t_{max} \cong 2,33 \cdot s_{max} \quad (3.17)$$

Tais relações serão estudadas e variadas com o intuito de estudar a influência dos parâmetros de fratura no comportamento das trincas.

### 3.5. APLICAÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com a figura 07, mostrada no item anterior, as interfaces coesivas apresentam suas conectividades coincidentes (1 - 4 e 2 - 3), quando em sua configuração indeformada. No sistema de coordenadas naturais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$ , o elemento de interface coesiva pode ser representado pela figura 11.

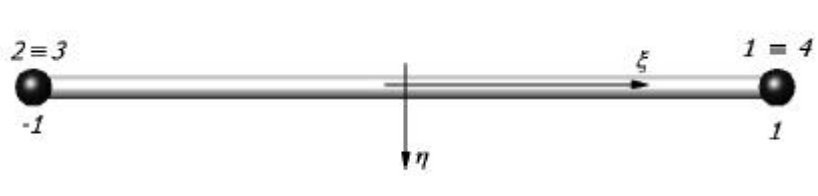


Figura 11: Sistema de coordenadas naturais no elemento de interface

O comportamento da abertura da interface é descrito por funções de interpolação lineares, considerando o elemento de interface como unidimensional. Essas funções de forma são dadas pelas equações:

$$\mathbf{j}^1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{j}^2 = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{x}) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{j}^3 = -\frac{1}{2}(1 - \mathbf{x}) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{j}^4 = -\frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}) \quad (3.21)$$

Devido à coincidência dos nós 1 e 4, bem como com os nós 2 e 3, temos as seguintes relações:

$$\mathbf{j}^1 = -\mathbf{j}^4 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{j}^2 = -\mathbf{j}^3 \quad (3.23)$$

O sinal negativo presente nas relações é proveniente da locação do sistema de coordenadas aplicado ao elemento de interface.

Uma vez arbitrado a orientação dos eixos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$ , coincidentes com as direções tangencial e normal à interface, respectivamente, é possível expressar a abertura ou deslocamento da interface, por meio dos valores dos deslocamentos relativos entre os seus nós, identificada por  $e$ , através da seguinte expressão:

$$\Delta^e = \sum_{N=1}^4 \Phi^N U^N \quad (3.24)$$

onde  $N$  é o número da conectividade do elemento de interface,  $\Phi^N = \begin{bmatrix} \mathbf{j}^N & 0 \\ 0 & \mathbf{j}^N \end{bmatrix}$  e

$U^N = \begin{bmatrix} U_n^N \\ U_t^N \end{bmatrix}$  é o vetor de deslocamentos dos nós da interface.

Com isso, substituindo as funções de interpolação, citadas anteriormente, a expressão de  $\mathbf{D}^e$  é reescrita como:

$$\Delta^e = \begin{cases} \Delta_n^e = \mathbf{j}_1 U_n^1 + \mathbf{j}_2 U_n^2 + \mathbf{j}_3 U_n^3 + \mathbf{j}_4 U_n^4 \\ \Delta_t^e = \mathbf{j}_1 U_t^1 + \mathbf{j}_2 U_t^2 + \mathbf{j}_3 U_t^3 + \mathbf{j}_4 U_t^4 \end{cases} \quad (3.25)$$

A interface, quando solicitada, poderá apresentar diversos comportamentos que variam com a forma como os seus nós se deslocam entre si.

Uma vez que os valores de  $\mathbf{D}_n^e$  e  $\mathbf{D}_t^e$ , parâmetros governantes do problema, são determinados, subsequentemente tensões na interface são calculadas, provocando forças nodais internas a esta, que podem ser integradas numericamente na forma de:

$$\mathbf{F}_{int}^e = \int_{\Gamma^{T,e}} T^e \Phi^e dS = \sum_{PG=1}^{NPG} T^e(\mathbf{x}_{PG}) \Phi^e(\mathbf{x}_{PG}) W_p(\mathbf{x}_{PG}) J \quad (3.26)$$

onde:  $\Gamma^{T,e}$  corresponde à superfície do elemento de interface,  $\mathbf{F}^e = [\mathbf{j}^1 \mathbf{j}^2 \mathbf{j}^3 \mathbf{j}^4]$  são as funções de interpolação das incógnitas da interface,  $J$  é o Jacobiano e  $NPG$  consiste no número de pontos de Gauss avaliados com respectivo valor  $\mathbf{x}_{PG}$  e peso  $W_p$ .

De acordo com a consideração feita anteriormente, os nós 1 e 4, assim como 2 e 3, são coincidentes entre si, e por isso as funções de interpolação acabam por assumir valores que definem a geometria da interface, tais quais:  $\mathbf{j}^1 = \mathbf{j}^4 = \frac{1}{2}(1+\mathbf{x})$ ;  $\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}^3 = \frac{1}{2}(1-\mathbf{x})$ .

O Jacobiano  $J$ , que aparece na integral numérica, vale  $0,5li$ , onde  $li$  é o comprimento da interface.

Vetorialmente, as forças nodais internas nos nós da interface podem ser escritas como:

$$F_{\text{int}}^e = \{F_{n,1}^e \quad F_{t,1}^e \quad F_{n,2}^e \quad F_{t,2}^e \quad F_{n,3}^e \quad F_{t,3}^e \quad F_{n,4}^e \quad F_{t,4}^e\} \quad (3.27)$$

Que, devido à condição de coincidência entre os nós resulta em:  $F_{n,1}^e = -F_{n,4}^e$ ;  $F_{t,1}^e = -F_{t,1}^e$ ;  $F_{n,2}^e = -F_{n,3}^e$  e  $F_{t,2}^e = -F_{t,3}^e$ , cujas forças são as responsáveis pela compatibilidade nodal dos elementos, pelo fato de que não há nós comuns a mais de um elemento. As figuras 12 e 13 abaixo ilustram algumas configurações, onde tem elementos independentes unidos por elementos de interface. Pode-se ver uma discretização de uma malha de elementos finitos triangulares dispostos de modo a formar retângulos, bem como os detalhes de ligação *A* e *B*, entre 8 e 4 nós, respectivamente. Observe que a metodologia atual exige o emprego de uma malha estruturada unicamente.

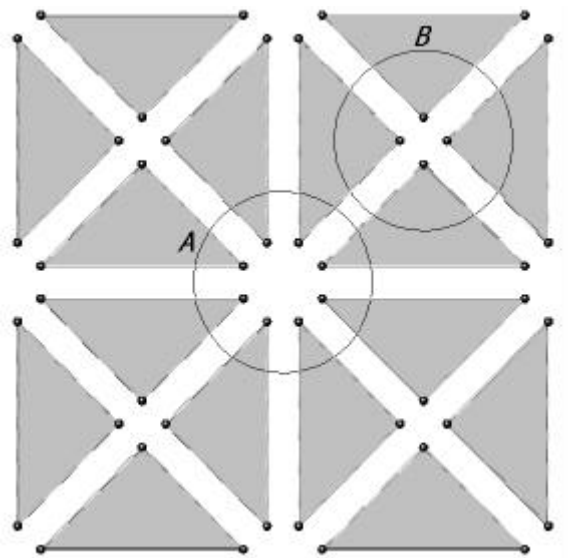
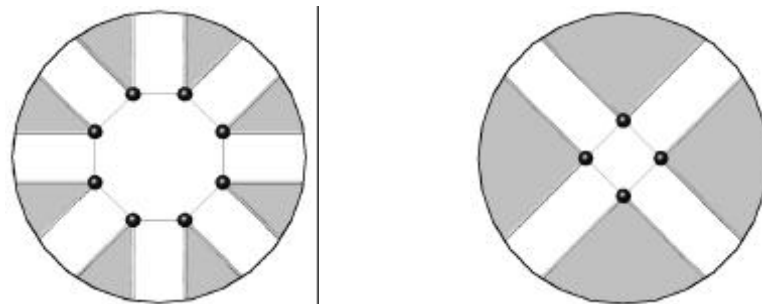


Figura 12: Discretização global da malha de elementos finitos



Detalhe A: ligação entre 8 nós

Detalhe B: ligação entre 4 nós

Figura 13: Tipos de ligação entre os nós dos elementos

## 4. APLICAÇÕES

O presente capítulo visa demonstrar a aplicabilidade da teoria estudada nos capítulos anteriores, inclusive do algoritmo das interfaces coesivas desenvolvido para estudar o comportamento de fratura em estruturas constituídas de materiais do tipo frágil.

A obtenção dos resultados se faz mediante a consideração de 04 exemplos distintos entre si, que serão detalhadamente apresentados nas seções seguintes.

É importante ressaltar que todos os resultados obtidos nos exemplos são comparados com outros valores com o objetivo de testar a confiabilidade da metodologia proposta.

### 4.1. ANÁLISE DA FISSURAÇÃO DE TIRANTES DE CONCRETO SIMPLES

Neste item foram estudados tirantes cujo material utilizado é o concreto simples. Para simular este estudo, foram adotados incrementos de deslocamentos prescritos, a fim de poder analisar melhor o comportamento da peça, à medida que as fissuras vão se formando no seu interior .

A verificação da análise é feita comparando os resultados obtidos de simulações numéricas, empregando um modelo discreto baseado no Método dos Elementos Finitos, com uma solução analítica, tendo como finalidade a compreensão do processo físico de ruptura em estruturas submetidas a esforço de tração, como também a influência da malha empregada nos resultados obtidos.

Será analisado um tirante submetido à tração uniaxial cuja seção transversal é constante ao longo de todo o comprimento e cujas condições de contorno são mostrados conforme indicados na figura 14 abaixo.

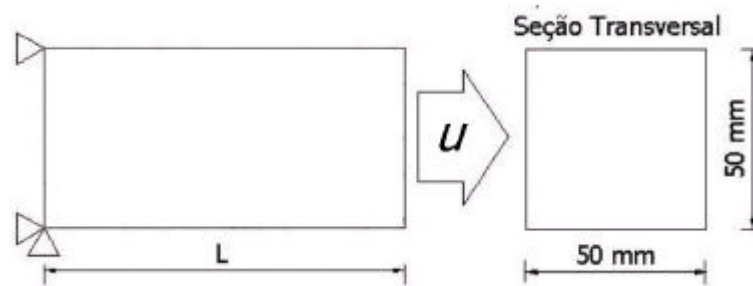


Figura 14: Tirante de concreto simples

#### 4.1.1. Propriedades do material

Foi selecionado um material com as seguintes características:

- Módulo de Elasticidade:  $E = 32240 \text{ MPa}$ ;
- Resistência à tração:  $s_t = 1,58 \text{ MPa}$
- Energia de Fratura:  $G_f = 48,7 \text{ N/m}$
- Coeficiente de Poisson:  $n = 0,0$

Como parâmetros geométricos:

- Comprimento da peça:  $L = 100 \text{ mm}$ .
- Seção transversal quadrada:  $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$

#### 4.1.2. Solução analítica

De acordo com o objetivo proposto neste estudo, faz-se necessário o uso da solução analítica do problema em questão, com fins de avaliar a potencialidade do processo numérico aqui desenvolvido.

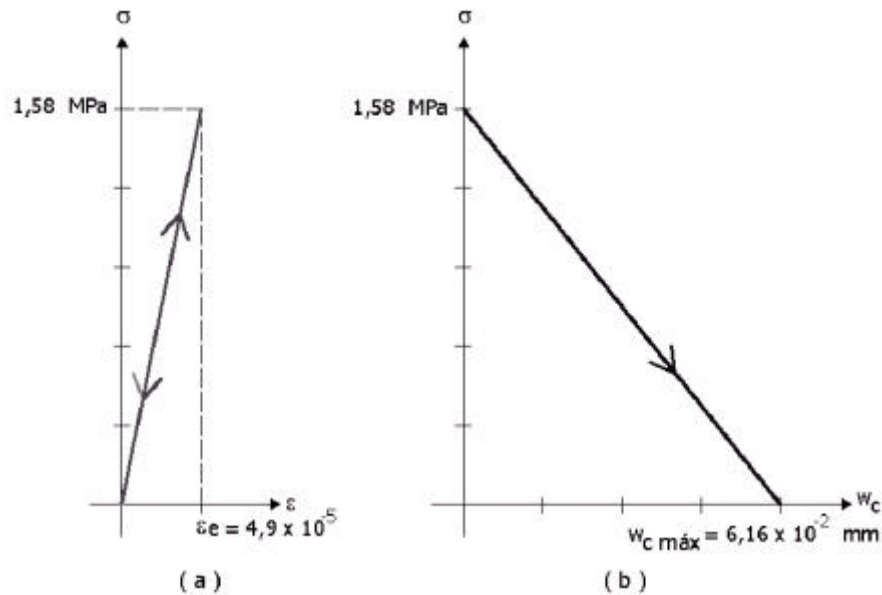
Teoricamente, para um determinado nível de carga, o deslocamento total da seção livre do tirante é obtido pela soma das parcelas referentes à região não fissurada e à abertura da fissura, dado pela seguinte expressão:



$$u = \mathbf{e}.L + w_c \quad (4.1)$$

sendo  $\mathbf{e}$  a deformação da parte não fissurada e  $w_c$  o valor da abertura da fissura.

As relações constitutivas utilizadas para a zona fora da fissura e para a fissura estão representadas na figura 15. Para o concreto não fissurado, atribui-se um comportamento elástico linear, dado pelo diagrama *tensão x deformação* da figura 15(a). Este diagrama representa tanto o comportamento de carga de todo o tirante, até que a tensão máxima tenha sido atingida, como o comportamento de descarga, neste caso relaxamento, da região fora da fissura. Para a descarga do concreto na fissura, atribui-se um comportamento de amolecimento linear, dado pelo diagrama *tensão x abertura da fissura* da figura 15(b).



(a) região não fissurada; (b) amolecimento na fissura

Figura 15: Relação constitutiva

No limite elástico, ver figura 15(a), quando a tensão atinge o valor máximo,  $s$ , o deslocamento total da seção vale  $u = \mathbf{e}_e.L + 0$ . Portanto, para o tirante analisado se tem um valor diferente, proporcional ao comprimento do mesmo, dado por:

$$u_e = \mathbf{e}_e.L = 0,000049.L \quad (4.2)$$

Já para o final do carregamento, quando a tensão é nula, o deslocamento final total da seção é dado por  $u = 0 + w_{Cmáx}$ . Ou seja, o deslocamento total final da seção, para o tirantes em estudo, é igual ao valor máximo da abertura da fissura,

$$u_{final} = w_{cmáx} = 6,16 \times 10^{-2} \text{ mm} \quad (4.3)$$

que é um valor fixo, característico do material, ver figura 15(b).

Desta forma é encontrada a solução analítica, representada pela curva teórica tensão x deslocamento total da seção livre do tirante, cujo comprimento é  $L = 100 \text{ mm}$ , como está mostrada na figura 16.

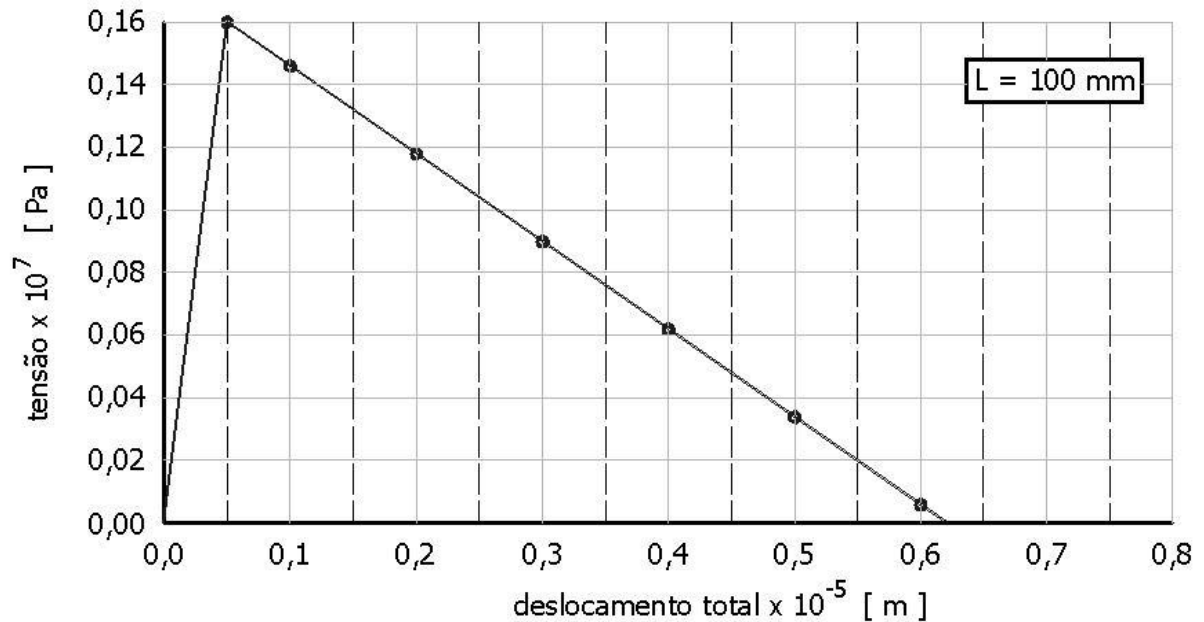


Figura 16: Curva *tensão x deslocamento* total da seção livre

Estudos realizados anteriormente (d'Avila, 2003) apontam claramente a influência do tamanho do tirante no comportamento global do mesmo.

Na Tabela 1 encontram-se alguns valores de  $u_e$ , deslocamento relativo à tensão máxima; da energia de deformação que pode ser dissipada por unidade de superfície da fissura,  $U^* = U_E / A_c$ ; e da relação entre  $U^*$  e  $Gf$  para tirantes de comprimentos distintos.

Tabela 1: Energia de deformação x energia de fratura.

$L [m]$	$ue [m]$	$U^* [N/m]$	$U^*/Gf$
0,10	0,0000049	3,87	0,079
0,50	0,0000245	19,4	0,398
1,00	0,0000490	38,7	0,795
1,25	0,0000613	48,4	0,994
1,50	0,0000735	58,1	1,193

(fonte: d'Avila, 2003)

Sob o ponto de vista energético, pode-se escrever, (Saouma, 2000):

- quando a energia de deformação da peça é menor do que a energia de fratura do material, observa-se um ramo de amolecimento no comportamento estrutural da peça;
- quando as duas energias são iguais, a resposta estrutural global obtida é do tipo frágil;
- quando a energia de deformação é maior do que a de fratura, obtém-se uma ruptura brusca com redução de deslocamento ("*snapback*").

Assim, enquanto a energia liberada pode ser transformada em energia de fratura, tem-se uma propagação de fissuras estável. Mas, se a energia de deformação que está sendo liberada é maior do que àquela que pode ser absorvida para criar novas fissuras, então se tem propagação instável da fissura.

O comprimento  $L_0$  que divide os dois casos, e para o qual  $u_e = u_{final} = w_{cmax}$ , pode ser determinado por:

$$L_0 = \frac{2 \cdot E_c \cdot G_f}{s_t^2} = \frac{w_{Cmáx}}{e_e} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2.1. Malhas empregadas

Com o intuito de verificar a influência da malha no processo numérico, foram utilizadas malhas distintas variando a quantidade e o tipo de elementos, bem como sua disposição, para um mesmo tirante de comprimento  $L=100mm$ .

Para mostrar a limitação do método, malhas intencionalmente grosseiras foram empregadas conforme a figura 17 adiante. Algumas das malhas utilizadas possui interface entre os elementos cuja direção é coincidente com a direção de propagação da trinca, ou seja, por se tratar de uma tração, as trincas tendem a se propagar perpendicularmente a esta. Por isso a necessidade de interfaces verticais na malha. Em outras, essa interface é omitida.

Os exemplos foram analisados aplicando relações constitutivas descritas anteriormente e obedecendo as condições de contorno, inclusive as devidas vinculações.

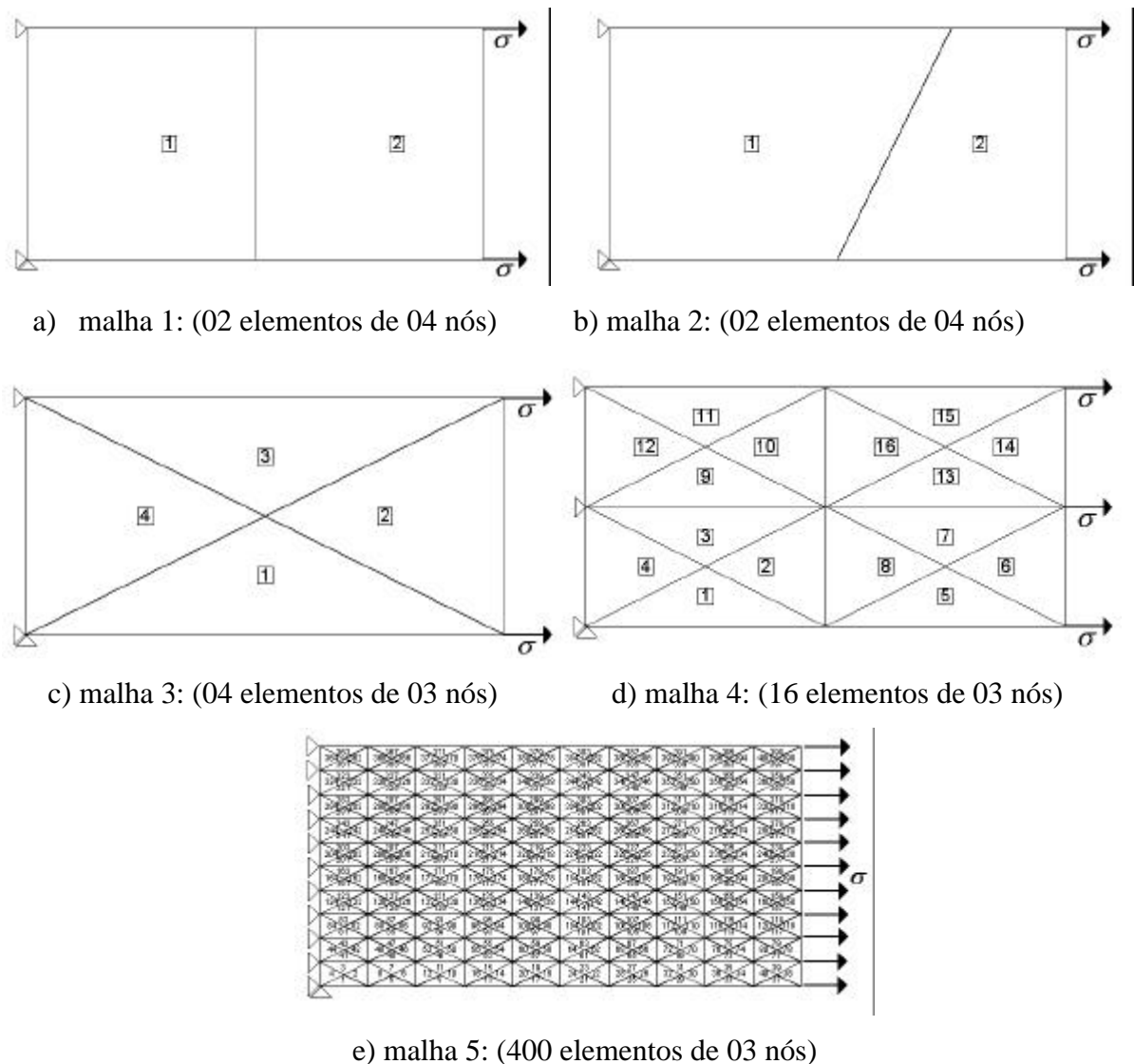


Figura 17: Malhas utilizadas para o tirante de  $L=100\text{ mm}$

Ainda no que se refere às leis constitutivas, estas procuram reproduzir o efeito de carga e descarga (lei bi-linear) dos elementos.

#### 4.1.2.2. Resultados da análise

Os resultados obtidos com o modelo descrito anteriormente, no qual interfaces coesivas foram empregadas, são representados pelas curvas *tensão x deslocamento*, na face carregada da malha, conforme figura 18. Este modelo apresenta limitação da propagação das trincas ocorrer apenas nas interfaces dos elementos finitos.

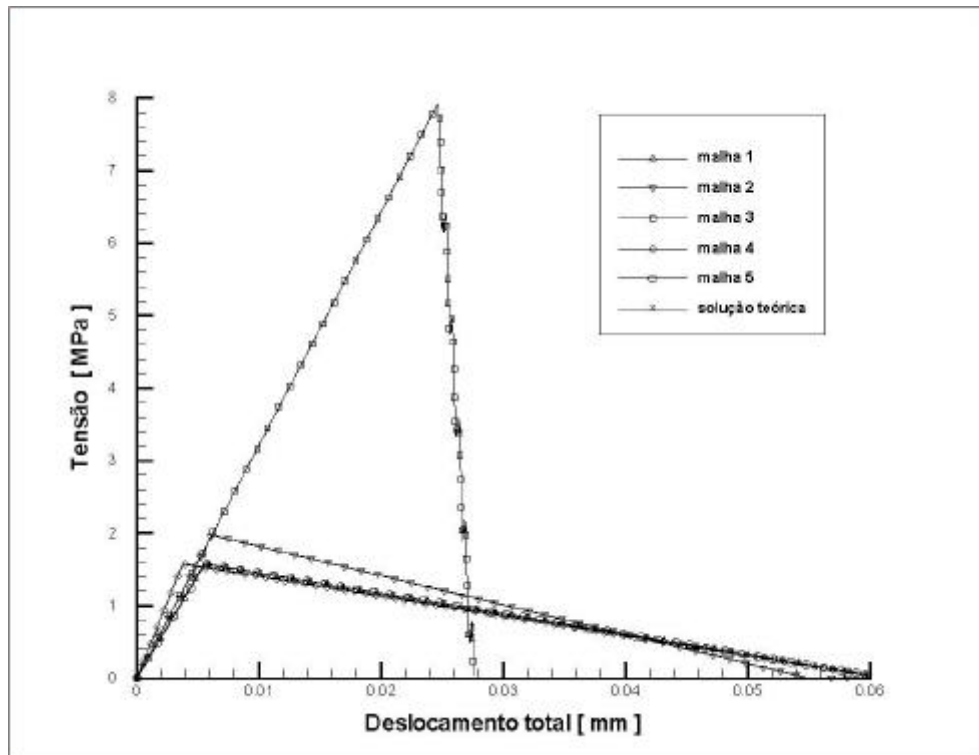


Figura 18: Curvas *tensão x deslocamento* para diferentes malhas

Nos exemplos *malha 2 e malha 3*, as tensões assumiram valores elevados, fenômeno esse devido à ausência de uma interface vertical nas malhas. O que se espera fisicamente, é uma trinca que se propaga por uma linha perpendicular à direção de aplicação das tensões (planos principais). Como a trinca não encontrou esta interface, os elementos precisavam absorver tensões maiores que a tensão  $s_{max}$  para passar da fase de carga para descarga, distanciando-se consideravelmente da solução teórica por forçarem a propagação da trinca numa direção irreal.

Diferente dos demais casos (*malha 1, malha 4 e malha 5*), cujas malhas empregadas foram adotadas, inclusive com elementos de interfaces verticais, os exemplos são capazes de reproduzir a solução teórica pois a interface entre os elementos finitos tem direção coincidente com a direção de propagação da trinca. Os resultados obtidos são muito próximos da solução numérica, conforme a figura 19. Neste caso, macroscopicamente a direção da trinca é capturada mesmo que em nível de elemento não o seja.

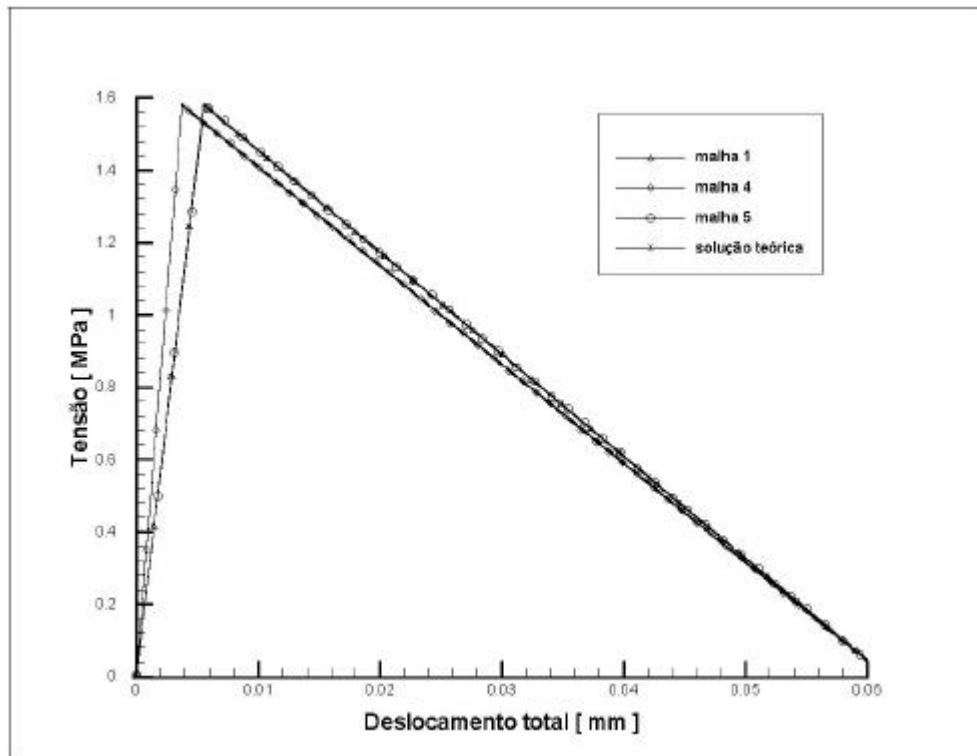


Figura 19: Curvas *tensão x deslocamento* para as malhas 1, 4 e 5

#### 4.1.3. Situação real com trinca

Para verificar o comportamento das interfaces e validação do algoritmo, uma investigação é realizada usando valores oriundos das soluções analíticas.

Para tal análise, uma trinca inicial foi inserida no tirante de comprimento  $a = 5$  mm, na face inferior do mesmo. As mesmas condições de contorno são adotadas, bem como a aplicação da carga através do deslocamento prescrito.

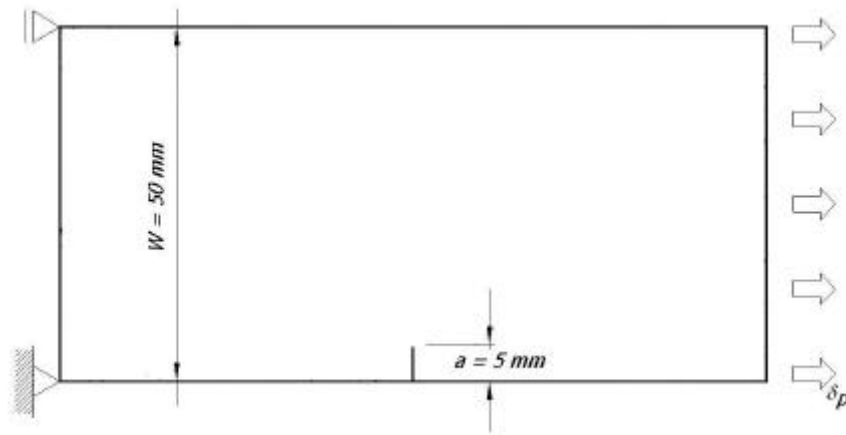


Figura 20: Tirante com uma trinca inicial de 5 mm

De acordo com a geometria, conforme figura 20, o fator de intensidade de tensões (Ewalds e Wanhill, 1986) é dado por:

$$K_I = \left[ 1,12 - 0,231 \left( \frac{a}{W} \right) + 10,55 \left( \frac{a}{W} \right)^2 - 21,72 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + 30,39 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right] \mathbf{s} \sqrt{\mathbf{p}a} \quad (4.5)$$

Substituindo os valores de  $a = 5 \text{ mm}$  e  $W = 50 \text{ mm}$ , inclusive uma tensão remota de  $\mathbf{s} = 1,58 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$K_I = 7,4251600413 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}} \quad (4.6)$$

Por se tratar de um problema cujo estado de tensões é a tração pura, apenas o modo I de ruptura é considerado no processo de ruptura. Desta forma, a energia de fratura necessária para iniciar o fenômeno da ruptura é dada pela seguinte expressão:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad (4.7)$$

para Estado Plano de Deformações, onde  $E' = E/(1-\mathbf{n}^2)$  com  $E$  sendo o módulo de elasticidade e  $\mathbf{n}$  o coeficiente de Poisson.

De acordo com as propriedades do material, a energia de fratura para o modo I de ruptura deste exemplo é, então, definida:

$$G_I \approx 1,7043 \text{ N / mm} \quad (4.8)$$

Com este valor de energia, e considerando tensões máximas nas interfaces equivalente a uma razão de  $E/100$ , a relação constitutiva para separação normal pode ser representada pela curva tensão  $\times$  abertura normal das interfaces ( figura 21.

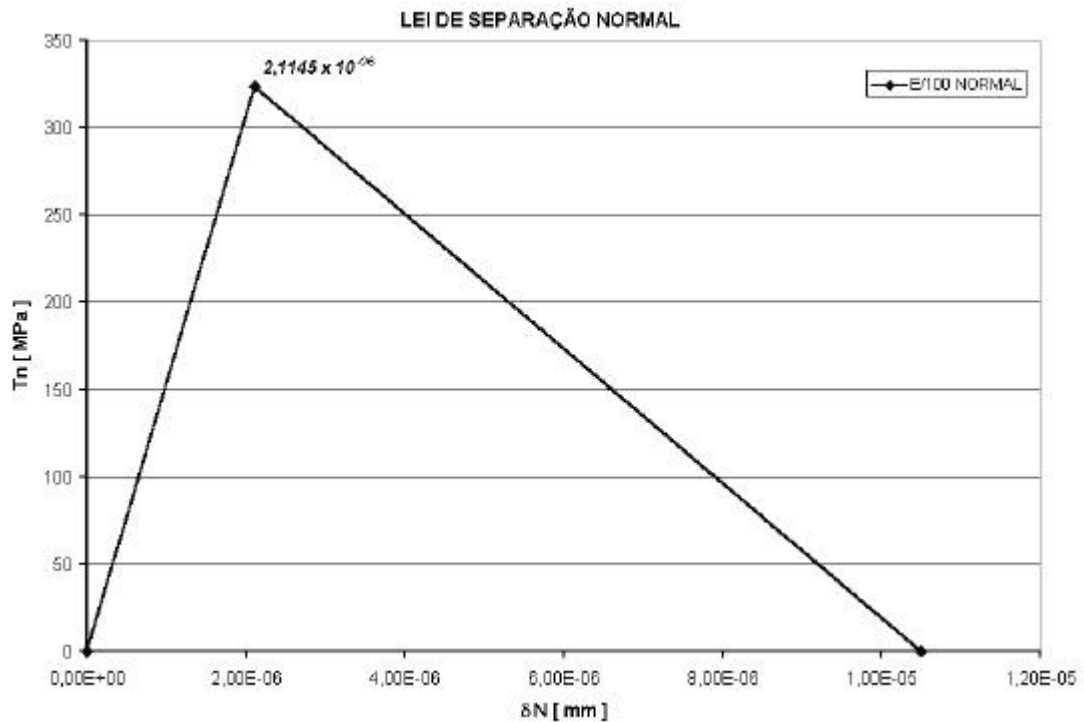


Figura 21: Lei de separação normal das interfaces  
( apenas a parte positiva é mostrada )

#### 4.1.3.1. Malha empregada

Um modelo com 2400 elementos quadriláteros de 4 nós é discretizado com 2542 nós.

Para que as tensões sejam bem definidas na ponta da trinca, é preciso que a dimensão dos elementos, nesta região, seja bem pequena. Por isso, a malha possui um maior grau de refinamento na região em que a trinca se situa, conforme pode-se perceber na figura 22.



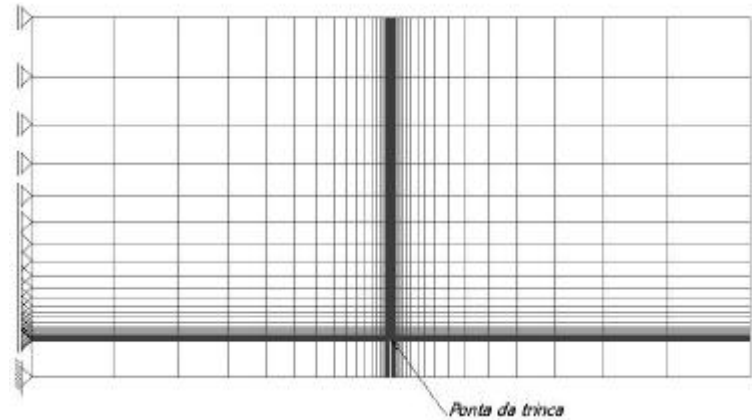


Figura 22: Malha de 2400 elementos finitos quadriláteros e 2542 nós.

#### 4.1.3.2. Resultados da análise

O comportamento do tirante é coerente com o resultado analítico descrito anteriormente. É possível observar na figura 23, que a tensão máxima atingida foi de  $1,50 \text{ MPa}$ , se aproximando da tensão remota de ruptura inicialmente estabelecida de  $1,58 \text{ MPa}$ .

Portanto, a verificação do comportamento de abertura normal das interfaces é satisfatório, fornecendo resultado qualitativamente similar.

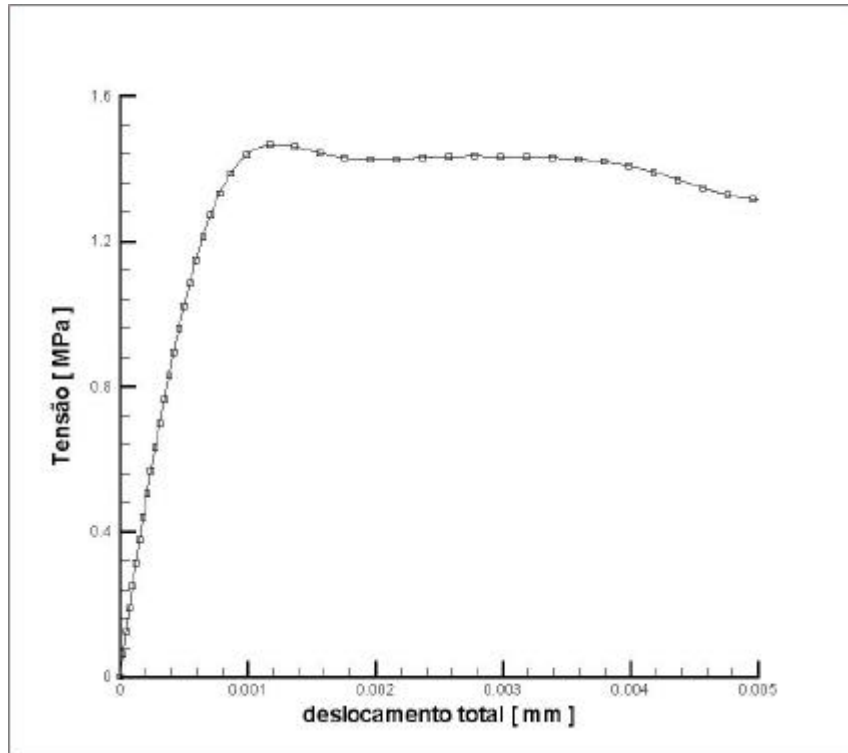


Figura 23: Tensão  $\times$  deslocamento na face excitada – caso real com trinca

## 4.2. INFLUÊNCIA DAS PROPRIEDADES DE INTERFACES COESIVAS NA BIFURCAÇÃO DE TRINCAS EM MATERIAIS FRÁGEIS

O problema abordado consiste em uma placa de *PMMA* ( *Polimetacrilato de Metila – Acrílico*) apresentando uma trinca inicial central, assumindo condições planas de deformação.

O *PMMA*, material frágil caracterizado por ser elástico isotrópico, tem como parâmetros físicos representativos de sua estrutura:

- Módulo de Elasticidade:  $E=3240 \text{ MPa}$ ;
- Energia de Fratura:  $G_f = 352,3 \text{ N/m}$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,35$
- Massa específica:  $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$
- Comprimento da trinca:  $2a = 0,6 \text{ mm}$
- Largura da placa:  $2W = 6,0 \text{ mm}$
- Altura da peça:  $2L = 3,0 \text{ m}$

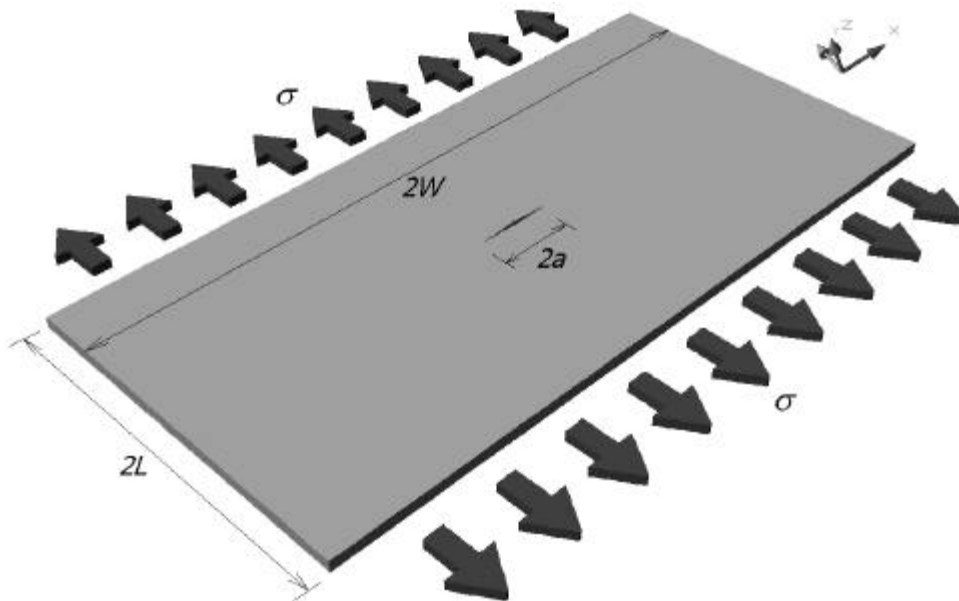


Figura 24: Esquema da placa de *PMMA* com trinca central

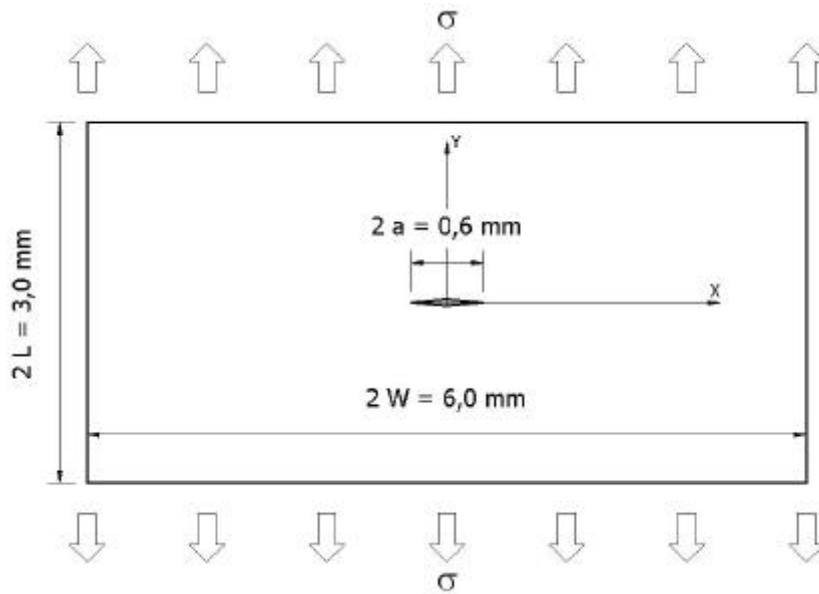


Figura 25: Placa de *PMMA* com trinca central – Geometria e carregamento

Além disso, as relações constitutivas das interfaces coesivas são tomadas como as leis de separação normal e tangencial, que incluem a tensão máxima e a energia de fratura,  $G_f = 352.3 \text{ N/m}$ , que precisa ser consumida para dar início ao processo de ruptura.

O carregamento aplicado é a tração por meio de deslocamentos prescritos nas suas bordas superior e inferior, para diferentes velocidades de impacto.

De acordo com a simetria, modelou-se apenas a metade da peça. As condições de contorno são:

$$u_x = 0 \text{ em } x=0 \text{ de } y=-L \text{ até } y=L \quad (4.9)$$

$$u_y(t) = \int_0^t V_{ys}(t) dt \text{ em } y=L \quad (4.10)$$

$$u_y(t) = \int_0^t V_{yi}(t) dt \text{ em } y=-L \quad (4.11)$$

$$V_{ys}(t) = \begin{cases} V_s t / t_r & \text{para } t \leq t_r \\ V_s & \text{para } t > t_r \end{cases} \quad (4.12)$$

$$V_{yi}(t) = \begin{cases} V_i t / t_r & \text{para } t \leq t_r \\ V_i & \text{para } t > t_r \end{cases} \quad (4.13)$$

em que  $u_x$  e  $u_y$  são os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ ,  $V_s$  é a velocidade de impacto na borda superior da peça e  $V_i$  é a velocidade de impacto na borda inferior, e o tempo de crescimento da velocidade  $t_r$ .

#### 4.2.1. Malha empregada

Foi adotado um modelo constituído por uma malha que apresenta 19200 nós, com 6400 elementos finitos triangulares e 9520 interfaces coesivas, dispostos de modo uniforme a formar blocos retangulares, conforme a figura 26 a seguir.

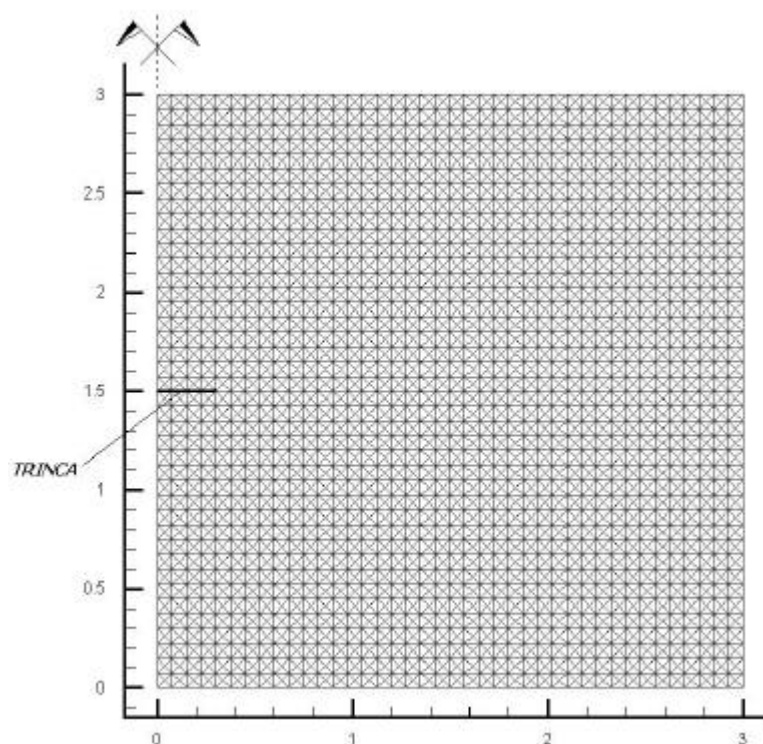


Figura 26: Malha de 6400 elementos e 19200 nós para a placa de *PMMA*

#### 4.2.2. Dimensões mínimas dos elementos da malha

Há limitações no que se refere às dimensões mínimas dos elementos que vizinham a ponta da trinca. A influência do comprimento destes elementos finitos está ligada a um fator de escala,

que depende de propriedades elásticas do material e de propriedades de fratura como energia de fratura e  $S_{máx}$ .

Segundo Falk (2001), é importante notar as escalas das dimensões envolvidas nesta simulação. A primeira destas é a escala macroscópica que caracteriza a geometria do corpo, como por exemplo, pode ser identificada pelo comprimento da trinca central e as dimensões dos limites da peça. A dimensão da malha também influencia nos resultados, pois é necessário que as dimensões macroscópicas sejam muito maiores que as dimensões da malha, para que a mesma forneça resultados mais exatos possíveis das grandezas que envolvem a ponta da trinca, como por exemplo, a distribuição das tensões, de tal forma que a mesma seja suficientemente refinada.

Desta forma, Falk define, para uma tração simples e velocidade inicial nula ( $v=0$ ), o comprimento mínimo, dado por:

$$l_{\min} = \frac{9p}{32} \left( \frac{E}{1-n^2} \right) \frac{2g}{S_{\max}^2} \quad (4.14)$$

onde

Para as simulações, usaram-se valores diferentes para a tensão máxima com o objetivo de avaliar a sua influência no processo numérico. Para cada valor de tensão, um valor de comprimento mínimo para os elementos será determinado.

#### 4.2.3. Influência das tensões na ponta da trinca frente a diferentes velocidades de impacto

Para uma escolha de  $S_{max} = E/10$ , o comprimento mínimo dos elementos é de aproximadamente 11 *mm*. Porém, para a tensão de  $S_{max} = E/25$ , esse comprimento aumentou para um valor aproximado de 68 *mm*, compatível com as dimensões da malha empregada. Para efeito de investigação, para ambas as tensões, será usada uma malha cujos elementos possuem o comprimento mínimo de 68 *mm*. O que se espera dos resultados é uma obtenção satisfatória para tensões de  $E/25$ .

Sendo assim, as leis de separação são estabelecidas pelas seguintes curvas:

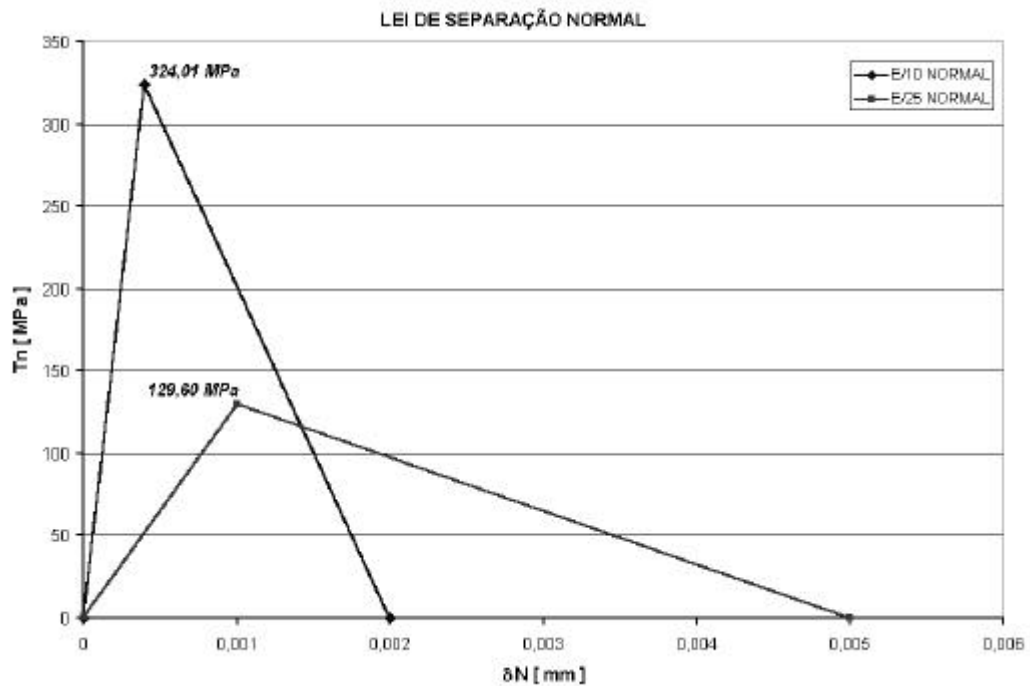


Figura 27a: Curvas das leis constitutivas normal das interfaces (apenas a parte positiva é mostrada)

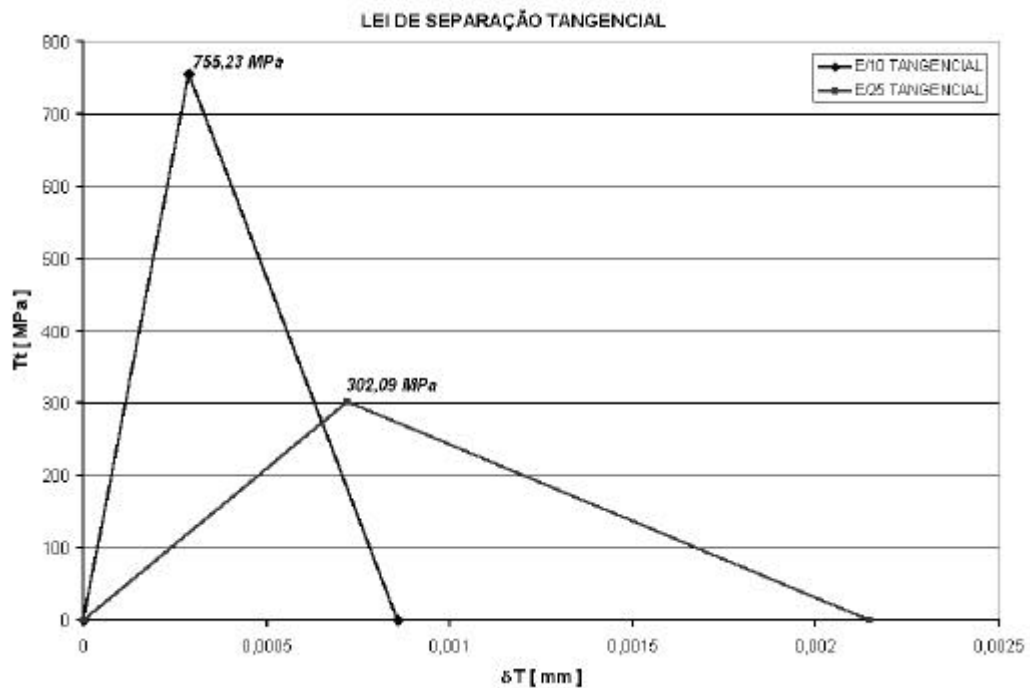


Figura 27b: Curvas das leis constitutivas tangenciais das interfaces (apenas a parte positiva é mostrada)

Fixadas as tensões na ponta da trinca e suas respectivas aberturas, resultantes de uma mesma energia de fratura  $G_f = 352.3 \text{ N/m}$ , observou-se, para cada tenacidade, a interferência de diferentes velocidades de impacto, avaliando a forma de propagação de trincas e comparando os resultados com os apresentados na literatura.

Adiante, seguem-se as figuras nas quais estão contidas as análises numéricas, onde a peça é submetida às seguintes velocidades de impacto:

$$\underline{1^\circ \text{ caso: } V_s = -V_i = 1 \text{ m/s}}$$

$$\underline{2^\circ \text{ caso: } V_s = -V_i = 15 \text{ m/s}}$$

O critério de ruptura estabelece o consumo total da energia de fratura, o que ocorre quando o valor da abertura das interfaces for igual à abertura máxima. Isto vale para a separação normal, bem como a separação tangencial, dentro dos respectivos limites.

#### 4.2.3.1. Resultados da análise

➤ Para velocidade  $V_s = -V_i = 1 \text{ m/s}$

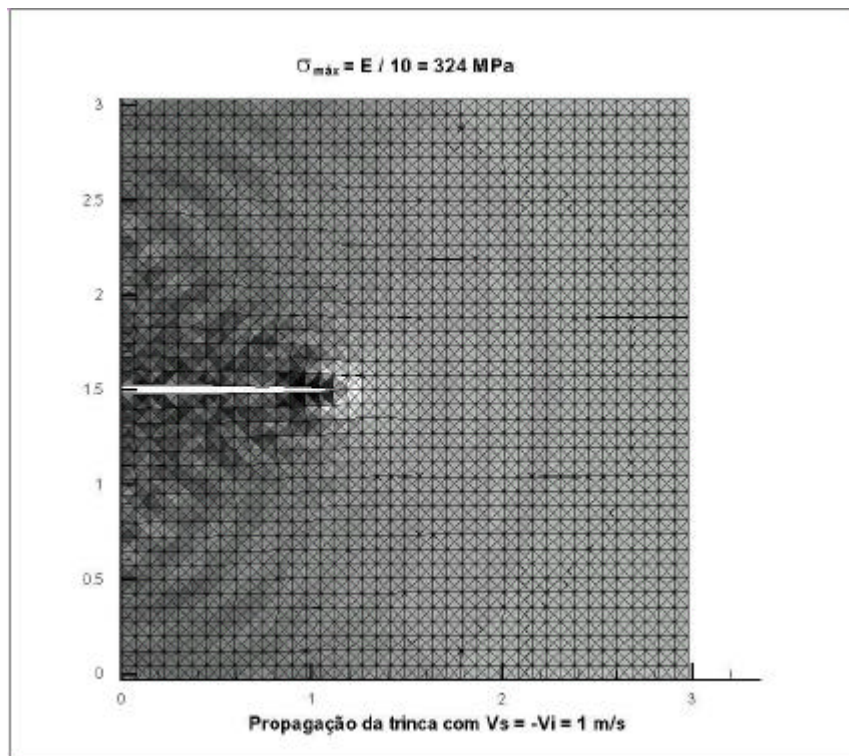


Figura 28a: Comportamento da propagação da trinca para  $s_{m\acute{a}x} = E/10$

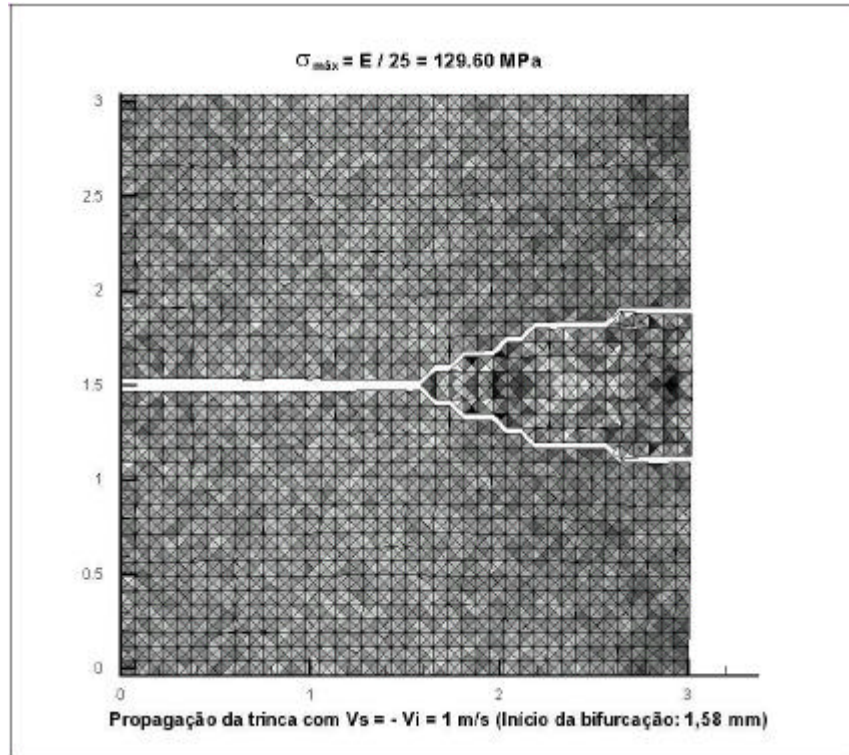
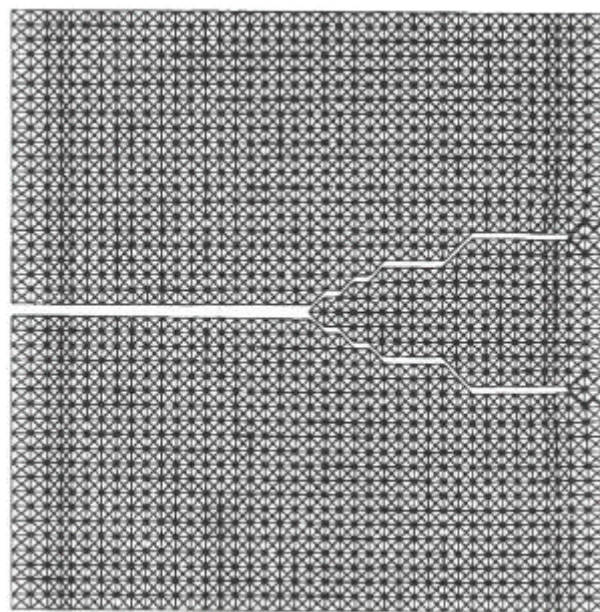


Figura 28b: Comportamento da propagação da trinca para  $s_{m\acute{a}x} = E/25$



(Início da bifurcação: 1,50 mm)

Figura 28c: Comportamento da propagação da trinca para Xu e Needleman (1994)

O resultado obtido inicialmente com tensões máximas equivalentes a uma razão de  $E/10$ , produz resultado diferente daquele obtido por Xu e Needleman (1994). Para este caso, a



malha não estava devidamente dimensionada, conforme a escala estabelecida pela expressão de Falk. Como o comprimento mínimo dos elementos não foi obedecido, era de se esperar que os resultados não fossem satisfatoriamente coerentes. Por outro lado, quando essa dimensão mínima da malha foi levada em conta nas análises com tensão de  $E/25$ , o resultado tornou-se mais próximo do experimento obtido por Xu e Needleman.

Para esse caso em que a velocidade de impacto é de  $1 \text{ m/s}$ , há uma conformidade na morfologia da trinca, tanto nas bifurcações iniciais como no final do processo da propagação. O que difere é a existência de uma propagação de forma linear um pouco maior antes da primeira bifurcação.

➤ Para velocidade  $V_s = -V_i = 15 \text{ m/s}$

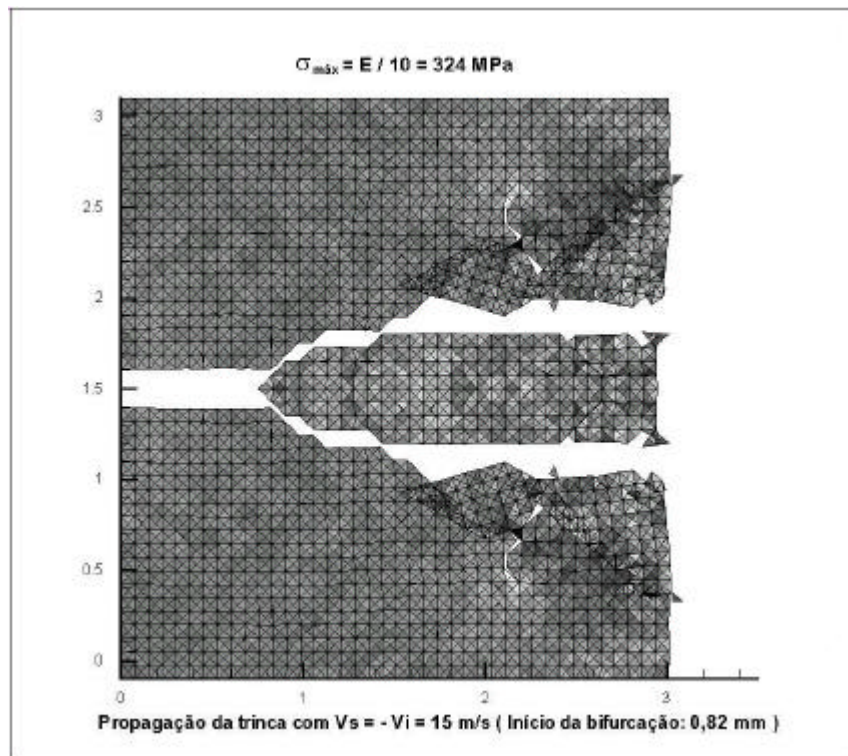


Figura 29a: Comportamento da propagação da trinca para  $s_{máx} = E/10$

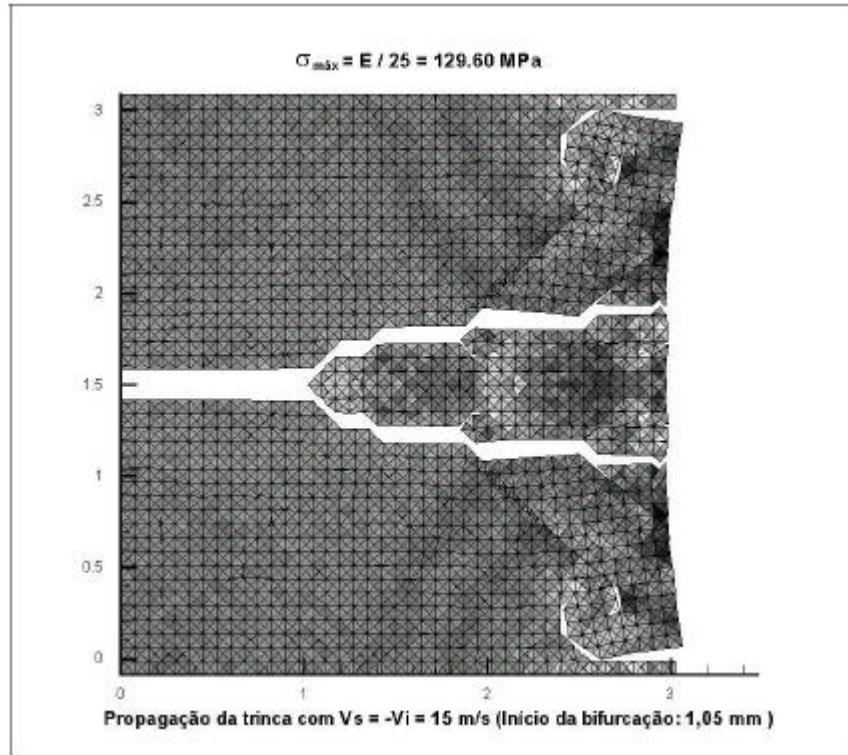
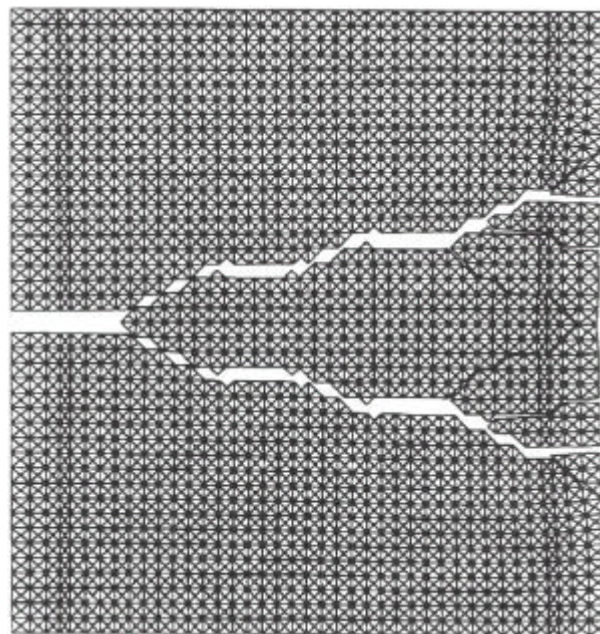


Figura 29b: Comportamento da propagação da trinca para  $s_{m\acute{a}x} = E/25$



(Início da bifurcação: 0,60 mm)

Figura 29c: Comportamento da propagação da trinca para Xu e Needleman (1994)

Analogamente, o caso com velocidade de 15  $m/s$  afigura com a morfologia obtida pelo o mesmo autor. Neste caso, bem como no caso anterior, as bifurcações tendem a principiar ligeiramente atrasadas, quando colocadas em comparação com as trincas dos estudos de Xu e

Needleman (1994). Em linhas gerais, os resultados obtidos desta análise, partindo do algoritmo das interfaces coesivas, indicam uma boa correlação com os valores encontrados na literatura, estando, também, de acordo com análises experimentais.

#### 4.2.4. Influência do comprimento característico $d$

Nesse item, para uma mesma tensão na interface de  $E/25$  e cargas aplicadas com uma velocidade de  $V_s = -V_i = 15 \text{ m/s}$ , procurou-se investigar como o comprimento característico  $dn$  e  $dt$  pode interferir nos resultados.

Sendo assim, conforme as leis de separação normal e tangencial das figuras 30a e 30b,  $dn$  e  $dt$ , respectivamente, variam entre valores menores (posições A e AO) e maiores (posições BO e B) ao valor proveniente das relações constitutivas originais (posição original).

Segundo as circunstâncias apresentadas anteriormente, os valores de  $dn$  e  $dt$  variam simultaneamente.

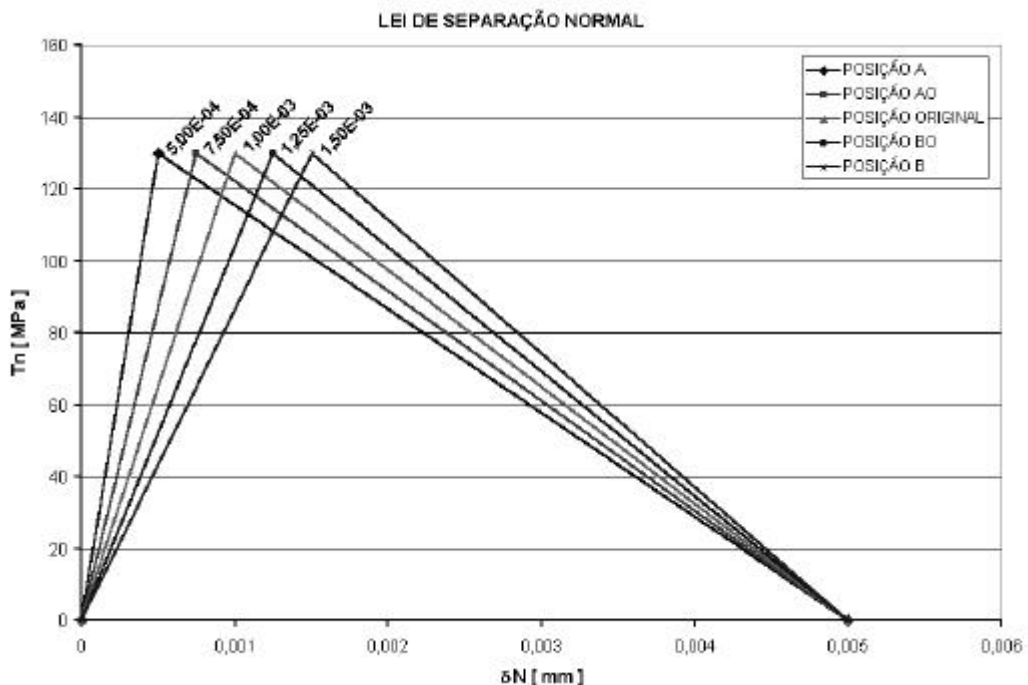


Figura 30a: Leis de separação normal para diferentes valores de  $dn$   
(apenas a parte positiva é mostrada)

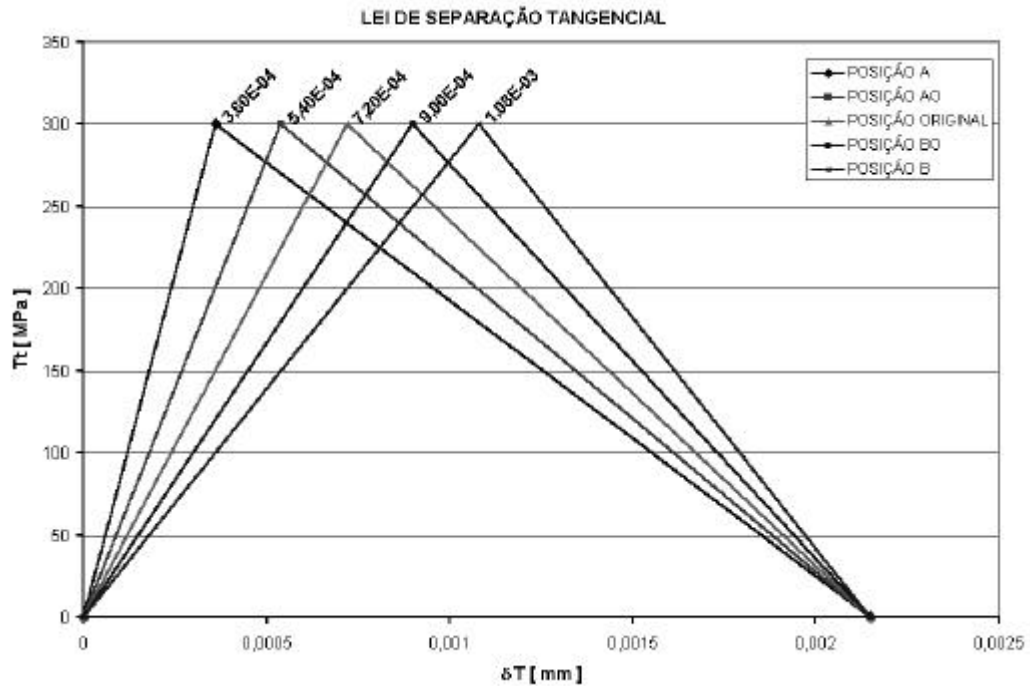


Figura 30b: Leis de separação tangencial para diferentes valores de  $\delta t$  (apenas a parte positiva é mostrada)

#### 4.2.4.1. Resultados da análise

Para cada caso, temos as seguintes deformadas das placas após o final da análise:

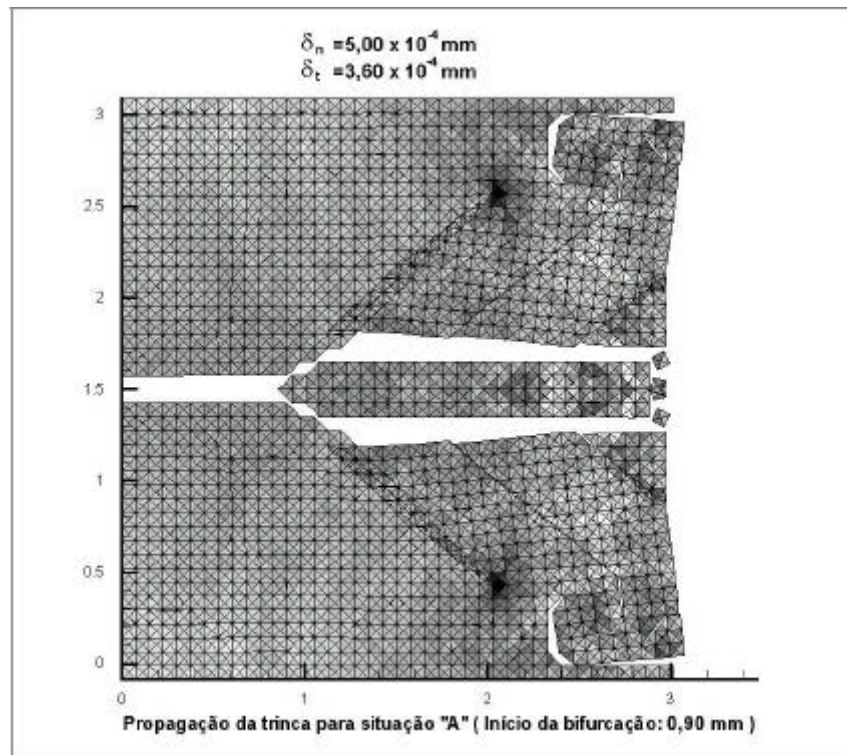


Figura 31a: Configuração deformada para posição A

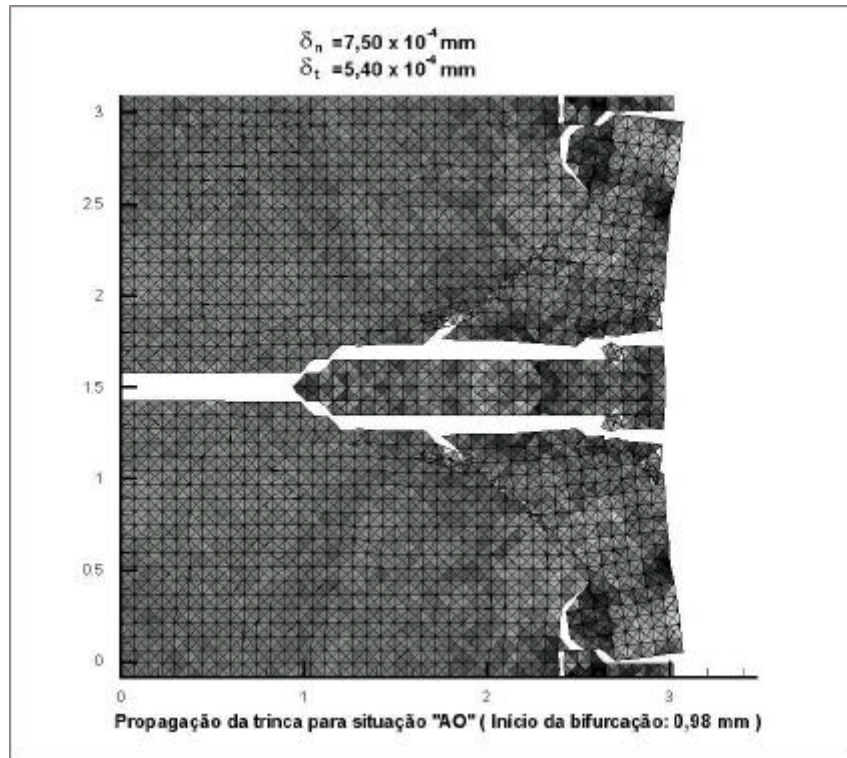


Figura 31b: Configuração deformada para posição *AO*

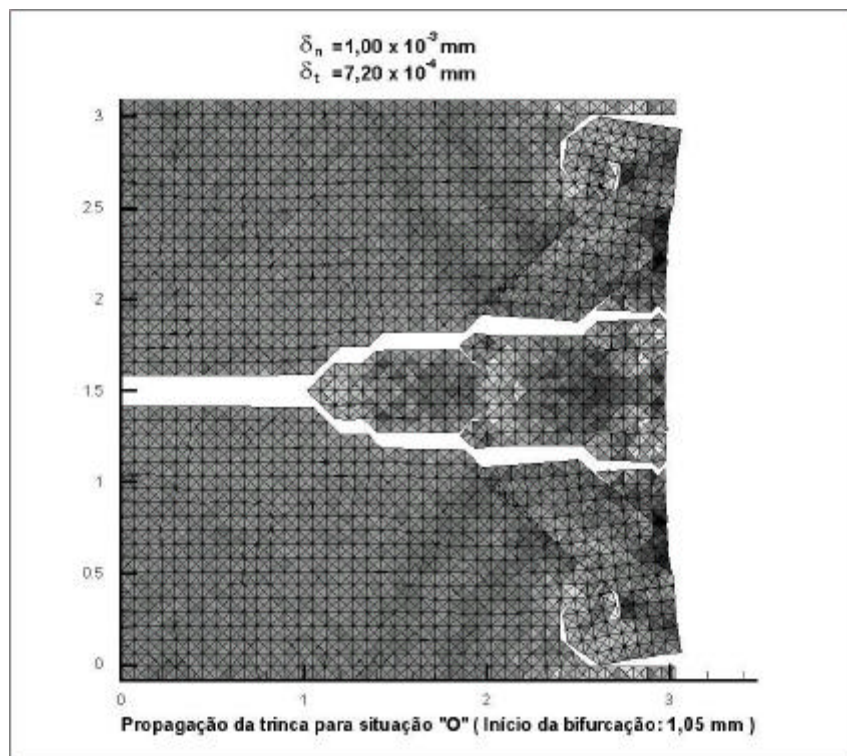


Figura 31c: Configuração deformada para posição *O*

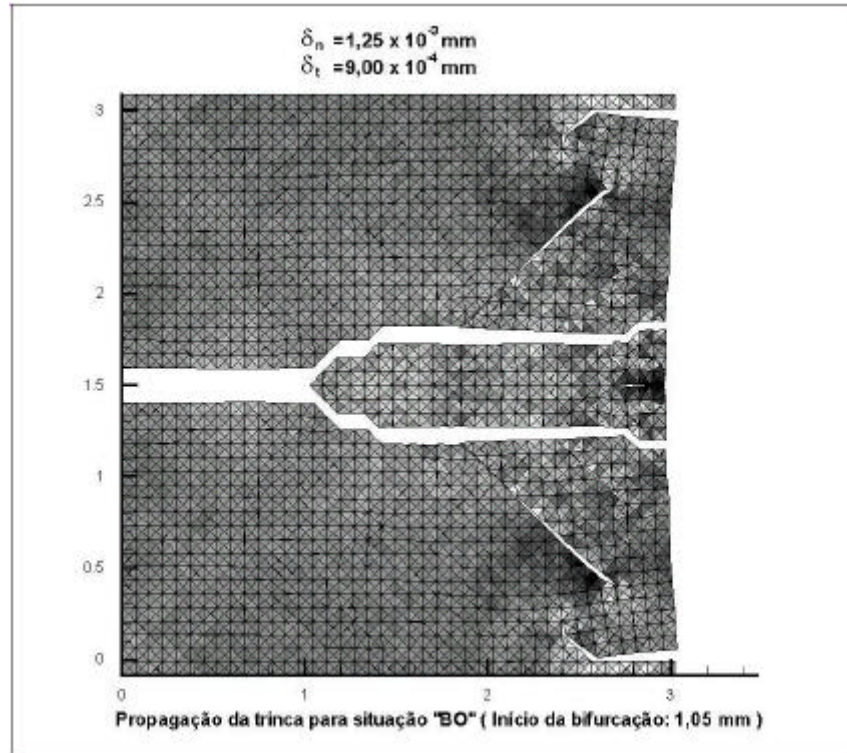


Figura 31d: Configuração deformada para posição *BO*

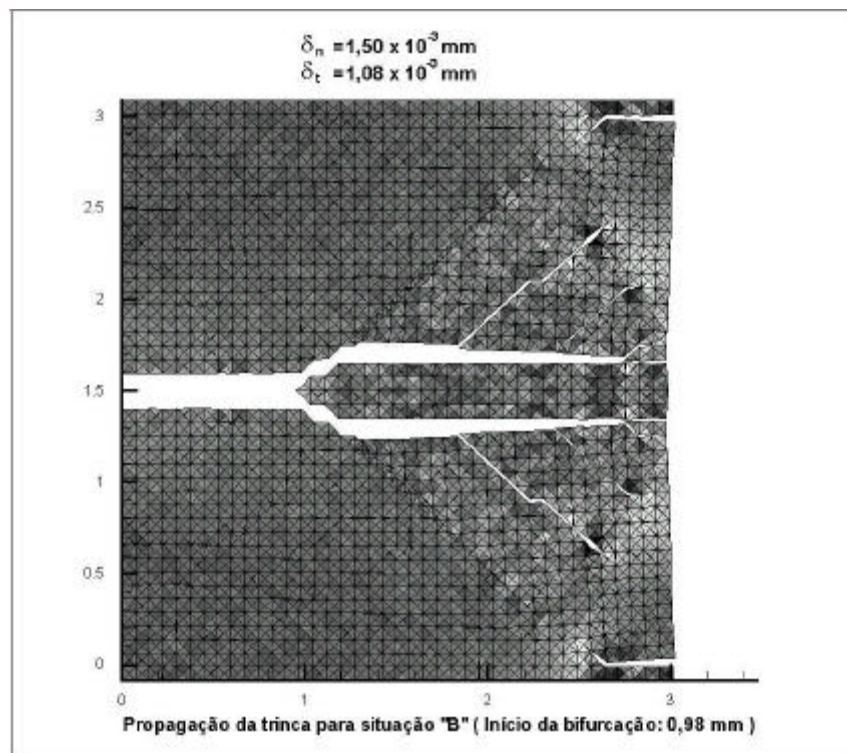


Figura 31e: Configuração deformada para posição *B*

Nas morfologias das trincas acima, não há diferenças significativas entre si. De um modo geral, as bifurcações se iniciam em torno de um mesmo ponto na faixa estudada, mantendo a sua forma inicial de bifurcação.

#### 4.2.5. Influência da energia de fratura $G_f$

A proposta aqui é variar a energia de fratura da peça a fim de pesquisar o efeito que a mesma acarreta nos resultados. Para tanto, a energia de fratura foi variada para valores de  $-40\%$  e  $+40\%$ . Para variar a energia de fratura, manteve-se o mesmo nível de tensões  $s_{m\acute{a}x} = E/25$ , fazendo, desta maneira, a correção das aberturas  $dn$  e  $dt$ .

Com isso, as relações constitutivas das interfaces apresentam as seguintes curvas:

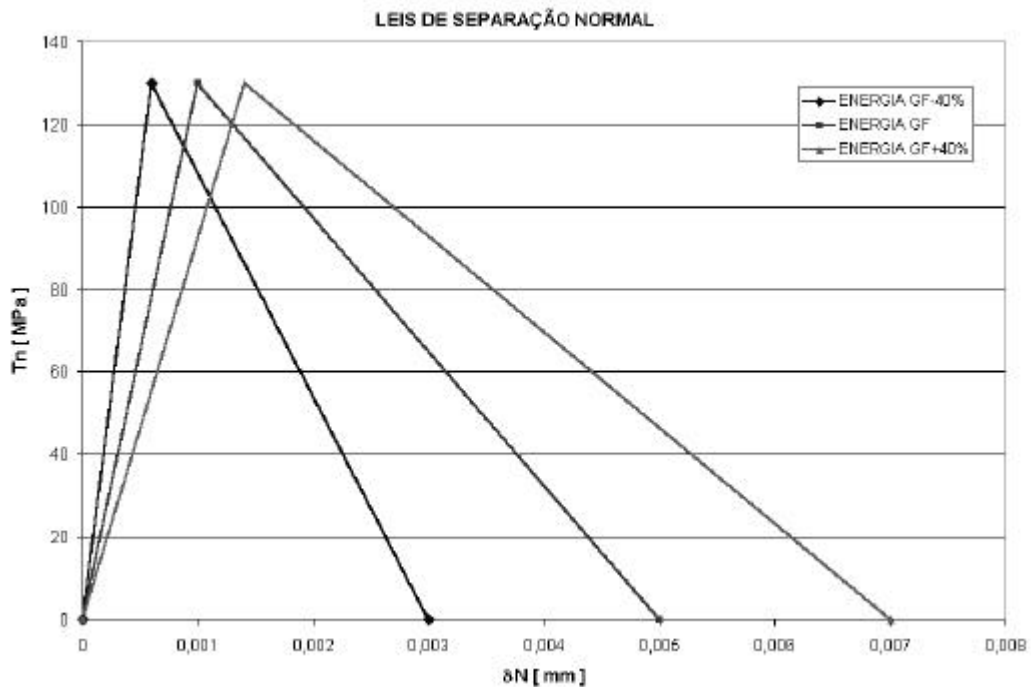


Figura 32a: Relações constitutivas na direção normal – Variação da energia de fratura (apenas a parte positiva é mostrada)

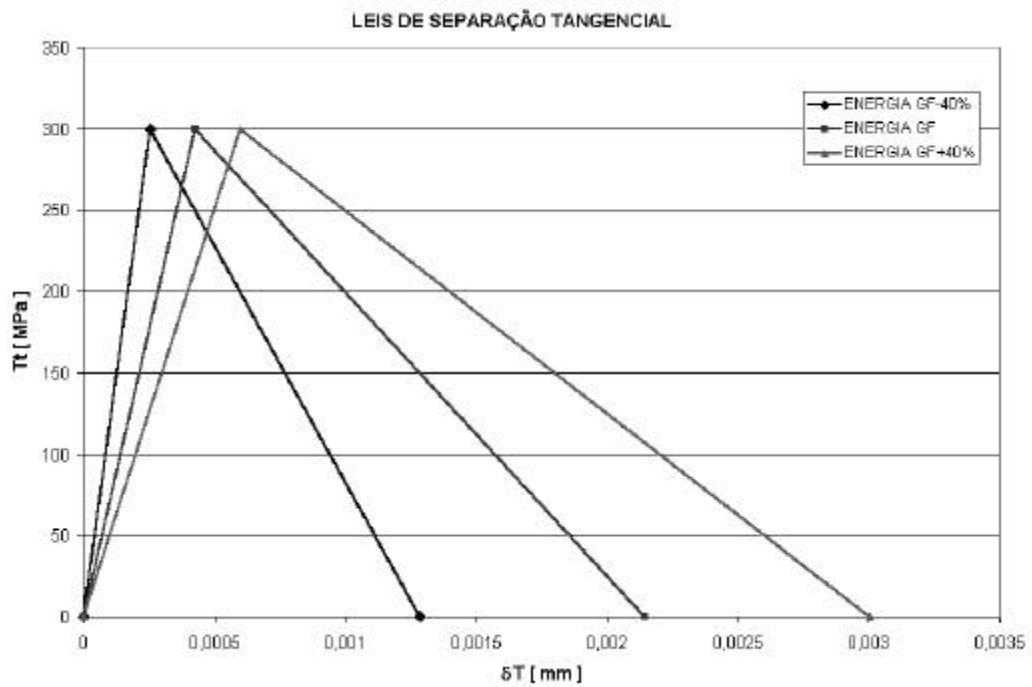


Figura 32b: Relações constitutivas na direção tangencial – Variação da energia de fratura (apenas a parte positiva é mostrada)

#### 4.2.5.1. Resultados da análise

Com o carregamento aplicado numa velocidade de  $V_s = -V_i = 5 \text{ m/s}$ , têm-se como resultado das simulações, as deformadas da placa de *PMMA*:

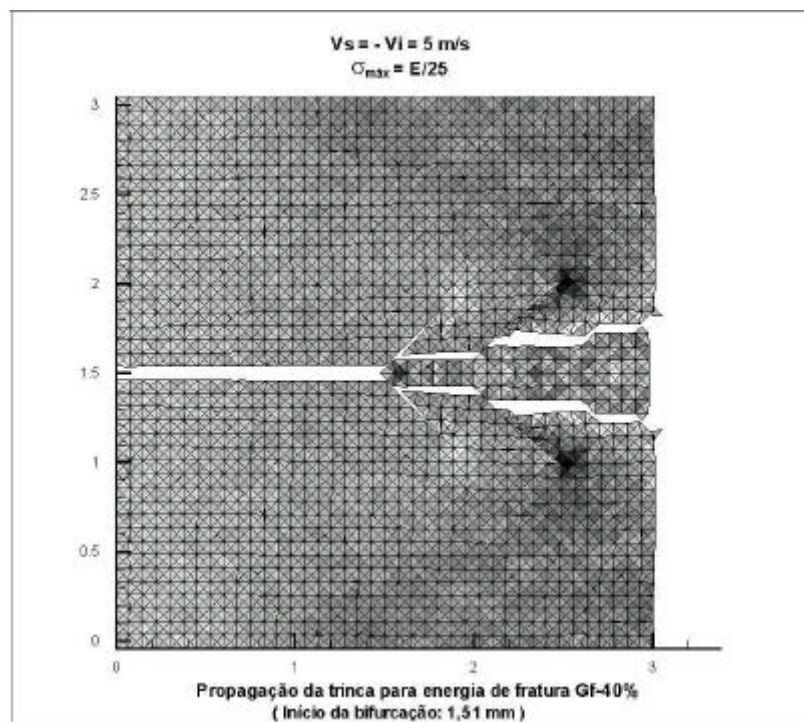


Figura 33a: Configuração deformada da placa de *PMMA* com energia de  $G_f - 40\%$



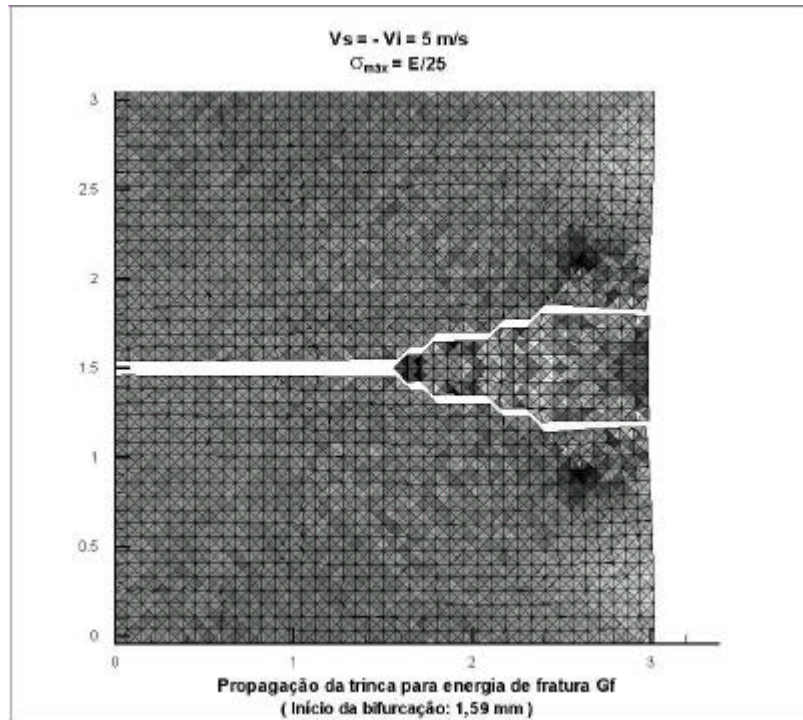


Figura 33b: Configuração deformada da placa de *PMMA* com energia original  $G_f$

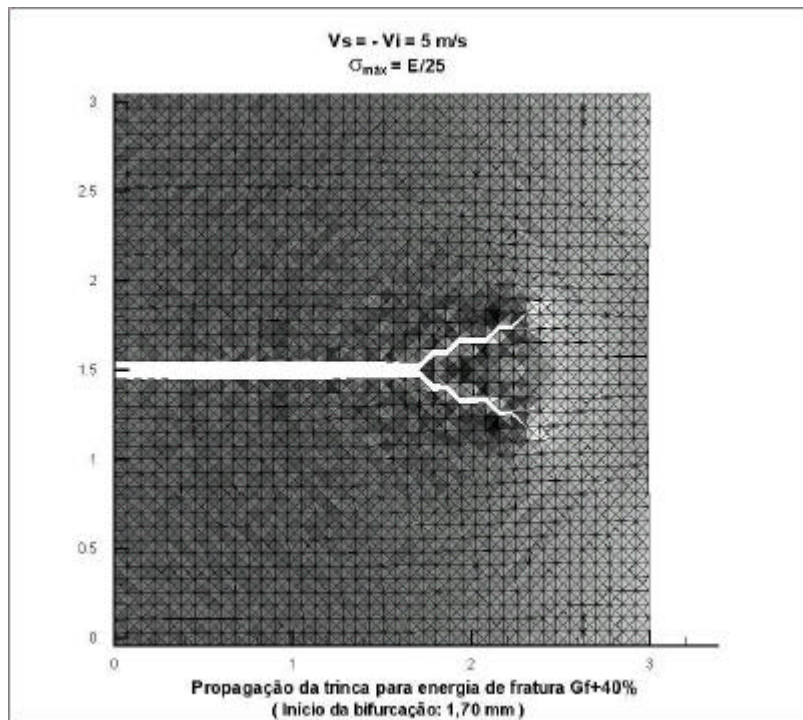


Figura 33c: Configuração deformada da placa de *PMMA* com energia de  $G_f+40\%$

É possível observar nos resultados apresentados nas figuras 33a, 33b e 33c, um nível de tensões mais baixo da peça, quando se tem uma energia de fratura menor, frente às demais simulações. As tensões máximas, para o caso onde temos uma energia de  $G_f+40\%$ , exibem um

nível mais baixo, quando se adota uma energia  $G_f$ . Todavia, quando a energia de fratura é 40% maior,  $G_f+40\%$ , a peça apresenta tensões mais elevadas.

Em todos os casos, a trinca se propaga inicialmente por um trecho linear, porém, esse trecho se apresenta mais longo quando o nível de energia é maior. As bifurcações se originam mais cedo à medida que a energia é baixa. Isto pode ser explicado pelo fato de a bifurcação representar a melhor forma que o contínuo encontra para dissipar a energia entregue em excesso na ponta da trinca. Daí a tendência de bifurcar antes quando a energia de fratura é menor.

Para o caso com energia 40% maior, a trinca não se propaga até atravessar toda a placa. As interfaces precisariam de uma maior carga para garantir o consumo de toda a energia empregada.

#### 4.2.6. Influência da rigidez das interfaces

Em adição ao estudo de investigação dos parâmetros, procura-se, agora, a diferença entre dois modelos, nos quais a rigidez inicial das interfaces foi variada amplamente entre dois casos: (a) um deles quase-rígido e outro (b) não rígido.

A diferença está na inclinação da reta ascendente (carga elástica) das leis constitutivas das interfaces, como pode ser visto nas figuras 34a e 34b.

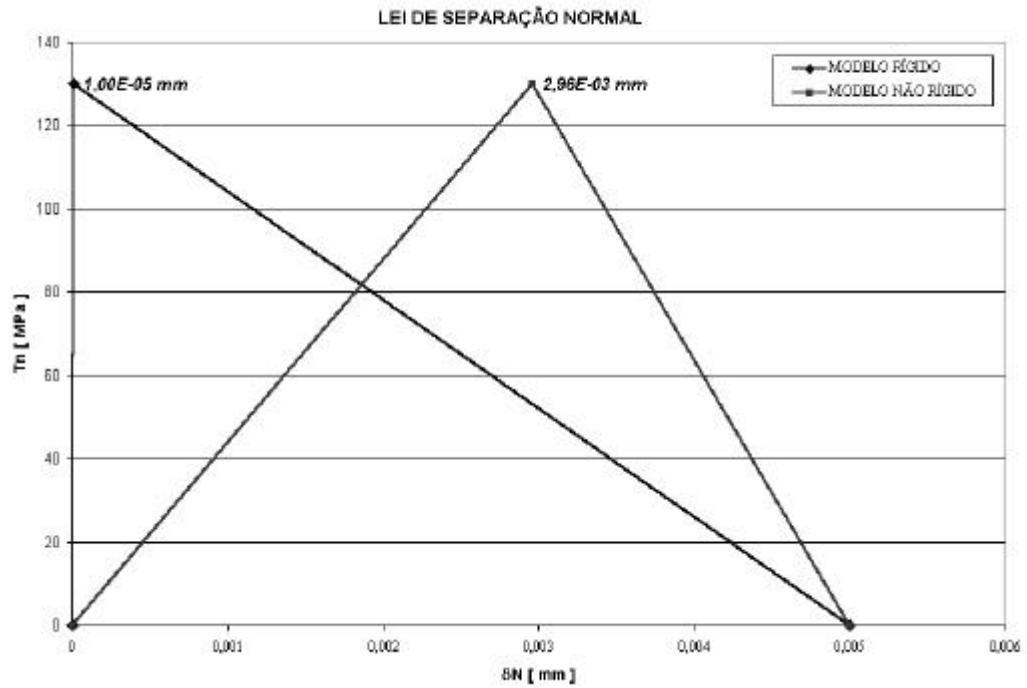


Figura 34a: Relações constitutivas normais das interfaces – variação da rigidez inicial (apenas a parte positiva é mostrada)

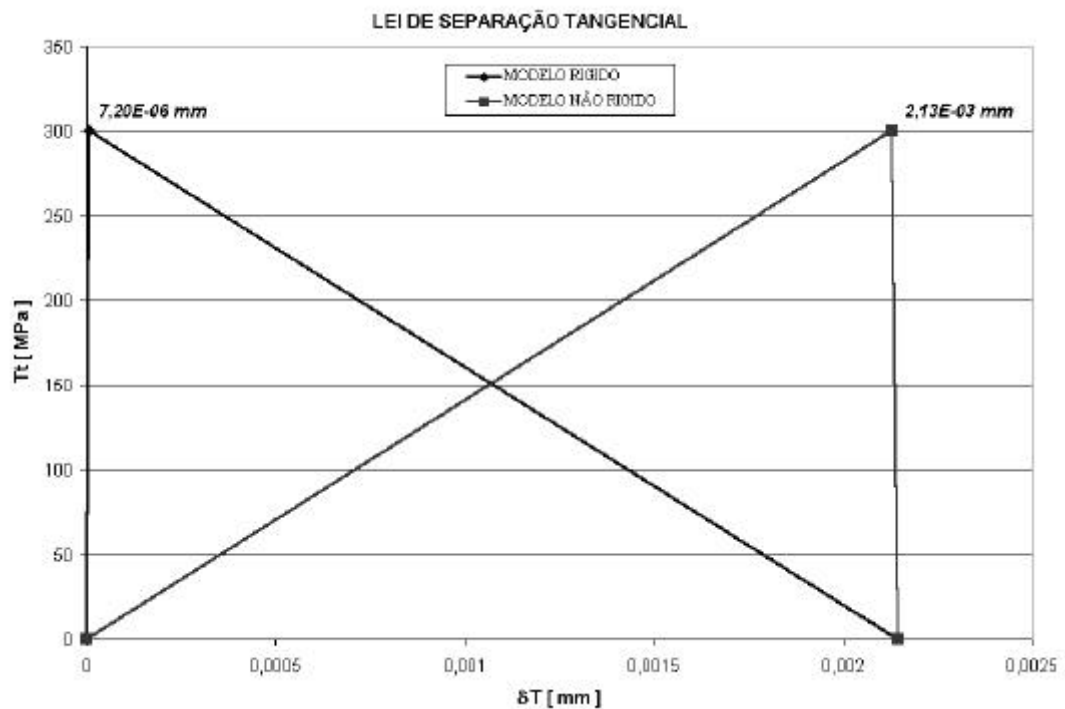


Figura 34b: Relações constitutivas tangenciais das interfaces – variação da rigidez inicial (apenas a parte positiva é mostrada)

A tensão na interface é de  $E/25$  e a velocidade nas bordas superior e inferior é de  $1 \text{ m/s}$ , em um tempo total de análise de  $10 \text{ ms}$ .

#### 4.2.6.1. Resultados da análise

Observa-se uma grande diferença entre os resultados apresentados nas morfologias das trincas, para cada caso.

Nas figuras seguintes, percebe-se a ausência de bifurcações na configuração da trinca principal quando se utiliza o modelo rígido. O mesmo resultado foi obtido em Falk (2001). No caso inicialmente rígido, a trinca principal não apresenta uma ramificação macroscópica, enquanto que no caso inicialmente elástico, a trinca se ramifica diversas vezes, propagando-se fora do eixo horizontal de simetria.

Além disso, após o tempo de análise total, as tensões são maiores, comparadas ao modelo não rígido, resultado da maior rigidez empregada.

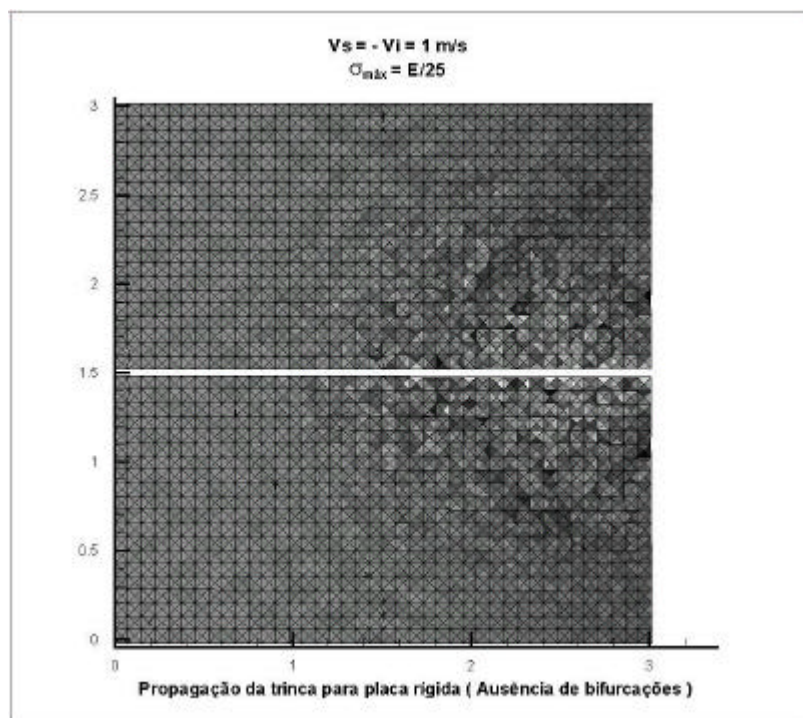


Figura 35a: Deformada da placa *PMMA* – Modelo quase-rígido após  $10 \text{ ms}$

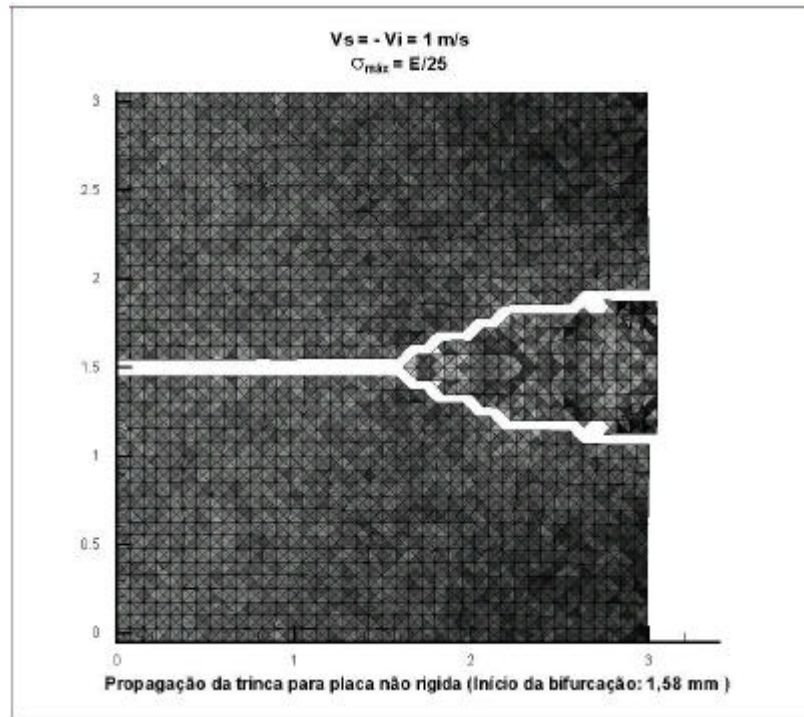


Figura 35b: Deformada da placa *PMMA* – Modelo não-rígido após 10ms

#### 4.2.7. Discussão de resultados

De uma maneira geral, o modelo forneceu resultados qualitativamente similares aos resultados encontrados na literatura (Fedrigo, 2001; Needleman, 1994). Além disto, a análise dos mesmos permitiu um melhor entendimento da física do fenômeno da fratura, frente aos parâmetros empregados.

O refinamento da malha também foi um fator importante (Falk, 2001), pois o estado de tensões na ponta das trinca precisa ser resolvido, havendo a necessidade de uma discretização da malha de elementos finitos apropriadamente dimensionada.

Ficou clara a necessidade de se estudar a influência da velocidade com que as cargas são aplicadas à peça. Neste caso, a velocidade de impacto influenciou no momento em que a trinca se bifurcou pela primeira vez, assim como na distribuição de tensões nas interfaces posteriormente transmitidas para os elementos. À medida que as velocidades aplicadas às bordas aumentou, uma tensão foi acrescida nas ondas de pressão, justificando esse acréscimo nas tensões, talvez ligado a um efeito inercial devido ao impacto.

### 4.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE FRATURA EM UMA VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

Pretende-se, neste exemplo, analisar o comportamento de uma viga de seção quadrada e constante, possuindo uma trinca inicial no vão central alinhada a carga  $P$  aplicada na face superior, composta de um material frágil e homogêneo, sujeita à flexão em três pontos (*Three Point Bending*) conforme indicada na figura 36 seguinte.

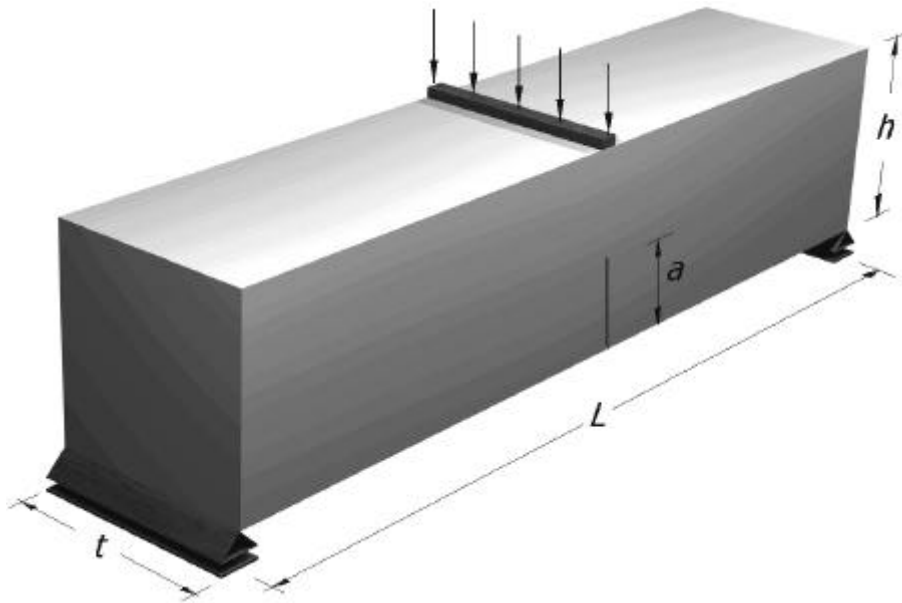


Figura 36: Esquema da viga sujeita à flexão em três pontos

A configuração da viga para o teste de flexão com três pontos de aplicação de carregamento, em estado plano de deformações (*EPD*), pode ser detalhadamente visto na figura 37 abaixo.

Um típico exemplo de fraturamento no Modo *I*, a viga biapoiada isostaticamente, consiste em um problema simétrico (simetria de geometria e carregamento) com relação ao eixo vertical. A carga no centro do vão será aplicada através de um deslocamento prescrito aplicado na linha central da viga representada por um suporte (ver figura 37). Previamente, é considerada uma trinca na face inferior da viga cujo comprimento  $a$  compreende a metade da altura da peça  $h$ .

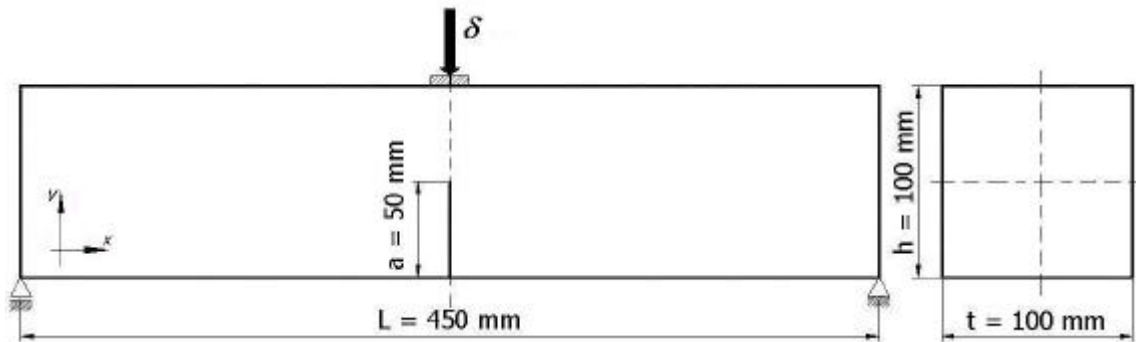


Figura 37: Características geométricas da viga

#### 4.3.1. Malha Empregada

Para modelar este problema, é usada uma malha na qual foram utilizados 6400 elementos finitos triangulares e 19200 nós, obedecendo a mesma configuração e arranjo dos demais exemplos onde o uso das interfaces coesivas se dá ao longo de toda a malha. A discretização da viga estudada pode ser observada na figura 38.

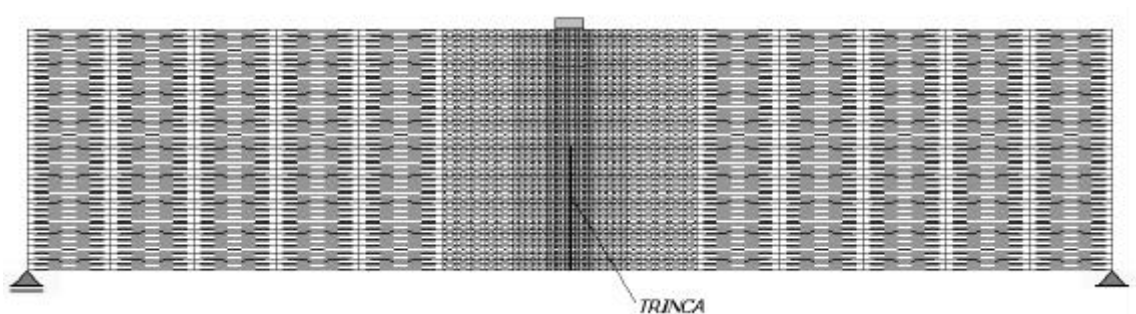


Figura 38: Malha de 6400 elementos finitos triangulares para a viga

Para que a análise seja bem executada, podendo ser observado na figura 38 acima, é gerado um refinamento da região central da malha, em virtude da sua configuração, já que é a área na qual a trinca tende a se propagar.

### 4.3.2. Propriedades do material

Para que pudesse comparar os resultados, são estabelecidos as mesmas características utilizadas por Rots (1988), Ou seja, os parâmetros elásticos utilizados para descrever o material é apresentado abaixo:

- Módulo de Elasticidade:  $E = 32240 \text{ MPa}$ ;
- Energia de Fratura:  $G_f = 113,0 \text{ N/m}$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,20$
- Massa específica:  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$

### 4.3.3. Leis constitutivas das interfaces

De maneira análoga aos exemplos anteriores, as relações constitutivas das interfaces são definidas a partir da energia de fratura a ser consumida ( $G_f = 113,0 \text{ N/m}$ ) e da máxima tensão normal ( $\sigma_{max}$ ). Para este caso as interfaces terão as tensões máximas normais equivalentes a relação  $E/25$ , com o objetivo de avaliar as dimensões dos elementos da malha a ser empregada, os quais foram dimensionados para esse nível de tensão.

A partir dos valores acima definidos, as aberturas das interfaces são calculadas. Desta forma, prossegue a implementação das leis de separação normal e tangencial, representadas, respectivamente, pelas curvas indicadas nas figuras 39a e 39b.



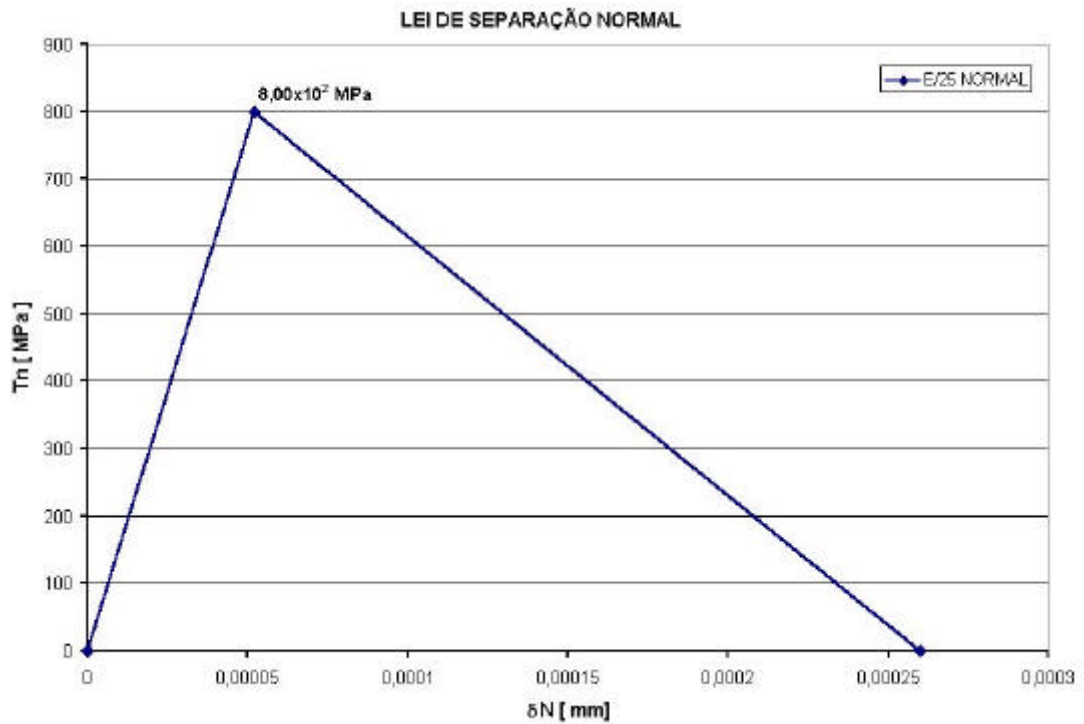


Figura 39a: Lei de separação normal das interfaces -  $dn = 5,196 \times 10^{-05} \text{ mm}$   
(apenas a parte positiva é mostrada)

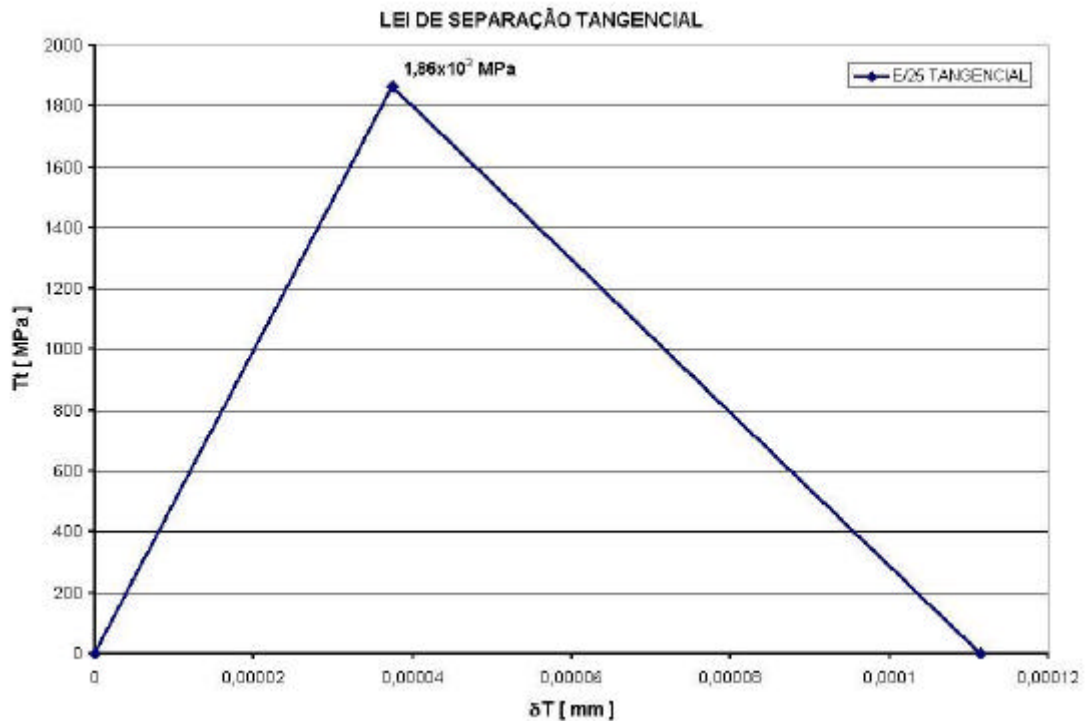


Figura 39b: Lei de separação tangencial das interfaces -  $dt = 3,7411 \times 10^{-05} \text{ mm}$   
(apenas a parte positiva é mostrada)

#### 4.3.4. Resultados da análise

Para analisar o comportamento da viga com flexão em três pontos, adotou-se um deslocamento prescrito de 3,5 mm para representar a carga no centro do vão, aplicado numa velocidade de 0,07 m/s.

Neste exemplo, a viga bi-apoiada com uma trinca central apresenta a configuração deformada característica, ilustrada pela figura 40, na qual estão indicados a carga reativa no ponto de aplicação do carregamento,  $P_r$ , e o deslocamento vertical  $d_f$  no centro do vão. Esse valores serão plotados em curvas  $P_r \times d_f$  como resultado da análise, conforme indicados na figura 41, e comparados com os resultados numéricos provenientes de uma análise computacional realizada por Rots (1988). Além desta, uma outra comparação é feita entre a metodologia do presente estudo e a metodologia adotada pelo Fedrigo (2001), na qual adotou relações constitutivas exponenciais para representar a coesão entre as interfaces.

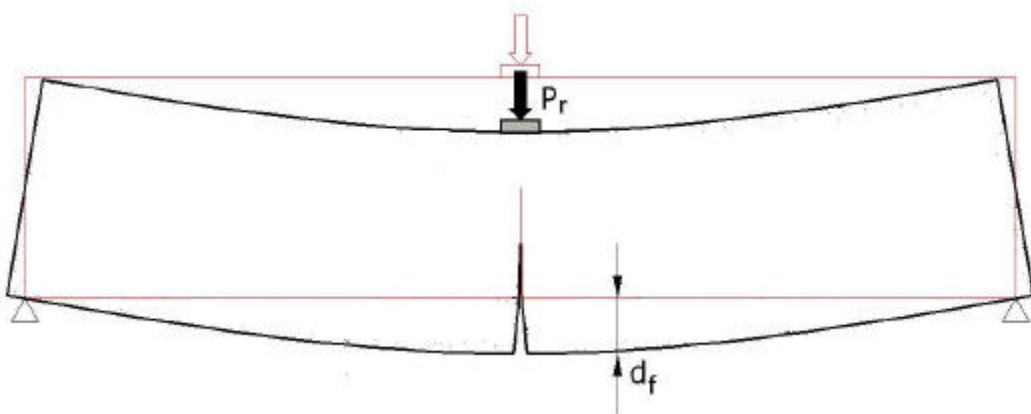


Figura 40: Configuração deformada da viga bi apoiada sujeita à flexão em três pontos

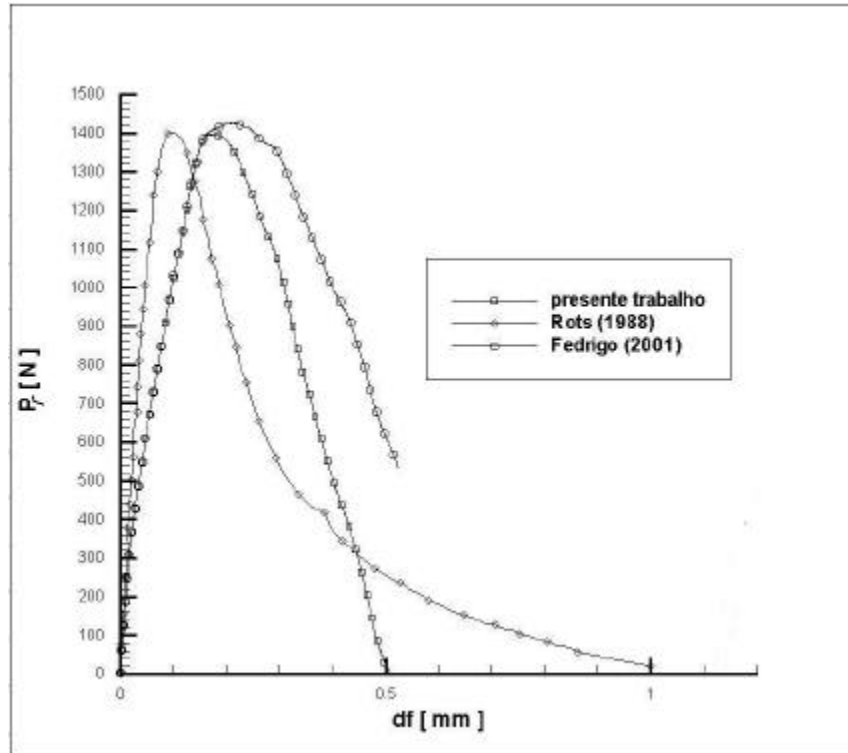


Figura 41: Carga  $P_r$  x deslocamento no centro do vão  $d_f$

De acordo com a figura 41, é percebida uma aproximação entre as curvas, cuja carga máxima de ruptura coincide com o valor encontrado por Rots e o modelo empregado nos estudos de Fedrigo (2001). Pode-se verificar ainda que os valores de deslocamento, são maiores, quando comparados com a curva obtida por Rots. Isso talvez seja proveniente de um efeito de superposição de aberturas das interfaces, ou seja, com a implementação de molas entre as faces dos elementos, o material se torna mais flexível. Isso pode ser uma deficiência das relações constitutivas das interfaces implementadas no material. Esse efeito se torna ainda mais visível à medida que aumenta o número de elementos finitos que compõem a malha e, conseqüentemente, as interfaces coesivas. Com o refinamento da malha, as aberturas das interfaces trabalham em conjunto umas com as outras, refletindo, macroscopicamente, em aberturas acima do esperado, permitindo que o material absorva cargas com valores maiores de abertura das fissuras.

É percebido o efeito do carregamento até o alcance da carga máxima e, conseqüentemente, o amolecimento da estrutura em virtude da presença da trinca, cuja forma pode ser observada na figura 42.

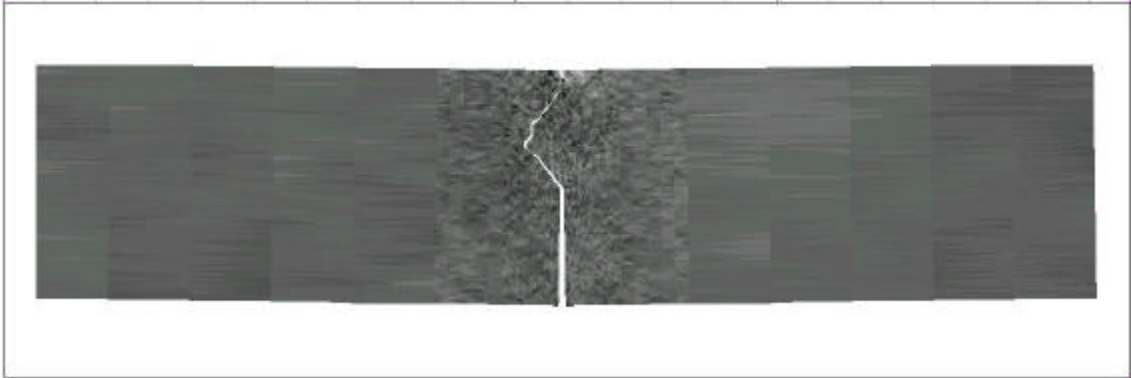


Figura 42: Configuração deformada após a ruptura para a viga bi-apoiada

Percebe-se na morfologia da trinca que, após a trinca inicial, a mesma se propaga numa direção inclinada em relação ao eixo vertical e, em seguida, a mesma se propaga até encontrar o ponto de aplicação das cargas.

#### 4.3.5. Influência da massa específica $r$

Em adição à análise, fez-se o estudo dos efeitos que a massa específica do material pode acarretar nos resultados numéricos. Sendo assim, valores diferentes de massa específica foram adotados com o intuito de aferir a distribuição de tensões, bem como a amplitude das solicitações ao longo da peça. São eles:

$$✓ \quad r_1 = 2.500 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$✓ \quad r_2 = 25.000 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$✓ \quad r_3 = 250.000 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Vale lembrar que uma técnica comum de programas explícitos consiste em aumentar a densidade do material, ficticiamente, de forma a diminuir a velocidade das ondas no meio, o que permite um passo de tempo de integração maior no método.

Mantendo os demais parâmetros elásticos, geométricos e de carregamento, a variação da massa específica acarretou resultados distintos após as análises, os quais são indicados na figura 43, onde são plotadas as curvas  $P_r \times d_f$  para cada valor de  $r$ .

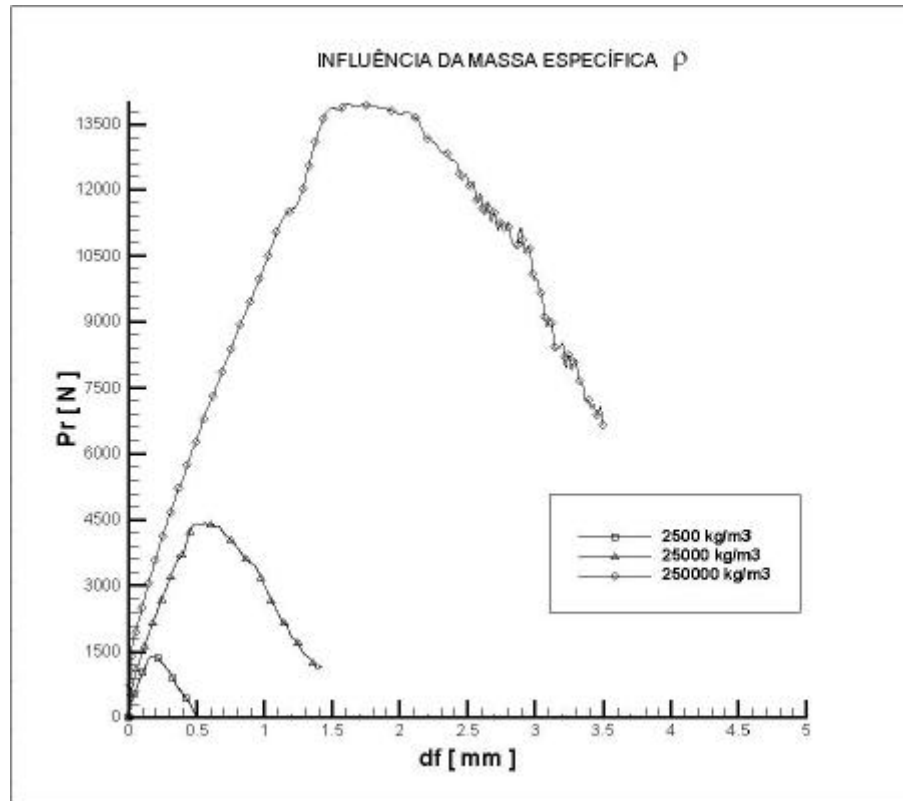


Figura 43: Curvas  $Pr$  x  $d_f$  com massas específicas distintas.

Analisando os resultados acima é possível perceber um acréscimo significativo nas forças reativas. Foi observado, inclusive, que as tensões ao longo da viga apresentaram aumentos significativos à medida que se adotavam massas específicas de maior valor. Esse fenômeno pode estar ligado às ondas de pressão nos elementos.

Conforme citado em Timoshenko (1980), a velocidade da onda de pressão, que carrega uma tensão de intensidade  $s = r \cdot c_d \cdot V_y$ , é dada pela seguinte expressão:

$$c_d = \sqrt{\frac{E(1-n)}{r(1+n)(1-2n)}} \quad (4.15)$$

É sabido que, com o aumento das massas específicas  $r$ , as velocidades das ondas de pressão decaem; por outro lado, as tensões aumentam, juntamente com as forças internas aos elementos.

Em muitos casos, esta técnica de aumento fictício na densidade específica do material não é significativa, contudo, na presente aplicação, modificou radicalmente os resultados. Isso mostra que o acréscimo da massa específica para melhoramento da performance numérica deve ser utilizada com muito cuidado, para não alterar bruscamente os resultados.

Como forma de visualizar a configuração final da viga após a sua ruptura total, as deformadas são indicadas abaixo, nas figuras 44 e 45, para as massas específicas  $r_2$  e  $r_3$ , respectivamente.

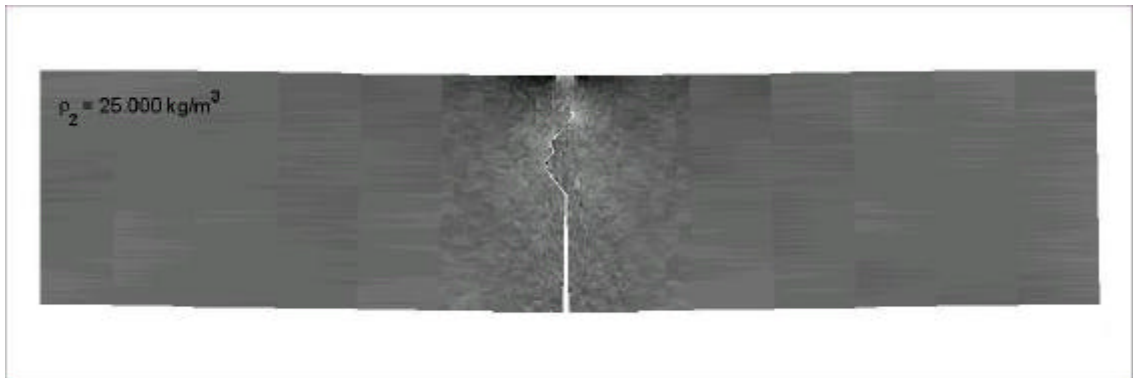


Figura 44: Deformada para a massa específica  $r_2= 25.000 \text{ kg} / \text{m}^3$

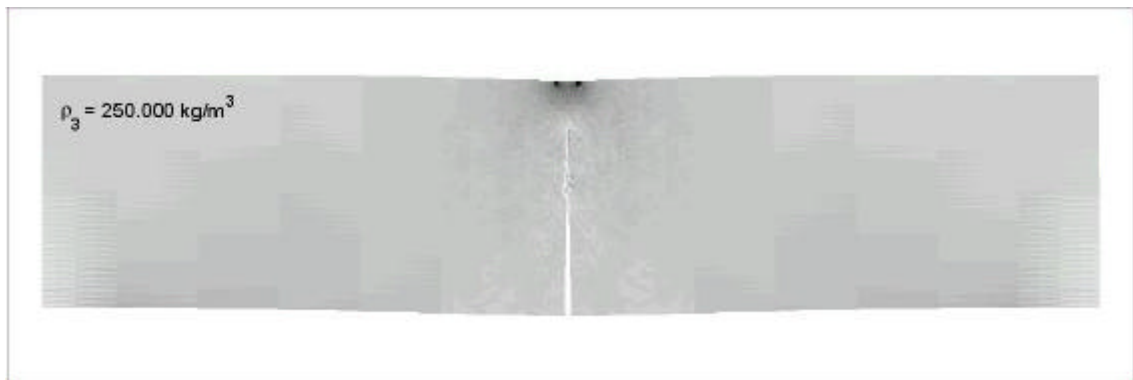


Figura 45: Deformada para a massa específica  $r_3= 250.000 \text{ kg} / \text{m}^3$

#### 4.4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE FRATURA EM MODOS MISTOS DE PROPAGAÇÃO ( MODOS I E II ) – ANÁLISE DE PARÂMETROS DE FRATURA

O objetivo deste exemplo é analisar numericamente a evolução da fissuração de uma viga pré-trincada de concreto simples em estado plano de deformações submetida a quatro pontos de aplicação de carga, resultando significativas tensões de corte na zona do entalhe. Tem-se como resultado a possibilidade de modo misto de propagação da trinca (*Modos I e II*).

O corpo de prova analisado é usado para determinar parâmetros de falhas em materiais, devido à combinação de tensões de tração com tensões oriundas do corte. Pela dificuldade de simulação numérica deste problema, o mesmo tornou-se um teste padrão para programas de simulação de mecânica da fratura.

Neste exemplo são empregados dados (experimentais e numéricos) fornecidos por Schlangen (1993).

Ainda como objetivo do presente estudo, será feita uma variação de parâmetros microscópicos do material (dentro de valores considerados aceitáveis na literatura), de modo a investigar como os parâmetros podem afetar o comportamento macroscópico do material.

##### 4.4.1. Ensaio e material empregado

O exemplo analisado neste trabalho consiste em uma viga submetida à flexão e corte com quatro pontos de aplicação de carga, de acordo com a figura 46. A viga tem dimensões 400 x 100 x 100 mm , onde um pequeno entalhe de 20 x 5 mm é posto na face superior central da mesma, conforme figura 47 a seguir. A viga é considerada em estado plano de deformações.

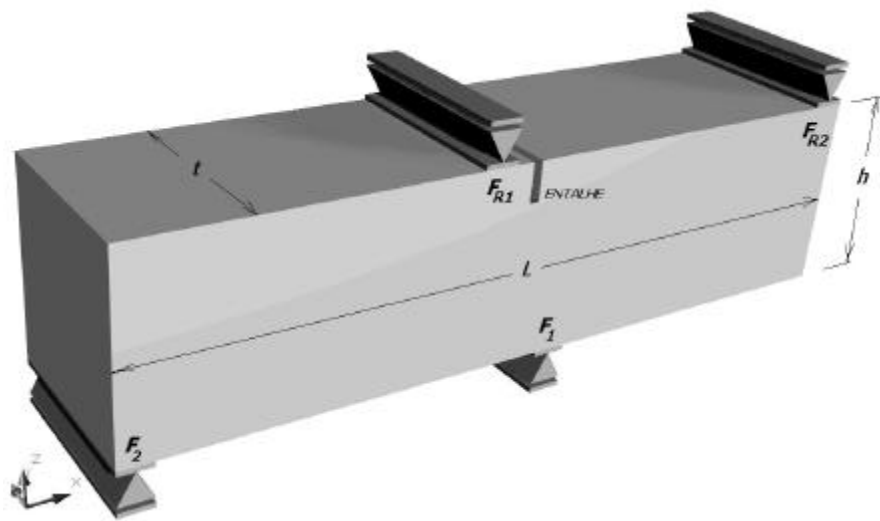


Figura 46: Esquema da viga submetida a corte em quatro pontos

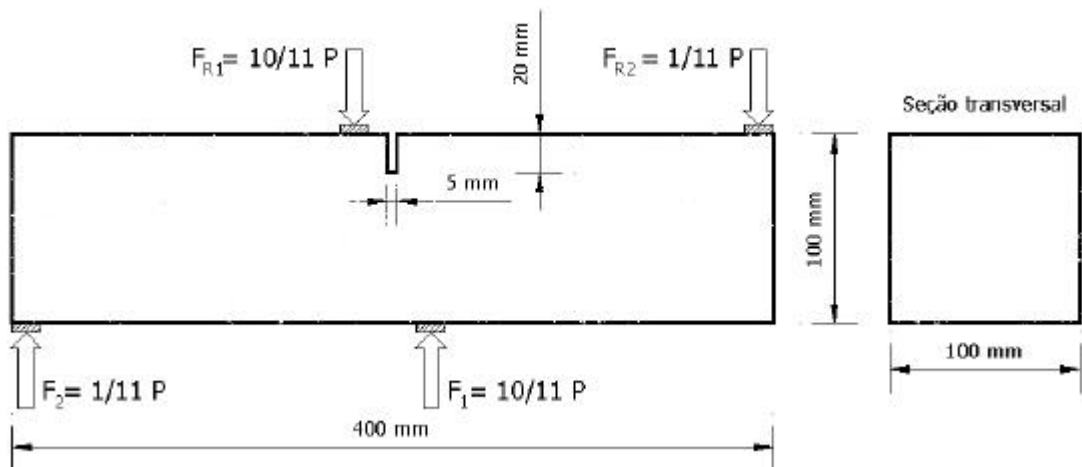


Figura 47: Distribuição das forças aplicadas e geometria da viga

Localizado no centro da peça, o entalhe está estrategicamente situado numa região de cortante máximo e de momento fletor muito pequeno. As condições de contorno são especificadas por apoios que permitem o livre movimento na horizontal e liberdade de giro, conforme figura 47 acima. Na extremidade da viga, o carregamento é aplicado com valor de  $1/11$  de  $P$ , onde  $P$  é a carga total aplicada ao sistema. Porém, nos pontos centrais de aplicação de carga, os apoios são representados por um suporte distribuído nos quais os centros são colocados  $20\text{mm}$  do eixo de simetria vertical. Nestes a força tem valor proporcional a  $10/11 P$  e é aplicada através de deslocamento prescrito.



Experimentalmente, Schlangen realizou o ensaio acima e seus resultados serão empregados neste trabalho para a aferição dos dados aqui obtidos numericamente. O sistema ou máquina de ensaio empregada, capaz de obter a distribuição de carregamento descrito, é mostrado na figura 48 abaixo.

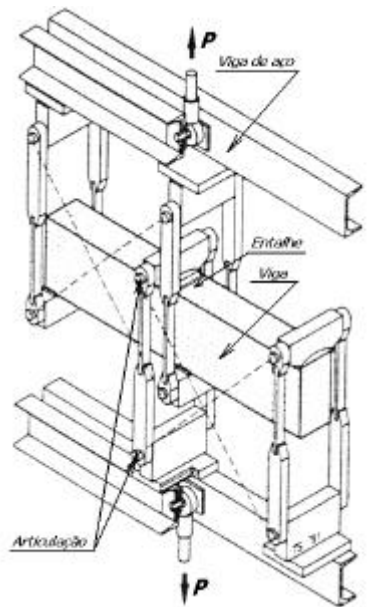


Figura 48: Máquina usada na análise experimental desenvolvida por Schlangen (1993)

O autor adotou diferentes materiais para suas análises. No entanto, no presente trabalho, serão adotadas as propriedades listadas abaixo:

- Módulo de Elasticidade:  $E = 30000 \text{ MPa}$ ;
- Resistência à tração:  $\sigma_t = 2,8 \text{ MPa}$
- Energia de Fratura:  $G_f = 80 \text{ N/m}$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,20$
- Massa específica  $\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$

Com estes dados a velocidade das ondas de pressão no meio resulta  $3651 \text{ m/s}$  e as ondas de corte  $2236 \text{ m/s}$

#### 4.4.2. Resultados numéricos e discussão

Neste item serão apresentados detalhes da simulação numérica bem com resultados da análise e como parâmetros de fratura empregados no modelo interferem nos resultados. Inicialmente será discutido a discretização espacial do problema e posteriormente que propriedades de fratura inerentes ao modelo serão estudadas. Posteriormente serão feitas algumas considerações sobre eventuais efeitos dinâmicos na análise. No final deste item, será feita uma comparação com resultados obtidos na literatura.

##### 4.4.2.1. Malha empregada

Para a análise numérica, adotou-se inicialmente, um modelo numérico da peça, que apresenta 4003 elementos finitos triangulares e 12009 nós. O uso das interfaces coesivas se dá em todas as faces adjacentes aos elementos finitos da malha, onde um refinamento da mesma é limitada à parte central da viga, onde a fratura irá ocorrer, como esperado.

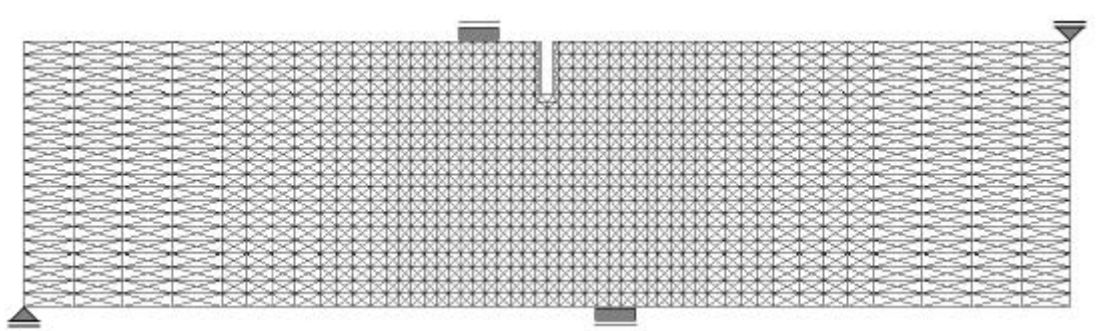


Figura 49: Malha de 4003 elementos triangulares para a viga com 04 pontos de corte

Nenhuma hipótese é feita quanto à morfologia da trinca, nem trincas iniciais são colocadas. Portanto, o algoritmo de interfaces coesivas está livre para simular, de forma natural, o surgimento de trincas, a nucleação e propagação das mesmas em qualquer região da viga.

A abertura do entalhe, é vista como a medida da distância entre os pontos extremos, chamado de *CMOD* (*crack mouth opening displacement*) para aberturas normais e *CMSD* (*crack mouth sliding displacement*) para aberturas tangenciais.

De acordo com a figura 50,  $CMOD = [(XB' - XA') - 5] \text{ mm}$  e  $CMSD = [(YB' - YA')] \text{ mm}$ .

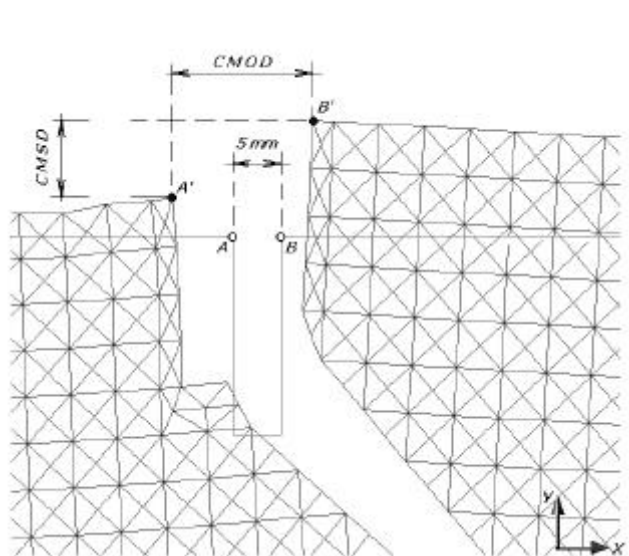


Figura 50: Representação de  $CMOD$  e  $CMSD$  no entalhe da viga

#### 4.4.2.2. Efeitos dinâmicos na análise

Sabe-se que efeitos inerciais, que justifiquem uma análise dinâmica, podem surgir de duas formas distintas: através de cargas aplicadas na forma de impacto, ou na propagação rápida de trincas, da ordem da velocidade de propagação das ondas no meio (ver Freund (1998)). Embora a análise apresentada neste trabalho, em princípio, seja quase-estática, sabe-se que a propagação das trincas em materiais frágeis pode ocorrer em altas velocidades. Assim uma análise dinâmica completa é feita neste trabalho. Ainda que a velocidade de aplicação das cargas não seja especificada nos resultados experimentais (Schlangen), o carregamento aqui foi aplicado em três diferentes velocidades: a) 1 m/s; b) 0,1 m/s e c) 0,01 m/s.

Nas figuras abaixo são fornecidos os resultados obtidos para a força  $FI$  (ver figura 47) em função do  $CMOD$ . Tais resultados foram obtidos para diferentes valores de tensão máxima na ponta de trinca. De forma geral pode-se dizer que os carregamentos com velocidade 0,1 m/s e 0,01 m/s apresentaram a mesma tendência com a carga atingindo valores de pico. Já para 1 m/s os efeitos inerciais são mais importantes pois observa-se um nível de carga bem maior para este caso e, além disso, há ausência da carga de pico nas curvas. As forças crescem à medida que os deslocamentos são ascendentes, mesmo após a ruptura da peça. Talvez, o efeito de inércia nos elementos em virtude do forte impacto acarrete esse fenômeno. Um outro fator que pode ser considerado, é a questão da própria geometria da estrutura. Mesmo com o surgimento seguido da propagação de uma trinca, os apoios centrais estão ambos ligados ao mesmo segmento da viga, ou seja, a trinca percorre uma trajetória não isolando os apoios

centrais, possibilitando, desta forma, que os esforços aplicados no apoio central inferior sejam transmitidos, ainda que mais precariamente, para o apoio superior, situado ao lado do entalhe.

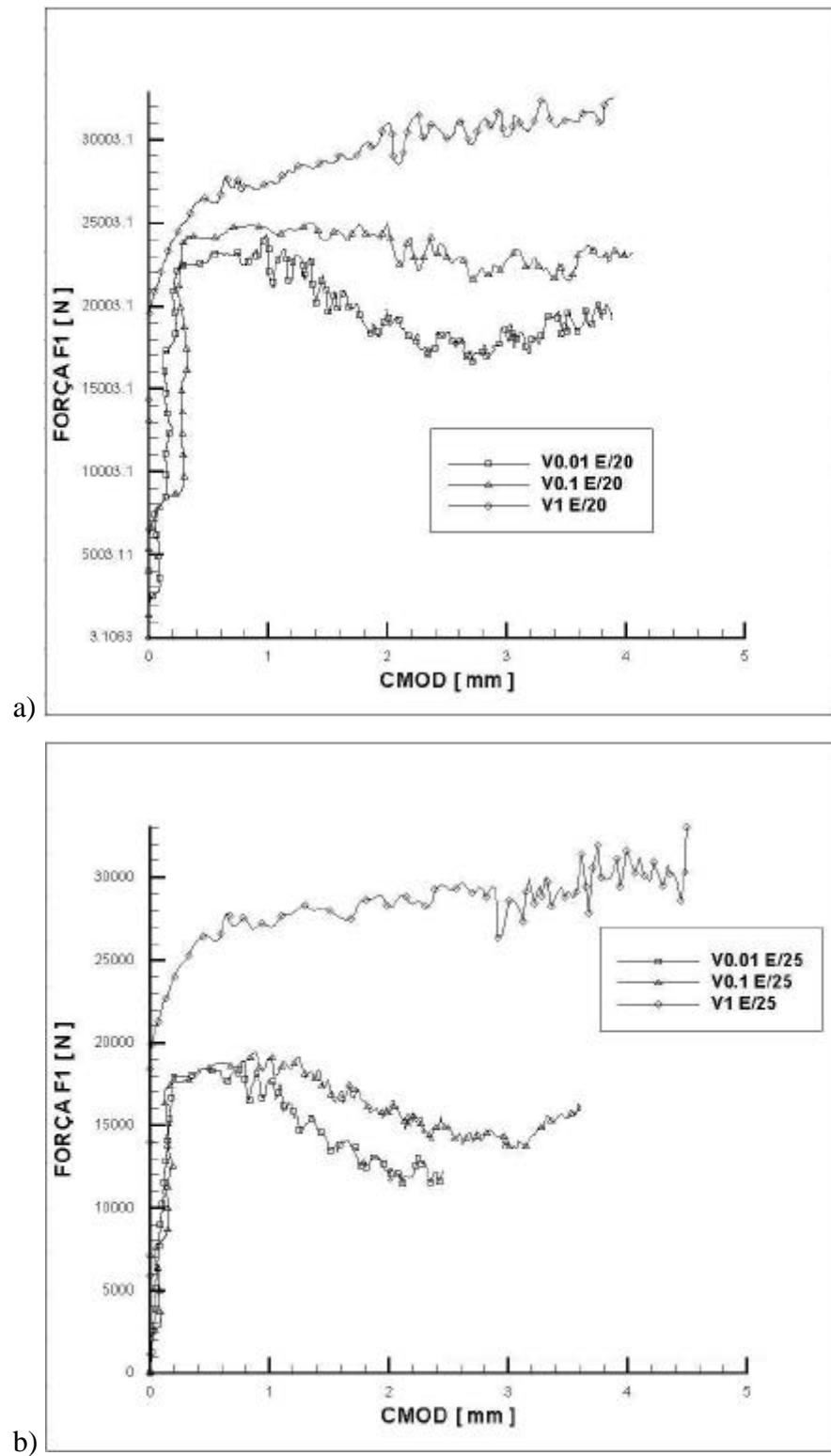


Figura 51: Curvas  $F1 \times CMOD$  para a) tensão máxima na interface coesiva de  $E/20$ ; b) tensão máxima de  $E/25$ ; velocidades de 0,01 m/s , 0,1 m/s e 1 m/s

No que tange à morfologia da trinca nas diferentes condições de velocidade, as figuras abaixo fornecem as diferentes formas das trincas para um deslocamento prescrito de 5 mm. Em todos os casos, foi empregado um comprimento característico  $d_n = 9,81 \times 10^{-6} \text{ mm}$  e  $d_t = 7,0632 \times 10^{-6} \text{ mm}$ . A energia de fratura do modo *I* e *II* são consideradas iguais a 80 N/m. Os seguintes resultados foram obtidos:

a) Caso com tensão máxima E/10: Apenas o caso com velocidade de carregamento de 1 m/s foi capaz de iniciar/propagar a trinca. Ou seja, neste caso houve uma onda de pressão causada pelo acréscimo na velocidade de aplicação do carregamento, que aumentou o nível tensão permitindo a abertura da trinca.

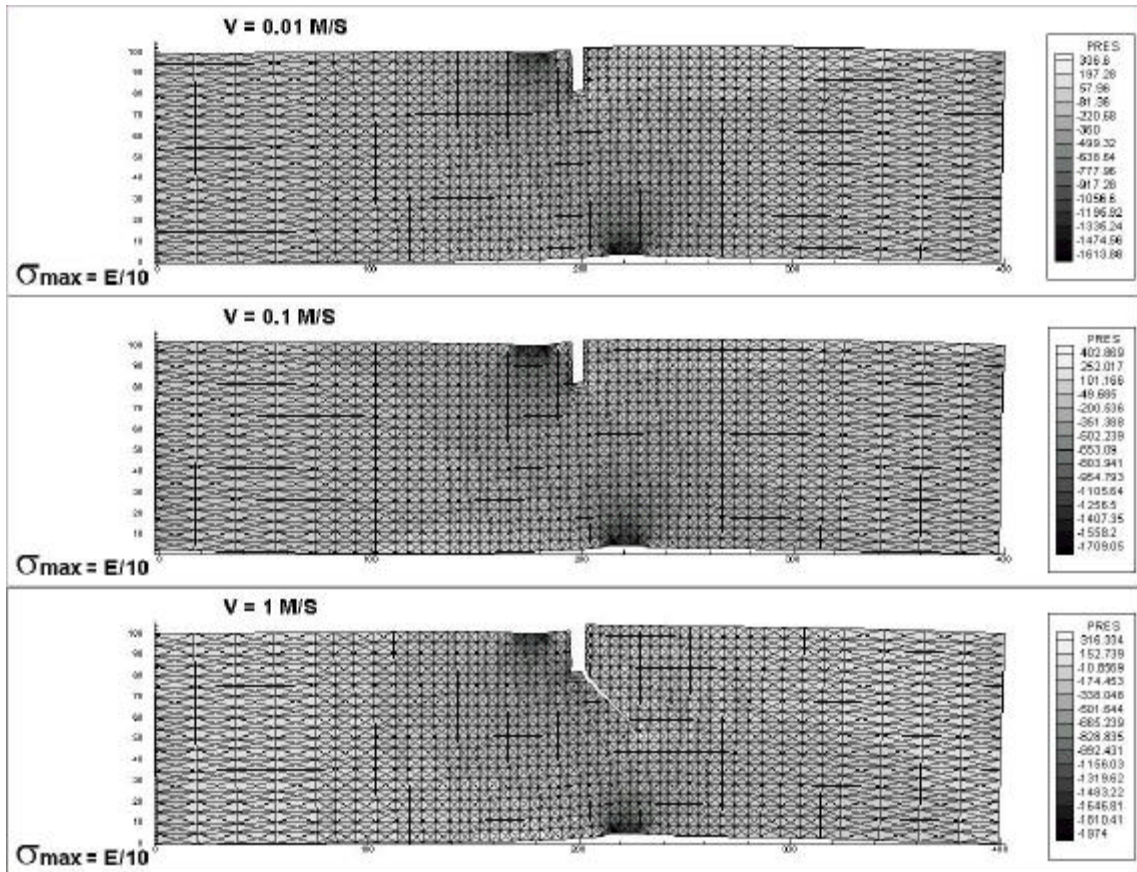


Figura 52: Morfologia da trinca para diferentes velocidades de aplicação das cargas e tensão máxima na interface de E/10.

A figura abaixo fornece a morfologia da trinca para o caso com velocidade de 0.01 m/s, com o dobro do deslocamento prescrito (10 mm). Neste caso a trinca abriu e se propagou com uma trajetória linear quase até o final, quando então sofre um desvio de trajetória.

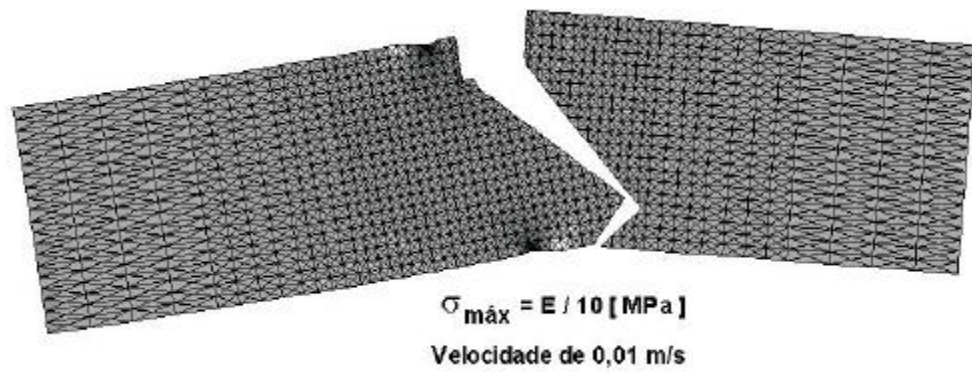


Figura 53: Morfologia final, após a ruptura total

Pode-se observar que a morfologia vista na figura 53 é consistente com um modo de propagação ao longo dos planos principais de tensões. Estes encontram-se a  $45^\circ$  no início da propagação (próximo do entalhe), mudando a trajetória apenas próximo ao final da propagação quando começa a haver predominância dos esforços normais. Tal trajetória é consistente com resultados experimentais. No entanto, questiona-se se não haveria um favorecimento desta morfologia pela malha empregada. Tal fenômeno já tinha sido observado em Tijssens et al (2000). Uma forma de verificar tal fato, foi empregar uma malha bem mais refinada, nas mesmas condições, conforme abaixo:

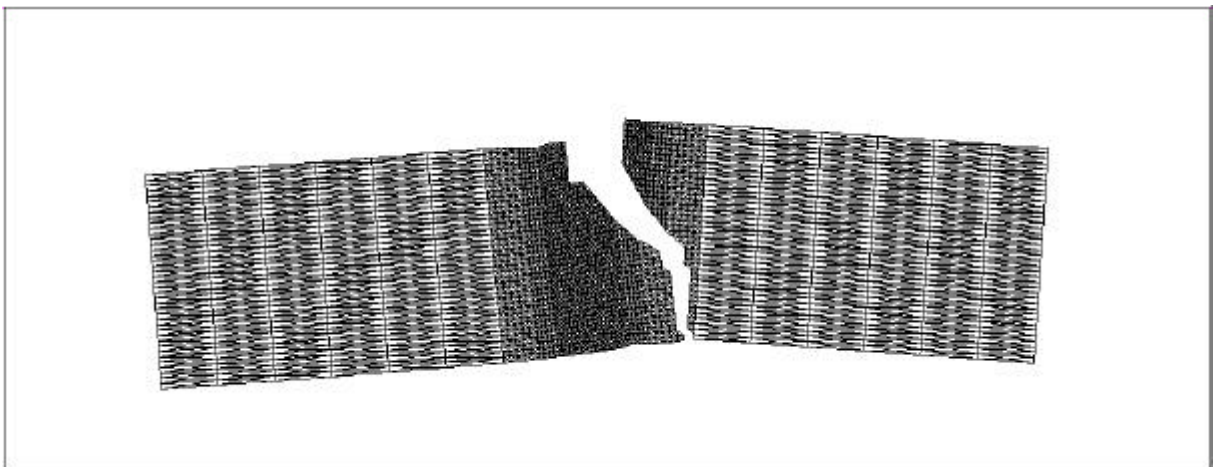


Figura 54: Morfologia final após a ruptura, malha refinada (7872 elementos e 23616 nós)

Este caso com a malha refinada confirma a propagação a  $45^\circ$  no início da propagação e mostra que, no final, a propagação se dá num plano vertical, indicando que realmente a propagação se dá nos planos principais. Estes resultados sugerem, ao menos para os parâmetros empregados, uma propagação predominante em modo *I*.

Interessante observar que as velocidades no início da propagação são bem maiores que as velocidades finais, no entanto não comparáveis às velocidades de propagação das ondas do meio para justificar maiores efeitos dinâmicos (foram calculadas apenas as velocidades médias de propagação da trinca, que atinge no início - para uma velocidade de carregamento de 1 m/s - uma velocidade de 37 m/s).

b) Caso com tensão máxima  $E/20$ : A propagação deu-se de forma similar para os casos com 0.1 e 0.01 m/s, ou seja, com uma trajetória linear até quase o final da ruptura.

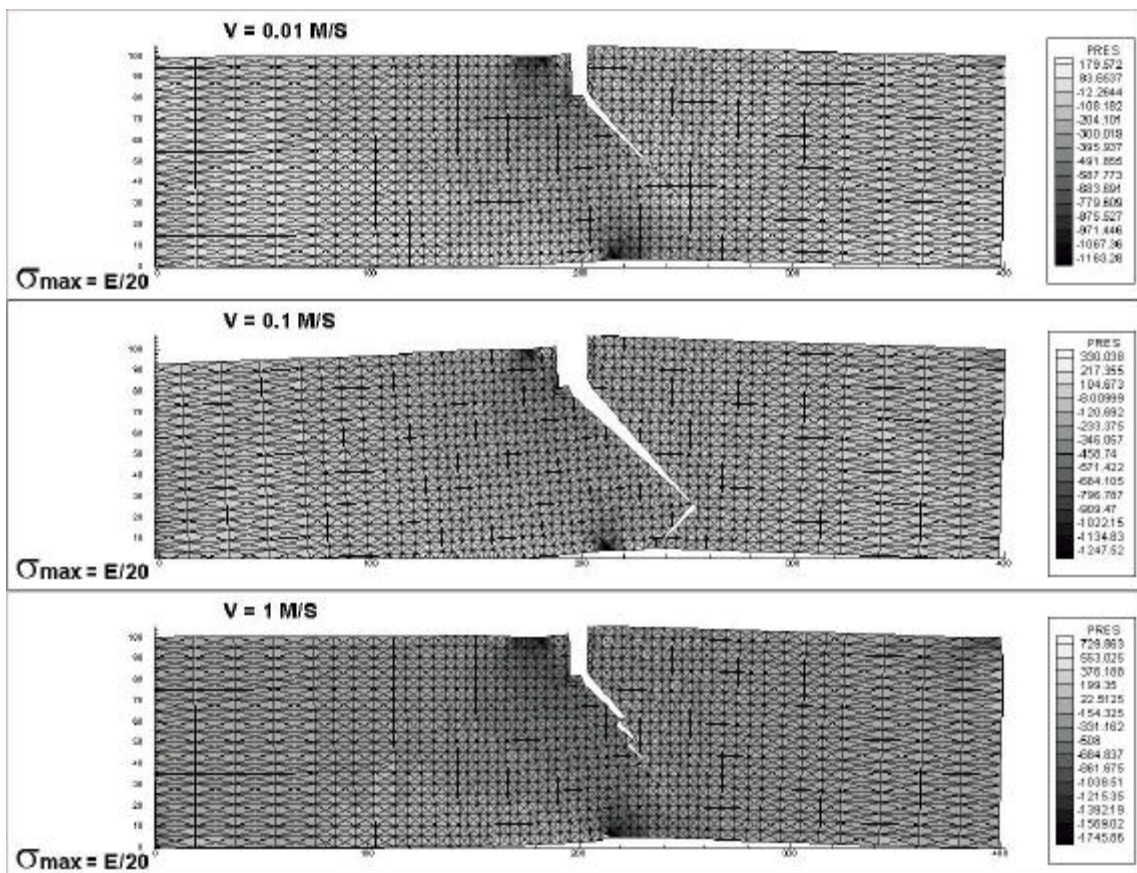


Figura 55: Morfologia da trinca para diferentes velocidades de aplicação das cargas e tensão máxima na interface de  $E/20$ .

Se observa na figura 55 que o processo de ruptura não é completo para a velocidade de 0.01 m/s. Neste caso (assim como no caso com tensão máxima  $E/10$ ), a ruptura completa ocorre apenas para deslocamentos maiores. Para o caso da velocidade de 1 m/s, observa-se uma importante mudança na morfologia, ou seja há uma ramificação precoce da trinca. Este fenômeno foi estudado por Xu & Needleman, onde se faz simulações de propagação de trincas em *PMMA*. Assim a ramificação constitui a maneira que a trinca encontra para dissipar

a energia entregue em excesso na sua ponta. Tal efeito dinâmico é provavelmente causado pelas ondas de pressão do impacto causado pelo carregamento, e não propriamente pela velocidade de propagação das trincas (observe que diminuindo a tensão máxima na ponta da trinca, há um aumento na velocidade de propagação das ondas).

c) Caso com tensão máxima  $E/25$ : Os efeitos relatados no caso com  $E/20$  ficam mais evidentes e são mostrados na figura abaixo. A curvatura apresentada pelo caso com alta velocidade de impacto é portanto ainda mais acentuada. As velocidades das trincas são também mais elevadas que nos casos anteriores.

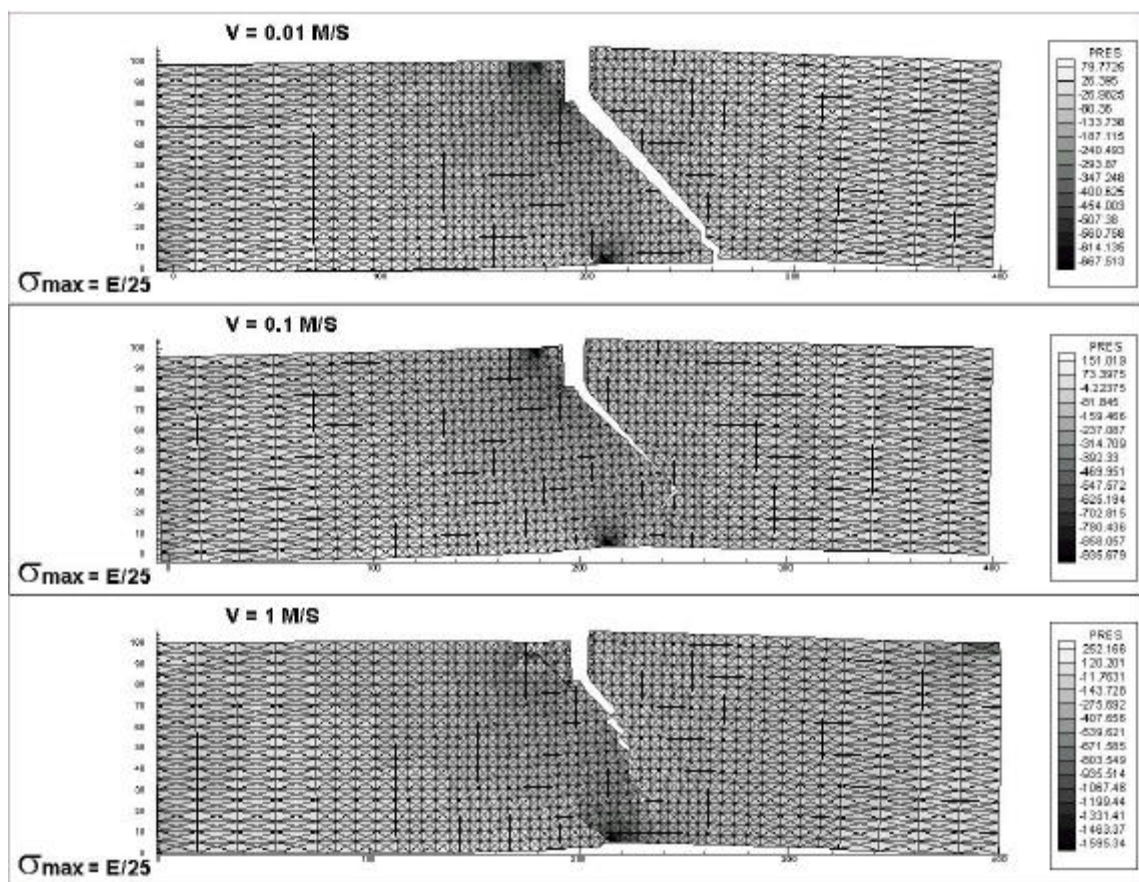


Figura 56: Morfologia da trinca para diferentes velocidades de aplicação das cargas e tensão máxima na interface de  $E/25$ .

Pode-se concluir destas figuras que, a medida que se eliminam eventuais efeitos dinâmicos, a propagação se dá unicamente como modo I, ou seja, ao longo dos planos de máxima tensão normal. Aparentemente, a tendência à propagação em modo misto ou II só vai ocorrer quando efeitos dinâmicos estão presentes.



#### 4.4.2.3. Efeito da energia de fratura dos modos I e II

A idéia, neste parágrafo, é a de verificar a influência que existe entre a energia do modo *I* e a do modo *II* de ruptura, já que este é um caso em que ambos os modos intervêm.

Inicialmente aumentou-se significativamente a energia do modo *I*. Partiu-se de um mesmo valor para as tensões máximas na ponta da trinca ( $E/10$ ) e cargas aplicadas numa velocidade de  $0.01 \text{ m/s}$ . O aumento na energia de fratura foi obtido aumentando-se a abertura máxima de interface. Este aumento chegou a 10 vezes o originalmente empregado (o que correspondeu a um aumento de 900% na energia do modo *I*). Observou-se que houve um aumento nas forças reativas, em torno de 10 %. Também não houve mudanças significativas na morfologia da trinca em relação ao apresentado nas figuras 53 e 54.

Para o estudo do efeito tangencial ou do modo *II*, manteve-se a mesma lei constitutiva de separação normal e foram adotados dois diferentes níveis de energia do modo *II*.

Novamente o aumento na energia de fratura foi obtido aumentando a abertura máxima da interface. Houve também pouca mudança nos valores das forças reativas. No entanto, uma mudança na morfologia de propagação das trincas foi observado, como mostra a figura 57. Ou seja, menor a energia do modo *II*, maior a tendência de mudança na trajetória em direção a uma propagação em modo misto ou modo *II*. Porém, esta tendência só é observada quando há fortes efeitos dinâmicos na análise (na figura 57 temos uma velocidade de  $1 \text{ m/s}$  de aplicação da carga e tensão máxima na ponta da trinca de  $E/20$ ).

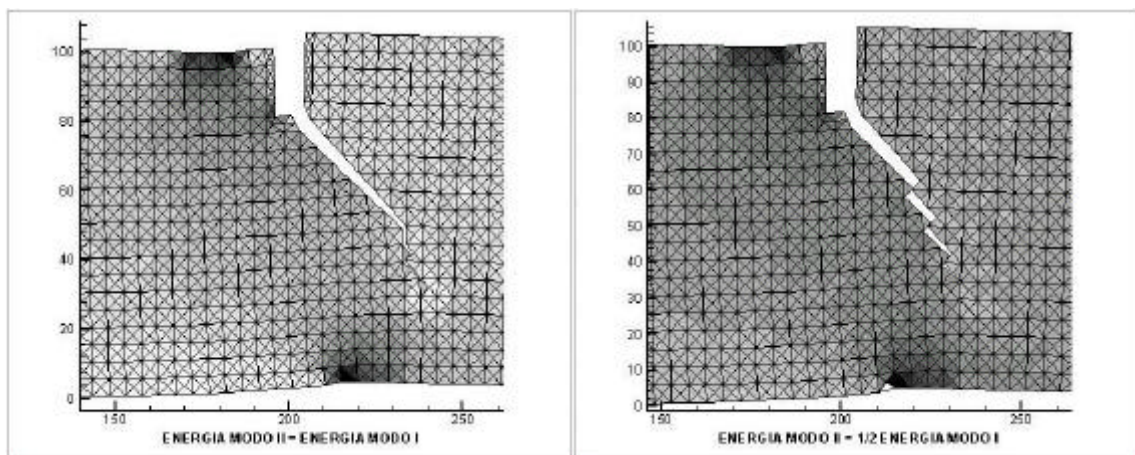


Figura 57: Morfologia da trinca para leis tangenciais adotadas

Interessante observar que o efeito da energia de modo II é praticamente inexistente frente a casos quase-estáticos. Por exemplo, para um caso com velocidade de 0.01 m/s de aplicação da carga e tensão máxima na ponta da trinca de  $E/10$ , diminuindo a energia de modo II quatro vezes em relação à energia do modo I, não causou praticamente nenhum efeito sobre a morfologia da trinca (reduções adicionais levaram a um comprometimento da coesão da viga).

#### **4.4.2.4.Efeito do comprimento característico $d$**

Ao atingirem a tensão máxima, as interfaces possuem uma abertura correspondente. Até atingir essa abertura, a interface não entra em processo de amolecimento. A partir desta, as tensões começam a diminuir, à medida que os deslocamentos são crescentes. Pretende-se, neste item, estudar a influência desta abertura. Assim sendo, fixou-se todos os demais valores, como velocidade de carga de 0.01 m/s, tensões na ponta da trinca num valor de  $E/10$ , as condições de contorno e as propriedades elásticas do material, variando, então, as aberturas normal e tangencial. Estes valores de abertura de pico foram tomados dez vezes menores e três vezes maiores que o valor originalmente empregado. Em princípio o comprimento característico deveria estar relacionado a algum parâmetro físico do material (tamanho de grão, de agregado, distância entre inclusões, etc). No entanto nenhuma relação física é proposta neste trabalho, mas é um tema de grande interesse prático pois o tamanho característico pode apresentar considerável influência nos resultados. Com os valores definidos, temos os seguintes resultados:

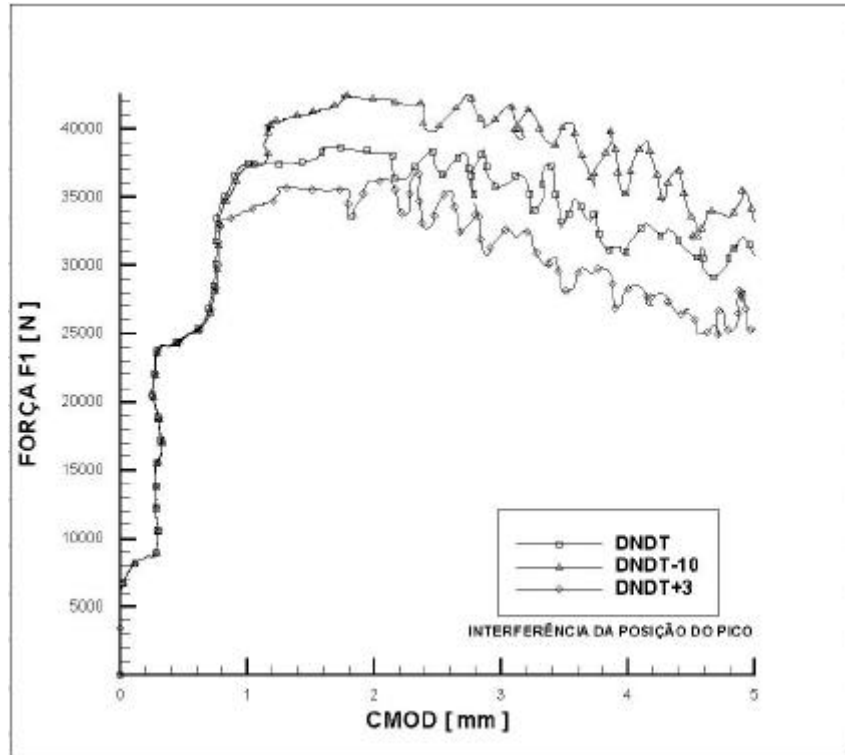
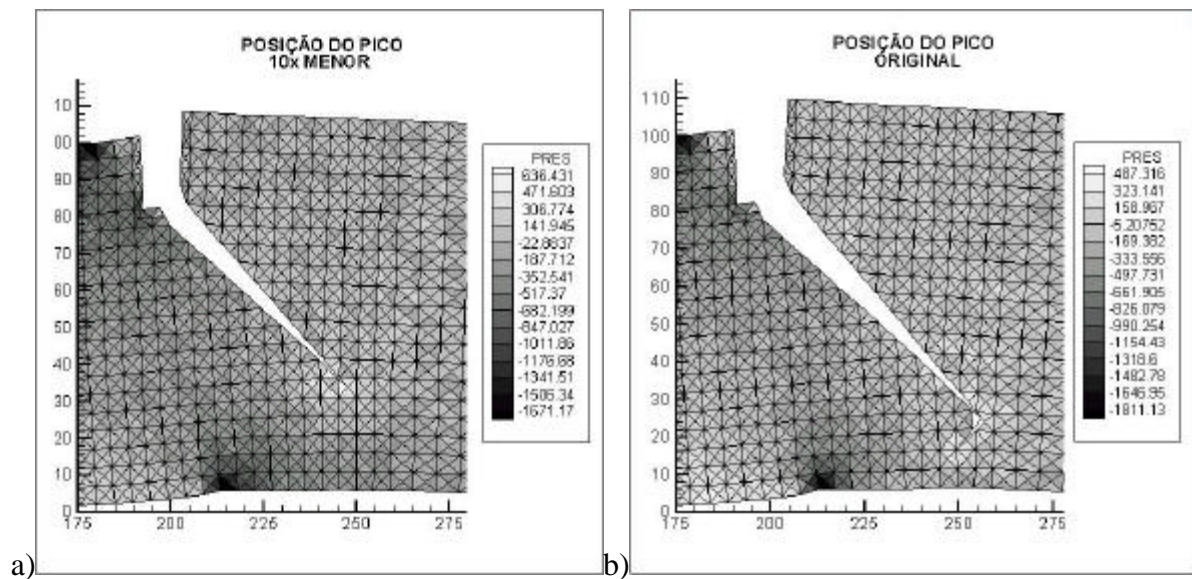


Figura 58: Curvas  $F1 \times CMOD$  para diferentes posições do “pico”

Como pode ser visto nos gráficos  $F1 \times CMOD$  da figura 58, as forças reativas têm maior magnitude quando o comprimento característico tende a ser menor. Isso fica melhor caracterizado quando observa-se nas deformadas (figura 59), valores de tensões bem maiores para comprimentos característicos menores.



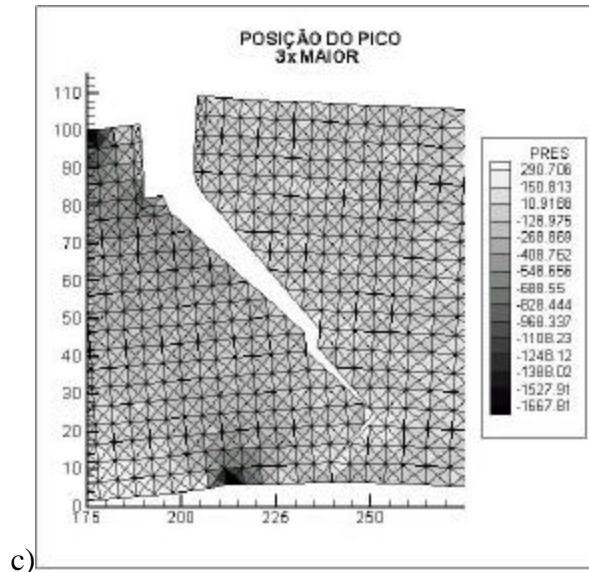


Figura 59: Morfologia da trinca – variação dos comprimentos  $d_n$  e  $d_t$  para o deslocamento prescrito de 5 mm

Isto acontece pois, quando se observa a morfologia da trinca, percebe-se que o caso com comprimento característico menor tem uma propagação da trinca bem menor. Assim a peça com um comprimento característico pequeno acumula maiores tensões pela aparente maior dificuldade de propagação da trinca. Este é um resultado bem conhecido em relação à "prováveis" comprimentos característicos, tais como tamanho de grão (em metais) ou tamanho de agregado no caso do concreto. Ou seja, sabe-se que materiais com comprimentos característicos pequenos apresentam maior resistência à fratura. No entanto os valores de tamanho característico aqui adotados, parecem ser muito pequenos para relacioná-los a qualquer dimensão característica da microestrutura do concreto.

#### 4.4.2.5. Efeito das condições de contorno

De acordo com as análises de Schlangen, forças horizontais são introduzidas na estrutura em estudo, se a liberdade de movimento dos apoios é restringida. Três diferentes tipos de condições de contorno são usados na investigação numérica. Abaixo, temos as seguintes configurações:

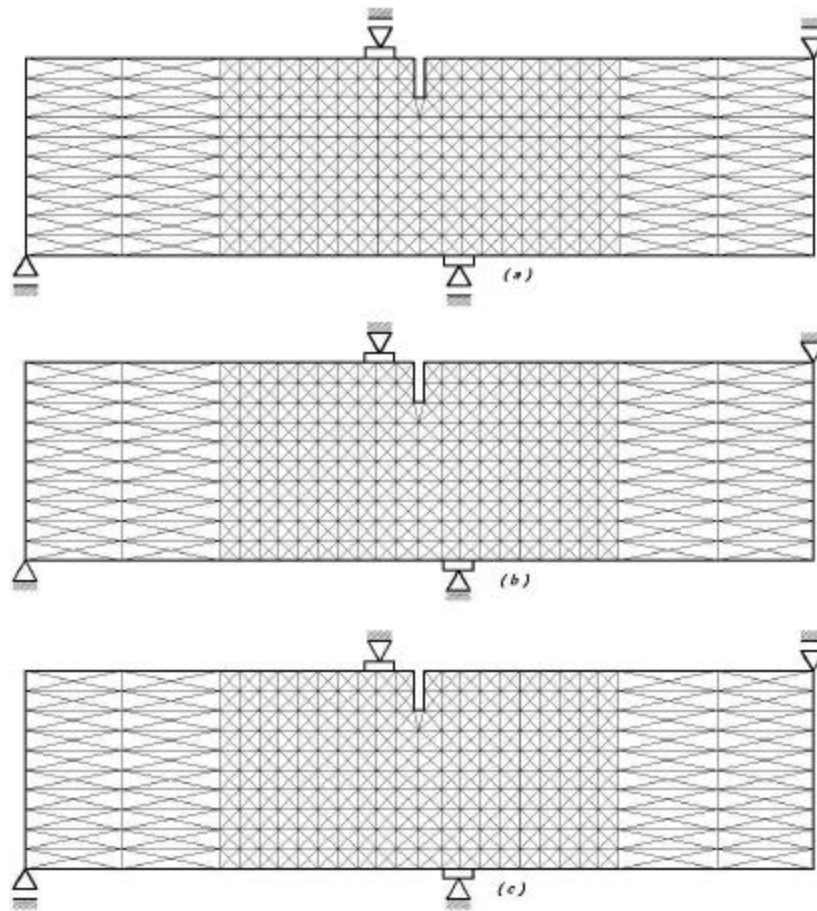


Figura 60: Variadas condições de contorno do comportamento da viga

Nas condições acima, temos: (a) *Simulação I*: os pontos de carregamento podem se mover horizontalmente e rotacionar em todas as direções, (b) *Simulação II*: o deslocamento horizontal dos pontos de aplicação das cargas é restringido e (c) *Simulação III*: somente os pontos centrais de carregamento são fixados na direção horizontal.

Uma diferença considerável entre as simulações é notada no que se refere ao carregamento máximo encontrado. Se os apoios centrais são fixos (simulações *II e III*) o carregamento máximo é maior quando comparado à condição de rotação e deslocamento horizontal livres (simulação *I*). O que acontece é uma adição de forças entre os elementos, ou seja, se os apoios são fixos, forças horizontais são originadas devido a essa restrição, tornando-se ativas na estrutura. A mesma observação está também incluída nas conclusões do Schlangen.

Essas interferências do efeito de confinamento na região central, elevando as forças na peça, acarreta uma modificação no estado de tensões, ocasionando uma mudança na direção e trajetória da trinca (ver figura 61).

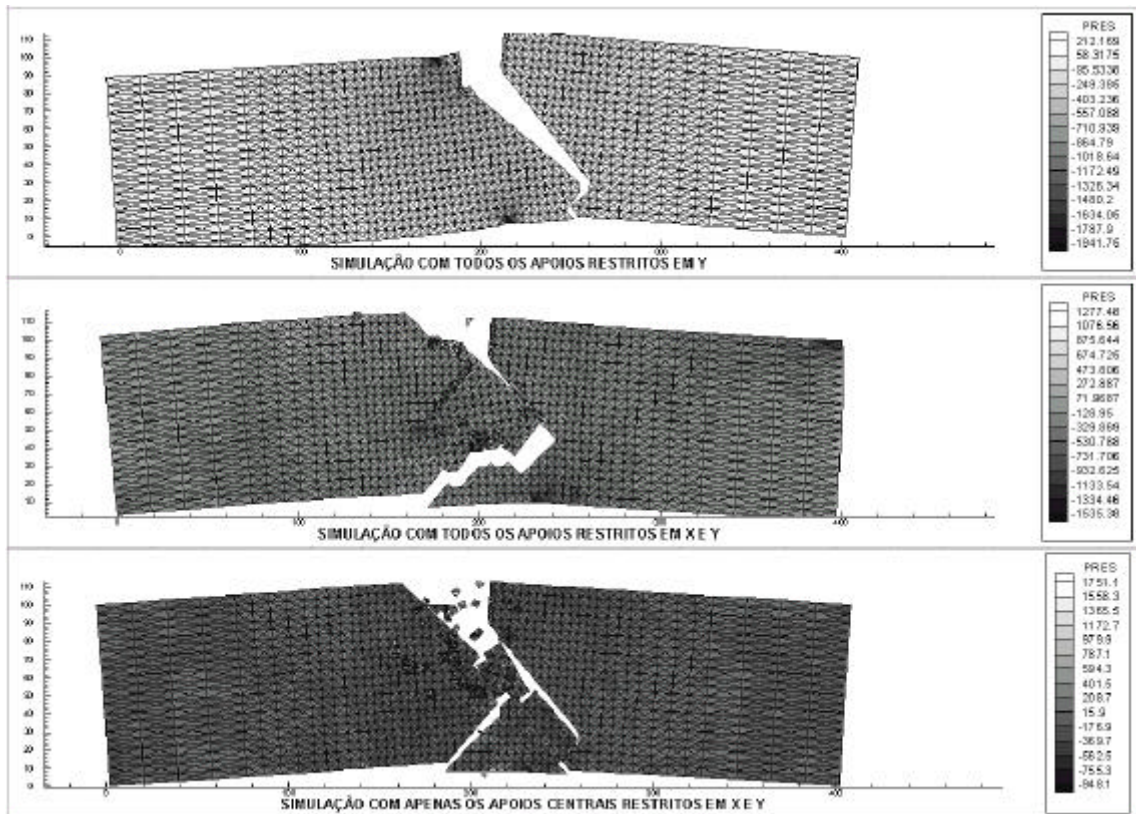
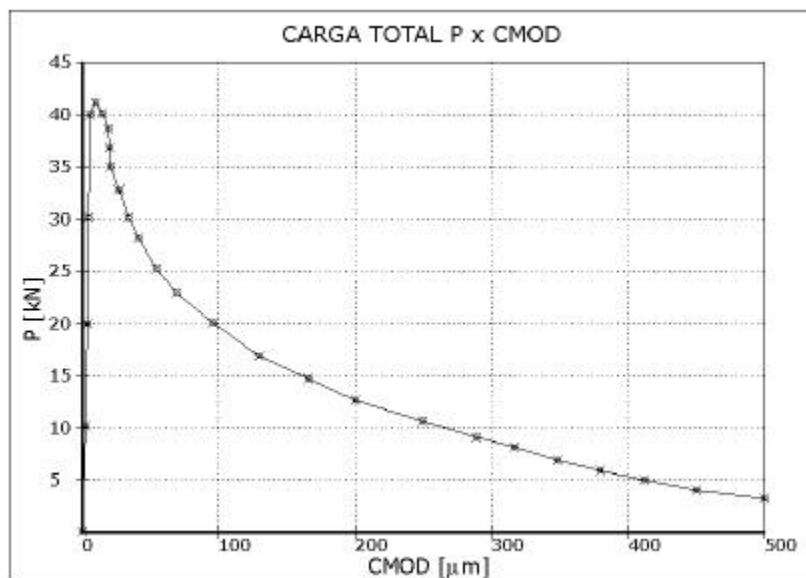


Figura 61: Configuração da peça para as três condições de contorno adotadas

#### 4.4.2.6. Comparação de resultados

Resultados experimentais obtidos por SCHLANGEN (1993) são fornecidos abaixo. As curvas de carga  $P$  com relação às aberturas do entalhe, conforme o gráfico da figura 62, a seguir.



Fonte: Schlangen (1993), p. 45.

Figura 62: Carga  $P$  x  $CMOD$  - Resultado experimental do Schlangen (1993)

Tais valores de pico da carga  $P$  (ver figura 47), que correspondem a uma carga reativa central ( $FI$ ) em torno de  $37\text{ KN}$  (lembrar que existe a relação  $FI=10 \times P / II$ ), são coerentes com os valores obtidos aqui numericamente para a malha grossa com uma tensão máxima de  $E/10$  junto com comprimentos característicos  $d_n = 9,81 \times 10^{-6}\text{ mm}$  e  $d_t = 7,0632 \times 10^{-6}\text{ mm}$  ou para a malha refinada com uma tensão máxima  $E/8$  com os mesmos comprimentos característicos ou ainda com uma tensão máxima  $E/10$  e comprimentos característicos menores.

Já a figura abaixo, mostra os resultados de morfologia da trinca para o mesmo exemplo simulado por outros pesquisadores, usando diferentes metodologias. São eles Arrea e Ingraffea (1982), De Borst (1986), Rots (1992), Alfaiate et al (1997), Schlangen (1993), Cervenka (1994) e van der Giessen (2000).

Pode-se observar que a tendência generalizada em todos estes trabalhos é apresentar uma propagação da trinca principal similar a esperada teoricamente e como a obtida neste trabalho, com a exceção do trabalho de de Borst, que apresenta uma morfologia que contraria os resultados esperados.

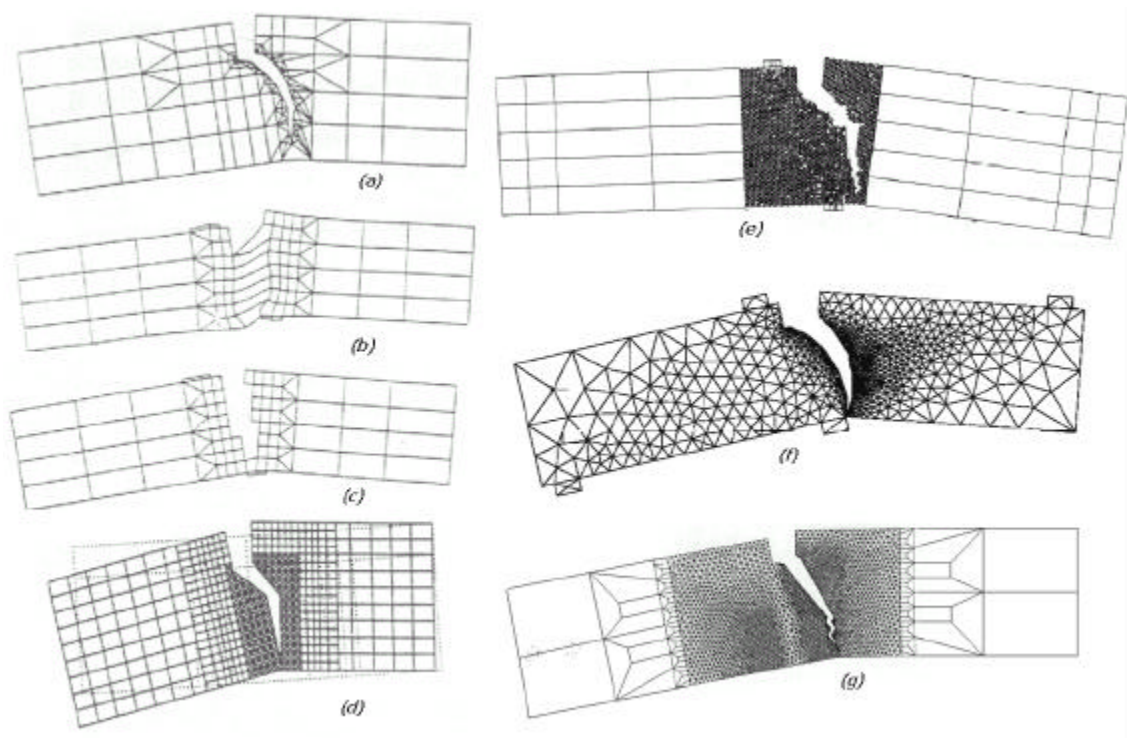


Figura 63: Morfologia da trinca para o exemplo estudado. Estudos anteriores: (a) Arrea & Ingraffea (1982); (b) De Borst (1986); (c) Rots (1992); (d) Alfaiate et al (1997); (e) Schlangen (1993); (f) Cervenka (1994); (g) van der Giessen et al (2000).

#### 4.4.2.7. Discussão de resultados

Neste exemplo foi analisada a simulação numérica de uma viga submetida a corte. O objetivo foi investigar como parâmetros empregados pelo método das interfaces coesivas e como efeitos dinâmicos modificam a morfologia de propagação das trincas.

Pode-se concluir que o modo predominante de ruptura se dá em *Modo I* (propagação ao longo dos planos de máxima tensão normal) e independe da energia do *Modo II*, desde que não hajam efeitos dinâmicos. Cargas aplicadas de forma rápida (impacto) associado ainda a baixas tensões máximas na ponta da trinca, fazem com que efeitos dinâmicos sejam introduzidos. Neste caso, há uma tendência da propagação ocorrer em modo misto e a energia do *Modo II* passa a ter importância na forma da propagação.

Observou-se ainda, que comprimentos característicos pequenos inibem a propagação das trincas, para uma energia de fratura fixa, de acordo com o esperado. O efeito de comprimento característico foi significativo também na força necessária para produzir a ruptura (menor o comprimento, maior a força). Apesar de ter desempenhado um papel chave nos resultados deste exemplo em particular, não foi possível estabelecer uma relação do comprimento característico com alguma dimensão física característica do material.



## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1. CONCLUSÃO

O presente trabalho faz uso da abordagem da Mecânica da Fratura em materiais frágeis considerando-os homogêneos. A abordagem utiliza elementos de interfaces coesivas entre as faces dos elementos para a modelagem das trincas, através das quais são inseridas leis constitutivas de coesão. A fundamentação teórica, baseada em modelos anteriormente desenvolvidos, assim como a implementação computacional e as aplicações, é exposta no desenvolvimento desta pesquisa.

De uma maneira geral, o modelo forneceu resultados qualitativamente similares aos resultados analíticos e, alguns deles, aos experimentais, encontrados na literatura, embora alguns dos resultados não sejam plenamente satisfatórios no que tange às aberturas das microfissuras. A forma da curva utilizada para representar a relação entre tensão e abertura de interface não apresentou grandes diferenças.

A análise numérica foi verificada através de exemplos, onde diversos carregamentos aplicados e condições de suporte distintos foram explorados. Os resultados oriundos das análises mostram a forma com que as trincas se originam e, conseqüentemente, se propagam ao longo do contínuo, bem como a variação acarretada na rigidez estrutural. Além disto, um estudo foi feito em cima da influência de parâmetros de análise que eventualmente venham interferir no processo de fraturamento, procurando investigar suas variações na simulação numérica, correlacionando-os com efeitos físicos. Por exemplo, podem ser citados a velocidade de impacto, em que as cargas são aplicadas, a massa específica do material empregado, a energia de fratura adotada, o comprimento mínimo dos elementos que compõem a malha, tensões máximas nas interfaces, comprimento característico, efeito tangencial no critério de ruptura, dentre outros aspectos estudados neste trabalho.

Dentro dos parâmetros estudados neste trabalho, ficou clara a necessidade de se estudar a influência da velocidade com que as cargas são aplicadas na peça, combinada às tensões máximas nas pontas de trincas. Percebeu-se, em exemplos onde a velocidade de impacto foi estudada, que variando-a, a trinca apresentou morfologias distintas. Quando a carga era aplicada com maior velocidade, as ramificações se originaram ao longo da propagação das trincas mais cedo, comparada a aplicações de cargas com velocidades amenas. Esse fenômeno foi observado em casos experimentais encontrados na literatura (Xu e Needleman, 1994).

Além disso, ao combinar velocidades de impacto diferentes para tensões distintas na ponta da trinca, notou-se uma variação nas forças reativas, devido ao impacto na estrutura. Houve uma perturbação na velocidade de propagação das ondas de pressão no comportamento das interfaces, pois, com o impacto uma tensão adicional é inserida nas interfaces que, por sua vez, transmitem este impacto para os elementos, dando origem ao acréscimo nas forças internas. Para os casos em que as tensões nas interfaces se mantiveram pequenas, esse fenômeno foi mais visível.

Quanto às tensões máximas nas interfaces, assumiu-se que as mesmas obedecem valores usados por autores (Xu e Needleman, 1994), valendo  $\mathbf{s}_{\max} \cong \frac{E}{100} a \frac{E}{10}$  para materiais frágeis, tornando o modelo proposto capaz de fornecer resultados satisfatórios.

Ainda com respeito as tensões nas interfaces, peças com tensões máximas altas necessitaram de uma carga maior para atingir o colapso total, exigindo um consumo de uma energia de fratura maior para atingir o “pico” das tensões, dando início ao processo de ruptura.

A energia de fratura, também foi analisada neste estudo paramétrico. Os resultados apontaram uma maior atenção para a o Modo *I*. As interfaces atingiram o colapso quando a energia de separação normal foi consumida. Quanto maior a energia de fratura (área sob a curva  $\mathbf{s} \times \mathbf{D}$ ), maior a capacidade de absorver carga até a ruptura. Em termos de Modo *II* de energia de fratura, o efeito tangencial não interferiu no comportamento das trincas, pois o Modo *I* de ruptura se tornou predominante. Única exceção ocorreu quando os efeitos dinâmicos são mais pronunciados, sendo que a energia do Modo *II* influenciou na morfologia da bifurcação ( ver exemplo 4.4). Quando as interfaces alcançaram a ruptura, apenas a energia de separação normal foi consumida, diferente da energia tangencial. Mesmo assim, a coesão tangencial

entre as faces dos elementos precisou ser preservada, não podendo, desta forma, negligenciar a energia de separação tangencial.

A variação da rigidez inicial das interfaces, por meio do comprimento característico, foi um ponto de investigação no emprego e validação de leis constitutivas bi-lineares propostas neste trabalho. O uso de retas possibilitou a modificação da posição do “pico”, circunstância não permitida quando se emprega leis constitutivas do tipo exponencial, por exemplo, cujos parâmetros são amarrados às curvas. Sendo assim, da investigação, foi possível aferir a importância que esse parâmetro exerce nas bifurcações e distribuição das forças reativas internas aos elementos. Para casos em que utilizou-se modelos quasi-rígidos (comprimento característico  $\lll dn$  e  $dt$ ), percebeu-se uma tendência a diminuir as ramificações macroscópicas da trinca principal. Caso contrário, as bifurcações tendem a surgir mais facilmente quando o corpo não apresenta uma rigidez inicial não mais acentuada. Observou-se no exemplo 4.4 que a diminuição do comprimento característico diminui o comprimento de propagação da trinca e aumenta a força para produzir o colapso, tornando o material mais resistente a propagação.

O refinamento da malha foi um fator importante (Falk, 2001). Esse critério é ressaltado na aplicação do item 4.2. Quando os elementos foram devidamente dimensionados a fim de refinar suficientemente a malha para um determinado nível de tensões nas interfaces, os resultados se tornaram bastante satisfatórios, aproximando-se de valores provenientes de análises apresentadas na literatura. Isso implica que a escala dos elementos e da malha devem obedecer um certo rigor, para que não haja divergência entre os resultados da análise e os valores esperados. As propriedades elásticas do material, assim como as propriedades de fratura, indicam esse fator de escala, que deve ser aplicado aos elementos finitos. Desta maneira, foi possível perceber essa influência.

Por fim, uma breve simulação foi realizada com o intuito de avaliar a interferência da massa específica do material no processo numérico e sua importância na análise dos resultados. O aumento fictício na massa específica do material é válido para o melhoramento da performance numérica, porém, requer uma utilização cautelosa, pois a variação deste parâmetro mostrou alterar bruscamente os resultados.

Com base nos resultados aqui estudados, considerando a necessidade de melhor representar o seu comportamento, sugere-se o emprego das propriedades para a simulação do concreto:

- Tensão máxima na interface  $s_{m\acute{a}x} = E/10$ , ou seja, aproximadamente igual a  $3 \times 10^3 \text{ MPa}$ ;
- Comprimento característico na direção normal como sendo  $d_n \cong 1,0 \times 10^{-5} \text{ mm}$ , considerando que a energia de fratura do concreto com sendo  $G_f @ 100 \text{ N/m}$ ;
- Da mesma forma, o comprimento característico na direção tangencial, esse apresentou valor  $d_t \cong 7,2 \times 10^{-6} \text{ mm}$ .

Cabe salientar que os resultados obtidos são restritos aos exemplos estudados, podendo ser usados como parâmetro de comparação e referência para projetos.

## 5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir da abordagem apresentada nesta dissertação abre-se a possibilidade de algumas investigações que podem ser realizadas de modo a contribuir para um melhor entendimento do mecanismo do fenômeno de ruptura em materiais frágeis e homogêneos.

Como indicações para um prosseguimento deste trabalho, sugere-se:

- Estabelecer relações entre  $s_{max}$ ,  $G_f$  e  $d_n$  com propriedades físicas e morfológicas do material (por exemplo, tamanho do agregado usado no concreto);
- Investigação de formas alternativas de curvas, de modo a controlar a flexibilidade excessiva encontrada pelo modelo, em alguns casos;
- Implementação de um critério de ruptura para tensões de compressão permitindo o estudo mais adequado de materiais diversos, como o concreto, por exemplo;
- Investigação do emprego das interfaces coesivas para Modo *III* de abertura (caso *3D* ou antiplano);
- Avaliar o comportamento dos elementos que se desprendem após a simulação e analisar a colisão das superfícies fraturadas;
- Implementação da heterogeneidade no modelo, diretamente, através da modelagem da microestrutura do material, ou indiretamente, usando distribuições estatísticas das propriedades do material, ou ainda, pela variação da resistência dos elementos, permitindo a melhor representação do comportamento do concreto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALFAIATE, J.; PIRES, E. B.; MARTINS, J. A. C. MARTINS, **A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete**, Computers & Structures, v.63, n1, p17-26, 1997.
- ARATA, J. J. M., NEEDLEMAN, A. The effect of plasticity on dynamic crack growth across an interface. **International Journal of Fracture**, v.94, p.383-399, 1998.
- ARREA, M.; INGRAFFEA, A. R., **Mixed mode crack propagation in mortar and concrete**, report n.81-13 , Departament of Structural Engineering, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University.
- BARENBLATT, G.I. The mathematical theory of equilibrium of crack in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55-129, 1962.
- BAZANT, Z. P., OH B. H., Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures, RILEM**, 16(93), 155-177 (1983).
- BELYSTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMANN, B.E. A finite element with embedded localization zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. North-Holland, v. 70, n. 1, p.59-89, set. 1988.
- BOLSON, G.; CORIGLIANO, A. Finite elements with embedded displacement discontinuity: a generalized variable formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, New York: John Wiley & Sons, v. 49, p. 1227-1266, dec. 2000.
- BRANCO, C. M., FERNANDES, A. A., CASTRO, P. M. S. T., **Fadiga de Estruturas soldadas**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1994, 34p. (Relatório Interno – Apostila 7).
- BROEK, O. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. 4<sup>th</sup> rev. ed., Martinus Nijhoff, Dordrech, 1986.
- CEB – Comité Euro-Internacional du Béton – CEB-FIP Code Model 1990, **Bulletin d'Information** n. 213/214, Lausanne: CEB, mar 1993.

CERVENKA, J., **Discrete crack modeling in concrete structures**, Tese (Doutorado) – Department of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, 1994.

D'AVILA, V.M.R. **Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2003.

D'AVILA, V.M.R.; QUININO, U.C.M.; BITTENCOURT, E.; ITURRIOZ, I. Análise da fissuração de um tirante de concreto simples – comparação de diferentes metodologias. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. **Anais...**, **CD-ROM**, São Paulo: EPUSP, 2003.

D'AVILA, V.M.R.; QUININO, U.C.M.; ITURRIOZ, I.; BITTENCOURT, E. Estudo sobre a objetividade da malha na análise numérica de tirantes de concreto simples fraturados – comparação de diferentes metodologias. In: CILAMCE 2003.

De BORST, R., **Constitutive models for continua and numerical techniques for analysis of granular materials**, Phd-thesis, Delft University of Technology, 1986.

DUGDALE, D.S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, p. 100-108, 1960.

DVORKIN, E.N.; ASSANELLI, A.P. 2D finite-elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. North-Holland, v. 90, n. 1-3, p. 829-844, set. 1991.

DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M.; GIOIA, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, New York: John Wiley & Sons, v. 30, p.541-564,1990.

EDWALDS, H. L., WANHILL, R. J. H., **Fracture Mechanics**, 3.ed., Delft, Delftse Uitgevers Maatschappij, 1986, 304p.

EINSFELD, R.A.; MARTHA, L.F.; BITTENCOURT, T.N. Simulação numérica do efeito em escala em estruturas de concreto através do controle da abertura das fissuras. In: Computational Methods in Engineering'99 – CILAMCE 1999. **CD-ROM**, Buenos Aires, 1999.

FALK, M. **The physics of fracture**. Verificado em 15 de dezembro de 2003. Online. Disponível na internet. Endereço: <http://esag.harvard.edu/falk/research/notes.html>

FALK, M. L.; NEEDLEMAN, A.; RICE, J. R., A critical evaluation of cohesive zone models of dynamic fracture, **Journal de Physique IV France**, 11, p.43-50, 2001.

FEDRIGO, F. **Aplicação de Interfaces Coesivas na Mecânica da Fratura Via Método dos Elementos Finitos**. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2001.

FEENSTRA, P. H., BORST, R. de, **Aspects of Robust Computational Modeling for Plain and Reinforced Concrete**, HERON, Delft, v. 38, n. 4, 1993.

FERNEY, B. D., DeVARY, M. R.; HSIA, K. J.; NEEDLEMAN, A., Oscillatory crack growth in glass, **Scripta Materialia**, v.41, n.3, p.275-281, 1999.

GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, A221, Delft, p.163-197, 1921.

HAYASHI, N. **Sobre um Modelo de Discretização de Estruturas Tridimensionais Aplicado a Mecânica Não-Linear**. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1982.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, p. 773-782, 1976.

INGLIS, C. Stress in a plate ducto the presence of cracks and shrp corners. **Proc. Int. Naval Architets**, nº60.1913.

IRWIN, G.R. Fracture Dynamics. In: **Fracture of Metals**. Cleveland: ASM, 1948.

ITURRIOZ, I. **Aplicação do Método dos Elementos Discretos ao Estudo de Estruturas Laminares de Concreto Armado**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1995.

JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model: I. Basic formulation; II. Combination with smeared cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, New York: John Wiley & Sons, v. 50, p. 1269-1305, 2001.

KANNINEN, M. F., POPELAR, C.H. **Advanced Fracture Mechanics**. New York: Oxford University, 1985. 573p.

KLISINSKI, M.; RUNESSON, K.; STURE, S. Finite-Element With Inner Softening Band. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v. 117, n. 3, p. 575-587, mar. 1991.

LIEBOWITZ, H., **Fracture: an Advanced Treatise**. New York: Academic, v.2, 1968, 759p.



LOTFI, H.R.; SHING, P.B. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, New York: John Wiley & Sons, v. 38, p. 1307-1325, 1995.

NEEDLEMAN. A. , A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p.525-531, 1987.

NEEDLEMAN. A. , An analysis of decohesion along an imperfect interface. **International Journal of Fracture**, v.42, p.21-40, 1990a.

NEEDLEMAN. A. , An analysis of tensile decohesion along an interface. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.38, p.289-324, 1990b.

NEEDLEMAN, A.; ROSAKIS, A.J., The effect of bond strength and loading rate on the conditions governing the attainment of intersonic crack growth along interfaces. **Journal of the mechanics and Physics of Solids and Structures**, v.47, p.2411-2449, 1999.

NGO, D.; SCORDELIS, A.C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v. 64, n. 3, p. 152-163, 1967.

NILSON, A.H. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by Finite Element Method. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v. 65, n. 9, p. 757-766, 1968.

OLLER, S. **Fractura mecánica: Un enfoque global**. Barcelona: CIMNE, 2001.

ORTIZ, M.; LEROY, Y. NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. North-Holland, v. 61, p.189-214,1987.

OTTOSEN, N.S. A Failure Criterion for Concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v. 103, n. EM4, p. 527-535, aug. 1977.

OTTOSEN, N.S. Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v. 105, n. EM4, p. 127-142, feb. 1979.

OWEN, D. R. J., FAWKES, A. J., **Engineering Fracture Mechanics: numerical methods and applications**. Swansea: Pineridge, 1983. 305p.

RASHID, Y.R. **Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels**. Nuclear Engineering and Design, v. 7, p. 334-344, 1968.

ROLFE, S.T.; BARSON, J.M. **Fracture and Fatigue Control in Structures: applications of fracture mechanics**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, p. 7-12, 1977.

ROSE, J. H., FERRANTE, J., SMITH, J. R., Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces, **Physics Review Letters**, v.47, p.675-678, 1981.

ROTS, J. **Strain softening analysis of concrete fracture specimens** – Fracture toughness and fracture energy of concrete. Amsterdam: F. H. Wittan, 1986.

ROTS, J.; BLAAUWENDRAD, J. Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-directional or Rotating? **HERON**, Delft, v. 34, n. 1, 1989.

ROTS, J.C. **Computational modeling of concrete fracture**. Delft, 1988, 132p. Doctor Thesis – Civil Engineering Department. Delft University of Technology, 1988.

ROTS, J. C. **Removal of finite elements in strain-softening analysis of tensile fracture**, in Proceedings FraMCoS I (ed. Z.P. Bazant), Elsevier Publishers, London/New York, p330-338.

SAOUMA, V.E. **Lecture Notes in: Fracture Mechanics**. Department of Civil Environmental and Architectural Engineering, Boulder: University of Colorado, 1997.

SCHLANGEN, E. **Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete**. HERON, Delft, v.38,n. 2, 1993.

SHAH, S.P.; SWARTZ, S.E.; OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of fracture mechanics to concrete, rock, and other quasi-brittle materials**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

SIEGMUND, T.; NEEDLEMAN, A., A numerical study of dynamic crack growth in elastic-viscoplastic solids, **International Journal of Solids and Structures**, v.34, n.7, p.769-787, 1997.

SOPRANO, G.A.; CERNUSCHI, D.J. Aplicación del modelo de la fisura cohesiva a la determinación de la resistencia a flexión de vigas de hormigón simple. In: XXIX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. **CD-ROM...** Punta del Este, Uruguay, nov. 2000.

TANO, R.; KLISINSKI, M. Crack modeling of concrete, rock and soil with inner softening bands. **Engineering Geology**, v. 49, n. 3-4, p. 271-276, apr. 1998.

TIJSSENS, M. G. A.; SLUYS, B. L. J.; van der GIESSEN, E., Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces, **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v.19, p 761-779, 2000.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J.N., **Teoria da Elasticidade**, 3ª Edição, Ed Guanabara, 545p, 1980.

TVERGAARD, V.; HUTCHINSON, J. W., The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.41, n.6, p.1119-1135, 1992.

WEIBULL, W. A statistical distribution function of wide applicability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 18, p. 293-297, 1951.

WEIBULL, W. A statistical theory of the strength of materials. **Royal Swedish Academy of Engineering Society Proceedings**, v. 151, p. 1-45, 1939.

XU, X. P., NEEDLEMAN, A., A numerical simulation of fast crack growth in brittle solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.42, n.9, p.1397-1434, 1994.

## **APÊNDICE A – Algoritmo do gerador das malhas**

Nesta dissertação, as malhas têm suas aplicações voltadas, principalmente, a obtenção de representações mais compactas do comportamento de ruptura das peças e essenciais para simulação dos processos físicos nele envolvidos.

A simulação do comportamento de fratura dos exemplos analisados nesta pesquisa, dá-se através da aplicação de elementos finitos, conforme citado anteriormente. Para este fim, houve a necessidade de gerar malhas de elementos finitos que melhor representasse discretamente o domínio geométrico em formas menores e mais simples, no caso triângulos em duas dimensões.

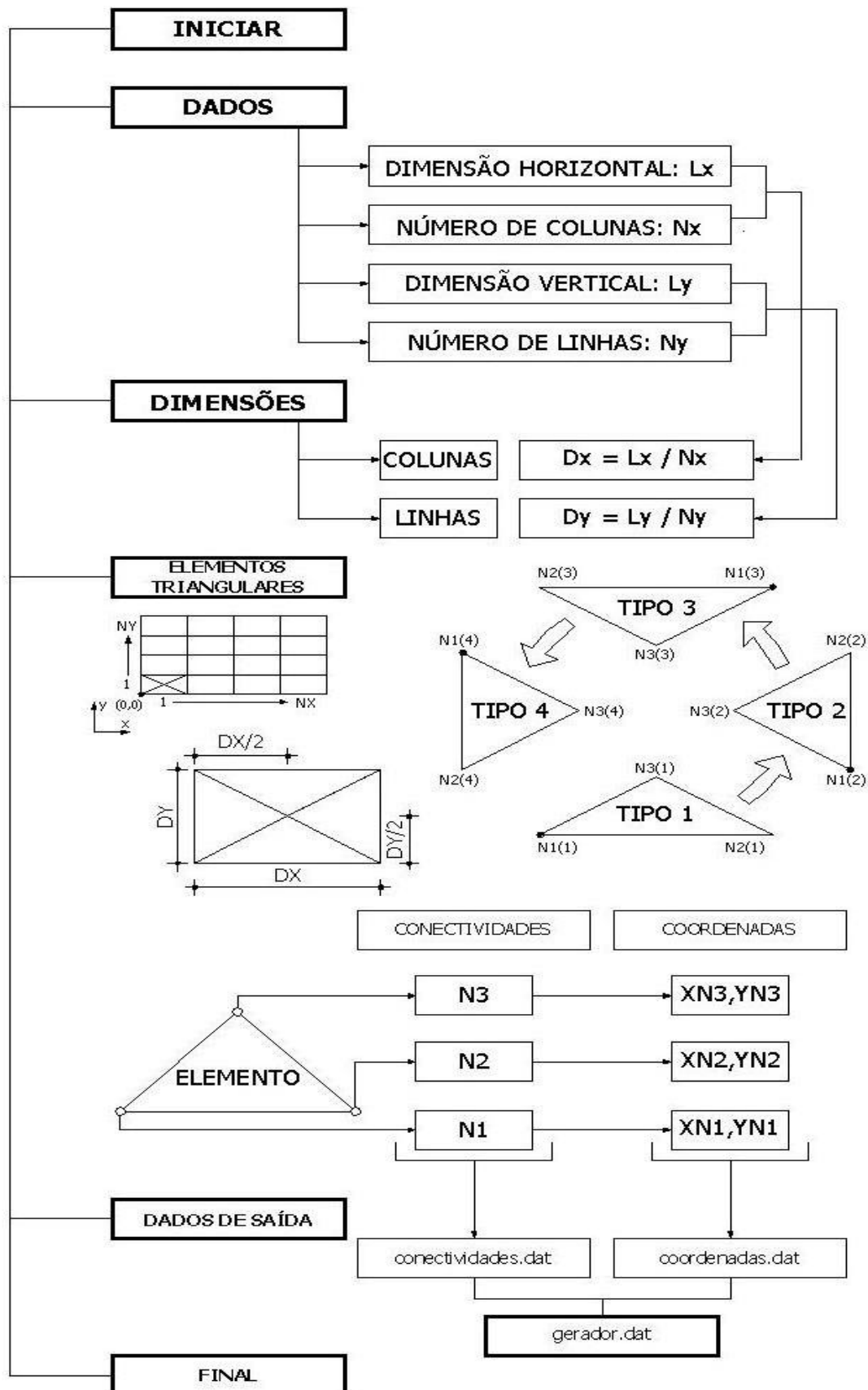
Sendo assim, neste apêndice está incluído o esquema sucinto do algoritmo desenvolvido para gerar essas malhas com elementos triangulares devidamente dispostos, empregadas nos diversos exemplos.

Este algoritmo está desenvolvido em Linguagem Fortran, o qual lista os elementos finitos com suas respectivas conectividades, inclusive suas coordenadas em *2D*.

Inicialmente, são necessárias as dimensões planas da estrutura que se deseja estudar estimando o número de linhas e colunas que se pretende dividi-la. Para cada combinação de linha e coluna, formando um “pseudo-elemento retangular”. Desta forma, 04 elementos triangulares são criados, cuja ordem de numeração pode ser observada no esquema abaixo.

Conseqüentemente, as conectividades dos elementos são definidas em relação ao ponto de origem ( canto inferior esquerdo ), obedecendo uma seqüência de contagem, também apresentada no esquema.

Uma vez encontrados os valores dos elementos, conectividades, bem como suas coordenadas, estes são listados em arquivos de saída, que combinados imprimem *gerador.dat*. Esse arquivo é visualizado no Tecplot.



Esquema – Algoritmo MALHA

```

PROGRAM MALHA
IMPLICIT NONE
C*****
C   PROGRAMA DE GERAÇÃO DE MALHA PARA PEÇAS RETANGULARES EM 2D
C*****
C*****
C   VARIÁVEIS
C   LX-COMPRIIMENTO DA PEÇA
C   LY-ALTURA DA PEÇA
C   NX-NÚMERO DE UNIDADES EM X
C   NY-NÚMERO DE UNIDADES EM Y
C   NE-NÚMERO DE ELEMENTOS
C   NME-NÚMERO MÁXIMO DE ELEMENTOS
C   N1-1ª CONECTIVIDADE
C   N2-2ª CONECTIVIDADE
C   N3-3ª CONECTIVIDADE
C   XN1,YN1-COORDENADAS DE N1
C   XN2,YN2-COORDENADAS DE N2
C   XN3,YN3-COORDENADAS DE N3
C   I, J, K-CONTADORES
C   I1, I2, I3-CONTADORES AUXILIARES
C
C   PROGRAMAÇÃO: UZIEL CAVALCANTI DE MEDEIROS QUININO
C   EM: PORTO ALEGRE, 21 DE MARÇO DE 2003
C*****
INTEGER, PARAMETER :: NME=10000000
REAL :: LX, LY, DX, DY, C1, C2, C3
INTEGER, DIMENSION(:) :: N1(NME), N2(NME), N3(NME)
REAL, DIMENSION(:) :: XN1(NME), YN1(NME)
, XN2(NME), YN2(NME)
, XN3(NME), YN3(NME)
INTEGER :: I, J, K, l, I1, I2, I3, NX, NY, NE, Z, TIPO
C*****
C   DADOS DE ENTRADA NECESSÁRIOS:
C   LX, LY, NX E NY
C   EM FUNÇÃO DESTES SERÃO ENCONTRADOS:
C   DX=LX/NX
C   DY=LY/NY
C   NME=4*NX*NY
C*****
C   GERANDO ARQUIVOS DE SAÍDA DE DADOS:
C   1) CONECTIVIDADES
C   2) COORDENADAS
C*****
OPEN(UNIT=13, FILE='conectividades.dat', STATUS='UNKNOWN')
WRITE(13,*) 'ELEMENTO', N1, N2, N3
OPEN(UNIT=14, FILE='coordenadas.dat', STATUS='UNKNOWN')
WRITE(14,*) 'NÓ', X, Y

```





```

C*****
C   PARA ENCONTRAR AS COORDENADAS DAS CONCTIVIDADES ANTERIORES
C   VERIFICA-SE AS CONDIÇÕES DOS ELEMENTOS QUANTO A SUA POSIÇÃO
C   NO INTERIOR DO BLOCO
C*****
      IF (K==1)THEN
          XN1(I3)=(J-1)*DX
          YN1(I3)=(I-1)*DY
          XN2(I3)=XN1(I3)+DX
          YN2(I3)=YN1(I3)
          XN3(I3)=XN1(I3)+DX/2
          YN3(I3)=YN1(I3)+DY/2

          ELSE IF (K==2)THEN
              XN1(I3)=XN2(I3-1)
              YN1(I3)=YN2(I3-1)
              XN2(I3)=XN1(I3)
              YN2(I3)=YN1(I3)+DY
              XN3(I3)=XN3(I3-1)
              YN3(I3)=YN3(I3-1)

          ELSE IF (K==3)THEN
              XN1(I3)=XN2(I3-1)
              YN1(I3)=YN2(I3-1)
              XN2(I3)=XN1(I3)-DX
              YN2(I3)=YN1(I3)
              XN3(I3)=XN3(I3-1)
              YN3(I3)=YN3(I3-1)

          ELSE
              XN1(I3)=XN2(I3-1)
              YN1(I3)=YN2(I3-1)
              XN2(I3)=XN1(I3)
              YN2(I3)=YN1(I3)-DY
              XN3(I3)=XN3(I3-1)
              YN3(I3)=YN3(I3-1)

      ENDIF
C*****
C   ESCREVER DADOS DE SAÍDA
C   1)ELEMENTO - CONECTIVIDADES
C   2)CONECTIVIDADE - X Y
C*****
      C1=0
      C2=0
      C3=0
      Z=0
      TIPO=1
      WRITE(13,140)I3, TIPO, N1(I3), N2(I3), N3(I3), N3(I3)
      #
      WRITE(14,100)N1(I3), XN1(I3), YN1(I3), C1, C2, C3
      WRITE(14,100)N2(I3), XN2(I3), YN2(I3), C1, C2, C3
      WRITE(14,100)N3(I3), XN3(I3), YN3(I3), C1, C2, C3
C-----
      write(15,110)XN1(I3), YN1(I3)
      write(15,110)XN2(I3), YN2(I3)
      write(15,110)XN3(I3), YN3(I3)
C-----
C*****
      WRITE(*,*) 'ELEMENTO=', I3
      ENDDO
      ENDDO
C-----
      do l=1, I3
      write(15,120)N1(l), N2(l), N3(l)
      enddo
C-----
      close(15)
      CLOSE(14)
      CLOSE(13)
      WRITE(*,*) 'PASSAGEM SEM PROBLEMAS'
      100 FORMAT(I5, 5(2x, E13.8))
      110 format(2(f10.5))
      120 format(3(5x, I5))
      130 format(a, i5, a, i5, a)
      140 format(16(I5))
      90 format(a)
      END PROGRAM

```