

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

ANNA CAROLINA GRANJA MEIRA

Aplicação de Modelos de Tempo-Contínuo para Escolha de  
Portfólio Ótimo

Porto Alegre

2011

**ANNA CAROLINA GRANJA MEIRA**

**Aplicação de Modelos de Tempo-Contínuo para Escolha de Portfólio Ótimo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo

**Porto Alegre**

**2011**

M514a Meira, Anna Carolina Granja  
Aplicação de modelos de tempo-contínuo para escolha de portfólio ótimo / Anna Carolina Granja Meira – Porto Alegre, 2011.  
102 f. : il.

Orientador: Fabrício Tourrucô.  
Ênfase em Economia Aplicada.

Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2011.

1. Mercado financeiro : Modelo econométrico . 2. Econometria . I. Tourrucô, Fabrício. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 336.761

**ANNA CAROLINA GRANJA MEIRA**

**UMA ANÁLISE FUNCIONAL DA DINÂMICA DE  
DENSIDADES DE RETORNOS FINANCEIROS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

**Aprovada em Porto Alegre, 28 de Novembro de 2011**

**Banca Examinadora**

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz

CFM/UFSC

Prof. Dr. Nelson Seixas Santos

PPGE/UFRGS

Prof. Dr. Julio R. Claeysen

IM/UFRGS

Prof. Dr. Fabrício Tourrucô - Orientador

PPGE/UFRGS

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família pelo incentivo e apoio em todos os momentos. Gostaria de agradecer, em especial, à minha família gaúcha, pela recepção, carinho e ajuda na minha fase de adaptação à cidade e ao clima. Aos primos, pela amizade.

À minha turma de mestrado, Raphael, Eduardo, Márcio, Bruno, Rodrigo e Eduardo, pelo companheirismo. Em especial, agradeço ao Rodrigo e ao Eduardo, pelos almoços divertidos e por me motivarem, mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos professores, pela transmissão de conhecimento. Em especial, ao meu orientador, Fabrício Tourrucôo, pela paciência e dedicação.

À secretaria, pelo apoio e instrução em todas as fases.

Aos amigos, que torceram por mim de longe. Ao Augusto, pelo carinho e companheirismo.

Às pessoas que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao CNPQ pela bolsa de estudos.

## Resumo

A presente dissertação expõe o ambiente em que o Problema de Merton é construído e, baseando-se na bibliografia apresentada, constrói exemplos em *softwares* cujas especificidades podem colaborar na clareza da resolução. O *software Matlab* engloba as soluções numéricas, enquanto o *software Maple* é responsável pela solução de equações diferenciais ordinárias e parciais de forma simbólica. Apresenta-se modificações do Problema de Merton original como exercícios para melhor esclarecer os diferentes parâmetros abordados. Na seção final é apresentada a solução de viscosidade, uma alternativa quando a função valor não apresenta características desejáveis para a análise apresentada.

**Palavras-chave:** Portfólio Ótimo. Problema de Merton. Equação Hamilton-Jacobi-Bellman.

## Abstract

This dissertation explicit the environment which Merton's problem is built, according to the presented bibliography, exemples are built in softwares whose specificity might help to clarify the solution. The Matlab software embraces numeric solutions, while Maple software is appropriate to solve ordinary and parcial differential equations in symbolic form. Some modifications are presented to Merton's Problem as exercise to improve understanding on the variations adopted. On final section, viscosity solutions are presented as an alternative solution for when the value function does not possess the desirables properties that allow the analysis on focus.

**Keywords:** Optimal Portfolio. Merton Problem. Hamilton-Jacobi-Bellman Equation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Problema de Merton - Ambientação .....</b>	<b>20</b>
3.1	Controle Estocástico .....	20
3.2	A abordagem de Bellman .....	22
3.3	A Abordagem clássica de verificação no Problema de Merton .....	25
3.4	A equação de utilidade diferencial estocástica .....	28
3.4.1	<i>Movimento Browniano</i> .....	33
3.4.2	<i>Normalização da Equação Diferencial Estocástica - Conceitos Necessários</i> .....	35
3.4.3	<i>Propriedades da Utilidade Diferencial Estocástica</i> .....	36
3.4.4	<i>Caracterização da Equação de Bellman no contexto de função utilidade recursiva</i> .....	38
3.5	O Caso Especial da Utilidade Aditiva .....	40
3.5.1	Aplicação de Controle Estocástico em tempo contínuo .....	41
3.6	Solução para o problema de Merton .....	44
<b>4</b>	<b>Implementação .....</b>	<b>50</b>
4.1	Solução HJB .....	50
4.1.1	<i>Implementando o Problema de Merton</i> .....	51
4.2	Implementação não-ótima .....	54
4.3	Simulação de Monte Carlo .....	54
4.4	O Problema de Controle Estocástico .....	55
4.5	Equação Monge Ampère .....	58
4.6	Estratégia de <i>Hedging</i> de Portfólio Ótimo implementada .....	60
4.7	Extensões do Problema de Merton clássico .....	63

4.7.1	<i>Evolução do Saldo do Portfólio Ótimo</i> .....	63
4.7.2	<i>Dinâmica de Mercado tempo-dependente</i> .....	65
4.7.3	<i>Controle Estocástico com Restrições Afins no Portfólio</i> .....	67
<b>5</b>	<b>Variações do Problema de Merton</b> .....	<b>71</b>
5.1	Regra de Portfólio sob incerteza da Taxa de Apreciação .....	71
5.2	Restrições afins combinadas com Restrições sobre a volatilidade da riqueza .....	73
5.3	Otimização de Portfólio com Restrições de Desigualdade .....	77
<b>6</b>	<b>Solução de Viscosidade</b> .....	<b>79</b>
6.1	Propriedades .....	80
6.2	Soluções fechadas .....	85
<b>7</b>	<b>Conclusão</b> .....	<b>88</b>
	<b>Referências</b> .....	<b>90</b>
	<b>Apêndice A - Códigos de Programação no Matlab</b> .....	<b>93</b>

# 1 Introdução

No estudo do comportamento econômico financeiro, o tempo e a incerteza são componentes centrais. A interação entre tais elementos desperta a curiosidade incentivando estudos que esperam desmistificá-la. Tal interação é de fato tão complexa como as ferramentas usadas para análise, o que levava a certa lacuna entre a prática e a teoria. As teorias que tiveram efeito direto no mercado englobam: eficiência de mercado, seleção de portfólio, análise de risco, teoria de apreçamento *contingent-claim*, intermediação financeira, investimento bancário, finanças corporativas e orçamento de capital. Com a inovação financeira nos mercados de capitais, cada vez mais a teoria financeira é aplicada, o que destaca a pesquisa em finanças atualmente.

Nas últimas duas décadas, o modelo de tempo-contínuo mostrou-se uma ferramenta de análise versátil em finanças, apesar de sua complexidade, sendo capaz de gerar soluções teóricas mais precisas e hipóteses empíricas mais elegantes. Os modelos de média-variância e suas variações são práticos e simples, mas tiveram pouca aplicabilidade na pesquisa econômica, pois seus critérios não respeitam os axiomas de escolha de von Neumann-Morgenstern a menos que se faça restrições quanto ao formato das distribuições de probabilidade (distribuição gaussiana) ou sobre as preferências do investidor (preferências quadráticas). A primeira restrição considerada resulta em violação da confiabilidade limitada para detentores de ativos financeiros, enquanto a segunda parece inconsistente como comportamento observado de forma geral.

A análise de média e variância desenvolvida por Markovitz, em 1952, colocou em evidência a noção de *trade-off* entre média e variância no contexto de escolha entre diferentes ativos ou portfólios. Tal modelo, tornou-se popular e estabelecido nas últimas três décadas, porém, o artigo Merton ( de 1971)<sup>1</sup> identificou a falha do modelo utilizado, que reside em não considerar as mudanças estocásticas no conjunto de oportunidades de investimento. Para investidores de curtíssimo prazo, tal deficiência não parece ser

---

<sup>1</sup> Encontrado nos capítulos 4 e 5 da bibliografia (MERTON, 1992).

relevante, enquanto que, para longo horizonte de tempo, é relevante para unidades econômicas; ainda que, para investidores de longo prazo com aversão ao risco relativa (utilidade logarítmica), será ótimo adotar o comportamento de investidores otimizadores de média e variância. De forma geral, investidores de longo prazo seguem regras de portfólio modificadas que incluem *hedging* de termos intertemporais combinadas com componentes de média-variância. De forma benéfica, em contextos de mudanças de ambiente estocásticas, os termos de *hedging* fazem a conexão intertemporal do *hedge* contra as variações de média-variância.

Métodos numéricos para computar os termos de *hedging* e portfólios ótimos a eles associados não correspondem a fronteira da pesquisa. A literatura atual tem procurado por soluções de forma fechada em contextos paramétricos simples, com número de ativos e variáveis estado limitados com dinâmica simples, de acordo com (MERTON,1992).

O modelo de tempo contínuo com preço de ativos distribuídos de forma log normal se adequa quando é considerada sucessão de revisões de portfólio em intervalos de tempo (especificados) ao invés de se considerar apenas um período de tempo; dessa forma, regras de portfólio ótimo são geradas e possuem a mesma forma que a dos modelos de média-variância e precificação de ativos, o que ocorre devido às preferências de von Neumann-Morgenstern; sendo assim, pode-se considerar o modelo de tempo contínuo como um nível intermediário entre o modelo estático e o modelo dinâmico, reafirmando o modelo de mercado completo de Arrow-Debreu e os teoremas de Modigliani-Miller. A resolução dos problemas em tempo contínuo envolve aplicação de probabilidade e teoria de otimização, encontrando aplicabilidade em precificação e instrumentos de *hedge*.

A partir da solução ótima desenvolvida por Merton (nos capítulos 4 e 5 de (MERTON,1992)), baseada em Princípio de Programação Dinâmica foram desenvolvidos inúmeros modelos para solucionar numericamente as Equações Diferenciais Parciais (EDP).

A presente dissertação tem como finalidade mostrar a aplicabilidade do Modelo de Merton que possui algumas variedades, sendo duas possíveis formas de solucionar o problema: solução explícitas das equações diferenciais parciais do tipo Monge-Ampère ou pela maximização direta dos ganhos esperados com respeito às regras de portfólio. A pri-

meira forma se baseia na resolução de equações diferenciais parciais e a última é baseada em teoria de probabilidade, facilitada através de equações diferenciais ordinárias. Vale ressaltar que um método serve para verificação do outro e/ou ainda dar continuidade à solução quando o outro não puder ser aplicado.

O foco do trabalho, a partir da bibliografia apresentada, é aplicar um dos métodos que resolve o Problema de Merton, nos moldes acima descritos, de tal forma que transponha as resoluções e algumas modificações apresentadas por (STOJANOVIC, 2002), que as ambientou no *software Mathematica*, em sua versão 4.1, para uma versão mais moderna do software (versão 7), em que se encontra pequenas atualizações e ainda para *softwares* mais familiares como *Matlab* e *Maple*.

Devido à especialização de cada *software*, o problema é resolvido através de passos que dependendo de sua necessidade são resolvidos no *software* mais adequado. Tomando por base a evolução do problema apresentado por (STOJANOVIC, 2002), escolhe-se o *software* que será usado. Por especialização, sabe-se que o *Maple* é uma ferramenta algébrica eficaz, permitindo manipular as equações diferenciais estocásticas (EDE) e capaz de derivar esquemas numéricos para estas. Também é possível usar simulações numéricas para as EDE no ambiente do *Maple*, porém é de praxe e mais eficiente o uso do *Matlab* para simulação e gráficos.

O Problema de Merton é ambientado em horizonte finito de tempo, considerando tempo-contínuo, na qual a renda do indivíduo é originada a partir do retorno de ativos cuja taxa de crescimento é estocástica. Em seu livro, (MERTON,1992), desenvolve as equações de otimalidade para um problema com múltiplos ativos quando os retornos são gerados por um processo de Wiener ou movimento Browniano<sup>2</sup>. (MERTON,1992) desenvolve especialmente para dois ativos, com o aversão ao risco relativa contante (*constant relative risk aversion* -CRRA). Sob certeza, a equação orçamentária é uma equação diferencial e quando há incerteza, introduzida por uma variável aleatória, a restrição orçamentária se

---

<sup>2</sup> Lembrando as características principais de um processo de Wiener (W):  $W_0 = 0$   $W_t$  é contínuo  $W_t - W_s$  e  $W_u - W_t$  são independentes quando  $0 \leq s < t < u$  A distribuição estatística de  $W_{t+s} - W_s$  é independente de  $s$  - e tem distribuição idêntica a  $W_t$   $W_t$  é um processo com distribuição Gaussiano com média e variância, respectivamente,  $EW_t = 0$   $EW_t W_s = \min(t, s)$  Com probabilidade 1,  $W_t$  visto como função de  $t$  é contínuo. Para  $0 \leq s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  é independente de  $W_s$  e satisfaz:  $W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s}$

torna uma equação diferencial estocástica.

(MERTON,1992) define seu problema em um ambiente de programação dinâmica, para que o princípio de otimalidade de Bellman seja aplicado. O problema envolverá o Princípio de Programação Dinâmica com controle estocástico que será melhor formalizado no capítulo 3 do trabalho, baseando-se em (PHAM, 2005). A equação de Hamilton Jacobi Bellman (HJB) resulta da aplicação do Princípio de Programação Dinâmica (PPD) e é esperado que a função valor satisfaça tal equação. Porém, em alguns casos, devido às imperfeições de mercado como os custos de transação e algumas restrições, a função valor pode não satisfazer a HJB de maneira clássica, não possuindo todas as derivadas contínuas. Então torna-se necessário a aplicação de outro método de solução como as soluções de viscosidade, que permite funções contínuas como soluções de HJB não completamente lineares de primeira e segunda ordem. Tal ponto será abordado no final, como adição, na tentativa de apresentar uma possibilidade de solução para o problema quando as condições ideais não são satisfeitas.

No capítulo 2, uma revisão de literatura é apresentada para ressaltar a importância do método e seu desenvolvimento, assim como, apresentar algumas das inúmeras variações do Problema de Merton, que admite variações no processo de volatilidade, taxas de juros, dependência das variáveis, distribuições de retornos, etc.

No capítulo 3, há apresentação do ambiente em que o problema de Merton é construído, incluindo a formalização do ambiente de controle estocástico e sua importância, formando base para a apresentação do problema de programação dinâmica, da equação de Bellman e o teorema de verificação, que são de fundamental entendimento para a apresentação do Problema de Merton. Há ainda a justificativa para o uso de determinadas classes de utilidade na teoria e da adoção de hipóteses para o processo que as variáveis seguem.

A partir da apresentação e formalização dos processos, no capítulo 4, desenvolve-se de forma rápida a ambientação do problema de controle estocástico para as finanças e a solução do problema de Merton é apresentada. A partir da formalização do problema, os exercícios são apresentados, junto com as equações que auxiliaram na resolução desses, por meio de uso de simulação feita em *Matlab* e resolução das equações diferenciais parciais e

ordinárias em *Maple*. São apresentadas soluções não-ótimas, soluções ótimas e pequenas variações das soluções, gerando novas possibilidades para solução do problema. O capítulo 5 é subdividido em itens com o fim de explorar as diferentes abordagens do problema apresentado. Apresenta-se a justificativa para que, em um modelo de log utilidade, a introdução de incerteza na taxa de apreciação, resulte em um vetor de constantes sem dependência, assim como a estratégia ótima abordada em secções anteriores.

No subitem 5.2 do capítulo 5, apresenta-se restrições afins na volatilidade e os lagrangeanos, uma outra forma para cálculo de portfólio ótimo, que não usa a função valor, mas por usar elementos de simulação, são válidas como exercício no *software Matlab*. No subitem 5.3, permite-se uma aplicação explícita do método, mas envolve restrições de desigualdade na volatilidade, permitindo comparação entre as volatilidades e suas restrições, o que já torna interessante a apresentação.

A apresentação da solução de viscosidade, na secção 6, se justifica pelo fato da abordagem da dissertação envolver principalmente as equações de *Hamilton-Jacobi- Bellman* e a função valor do princípio de programação dinâmica. Ao se estruturar o contexto para a resolução dos problemas apresentados, faz-se uma série de hipóteses para que a solução seja possível através do método aplicado, porém, na maior parte dos casos a função valor pode não ser diferenciável de segunda ordem, sendo interessante a apresentação de um alternativa quando as hipóteses não são possíveis, porém, não há implementação prática de tal alternativa.

No conclusão, procura-se ressaltar os pontos principais derivados dos exercícios e suas implicações dentro do contexto no qual o problema é proposto e desenvolvido.

## 2 Revisão Bibliográfica

(MARKOWITZ, 1952) define o problema de seleção de portfólio em dois estágios; o primeiro é a observação e por experiência a formação de crenças sobre o desempenho futuro dos ativos disponíveis; e o segundo, no qual se concentra, é a escolha de portfólio baseada na crença formada sobre seu desempenho. A partir da consideração de que o agente avalia como desejável o retorno e indesejável a variância, (MARKOWITZ, 1952) desenvolve sua teoria baseado em retorno esperado e variância dos retornos. A hipótese é de que o agente gostaria de maximizar o valor futuro descontado do retorno de seus ativos. Segundo (MARKOWITZ, 1952), a regra que o agente deve diversificar seus fundos e maximizar o retorno esperado, com a lei dos grandes números<sup>3</sup> garantindo que o retorno atual do portfólio seja quase o mesmo que o retorno esperado, não é aceita, pois o retorno dos ativos é intercorrelacionado e a diversificação do portfólio não poderia eliminar a variância.

Traça-se o conjunto eficiente, em que um extremo corresponde a mínima variância e o outro, ao máximo retorno. O problema do modelo apresentado por (MARKOWITZ, 1952) seria a dificuldade computacional de selecionar um portfólio com um grande número de ativos, pois criaria complicações ao se calcular as correlações entre eles.

Na literatura de matemática aplicada a finanças, o modelo de dinâmica de preços de ativos com movimento Browniano geométrico é frequentemente estudado, baseando-se nas hipóteses do artigo de (MERTON, 1992)<sup>4</sup>. Apesar de seu estudo ser muito difundido, também é alvo de críticas. (BENTH, 2001) lembra a prática em estudos anteriores que consideravam que o logaritmo da razão dos preços sucessivos seguia uma distribuição Gaussiana com incrementos independentes tempo homogêneos e parâmetros estacionários, porém, a amostra de séries de tempo não confirmam tal padrão para a população. As mudanças de preço observadas possuíam frequência muito grande de valores extremos;

<sup>3</sup> Com  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias, independentes, identicamente distribuídas e integráveis com esperança comum, pela lei dos grandes números  $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow EX_1$

<sup>4</sup> Nos Capítulos 4, 5 e 6 do referido artigo.

as séries de tempo rejeitam a hipótese de log retorno para preços diários e semanais, porém essa hipótese não é rejeitada para dados mensais. Os retornos logarítmicos para dados diários e semanais mostram uma impressão não Gaussiana como caudas grossas e assimetria<sup>5</sup>. A distribuição Gaussiana Normal invertida parece ser uma modelo simples e flexível que se adequa melhor ao log-retornos em todas as escalas de tempo (BENTH, 2001). O modelo de Merton diz que o investidor mantém uma fração constante de sua riqueza no ativo de risco com sua dinâmica modelada pelo movimento Browniano; tal fração é proporcional a taxa esperada de retorno do ativo, inversamente proporcional a sua volatilidade. Em (BENTH, 2001) tentam resolver a questão de como a estratégia e consumo são afetados em um ambiente condizente com a realidade; ambientando o problema com uma função HARA (*hyperbolic absolut risk aversion*), chegando em uma solução explícita, similar a do caso Gaussiano. (BENTH, 2001) desenvolve algoritmos para resolver o problema de Merton modelado com um processo Lévy Gaussiano normal invertido, resultando no fato de que o agente, nessas condições, alocaria maior fração de sua riqueza no ativo de risco que o agente “padrão”<sup>6</sup>. Com o aumento de volatilidade, para o modelo Gaussiano invertido normal e simétrico, o modelo “padrão” e Gaussiano invertido convergiram para a mesma estratégia de investimento. Se a declividade é diminuída, o modelo gaussiano invertido converge para uma distribuição Cauchy a uma taxa limitando a um investimento menor que no modelo “padrão”. O modelo Gaussiano inverso não-simétrico possui propriedades de convergência similares para escala crescente e declividade decrescente.

No artigo de (FERRETI e TROJANI, 2006), resolve-se o problema de Merton para um investidor com a *power utility* tempo aditiva. Para a dinâmica de estado, ainda provam a representação das política ótimas e função valor com representação de séries de potência; demonstram que as séries de potência admissíveis na solução funcionam como uma boa aproximação de ordem finita para modelos explícitos.

---

<sup>5</sup> Nas distribuições com caudas grossas o desvio padrão subestima a probabilidade de ocorrência de valores extremos. Quando os retornos possuem assimetria, o risco pode ser sub-estimado ou sobre-estimado (cauda esquerda ou cauda direita alongadas, respectivamente).

<sup>6</sup> O padrão é o descrito pelo artigo publicado por Merton em 1971, encontrado em (MERTON, 1992), nos capítulos 4, 5 e 6.

O modelo de potências parte de condições em relação as classes de funções utilidade para que existam soluções fechadas para o consumo ótimo e escolha de portfólio, adicionalmente, usam premissas de que o mercado seja completo e não haja consumo intermediário, como alternativa ao modelo de martingales<sup>7</sup>. O modelo abordado por (FERRETI e TROJANI, 2006) se aproxima dos métodos de perturbação, que partem da hipótese de condições técnicas para garantir a representação por séries de potências. Nesse tipo de solução, deve-se garantir que o domínio de convergência da solução de séries seja grande de tal forma que contenha um conjunto significativo para o modelo dos parâmetros. (FERRETI e TROJANI, 2006) caracteriza cada termo da série de potência através de uma fórmula recursiva, permitindo soluções analíticas para ordens desejadas.

(KARLSEN e RISEBRO, 2002) estudam o problema clássico de Merton de otimização de portfólio incluindo volatilidade estocástica na dinâmica do ativo de risco. A volatilidade pode, ora ter deslocamento repentino para cima, ora decrescer exponencialmente entre esses deslocamentos para cima, o que faz o investidor reequilibrar o portfólio de acordo com as mudanças na volatilidade. (KARLSEN e RISEBRO, 2002) usam o método de programação dinâmica, derivando as estratégias de negociação e expressões para a função valor que utilizam a classe *power utility*. Resolvem o problema de programação dinâmica para a HJB, usam o teorema de verificação e usam a representação de Feynman-Kac<sup>8</sup> para a solução da HJB, achando uma estratégia explícita. Apresentam, ainda, exemplos para log retornos simétricos e viesados; nesse contexto, atinge-se diferentes estratégias ótimas, havendo desvios do caso clássico de Merton.

Para a estratégia de proporções fixas, (LUEMBERGER, 1998) faz considerações relevantes. Tais estratégias levam a um processo de crescimento aleatório, onde o retorno aleatório é um processo independente e estacionário com distribuições de probabilidade

---

<sup>7</sup> Martingale é um processo estocástico tal que o valor esperado condicional de uma observação em um tempo  $t$ , dadas todas as observações até a algum tempo anterior a  $s$ , é igual a observação no tempo anterior a  $s$ , é igual a observação no tempo anterior a  $s$ . Para maiores explicações, vide capítulos 4 e 5 de (BAIN, 2007).

<sup>8</sup> A formula de Feynman-Kac estabelece uma conexão entre equações diferenciais parciais (EDP's) e processos estocásticos, usando simulação de passeios aleatórios para a resolução das EDP's. A representação de Feynman-Kac expressa uma solução geral para uma equação diferencial parcial e termos da esperança de uma função de movimento Browniano. Para maiores definições vide (BAIN, 2007), página 66.

idênticas e mutuamente independentes. Pela Lei dos Grandes Números, ao considerarmos a utilidade logarítmica, o problema de maximização da taxa de crescimento é equivalente ao problema de maximização da utilidade esperada, usando a mesma estratégia em cada tentativa. Assim, o problema pode ser tratado como um problema de único período; usando a estratégia ótima na primeira tentativa garante a máxima taxa de crescimento do retorno no longo prazo.

A adoção de tempo contínuo, segundo (DUFFIE e ESPTEIN, 1992) permite o estabelecimento de relação entre a maneira que a incerteza é resolvida ao longo do tempo e a habilidade de raciocínio em cima das preferências e suas divergências axiomáticas. Assim, o ambiente da utilidade estocástica é apresentado como introdução e ambientação para a justificativa do ambiente tempo-contínuo, com o processo consumo sendo simplificado através de uma função agregadora  $f$ , considerando a geração de informação como um processo Browniano e havendo uma única solução para a função valor  $V_t = E_t \left[ \int_{s \geq t} f(c_s, V_s) ds \right]^9$ , no caso aditivo. A ferramenta usado pela função utilidade recursiva é o equivalente certeza funcional, definido na linha real das distribuições de probabilidade, que seria especificado conforme a série de generalizações da utilidade esperada. Porém, em modelos de informação contínua, é impossível perceber quando a ordem de preferência da utilidade é especificada pelo equivalente certeza ou pela utilidade esperada local suave.

O modelo de tempo contínuo, de fato, possui diversas abordagens e (DUFFIE e ESPTEIN, 1992) citam a equivalência entre a estratégia ótima e a medida martingale equivalente para preço de ativos. Adicionalmente, o equilíbrio do modelo contínuo pode ser achado por um equilíbrio do tipo Arrow-Debreu infinito abstrato e estático, com o consumo dinamicamente implementado junto às estratégia de ativos e o processo de preços. Ao tomar por hipótese preferências aditivas-separáveis a estratégia inicial ótima é sempre ótima, assim, as preferências intertemporais são do tipo tempo-consistentes. As preferências recursivas apresentadas por (DUFFIE e ESPTEIN, 1992) são tempo consistentes e aplicáveis em modelos de tempo contínuo.

---

<sup>9</sup> Com  $0 \leq s \leq t$ .

A partir do modelo e as condições previstas por (DUFFIE e ESPTEIN, 1992), (ANTONELLI, 1996) escreve artigo sobre a estabilidade da solução de equações diferenciais estocásticas regressivas; centrando o estudo na pretensão de demonstrar a robustez da estabilidade da solução sob pequenas perturbações dos coeficientes e um valor limite de aproximação, a partir da relação de tais equações em ambiente Browniano - tanto em processos de difusão de saltos, quanto em integrais estocásticas envolvendo semimartingales - com controle ótimo. Há ainda abordagens para um ambiente sem restrições e sob a filtração básica, de certa forma, interessadas em mostrar a flexibilidade que as soluções para tal tipo de equação podem ter como um modelo para a utilidade diferencial estocástica. Segundo (ANTONELLI, 1996), os agentes econômicos apenas possuem uma aproximação dos coeficientes que guiam o processo de utilidade. Para as provas e discussões dos teoremas aqui citados, sugiro a leitura de (ANTONELLI, 1996).

Em um intervalo finito entre  $[0, T]$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  com filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$  satisfazendo a hipótese usual de que:

- $\mathcal{F}_0$  contém todos os conjuntos  $P$ -nulos de  $\mathcal{F}$ .
- $\mathcal{F}_0 = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$  (continuidade a direita)

A equação da utilidade estocástica regressiva é dada por:

$$V_t = E\left(\int_t^T g_s(V_s) dA_s + Y | \mathcal{F}_t\right) \quad (2.1)$$

$g : [0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adaptado e càdlàg,  $Y$  e  $\mathcal{F}_t$  variáveis aleatórias mensuráveis e  $A$  um processo adaptado de variação total limitada com  $A_0 = 0$ .

(ANTONELLI, 1996) estabelece e prova condições para que  $A$  seja um processo contínuo, previsível, com variação limitada, crescente e que possua a inversa de uma exponencial estocástica.

Para a condição de estabilidade da equação diferencial estocástica regressiva (EDER) é necessário estabelecer algumas condições para a solução de 2.1 por perturbações dos dados. Tomando  $V_t$  e  $V_t^n$  como as soluções respectivas para:

$$V_t = E\left(\int_t^T \mathbf{g}_s(V_s) dA_s + Y \mid \mathcal{F}_t\right), \quad (2.2)$$

$$V_t^n = E\left(\int_t^T \mathbf{g}_s^n(V_s^n) dA_s^n + Y^n \mid \mathcal{F}_t\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

sujeita às seguintes hipóteses:

- $A^n, A \in H^{\alpha 10}$  podem ser tomadas como previsíveis - para aprofundamento, vide (ANTONELLI, 1996).
- $Y^n, Y \in L^1(P)$  e são variáveis aleatórias  $\mathcal{F}_T$ -mensuráveis.
- $\mathbf{g}^n, \mathbf{g} : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são càdlàg adaptados e Lipschitz<sup>11</sup> em  $\mathbb{R}$  com constante  $k$  para algum  $k > 0$ , uniformemente com respeito a  $s \in [0, T]$  e  $w \in \Omega$
- $E(\int_0^T |\mathbf{g}_s^n(0)| |dA_s^n|) < +\infty$ , cada  $n$  e  $\mathbf{g}$  é limitado, como  $|\mathbf{g}| \leq \gamma$

Já que a tentativa é confirmar a estabilidade da solução, deve-se enxergar 2.3 como perturbações de 2.2. Para tal, é necessário que se tenha como hipótese algum tipo de convergência para os coeficientes e valores de fronteira da 2.3 para a 2.2. O Teorema 1 dá existência e unicidade, respectivamente para  $V_t$  e  $V_t^n$ , no espaço de medida  $L^1(\mu)$  e  $L^1(\mu_n)$ ,  $\mu$  e  $\mu_n$  sendo introduzidos por  $|A|$  e  $|A^n|$  em  $[0, T] \times \Omega$ .

**Teorema 1.** Assumindo que  $A^n, A, Y^n, Y, \mathbf{g}^n, \mathbf{g}$  verificam as hipóteses acima, então:

- $Y^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y$  em  $L^1(P)$

<sup>10</sup> Com  $p \geq 1$ ,  $S^p$  é o espaço dos semimartingales os quais  $\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \in L^p(P)$  e com  $H^p$  o espaço dos semimartingales especiais com a decomposição canônica  $X = \bar{M} + A$ , onde  $M$  é um martingale local e  $A$  um processo càdlàg adaptado previsível de variação localmente limitada, então  $\left([M, M]_T^{1/2} + \int_0^T |dA_s|\right) \in L^p(P)$ . Então, assume-se que  $A \in H^\infty$ .

<sup>11</sup> Em equações diferenciais é a condição que garante a existência e unicidade da solução para um valor inicial do problema. Uma função satisfaz a condição de Lipschitz de ordem  $\beta$  em  $x = 0$  se  $|f(h) - f(0)| \leq \mathbf{B}|h|^\beta$  pra todo  $|h| < \epsilon$ , onde  $\mathbf{B}$  e  $\beta$  são independentes de  $h$ , onde  $\alpha$  é um limite superior para todo  $\beta$ , para o qual existe um  $\mathbf{B}$  finito.

- $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  em  $H^\infty$ -assumindo-se que  $A \in H^\infty$ , com  $H^p$  o espaço dos semimartingales.
- $\mathbf{g}^n(V) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{g}(V)$  em  $S^1$ <sup>12</sup>

Então  $V^n$  converge em probabilidade para  $V$ .

Assim, (ANTONELLI, 1996) aborda a robustez das soluções para equações diferenciais estocásticas sob pequenas perturbações de coeficientes e valores limite. Tais resultados têm importância nas construções teóricas em teoria financeira.

Para o problema de Merton de consumo ótimo e escolha de portfólio em tempo contínuo e em mercados incompletos, o trabalho de (DUFFIE, 1997) aborda soluções analíticas e, em particular, usando soluções de viscosidade, a fim de demonstrar que a função valor do problema de controle estocástico é uma solução suave para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). No artigo, (DUFFIE, 1997), conseguem mostrar que a política ótima existe e apresenta-se da forma recursiva, a partir das condições de otimalidade para equação de HJB. Devido ao fato do mercado ser incompleto, observando-se o fluxo de renda estocástico e a correlação imperfeita do ruído com o preço do ativo, a HJB pode ser degenerada e a função valor não necessariamente será suave. Obtém-se uma aproximação numérica para a função valor e para as políticas ótimas através da implementação de esquemas consistentes e monótonos, cuja convergência é obtida por meio das fortes propriedades de estabilidade de soluções de viscosidade. O artigo usa funções da família HARA (*hyperbolic absolute risk aversion*) para permitir a redução da dimensão do espaço estado.

Na dissertação de (NDOUNKEU, 2010), o problema é abordado de forma similar à presente dissertação, com foco na teoria de controle estocástico, abordando a precificação em mercados incompletos e otimização dinâmica de portfólio. Da mesma forma, usa funções de utilidade clássicas, introduzindo também a solução de viscosidade, caso a equação de *Hamilton-Jacobi-Bellman* não apresente as propriedades desejadas. (NDOUNKEU,

---

<sup>12</sup> Com  $p > 1$ , assume-se que  $Y \in L^p(P)$  e que  $\mathbf{g}$  é um processo adaptado, càdlàg e tal que  $|\mathbf{g}_s(u) - \mathbf{g}_s(v)| \leq k|u - v|$  com  $\forall u, v \in \mathbb{R}, (s, \omega) \in [0, T], \mathbf{g}_s(0) \in S^p$ . Com  $p = 1$ , o resultado é mais fraco, assumindo-se que  $Y \in L^1(P)$  e que  $\mathbf{g}$  é tal que  $|\mathbf{g}_s(u) - \mathbf{g}_s(v)| \leq k|u - v|$ , com  $\forall u, v \in \mathbb{R}, (s, \omega) \in [0, T] \times \Omega$  e  $E(\int_0^T |g_s(0)| |dA_s|) < +\infty$ . Então existe uma única solução  $V$  semimartingale para a equação 2.1 em  $L^1(\mu)$ , onde  $\mu$  é a medida induzida por  $A$  em  $[0, T] \times \Omega$ . Ou seja,  $V$  pode estar fora de  $S^1$  sob esta hipótese mais fraca.

2010) aplica exemplos para a utilidade logarítmica, para *power utility* misturada com utilidade logarítmica e para utilidade exponencial.

Na bibliografia adotada como base, (STOJANOVIC, 2002), concentra-se na resolução do problema de Merton clássico, baseado em controle estocástico e em log normalidade da dinâmica dos preços de ativos, buscando uma solução simbólica ou explícita através das equações diferenciais parciais (EDP) Monge-Ampère. A justificativa para tal método é sua velocidade computacional e carga educacional, tornando o problema básico e aberto a adição de novas restrições e determinação de valores para parâmetros.

A intenção da presente dissertação é apresentar o ambiente em que o Problema de Merton é construído e resolver exercícios em cima das possibilidades de solução a fim de tornar clara as possibilidades e conclusões que tal modelo oferece e explorar as ferramentas computacionais disponíveis para a resolução do problema apresentado e algumas de suas variações.

### 3 Problema de Merton - Ambientação

Neste capítulo o ambiente e os fundamentos sob os quais o Problema de Merton é construído são explicitados.

#### 3.1 Controle Estocástico

O controle estocástico estuda sistemas dinâmicos expostos a perturbações aleatórias que podem ser controladas de forma a otimizar algum critério de desempenho. De forma histórica, a teoria de controle é dominada pelos princípios de otimalidade de Bellman e Pontryagin<sup>13</sup>. A abordagem de Bellman para problemas de controle estocástico se adequa ao contexto de viscosidade, que vai além da abordagem clássica de verificação de Bellman, permitindo o estudo de problemas de controles degenerados, típicos em finanças.

O princípio de máximo estocástico apresenta-se de forma mais moderna através de equações diferenciais recursivas. As soluções de viscosidade e as equações diferenciais estocásticas recursivas se relacionam fortemente por meio da representação de ambas por equações diferenciais parciais (EDP); assim, na teoria de controle estocástico, há aplicação tanto de teorias de probabilidade quanto a utilização de EDPs.

Baseando-se em (PHAM, 2005), a formulação do problema em horizonte finito, tem como definição um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com  $T > 0$ , um tempo finito e uma filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ , satisfazendo as condições usuais, e  $W$  um movimento Browniano  $d$ -dimensional definido no espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , considerando o processo estado controlado  $X$  avaliado em  $\mathbb{R}^n$  que satisfaça:

---

<sup>13</sup> Segundo (PHAM, 2005), em problemas de otimização e controle, é necessário derivar condições necessárias satisfeitas pela solução ótima; em um problema de otimização de dimensão infinita, o adequado seria usar cálculo de variações na função ganho (lucro)  $J(t, x, \alpha)$ , citada na abordagem de Bellman, com respeito a variável controle, a fim de derivar condições necessárias para a otimalidade. Com base no Princípio de Máximo de Pontryagin, a trajetória de estado ótima deve resolver o sistema Hamiltoniano com uma condição máxima, o Hamiltoniano Generalizado, que deve ser de fácil resolução em comparação com o problema de controle original.

$$dX_s = b(s, X_s, \alpha_s)ds + \sigma(s, X_s, \alpha_s)dW_s \quad (3.1)$$

o controle  $\alpha = (\alpha_s)_{0 \leq s \leq T}$  é um processo progressivamente avaliado no conjunto de controle  $\mathcal{A}$ , um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  as funções Borelianas<sup>14</sup>  $b, \sigma$  em  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$ , satisfazem as condições usuais para garantir a existência de uma solução forte para a EDP 3.1, o que acontece quando  $b$  e  $\sigma$  satisfazem a condição de Lipschitz em  $(t, x)$  uniformemente em  $a$ , e  $\alpha$  satisfaz uma condição de integrabilidade quadrada. O conjunto de controle do processo  $\alpha$  é dado por  $\mathcal{A}$ . Com  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathcal{A}$ , define-se  $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ , a única solução forte para 3.1 começando de  $x$  no tempo  $s = t$ . Para facilitar os cálculos, omite-se a dependência de  $X$  em  $\alpha$ .

Definindo duas funções Borelianas de valor real  $f$  e  $g$ , definidas em  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$  e  $\mathbb{R}^n$  respectivamente, pode-se definir a função lucro:

$$J(t, x, \alpha) = E\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right] \quad (3.2)$$

para todo  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Deve-se impor condições de integrabilidade, como limite inferior ou condição de crescimento linear, sobre  $f$  e  $g$  a fim de que a esperança seja bem definida. Para estabelecer o problema de maximização, torna-se necessário a definição da função valor:

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} J(t, x, \alpha) \quad (3.3)$$

Para um estado inicial  $(t, x)$ , nós dizemos que  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  é um controle ótimo se  $v(t, x) = J(t, x, \hat{\alpha})$ . Para o horizonte de tempo infinito, o problema de controle se apresentará da seguinte forma:

---

<sup>14</sup> Um boreliano é um conjunto que pode ser obtido de um número enumerável de intervalos aplicando-se operações  $\cup, \cap, e^C$  um número enumerável de vezes.

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E\left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t} f(X_s, \alpha_s) ds\right] \quad (3.4)$$

onde  $\rho > 0$  é o fator de desconto positivo que garante a finitude da função valor associada; pode-se ainda considerar fatores de desconto mais gerais, tais  $\rho = \rho(t, x, a)$ , tanto nos casos de horizonte finito como nos casos de horizonte infinito.

Em um contexto de programação dinâmica é possível resolver problemas de otimização dinâmica com estrutura recursiva. A equação de Bellman caracteriza otimalidade quando está se referindo a cadeias de Markov<sup>15</sup>, assim, a condição de primeira ordem da equação de Bellman (equação de Euler) caracteriza o equilíbrio de preços dos ativos, considerando uma utilidade aditiva.

## 3.2 A abordagem de Bellman

O princípio de otimalidade de Bellman também é chamado de Princípio de Programação Dinâmica (PPD), que, de forma simples, seria o caso em que o agente toma uma decisão de controle ótimo até alguma observação arbitrária no tempo, definida por  $\theta$ , e dada essa nova informação, tal decisão continua sendo ótima após  $\theta$ . Formalizando:

1. Para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$  e  $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$ , o conjunto de tempos de parada avaliado em  $[t, T]$ :

$$v(t, x) \geq E\left[\int_t^{\theta} f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + v(\theta, X_{\theta}^{t,x})\right] \quad (3.5)$$

2. Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ , tal que para todo  $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$

$$v(t, x) - \varepsilon \leq E\left[\int_s^{\theta} f(s, X_s^{t,x}, \hat{\alpha}_s) ds + v(\theta, X_{\theta}^{t,x})\right] \quad (3.6)$$

A versão tradicional da PPD é escrita da seguinte maneira:

<sup>15</sup> Seja  $y = \{y(k) : k = 0, 1, \dots\}$  um processo de espaço de tempos discreto definido sobre  $(\Omega, F, P)$  e  $F_n^y = \sigma(y(k) : k \leq n)$ . Então,  $y$  é uma cadeia de Markov se  $P(y(n+m) \in A | F_n^y) = P(y(n+m) \in A | y(n)) \forall m, n \geq 0$  e  $A \in G$ .

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E \left[ \int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + v(\theta, X_\theta^{t,x}) \right] \quad (3.7)$$

Para aplicar a PPD, é necessário considerar uma família de problemas de controle ótimo com diferentes tempos iniciais e estados ao longo de uma dada trajetória de estado. Então, dada uma trajetória de estado  $X$ , começando de  $x$  em um tempo 0, dado um espaço de probabilidade filtrado, como descrito anteriormente,  $X_t$  é uma variável aleatória, para qualquer  $t > 0$  no espaço de probabilidade original. Já que existe um controle  $\mathbb{F}$ -adaptado, o agente é consciente de toda a informação relevante do passado do sistema até o tempo  $t$ , e em particular, sobre  $X_t$ . Baseado-se em (PHAM, 2005), assume-se a validade da PPD nas suas implicações para a caracterização da função valor através da equação *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB), ou equação de programação dinâmica que é mais abrangente que o contexto de difusões ou de processos Markov<sup>16</sup>.

A equação de HJB é a versão infinitesimal para o princípio de programação dinâmica, pois descreve o comportamento local da função valor  $v(t, x)$  quando  $\theta$  assume valores até  $t$  na PPD. Toma-se, como hipótese, que a função valor é  $C^{2,1}$ , aplicando-se a fórmula de Itô<sup>18</sup>  $v(s, X_s^{t,x})$  entre  $s = t$  e  $s = t + h$ , levando  $h$  até zero na PPD. A equação de HJB associada ao problema de controle estocástico é:

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} [\mathcal{L}^\alpha v(t, x) + f(t, x, \alpha)] = 0 \quad (3.8)$$

em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{L}^\alpha$  é o gerador infinitesimal de segunda ordem associada a difusão  $X$  com

<sup>16</sup> Um processo de Markov é um processo estocástico em que a distribuição de probabilidade de um valor futuro depende do passado apenas através do valor presente.

<sup>17</sup> O espaço de Hölder  $C^{k,\gamma}(U)$  consiste em todas as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (funções Hölder-contínuas com expoente  $\gamma$ ), com  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um espaço aberto e  $\gamma \in (0, 1]$ , que pertencem ao espaço  $C^k(U)$  das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis.

<sup>18</sup> No cálculo clássico, a regra da cadeia é definida a partir da hipótese  $\frac{dy}{dt} = a(t, y)$ , com  $g$  uma função suficientemente suave,  $d(g(t, y)) = \frac{\partial g(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, y)}{\partial y} dy$ . Na forma estocástica temos  $dy = f(t, y)dt + \sigma(t, y)dB$ , supondo  $dy = f(t, y)dt + \sigma(t, y)dB$ , com  $g(t, y)$  uma função suficientemente suave, então  $d(g(t, y)) = \frac{\partial g(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, y)}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, y)}{\partial y^2} (dy)^2 = \frac{\partial g(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, y)}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, y)}{\partial y^2} \sigma(t, y)^2 dt$ . Para maiores definições, vide capítulo 11 de (BAIN, 2007).

constante de controle  $a$ :

$$\mathcal{L}^a v = b(x, a) \cdot D_x v + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(x, a) \sigma'(x, a) D_x^2 v) \quad (3.9)$$

A equação diferencial parcial (EDP) também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - H(t, x, D_x v(t, x), D_x^2 v(t, x)) = 0 \quad (3.10)$$

para qualquer  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  onde para  $(t, x, p, M) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n$ ,  $\mathcal{S}_n$  é o conjunto de matrizes simétricas  $n \times n$ :

$$H(t, x, p, M) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} [b(x, \alpha) \cdot p + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma'(x, \alpha) M) + f(t, x, \alpha)] \quad (3.11)$$

A função  $H$  é chamada de Hamiltoniana associada ao problema de controle, e as PDEs 3.10 e 3.11 de equação HJB.

Também existe a condição terminal:

$$v(T, x) = g(x) \quad (3.12)$$

para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ , que resulta da primeira definição da função valor  $v$ .

A PDE 3.10 de HJB requer a finitude da Hamiltoniana  $H$ , satisfeita pelo conjunto de controle  $\mathcal{A}$ , que é limitado. Se  $\mathcal{A}$  não for fechado, a Hamiltoniana pode adquirir valor  $\infty$  em algum domínio de  $(t, x, p, M)$ , o que geraria um problema de controle singular.

### 3.3 A Abordagem clássica de verificação no Problema de Mer-ton

A abordagem de verificação, segundo (PHAM, 2005), consiste em achar uma solução suave para a equação HJB e checar se a candidata a solução coincide com a função valor sob condições suficientes plausíveis, gerando um controle ótimo. Tal verificação costuma variar em cada problema de acordo com as condições técnicas necessárias exigidas em tal contexto.

Para o teorema de verificação, define-se  $w$  como uma função  $\mathcal{C}^{1,2}$ <sup>19</sup> em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$  e contínua em  $T$ , com condições de crescimento apropriadas. Formando a hipótese de que, para todo  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ , existe  $\hat{a}(t, x)$  mensurável, avaliado em  $\mathcal{A}$  tal que  $w$  resolve a equação HJB.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \sup_{\alpha \in A} [\mathcal{L}^\alpha w(t, x) + f(t, x, \alpha)] \\ &= -\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \mathcal{L}^{\hat{a}(t, x)} w(t, x) - f(t, x, \hat{a}(t, x)) \quad em [0, T) \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

com a condição terminal

$$w(T, \cdot) = g \quad em \mathbb{R}^n \quad (3.14)$$

A EDE:

$$dX_s = b(X_s, \hat{a}(s, X_s)) ds + \sigma(X_s, \hat{a}(s, X_s)) dW_s \quad (3.15)$$

---

<sup>19</sup> O espaço de Hölder  $\mathcal{C}^{k, \gamma}(U)$  consiste em todas as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (funções Hölder-contínuas com expoente  $\gamma$ ), com  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um espaço aberto e  $\gamma \in (0, 1]$ , que pertencem ao espaço  $\mathcal{C}^k(U)$  das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis para as quais a norma  $\|f\|_{\mathcal{C}^{k, \gamma}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^0(U)} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^{0, \gamma}(U)}$  onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é um multi-índice, sua ordem é dada por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e a derivada de ordem  $\alpha$  é definida como  $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

admite solução única, definida por  $\hat{X}_s^{t,x}$  dado uma condição inicial  $X_t = x$ . Então,  $w = v$  e  $\{\hat{\alpha}(s, \hat{X}_s^{t,x}) \mid t \leq s \leq T\}$  é um controle ótimo para  $v(t, x)$ . A aplicação deste teorema de verificação se dá no Problema de Merton de seleção de portfólio, onde o investidor decide a qualquer tempo em um horizonte finito  $T$  a investir uma proporção de valor  $\alpha$  em  $\mathcal{A} = \mathbb{R}$  de sua riqueza  $X$ , em um ativo de risco de taxa constante de retorno  $\mu$  e volatilidade  $\sigma$  e o resto de da proporção  $-(1 - \alpha)$  - em uma conta de banco a uma taxa de juros constante  $r$ .

$$dX_s = X_s(r + (\mu - r)\alpha_s)ds + X_s\sigma\alpha_s dW_s \quad (3.16)$$

E o objetivo do investidor é dado por uma função valor:

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E[U(X_T^{t,x})] \quad (3.17)$$

com  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ , onde  $U$  é a função utilidade côncava e função crescente em  $\mathbb{R}_+$ . Para a escolha particular da função de utilidade com potência  $U(x) = x^p$ , com  $p < 1$ , é possível achar uma solução explícita e suave associada a equação HJB com condição terminal  $v(T, \cdot) = U$ , definida:

$$v(t, x) = \exp(\rho(T - t))x^p$$

com  $\rho = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{p}{1-p} + rp$ ; e ainda, o controle ótimo é dado por:

$$\hat{\alpha} = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - p)} \quad (3.18)$$

O passo importante para a resolução do problema de Merton é que a função valor  $v$  pode ser separada em uma função de  $t$  e uma função de  $x$ :  $v(t, x) = \varphi(t)x^p$ . A partir

dessa transformação, pode-se aplicar a substituição na equação de HJB, com  $\varphi$  como a solução para a equação diferencial ordinária cuja condição terminal é  $\varphi(T) = 1$ , que pode ser explicitamente resolvida. O teorema de verificação clássico pode permitir resolver problemas de controle, encontrando uma solução suave para a equação HJB associada e é aplicado com sucesso nos casos em que o termo de difusão não depende do controle. O termo de difusão é uniformemente elíptico, já que em tais casos a equação HJB é semilinear, ou seja,  $D_x^2 v$  aparece linearmente, e a existência de resultados para soluções suaves é comprovada, adicionalmente, para modelos com controle no termo de difusão -o caso do problema de Merton - e suas extensões, como o modelo de Merton com volatilidade estocástica. A partir da EDP 3.10, é necessário estabelecer a finitude da Hamiltoniana  $H$ , que é satisfeita quando o conjunto de controles  $\mathcal{A}$  é limitado.

No problema de controle único, a função valor é geralmente descontínua em  $T$ , de tal forma que 3.12 não é uma condição terminal relevante. Quando não há regularidade da função valor, pode-se derivar a equação HJB com o conceito de solução de viscosidade, assim, determinando a condição terminal correta, o que será abordado no fim da exposição.

Em um contexto de programação dinâmica, é possível resolver problemas de otimização dinâmica com estrutura recursiva. A equação de Bellman caracteriza otimalidade quando está se referindo a cadeias de Markov, assim, a condição de primeira ordem da equação de Bellman (equação de Euler) caracteriza o equilíbrio de preços dos ativos, considerando uma utilidade aditiva.

Segundo (DUFFIE, 2001), para cada  $t < T$  e  $w$ , existe uma solução para a equação de Bellman. A política de consumo ótimo é definida por  $c_t = C_t(W_t^c)$ ; e a função valor  $V_{t+1}$ , que resume toda a informação sobre o futuro, é necessária para se tomar decisões no tempo  $t$ . Para as condições de primeira ordem, toma-se o modelo aditivo, assim para cada  $t$ ,  $u_t$  é diferenciável no intervalo  $(0, \infty)$  e estritamente côncava. Existe uma política de consumo ótimo  $c^*$  que é estritamente positiva. O processo de riqueza  $W^*$  associado a  $c^*$ .

Baseando-se no seguinte Lema:

**Lema 1.** *Para qualquer  $t$ ,  $V_t$  é estritamente côncava e continuamente diferenciável em*

$W_t^*$ , com  $V_t'(W_t^*) = u_t'(c_t)$ .

A caracterização de otimalidade de Bellman pode ser aplicada de tal forma que as variáveis de estado, representando o consumo passado, tornam-se desnecessárias, pois o consumo passado não terá influência no consumo presente, já que a utilidade é independente do consumo anterior a  $t$  devido a sua natureza *forward*.

### 3.4 A equação de utilidade diferencial estocástica

Essa secção tem por finalidade explicitar as exigências e propriedades da função utilidade utilizada nos modelos apresentados. A ideia é de que a necessidade de utilidade aditiva parte de um conjunto maior de funções utilidades, as utilidades diferenciais estocásticas. No contexto de informação Browniana, as utilidades intertemporais esperada e recursiva são caracterizáveis e as condições suficientes para a existência e propriedades das soluções serão abordadas. Porém, não se pode diferenciar entre teorias de utilidade não esperada e escolha sob incerteza quando são integrados de forma adequada em um modelo intertemporal. Em um ambiente Markoviano suave, a utilidade diferencial estocástica produz uma generalização da caracterização de otimalidade da equação de HJB.

Com a especificação dada por (DUFFIE e EPSTEIN, 1992) para a utilidade aditiva padrão no tempo  $t$  e para um processo de consumo  $c$ :

$$V_t = E_t \left[ \int_{s \geq t} e^{-\beta(s-t)} u(c_s) d_s \right] \quad \text{com } t \geq 0 \quad (3.19)$$

tais funções gerais são chamadas recursivas e apresentam consistência intertemporal e admitem caracterização de otimalidade de Bellman. Tomando o processo de informação no tempo  $t$  como gerado por movimento Browniano, o processo de utilidade  $V$  para um processo de consumo  $c$  é determinado por uma função “agregadora”  $f$ ; a função chamada de agregadora, combina  $c_t$  e o índice de utilidade  $V_{t+1}$  do consumo futuro para definir a utilidade corrente  $V_t$ ; e é apresentada uma única solução para  $V$ :

$$V_t = E_t \left[ \int_{s \geq t} f(c_s, V_s) ds \right] \quad \text{com } t \geq 0 \quad (3.20)$$

reduzindo 3.19 ao modelo aditivo no caso:  $f(c, v) = u(c) - \beta v$ .

Na especificação padrão 3.19, a aversão ao risco e a substitutibilidade intertemporal são relacionadas com a curvatura da função utilidade, tais aspectos podem ser melhor observados através da utilização de uma classe geral de funções utilidade recursivas, que neste modelo de tempo contínuo fornece resultados mais simples que no caso do tempo discreto. O modelo de tempo contínuo permite relacionar como a incerteza é resolvida ao longo do tempo e as diferenças entre as preferências observadas através da observação das ações tomadas.

Para a especificação da utilidade recursiva, é necessário a utilização do componente funcional equivalente-certeza que é definido em um subespaço de distribuições de probabilidade; tal funcional representa preferências ao longo de um conjunto restrito de processos de consumo. O equivalente pode ser especificado em relação às teorias de generalização da utilidade esperada. Segundo (DUFFIE e EPSTEIN, 1992), as novas teorias trabalham em ambiente estático ou com escolhas únicas e especificam utilidade funcional para distribuições de probabilidade na linha real que podem ser integrados ao modelo temporal por especificação do equivalente certeza.

O critério de otimalidade das escolhas dos agentes é aplicado na data inicial da economia, mas não em datas intermediárias, dado a renovação das informações disponíveis. Com critério de aditividade separável para 3.19, qualquer estratégia inicialmente ótima é sempre ótima, já que a aditividade separável das funções utilidade levam a preferências consistentes ao longo do tempo.

Segundo (Duffie, 1992), para superar a inflexibilidade do modelo de utilidade esperada intertemporal, propõe-se uma utilidade com estrutura recursiva geral, que propõe que no tempo  $t$ , a utilidade intertemporal  $V_{t+1}$  para um período  $t + 1$  e adiante é uma variável aleatória. O agente define um equivalente certeza  $m(\sim V_{t+1} | \mathcal{F}_t)$  da distribuição condicio-

nal  $\sim V_{t+1}|\mathcal{F}_t$  de  $V_{t+1}$  dada a informação  $\mathcal{F}_t$  no tempo  $t$ , que combina a distribuição com o  $c_t$  via o agregador  $W$ , que define a substitutibilidade de consumo e a função equivalente certeza  $m$  que define a aversão ao risco.

As premissas para incerteza apresentadas por (DUFFIE e EPSTEIN, 1992):

- Um conjunto de tempo  $\mathcal{T} = [0, T]$ , para algum  $T$  finito;
- um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e
- um filtro  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathcal{T}\}$ , de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  satisfazendo a condição usual (continuidade a direita, crescente e aumentada)

para simplificar a notação,  $\mathcal{F}_0$  é trivial, ou seja, contém uma probabilidade de 0 ou 1. O conjunto de consumo é avaliado em um subconjunto convexo fechado  $\mathcal{C}$  de algum reticulado separável<sup>20</sup> de Banach<sup>21</sup> definir, então  $\mathbb{R}^l$  para  $l$  *commodities*, usa-se  $\|c\|$  para a norma de uma escolha de consumo  $c \in \mathcal{C}$ . O espaço  $D$  processos de consumo é tomado para ser os processos integráveis quadrados  $\mathcal{C}$  avaliados opcionais<sup>22</sup>. A restrição opcional está no fato de que a taxa de consumo  $c_t$  depende apenas da informação disponível no tempo  $t$ . A restrição de integrabilidade quadrada diz que qualquer  $c$  em  $D$  tem norma finita  $\|c\|_D = [E(\int_0^T \|c_t\|^2 dt)]^{1/2}$ .

O processo de utilidade de um dado processo  $c \in D$  é definido por um semimartingale  $V$ , para qualquer  $t$ , a variável aleatória  $V_t$  é tratada como a utilidade para a continuação  $\{c_s : s \geq t\}$  dado por  $\mathcal{F}_t$  como dado em 3.19, sendo  $V_0$  a utilidade do processo  $c$  inteira. Para qualquer intervalo  $X$  da linha real, tem-se  $\mathcal{P}(X)$  definindo o espaço probabilidade de medida em  $X$  cuja média existe. Por um equivalente de certeza  $m$ , a função  $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  que relaciona a medida de probabilidade  $p$  -que representa a distribuição de probabilidade- e seu equivalente de certeza  $m(p)$ , satisfazem:

<sup>20</sup> Reticulado é um conjunto parcialmente ordenado no qual qualquer par de elementos possuem um menor limite superior e uma maior limite inferior, O menor limite superior dos elementos  $a$  e  $b$  é denotado por  $(a \vee b)$  ou  $a \wedge b$  ( $a$  e  $b$ ). Também caracterizam estruturas algebraicas que satisfazem certas identidades axiomáticas. Dessa forma, funciona como um “mapa” que ajuda a localizar a hipótese atual (consumo) com a nova informação. Vide página 112 de (HAASER e SULLIVAN, 1991).

<sup>21</sup> O Espaço de Banach é um espaço linear normado completo. Vide página 177 de (HAASER e SULLIVAN, 1991).

<sup>22</sup> Um processo  $\mathcal{C}$  avaliado  $c$  é opcional se  $c : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$  é mensurável com respeito a  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega \times \mathcal{T}$  gerada pelo espaço dos processos  $\mathbb{F}$ -adaptados contínuos à direita com limites à esquerda (*cádlàg*) e a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathcal{C}$ .

**Proposição.** a)  $m(\delta_x) = x$ ,  $x \in X$  onde  $\delta_x$  representa a medida Dirac; b) Monotonicidade  $m(p') \geq m(p)$  se  $p'$  exibe dominância estocástica de primeira ordem<sup>23</sup> sobre  $p$ .

A aversão ao risco para  $m$  não necessariamente corresponde a aversão ao risco da utilidade intertemporal, então não será tomado como equivalente certeza e assim, a seguinte hipótese será adotada

**Proposição.** Para todo  $p \in \mathcal{P}(X)$ ,  $m(p) \leq m(\bar{p})$ , onde  $\bar{p} = \int_X x dp(x)$  é a média de  $p$ .

Para motivação da adequação da utilidade recursiva em tempo contínuo, supõe-se que  $V$  é o processo de utilidade em tempo contínuo para o processo de consumo  $c$ ; e, de acordo com (DUFFIE e EPSTEIN, 1992), em um contexto de tempo discreto, com regularidade suficiente em  $W$ , pode-se aplicar o teorema da função implícita na função utilidade descrita em incerteza com ou sem estado separável  $V_t = W[c_t, m(V_{t+1})]$ ;  $U(\{c_t\}) = V_0$  para obter a seguinte representação:

$$m(\sim V_{t+1}|\mathcal{F}_t) = G(c_t, V_t) \quad (3.21)$$

para algum  $G : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  subtraindo  $m(\sim V_t|\mathcal{F}_t) = m(\delta_{V(t)}) = V_t$ , reorganizando em 3.21:

$$m(\sim V_{t+1}|\mathcal{F}_t) - m(\sim V_t|\mathcal{F}_t) = G(c_t, V_t) - V_t \quad (3.22)$$

A definição de  $G$  dependerá no comprimento do intervalo de tempo, então, no contexto de aproximações de tempo discreto para tempo contínuo, escreve-se  $G(c, v) \equiv \mathcal{G}(c, v, \Delta t)$ , onde  $\Delta t$  é o tamanho do intervalo de tempo, reescrevendo 3.22

$$m(\sim V_{t+\Delta t}|\mathcal{F}_t) - m(\sim V_t|\mathcal{F}_t) = \mathcal{G}(c_t, V_t, \Delta t) - \mathcal{G}(c_t, V_t, 0) \quad (3.23)$$

---

<sup>23</sup> De forma simples, a dominância estocástica de primeira ordem seleciona os investimentos para aqueles investidores que preferem um retorno maior a um menor.

Tomando como hipótese a diferenciabilidade em respeito a  $\Delta t$ :

$$\frac{d}{ds}m(\sim V_{t+s}|\mathcal{F}_t)|_{s=0} = -f(c_t, V_t) \quad (3.24)$$

com  $f(c, v) = -\frac{\partial \mathcal{G}(c, v, 0)}{\partial \Delta t}$ . O equivalente certeza  $m$  e uma função medida  $f : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com o par  $(f, m)$  chamado de agregador. Assim, o processo de utilidade recursiva de um processo de consumo  $c$  sob um agregador  $(f, m)$  - se ele existe - é o único semimartingale integrável  $V$  satisfazendo  $V_T = 0$ , e para todo  $t < T$ ;  $f$  determina o grau de substituição intertemporal e outros aspectos de preferências.

Considera-se hipóteses de suavidade para a função equivalente certeza  $m$ . O equivalente é suave com certeza, se, para cada  $x$  em  $\mathbb{R}$  tem algum  $M(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com duas derivadas contínuas, tais que a medida de probabilidade  $p$  com suporte compacto,  $\nabla m(\delta_x; p)$  e:

$$\nabla m(\delta_x; p) = \int M(y, x) dp(y) \quad (3.25)$$

Chama-se  $M : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a representação local de gradiente (RLG) de  $m$ . Para cada  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}$ , nós temos  $\nabla m(\delta_x; \delta_y) = y$ , que é o caso e que a primeira derivada de  $M(y, x)$  com respeito a  $y$  em  $y = x$  é  $M_1(x, x) = 1$ .

Para o equivalente de certeza da utilidade esperada  $m$ , do tipo  $m(\sim V) = h^{-1}(E[h(V)])$ , a RLG pode ser definida, conforme esclarecido em (DUFFIE e EPSTEIN, 1992) como:

$$M(v, x) = \frac{h(v)}{h'(x)} \quad (3.26)$$

As condições exigidas para  $M$  são atendidas se  $h$  satisfizer a hipótese padrão de ser duas vezes diferenciável com a primeira derivada positiva.

### 3.4.1 Movimento Browniano

Restringindo para o caso de filtro padrão  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$  de movimento Browniano padrão  $B$  em  $\mathbb{R}^d$ , para alguma dimensão  $d \in \mathbb{N}$ . Ou seja,  $\mathcal{F}_t$  é  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos nulos de  $\mathcal{F}$  e  $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ . Baseando essa hipótese em informação Browniana, pode-se deduzir a forma do processo de utilidade  $V$  correspondente ao processo de consumo  $c$  dado em  $D$ . Com movimento Browniano, dado um agregador  $(f, m)$ , com equivalente certeza  $m$ , que é certamente suave, é natural assumir que o processo utilidade  $V$  é um processo Itô, que tem representação diferencial estocástica da forma:

$$dV_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t \quad (3.27)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são processos de medida progressivas avaliados em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^d$ , respectivamente. Em qualquer tempo  $t$ , sob fortes condições técnicas teríamos:

$$\frac{d}{ds} m(\cdot \sim V_{t+s} | \mathcal{F}_t) |_{s=0} \quad (3.28)$$

De acordo com (DUFFIE e EPSTEIN, 1992), após substituições e cálculos se torna:

$$\mu_t M_t(V_t, V_t) + \frac{1}{2} M_{11}(V_t, V_t) \sigma_t \cdot \sigma_t = \mu_t + \frac{1}{2} A(V_t) \sigma_t \cdot \sigma_t, \quad \text{quase em toda parte}$$

onde  $A(x) = M_{11}(x, x)$ , que a partir de 3.24 implica que, quase em toda parte, em  $\Omega \times [0, T]$ ,

$$\mu_t = -f(c_t, V_t) - \frac{1}{2} A(V_t) \sigma_t \cdot \sigma_t \quad (3.29)$$

com  $d[V]_t/dt = \sigma_t \cdot \sigma_t$ . E  $A$  é o multiplicador de variância de  $m$ , definido em (DUFFIE

e EPSTEIN, 1992). A integrabilidade quadrática de  $V$  implica que para qualquer  $t$ ,  $E(V_T|\mathcal{F}_t) = V_t + E(\int_t^T -\mu_s d_s|\mathcal{F}_t)$  e desde que  $V_T = 0$ :

$$V_t = E \left[ \left( \int_t^T f(c_s, V_s) + \frac{1}{2} A(V_s) \frac{d}{d_s} [V]_s \right) | \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T] \quad (3.30)$$

Para a definição do processo de utilidade, toma-se como hipótese que  $(f, m)$  é um agregador, tal que  $m$  é suave com certeza e possui um multiplicador de variância mensurável  $A$ . Então,  $V$  é um processo de utilidade diferencial estocástica para  $c \in D$  sob  $(f, m)$  se  $V$  é o único semimartingale quadrado integrável<sup>24</sup> que satisfaz 3.30. Então, se houver um processo de utilidade estocástica  $V^c$  para cada  $c \in D$ , então a função  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $U(c) = V_0^c$  é a função utilidade recursiva gerada por  $(f, m)$ , ou seja,  $V_0^c$  é uma variável aleatória que toma um valor particular, definido como  $U(c)$  com probabilidade um.

A fim de que se estabeleça condições, para as quais haja uma relação em que para cada processo de consumo  $c$  exista uma única solução  $V$ , reduz-se o problema de existência para um problema de ponto fixo padrão, sendo necessário que ocorra mudança de variáveis, tal como definida por (DUFFIE e EPSTEIN, 1992), para que se elimine o multiplicador de variância  $A$  da formulação; possibilitando a demonstração de soluções de EDP para a utilidade diferencial estocástica no contexto Markoviano, definida como uma função do estado Markoviano subjacente. Com uma mudança de variável, qualquer  $\varphi$ , tal que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja estritamente contínua e com  $\varphi(0) = 0$ , torna-se possível formar agregadores equivalentes ordinalmente, tal que, se  $\bar{V} = \varphi \circ V$  é quadrado integrável,  $V$  satisfaz 3.30 se e somente se:

$$\bar{V}_t = E \left[ \int_t^T \bar{f}(c_s, \bar{V}_s) d_s | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.31)$$

o que é equivalente a  $\bar{m}(\sim V) = E(V)$ , o equivalente certeza ordinalmente equivalente

---

<sup>24</sup> A necessidade do processo  $c$  ser quadrado integrável é  $E \left( \int_0^T \|c_t\|^2 dt \right) < \infty$  ou quando  $T = +\infty$ , a necessidade é que  $E \left( \int_0^\infty e^{vt} \|c_t\|^2 dt \right) < \infty$ , com  $v \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{D}_v$  o espaço de possíveis processos  $c$ , como definido em (DUFFIE e EPSTEIN, 1992).

é igual a esperança da utilidade. Um agregador reduzido torna possível a escolha de qual agregador ordinalmente equivalente, dependendo da questão que se deseja responder (substituição ou aversão ao risco).

Vale ressaltar, as condições suficientes para um agregador normalizado  $f$  para a utilidade recursiva:

- $f$  é Lipschitz em utilidade, ou seja, existe um  $k$  para todo  $c \in \mathcal{C}$  e todo  $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ , nós temos  $|f(c, v) - f(c, w)| \leq k|v - w|$
- $f$  satisfaz uma condição de crescimento no consumo, ou seja, existe constantes  $k_1$  e  $k_2$ , tal que, para todo  $c \in \mathcal{C}$ , nós temos  $|f(c, 0)| \leq k_1 + k_2|c|$ .

**Teorema 2.**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  como um espaço de probabilidade filtrado, onde  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$  satisfaz as condições usuais. Com  $f : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável, Lipschitz em utilidade, e que satisfaça um condição crescente em consumo. Então, para qualquer processo de consumo  $c \in D$ , a um único semimartingale integrável quadrado  $\bar{V}$  que satisfaz 3.31

### 3.4.2 Normalização da Equação Diferencial Estocástica - Conceitos Necessários

Para definir a normalização da utilidade diferencial estocástica, tem-se  $(f, m)$  um agregador, com  $f$  arbitrária sujeita a  $f(c, c) = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ . A caracterização do processo utilidade envolve  $m$  através de seu multiplicador de variância  $A$ . Assim,  $h$  é qualquer função crescente em  $C^2$  que satisfaça  $h''(x)/h'(x) = A(x)$ . Segundo (DUFFIE e EPSTEIN, 1992), dada a recursividade, a escolha entre dois processos de consumo é determinada através da integração pelo equivalente de certeza em cada tempo  $t$  pela incerteza presente em pequenos intervalos de tempo  $[t, t + \varepsilon]$ . Em  $t$ ,  $V_t$  é conhecido com certeza, enquanto a incerteza representada por  $V_{t+s}$  é “pequena” dada a informação Browniana. As propriedades de  $m(\cdot)$  que são relevantes são as que são refletidas ao se avaliar pequenos riscos sobre a certeza.

Duas funções utilidades  $U$  e  $\bar{U}$  são ordinalmente equivalentes se houver uma mudança de variáveis  $\varphi$ ; de forma que  $\bar{U} = \varphi \circ U$ . Particularmente, as funções utilidade  $U$  definidas

por  $(f, A)$  e  $\bar{U}$  definida por  $(\bar{f}, \bar{A})$  são ordinalmente equivalentes e assim representam a mesma ordem de preferência do processo de consumo, concluindo que os agregadores  $(\bar{f}, \bar{A})$  e  $(f, A)$  são equivalentes, se houver variáveis  $\varphi$ :

$$f(c, z) = \frac{\bar{f}[c, \varphi(z)]}{\varphi'(z)}, \quad (c, z) \in C \times \mathbb{R}, \quad (3.32)$$

$$A(x) = \varphi'(x) \bar{A}[\varphi(x)] + \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \quad (3.33)$$

Segundo (DUFFIE e EPSTEIN, 1992), com  $(f, A)$  definindo uma mudança usual de variáveis  $\varphi$  que elimina o multiplicador de variância  $A$  da formulação; ao se considerar a possibilidade de escolha de  $\varphi$  para o novo multiplicador de variância  $\bar{A}$  definido por 3.33 como sendo igual a zero; é apenas suficiente que  $\varphi$  satisfaça a equação diferencial  $\varphi''(x) = A(x) \varphi'(x)$ . As soluções são da seguinte forma:

$$\varphi(v) = C_2 + C_1 \int_{v_0}^v \exp \left[ \int_{v_0}^u A(x) dx \right] du$$

com  $v_0$  arbitrário e  $C_1 > 0$  e  $C_2$  constantes, escolhidas de tal forma que  $\varphi(0) = 0$ . A importância de um agregador normalizado é simplificar a equação de Bellman.

Para definir a normalização da utilidade diferencial estocástica, tem-se  $(f, m)$  um agregador, com  $f$  arbitrária sujeita a  $f(c, c) = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ . A caracterização do processo utilidade envolve  $m$  através de seu multiplicador de variância  $A$ .

### 3.4.3 Propriedades da Utilidade Diferencial Estocástica

A função de utilidade estocástica apresenta propriedade sob condições naturais, definidas no espaço  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$  com a filtragem  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F} : t \in [0, T]\}$  satisfazendo as condições usuais deve ser aumentada e  $\mathcal{F}_0$  é trivial, ou seja, tem apenas eventos de probabilidade

0 ou 1. Se  $f$  é contínuo,  $f : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é regular, Lipschitz na utilidade e satisfaz um crescimento em condições de consumo. O agregador normalizado, segundo demonstrado em (DUFFIE e EPSTEIN, 1992)<sup>25</sup>,  $f$  é regular, garantindo a existência da função utilidade associada. As proposições serão citadas e as provas encontram-se em (DUFFIE e EPSTEIN, 1992)<sup>26</sup>.

**Proposição.** Continuidade: A função utilidade diferencial estocástica  $U, D \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

**Proposição.** Monotonicidade para o Valor Terminal: Com  $\tau$  avaliado em  $[0, T]$  sendo o tempo de parada. Supondo  $Y \geq W$ , para um  $Y$  e  $W$  mensurável em  $\mathcal{F}$  em  $L^1(P)$ . Para qualquer  $c \in D$  dado, com  $V = V^{c,Y}$  e  $\tilde{V} = V^{c,W}$  por  $V_t^{c,Y} = E[\int_t^\tau f(c_s, V_s^{c,Y})d_s + Y | \mathcal{F}_t]$ . Então  $V \geq \tilde{V}$ .

**Proposição.** Monotonicidade para Consumo: Se  $f$  é crescente no consumo, então  $U$  é crescente. Se  $f$  é estritamente crescente no consumo, então  $U$  é estritamente crescente.

Consistência no Tempo: Uma família adaptada  $\succeq = \{\succeq_{w,t}\}$  de ordens binárias em  $D$  é consistente sob a condição de que para cada tempo de parada  $\tau \in \mathcal{T}$  e cada par  $c$  e  $\tilde{c}$  do processo de consumo em  $D$ , se as restrições dos processos de consumo a  $[0, \tau]$  coincidem:

$$P(c \succeq_\tau \tilde{c}) = 1 \Rightarrow c \succeq_0 \tilde{c}$$

e

$$P(c \succeq_\tau \tilde{c}) = 1 \text{ e } P(c \succ_\tau \tilde{c}) > 0 \Rightarrow c \succ_0 \tilde{c}$$

A partir da definição acima, há entendimento de que o consumo passado não afeta as preferências. Então, uma vez que a consistência ou as preferências recursivas são estabelecidas, pode-se aplicar programação dinâmica aos problemas de otimização de forma que as variáveis de estado refletindo consumo passado não são mais necessárias. Assim, a família de ordem de preferências gerada por  $f$  é consistente.

<sup>25</sup> Seção 3.4 do referido artigo.

<sup>26</sup> No item 4 do referido artigo.

**Proposição.** Concavidade: Supondo que  $f$  é um função côncava, então a função diferencial estocástica gerada por  $f$  é côncava.

**Proposição.** Aversão ao risco comparativa: Em  $\mathbb{F}$  uma filtragem padrão do movimento Browniano padrão em um espaço Euclidiano<sup>27</sup>, com  $U^*$  e  $U$  funções de utilidade diferencial estocástica gerada pelos agregadores  $(f, m^*)$  e  $(f, m)$  respectivamente, onde  $m^*$  e  $m$  têm multiplicadores de variância  $A^*$  e  $A$ . Supondo que os respectivos agregadores normalizados são uniformes, então  $U^*$  é mais averso ao risco que  $U$  se  $A^* \leq A$ . Tal condição é parecida com a que estabelece que  $U^*$  é mais avessa ao risco que  $U$ .

**Proposição.** Aversão ao risco: Supondo, para todo  $v \in \mathbb{R}$ , que  $f(\cdot, v) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava. Então a função utilidade recursiva gerada por  $f$  é avessa ao risco.

**Proposição.** Homoteticidade: O agregador  $(f, m)$ , que gera uma função utilidade recursiva  $U$ , é homotético se existe um agregador  $(f^*, m^*)$ , gerando uma função utilidade equivalente ordinalmente tal que a  $f^*$  é linearmente homogênea de grau um e o multiplicador de variância  $A^*$  de  $m^*$  é linearmente homogênea de grau -1.

### 3.4.4 Caracterização da Equação de Bellman no contexto de função utilidade recursiva

Apresentando a Equação de Bellman com  $J \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathcal{T})$ , uma função valor do problema de controle ótimo,  $c$  tem uma derivada delimitada  $J_x$  e, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{T}$

$$\sup_{\bar{c} \in \Gamma(x,t)} \mathcal{D}^{\bar{c}} J(x, t) + f[\bar{c}, J(x, t)] = 0 \quad (3.34)$$

com condição de fronteira  $J(x, T) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ . Supondo que existe uma função mensurável  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ , tal que, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{T}$ :

<sup>27</sup> O espaço euclidiano  $n$ - dimensional  $\mathbb{R}^n$  é o produto cartesiano de  $n$  fatores iguais a  $\mathbb{R} : \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ . Os elementos são listas de  $n$  termos reais  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Para cada  $i=1, 2, \dots, n$ , o termo  $x_i$  chama-se a  $i$ -ésima coordenada de  $x$ . Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , tem-se  $x = y$  se, e somente se,  $x_i = y_i$  se, e somente se,  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ . Toda igualdade entre dois elementos de  $\mathbb{R}^n$  equivale a  $n$  igualdades entre números reais.

$$C(x, t) \in \arg \max_{\bar{c} \in \Gamma(x, t)} \mathcal{D}^{\bar{c}} J(x, t) + f(\bar{c}, J(x, t)) \quad (3.35)$$

Considerando que  $X^*$  é o processo integrável quadrado resolvendo a equação estocástica diferencial:

$$dX_t^* = b[X_t^*, t, C(X_t^*, t)]dt + a[X_t^*, t, C(X_t^*, t)]dB_t \quad (3.36)$$

com  $X_0^* = X_0$  e o processo definido por  $c_t^* = C(X_t^*, t)$ , com  $t \in [0, T]$ . Se  $c^*$  é um processo integrável quadrado, então  $J$  é uma função valor do problema de controle e  $c^*$  é um controle ótimo.

O ótimo em tempo contínuo, para a função utilidade recursiva, é caracterizado pela equação de Bellman, que se apresenta como uma versão estendida da equação de HJB. Em um horizonte finito de tempo, um processo de estado controlado  $\{X_t\}$  e um agregador normalizado regular  $f$ . Com  $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathcal{J} \rightarrow 2^{\mathcal{C}}$  definindo o conjunto de controles admissíveis, tais que  $c_t$  devem ser escolhidos em um conjunto  $\Gamma(x, t)$  no tempo  $t$ , quando o estado atual  $X_t$  é  $x \in \mathbb{R}^n$ . Para um controle dado  $c \in D$ , o processo de estado  $\{X_t\}$  existe e é o único que resolve a equação:

$$dX_t = b(X_t, t, c_t) dt + a(X_t, t, c_t) dB_t \quad (3.37)$$

onde  $X_0$  é dado e  $b : \mathbb{R}^n \times \mathcal{J} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $a : \mathbb{R}^n \times \mathcal{J} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  são mensuráveis.

O processo  $c$  em  $D$  é um controle admissível se houver um processo estado integrável que resolva 3.37 e para todo  $t, c_t \in \Gamma(X_t, t)$ . Então,  $D^\Gamma$  é um conjunto de processo de controles admissíveis, com  $U$  representando a utilidade recursiva em  $D$  gerada por  $f$ , considerando o problema de controle:

$$\sup_{c \in D^\Gamma} U(c)$$

Um controle admissível  $c^*$  é ótimo se  $U(c^*) = \sup_{c \in D^\Gamma} U(c)$ .

### 3.5 O Caso Especial da Utilidade Aditiva

O caso padrão aditivo de esperança da função utilidade 3.19, com o processo de utilidade definido por  $V_t = E \left[ \int_{s \geq t} u(c_s) e^{-\beta(s-t)} ds | \mathcal{F}_t \right]$  corresponde ao agregador  $(f, m)$ , definido por  $f(c, v) = u(c) - \beta v$  e  $m(\sim V) = E(V)$  (DUFFIE e EPSTEIN, 1992):

$$\bar{V}_t = E_t \tag{3.38}$$

corresponde ao agregador  $(\bar{f}, \bar{A})$ , com  $A$  correspondendo ao multiplicador de variância, onde:

$$\bar{f}(c, v) = u(c) - \beta v, \quad \bar{A} = 0 \tag{3.39}$$

Se  $C = \mathbb{R}_+$  e  $u$  tem propriedades usuais, então podemos definir o agregador

$$f(c, v) = \beta \frac{u(c) - u(v)}{u'(v)}, \quad A(v) = \frac{u''(v)}{u'(v)} \tag{3.40}$$

Com o Lema de Itô aplicado em  $u(V_t)$  nos leva a crer que o processo utilidade correspondente  $V$  satisfaz

$$V_t = u^{-1}(\beta \bar{V}_t) = u^{-1} \circ E_t \left[ \beta \int_{s \geq t} u(c_s) e^{-\beta(s-t)} ds | \mathcal{F}_t \right] \tag{3.41}$$

Neste caso, as propriedades ordinais interessam e pode existir agregadores diferentes gerando funções utilidade ordinalmente equivalentes, segundo (DUFFIE e EPSTEIN, 1992).

Assim, é definido o contexto em que se caracteriza o problema e a importância de se considerar funções utilidades estocásticas, em especial as utilidades do tipo aditiva, que permitem a aplicação da HJB e do controle estocástico.

### 3.5.1 *Aplicação de Controle Estocástico em tempo contínuo*

Com a definição do contexto, pode-se apresentar o problema de controle estocástico em finanças para o Problema de Merton. Segundo , aplicando o controle estocástico para solução para problema de consumo e investimento ótimos em tempo contínuo, é necessário supor um processo de Itô em  $\mathbb{R}^{N+1}$  para os preços dos  $N+1$  ativos, definido por  $X = (X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(N)})$ . Para cada  $i \geq 1$ :

$$dX_t^{(i)} = \mu_i X_t^{(i)} dt + X_t^{(i)} \sigma^{(i)} dB_t, X_{(0)}^{(i)} > 0 \quad (3.42)$$

Com  $\sigma^i$  sendo a  $i$ -ésima linha da coluna da matriz  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^{N \times d}$  com linhas linearmente independentes e  $\mu_i$  é constante. Supondo  $\sigma^{(0)} = 0$ , tal que  $r = \mu_0$  representa a taxa de juros de curto prazo.

A utilidade do consumo é definida em um conjunto  $D$  dos pares de consumo  $(c, Z)$ , onde  $c$  é um processo adaptado de taxa de consumo não negativa com  $\int_0^T c_t dt < \infty$ , quase certamente, e  $Z$  é uma variável aleatória não negativa mensurável em  $\mathcal{F}_T$  descrevendo um processo de consumo não distorcido, com  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ , como anteriormente, definida por:

$$U(c, Z) = E\left[\int_0^T u(c_t, t) dt + F(Z)\right] \quad (3.43)$$

Segundo (DUFFIE, 2001), a utilidade segue as propriedades anteriormente esclarecidas. A estratégia de negociação pode ser descrita como um processo do tipo  $\theta = (\theta^{(0)}, \dots, \theta^{(N)})$  em  $\mathcal{L}(X)$ . Dada uma riqueza inicial  $w > 0$ , diz-se que  $(c, Z, \theta)$  é um

conjunto possível dentro da restrição orçamentária. Definindo a relação de pertinência  $(c, Z, \theta) \in \Lambda(w)$ , com  $(c, Z)$  sendo uma escolha de consumo em  $D$  e  $\theta \in \mathcal{L}(X)$  sendo uma estratégia de negociação que satisfaça:

$$\theta_t \cdot X_t = w + \int_0^t \theta_s dX_s - \int c_s d_s \geq 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.44)$$

e

$$\theta_T \cdot X_T \geq Z \quad (3.45)$$

Ou seja, na equação 3.44 a estratégia de negociação é não negativa e igual ao seu valor inicial de riqueza mais qualquer ganho vindo das negociações; tal restrição também pode ser vista como uma restrição de crédito. Já a equação 3.45, representa o valor terminal do portfólio, que é suficiente para satisfazer o consumo terminal. Para cada valor inicial da riqueza, como demonstrado na definição de utilidade estocástica, a questão é definida como

$$\sup_{(c, Z, \theta) \in \Lambda(w)} U(c, Z) \quad (3.46)$$

As estratégias de negociação podem ser representadas como frações da riqueza total  $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}$ , tais frações são aplicadas em ativos de risco cujos preços seguem o processo  $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$ , respectivamente. Para uma dada estratégia  $\theta$ , pode-se definir:

$$\varphi_t^{(n)} = \frac{\theta_t^{(n)} X_t^{(n)}}{\theta_t \cdot X_t}, \quad \theta_t \cdot X_t \neq 0 \quad (3.47)$$

Com  $\varphi_t^{(n)} = 0$ , se  $\theta_t \cdot X_t = 0$ .

Ao definir um processo para a variável de estado, obtém-se um problema de controle

padrão, permitindo que frações definam estratégias de negociações, o processo do preço  $X$  é visto como problema de controle, portanto, define-se um processo de estado de uma dimensão  $W$  para a riqueza total do investidor. Define-se a taxa de retorno de excesso esperada como  $\lambda_i = \mu_i - r$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}^N$ , um vetor em  $\mathbb{R}^N$  do ativo  $i$ . Com o processo de consumo  $c$  e o processo das frações de riqueza definido acima, define-se um processo para riqueza e avalia-se o processo de Itô que a riqueza  $W$  segue, e suas possibilidades para que se mantenha não negativo:

$$dW_t = [W_t(\varphi_t \cdot \lambda + r) - c_t]dt + W_t \varphi_t^T \sigma dB_t; W_0 = w \quad (3.48)$$

Para que continue negativo, um controle possível  $(c, \varphi)$  com propriedades tais  $\varphi_t = 0$  e  $W_t = c_t = 0$  para  $t$  maior que o tempo de parada  $\sup\{s : W_s = 0\}$ . Ou seja, quando não houver riqueza restante, não é possível consumo ou investimento diferentes de zero.

Para se definir o problema de controle é necessário definir os conjuntos  $(A, \mathcal{C}, \mathcal{Y}, g, h, f, F)$ :

- $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$  com  $(\bar{c}, \bar{\varphi})$ , representando o consumo corrente e as frações correntes da riqueza investida.
- $\mathcal{Y} = \mathbb{R}_+$ , com elemento  $w$  representando a riqueza corrente
- $\mathcal{C}$  é o conjunto de processo adaptado  $(c, \varphi)$  com valores pertencentes a  $\mathbb{R}_+$  e a  $\mathbb{R}^N$ , respectivamente, com  $\int_0^T c_t dt < \infty$  quase certamente e  $\int_0^T \varphi_t \cdot \varphi_t dt < \infty$  quase certamente.
- $g[(\bar{c}, \bar{\varphi}), w] = w \bar{\varphi} \cdot \lambda + r w - \bar{c}$
- $h[(\bar{c}, \bar{\varphi}), w] = w \bar{\varphi}^T \sigma$ .
- $f[(\bar{c}, \bar{\varphi}), w, t] = u(\bar{c}, t)$
- $F(w)$  é especificado em 3.43

Já que o controle é definido, os investidores devem consumir toda sua riqueza terminal; em contraste, a restrição anterior permitia ao investidor deixar uma riqueza final não consumida. Já que  $F$  é crescente, a distinção não é necessária. As definições de pertinência só são válidas se o processo de riqueza é não negativo e satisfaz o processo de Itô de riqueza, e  $W_T \geq Z$  e  $\varphi_t$  definido por 3.47.

### 3.6 Solução para o problema de Merton

A equação de Bellman para o problema de Merton, a um nível corrente de riqueza  $w > 0$  é definida por:

$$\sup_{(\bar{c}, \bar{\varphi}) \in A} \{ \mathcal{D}^{\bar{c}, \bar{\varphi}} J(w, t) + u(\bar{c}, t) \} = 0 \quad (3.49)$$

onde

$$\mathcal{D}^{\bar{c}, \bar{\varphi}} J(w, t) = J(w, t)(w\bar{\varphi} \cdot \lambda + rw - \bar{c}) + J_t(w, t) + \frac{w^2}{2} \bar{\varphi}^T \sigma \sigma^T \bar{\varphi} J_{ww}(w, t) \quad (3.50)$$

com condição de fronteira:

$$J(w, T) = F(w), w \geq 0 \quad (3.51)$$

Para qualquer  $t$ ,  $J(\cdot, t)$  pode ser considerado como a função utilidade indireta do investidor para a riqueza no tempo  $t$ . Já que o interesse está nas soluções não negativas:

$$J(0, t) = \int_t^T u(0, s) ds + F(0), \quad t \in [0, T] \quad (3.52)$$

Considerando que para cada  $t$ ,  $u(\cdot, t)$  é estritamente côncava e duas vezes diferenciável

em  $(0, \infty)$ , então a condição de primeira ordem para a escolha ótima interior de  $\bar{c}$ , implica que  $\bar{c} = C(w, t)$ , onde

$$C(w, t) = I[J_w(w, t), t] \quad (3.53)$$

tomando  $I[u_c(x, t), t] = x$  para todo  $x$  e  $t$ . Assumindo que a função utilidade indireta para a riqueza é estritamente côncava, a condição de primeira ordem para a escolha ótima em 3.49 implica em  $\bar{\varphi} = \Phi(w, t)$ , onde:

$$\Phi(w, t) = \frac{-J_w(w, t)}{wJ_{ww}(w, t)}(\sigma\sigma^T)^{-1}\lambda \quad (3.54)$$

As frações ótimas de portfólio são dadas por um vetor fixo de pesos do portfólio multiplicado pela medida Arrow-Pratt de tolerância risco relativa da função de utilidade indireta ( $\tilde{\varphi} = (\sigma\sigma^T)^{-1}\lambda$ ).

Segundo (DUFFIE, 2001), ao se determinar retornos distribuídos de forma gaussiana homogeneamente ao longo do tempo e utilidade aditiva, já é suficiente para tentar resolver o problema de escolha do portfólio ótimo para qualquer investidor que deseja realocar todos seus investimentos em ativos de risco em um fundo mútuo, que constitui por si só um ativo. Tal fundo investe nos ativos de risco, negociando entre eles, a fim de manter as proporções dadas  $\tilde{\varphi}$  em cada ativo. Cada investidor deveria ficar satisfeito ao investir apenas no fundo mútuo e emprestando e pegando emprestado ativos sem risco. Vale ressaltar que diferentes investidores possuirão diferentes frações de sua riqueza no fundo mútuo, dependendo de sua aversão ao risco e de sua função de utilidade indireta da riqueza.

Apresentado o caso em que  $u = 0$  e  $F(w) = \frac{w^\alpha}{\alpha}$  para o coeficiente  $\alpha \in (0, 1)$ ; a aversão relativa ao risco associada é  $1 - \alpha$  e a função utilidade associada é do tipo aversão ao risco absoluta hiperbólica (HARA), pois fornece uma solução explícita para o consumo no problema de Merton - pode-se usar formas mais relaxadas para as condições de regu-

laridade ou ainda generalizar a hipótese de aditividade- com  $F$  estritamente crescente, a escolha de consumo intermediário ótimo  $c^*$  deve ser zero. No contexto da utilidade da família HARA, supondo  $Z$  como consumo terminal ótimo para um nível inicial de riqueza 1. Para um novo nível de riqueza  $w$  para algum  $w \in (0, \infty)$ ; com  $wZ$  associado ao consumo terminal ótimo, obtido através de uma combinação possível do orçamento, a partir do nível de riqueza 1, com estratégia  $\theta$  escolhida conforme as restrições para que satisfaça  $Z = \theta_t \cdot X_t$ ; devido a linearidade das integrais estocásticas,  $w\theta$  é um estratégia possível para dado nível inicial de riqueza  $w$  e assim,  $w\theta_T \cdot X_T = wZ$ .

Se houvesse algum consumo terminal alternativo  $\hat{Z}$  possível dentro da restrição orçamentária com riqueza inicial  $w$  e com utilidade em um nível mais alto que  $Z$

$$E\left(\frac{\hat{Z}^\alpha}{\alpha}\right) > E\left[\frac{(wZ)^\alpha}{\alpha}\right] \quad (3.55)$$

haveria uma contradição. Dividindo-se a equação acima por  $\frac{w^\alpha}{\alpha}$  tem-se como resultado:

$$E\left[\left(\frac{\hat{Z}}{w}\right)^\alpha\right] > E(Z^\alpha) \quad (3.56)$$

Dessa forma,  $\frac{\hat{Z}}{w}$  pode ser financiada com riqueza inicial 1, porém tal equação 3.56 apresentada contradiz a otimalidade de  $Z$  para o nível de riqueza inicial 1. Assim, para um nível inicial de riqueza  $w$ , o consumo terminal ótimo é  $wZ$ . Então:

$$J(w, 0) = E\left[\frac{(wZ)^\alpha}{\alpha}\right] = \frac{w^\alpha}{\alpha} K \quad (3.57)$$

com  $K = E(Z^\alpha)$ . Definindo  $K$  como dependente de todos os parâmetros básicos apresentados  $(\lambda, r, \sigma, \alpha, T)$ , construiu-se uma hipótese plausível para a função utilidade indireta  $J(\cdot, 0)$ . Considerando  $t \in (0, T)$  a utilidade ótima restante pode ser obtida ao se construir o problema dentro de um horizonte de tempo  $T - t$  ao invés de  $T$ , da mesma maneira

descrita acima. Então a utilidade indireta apresenta-se como  $J(w, t) = k(t)w^\alpha/\alpha$  para uma função  $k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Para a aplicação da fórmula de Itô, é necessário que  $J$  seja diferenciável, havendo necessidade de que o  $k$  seja continuamente diferenciável.

Assim, tais condições sendo atendidas, para todo  $(w, t)$ :

$$\Phi(w, t) = \frac{(\sigma\sigma^T)^{-1}\lambda}{1 - \alpha} \quad (3.58)$$

ou seja, para frações fixas de portfólio. Já que a aversão ao risco relativa corresponde a  $1 - \alpha$ , a fração total de riqueza investida em ativos de risco é decrescente; e com  $u = 0$  tem-se:

$$C(w, t) = 0 \quad (3.59)$$

Pode-se substituir as equações de frações e consumo na equação de Bellman 3.49. Ao usar a nova definição para a utilidade indireta ( $J(w, t) = k(t)w^\alpha/\alpha$ ), atinge-se a equação diferencial ordinária:

$$k'(t) = -\epsilon k(t) \quad (3.60)$$

definindo

$$\epsilon = \frac{\alpha\lambda^T(\sigma\sigma^T)^{-1}\lambda}{2(1 - \alpha)} + r\alpha$$

Com a condição de fronteira 3.51:

$$k(T) = 1 \quad (3.61)$$

Após substituições, chega-se a:

$$k(t) = e^{\epsilon(T-t)}, \quad t \in [0, T] \quad (3.62)$$

Substituindo-se na utilidade indireta  $J(w, t) = e^{\epsilon(T-t)}w^\alpha$ , que resolve a equação de Bellman, respeitando a condição de fronteira, tornando  $J$  um possível candidato para função valor. Para verificar tal candidato, deve-se testar também o controle ótimo  $(c^*, \varphi^*)$  dado por  $c_t^* = 0$  e  $\varphi_t^* = (\sigma\sigma^T)^{-1}\lambda/(1 - \alpha)$ . Com  $(c, \varphi)$  um controle arbitrário para a riqueza inicial  $w$ , com  $W$  representando o processo de riqueza<sup>3.48</sup>. A partir da equação de Bellman, da fórmula de Itô e da condição de fronteira, obtém-se:

$$J(w, 0) + \int_0^T B_t dB_t \geq F(W_T) \quad (3.63)$$

definindo  $B_t = J_w(W_t, t)W_t\varphi_t^T\sigma$ . Porque  $J$ , a função valor, é não negativa, a equação de Bellman e a fórmula de Itô também dão como resultado que processo não negativo  $M$ , pode ser representado por  $M_t = J(w, 0) + \int_0^t B_s dB_s$ . Com  $M$  sendo um Martingale local<sup>28</sup>; definido melhor em (DUFFIE, 2001), ao aplicar esperança nos dois lados da inequação 3.63, para qualquer controle possível, obtém-se  $J(w, 0) \geq E[F(W_T)]$ .

Para o controle ótimo, com o processo de riqueza ótimo, escreve-se  $J(w, 0) = E[F(W_t^*)]$ , assim verificando a otimalidade, pois o processo de riqueza é ótimo. Para o candidato a controle ótimo  $(c^*, \varphi^*)$ , a equação de Bellman resulta em:

$$J(w, 0) + \int_0^T B_t^* dB_t = F(W_T^*) \quad (3.64)$$

onde  $B_t = J_w(W_t^*, t)W_t^*\lambda^T(\sigma\sigma^T)^{-1}\sigma/(1 - \alpha)$ .

Com  $J_w(W_t^*, t) \times W_t^* = e^{\epsilon(T-t)}(W_t^*)^\alpha$ . A desigualdade em 3.63 torna-se uma igualdade

---

<sup>28</sup> Para maiores definições vide Capítulo 4 de (BAIN, 2007).

em 3.64, já que a equação de Bellman atingiu seu *supremum*. Já que  $J_w(W_t^*, t) \times W_t^* = e^{\epsilon(T-t)}(W_t^*)$  pode-se afirmar que  $E(\int_0^T \beta_t^* \cdot \beta_t^* dt) < \infty$ , o que faz tratar  $\int \beta^* dB$  como um martingale. Através da esperança em chega-se em 3.64  $J(w, 0) = E[F(W_t^*)]$ , o que verifica a otimalidade de  $(c^*, \varphi^*)$ , confirmando a utilidade ótima inicial  $J(w, 0) = e^{\epsilon T} w^\alpha / \alpha$ .

De acordo com (DUFFIE, 2001), essa abordagem leva a uma solução explícita para política de consumo ótimo. Vale ressaltar que tal abordagem só se refere a existência de uma estratégia ótima, mas não necessariamente retorna um solução explícita. O problema original de controle estocástico montado em um *background* Markoviano fornece soluções explícitas para estratégia ótima a partir das derivadas de uma função valor. Essas derivadas raramente fornecem soluções explícitas, porém podem ser aproximadas a partir de uma solução numérica da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, ao se aprofundar de métodos de diferença finita.

## 4 Implementação

Neste capítulo são apresentadas as ferramentas utilizadas para solução do problema proposto e seus resultados.

### 4.1 Solução HJB

Para a tentativa de solução explícita para uma estratégia de escolha de portfólio ótimo, adota-se primeiramente o método exposto em (STOJANOVIC, 2002). A ideia é simplificar a resolução usada no *software Mathematica*, ambientando em programas mais adequados as etapas das soluções propostas via simulação ou resolução de EDP.

A solução para a equação HJB em que se baseia este estudo é a solução implementada para o *software Mathematica*, baseada na dinâmica de precificação de ativos por log-normalidade, que resulta em soluções simbólicas ou explícitas, apesar da hipótese de log-normalidade não ser suficientemente descritiva. Um dos métodos para achar soluções explícitas é a solução de equações diferenciais parciais do tipo Monge-Ampère ou então por maximização direta do ganho esperado com respeito às regras de portfólio. Tais soluções são de fato úteis na rotina computacional.

Conforme (STOJANOVIC, 2002), a função utilidade mede a utilidade da riqueza, considerando a riqueza total como o saldo total da conta de corretagem do investidor no tempo  $t$  por  $X = X(t)$ . A partir das experiências de negociações, é conhecido que a dor causada pela perda  $-dX$  é maior que o prazer proveniente do ganho  $dX > 0$ , tornando-se particularmente verdade quando  $X$  for sua riqueza total. Não há restrições adicionais no que diz respeito à tomada de riscos, o que está relacionado com a concavidade estrita da função utilidade sob tais circunstâncias. Considera-se a seguinte classe de funções utilidade:

$$\psi(X) = \frac{X^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

com  $0 < \gamma \neq 1$  enquanto para  $\gamma = 1$

$$\psi(X) = \log(X) \quad (4.1)$$

Com a concavidade estrita, quanto maior  $\gamma$ , mais conservador é o investimento, sendo o contrário verdadeiro, permite-se chamar  $\gamma$  de expoente de segurança.

#### 4.1.1 Implementando o Problema de Merton

Conforme o modelo apresentado por (STOJANOVIC, 2002), os preços de mercado dos ativos são definidos pelo modelo Log-Normal:

$$dS(t) = S(t)adt + S(t)\sigma dB(t) \quad (4.2)$$

Com  $S(t) = \{S_1(t), \dots, S_m(t)\}$  são os preços de ativos, e o vetor  $a = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathbb{R}^m$  é o vetor das taxas de apreciação correspondentes aos ativos,  $\sigma \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é a matriz de volatilidade e  $B(t) = \{B_1(t), \dots, B_n(t)\}$  é o vetor de  $n$  movimentos Brownianos independentes. Como hipótese,  $\sigma \cdot \sigma^T$  é invertível, considerando  $m > n$ , ou seja, não é permitido perfeita correlação entre os preços. O saldo da conta do investidor é representado por  $C(t)$  no tempo  $t$ :

$$dC(t) = rC(t)dt + dc(t) \quad (4.3)$$

onde  $r$  é a taxa de juros e  $dc(t)$  representa as transações de caixa. Com  $dc(t) > 0$  representando as entradas e  $dc(t) < 0$ , as saídas, como consequência de venda e compras de ativos.  $C(t)$  ainda pode assumir valores negativos, representando empréstimos cedidos a mesma taxa de juros  $r$ . A quantidade que pode ser negociada é  $X(t)$ .

O problema concentra-se em construir uma estratégia de negociação, ou seja, uma

função vetor -avaliada  $\Pi(t, X) = \{\Pi_1(t, X), \Pi_2(t, X), \dots, \Pi_m(t, X)\}$ , onde  $\Pi_j(t, X)$  é o valor de caixa, positivo ou negativo, dependendo se a posição é vendida ou comprada. Neste modelo, as estratégias não podem ser dependentes de preços de ativos particulares. As estratégias permitirão sugerir porcentagens do total da riqueza a serem investidas em uma companhia em particular. Para manter tais estratégias, será necessário negociação perpétua para capturar as mudanças de preços dos ativos, se assemelhando ao que os profissionais fazem e não ao que é feito por investidores individuais.

A partir dessas hipóteses, a riqueza total pode ser escrita como:

$$X(t) = C(t) + \sum_{i=1}^m \Pi_i(t, X(t)) = C(t) + \Pi(t, X(t)) \cdot I_m \quad (4.4)$$

$I_m$  é introduzido para facilitar os cálculos, um  $m$ -vetor com todos os componentes iguais a 1:  $I_m = \{1, 1, \dots, 1\}$ . Então, o saldo da conta-caixa será:

$$C(t) = X(t) - \Pi(t, X(t)) \cdot I_m \quad (4.5)$$

Considera-se, no modelo, o auto-financiamento, portanto, as variações na conta, anteriormente citadas como entradas e saídas, adquirem importância. Toma-se  $v(t, X(t))$  como um vetor de números, as frações são permitidas, de ativos de cada companhia, em particular, em um portfólio, similar a maneira descrita em (DUFFIE, 2001).

$$v(t, X(t)) = \frac{\Pi(t, X(t))}{S(t)}$$

Durante um intervalo de tempo  $dt$  o vetor das transações totais de caixa de uma determinada companhia no portfólio será:

$$\begin{aligned}
v(t, X(t)) - v(t + dt, X(t + dt))S(t + dt) &= \\
&= \left( \frac{\Pi(t, X(t))}{S(t)} - \frac{\Pi(t+dt, X(t+dt))}{S(t+dt)} \right) S(t + dt) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

A decisão de tomada de decisão só pode ser efetuada em  $t + dt$  e não antes, então o preço usado para o ativo será  $S(t + dt)$  e a conta-caixa no intervalo  $dt$  será:

$$dc(t) = (v(t, X(t)) - v(t + dt, X(t + dt)))S(t + dt) \quad (4.7)$$

Conforme (STOJANOVIC, 2002), após algumas substituições:

$$(\Pi(t, X(t)) - \Pi(t + dt, X(t + dt))).I_m + \Pi(t, X(t)) \cdot \frac{dS(t)}{S(t)} \quad (4.8)$$

Agora, pode-se derivar a evolução da riqueza:

$$\begin{aligned}
dX(t) &= dC(t) + \Pi(t + dt, X(t + dt)) - \Pi(t, X(t)).I_m \\
&= rC(t)dt + dc(t) + (\Pi(t + dt, X(t + dt)) - \Pi(t, X(t)).I_m \\
&= rC(t)dt + (\Pi(t, X(t)) - \Pi(t + dt, X(t + dt))).I_m + \\
&\quad \Pi(t, X(t)) \cdot \frac{dS(t)}{S(t)} + (\Pi(t + dt, X(t + dt)) - \Pi(t, X(t))).I_m \\
&= rC(t)dt + \Pi(t, X(t)) \cdot \frac{dS(t)}{S(t)} \\
&= r(X(t) - \Pi(t, X(t)).I_m)dt + \Pi(t, X(t)) \cdot (adt + \sigma \cdot dB(t)) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Assim, a equação diferencial estocástica da evolução da riqueza será:

$$dX(t) = (\Pi(t, X(t)) \cdot (a - r) + rX(t))dt + \Pi(t, X(t)) \cdot \sigma \cdot dB(t) \quad (4.10)$$

A EDS final não dependerá das transações de caixa. Tal modelo permite trabalhar com simulação de Monte Carlo, podendo abranger maior número de diferentes ações, com maior número de EDS, que sera reduzido a uma única EDS com valor escalar.

## 4.2 Implementação não-ótima

Conforme (STOJANOVIC, 2002), define-se  $m$  como o número de ações no mercado considerado *en* como as fontes de aleatoriedade,  $T1$  como o horizonte de tempo,  $k$  o número de subintervalos na discretização,  $X_0$  a riqueza inicial e  $r$  a taxa de juros. Primeiro, constrói-se uma matriz, de forma aleatória, a matriz de volatilidade de dimensão  $(n \times) 3 \times 5$ , chegando a volatilidade individual de cada ação, assumindo que as taxas de apreciação são conhecidas pelos investidores, e da mesma forma, encontradas de forma aleatória no modelo. O preço inicial das ações também é determinado de forma aleatória. Em um primeiro exemplo, podemos considerar três ações e cinco fontes de aleatoriedade no mercado<sup>29</sup>.

A evolução de mercado contribui para a solução do problema da EDS do mercado de ações de forma explícita. Tais ferramentas são alcançadas através da montagem de listas de forma aleatória no Matlab, ou seja, utilizando a ferramenta computacional. Listas são montadas para a evolução de mercado, para o movimento Browniano, seguido pelos preços - a partir do qual se chega na evolução de mercado - fornecendo, assim, o acompanhamento da evolução do preço de cada ação ao longo do tempo.

## 4.3 Simulação de Monte Carlo

Para a simulação de Monte Carlo, uma estratégia simples de *hedging* é escolhida, segundo (STOJANOVIC, 2002): será mantida fixa a fração do total da riqueza mantida em cada ativo, enquanto o restante será mantido na conta-caixa. Na implementação não-ótima as frações são previamente fixadas e então observa-se a evolução da riqueza ao longo do tempo. A partir das equações descritas acima, pode-se chegar na evolução de mercado (fig.4.1a), da riqueza e na evolução do conta-caixa (fig.4.1b). Pode-se ainda observar a

---

<sup>29</sup> As implementações não - ótima e ótima poderão ser encontradas no Apêndice.

evolução do saldo da conta-caixa (fig.4.1d) e o fluxo geral na conta-caixa (fig.4.1c).

Observa-se que a Evolução de Riqueza e do Caixa (fig.4.1b) são decrescentes, mostrando um fluxo esparso mas com quantias maiores no início e negociações densas mas em menor tamanho no final. O saldo na conta-caixa sofre variações e mostra-se decrescente. Nas seguintes secções uma nova estratégia será apresentada e implementada, na tentativa de se observar uma melhora.

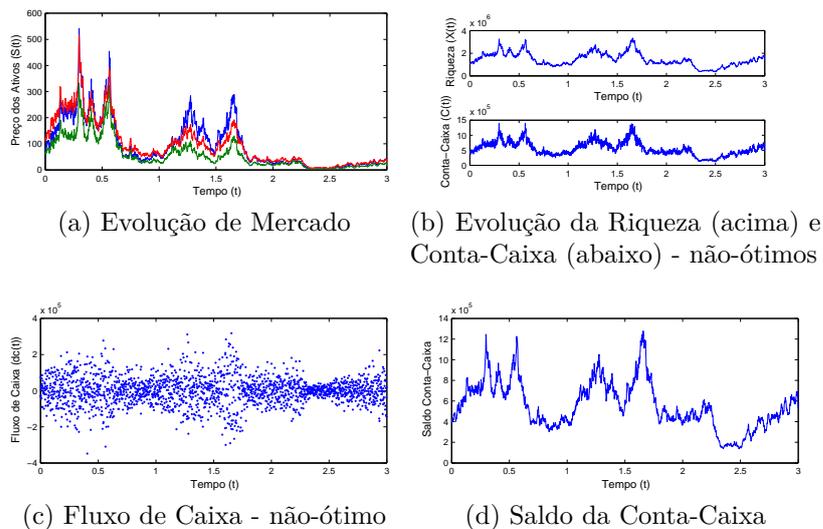


Figura 4.1: Implementação não-ótima

## 4.4 O Problema de Controle Estocástico

De acordo com (STOJANOVIC, 2002), o tipo de problema de controle estocástico permite apenas a utilização de expressões do tipo de maximização de valor esperado da utilidade do balanço final, para um dado valor do expoente de segurança  $\gamma > 0$ , o problema é achar a estratégia ótima tal que:

$$\sup_{\Pi} E_{t,X} \psi_{\gamma}(X^{\Pi}(T)) = \max_{\Pi} E_{t,X} \psi_{\gamma}(X^{\Pi}(T)) = E_{t,X} \psi_{\gamma}(X^{\Pi^*}(T)) \quad (4.11)$$

onde  $\psi_{\gamma}$  é a função utilidade da riqueza. No problema de controle ótimo deve-se estudar a função valor dada por:

$$\varphi(t, X) = \sup_{\Pi} E_{t,X} \psi_{\gamma}(X^{\Pi}(T)) \quad (4.12)$$

Para qualquer estratégia fixa  $\Pi$  e qualquer função diferenciável  $\varphi$ - não necessariamente a função valor - com a derivada de Euler

$$\begin{aligned} E_{s,X} \varphi(T, X(T)) - \varphi(s, x) &= E_{s,X} \int_s^T (\varphi_t(t, X(t)) + \varphi_x(t, X(t)) \\ &\quad (\Pi(t, X(t)) \cdot (a - r) + rX(t)) + \\ &\quad \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X(t)) \Pi(t, X(t)) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X(t))) dt \end{aligned}$$

estabelecendo, então  $\varphi(T, X) = \psi_{\gamma}(X)$ , então:

$$\begin{aligned} E_{s,X} \psi_{\gamma}(X^{\Pi}(T)) &= \varphi(s, x) + E_{s,x} \int_s^T (\varphi(t, X(t)) + \\ &\quad \varphi_x(t, X(t)) (\Pi(t, X(t)) \cdot (a - r) + rX(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X(t)) \Pi(t, X(t)) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X(t))) dt \end{aligned}$$

Se a EDP é verdadeira, então:

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, X) + \varphi_x(t, X) (\Pi(t, X) \cdot (a - r) + rX) + \\ \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X) \Pi_{x,x}(t, X) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X) = 0 \end{aligned}$$

e, assim:

$$E_{s,X} \psi_{\gamma}(X^{\Pi}(T)) = \varphi(s, x) \quad (4.13)$$

Segundo (STOJANOVIC, 2002), supõe-se que é possível resolver a EDP de HJB, que não é linear

$$\max_{\Pi(t,X)} \left[ (\varphi_t(t, X(t)) + \varphi_x(t, X(t)) (\Pi(t, X(t)) \cdot (a - r) + rX(t)) + \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X(t)) \Pi(t, X(t)) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X(t))) \right] = 0 \quad (4.14)$$

com a condição terminal

$$\varphi(T, X) = \psi_\gamma(X) \quad (4.15)$$

Sendo  $\Pi^*(X, t)$  a estratégia para o máximo obtido para 4.14. Isso significa que:

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, X) + \varphi_x(t, X) (\Pi^*(X, t) \cdot (a - r) + rX) + \\ \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X) \Pi^*(X, t) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi^*(X, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

enquanto:

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, X) + \varphi_x(t, X) (\Pi(X, t) \cdot (a - r) + rX) + \\ \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X) \Pi(X, t) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(X, t) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

para qualquer outro  $\Pi$

$$\begin{aligned} E_{s,X} \psi \left( X^{\Pi^*}(T) \right) &= \varphi(s, x) \geq \varphi(s, x) + E_{s,X} \int_s^T (\varphi_t(t, X(t)) + \varphi_x(t, X(t)) \\ &\quad (\Pi(X(t), t) \cdot (a - r) + rX(t)) + \\ &\quad \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X(t)) \Pi(X(t), t) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(X(t), t)) dt \\ &= E_{s,X} \psi \left( X^\Pi(T) \right) \end{aligned}$$

então

$$E_{s,X}\psi\left(X^{\Pi^*}(T)\right) = \max_{\Pi} E_{s,X}\psi\left(X^{\Pi}(T)\right) = \varphi(t, X) \quad (4.18)$$

Já que a equação EDP HJB é degenerada e não linear, não é possível resolvê-la diretamente. É necessário transformá-la em outro tipo de equação de resolução mais fácil, apesar de ainda possivelmente degenerada e não linear, a equação Monge-Ampère.

## 4.5 Equação Monge Ampère

As EDP HJB de Monge Ampère não são resolvidas de forma direta, devem ser transformadas em uma equação possivelmente não degenerada e totalmente não linear. No (STOJANOVIC, 2002), as equações se baseiam na forma mais simples de tais equações:

$$Det(D^2\varphi) = h \quad (4.19)$$

Em um domínio convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , para uma dada função  $h > 0$  e  $Det$  é o determinante; quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a equação se torna:

$$u^{(0,2)}(x, y) u^{(2,0)}(x, y) - u^{(1,1)}(x, y)^2 = h \quad (4.20)$$

com a condição de fronteira  $u = u_b$  em  $\partial\Omega$ . Com  $u_b = 0$  e  $u$  sendo uma solução,  $-u$  também é solução. Se for desejada uma solução única, condições adicionais devem ser feitas; em  $\mathbb{R}^n$  seria a que a matriz Hessiana  $D^2\varphi$  negativa. Se a hipótese de  $h \geq 0$  for feita, a equação se torna degenerada e suave, o que não garante a existência de uma solução diferenciável.

Com  $\Pi^*$  representando a estratégia ótima que a equação HJB atinge seu máximo, o gradiente de  $f$ :

$$f(\Pi) = \varphi_x(t, X) \Pi \cdot (a - r) + \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X) \Pi \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi \quad (4.21)$$

para qualquer  $(t, X)$  fixo, tem que ser igual a zero.

$$\nabla_{\Pi} f(\Pi^*) = \varphi_x(t, X) (a - r) + \varphi_{x,x}(t, X) \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi^* = 0 \quad (4.22)$$

$f$  é maximizada e já que  $\sigma \cdot \sigma^T$  é definida positiva, para que se tenha um máximo a seguinte condição é necessária:

$$\varphi_{xx}(t, X) < 0 \quad (4.23)$$

para qualquer  $(t, X)$ . Assumindo  $\sigma \cdot \sigma^T$  como invertível, tem-se:

$$\Pi^*(X, t) = -\frac{\varphi_x(t, X)}{\varphi_{x,x}(t, X)} (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r) \quad (4.24)$$

Já que a função valor ainda é desconhecida, substitui-se tal resultado em 4.14 na equação HJB, ou a sua equivalente 4.16 gerando:

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, X) + \varphi_x(t, X) \left( \left( -\frac{\varphi_x(t, X)}{\varphi_{x,x}(t, X)} (a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r) \right) + rX \right) + \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_x(t, X)}{\varphi_{x,x}(t, X)} (a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r) \right) \varphi_x(t, X) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

consequentemente:

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, X) \varphi_{xx}(t, X) + \varphi_x(t, X) \varphi_{xx}(t, X) rX \\ - \frac{1}{2} (\varphi_x(t, X))^2 (a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Junto a 4.26 é associada uma condição terminal:

$$\varphi(T, X) = \psi_\gamma(X) \quad (4.27)$$

com a condição 4.23, que é análoga a condição de concavidade na forma mais simples da equação de Monge Ampère. Devido a degeneração, nenhuma condição de fronteira é necessária ou possível quando  $X = 0$ . Acha-se a solução simbólica para a equação de Monge-Ampère. A solução explícita para o problema da regra de portfólio é possível com a estrutura multiplicativa da equação e a condição terminal adotada.

## 4.6 Estratégia de *Hedging* de Portfólio Ótimo implementada

A diferença é que na estratégia ótima, as frações da riqueza investidas em cada ativo não são previamente determinadas. Na análise anterior, escolhia-se a fração da riqueza alocada nos ativos; agora, a fração é em função do valor de  $\gamma$ ; e para a análise pode-se escolher valores do tipo  $\gamma \neq 1$  ou  $\gamma = 1$ . Define-se um valor positivo para  $\gamma$  e observa-se o comportamento do mercado, riqueza, caixa e fluxo de caixa, como anteriormente, agora com  $\gamma = 7$ .

Assim, em um mesmo ambiente de mercado, observamos que a evolução da riqueza na estratégia ótima é crescente e assume valores maiores, enquanto na implementação não-ótima a riqueza chega a valores nulos (lembrando que, no modelo, não é permitido empréstimo), e também apresenta maiores variações ao longo de sua evolução. A evolução da conta-caixa na estratégia ótima, também atinge valores maiores que na estratégia não-ótima (fig.4.2a), o que mostra uma melhoria na adoção da estratégia ótima, pois a conta-caixa da implementação ótima mostra evolução crescente enquanto na implementação

não-ótima a conta-caixa tem evolução decrescente ao longo do tempo (em 3 períodos).

O mesmo tipo de evolução da conta-caixa é observado em seu saldo; apresenta evolução crescente na implementação ótima e decrescente na implementação não-ótima. Para a estratégia ótima, o gráfico de número de ativos negociados (fig.4.2d) é mostrado; tal gráfico sugere se o tamanho da riqueza é apropriado para determinada estratégia, dependendo também do intervalo escolhido para a discretização do tempo, se o *hedging* é feito com mais frequência, ou seja, se há maior volume (quantidade) de negociação, provavelmente o tamanho médio (valor) das negociações é menor. O gráfico pode ser analisado junto com o gráfico de fluxo (fig.4.2b). As maiores negociações acontecem no final do horizonte de tempo. O fluxo de caixa mostra a compra (valores negativos) e a venda (valores positivos) de ativos. Há maior valor de negociação no fluxo de ativos no final do período. Neste exercício, considera-se o *short-selling*, havendo assim, valores negativos, representado por investimentos negativos em ativos.

A partir do cálculo das estratégias, podemos observar a função valor  $\varphi_\gamma(t, X) = -\frac{1}{\gamma-1} e^{\frac{(t-T)(\gamma-1) \left( 2r\gamma + (a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma')^{-1} \cdot (a-r) \right)}{2\gamma}} X^{1-\gamma}$ . A função valor é o objeto central para a implementação da estratégia ótima. A observação de suas características, de fato, é interessante, pois fornece informação em relação a facilidade de cálculos, já que para o cálculo da regra de portfólio ótimo é necessário o uso da derivada primeira e segunda da função valor; se a função valor for muito achatada pode haver complicações para o cálculo de sua derivada e outro caminho deverá ser tomado. A seguir, temos os gráficos sobre a evolução da riqueza (fig.4.2a), da conta-caixa (fig.4.2a) e a função valor (4.3)<sup>30</sup>. A simulação considera o mesmo ambiente de mercado apresentado na implementação não-ótima (fig.4.1a), portanto a evolução de mercado é a mesma que na implementação não-ótima. Considerando que a inferência sobre a taxa de apreciação dos investidores é precisa e o modelo

---

<sup>30</sup> A função valor tem sua evolução mostrada em função de  $t$  e da riqueza  $X$ . Lembrando que são considerados 3 períodos e usada uma discretização do tempo na simulação. O valor inicial da riqueza é escolhido como  $X_0 = 10^6$ . Em todos os gráficos, a partir da simulação da estratégia ótima, é escolhido um  $\gamma = 7$ , considerando  $X$  como a riqueza total do investidor. A segunda derivada da função valor, quando considerada o tipo de utilidade usado, é um número negativo, já que restringe-se  $X > 0$  e assim, a concavidade estrita é garantida. Devido a estrutura da equação Monge Ampère e da condição terminal  $f(T) = 1$ , é possível a solução explícita para a HJB. Quanto maior for o valor de  $\gamma$ , mais conservador é o investimento. Com  $1 < \gamma < \infty$ , com  $\lim_{X \rightarrow 0} \psi_\gamma = -\infty$  e  $\lim_{X \rightarrow \infty} \psi_\gamma = 0$ , ou seja, o prazer do ganho infinito é finito.

Log-normal de preço de ativos esteja correto, a implementação ótima obtém sucesso.

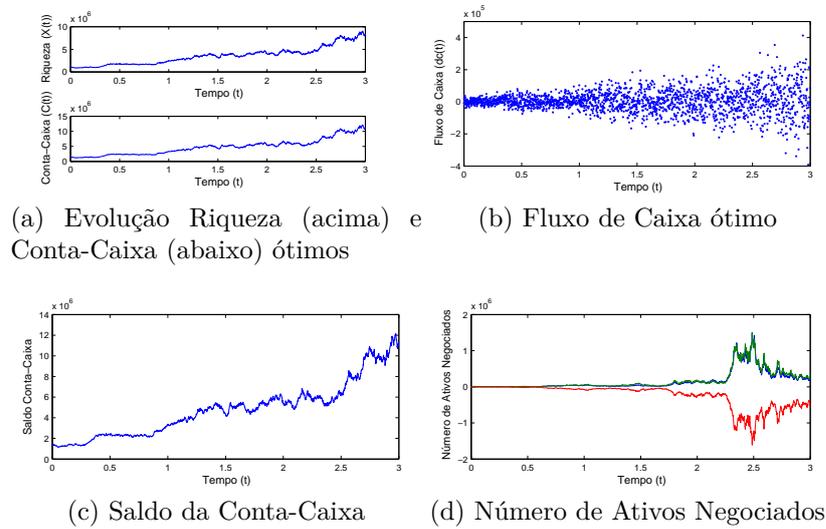


Figura 4.2: Implementação Ótima

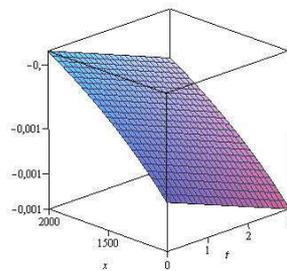


Figura 4.3: Função Valor da Estratégia Ótima

## 4.7 Extensões do Problema de Merton Clássico

### 4.7.1 Evolução do Saldo do Portfólio Ótimo

Aplicando a estratégia ótima, segundo (STOJANOVIC, 2002):

$$\Pi(t, X) = \frac{(\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r)}{\gamma} X = \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1}}{\gamma} X \quad (4.28)$$

com a EDE de evolução da riqueza:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left( X(t) \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1}}{\gamma} \cdot (a - r) + rX(t) \right) dt + \\ &\quad X(t) \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1}}{\gamma} \cdot \sigma \cdot dB(t) \\ &= X(t) \left( r + \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)}{\gamma} \right) dt + \\ &\quad X(t) \frac{\sqrt{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)}}{\gamma} dB_0(t) \end{aligned}$$

onde

$$B_0(t) = \frac{\frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1}}{\gamma} \cdot \sigma \cdot B(t)}{\frac{\sqrt{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)}}{\gamma}} = \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \sigma \cdot B(t)}{\sqrt{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)}} \quad (4.29)$$

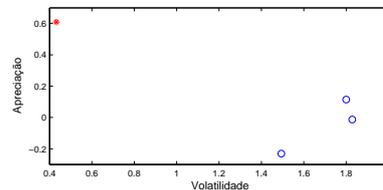
que seria um movimento Browniano em um única dimensão.

$$\begin{aligned} (dB_0(t))^2 &= \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)}{\sqrt{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)} \sqrt{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} (a - r)}} dt \\ &= \frac{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r)}{(a - r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \sigma} dt = dt \end{aligned}$$

Com a equação 4.26, é possível o conhecimento da volatilidade da riqueza e da taxa de apreciação da riqueza sob a regra de portfólio ótima e não-ótima. Lembrando que nas simulações anteriores foram considerados três ativos e inferência correta dos investidores sobre ataxa de apreciação no contexto do modelo Log-normal para preço de ativos.

A seguir, o gráfico (4.4a) nos mostra que, na estratégia ótima, a apreciação do portfólio é maior (em vermelho) do que as apreciações individuais dos ativos (em azul), enquanto a volatilidade do portfólio (em vermelho) é menor que as volatilidades individuais dos ativos (em azul). Ou seja, o portfólio da implementação ótima obtém um resultado melhor que os ativos individualmente. As medidas de volatilidade e apreciação são boas formas de se avaliar a estratégia implementada.

Na estratégia ótima, as frações de riqueza aplicadas nos ativos levam em consideração o expoente de segurança, escolhido como um número positivo e maior que um (aqui, o  $\gamma = 7$ ), ou seja, o prazer da riqueza infinita é finito, conforme Stojanovic (2002), quanto maior for o valor de  $\gamma$  mais conservador é o investimento.



(a) Volatilidade e Taxa de Apreciação - estratégia ótima (vermelho), ativos individuais(azul)

Figura 4.4: Implementação da Estratégia Ótima

### 4.7.2 *Dinâmica de Mercado tempo-dependente*

Pode-se generalizar a solução de portfólio ótimo para o problema com dinâmica de mercado tempo-dependente:

$$dC(t) = r(t) C(t) dt \quad (4.30)$$

e o preço dos ativos seguem uma EDE

$$dS(t) = S(t) a(t) dt + S(t) \sigma(t) .dB(t) \quad (4.31)$$

com a função vetor  $a(t) = \{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$  de taxas de apreciação dos ativos e  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é a matriz de volatilidade e  $n$  movimentos brownianos independentes  $B(t) = \{B_1(t), \dots, B_n(t)\}$  e a função utilidade para o valor final da riqueza será:

$$\psi_\gamma(X) = \frac{X^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (4.32)$$

Com a função valor do tipo:

$$\phi_\gamma = \frac{f(t) X^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (4.33)$$

com  $f(T) = 1$ ; substituindo na equação Monge-Ampère com coeficientes tempo-dependentes.

Resolve-se a ODE com a condição terminal e, em seguida, a função valor, obtendo-se uma solução para a equação Monge Ampère e a regra de portfólio ótimo. A regra ótima é do tipo

$$\frac{X \left( \sigma(t) \cdot \sigma(t)^T \right)^{-1} \cdot (a(t) - r(t))}{\gamma}$$

para qualquer  $\gamma > 0$ , que é a mesma fórmula para o caso de dinâmica de mercado tempo independente. Ou seja, mesmo que as condições de mercado (em relação ao tempo) mudem, se a estratégia aplicada em um tempo for aplicada de maneira ótima, então será a melhor estratégia no longo prazo, ou seja, é tempo-consistente. A resolução da ODE (fig.4.5) e a função valor (fig.4.6) são apresentados abaixo.

```

> restart
> u := (t, x, gama) -> f(t) * x^(1-gama)
      u := (t, x, gama) -> f(t) * x^(1-gama)
> pde1 := 2 * gama * diff(u(t, x, gama), t) - (gama - 1) * A * u(t, x, gama) = 0
      pde1 := -2 * gama * (d/dt f(t)) * x^(1-gama) - (gama - 1) * A * f(t) * x^(1-gama) = 0
> simplify(pde1)
      x^(1-gama) * (-2 * gama * (d/dt f(t)) + A * f(t) * gama - A * f(t)) / gama - 1 = 0
> ic := f(T) = 1
      ic := f(T) = 1
> ode := dsolve({pde1, ic}, f(t))
      ode := f(t) = e^(1/2 * ((gama - 1) * A * t) / gama)
> ii := simplify((5), 'symbolic')
      ii := f(t) = e^(-1/2 * ((gama - 1) * A * (T - t)) / gama)

```

Figura 4.5: Tela do Maple com a resolução da EDO para a resolução EDP *Monge- Ampère*

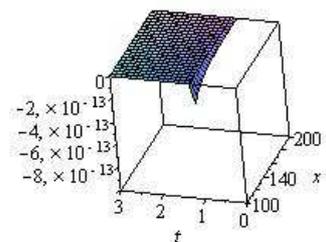


Figura 4.6: Função Valor na dinâmica tempo-dependente

### 4.7.3 Controle Estocástico com Restrições Afins

Relembrando o cenário do controle estocástico; o problema é achar uma regra ótima de negociação tal que  $\mu.\Pi^*(t.X) = \xi X$  e ainda:

$$\begin{aligned} \sup_{\Pi:\mu.\Pi(t,x)=\xi X} E_{t,X}\psi_\gamma\left(X^\Pi(T)\right) &= \max_{\Pi:\mu.\Pi(t,x)=\xi X} E_{t,X}\psi_\gamma\left(X^\Pi(T)\right) \\ &= E_{t,X}\psi_\gamma\left(X^{\Pi^*}(T)\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $\psi_\gamma$  é a função utilidade da riqueza. A função valor:

$$\varphi(t, X) = \sup_{\Pi:\mu.\Pi(t,x)=\xi X} E_{t,X}\psi_\gamma\left(X^\Pi(T)\right) \quad (4.35)$$

A EDP de HJB que caracteriza a função valor:

$$\begin{aligned} \max_{\Pi(t,x), \mu.\Pi(t,x)=\xi X} [\varphi_t(t, X) + \varphi_x(t, X) (\Pi(t, X) \cdot (a - r) + rX) + \\ \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X) \Pi(t, X) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X)] = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

com a condição terminal:

$$\varphi(t, X) = \psi_\gamma(X) \quad (4.37)$$

Deve-se maximizar:

$$f(\Pi) = \varphi_x(t, X) \Pi \cdot (a - r) + \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X) \Pi \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi \quad (4.38)$$

sob a restrição:

$$g(\Pi) = \Pi \cdot \mu^T - \xi X = 0 \quad (4.39)$$

De acordo com o multiplicador de Lagrange, existe um  $k$  vetor  $\lambda = \lambda(t, X)$ , tal que  $\nabla_{\Pi} f(\Pi) = \nabla_{\Pi} g(\Pi) \cdot \lambda = \nabla_{\Pi} g(\Pi) \cdot \lambda(t, X)$ .

Após alguns cálculos e substituições expostos em (STOJANOVIC, 2002), chega-se na equação Monge-Ampère

$$\begin{aligned} & \varphi_t(t, X) \varphi_{x,x}(t, X) + \\ & \varphi_{x,x}(t, X) \varphi_x(t, X) X \left( \xi \cdot \left( \mu \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot (a - r) + r \right) - \\ & \frac{1}{2} \varphi_x(t, X)^2 (a - r) \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \left( I_m - \mu^T \cdot \left( \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \right) \cdot \\ & (a - r) + \frac{1}{2} \varphi_{x,x}(t, X)^2 X^2 \xi \cdot \left( \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \xi \end{aligned} \quad (4.40)$$

(vide fig.4.7). Comparada com a EDP Monge-Ampère do modelo de Merton:

$$\varphi_t(t, X) \varphi_{x,x}(t, X) + \varphi_x(t, X) \varphi_{x,x}(t, X) X A + \varphi_x(t, X)^2 B = 0 \quad (4.41)$$

observamos um termo extra, e da mesma forma podemos analisar, a partir da função utilidade, o coeficiente  $\gamma$ .

Mesmo no caso em que a restrição é tempo-dependente, chega-se a mesma conclusão que no caso sem restrições. Se a cada tempo, aplica-se a conhecimento atual do mercado de maneira ótima, no fim, esta é a melhor maneira de atuação no longo prazo, lembrando que só é verdade para o caso em que a dinâmica do mercado depende somente do tempo.

A função valor (observável na fig.4.8), por sua vez, retorna a estratégia ótima, de forma simbólica:

$$\begin{aligned}
& (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (X(\mu^T \cdot (\mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T)^{-1} \cdot \xi - \\
& \quad \frac{1}{\gamma} (\mu^T \cdot (\mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T)^{-1} \cdot \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} - I_m) \cdot (a - r)))
\end{aligned}$$

com  $I_m$  representando a matriz identidade de dimensão  $m$ .

```

Maple 13 - Calculadora de Matemática
A HJB EDP com termo de função valor

[> restart

[> with(Statistics):
[> u := (t, x, gamma) -> f(t)x^(1-gamma)
                                     u := (t, x, gamma) -> f(t)x^(1-gamma)
[> pde2 := diff(u(t, x, gamma), t) * diff(u(t, x, gamma), x, x) + diff(u(t, x, gamma), x) * diff(u(t, x, gamma), x, x) * x * A + (diff(u(t, x, gamma), x))^2 * B + (diff(u(t, x, gamma), x, x))^2 * C = 0
pde2 :=
  (d/dt f(t)) x^(1-gamma) (f(t) x^(1-gamma) (1-gamma) - f(t) x^(1-gamma))
  + f(t) x^(1-gamma) (f(t) x^(1-gamma) (1-gamma) - f(t) x^(1-gamma)) A
  + f(t)^2 (x^(1-gamma))^2 B + (f(t) x^(1-gamma) (1-gamma) - f(t) x^(1-gamma))^2 C = 0
[> ode2 := simplify(pde2)
ode2 :=
  f(t) x^(1-gamma) (-d/dt f(t) gamma - f(t) A gamma + f(t) A gamma^2 + f(t) B - f(t) B gamma + f(t) gamma^2 C - f(t) gamma^2 C)
  - 1 + gamma
[> ic := f(T) = 1
ic := f(T) = 1
[> ode2 := dsolve([pde2, ic], f(t))
ode2 := f(t) =
  (1-gamma) (A gamma - B - gamma^2 C) t
  (1-gamma) (A gamma - B - gamma^2 C) T
  gamma
  gamma

```

Figura 4.7: Tela Maple13 cálculo da EDO para a EDP *Monge Ampère*

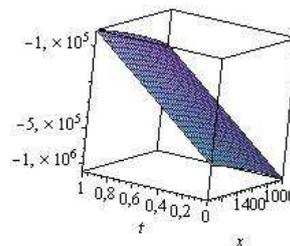


Figura 4.8: Função Valor

Em (STOJANOVIC, 2002), ele introduz a noção de que  $\Pi_\gamma(t, X) = \frac{\Pi_*(t, X)}{\gamma} + \Pi_\infty(t, X)$ ; no limite, quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , resta a estratégia no infinito, que é a mais moderada, assim, a teoria de controle estocástico consegue montar um método capaz de incluir as diversas magnitudes de exposição ao risco que um investidor pode ter, com o expoente de segurança  $\gamma : 0 < \gamma \leq \infty$ .

Tomando (STOJANOVIC, 2002) como exemplo, aplica-se as restrições para 20 ativos e uma taxa de juros de 0.05 em simulação. Escolhe-se uma estratégia para  $\gamma = \infty$  e outra restrita a  $\gamma = 1$ . Calcula-se a regra de portfólio ótimo e observa-se a evolução da riqueza para  $\gamma = 1$  e  $\gamma = \infty$ , respectivamente. Verifica-se um investimento conservador quando  $\gamma = \infty$ , devendo adotar estratégias que minimizam o risco, levando a poucas variações na evolução da riqueza no tempo. Quando  $\gamma = 1$ , com  $\lim_{X \rightarrow 0} \psi_\gamma(X) = -\infty$  e  $\lim_{X \rightarrow \infty} \psi_\gamma(X) = \infty$ , a interpretação dada a esse expoente é que a dor da falência é infinita, mas o prazer do ganho infinito também é infinito, portanto por se arriscar mais, o investidor pode ganhar (ou perder) mais (neste caso, houve ganho ao longo do tempo, lembrando que parâmetros são gerados de forma aleatória, podendo haver perdas), portanto a evolução de sua riqueza sofre mais variações ao longo do tempo, observado na figura 4.9.

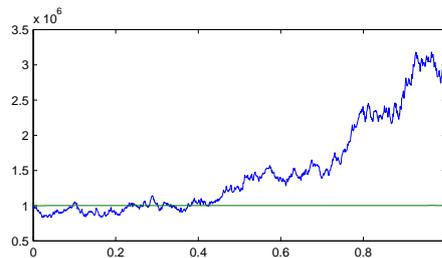


Figura 4.9: Evolução da Riqueza -  $\gamma = 1$  azul e  $\gamma = \infty$  verde

## 5 Variações do Problema de Merton

Neste capítulo são apresentadas variações dos exercícios com o fim de esclarecer o problema sob diferentes abordagens e explorar melhor as implicações teóricas que tais variações oferecem.

### 5.1 Regra de Portfólio sob incerteza da Taxa de Apreciação

As estimativas estatísticas sobre a taxa de apreciação dos ativos em um curto período de tempo podem ser inadequadas. As estimativas sobre a taxa de apreciação podem ser melhoradas a partir de uma hipótese ou de algum tipo de informação disponível, porém apenas fornecem a distribuição de probabilidade da taxa de apreciação, com sorte, com um pequeno desvio padrão. Sob a hipótese de que o preço dos ativos segurem a EDE:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (a + b) dt + \sigma dB(t) \quad (5.1)$$

com  $a = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathbb{R}^m$  representando um vetor constante das taxas de apreciação esperada e  $b = \{b_1, \dots, b_m\} \in \mathbb{R}^m$ , um vetor aleatório normalmente distribuído  $b \sim N(0, S.S^T)$  onde  $S.S^T \geq 0$  é a matriz de covariância que mede o grau da ignorância em relação a taxa de apreciação  $a$ . Como no outro modelo, a matriz  $m \times n$ ,  $\sigma = (\sigma_{i,j})$  é usada para quantificar a volatilidade e a correlação entre os ativos e a hipótese no modelo de Merton é que  $\sigma.\sigma^T$  seja invertível. Há ainda o vetor de  $n$  movimentos Brownianos  $B(t) = \{B_1(t), \dots, B_n(t)\}$ , com vetor aleatório  $b$  independente do movimento Browniano. O saldo da conta-caixa é definido por  $dC(t) = rC(t) dt$  quando não há negociações. As questões válidas neste esclarecimento envolvem se a instabilidade dos preços, ou a própria incerteza em relação a eles, diminui o número de negociações.

A evolução do saldo da conta do investidor agora incorpora  $b$ :

$$dX(t) = r(X(t) - \Pi(t, X(t)) \cdot I_m) dt + \Pi(t, X(t)) \cdot ((a + b) dt + \sigma \cdot dB(t)) \quad (5.2)$$

Entre as regras de portfólio, é possível achar uma que seja linear na riqueza, segundo (STOJANOVIC, 2002). Como hipótese  $\Pi(X, t) = P(t) X$ :

$$dX(t) = (X(t) P(t) \cdot (a + b - r) + rX(t)) dt + X(t) P(t) \cdot \sigma \cdot dB(t) \quad (5.3)$$

Para qualquer  $\gamma > 0$  e  $P^*(t)$  tal que:

$$E_{s,X} \psi_\gamma(X^{P^*}(T)) = \max_P E_{s,X} \psi_\gamma(X^P(T)) \quad (5.4)$$

Com  $\psi_\gamma(X)$  é a função de utilidade da riqueza. Aplica-se a regra de Itô:

$$\begin{aligned} E_{s,X} f(X(T)) &= f(X) + E_{s,X} \int_s^T \left( \frac{\partial f(X(t))}{\partial X} (rX(t) + P(t) \cdot (a + b - r) X(t)) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X(t))}{\partial X^2} X(t)^2 P(t) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot P(t) dt \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considerando  $\psi_1(X) = \log(X)$ . Definindo  $f(X) = \psi_1(X) = \log(X)$ , de forma resumida:

$$\begin{aligned} E_{s,X} \log(X^P(T)) &= E_{s,X} \log(X(T)) = \\ &= \log(X) + \\ &\quad \int_s^T \left( r + P(t) \cdot (a - r) - \frac{1}{2} P(t) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot P(t) \right) dt \end{aligned} \quad (5.6)$$

Já que  $E_{s,X} b = Eb = 0$ , resulta em uma estratégia de negociação ótima. O que

maximiza 5.5 é o que maximiza o integrando:

$$r + P(t) \cdot (a - r) - \frac{1}{2} P(t) \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot P(t) \quad (5.7)$$

para todo  $t \in (s, T)$ ; o maximizador é o vetor constante:

$$P(t) = P = (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a - r) \quad (5.8)$$

Portanto, no caso da Função Log utilidade, não há alterações quando a incerteza sobre a taxa de apreciação é introduzida. A falta de conhecimento, ao contrário, deveria reduzir a exposição ao risco, portanto a função log utilidade não é muito moderada.

## 5.2 Restrições afins combinadas com Restrição sobre a Volatilidade da riqueza

Segundo (STOJANOVIC, 2002), considerando a restrição afim geral:

$$\mu \cdot \Pi(t, X) = \xi X \quad (5.9)$$

com  $\mu$  uma matriz  $k \times m$  e  $\xi$  um  $k$ -vetor, combinado com a forma da restrição quadrática:

$$\Pi(t, X) = \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X) = X^2 \eta^2 \quad (5.10)$$

com  $\eta$  um número positivo dado. Será necessário fazer a hipótese de que:

$$\eta^2 - \xi^T \cdot \left( \mu (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \xi > 0 \quad (5.11)$$

A condição tem uma interpretação geométrica: a condição afim é um plano de dimensão  $m - k$  e a restrição quadrática da volatilidade é vista como um elipsóide de dimensão  $m-1$ , centrado na origem; e as condições feitas apontam que o plano intercepta o elipsóide não apenas tangencialmente. A EDP HJB se apresenta da seguinte forma:

$$\max_{\Pi: \mu \cdot \Pi(t, X) = \xi X; \Pi(t, X) = \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X) = X^2 \eta^2} \left( \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, X)}{X} (rX + \Pi \cdot (a - r)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, X)}{\partial X^2} \Pi \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi \right) = 0 \quad (5.12)$$

que é fácil de simplificar por causa da forma quadrática da restrição e da EDP HJB que não é totalmente linear:

$$\max_{\Pi: \mu \cdot \Pi(t, X) = \xi X; \Pi(t, X) = \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X) = X^2 \eta^2} \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, X)}{X} (rX + \Pi \cdot (a - r)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, X)}{\partial X^2} X^2 \eta^2 = 0 \quad (5.13)$$

Buscando por um máximo na EDP HJB e utilizando os multiplicadores de Lagrange, existe um  $k$ -vetor  $\lambda_1$  e um número  $\lambda_2$  tal que:

$$\frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial X} (a - r) = \mu^T \cdot \lambda_1 \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial X} + 2 \frac{\frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial X} \lambda_2}{X} \sigma \cdot \sigma^T \cdot \Pi(t, X) \quad (5.14)$$

Os multiplicadores de Lagrange são escolhidos de tal forma que a simplificação ocorre:

$$\Pi(t, X) = \frac{X (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot ((a - r) - \mu^T \cdot \lambda_1)}{2\lambda_2} = \frac{X ((a - r) - \lambda_1 \cdot \mu) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1}}{2\lambda_2} \quad (5.15)$$

substituindo em 5.9 e 5.10 obtém-se

$$\frac{X \left( (a-r) - \lambda_1 \cdot \mu \right) \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1}}{2\lambda_2} \cdot \sigma \cdot \sigma^T \cdot \frac{X \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \left( (a-r) - \mu^T \cdot \lambda_1 \right)}{2\lambda_2} = X^2 \eta^2 \quad (5.16)$$

e, também,

$$\mu \cdot \frac{X \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \left( (a-r) - \mu^T \cdot \lambda_1 \right)}{2\lambda_2} = \xi X \quad (5.17)$$

chega-se em

$$\begin{aligned} (a-r) \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right) \cdot (a-r) - 2(a-r) \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right) \cdot \mu^T \cdot \lambda_1 + \\ \lambda_1 \cdot \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \cdot \lambda_1 = 4\lambda_2^2 \eta^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

combinada com

$$\mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot (a-r) - \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \cdot \lambda_1 = 2\lambda_2 \xi \quad (5.19)$$

Resolvendo 5.19 para  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\lambda_2 \left( \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \xi \\ &+ \left( \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot (a-r) \\ &= \left( \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \left( -2\lambda_2 \xi + \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot (a-r) \right) \\ &= \left( -2\lambda_2 \xi + (a-r) \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right) \cdot \left( \mu \cdot \left( \sigma \cdot \sigma^T \right)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Substituindo em 5.16 nós temos:

$$\begin{aligned}
& (a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r) - 2(a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \cdot \left( \mu (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \\
& \left( -2\lambda_2 \xi + \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r) \right) + \left( -2\lambda_2 \xi + (a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right) \cdot \\
& \left( \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \cdot \\
& \left( \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \left( -2\lambda_2 \xi + \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r) \right) = 4\lambda_2^2 \eta^2
\end{aligned}$$

e, simplificando, chega-se em:

$$\begin{aligned}
4\lambda_2^2 \left( \eta^2 - \xi \cdot \left( \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \xi \right) &= (a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r) & (5.21) \\
&- (a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \cdot \\
&\left( \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T) \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r)
\end{aligned}$$

Admitindo  $\lambda_2 > 0$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \left( \sqrt{((a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r) - (a-r) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \sqrt{\mu^T \cdot \left( \mu (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r)} \right) & (5.22) \\
&\quad \left. / \left( 2\sqrt{\eta^2 - \xi \cdot \left( \mu \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \mu^T \right)^{-1} \cdot \xi} \right)
\end{aligned}$$

Com 5.15 , 5.20 e 5.22 encontra-se a regra ótima de portfólio, sem ser necessário achar uma função valor. Já que a volatilidade da riqueza já é descrita, pode-se achar a taxa de apreciação:

$$\begin{aligned}
r + \frac{\Pi(t, X) \cdot (a-r)}{X} &= r + \frac{X((a-r) - \lambda_1 \cdot \mu) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r)}{2\lambda_2 X} = & (5.23) \\
&= r + \frac{((a-r) - \lambda_1 \cdot \mu) \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot (a-r)}{2\lambda_2}
\end{aligned}$$

Com  $\lambda_1$  (um  $k$  vetor) e  $\lambda_2$  (um número) definidos anteriormente; sem dependência da função valor e da utilidade, com a volatilidade restrita, o problema se torna de maximização da taxa de apreciação, independente de sua função valor.

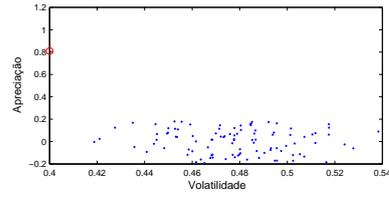
### 5.3 Otimização de Portfólio com Restrições de Desigualdade

A partir da apresentação das restrições de igualdade, torna mais fácil a compreensão de restrições de desigualdade, que são, de fato, mais naturais. O exercício envolve a modificação do último tópico apresentado, para restrições na volatilidade da riqueza mais restrições no orçamento sob condição de *no-short-selling* (restrição de desigualdade). Novamente, com a taxa de apreciação e a volatilidade montadas de forma aleatória, é definida uma restrição de volatilidade e de orçamento. Primeiro, verifica-se a compatibilidade da restrição da volatilidade com a restrição do orçamento e busca-se a solução para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e calcula-se o portfólio ótimo computado. Tais resultados (de portfólios computados) devem satisfazer a restrição de *no-short-selling*, se não, a condição de igualdade deve ser revista até que o portfólio final computado satisfaça a restrição de desigualdade de *no-short-selling*; não havendo garantias de que a solução máxima será encontrada, resta apenas tomar conhecimento da qualidade da regra de portfólio computada. Pode-se relaxar a restrição a volatilidade da riqueza. Na simulação, a restrição de *no-short-selling* não foi garantida com as iterações, portanto há estratégias negativas.

Com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , calcula-se a taxa de apreciação da riqueza e se compara com as taxas de apreciação individuais dos ativos. Uma comparação é feita entre a volatilidade da riqueza (previamente escolhida) e a volatilidade individual dos ativos em 5.1a. Podemos observar que a apreciação do portfólio é superior a apreciação dos ativos individuais, enquanto a volatilidade destes é maior que a do primeiro. Ou seja, mesmo apresentando variações, a otimização de portfólio em tempo contínuo busca sempre a combinação ótima dos ativos que apresenta um desempenho (entende-se desempenho por maior apreciação e menor volatilidade) melhor<sup>31</sup> que os ativos individualmente.

---

<sup>31</sup> Considerando a utilidade da família CRRA.



(a) Apreciação do Portfólio Computado (vermelho) x Apreciação dos  $m$  ativos (azul)

Figura 5.1: Apreciação e Volatilidade do Portfólio Computado e dos  $m$  ativos

## 6 Solução de Viscosidade

A construção do problema apresentado nas secções anteriores, deixou de maneira clara a possibilidade da resolução do problema de Merton por meio da equação HJB. A aplicação do teorema de verificação indica a existência de uma solução suave para a equação de HJB; nessas condições, o termo de difusão não deve depender do controle do problema e a segunda derivada da função valor,  $D_x^2 v$ , aparece de forma linear, garantindo uma solução suave. No caso do problema de Merton e algumas de suas variações, mesmo com o termo de difusão dependente do controle, é possível a solução devido a transformação da equação da HJB na equação de Monge-Ampère. Porém, é comum que a função valor não seja suave ou não possua as condições de regularidade necessárias. A solução de viscosidade se aplica nas imperfeições de mercado, como restrições de negociação, custos de transação e salário (renda de trabalho) estocástico, se tornando um instrumento poderoso para análise de problemas de otimização estocástica, que engloba modelos em economia, finanças e teoria de seguros.

Já que a função valor, no caso de controle singular, pode não ser contínua no tempo terminal  $T$ , então a condição terminal não é dada por uma função de  $x$ , e o contexto de verificação não funciona e a noção de solução para a HJB deve ser relaxada. Segundo (PHAM, 2005), a classe de soluções fracas para a HJB são as soluções de viscosidade que ainda fornecem uma verificação mais geral.

Para a difusão Markoviana, segundo (PHAM, 2005), a função valor é interpretada como uma solução de viscosidade para a EPD HJB. A solução de viscosidade também é usada, em (PHAM, 2005), para estudar a dependência de parâmetros pequenos e na prova da convergência finita para métodos numéricos em diferença para cálculo da função valor aproximada.

Para a definição, de acordo com (TOUZI, 2002), considera-se um equação diferencial parcial de segunda ordem não linear

$$F(x, u(x), Du(x), D^2(x)) = 0, \text{ para } x \in \mathcal{O} \quad (6.1)$$

tem-se uma função localmente delimitada  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $u_*$  e  $u^*$  sendo seus envelopes semicontínuo inferior e superior, respectivamente, formalmente:

$$u_*(x) = \liminf_{x' \rightarrow x} u(x')$$

$$u^*(x) = \limsup_{x' \rightarrow x} u(x')$$

**Definição 1.** *i) Diz-se que  $u$  é uma supersolução de viscosidade (descontínua) de 6.1 se*

$$F(x_0, u_*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

*para todo o par  $(x_0, \varphi) \in \mathcal{O} \times \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$  tal que  $x_0$  é o minimizador da diferença  $(u_* - \varphi)$  em  $\mathcal{O}$ .*

*ii) Diz-se que  $u$  é uma subsolução de viscosidade (descontínua) de 6.1 se*

$$F(x_0, u_*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

*para todo o par  $(x_0, \varphi) \in \mathcal{O} \times \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ , tal que  $x_0$  é o maximizador da diferença  $(u^* - \varphi)$  em  $\mathcal{O}$ .*

*iii) Diz-se que  $u$  é uma solução de viscosidade (descontínua) de (E) se for ao mesmo tempo a supersolução e a subsolução para 6.1.*

## 6.1 Propriedades

A solução de viscosidade apresenta duas propriedades: a fórmula de mudança das variáveis e o resultado de estabilidade.

**Proposição.** Com  $u$  sendo uma supersolução (descontínua) delimitada localmente de 6.1. Se  $f$  é uma função  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  com  $Df \neq 0$  em  $\mathbb{R}$ , então a função  $v : f^{-1} \circ u$  é uma super-

solução de viscosidade (descontínua), quando  $Df > 0$ , e uma subsolução de viscosidade (descontínua), quando  $Df < 0$  da seguinte equação:

$$K(x, v(x), Dv(x), D^2v(x)) = 0 \text{ para } x \in \mathcal{O}$$

onde

$$K(x, r, p, A) := F(x, f(r), Df(r)p, D^2f(r)pp' + Df(r)A)$$

**Proposição.** Com  $u_\epsilon$  sendo a super-solução de viscosidade semicontínua inferior da equação

$$F_\epsilon(x, Du_\epsilon(x), D^2u_\epsilon(x)) = 0 \text{ para } x \in \mathcal{O}$$

onde  $(F_\epsilon)_\epsilon$  é uma sequência de funções contínuas que satisfazem a condição de elipticidade (deriváveis de segunda ordem). Tomando como hipótese de que  $(\epsilon, x) \mapsto u_\epsilon(x)$  e  $(\epsilon, z) \mapsto F_\epsilon(z)$  são localmente limitadas, define-se

$$u_*(x) := \liminf_{(\epsilon, x') \rightarrow (0, x)} u_\epsilon(x')$$

$$F^*(z) := \limsup_{(\epsilon, z') \rightarrow (0, z)} F_\epsilon(z')$$

Então,  $u_*$  é uma supersolução de viscosidade semicontínua inferior da equação

$$F^*(x, Du_*(x), D^2u_*(x)) = 0 \text{ para } x \in \mathcal{O}$$

as definições também são válidas para subsoluções. A prova encontra-se em (TOUZI, 2002).

A estabilidade fornece uma maneira geral para passar para o limite quando a equação é escrita no contexto de viscosidade. A estabilidade pode ser aplicada para determinar convergência de esquemas numéricos (como as derivadas parciais incluídas na equação). Deve-se enfraquecer a noção de solução para a EDP não linear de segunda ordem 6.1 e ainda garantir a singularidade.

**Proposição.** Considerando  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^p$  definindo dois subconjuntos abertos e  $u : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  ser uma supersolução de viscosidade semicontínua inferior da equação

$$F(x, y, u(x, y), D_y u(x, y), D_y^2 u(x, y)) \geq 0 \text{ em } A \times B$$

com  $F$  sendo um operador elíptico contínuo. Toma-se como hipótese que  $r \mapsto F(x, y, r, p, A)$  é não crescente. Então, para todo  $x_0 \in A$ , a função  $v(y) := u(x_0, y)$  é uma supersolução de viscosidade da seguinte equação:

$$F(x_0, y, v(y), Dv(y), D^2v(y)) \geq 0 \text{ em } B$$

se  $u$  for contínuo, não é necessário assumir que a função é não crescente. De forma similar, existe tal propriedade para a subsolução.

Considera-se ainda os seguintes Lemas:

**Lema 2.** *Define-se  $\mathcal{O}$  como um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , e  $U : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  como uma supersolução semicontínua inferior da equação  $DU \geq 0$  em  $\mathcal{O}$ . Então,  $U$  é não decrescente em  $\mathcal{O}$ .*

**Lema 3.** *Define-se  $\mathcal{O}$  como um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , e  $U : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  como uma supersolução semicontínua inferior da equação  $-DU^2 \geq 0$  em  $\mathcal{O}$ . Então,  $U$  é côncavo em  $\mathcal{O}$ .*

**Proposição.** Como hipótese,  $V$  é localmente limitado em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$ , e os coeficientes  $k(\cdot, \cdot, u)$  e  $f(\cdot, \cdot, u)$  seja contínuo em  $(t, x)$  para todo  $u \in U$ . Então, a função valor  $V$  é uma subsolução de viscosidade (descontínua) para a equação

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - H(t, x, V(t, x), DV(t, x), D^2V(t, x)) \leq 0$$

em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$ .

Como hipótese,  $V$  é localmente limitada em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$ . Considerando  $H$  como uma função contínua, e  $\|k^+\|_\infty < \infty$ . Então,  $V$  é a super solução de viscosidade (descontínua) da equação

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - H(t, x, V(t, x), DV(t, x), D^2V(t, x)) \geq 0$$

em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$

$V$  deve satisfazer a equação diferencial parcial não linear com igualdade.

**Teorema 3.** Com as condições das Proposições 18 e 19 verdadeiras, a função valor  $V$  é uma solução de viscosidade (descontínua) para a equação de Hamilton-Jacobi- Bellman

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - H(t, x, V(t, x), DV(t, x), D^2V(t, x)) = 0$$

em  $[0, T) \times \mathbb{R}^n$

A caracterização (SONER e TOUZI, 2002) tem como preocupação mostrar a função  $v$  como uma solução de viscosidade descontínua da EDP HJB de segunda ordem associada. Deve-se caracterizar primeiramente a PPD não clássica relacionada a teoria das soluções de viscosidade. A noção de soluções de viscosidade aparece para as HJB quando há falta de regularidade da função valor; porém, para (SONER e TOUZI, 2002) é necessário derivar a propriedade de subsolução do PPD mesmo que a função valor seja suave. O artigo de (SONER e TOUZI, 2002) propõe obter a caracterização da EDP sem utilizar a dualidade, pois o problema proposto envolve controle estocástico, assim a descrição parte da formulação inicial sem passar por dualidade.

Segundo (ZARIPHOUPOULOU, 1999), devido a restrição na variável de estado ( $X_s > 0, 0 < s < t$ ) utilizada no Problema de Merton clássico, são usadas as soluções de viscosidade do tipo restrita. As definições de solução de viscosidade para equações de primeira ordem são necessárias. A possibilidade de se obter convergência para sequências numéricas, já que não existe fórmula de *feedback* para achar as políticas ótimas em tal contexto, devido a falta de condições de regularidade da função valor, é discutida. Computando soluções candidatas para HJB, sendo a função valor a única solução de viscosidade, temos então uma solução candidata que pode ser obtida de forma fechada ou ainda podemos

usá-la como estimativa quando soluções fechadas não são possíveis, o que é usado em modelos de precificação de derivativos.

A partir do fato de que os processos dos preços de ativos devem ser positivos, para uma condição inicial de positividade e continuarem nulos (zero) se começaram a partir deste ponto, faz-se a hipótese de que a taxa média dos retornos dos ativos de risco domina a taxa de juros sem risco em todos os níveis dos preços de ativos positivos.

**Proposição.** i) A função valor  $u$  é não decrescente e côncava com respeito a variável riqueza  $x$ ;ii) Existe uma constante  $\lambda > r\alpha$  tal que  $\frac{x^\alpha}{\alpha}e^{r\alpha(T-t)} \leq u(x, S, t) \leq \frac{x^\alpha}{\alpha}e^{\lambda(T-t)}$ , com  $\alpha = 1 - \gamma$ , apresentado nas secções anteriores;iii) A função valor satisfaz  $u(x, 0, t) = \frac{x^\alpha}{\alpha}e^{r\alpha(T-t)}$ .

**Teorema 4.** A função valor é  $u : \bar{D} \rightarrow [0, +\infty)$  é uma solução de viscosidade restrita em  $\bar{D}$  para a equação HJB

$$u_t + \max \left[ \frac{1}{2} \sigma^2(S) \pi^2 u_{xx} + \sigma^2(S) \pi S u_{xS} + (\mu(S) - r) \pi u_x \right] + \frac{1}{2} \sigma^2(S) S^2 u_{SS} + \mu(S) S u_S + r x u_x = 0 \quad (6.2)$$

com  $u(x, S, T) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$  e  $u(x, 0, t) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha e^{r\alpha(T-t)}$ .

A principal dificuldade é que o problema de controle, representando os ativos de risco, não é uniformemente limitado. Para a correção desse problema, usa-se a equação HJB normalizada resultante de uma mudança de tempo. O teorema para singularidade deve ser definido:

**Teorema 5.** Para  $u$  côncava, semicontínua superior, com respeito a  $x$ , a subsolução de viscosidade de 6.2 em  $\bar{D}$ , e  $v$  uma supersolução de 6.2 em  $D$  que é limitada abaixo, uniformemente contínua em  $D$  e localmente lipschitz em  $D$ , tal que  $u(x, S, T) = v(x, S, T)$  e  $u(x, S, t) + v(x, S, t) \leq O(x^\alpha)$ , para  $x$  grande, uniformemente em  $S$  e  $t$ . Então,  $u \leq v$  em  $\bar{D}$ .

Então,  $u$  é a subsolução de  $\bar{D}$  e a  $v$  é a supersolução de  $D$  em 6.2

## 6.2 Soluções fechadas

A função valor pode ser escrita como  $u(S, y, t) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha v(S, t)^\gamma$ , com  $v$  resolvendo uma equação linear parabólica. A homogeneidade da função utilidade, a variável de estado e a variável de controle lineares na evolução da riqueza induz a conclusão de que a função valor é do tipo:

$$u(x, S, t) = \frac{x^\alpha}{\alpha} V(S, t)$$

substitui-se em 6.2; e é estabelecida a condição terminal  $V(S, T) = 1$  e a condição de fronteira  $V(0, t) = e^{r\alpha(T-t)}$ . Com  $\pi$  sendo a variável de controle e  $\tilde{\pi} = \frac{\pi}{x}$ . Aplicando-se as condições de primeira ordem, o máximo é atingido em:

$$\tilde{\pi}^* = \frac{\sigma^2(S) S V_S(S, t) + (\mu(S) - r) V(S, t)}{(1 - \gamma) \sigma^2(S) V(S, t)}$$

Substituindo em 6.2 retorna  $V$  que resolve

$$\frac{1}{\gamma} \left[ V_t + \frac{1}{2} \sigma^2(S) S^2 V_{SS} + \mu(S) S V_S \right] + rV + \frac{[(\mu(S) - r) V + \sigma^2(S) S V_S]^2}{2\gamma \sigma^2(S) V} = 0 \quad (6.3)$$

Fazendo transformações com  $V(S, t) = v(S, t)^\gamma$ , para  $\gamma$  ser determinado. A diferenciação leva a :

$$V_t = \gamma v_t v^{\gamma-1}, V_S = \gamma v_S v^{\gamma-1}, V_{SS} = \gamma v_{SS} v^{\gamma-1} + \gamma(\gamma - 1) v_S^2 v^{\gamma-2}$$

substituindo em 6.3, que implica que  $v$  resolve uma equação quase linear e com  $\gamma = 1 - \alpha$ , com o desenvolvimento em (ZARIPHOUPOULOU, 1999),  $v$  resolve:

$$v_t + \frac{1}{2} \sigma^2(S) S^2 v_{SS} + [\mu(S) S + c(S)] v_S + k(S) v = 0$$

com  $v(S, T) = 1$  e  $v(0, t) = e^{(r(1-\alpha)/\alpha)(T-t)}$ .

As funções  $c(S)$  e  $k(S)$  são dadas em termos dos coeficientes de mercado,

$$c(S) = \frac{(1-\gamma)(\mu(S)-r)S}{(\gamma)}$$

$$k(S) = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \left[ r + \frac{(\mu(S)-r)^2}{2(\gamma)\sigma^2(S)} \right]$$

Chama-se  $\gamma$  como potência de distorção, que coincide com o coeficiente de aversão ao risco. Se  $0 < 1 - \gamma < 1$ , então  $k(S) > 0$ , sob as condições de crescimento e regularidade, através da fórmula de Feynman-Kac<sup>32</sup>, a representação estocástica é:

$$v(S, t) = \tilde{E} \left[ \exp \int_t^T \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \left[ r + \frac{(\mu(\tilde{S}_s)-r)^2}{2\sigma^2(\tilde{S}_s)\gamma} \right] ds / \tilde{S}_t = S \right]$$

onde o precesso  $\tilde{S}_s$ ,  $t \leq s \leq T$  resolve

$$d\tilde{Y}_s = \left[ \mu(\tilde{S}_s) \tilde{S}_s + c(\tilde{S}_s) \right] ds + \sigma(\tilde{S}_s) \tilde{S}_s d\tilde{W}_s$$

O processo  $\tilde{W}_s$  é um movimento browniano em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, Q)$  e  $\tilde{E}$  é a esperança com respeito a  $Q$ . Assim, espera-se que a função valor seja representada como:

$$u(x, S, t) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} v(S, t)^\gamma$$

A forma simplificada para a função de *feedback* de portfólio ótimo é

---

<sup>32</sup> Vide (BAIN, 2007), página 66.

$$\pi^*(x, S, t) = \left[ \frac{Sv_S(S, t)}{v(S, t)} + \frac{1}{\gamma} \frac{\mu(S) - r}{\sigma^2(S)} \right] x \quad (6.4)$$

O seguinte teorema fornece verificação para a função valor:

**Teorema 6.** A função valor  $u$  é dada por  $u(x, S, t) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} v(S, t)^\gamma$  onde  $v$  é a solução de viscosidade única.

As expressões encontram-se passo a passo em (ZARIPHOUPOULOU, 1999). Tal modelo facilita a construção do portfólio ótimo com a apresentação da equação 6.4. As equações reduzidas se assemelham às equações dos modelos de precificação de *bonds*, com diferença de apresentarem o termo que representa um desvio modificado, representando as fontes de não linearidade do modelo. Por hipótese,  $\mu$  e  $\sigma$  não dependem explicitamente do tempo, apenas do preço corrente do ativo e satisfazem as condições de regularidade que garantem a existência de uma única solução.

## 7 Conclusão

A presente dissertação, como exercício de uso de *softwares*, consegue demonstrar o uso específico para cada um, em sua devida especialização. O problema de Merton usado como exercício, permite a análise do problema clássico em suas aplicações de forma não-ótima e ótima. A evolução da conta-caixa e do saldo da conta-caixa são maiores e crescentes ao longo do tempo na estratégia ótima em relação a não-ótima. A estratégia não-ótima mostra riqueza e saldo da conta-caixa nulos no fim do horizonte de tempo. Portanto, a implementação ótima considerando o valor de  $\gamma$  na estratégia apresenta melhoras em relação a estratégias fixas que não levam  $\gamma$  em consideração. A função valor, no caso ótimo, se mostra suave, apesar de ser achatada. Mostra-se que é possível calcular a volatilidade e a taxa de apreciação para avaliar a estratégia ótima deduzida. Como a dinâmica tempo-dependente e o cálculo para a função valor exigem resolução de equações diferenciais ordinárias, usa-se o Maple. O gráfico da função valor mostra sua suavidade, permitindo o cálculo da estratégia ótima. Os gráficos de função valor consideram  $\gamma = 7$  e a condição terminal  $f(T) = 1$ , que possibilitam a solução explícita da equação HJB, assim como a função utilidade considerada. A função utilidade e a função valor são centrais em tal estudo, fornecendo a regra de portfólio ótima, fazendo uso de primeira e segunda derivadas da função utilidade, que deve obedecer a restrição de concavidade estrita.

Desenvolve-se a demonstração da introdução de incerteza sob a taxa de apreciação, que no caso da função log utilidade, não altera o cálculo da estratégia, pois a estratégia continua sendo um vetor constante. Tal fato mostra que a função log utilidade não é moderada o suficiente, pois se deixarmos de considerar que o agente possui uma noção verdadeira das taxas de apreciação, aumentando a incerteza, o comportamento esperado seria de que o agente fosse mais cauteloso, reduzindo sua exposição ao risco.

A apresentação de restrições, sem dúvida, contribui para a parte de simulação e cálculos numéricos, pois mostra uma resolução do problema de Merton com alguma variação. As restrições afins apresentam uma forma de controle estocástico com o portfólio sofrendo

restrições; pode-se ainda chegar a uma EDO, então, o *software* de preferência é o Maple e ainda observa-se a função valor. Usando um exemplo de simulação, que tem como *software* de preferência o Matlab, as estratégias com restrições afins geram diferentes evoluções de riqueza, dependendo do valor de  $\gamma$  escolhido, mostrando que a estratégia para o expoente de segurança infinito é moderada.

Mostra-se também uma mistura de restrições de igualdade e desigualdade, usando multiplicadores de Lagrange, a partir de restrições quadráticas na volatilidade da riqueza, não necessitando da função valor para a resolução do problema (já que a HJB não é mais completamente não linear), e assim, a utilidade também não é considerada; e o controle estocástico se assemelha ao problema de maximização da taxa de apreciação do portfólio. Ao acharmos a apreciação e a volatilidade, podemos fazer comparações. Como dito antes, o problema se assemelha ao de maximização da taxa de apreciação de portfólio; assim, observamos no gráfico que a apreciação de portfólio é superior a apreciação dos ativos individuais. Observamos também que, quanto à restrição de volatilidade deve ser verificada a sua compatibilidade, podendo ser relaxada quando necessário. Assim, o portfólio pode não ser o ótimo, e na implementação apresentada, as iterações não permitiram respeitar a condição de *no-short-selling*, mas, ainda sim, dispõe-se de ferramentas para comparação e conhecimento de quão bom o portfólio computado pode ser.

A apresentação da solução de viscosidade fornece uma alternativa a resolução do problema de Merton quando não há garantias sobre as propriedades da equação HJB, mostrando que há uma alternativa quando não se pode ter as condições de regularidade e as propriedades necessárias

## Referências

ANTONELLI, F. Stability of backward stochastic differential equations. **Stochastic Process and Their Applications**, Rome, v.62, p.103-114, 1996.

BAIN, A. **Stochastic calculus**. Jun. 2007. Disponível em: < <http://www.ebooksdirectory.com/details.php?ebook=2181> > .Acesso em: nov.2011.

BENTH, E. F.; KARLSEN, H. K.; REIKVAN, K. A note on portfolio management under non-gaussian log returns. **International Journal of Applied Finance**, Aarhus, v.4, n.5, p.711-731, 2001.

BENTH, E. F.; KARLSEN, H. K.; REIKVAN, K. Merton's portfolio problem in a Black Scholes market with non-Gaussian stochastic volatility of Ornstein-Uhlenbeck type. **Mathematical Finance**, Aarhus, v.13, p.215-244, 2003.

DETEMPLE, J.; GARCIA, R.; RINDISBACHER, M. Simulation methods for optimal portfolios. **Handbooks in operations research and management science, Financial engineering** , v. 15, p.867-923, 2008.

DUFFIE, D. **Dynamic Asset Pricing Theory**. New Jersey: Princeton University Press, 2001.

DUFFIE, D.; EPSTEIN, L. Asset pricing with stochastic differential utility. **The Review of Financial Studies**, Oxford, v.5, n.3, p.411-436, 1992.

DUFFIE, D.; EPSTEIN, L. Stochastic differential utility. **Econometrica**, Cambridge, v.60, n.2, p. 353-394, Mar. 1992.

DUFFIE, D.; FLEMING, W.; SONER, H. e ZARIPHOUPOULOU, T. Hedging in incomplete markets with HARA utility. **Journal of Economic Dynamics and Control**, Stanford, v.21, p.753-782, May 1997.

FALCONE, M.; GIORGI, T. An approximation scheme for evolutive Hamiton- Jacobi Equations. **Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: An volume in honor of W.H.**, New York, v.54, p.288-303, 1994.

FERRETTI, G. R.; TROJANI, F. General analytical solutions for Merton's-type consumption-investment problems. **National Centre of Competence in Research Financial Valuation and Risk Management**, St. Gallen, v. 5, n. 297, p.1-41., Jan. 2005.

FLEMING, W.; SONER, H. **Controlled Markov Process and Viscosity Solutions**. New York: Springer, 2006.

HAASER, N.; SULLIVAN, J. **Real Analysis**. New York, Dover Publications, INC., 1991.

KARLSEN, H. K.; RISEBRO, N. A note on front tracking and the equivalence between viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations and entropy solution of scalar conservations laws. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, v.50, p.455-469, Aug. 2002.

LUEMBERGER, D. **Investment Science**. New York: Oxford University Press, 1998.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection, **The Journal of Finance**, Berkeley, v. 7, n. 1, p.77-91, Mar. 1952.

MENOCIN, F. Optimal portfolio rules for an integrated stock bond portfolio. **Discussion Papers IRES (Institut de Reserches Economiques et Sociales)**, Louvain-la-Neuve, v.5, p.100-101, 2001.

MERTON, C. **Continuous-Time Finance**. Cambridge, Mass.: B. Blackwell, 1992.

NDOUNKEU, L. Stochastic control: with applications to financial mathematics. **African Institute for Mathematical Sciences (AIMS)**, 2010. Disponível em: <  
<http://archive.aims.ac.za/2009> >. Acesso em: jun.2010.

PHAM, H. On some recent aspects of stochastic control and their applications. **Probability Surveys**, New York, v.2, n.2, p.506-549, 2005.

SONER, H., e TOUZI, N. Stochastic target problems, dynamic programming and viscosity solutions. **Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, PA , v. 41, n.2, p.404-424, 2002.

STOJANOVIC, S. **Computational Finance using Mathematica: Optimal Trading in Stocks and Options**. New Yoork: Birkhäuser, 2002.

TOUZI, N. Stochastic control problems, viscosity solutions and application to finance. **Special Research Semester on Financial Markets: Mathematical, Statistical and Economic Analysis**. Pisa, Apr. - Jul. 2002.

ZARIPHOPULOU, T. Optimal investment and consumption models with non-linear stock dynamics. **Mathematical Methods of Operations Research**, v.50, p.271-296, 1999.

## Apêndice A- Códigos de Programação no Matlab

```

%Implementação Não Ótima%
clc
clear
close all
%implementação da estratégia ótima
m=3;n=5;T1=3;k=2000;X0=1000000;r=.05;dt=T1/k;
%matriz de volatilidade
sigma=-1+2.*rand(m,n)*1/4;
%cálculo das volatilidades individuais
H=power(sigma,2);
B=sum(H,2); Vol=(sqrt(B))';
%matriz de correlação
C=sigma*sigma';
D=Vol'*Vol;
G=C./D;
%taxas de apreciação
a=-0.1+(0.6).*rand(m,1)-(0.2);
%preços iniciais dos ativos
S0=15+95*rand(m,1);
%movimento browniano%
dB=randn(n,k)*sqrt(dt);
%montando teste da foldist
t=linspace(0,T1,k+1);
%estratégia não ótima—define os ps
P1=[1/4;1/5;1/6];
%montando P ótimo
P=sigma*transpose(sigma);
V=P\((a-r));

```

```

%definindo antes o valor de gamma
gamma=7;
Pg=V./gamma;
%para montar estratégia
%montando market evolution
%para montar wealth evolution
S=zeros(m,k+1);
S(:,1)=S0;
X=zeros(1,k+1);
X(1)=X0;
X2=zeros(1,k+1);
X2(1)=X0;
Pi=zeros(m,k+1);
Pi(:,1)=Pg*X0;
%Pi2
Pi2=zeros(m,k+1);
Pi2(:,1)=P1*X0;
for K=1:k;
    S(:,K+1)=S(:,K)+(a*dt + sigma*dB(:,K)).*S(:,K);
X(K+1)=X(K)+(Pi(:,K)')*(a-r)+r*X(K))*
dt+Pi(:,K)'*sigma*dB(:,K);
X2(K+1)=X2(K)+(Pi2(:,K)')*(a-r)+r*X2(K))*dt+ Pi2(:,K)'*sigma*dB(:,K);
    Pi(:,K+1)=Pg*X(K);
    Pi2(:,K+1)=P1*X2(K);
end
%gráfico market evolution e wealth
figure
plot(t,S')
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)

```

```

ylabel('Preço dos Ativos (S(t))', 'FontSize', 18)
%resolvendo a conta caixa
C=X-sum(Pi);
dS=diff(S,1,2);
dc=sum(-diff(Pi,1,2)) + sum((dS./S(:,1:k)).*Pi(:,1:k));
%conta nao otima
%resolvendo a conta caixa
C2=X2-sum(Pi2);
dS=diff(S,1,2);
dc2=sum(-diff(Pi2,1,2))+sum((dS./S(:,1:k)).*Pi2(:,1:k));
%gráficos cashevolution
figure
subplot(211)
plot(t,X)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize', 18)
ylabel('Riqueza (X(t))', 'FontSize', 18)
subplot(212)
plot(t,C)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize', 18)
ylabel('Conta-Caixa (C(t))', 'FontSize', 18)
figure
subplot(211)
plot(t,X2)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize', 18)
ylabel('Riqueza (X(t))', 'FontSize', 18)
subplot(212)
plot(t,C2)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize', 18)
ylabel('Conta-Caixa (C(t))', 'FontSize', 18)

```

```

figure
plot(t(1:k),dc, '. ')
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('Fluxo de Caixa (dc(t))', 'FontSize',18)
figure
plot(t(1:k),dc2, '. ')
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('Fluxo de Caixa (dc(t))', 'FontSize',18)
% number of stocks traded
nu=Pi./S;
nu2=Pi2./S;
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('Número de Ativos', 'FontSize',18)
figure
plot(t,nu)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('Número de Ativos Negociados', 'FontSize',18)
figure
plot(t,nu2)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('Número de Ativos Negociados', 'FontSize',18)
%avaliar
C0=X0-X0*sum(Pg);
C02=X0-X0*sum(P1);
% %cash account balance
C=X-sum(Pi);
C2=X2-sum(Pi2);
CashFraction=1-sum(Pg);
CashFraction2=1-sum(P1);

```

```

C1=X*CashFraction;
C22=X2*CashFraction2;
figure
plot(t,C1)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('Saldo Conta-Caixa ', 'FontSize',18)
figure
plot(t,C22)
xlabel('Tempo (t)', 'FontSize',18)
ylabel('SaldoConta-Caixa ', 'FontSize',18)
%volatilidade:
aa=sigma*sigma';
tt=aa/(a-r);
cc=(a-r)'*tt;
vol= 1/gamma*sqrt(cc)
%apreciacao
apre=r+1/gamma*cc
%grafico
figure
x=a
y=Vol
plot(y,x,'o',vol,apre,'r*')
xlabel('Volatilidade', 'FontSize',18)
ylabel('Apreciação', 'FontSize',18)

%Restrições sobre a volatilidade da Riqueza%

clc

```

```

clear
closeall
%variáveis m=20;T1=1/12;k=2000;X0=1000000;r=.05;dt=T1/k;
%otimização de portfólio ótimo sob restrições de desigualdade
dim=100;
im=ones(1,dim);
emm=zeros(1,dim);
emm(100)=1;
rest1=vertcat(im,emm);
a1=-0.2+(0.4)*rand(dim,1); sigma1=(-1+2*rand(dim,dim))*1/12;
%volatilidade
O1=power(sigma1,2);
OP1=sum(O1,1);
OO1=sqrt(OP1);
%%OOP1=max(OO1)
r1=0.05;
%restrição de volatilidade eta=0.4;
%restrição orçamentária
mu=im;
csi=1;
ncsi=length(csi);
%checando a volatilidade
xtemp=(sigma1*sigma1')\mu';
temp0=csi^2/(mu*xtemp);
temp1=eta^2-temp0;
if temp1<0
eta=1.1*sqrt(temp0);
end
%a solução sob a volatilidade e a restrição orçamentária

```

```

%lambda2
base=(sigma1*sigma1')\ (a1-r1);
base1=(a1-r1)'*base;
base2=(sigma1*sigma1')\mu';
base22=(a1-r1)'*base2;
base3=((sigma1*sigma1')\mu');
base33=mu*base3;
base4=mu*base;
co=base33\base4;
coc=base22*co;
CO=base1-coc;
AA=sqrt(CO);
lambda2=AA/2*sqrt(temp1);
%base12=mu*base2;
%lambda1
parte1=mu*base\base33;
parte2=2*lambda2/(base33*eta);
lambda1=parte1-parte2;
%portfólio computado
ca=(a1-r1)-mu'*lambda1;
CA=sigma1*sigma1'\ca;
CAC=CA/2/lambda2;
K=CAC'; K0=K;
%se o portfólio computado satisfaz as restrições de
não venda a descoberto
%Se o portfólio não satisfaz a restrição afim de
igualdade
% Na procura seguinte não há garantias de que a atual
solução de máximo seja obtida

```

```

for loop=1:10000,
    % y calculando
    [nm]=find(K<0);
    nm=length(nm);
    em=zeros(nm,dim);
    for i=1:nm,
        em(i,nm(i))=1;
    end
    % fim
y calc
    mul=[mu;em];
    csil=[csi;zeros(nm,1)];
    %montando o eta
xtempt=(sigma1*sigma1')\mul';
    xtemptt=mul*xtempt;
    temp00=xtemptt\csil;
    temp01=csil'*temp00;
    temp11=eta^2-temp01;
    if temp1<0
        eta=1.1*sqrt(temp01);
    end
    %montando lambda2
    parte00=(sigma1*sigma1')\ (a1-r1);
    parte01=(a1-r1) '* parte00;
    parte02=(sigma1*sigma1')\mul';
    parte22=(a1-r1) '* parte02;
    parte04=mul*parte00;
    parte33=(sigma1*sigma1')\mul';

```

```

parte03=mul*parte33;
parte033=parte03\parte04;
parte023=parte22*parte033;
parte=parte01-parte023;
num=sqrt(parte);
den=2*sqrt(temp11);
lambda2=num/den;
%montando lambda1
cc=(sigma1*sigma1')\mul';
ccc=mul*cc;
cccc=ccc\mul;
ca=(sigma1*sigma1')\((a1-r1));
parcela=cccc*ca;
%parcela2=ccc\csi1;
parcela22=2*lambda2*parcela2;
lambda1=parcela-parcela22;
K22=((sigma1*sigma1')\((a1-r1)))/(2*lambda2) - mul'*lambda1;
%bar(K)%
%Procedimentos para calculo de ComputedPortfolio -> K
    if all(K22>=0),
        break
    end
end

%tx apreciação
tt=parte01-(lambda1'*mul*parte00);
o=1/(2*lambda2);
apreciacao=r+o*tt;
%grafico volatilidadex apreciação

```

```
figure
plot(OO1,a1, '.', eta, apreciacao, 'rO')
xlabel('Volatility', 'FontSize', 18)
ylabel('Appreciation (drift)', 'FontSize', 18)
```