

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**UM MODELO ANALÍTICO E COMPUTACIONAL PARA  
CONSIDERAÇÃO DE EFEITOS DE ENVELHECIMENTO EM  
ESTRUTURAS DE MATERIAL COMPÓSITO**

TESE DE DOUTORADO

**BRANCA FREITAS DE OLIVEIRA**

Porto Alegre

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**UM MODELO ANALÍTICO E COMPUTACIONAL PARA  
CONSIDERAÇÃO DE EFEITOS DE ENVELHECIMENTO EM  
ESTRUTURAS DE MATERIAL COMPÓSITO**

TESE DE DOUTORADO

**BRANCA FREITAS DE OLIVEIRA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

2004

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

---

Prof. Guillermo Juan Creus

Orientador

---

Prof. Américo Campos Filho

Coordenador do Programa de Pós-Graduação

Banca Examinadora

Prof. Guillermo Juan Creus, D Sc. (COPPE-UFRJ)  
(Orientador)

Prof. Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph D. (University of Minnesota)  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Jun S. O. Fonseca, Ph D. (University of Michigan)  
Engenharia Mecânica - UFRGS

Prof. Armando Miguel Awruch, D Sc. (COPPE-UFRJ)  
PPGEC - UFRGS

Ao meu marido, Artur,  
aos meus pais, Luiz Carlos e Adalba,  
aos meus irmãos, Demétrio e Luizinho,  
e à minha avó, Branca.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Guillermo J. Creus, pela orientação e os ensinamentos transmitidos no decorrer deste trabalho.

A toda a equipe do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional – CEMACOM, pelo convívio enriquecedor.

Aos professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC-UFRGS que, de alguma forma, auxiliaram na realização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

A Deus por tornar tudo possível.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>v</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>viii</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>xii</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xiv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
<b>1.2.1 Envelhecimento Físico.....</b>	<b>7</b>
1.2.1.1 <i>Efeito de Volume Livre</i> .....	8
1.2.1.2 <i>Efeito da Absorção de Umidade</i> .....	12
<b>1.2.2 Envelhecimento Químico .....</b>	<b>17</b>
1.2.2.1 <i>Hidrólise</i> .....	20
1.2.2.2 <i>Oxidação</i> .....	20
1.2.2.3 <i>Radiação Ultravioleta</i> .....	22
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	22
<b>2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS .....</b>	<b>26</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	26
2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPAS .....	26
2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE UMA LÂMINA .....	29
2.4 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.....	31
2.5 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS VISCOELÁSTICOS LINEARES.....	34
2.6 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS COM ENVELHECIMENTO	36
<b>3 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA COM ENVELHECIMENTO.....</b>	<b>40</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	40
3.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE VISCOELASTICIDADE LINEAR .....	40

3.3	MODELOS REOLÓGICOS .....	42
<b>3.3.1</b>	<b>Modelos com Parâmetros Dependentes do Tempo.....</b>	<b>42</b>
3.3.1.1	<i>Modelo Elástico.....</i>	43
3.3.1.2	<i>Modelo de Kelvin com Envelhecimento.....</i>	44
3.3.1.3	<i>Modelo Maxwell com Envelhecimento.....</i>	46
3.4	COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO NÃO LINEAR .....	47
<b>3.4.1</b>	<b>Modelo Kelvin Não Linear.....</b>	<b>48</b>
3.5	REPRESENTAÇÃO EM TERMOS DE VARIÁVEIS DE ESTADO .....	50
<b>3.5.1</b>	<b>Viscoelasticidade Linear .....</b>	<b>50</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Materiais com Envelhecimento .....</b>	<b>51</b>
3.5.2.1	<i>Modelo Reológico.....</i>	51
3.5.2.2	<i>Amolecimento (“Softening”).....</i>	52
3.5.2.3	<i>Endurecimento (“Hardening”).....</i>	55
3.6	EXTENSÃO PARA CASOS MULTIAXIAIS .....	56
<b>3.6.1</b>	<b>Amolecimento.....</b>	<b>56</b>
<b>3.6.2</b>	<b>Endurecimento.....</b>	<b>59</b>
3.7	TÉCNICAS DE “TIME-SHIFTING” .....	60
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO PARA FALHAS PROGRESSIVAS .....</b>	<b>63</b>
4.1	INTRODUÇÃO.....	63
4.2	ABORDAGEM DE FALHAS .....	63
4.3	CRITÉRIOS DE FALHA.....	66
<b>4.3.1</b>	<b>CrITÉrio de Tsai-Wu para Materiais com Envelhecimento.....</b>	<b>66</b>
<b>4.3.2</b>	<b>CrITÉrio de Hashin para Materiais com Envelhecimento .....</b>	<b>67</b>
<b>4.3.3</b>	<b>CrITÉrio de Lee para Materiais com Envelhecimento .....</b>	<b>69</b>
<b>4.3.4</b>	<b>CrITÉrio da Máxima Deformação para Materiais com Envelhecimento .....</b>	<b>70</b>
4.4	FALHAS PROGRESSIVAS .....	72
<b>4.4.1</b>	<b>Modelos de Degradação da Lâmina.....</b>	<b>72</b>
4.4.1.1	<i>Falha na direção das fibras (direção 1).....</i>	73
4.4.1.2	<i>Falha na direção perpendicular às fibras (direção 2).....</i>	74
4.4.1.3	<i>Falha por cisalhamento no plano 1-2 .....</i>	75
4.4.1.4	<i>Falha por cisalhamento no plano 1-3 .....</i>	76
4.4.1.5	<i>Falha por cisalhamento no plano 2-3 .....</i>	77
<b>4.4.2</b>	<b>Cálculo do Fator de Carga.....</b>	<b>78</b>

4.5 PLASTICIDADE PARA MATERIAIS LAMINADOS .....	79
<b>4.5.1 Formulação Plástica .....</b>	<b>79</b>
<b>5 MODELO NUMÉRICO PARA DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO E ANÁLISE</b>	
<b>ESTRUTURAL.....</b>	<b>81</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	81
5.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....	81
5.3 MODELO DE VISCOELASTICIDADE DO MATERIAL .....	86
5.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	92
<b>5.4.1 Forma Incremental-Iterativa da Equação de Equilíbrio.....</b>	<b>92</b>
<b>5.4.2 Determinação dos Intervalos de Tempo na Análise Viscoelástica .....</b>	<b>93</b>
<b>5.4.3 Métodos de Solução da Equação de Equilíbrio .....</b>	<b>95</b>
<b>5.4.4 Avaliação das Variáveis de Estado .....</b>	<b>97</b>
5.4.4.1 <i>Amolecimento .....</i>	97
5.4.4.2 <i>Comportamento em endurecimento.....</i>	98
5.4.4.3 <i>Comportamento não linear.....</i>	98
<b>6 EXEMPLOS DE ANÁLISES .....</b>	<b>99</b>
6.1 INTRODUÇÃO.....	99
6.1 ANÁLISE DE UM LAMINADO SUJEITO A CARGA SENOIDAL.....	99
6.2 ANÁLISE DE UMA VIGA EM BALANÇO .....	104
6.3 ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA .....	107
6.4 ANÁLISE DE FALHAS PARA UMA LAMINADO SUJEITO À CARGA	
SENOIDAL .....	109
6.5 ANÁLISE DE VIGA I EM MATERIAL COMPÓSITO VISCOELÁSTICO .....	112
6.6 ANÁLISE PLÁSTICA DE UMA PLACA DE MATERIAL LAMINADO.....	115
6.7 ANÁLISE PLÁSTICA COM FALHAS PROGRESSIVAS.....	117
6.8 ANÁLISE VISCOELÁSTICA NÃO LINEAR .....	119
6.9 COMPARAÇÃO ENTRE COMPORTAMENTOS DE ENVELHECIMENTO EM	
ENDURECIMENTO E AMOLECIMENTO .....	120
6.10 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA COM ENVELHECIMENTO .....	123
6.11 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA COM ENVELHECIMENTO .	129
6.12 INFLUÊNCIA DA UMIDADE ABSORVIDA NO COMPORTAMENTO EM	
FLAMBAGEM DE COLUNAS FEITAS EM POLÍMEROS .....	131



6.13. INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DE CORTE NA FLAMBAGEM LATERAL DE UMA VIGA I.....	134
6.14 ANÁLISE DE FALHAS COM CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DO ENVELHECIMENTO .....	138
6.15 ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO COM CONSIDERAÇÃO DE ENVELHECIMENTO.....	140
6.16 ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO VISCOELÁSTICO COM CONSIDERAÇÃO DE ENVELHECIMENTO .....	143
6.17 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS E ENVELHECIMENTO .....	144
6.18 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS E ENVELHECIMENTO .....	146
<b>7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>149</b>
<b>8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>152</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E(t)$	Módulo de elasticidade em função do tempo de envelhecimento
$E_0$	Módulo de elasticidade inicial
$X_\varepsilon(t)$	Limite de deformação em função do tempo de envelhecimento
$X_{\varepsilon_0}$	Limite de deformação inicial
$D(t, \tau)$	Função de fluência envelhecida
$\phi(t)$	Função que introduz o efeito do envelhecimento na função de fluência
$\sigma_{ij}$	Componentes do tensor de tensões
$\varepsilon_{ij}$	Componentes do tensor de deformações
$\varepsilon_i$	Componentes do vetor de deformações
$\sigma_j$	Componentes do vetor de tensões
[S]	Matriz de constantes do material
[C]	Matriz constitutiva do material
$C_{ij}$	Coefficientes da matriz constitutiva do material e funções de relaxação
[T]	Matriz de transformação de coordenadas
$[\bar{C}]$	Matriz constitutiva que relaciona tensões e deformações no sistema global
$D_{ij}$	Funções de fluência do material
$\theta_{ij}$	Tempos de retardação
$\lambda_{ij}$	Tempos de relaxação
V	Volume do corpo
${}^{k+1}_0 S_{ij}$	Componentes do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff
${}^{k+1}_0 \varepsilon_{ij}$	Componentes do Tensor de Deformações de Green-Lagrange
${}^{k+1} R$	Trabalho virtual das forças externas
${}^{k+1}_0 q_i^B$	Cargas de volume
${}^{k+1}_0 q_i^S$	Cargas de superfície
S	Área do corpo sobre a qual atuam as cargas de superfície
${}_0 S_{ij}$	Incrementos nas componentes de tensão
${}_0 \varepsilon_{ij}$	Incrementos nas componentes de deformação
${}_0 e_{ij}$	Parte linear dos incrementos de deformação

${}_0\eta_{ij}$	Parte não linear dos incrementos de deformação
${}_0\epsilon_{ij}^e$	Parte elástica dos incrementos de deformação
${}_0\epsilon_{ij}^v$	Parte viscoelástica dos incrementos de deformação
${}_0\epsilon_{ij}^T$	Parte térmica dos incrementos de deformação
${}_0\epsilon_{ij}^H$	Parte higroscópica dos incrementos de deformação
$x, y, z$	Sistema global
$\xi, \zeta, \eta$	Sistema local
$1, 2, 3$	Sistema principal da lâmina
$\{U\}$	Vetor dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento
$[_0^k B_L]$	Matriz que relaciona deformações lineares com deslocamentos nodais
$[_0^k B_{NL}]$	Matriz que relaciona deformações não lineares com deslocamentos nodais
$\{^{k+1} P\}$	Vetor das cargas nodais externas na configuração k+1.
$[_0^k K_L]$	Matriz de rigidez tangente linear
$[_0^k K_{NL}]$	Matriz de rigidez tangente não linear
$\{^k_0 F\}$	Vetor das forças nodais equivalentes
$\{^k_0 F^v\}$	Vetor de cargas viscoelásticas
$\{^k_0 F^T\}$	Vetor de cargas térmicas
$\{^k_0 F^H\}$	Vetor de cargas higroscópicas
$T$	Campo de temperatura
$H$	Campo de umidade
$\alpha_i$	Coefficientes de dilatação térmica
$\beta_i$	Coefficientes de expansão por umidade
$\xi_{ij}$	Tempos reduzidos
$\phi_{ij}$	Fatores de translação no tempo
$\bar{\epsilon}_i$	Deformação viscoelástica
$\epsilon_i^T$	Deformação térmica
$\epsilon_i^H$	Deformação higroscópica
$q_{ij}^p$	Variáveis de estado
$\epsilon_i^e$	Deformação elástica instantânea

$\varepsilon_i^v$	Deformação dependente do tempo
$\Delta\lambda^i$	Fator de carga correspondente à iteração $i$
$\{\psi_0^{k+1}\}^{i-1}$	Vetor de forças desequilibradas no final da iteração $i-1$
$\{\bar{P}\}$	Vetor de cargas externas de referência.
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\{U\}^i$	Vetor de incrementos de deslocamentos
$\rho$	Fator de tolerância.
$X_t$	Resistência à tração na direção 1
$Y_t$	Resistência à tração na direção 2
$X_c$	Resistência à compressão na direção 1
$Y_c$	Resistência à compressão na direção 2
$S_A$	Resistência ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3
$S_T$	Resistência ao cisalhamento no plano 2-3
$X_{et}$	Limite de deformação de alongamento na direção 1
$X_{ec}$	Limite de deformação de encurtamento na direção 1
$Y_{et}$	Limite de deformação de alongamento na direção 2
$Y_{ec}$	Limite de deformação de encurtamento na direção 2
$S_{\varepsilon A}$	Limite de deformação de cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3
$S_{\varepsilon T}$	Limite de deformação de cisalhamento no plano 2-3

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Efeito do envelhecimento físico no comportamento em fluência de um compósito com fibras a 90° (IM8/954-2) a uma temperatura de 160°C.....	9
Figura 1.2 – Curvas de fluência para resina epoxy com aumento do tempo de envelhecimento. ....	10
Figura 1.3 – Comparação entre deflexões obtidas com e sem a consideração do efeito de envelhecimento.....	10
Figura 1.4 – Módulo em função da temperatura para amostras de resina DGEBA/1,3-BAC envelhecidas isotermicamente a 100°C por 0, 24 e 168h.....	11
Figura 1.5 – Modos de absorção de umidade em materiais compósitos. ....	13
Figura 1.6 – Curvas tensão-deformação para diferentes condições de envelhecimento .....	13
Figura 1.7 – Efeito do envelhecimento higroscópico na curva tensão-deformação na direção transversal às fibras. ....	14
Figura 1.8 – Curva tensão-deformação para teste de tração da matriz R1 .....	15
Figura 1.9 – Curva carga-deslocamento em flexão para o compósito com a resina R1 sem envelhecimento.....	15
Figura 1.10 – Curva carga-deslocamento em flexão para o compósito com a resina R1 envelhecido.....	16
Figura 1.11 – Curva de fadiga estática. Deformação x tempo. ....	17
Figura 1.12 – Módulo e resistência à flexão em função do tempo e ambiente de exposição...	19
Figura 1.13 - Variação na deformação última de falha para os compósitos IM8/954-2 (a) e IM8/ITX (b) em função do tempo e do ambiente de envelhecimento.....	21
Figura 1.14 - Variação no módulo de elasticidade dos compósitos IM8/954-2 (a) e IM8/ITX (b) em função do tempo e do ambiente de envelhecimento. ....	21
Figura 2.1 - Estado de tensões tridimensionais .....	27
Figura 2.2 – Lâmina reforçada por fibras na direção principal 1 .....	30
Figura 2.3 – Eixos principais da lâmina e eixos cartesianos .....	32
Figura 2.4 – Comportamento viscoelástico com envelhecimento (hardening) .....	37
Figura 2.5 – Comportamento instantâneo para materiais com amolecimento e endurecimento. Resposta típica $\epsilon$ correspondente a um passo de carga $\sigma$ . (a) amolecimento ( $\dot{\epsilon} < 0$ ). (b) endurecimento ( $\dot{\epsilon} > 0$ ). ....	38
Figura 3.1 – Modelo Kelvin com parâmetros dependentes do tempo.....	45
Figura 3.2 – Modelo Maxwell com parâmetros dependentes do tempo.....	46

Figura 3.3 – Modelo Standard não linear .....	48
Figura 3.4 – Elemento Kelvin não linear.....	49
Figura 3.5 – Modelo reológico com parâmetros dependentes do tempo empregado na formulação presente.....	54
Figura 3.6 – Sistema de coordenadas para lâmina ortotrópica .....	57
Figura 3.7 – Comportamento para diferentes idades.....	61
Figura 4.1 - Direções principais da lâmina.....	66
Figura 4.2 - Planos principais da lâmina .....	73
Figura 4.3 – Falha na direção 1 .....	73
Figura 4.4 - Falha na direção 2 .....	74
Figura 4.5 - Cisalhamento 1-2 .....	75
Figura 4.6 – Ruptura por cisalhamento no plano 1-2 .....	76
Figura 4.7 – Cisalhamento 1-3 .....	76
Figura 4.8 – Ruptura por cisalhamento no plano 1-3 .....	76
Figura 4.9 – Cisalhamento 2-3 .....	77
Figura 4.10 – Ruptura por cisalhamento no plano 2-3 .....	77
Figura 4.11 – Fator de carga para falha.....	78
Figura 5.1 – Configurações de um corpo no sistema de coordenadas Cartesiano.....	82
Figura 5.2 – Elemento finito de casca laminada.....	84
Figura 5.3 - Sistemas de coordenadas para uma lâmina ortotrópica .....	87
Figura 5.4 – Elemento Kelvin submetido à tensão axial .....	94
Figura 6.1 – Geometria e carga do laminado.....	100
Figura 6.2 – Consideração de simetria .....	100
Figura 6.3 – Malhas de Elementos Finitos .....	101
Figura 6.4 – Comparação entre soluções numérica e analítica para diferentes razões a/h.....	101
Figura 6.5 – Deformada da placa.....	102
Figura 6.6 – Representação das tensões $\sigma_{xx}$ da camada 1 sobre a configuração deformada..	102
Figura 6.7 – Distribuição das tensões $\sigma_{xx}$ nas várias camadas do laminado .....	103
Figura 6.8 – Dimensões e carregamento da viga analisada.....	104
Figura 6.9 – Malha de elementos finitos .....	104
Figura 6.10 – Deformada do plano médio da viga .....	106
Figura 6.11 – Distribuição das tensões $\sigma_{xx}$ na camada 10 da viga .....	106
Figura 6.12 – Configuração de carga e geometria da casca esférica.....	107
Figura 6.13 – Malha de elementos finitos para análise da casca esférica .....	108

Figura 6.14 – Variação da carga última com a razão lado /espessura.....	110
Figura 6.15 – Variação da carga última, em escala logarítmica, com a razão lado/espessura	110
Figura 6.16 – Comparação entre cargas últimas obtidas com o Critério de Lee e Critério da Máxima Deformação .....	111
Figura 6.17 – Comparação entre cargas últimas em escala logarítmica obtidas com o Critério de Lee e Critério da Máxima Deformação .....	112
Figura 6.18 – Modelo Standard .....	113
Figura. 6.19 - Viga I a) Geometria e carregamento b) Seção transversal.....	113
Figura 6.20 - Malha de elementos finitos .....	114
Figura 6.21 – Tensões $\sigma_{xx}$ em MPa sobre a configuração deformada.....	114
Figura 6.22 – Deslocamentos em função do tempo.....	115
Figura 6.23 – Geometria e carregamento da estrutura.....	115
Figura 6.24 – Disposição do laminado .....	116
Figura 6.25 – Curva Carga x Deslocamento considerando uma redução de 40% no módulo de elasticidade após a plastificação de cada par de camadas .....	116
Figura 6.26 – Curva Carga x Deslocamento considerando a formulação plástica apresentada por Groehs e Creus (1977) após a plastificação de cada par de camadas .....	117
Figura 6.27 - Placa engastada-livre submetida à flexão .....	117
Figura 6.28 – Placa de concreto com a última camada em aço .....	118
Figura 6.29 - Curva Carga x Deslocamento no extremo livre da placa.....	118
Figura 6.30 – Modelo Standard não linear .....	119
Figura 6.31 – Condição de carregamento .....	120
Figura 6.32 – Deslocamento em função do tempo .....	120
Figura 6.33 – Variação do módulo de elasticidade em função do tempo.....	122
Figura 6.34 – História de carregamento .....	122
Figura 6.35 – Curvas deslocamentos x tempo.....	123
Figura 6.36 – Geometria do painel. a) vista do plano xy e malha empregada; b) vista do plano xz e deflexão inicial.....	124
Figura 6.37 – Comparação entre deflexões numéricas e analíticas.....	127
Figura 6.38 – Tempos críticos.....	128
Figura 6.39 – Modelo standard com envelhecimento.....	129
Figura 6.40 – Curvas deflexão x tempo para análise de flambagem viscoelástica com envelhecimento.....	130
Figura 6.41 – Coluna analisada .....	132

Figura 6.42 – Curvas de flambagem para Nylon 66 para vários valores de umidade relativa. .....	132
Figure 6.43 – Curvas de flambagem para papel (corrugação média) para vários valores de umidade relativa. ....	133
Figura. 6.44 - Viga I a) Geometria b) Seção transversal .....	134
Figura 6.46 -Curvas carga x deslocamentos lateral para carga concentrada.....	135
Figura 6.47 -Curvas carga x deslocamentos lateral para carga distribuída .....	136
Figura 6.48 - Tensões $\sigma_{xx}$ em MPa sobre a configuração deformada para uma carga de 0,5 kN .....	137
Figura 6.49 - Tensões $\sigma_{xx}$ em MPa sobre a configuração deformada para uma carga de 7 kN .....	137
Figura 6.50 - Tensões $\sigma_{xx}$ em MPa sobre a configuração deformada para uma carga de 10 kN .....	138
Figura 6.51 - Curvas de FPF e LPF e geometria da placa analisada .....	140
Figura 6.52 – Esquema de laminação do painel .....	141
Figura 6.54 – Curva carga x deflexão máxima para situações com e sem envelhecimento...	142
Figura 6.55 – Curva deslocamento máximo x tempo para situações com e sem envelhecimento.....	144
Figura 6.56 – Análise de flambagem com falhas progressivas e envelhecimento com GDCM .....	146
Figura 6.57 – Análise de flambagem viscoelástica com falhas progressivas e envelhecimento. .....	147



## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Comparação entre resultados analíticos e numéricos .....	105
Tabela 6.2 – Resultados para o deslocamento no ponto de aplicação da carga .....	108
Tabela 6.3 – Resultados para Nylon 66 .....	133
Tabela 6.4 – Resultados para papel de corrugação média (33-pound) .....	133
Tabela 6.5 – Resultados de carga crítica. ....	136

## RESUMO

Os materiais compósitos reforçados por fibras apresentam vantagens quando comparados aos materiais de construção mais tradicionais como concreto e aço. Por outro lado, devido ao fato destes materiais serem relativamente recentes no mercado, questões a respeito de sua durabilidade são ainda objeto de discussão e faz-se necessária intensa pesquisa sobre o envelhecimento dos compósitos. Como consequência, recentemente têm surgido inúmeros trabalhos à respeito da degradação dos compósitos considerando efeitos como temperatura, oxidação, radiação UV, condições de carregamento, etc. A maioria destas pesquisas, no entanto, são realizadas a nível de material e não são diretamente aplicáveis à situações de projeto. Desta forma, existe grande demanda por novos estudos e dados compatíveis com aplicações estruturais.

Neste trabalho apresenta-se um modelo analítico-numérico adequado para, interpretação e aplicação destes dados experimentais em análise e projeto de estrutural.

A formulação proposta inclui relações constitutivas elásticas anisotrópicas com envelhecimento, relações constitutivas viscoelásticas anisotrópicas com envelhecimento em termos de variáveis de estado, análise de falhas com critério de degradação ajustado à idade do material e considera-se grandes deslocamentos e pequenas deformações.

As diferenças essenciais entre os processos de envelhecimento em endurecimento e amolecimento são descritos juntamente com as relações constitutivas para cada caso. Estas equações são deduzidas na forma adequada para análise numérica via método dos elementos finitos usando uma solução incremental-iterativa com consideração de efeitos pos-críticos.

Vários exemplos são apresentados, incluindo análises elásticas, viscoelásticas e de falha com envelhecimento.

## ABSTRACT

Fibre-reinforced composites have many well-known structural advantages when compared to traditional construction materials like concrete and steel. On the other hand, due to its relative recent appearance in the market, questions about durability and ageing are still a subject of discussion and there is a great interest of researching in this area. As a consequence, in the last few years have been presented a growing amount of information on composites ageing considering effects as temperature, oxidation, UV radiation, permanent loading etc. Most of this research is performed at the materials level, by materials scientists, and thus it is not directly applicable to the design stage. New studies and data pertaining to infrastructure applications are in great demand.

In this work, the analytical-numerical framework adequate for the, interpretation and application of experimental data to actual engineering analysis and design is discussed.

The formulation proposed includes elastic anisotropic relations; ageing viscoelastic anisotropic constitutive equations in terms of state variables; age-adjusted failure and degradation criteria; all in a setting of large displacements with small strains.

The essential differences among hardening and softening ageing processes are described together with the constitutive relations adequate for each case. These equations are written in a form adequate for numerical analysis in a Finite Elements context, using an incremental-iterative solution procedure that accounts for post-critical effects.

Several examples, including elastic, viscoelastic and failure behaviour in a large displacement context are included to check the algorithms.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os materiais compósitos possuem as mais diversas aplicações e vem sendo empregados com sucesso em muitas áreas como, por exemplo, nas indústrias aeroespacial, aeronáutica e automobilística, em bioengenharia (produtos médicos e biológicos), em artigos esportivos (bicicletas, equipamentos para golfe, tênis, hockey, e outros) e inúmeras estruturas como pontes, passarelas, edificações, estruturas offshore, navios, trens, etc.

A utilização dos compósitos em engenharia civil não é recente. Embora em pequena quantidade, tais materiais vem sendo empregados há algumas décadas neste setor (Liao et al, 1998). Além de apresentarem-se como uma alternativa aos materiais de construção convencionais, recentemente, devido a necessidade de reforço e recuperação de estruturas, o interesse na utilização destes materiais recebeu um grande impulso. E, afora isto, é razoável esperar-se que não apenas as técnicas construtivas mas também os materiais empregados nas estruturas civis evoluam na tentativa de originar projetos mais aperfeiçoados que aliem durabilidade, resistência, baixo custo e facilidade de execução.

Existem diferentes tipos de materiais compósitos reforçados por fibras disponíveis para uso em aplicações civis. Estes materiais, são resistentes à corrosão e a vários agentes químicos, além de serem leves e de fácil manuseio. Sua resistência, em geral, é alta. Fibras de carbono e aramida possuem resistência comparável ao aço protendido.

Os materiais compósitos, porém, apresentam uma mecânica bastante complexa devido a sua heterogeneidade e anisotropia. Além disto, fibras e matriz possuem características bastante distintas. As primeiras, geralmente feitas de boro, grafite, vidro ou carbono, exibem um comportamento praticamente elástico, enquanto que a última, que na maioria dos caso é uma resina polimérica, exhibe comportamento viscoelástico fortemente dependente das condições ambientais.

Os polímeros para aplicações estruturais podem ser classificados em termoplásticos e termorrígidos. O esqueleto de uma cadeia polimérica é formado por átomos de carbono unidos por fortes ligações covalentes.

Polímeros termoplásticos são caracterizados por possuir ligações químicas fracas (van der Waals) entre as cadeias que assim podem ser facilmente rompidas com a introdução de energia. Dessa forma, quando tais materiais são aquecidos, as ligações de van der Waals são quebradas, permitindo que haja uma maior facilidade para a movimentação de cadeias poliméricas umas em relação às outras. A capacidade das cadeias de fluir com a aplicação de temperatura garante à esses materiais suas características fundamentais de fácil re-processabilidade.

Polímeros termorrígidos apresentam cadeias conectadas entre si por ramificações ou braços compartilhados. Assim, ligações químicas primárias de alta energia são responsáveis pelas ligações cruzadas (“cross-linking”) entre cadeias, as quais só são rompidas com a introdução de elevadas quantidades de energia que usualmente levam também ao rompimento das ligações constituintes das cadeias poliméricas (com a conseqüente degradação - queima - do polímero). Assim sendo, percebe-se que o tipo de ligação entre cadeias, nesse caso, é responsável pelo comportamento característico dos termorrígidos de não serem facilmente conformados e re-processados através apenas da ação conjunta de pressão e temperatura.

As propriedades dos polímeros variam com a temperatura, particularmente durante o processo de transição vítrea quando as forças de van der Waals desaparecem gradativamente. Este efeito reduz sensivelmente a rigidez do material, pois permite o deslocamento relativo entre as cadeias do polímero, em um processo semelhante ao que ocorre durante a deformação viscoelástica.

As cadeias poliméricas interagem umas com as outras, como já foi dito, através de ligações mais frágeis governadas por forças de van der Waals (no caso dos termoplásticos) e, eventualmente, ligações cruzadas, no caso dos termorrígidos. Desta forma, a rigidez global dos polímeros é baixa e esta característica é melhorada através da adição de fibras que fornecem resistência e rigidez ao compósito.

Os materiais compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras (“FRP-Fibre Reinforced Plastics”) apresentam vantagens quando comparados aos materiais tradicionais utilizados na construção civil como concreto e aço. Entre estas vantagens pode-se destacar suas altas razões rigidez/peso e resistência/peso (compósitos reforçados por fibras de carbono, por exemplo, possuem razões 10 a 15 vezes maiores que o aço), excelente resistência à corrosão, baixa expansão térmica, boa performance em fadiga e tolerância a dano, facilidade de transporte e manuseio, possibilidade de inclusão de "strain gages" dentro da estrutura para um monitoramento contínuo, baixo consumo de energia na fabricação do material e da estrutura em si.

Uma das principais vantagens apresentada pelos materiais compósitos, porém, reside no fato de poder-se projetar o material para a situação desejada, projetando-se não apenas a estrutura mas o material do qual ela é constituída. As fibras podem ser arranjadas de acordo com as condições de carregamento e, assim sendo, tanto a estrutura quanto seus componentes podem ser otimizados para performance.

Existem, entretanto, alguns obstáculos a serem vencidos para que se tenha um uso em maior escala dos compósitos na construção civil. Um destes obstáculos refere-se a questões de custo. Todavia, levando-se em conta a economia em transporte devido ao fato das peças confeccionadas em material compósito possuírem menor peso, a possibilidade de pré fabricação diminuindo o trabalho na obra, a sua durabilidade, trabalhabilidade, etc, vê-se que uma comparação direta por unidade de preço não é apropriada. Além disto, com o aumento da utilização dos compósitos e conseqüente maior produção, o custo diminuiria. E existem opções de materiais (compósitos reforçados por fibras de vidro) e processos de fabricação (pultrusão) menos dispendiosos que podem ser empregados na construção civil.

Outra dificuldade é que a maioria dos engenheiros civis e projetistas não estão familiarizados com materiais compósitos e possuem restrições a respeito de seu uso como alternativa frente aos materiais convencionais que contam com normas, vasta bibliografia e estão consagrados na prática da construção civil. Na maioria dos cursos de engenharia civil não se tem nem mesmo uma disciplina de projeto em compósitos.

Além disto, tem-se a necessidade de estudos voltados para processos de fabricação de baixo custo e grande volume de produção, mais adequados à indústria da construção civil,

como a pultrusão (Barbero, 1998). O processo de pultrusão ("pultrusion") é uma técnica que permite a produção econômica de elementos estruturais de materiais compósitos. Tal processo é ideal para a produção de vigas de parede delgada e perfis em geral empregados em pontes e outras estruturas. No Rio Grande do Sul já existe uma fábrica<sup>1</sup> de materiais pultrudados avançados.

Um dos mais significantes obstáculos técnicos ao emprego dos compósitos na construção civil, no entanto, reside na falta de conhecimento a respeito do comportamento destes materiais e de estudos sobre sua durabilidade e performance a longo prazo. Embora existam muitos estudos sobre fluência, corrosão, fadiga, envelhecimento químico e físico dos compósitos, estes trabalhos não são voltados às aplicações da engenharia civil.

Também devido às dificuldades em obter-se dados experimentais a respeito dos efeitos do envelhecimento por longos períodos de tempo, existe grande interesse no desenvolvimento de ferramentas capazes de prever tais efeitos com base em ensaios de curta duração. E, além disto, como os compósitos normalmente empregados em componentes estruturais estão sujeitos à temperaturas correspondentes a sua região vítrea, um melhor entendimento a respeito de procedimentos de "shifting" faz-se necessário.

Para o projeto de estruturas em compósito é essencial que o projetista conheça, além das características mecânicas como resistência e rigidez, o comportamento do material durante a vida útil do projeto. Ou seja, que mudanças irão ocorrer no compósito sob as condições de serviço requeridas em uma determinada aplicação. Se estas mudanças forem conhecidas antecipadamente, poderão ser levadas em consideração na fase de projeto e os limites aceitáveis de resistência e deformação poderão ser estimados para toda a vida útil da estrutura.

Desta forma, tem-se a necessidade de estudar-se melhor o comportamento destes materiais principalmente no que se refere à sua degradação frente a agentes ambientais. Conhecer os efeitos do envelhecimento sobre os compósitos é fundamental para sua utilização nas estruturas civis, pois neste tipo de aplicação a vida útil é geralmente longa comparada as mais tradicionais aplicações dos compósitos. Pontes, por exemplo, são projetadas para durar mais de 50 anos.

---

<sup>1</sup> WPP – Perfis Pultrudados ([www.wpp.com.br](http://www.wpp.com.br))

Os mecanismos que controlam a durabilidade dos compósitos incluem alterações físicas e químicas na matriz polimérica, redução de resistência e rigidez das fibras, além da perda de aderência na interface fibra-matriz (Liao et al., 1999).

Considera-se que nas condições ambientais normais de serviço das estruturas, tanto fibra quanto matriz podem ser afetadas por umidade, variações de temperatura, radiação ultravioleta (UV) e agentes químicos como sais e ácidos.

O envelhecimento nos compósitos é normalmente classificado em envelhecimento físico e químico e cada um destes processos possui diferentes efeitos. Do ponto de vista da engenharia estrutural, é importante conhecer quais propriedades são alteradas pelos processos de envelhecimento e de que maneira estas alterações ocorrem. Deve-se, ainda, distinguir claramente os efeitos de endurecimento (“hardening”) e amolecimento (“softening”). O processo de “softening” ocorre quando o material perde resistência e rigidez (como nos casos de falha) e este processo deve ser modelado com parâmetros do material dependentes do tempo em uma análise incremental. O processo de “hardening” é aquele no qual o material solidifica (por redução do volume livre, ou aparecimento de novos “cross links”, etc) em sua configuração real e deve ser modelado com propriedades dependentes do tempo com formulação em taxas em uma análise incremental.

Para análise numérica de estruturas complexas feitas em material compósito necessita-se uma formulação em elementos finitos considerando efeitos de não linearidades geométricas, viscoelasticidade e falhas progressivas. A formulação para análise de casos sem envelhecimento, já foi apresentada em trabalhos anteriores (Oliveira e Creus, 2000, Oliveira, 1999, Oliveira e Creus, 2003, Marques e Creus, 1994).

Para implementar uma formulação em elementos finitos que considere envelhecimento, um procedimento adequado, isto é, um modelo analítico e computacional, que represente os efeitos de envelhecimento na estrutura deve ser proposto. Acredita-se que tal modelo, bem como a generalidade de estruturas e casos de carregamento para os quais o mesmo pode ser aplicado, constitua-se em uma contribuição original dentro do campo de pesquisa em compósitos.



A degradação devida ao envelhecimento dos materiais compósitos ocorre em diferentes ambientes e condições de serviço e limita severamente a durabilidade das estruturas que empregam estes materiais em sua constituição. Usualmente, existe acoplamento dos efeitos da degradação (química, térmica, radiação UV) em associação com as tensões atuantes (White e Turnbull, 1994). Liao et al. (1998) apresenta uma completa revisão sobre os efeitos do envelhecimento nos compósitos. Tal referência é bastante útil como resumo mas demonstra a falta de um modelo constitutivo adequado que inclua efeitos de envelhecimento. Como consequência, muitos dos resultados experimentais apresentados não permitem extrair as informações necessárias para aplicação em projetos. O mesmo ocorre na maioria dos trabalhos nesta área de pesquisa.

Além disto, poucos são os estudos que analisam os efeitos do envelhecimento em estruturas complexas e a maioria das informações é dada apenas a nível de material. Uma das raras referências relacionadas à análise estrutural com envelhecimento é o estudo apresentado por Huang et al. (1998), que usa técnicas de “time shifting” na análise de flambagem.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os trabalhos existentes na literatura que visam caracterizar as mudanças nas propriedades nos compósitos em função do tempo, são geralmente voltados às aplicações aeroespaciais onde o uso de compósitos de matriz polimérica já está consagrado devido ao baixo peso e facilidade de processamento destes materiais. Além disto, compósitos poliméricos resistentes a altas temperaturas têm recebido especial atenção devido às suas potencialidades para aplicações em componentes de motores de aviões expostos às elevadas temperaturas. Existe interesse na utilização destes materiais em aviões comerciais de alta velocidade (HSCT - High-Speed Civil Transport).

A degradação dos materiais compósitos dá-se basicamente de duas formas, uma química e outra física. O envelhecimento químico ocorre, principalmente, devido à oxidação que, aliada a outros fatores como temperatura e tempo de exposição provoca alterações irreversíveis na estrutura molecular do material. O efeito mais conhecido do chamado envelhecimento físico ("physical ageing") é um fenômeno pelo qual os materiais amorfos, especialmente polímeros, buscam continuamente o equilíbrio termo-dinâmico quando

encontram-se à temperaturas abaixo de sua temperatura de transição vítrea (“glass transition temperature”- $T_g$ ). Durante este processo o material torna-se mais frágil e apresenta aumento na densidade e na rigidez e diminuição da viscosidade. O envelhecimento físico é termo-reversível, ou seja, se o material for mantido a uma temperatura acima de sua temperatura de transição vítrea por um determinado período de nominal de "rejuvenescimento", voltará a ter suas características originais.

Este trabalho dará ênfase ao envelhecimento e degradações em geral sofridas pelos materiais compósitos submetidos a constantes ou repetidos carregamentos e expostos ao ambiente por longos períodos de tempo, que são, normalmente, as condições de serviço das estruturas civis.

A fim de fornecer subsídios, é feita a seguir uma revisão dos trabalhos mais recentes sobre envelhecimento ou "ageing" como é conhecido na literatura inglesa. A apreciação dos referidos estudos será apresentada de acordo com a classificação de envelhecimento físico e químico e dos efeitos característicos de cada um destes dois processos.

### **1.2.1 Envelhecimento Físico**

O efeito mais conhecido do envelhecimento físico é um fenômeno que ocorre quando os materiais amorfos, especialmente polímeros, são expostos à temperatura menores que sua temperatura de transição vítrea ( $T_g$ ). Nestas condições, o material requer um certo período de tempo para atingir o equilíbrio termo-dinâmico. Durante este processo as propriedades do material alteram-se continuamente. Basicamente, ocorre aumento da densidade e da rigidez do material. Este efeito é termo-reversível, ou seja, depois de aquecido a temperaturas acima de sua temperatura de transição vítrea,  $T_g$ , por um período nominal de rejuvenescimento, o material comporta-se como se não tivesse sofrido envelhecimento físico antes. No entanto, na maioria das situações práticas em engenharia civil, promover tal rejuvenescimento é bastante improvável.

De acordo com Morgan (1991) os efeitos do envelhecimento físico podem ser classificados como: volume livre, umidade absorvida, diluentes, quebra ou escorregamento

macromolecular de cadeias, expansão térmica, relaxação e recristalização. Os dois primeiros efeitos serão abordados nos parágrafos seguintes.

### *1.2.1.1 Efeito de Volume Livre*

Este efeito é muitas vezes referenciado apenas como envelhecimento físico (Struik, 1978). A expressão efeito de volume livre pode não ser totalmente adequada, uma vez que a teoria de volume livre é apenas uma das teorias, talvez a mais antiga, que explica a transição vítrea (Binder et al., 2003).

A interpretação em termos da teoria de volume livre é a seguinte: quando um polímero é resfriado abaixo de sua temperatura de transição vítrea, o material não atinge o equilíbrio termodinâmico instantaneamente. O equilíbrio do chamado volume livre do material desenvolve-se gradualmente durante um período no qual as estruturas moleculares alteram-se modificando, assim, o comportamento mecânico dos polímeros. Como resultado, tem-se um aumento da rigidez, da tensão de escoamento, da densidade e da viscosidade e uma diminuição nas taxas de fluência e relaxação. Os polímeros tornam-se mais rígidos e frágeis.

A expressão dada a seguir para a variação do módulo de elasticidade durante o processo de envelhecimento físico, ajusta-se bem se comparada a dados experimentais (Hu e Sun, 2000).

$$E(t) = E_0(1 - \alpha e^{-\beta t}) \quad (1.1)$$

O conhecido modelo de Struik para envelhecimento físico relaciona-se e depende fortemente do princípio da superposição tempo/temperatura (TTSP) (Leaderman, 1943, Williams et al., 1955) e da teoria de tempo efetivo.

Os resultados apresentados na figura 1.1 (Wang, 1995) mostram que tanto o deslocamento (“shifting”) horizontal quanto o vertical são necessários à determinação da curva mestre. Este comportamento é interpretado pelos autores como sendo devido à mudanças na cristalinidade do polímero e/ou aceleração da degradação química a altas temperaturas.

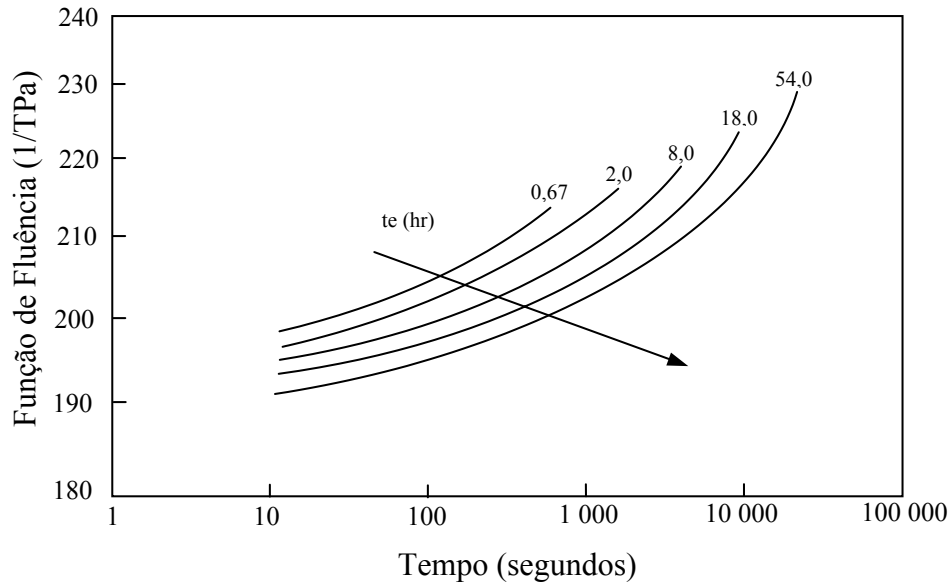


Figura 1.1 – Efeito do envelhecimento físico no comportamento em fluência de um compósito com fibras a 90° (IM8/954-2) a uma temperatura de 160°C.

Vários estudos experimentais mostram que os compósitos apresentam uma maior influência do envelhecimento físico nas propriedades dominadas pela performance da matriz (cisalhamento e resposta transversal) (Sullivan,1990 e Sullivan et al,1993) mas, mesmo nos compósitos cuja seqüência de laminação acarreta em um comportamento dominado pelas características das fibras, os efeitos do envelhecimento físico são importantes. As referências citadas anteriormente também discutem procedimentos de superposição tempo/envelhecimento-tempo e tempo/temperatura que são válidos para análises de curto prazo.

O comportamento a longo prazo em fluência é obtido através do comportamento momentâneo, usando-se uma teoria de tempo efetivo. O envelhecimento físico é bastante importante no cálculo da resposta a longo prazo como mostra a figura 1.2 (Brinson e Gates, 1995).

No trabalho de Gates et al. (1997) é mostrado um estudo analítico e experimental para investigação da influência do envelhecimento físico no comportamento viscoelástico em tração e compressão de compósitos de matriz polimérica. O modelo analítico é empregado para prever efeitos do envelhecimento a longo prazo utilizando como base dados de ensaios de curta duração. São apresentadas comparações entre dados analíticos e experimentais.

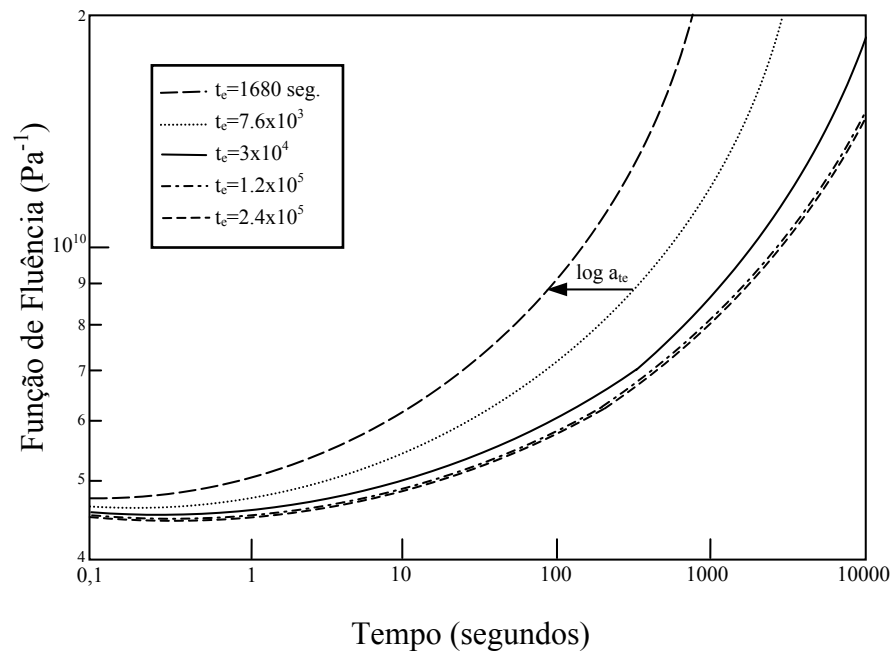


Figura 1.2 – Curvas de fluência para resina epoxy com aumento do tempo de envelhecimento.

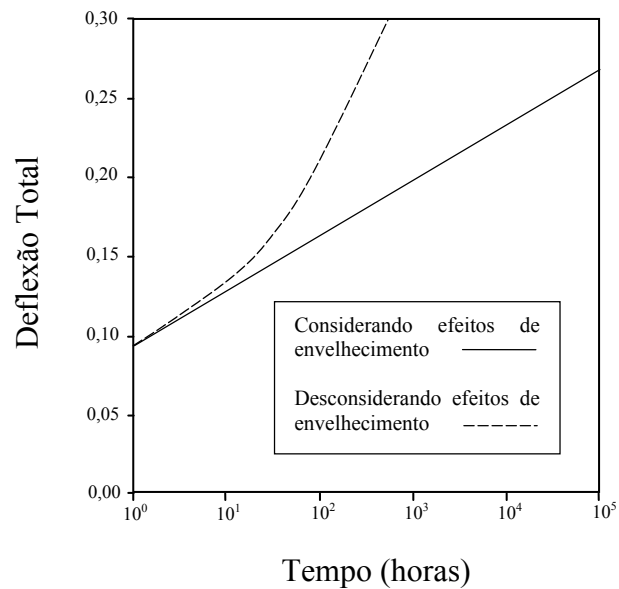


Figura 1.3 – Comparação entre deflexões obtidas com e sem a consideração do efeito de envelhecimento

Huang et al. (1998) apresentam uma análise viscoelástica não linear geométrica para laminados simétricos reforçados por fibras de vidro e grafite submetidas à compressão. São considerados efeitos de imperfeições geométricas (deflexão inicial) e envelhecimento físico. As deflexões são calculadas através da equação de momento usando-se o Método de Galerkin e integração numérica. Na figura 1.3 tem-se uma comparação das deflexões totais ( $\bar{A} + \bar{A}_0$ , sendo  $\bar{A}_0$  a deflexão inicial do laminado) obtidas com e sem a consideração de efeito de envelhecimento físico.

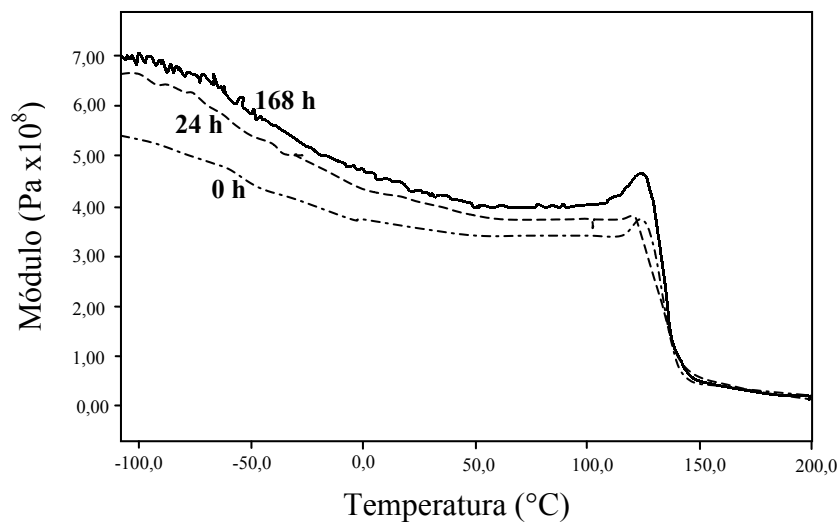


Figura 1.4 – Módulo em função da temperatura para amostras de resina DGEBA/1,3-BAC envelhecidas isotermicamente a 100°C por 0, 24 e 168h.

Barral et al. (1999) investigaram o envelhecimento físico de um sistema contendo uma resina (diglycidyl ether of bisphenol A - DGEBA) e um endurecedor (1,3-bisaminomethylcyclohexane - 1,3-BAC) através de calorimetria e análise dinâmica. A figura 1.4 mostra uma comparação das curvas do módulo dinâmicos em função da temperatura variando entre 100°C e 180°C para amostras envelhecidas isotermicamente a 100°C por 0, 24 e 168h, respectivamente. Aparentemente o envelhecimento causa um enrijecimento nas cadeias moleculares, resultando em um aumento do módulo para a resina DGEBA/1,3-BAC envelhecida. Observa-se uma brusca variação próximo a temperatura de transição vítrea com grande redução do valor do módulo devido ao envelhecimento físico.

O trabalho de Daniel et al. (1999) analisa o efeito da redução de volume que ocorre nos polímeros durante o processo de envelhecimento físico. Tal redução de volume é

mensurada diretamente através de "strain gages" e, um modelo analítico para quantificar o envelhecimento físico, é proposto. São apresentadas técnicas para mensurar os efeitos do envelhecimento no comportamento viscoelástico dos compósitos. A deformação ocorrida devido ao envelhecimento é medida e subtraída da deformação total, tendo-se, assim a apreciação individual dos efeitos do envelhecimento e da viscoelasticidade.

Os efeitos de volume livre no envelhecimento físico são totalmente reversíveis quando o material é aquecido a temperaturas acima de sua temperatura de transição vítrea  $T_g$ . Este comportamento pode ser importante na análise de estruturas que devem suportar altas temperaturas de serviço como componentes de aeronaves. Nas estruturas civis, no entanto, esta situação é dificilmente observada.

#### *1.2.1.2 Efeito da Absorção de Umidade*

Os materiais compósitos podem absorver umidade de diferentes maneiras de acordo com as circunstâncias, como mostrado na figura 1.5 (Liao et al, 1995). A curva LF representa é chamada curva Fickiana linear e é dada pela equação de Fick. A curva A representa o comportamento pseudo-Fickiano, no qual o equilíbrio nunca é alcançado. A curva B apresenta um salto, atribuído à variação ambiental. O rápido ganho de umidade apresentado na curva C resulta de grandes deformações ou danos no material, como ruptura na matriz. A curva D pode ocorrer no caso de modificações físicas ou químicas do material. Desta forma, em geral, o modo de absorção de umidade depende da temperatura, da carga aplicada, do tipo de meio ao qual o material é exposto, do tempo de exposição e, obviamente, do tipo de material.

Poathan et al. (1997) apresentam um estudo experimental para caracterização de compósitos com matriz de resina de poliéster reforçados por fibras orgânicas. São considerados efeitos da porcentagem de fibras empregada, a existência ou não de tratamento superficial das mesmas e o comprimento das fibras na caracterização das propriedades do compósito em tração, flexão, impacto e envelhecimento. A absorção de água em função do tempo de imersão e a variação na resistência à tração para amostras com envelhecimento natural e forçado e sem envelhecimento é estudada. As curvas tensão-deformação para os compósitos sujeitos à diferentes condições de envelhecimento são apresentadas na figura 1.6.

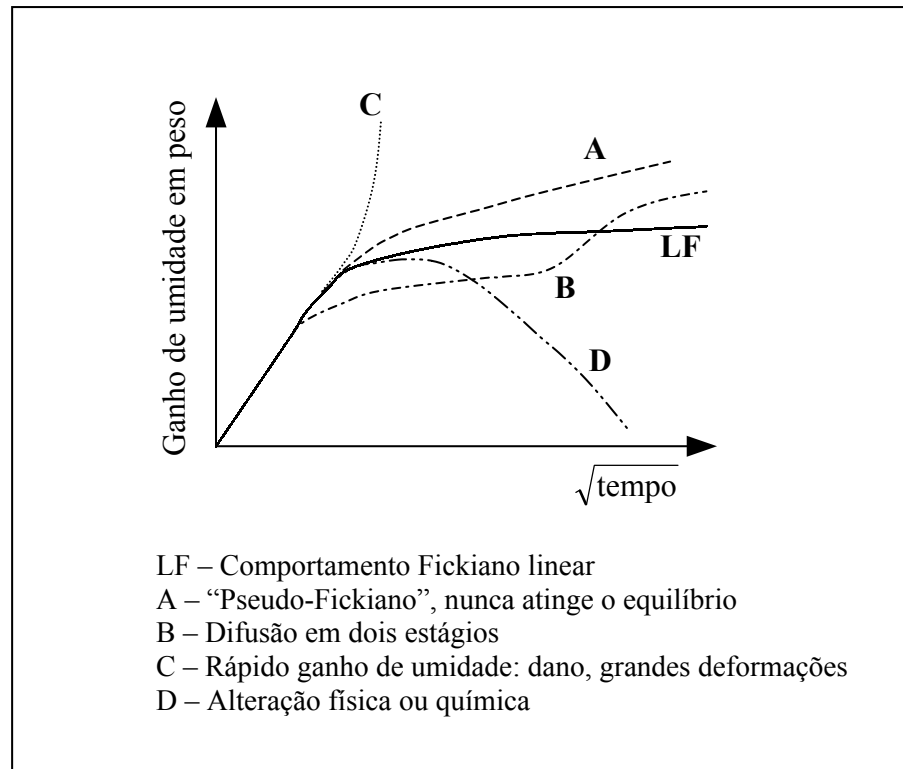


Figura 1.5 – Modos de absorção de umidade em materiais compósitos.

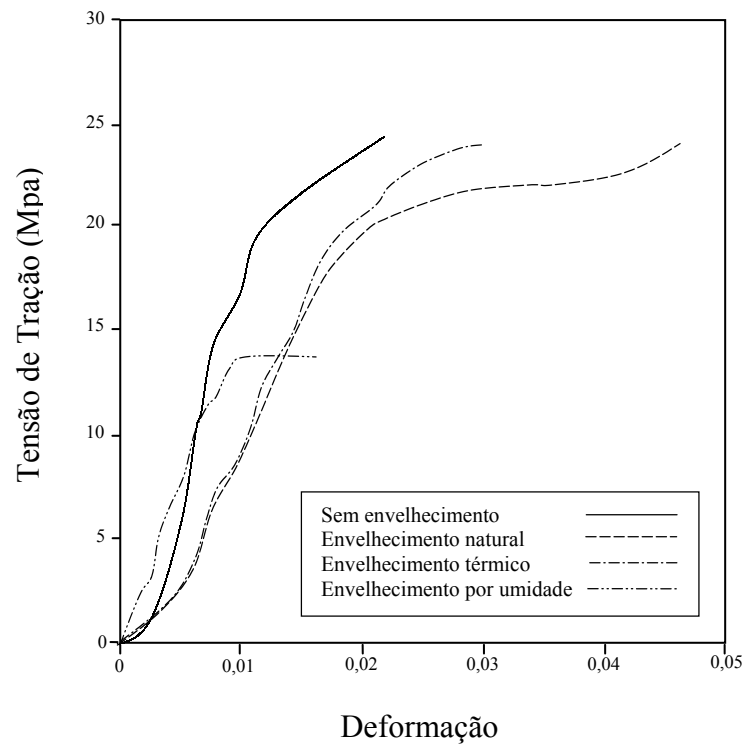


Figura 1.6 – Curvas tensão-deformação para diferentes condições de envelhecimento



Miranda Guedes et al. (2000) apresentam curvas tensão-deformação afetadas por envelhecimento higroscópico (figura 1.7). Após 3100 horas ocorre um sensível alteração na curva e observa-se que este efeito não é totalmente reversível, pois após um ciclo de absorção e secagem, o material apresenta menor resistência. Tal perda de resistência é atribuída a reorganizações internas da estrutura do material.

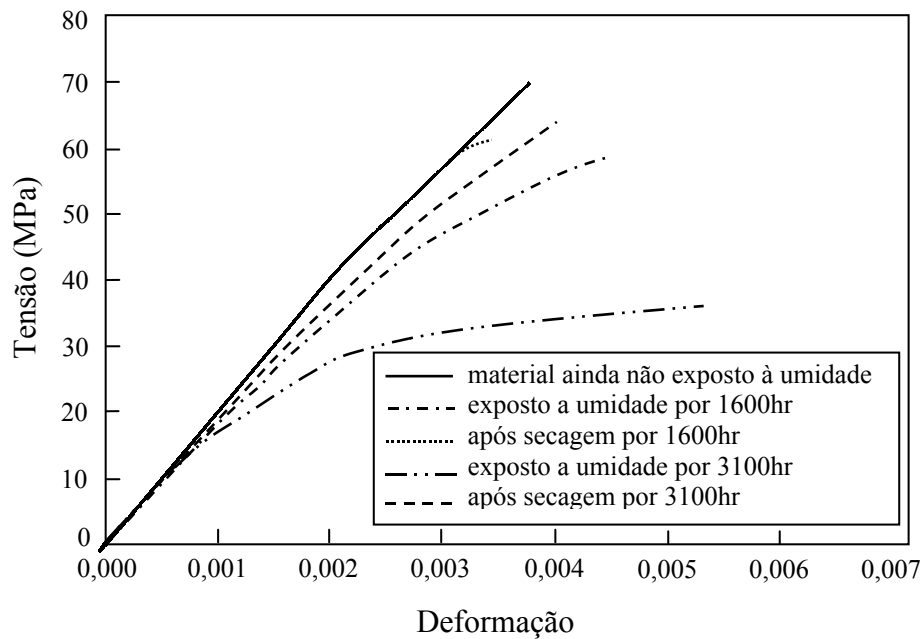


Figura 1.7 – Efeito do envelhecimento higroscópico na curva tensão-deformação na direção transversal às fibras.

Scida et al. (2002) estudaram o efeito da absorção de umidade em compósitos de fibra de vidro que empregam dois diferentes tipos de resina epoxy como matriz. Os efeitos do envelhecimento nestes compósitos são analisados através de condições de envelhecimento acelerado obtidas por exposição do material durante 1300 horas em ambiente com temperatura de 70 C e umidade relativa de 95%. Os parâmetros de degradação dos compósitos são investigados sob condições de carregamento e envelhecimento através de técnicas como emissões acústicas e observações microscópicas. Uma das duas resinas empregadas, a resina R1, é bastante absorvente e apresentou-se mais sensível ao envelhecimento quando comparada à outra resina. A figura 1.8 mostra a curva tensão-deformação nos casos com e sem consideração do efeito do envelhecimento para testes de tração com a resina R1. As figuras 1.9 e 1.10 apresentam, respectivamente, as curvas carga-deslocamento com e sem envelhecimento para o material compósito que emprega a resina R1. Pode-se concluir que a suscetibilidade da resina R1 ao envelhecimento afeta sensivelmente o comportamento do

material. Além de haver uma grande redução na carga última de falha, a ruptura do material envelhecido é bastante frágil se comparada à ruptura do mesmo material sem o efeito do envelhecimento. Este estudo demonstra, ainda, o papel fundamental exercido pela matriz na performance global do material compósito.

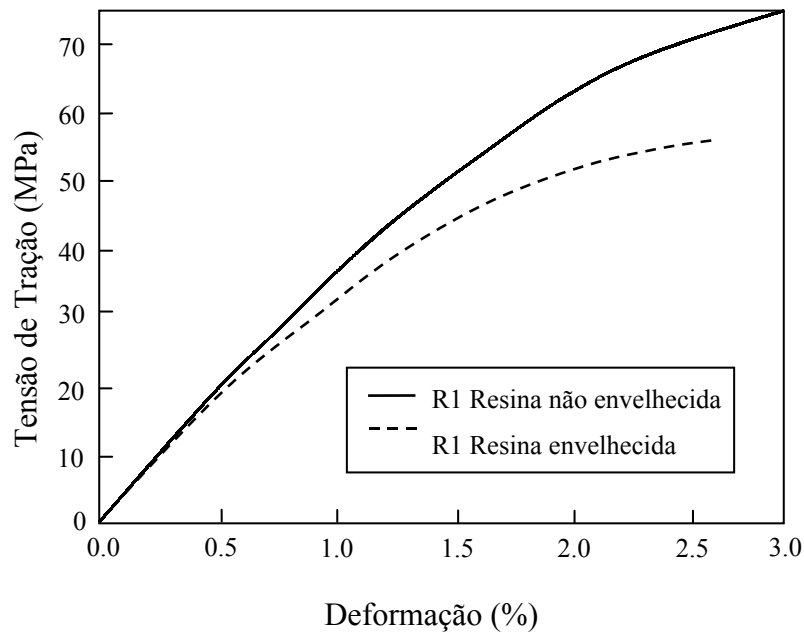


Figura 1.8 – Curva tensão-deformação para teste de tração da matriz R1

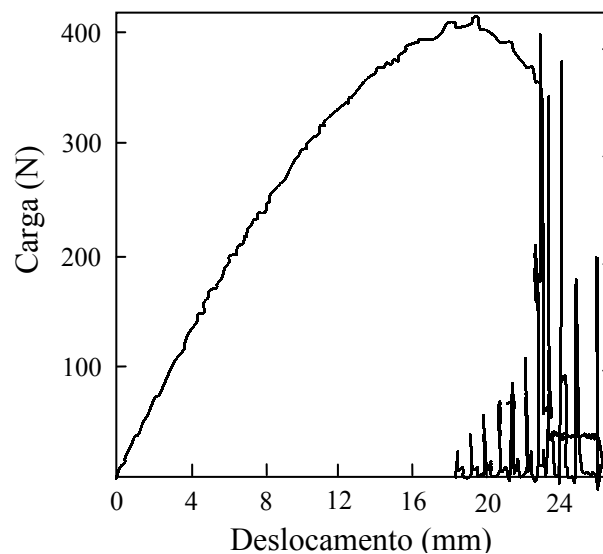


Figura 1.9 – Curva carga-deslocamento em flexão para o compósito com a resina R1 sem envelhecimento.

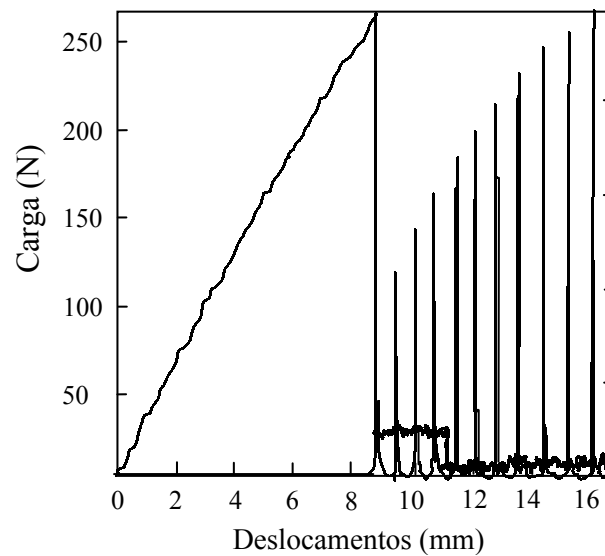


Figura 1.10 – Curva carga-deslocamento em flexão para o compósito com a resina R1 envelhecido.

As moléculas de água podem formar ligações de hidrogênio em certos polímeros chamados hidrofílicos. A possibilidade de formar as ligações com o hidrogênio distingue estes polímeros dos demais. A relação constitutiva uniaxial dos polímeros hidrofílicos é não linear mesmo na região elástica e os coeficientes das equações dependem da umidade relativa do ambiente. O papel, por exemplo, pode absorver até 30% do seu peso em água e o nylon pode absorver aproximadamente 8% (Haslach Jr., 1992).

O modelo de Nissan (Nissan, 1976) para o módulo de elasticidade em função da umidade é dado por

$$E = E_0 e^{(a-bm)} \quad (1.2)$$

onde  $E = E_0 e^a$  é o módulo de elasticidade para o material seco,  $m$  é a quantidade de umidade e  $a$  e  $b$  são constantes do material.

A influência da umidade e tensões induzidas por sua presença podem acelerar, também, o processo de degradação das fibras de vidro (Liao e Tan, 2001). Em vidro e outros silicatos as moléculas de água quebram as ligações tencionadas na ponta de trincas que, desta forma, crescem rapidamente em função não apenas da carga aplicada como, também, das condições ambientais. Este fenômeno é chamado de fadiga estática (“static fatigue”) (Leon e

Weitsman, 2001 e Barbero e Damiani, 2003). A figura 1.11 apresenta a curva típica de fadiga estática para um material compósito com fibras de vidro. Este fenômeno, corresponde a um comportamento extremamente não linear que pode ser modelado com viscoelasticidade não linear ou com viscoelasticidade linear e dano combinados (Oliveira e Creus, 2000, Barbero e Damiani, 2003(2) e Schapery, 1999). Em outras situações, no entanto, a umidade pode causar o relaxamento de tensões preexistentes tendo, portanto, um efeito benéfico (Wood e Bradley, 1997).

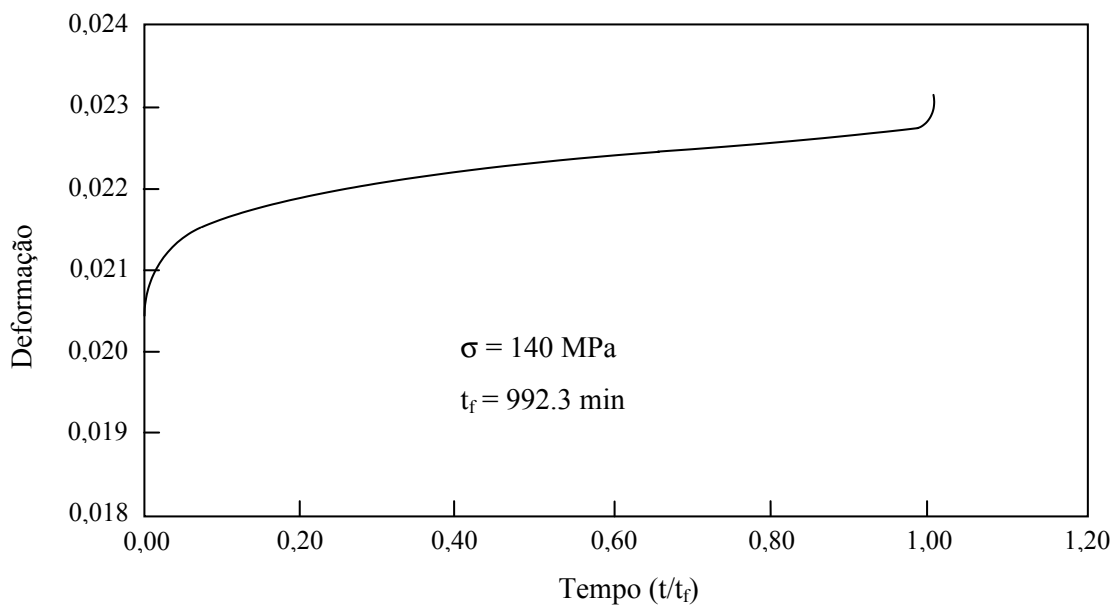


Figura 1.11 – Curva de fadiga estática. Deformação x tempo.

### 1.2.2 Envelhecimento Químico

O envelhecimento químico ou ambiental é resultado de diferentes agentes como umidade relativa, condições de carregamento, radiação ultravioleta (UV), etc, e leva a alterações irreversíveis na estrutura molecular do material.

Exceto no caso de fibras orgânicas, é a matriz a maior responsável pela performance a longo prazo dos compósitos. E as matrizes poliméricas possuem comportamento viscoelástico influenciado pelas condições ambientais, tais como umidade, temperatura e radiação UV. A ação conjunta de todos estes fatores no comportamento e durabilidade dos compósitos é um fenômeno bastante complexo que ocorre a nível molecular. O estudo deste fenômeno e a

modelagem do comportamento dele resultante são tarefas cruciais para determinação da vida útil e segurança das estruturas feitas em material compósito.

Ochoa e Ross (1998) propõem um modelo analítico para determinar a carga última de compósitos híbridos com fibras de vidro e carbono. A matriz é considerada isotrópica com comportamento não linear. As fibras de carbono são tratadas como material ortotrópico, enquanto que as fibras de vidro são consideradas isotrópicas, ambas com comportamento linear. As análises são feitas para o material em condições ambientes e para o caso de envelhecimento por imersão em água do mar e levam em conta, ainda, dano progressivo das lâminas. Nas curvas tensão-deformação para compósitos de fibra de vidro, fibra de carbono, e compósitos híbridos, observa-se uma importante perda de resistência devido ao envelhecimento.

Tsotsis (1998) e Tsotsis e Lee (1998) apresentam um abordagem experimental para estudo dos efeitos a longo prazo do envelhecimento químico em materiais compósitos. Nos testes, o material é investigado a uma temperatura de  $177^{\circ}\text{C}$  por períodos de até 10.000 horas e são apresentados resultados referentes à variação em suas propriedades (Tsotsis, 1998). Observa-se que as propriedades afetadas mais significativamente pela performance da resina estão mais suscetíveis à degradação termo-oxidativa. Os efeitos causados pelo envelhecimento são, ainda, analisados do ponto de vista dos mecanismos de falha e é proposta uma metodologia experimental para estudo e observação de tais mecanismos (Tsotsis e Lee, 1998).

Liao et al. (1999) estudaram a durabilidade de compósitos pultrudados com matriz vinil ester e reforçados por fibras de vidro sujeitos ao envelhecimento. Existe grande interesse na utilização deste tipo de material nas aplicações de infraestrutura, pois o processo de pultrusão e a utilização das fibras de vidro reduzem o custo de produção e, conseqüentemente, dos compósito originados por este processo. Foram testadas amostras de material sem envelhecimento e envelhecidas em água ou solução salina a temperaturas de  $25^{\circ}\text{C}$  (temperatura ambiente) ou  $75^{\circ}\text{C}$ . A exposição a tais ambientes, de um modo geral, causou redução no módulo e na resistência à flexão, para espécimes com fibras paralelas ao eixo longitudinal, como encontra-se ilustrado na figura 1.12. Além disto, a observação das superfícies de falha de espécimes com fibras a  $90^{\circ}$  do eixo longitudinal sugere a ocorrência de degradação na interface fibra-matriz durante o processo de envelhecimento.

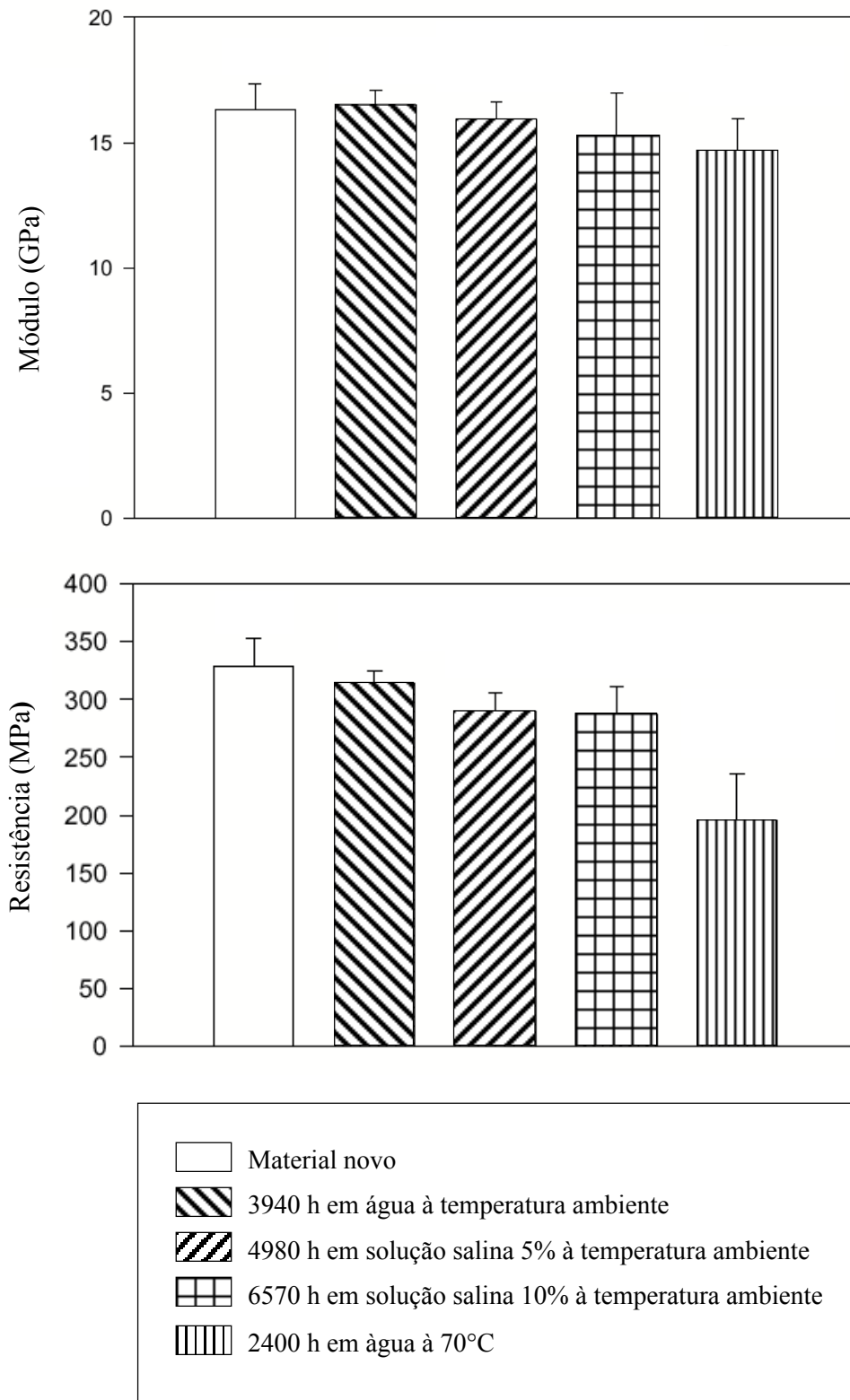


Figura 1.12 – Módulo e resistência à flexão em função do tempo e ambiente de exposição

Morgan (1991) cita os seguintes efeitos como sendo relacionados ao envelhecimento químico: hidrólise, oxidação, radiação e decomposição térmica. Os três primeiros serão examinados a seguir.

#### *1.2.2.1 Hidrólise*

A quebra de cadeias de moléculas induzida hidrolicamente nas matrizes poliméricas dos compósitos não é considerada um fenômeno muito significativo sob o ponto de vista da análise de envelhecimento.

Uma das raras exceções em que este efeito ganha importância é quando impurezas ou imperfeições na superfície das fibras catalisam a hidrólise da matriz. Poliamidos aromáticos, como Kevlar 49, são suscetíveis a degradação por hidrólise, a qual é acelerada por imperfeições associadas ao processo de fabricação das fibras.

#### *1.2.2.2 Oxidação*

Existem dificuldades experimentais no estudo da oxidação de compósitos de matriz polimérica, pois a reação ocorre entre um sólido e um gás. Os efeitos da concentração de oxigênio e sua difusão através do compósito influenciam a degradação de forma bastante complexa o que dificulta a análise da oxidação de um forma quantitativa.

Parvatareddy et al. (1995) apresentam um estudo experimental das variações na resistência, temperatura de transição vítrea, deformação última de falha, módulo de elasticidade e percentagem de peso perdido para dois tipos de compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras de carbono com 8 camadas e fibras unidirecionais (a 90 graus) IM8/954-2 e IM8/ITX. O material é exposto a três diferentes ambientes: nitrogênio inerte, ar a baixa pressão (13,8 kPa) e ar a pressão ambiente. A temperatura dos ensaios foi de 150°C para simular a temperatura de operação de futuros aviões supersônicos. O envelhecimento foi considerado por períodos de até nove meses. As amostras apresentaram 30 a 40% de perda da resistência à flexão e uma diminuição de 40 a 60% na deformação última de falha após envelhecimento. O módulo de elasticidade dos dois tipos de compósito, por

outro lado, apresentou um aumento de até 20% após envelhecimento durante 6 meses. As figuras 1.13 e 1.14 mostram a variação da deformação última de falha e do módulo de elasticidade em função do tempo de envelhecimento e do ambiente. As maiores alterações nas propriedades ocorrem em ar a pressão ambiente, enquanto que, para o ambiente com apenas nitrogênio, ocorrem as menores variações. As propriedades mecânicas apresentam grande dependência da concentração de oxigênio no ambiente.

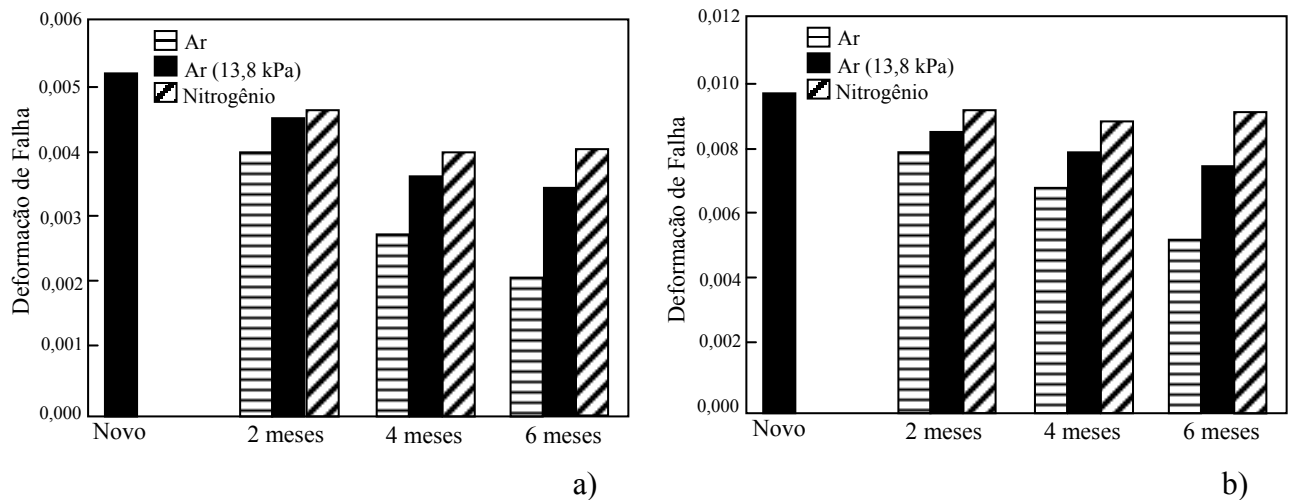


Figura 1.13 - Variação na deformação última de falha para os compósitos IM8/954-2 (a) e IM8/ITX (b) em função do tempo e do ambiente de envelhecimento.

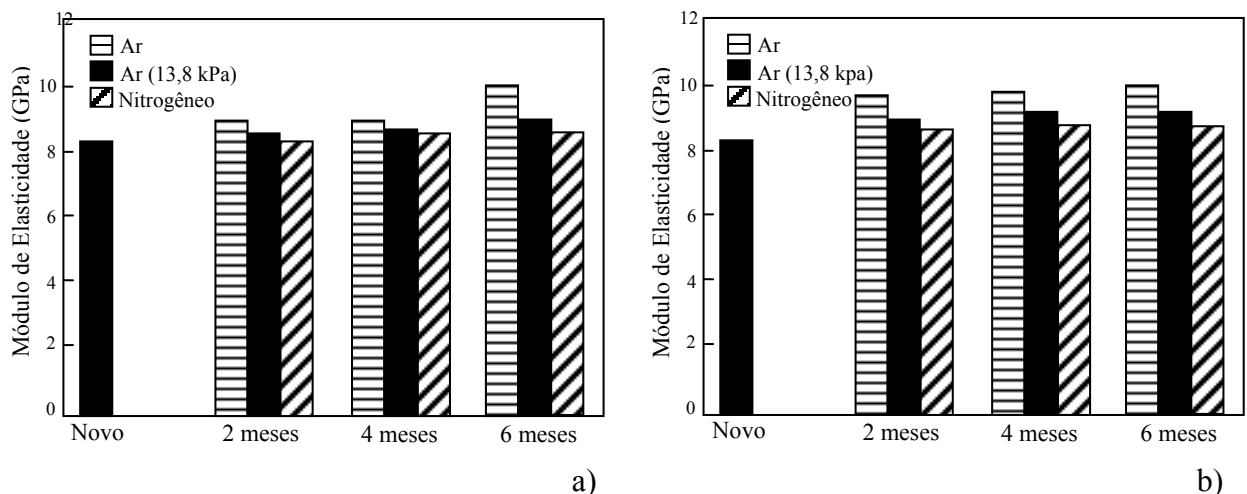


Figura 1.14 - Variação no módulo de elasticidade dos compósitos IM8/954-2 (a) e IM8/ITX (b) em função do tempo e do ambiente de envelhecimento.



Parvatareddy et al. (1996) realizaram testes para mensurar a resistência e tolerância ao impacto dos mesmos compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras de carbono analisados no trabalho citado anteriormente. As amostras foram submetidas a dois diferentes ambientes, quais sejam, ar atmosférico e nitrogênio inerte, por períodos de até 18 meses e a uma temperatura de 150 °C. Os efeitos da velocidade de impacto, do tempo de exposição e do ambiente, em características como área de dano medida na amostra e resistência à tração depois do impacto, são observados. Em ambos os trabalhos (Parvatareddy et al., 1995 e Parvatareddy et al., 1996) é observado que o material exposto ao ar apresenta níveis de degradação maiores que o exposto ao nitrogênio, para um mesmo período de exposição, ficando claro, portanto, que a presença de oxigênio é um fator fortemente agravante nos mecanismos de envelhecimento.

#### *1.2.2.3 Radiação Ultravioleta*

Quando a radiação ultravioleta atinge a estrutura molecular do polímero pode causar quebra das ligações carbono-carbono na cadeia polimérica. Além disto, moléculas de ozônio podem formar-se e criar ligações de apenas um átomo de oxigênio (“short crosslinking”) entre as cadeias poliméricas aumentando a rigidez e a fragilidade do material.

A degradação por radiação UV pode ocorrer rapidamente em climas ensolarados e quentes. Em geral, o envelhecimento induzido por radiação UV nas fibras não é considerado como sendo muito grave devido o fato de que tal deterioração só ocorre nas fibras das camadas da superfície que estão, efetivamente expostas à radiação.

### 1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

O envelhecimento dos materiais compósitos é um fenômeno complexo e ainda não completamente entendido. Os parágrafos anteriores constituem-se em uma apreciação dos efeitos causados pelo envelhecimento em alguns materiais. A intenção é ilustrar o papel crucial do envelhecimento no comportamento das estruturas de material compósito e não apenas definir um lei específica para representação dos efeitos do envelhecimento nos compósitos. Mesmo assim, pode-se observar que, de um modo geral, dentre os efeitos

causados pelo envelhecimento nos materiais compósitos, três possuem especial relevância prática, são eles, diminuição do efeito da viscosidade, aumento ou diminuição do módulo de elasticidade e diminuição da deformação última de falha. Com base nestas constatações o objetivo do presente trabalho é propor um modelo analítico-numérico para simulação de tais alterações.

Na prática, a natureza das alterações nas propriedades dos compósitos dependem de cada tipo de material e é necessário especificar qual material será empregado na estrutura antes de definir seu comportamento na situação de envelhecimento. Na intenção de fornecer um modelo computacional bastante flexível, no presente trabalho, o usuário pode inserir na subrotina de envelhecimento uma lei específica para a evolução do envelhecimento do material utilizado na análise.

É importante ressaltar que a performance a longo prazo das estruturas de material compósito depende largamente do comportamento em envelhecimento dos materiais empregados e, em geral, os resultados experimentais apresentados não fornecem todas as informações necessárias ao projeto de estruturas.

Observa-se, porém, nos trabalhos apresentados na revisão bibliográfica, que o envelhecimento influencia os polímeros e os compósitos poliméricos de várias maneiras, mas três importantes hipóteses podem ser destacadas:

- Existem dois comportamentos em envelhecimento que devem ser distinguidos: os processos em que ocorre aumento da rigidez (efeito de volume livre e envelhecimento físico de um modo geral) e processos em que ocorre diminuição da rigidez (efeitos da oxidação e radiação UV, por exemplo).
- Pode ocorrer falha sob tensão constante (fadiga estática) e este é um fenômeno claramente não linear.
- O uso da superposição tempo/envelhecimento-tempo que corresponde ao deslocamento (“shifting”) horizontal das curvas de fluência, não é sempre válido.

Pelo fato dos compósitos laminados apresentarem características bastante diferentes dos materiais convencionais (as falhas, por exemplo, podem ocorrer nas fibras, na matriz, por descolamento das lâminas, etc.), tem-se a necessidade do desenvolvimento de programas computacionais específicos para análise destes materiais.

A determinação da capacidade de carga, dado necessário a utilização de qualquer material, torna-se bem mais complexa no caso dos materiais compósitos. Portanto, é desejável o desenvolvimento de modelos computacionais capazes de determinar sua resistência última com a máxima precisão possível.

Desta forma, a análise de falhas progressivas, onde leva-se em conta as fases de degradação do laminado e, ainda, a consideração dos efeitos viscoelásticos acoplados a esta análise de falha, torna-se de grande importância pois confere maior realismo à simulação.

O emprego de materiais compósitos em engenharia civil gera a necessidade de estudar-se com mais cuidado as alterações sofridas por estes materiais com passar do tempo, uma vez que a vida útil requerida nestes casos é normalmente grande quando comparada a outras aplicações mais tradicionais dos materiais compósitos como no caso de engenharia aeronáutica.

Assim sendo, com o aumento desta nova utilização para os compósitos, surge o interesse na pesquisa a respeito da influência do envelhecimento nas características destes materiais.

Com base nas evidências experimentais apresentadas na seção anterior, propõe-se um modelo analítico-numérico e, neste sentido, algumas equações para simular os efeitos do envelhecimento nos compósitos, são sugeridas. Considerando que, normalmente, a deformação máxima de falha diminui, o módulo de elasticidade aumenta em endurecimento (“hardening”) e diminui em amolecimento (“softening”) e a fluência diminui com o tempo de envelhecimento ou idade do material, as seguintes equações podem ser consideradas para o caso unidimensional

$$X_{\varepsilon}(t) = X_{\varepsilon_0} e^{-\frac{t}{T_1}} + A \quad (1.3)$$

$$E(t) = E_0 \left( 1 \pm \gamma \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right) \quad (1.4)$$

$$D(t, \tau) = \phi(t) f(t - \tau) \quad (1.5)$$

sendo

$X_\epsilon(t)$  – limite de deformação envelhecido

$X_{\epsilon_0}$  - limite de deformação inicial

$T_1, T_2$  e  $A$  – constantes

$E(t)$  – módulo de elasticidade envelhecido

$E_0$  – módulo de elasticidade inicial

$D(t, \tau)$  – função de fluência envelhecida

$\phi(t)$  – função que introduz o efeito do envelhecimento na função de fluência

As equações de (1.3) a (1.5), baseiam-se, como já foi dito, em observações experimentais, as quais, neste caso, são consideradas do ponto de vista macroscópico. Tais equações desconsideram variáveis que não estão diretamente ligadas aos efeitos que deseja-se simular. Cabe ressaltar, ainda, que os fenômenos microscópicos envolvidos nos processos de envelhecimento dos compósitos são bastante complexos (quebras nas cadeias de moléculas dos polímeros, por exemplo) e seu estudo é de grande importância.

No presente trabalho, as expressões aqui propostas são unificadas, generalizadas para o caso multiaxial e empregadas juntamente com as expressões de viscoelasticidade e falha.

## 2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns subsídios teóricos para o desenvolvimento das relações constitutivas dos materiais compósitos laminados. Para tanto, parte-se do caso mais geral, ou seja, as relações constitutivas de materiais anisotrópicos e analisa-se as conseqüências da simetria elástica na matriz constitutiva do material.

As relações constitutivas para o caso particular de uma lâmina ortotrópica de material compósito, reforçada por fibras, são estabelecidas em espaços reduzidos de tensões e deformações, nos quais as componentes de tensão e deformação normais ao plano médio da lâmina são desconsideradas.

Desenvolve-se, ainda, as relações destinadas a transformação de coordenadas para tensões, deformações e matriz constitutiva referidas ao sistema de eixos principais da lâmina para um sistema de eixos de referência. E são apresentadas as relações constitutivas para materiais viscoelásticos lineares, bem como as funções de fluência e relaxação destes materiais.

As relações constitutivas com consideração de envelhecimento são apresentadas para os casos de materiais que aumentam de rigidez (endurecimento) e materiais que diminuem de rigidez (amolecimento) com o tempo de envelhecimento.

### 2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPAS

Muitos dos materiais normalmente utilizados nas aplicações de engenharia são homogêneos e isotrópicos. Porém, isto não se aplica aos materiais compósitos daí a maior complexidade de sua análise.

Heterogeneidade e anisotropia são conceitos importantes para o estudo de materiais compósitos. O primeiro significa que de um ponto a outro do material as propriedades variam, ou seja, são função da posição. O segundo quer dizer que, dado um ponto no material, as propriedades variam de acordo com a orientação, isto é, cada plano que passa por este ponto apresenta propriedades distintas.

A figura 2.1 mostra um estado de tensões tridimensionais agindo em um paralelepípedo infinitesimal pertencente a um corpo anisotrópico. Neste caso a relação constitutiva do material pode ser expressa pela fórmula (2.1) (Halpin, 1984).

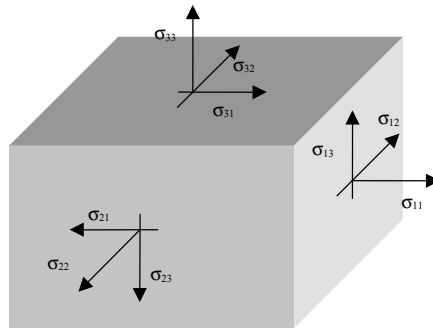


Figura 2.1 - Estado de tensões tridimensionais

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde  $[S]$  será denominada matriz de constantes do material e  $[C]=[S]^{-1}$  sendo  $[C]$ , a matriz constitutiva do material.

Utilizando a notação indicial tem-se (Vinson, 1993)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

onde  $i, j, k$  e  $l$  assumem os valores 1, 2 e 3.

Sendo os tensores de tensões e deformações simétricos, isto é,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  e  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ , pode-se escrever (2.2) da seguinte forma

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2.3)$$

ou, ainda

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = \sigma_{11} & \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} & \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} & \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{12} & \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{12} \\ \sigma_5 = \sigma_{13} & \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} \\ \sigma_6 = \sigma_{23} & \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{23} \end{array} \quad (2.5)$$

Desta forma, das 81 constantes que aparecem em (2.1), restam apenas 36 em (2.4). E, ainda, admitindo-se a existência de um potencial elástico, demonstra-se que (Vinson, 1993)

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.6)$$

E, então, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Sendo assim, a relação constitutiva de um material anisotrópico em um dado ponto apresenta 21 constantes independentes.

Esta relação mais geral sofre simplificações no caso das propriedades dos materiais apresentarem algum tipo de simetria. Neste caso diz-se que o material possui planos de simetria.

Um caso particular de anisotropia é a ortotropia. E os materiais ortotrópicos caracterizam-se por possuírem três planos de simetria perpendiculares entre si e, neste caso, a relação constitutiva reduz-se à fórmula (2.8) e há apenas nove constantes independentes. As tensões e deformações normais e de cisalhamento não apresentam interação no caso de haver ortotropia.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE UMA LÂMINA

As lâminas de material compósito reforçados por fibras, em uma escala microscópica, são heterogêneas, mas segundo a ótica da macromecânica, podem ser consideradas como homogêneas e ortotrópicas.



No presente trabalho as componentes de tensão e deformação normais ao plano da lâmina são desconsideradas. E, para o caso de uma lâmina ortotrópica de material compósito, reforçada por fibras (figura 2.2), tem-se a relação constitutiva dada pela fórmula (2.9), que está referida segundo as direções principais da lâmina.

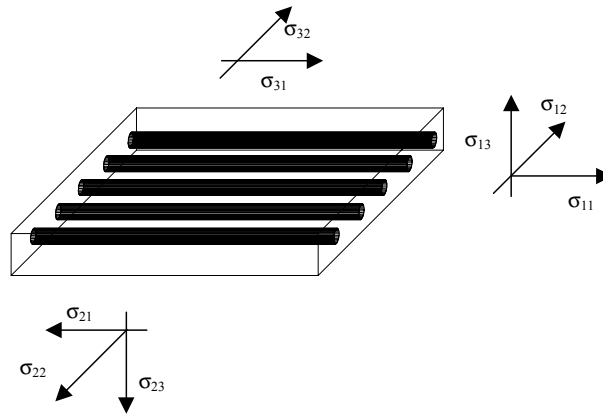


Figura 2.2 – Lâmina reforçada por fibras na direção principal 1

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} & \epsilon_1 &= \epsilon_{11} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} & \epsilon_2 &= \epsilon_{22} \\ \sigma_3 &= \sigma_{12} & \epsilon_3 &= 2\epsilon_{12} \\ \sigma_4 &= \sigma_{13} & \epsilon_4 &= 2\epsilon_{13} \\ \sigma_5 &= \sigma_{23} & \epsilon_5 &= 2\epsilon_{23} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os coeficientes da matriz da relação (2.9) expressos em termos das constantes do material ficam (Liao e Reddy, 1987)

$$C_{11} = \frac{E_{11}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.11)$$

$$C_{22} = \frac{E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.12)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.13)$$

$$C_{33} = G_{12} \quad (2.14)$$

$$C_{44} = G_{13} \quad (2.15)$$

$$C_{55} = G_{23} \quad (2.16)$$

sendo:

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{E_{11}} \quad (2.17)$$

## 2.4 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

As relações constitutivas anteriores foram apresentadas referidas aos eixos principais do material. Para tê-las em relação às coordenadas de referência x y z do laminado (figura 2.3) deve-se realizar uma transformação de coordenadas.

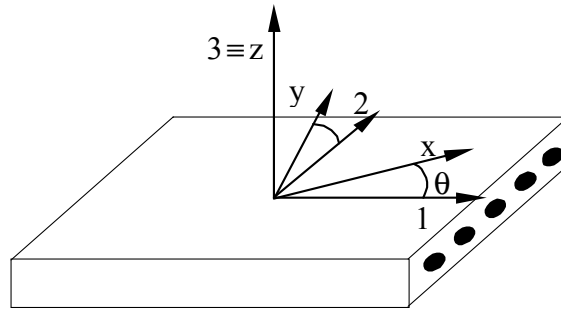


Figura 2.3 – Eixos principais da lâmina e eixos cartesianos

Sendo  $[T]$  a matriz de transformação de coordenadas, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Tendo em conta (2.18) e (2.19), pode-se reescrever (2.9) da seguinte forma

$$[T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $[T]^{-1}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

ou

$$\{\sigma\}_{xyz} = [T]^{-1}[C][T]\{\epsilon\}_{xyz} \quad (2.22)$$

sendo

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T] \quad (2.23)$$

Tem-se

$$\{\sigma\}_{xyz} = [\bar{C}]\{\epsilon\}_{xyz} \quad (2.24)$$

A matriz  $[\bar{C}]$  tem a forma dada na fórmula (2.25) e seus coeficientes estão explicitados nas equações (2.26) a (2.35) (Liao e Reddy, 1987).

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

sendo

$$\bar{C}_{11} = m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{33}) + n^4 C_{22} \quad (2.26)$$

$$\bar{C}_{12} = m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 4C_{33}) + (m^4 + n^4) C_{12} \quad (2.27)$$

$$\bar{C}_{13} = m n [m^2 C_{11} - n^2 C_{22} - (m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{33})] \quad (2.28)$$

$$\bar{C}_{22} = n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{33}) + m^4 C_{22} \quad (2.29)$$

$$\bar{C}_{23} = m n [n^2 C_{11} - m^2 C_{22} + (m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{33})] \quad (2.30)$$

$$\bar{C}_{33} = m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{33}) + (m^4 + n^4) C_{33} \quad (2.31)$$

$$\bar{C}_{44} = m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \quad (2.32)$$

$$\bar{C}_{45} = m n (C_{55} - C_{44}) \quad (2.33)$$

$$\bar{C}_{55} = m^2 C_{55} + n^2 C_{44} \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{aligned} m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.5 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS VISCOELÁSTICOS LINEARES

Para um material anisotrópico e viscoelástico linear as componentes de tensão e deformação relacionam-se da seguinte forma (Hashin, 1966)

$$\sigma_i(t) = \int_0^t C_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.36)$$

ou

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.37)$$

onde  $C_{ij}$  são as funções de relaxação do material e  $D_{ij}$  são as funções de fluência do material.

Nas equações (2.36) e (2.37) a notação indicial de somatória é utilizada e as componentes de tensão e de deformação são denotadas com um índice que indica a ordem das mesmas nos vetores de tensões e deformações, como aparece (2.4) e com a convenção dada por (2.5).

As funções de fluência e de relaxação dos materiais compósitos, em geral, dependem de agentes ambientais como a temperatura e a umidade e, portanto, estes agentes devem figurar, juntamente com o tempo, como variáveis independentes nas equação (2.36) e (2.37).

Na maioria das casos, as lâminas de materiais compósitos exibem um comportamento praticamente elástico na direção das fibras, enquanto que a matriz possui comportamento viscoelástico (Hashin, 1966 e Wilson e Vinson, 1984). Isto se verifica devido ao reduzido comportamento viscoelástico exibido pelas fibras normalmente utilizadas nestes materiais como fibras de grafite e de boro. Por outro lado, a matriz, que é normalmente um polímero, apresenta resposta viscoelástica.

A caracterização do comportamento viscoelástico dos materiais compósitos laminados é normalmente realizadas por meio de testes de fluência e de relaxação (Crossman et al., citado por Marques e Creus, 1994), nos quais os corpos de prova são sujeitos à tração e compressão simples paralela às fibras e na direção perpendicular às mesmas e ao cisalhamento simples nos planos principais. Com estes testes é possível estabelecer as funções de fluência e de relaxação correspondentes às direções principais da lâmina.

As funções de fluência e de relaxação podem ser expressas na forma de séries exponenciais, como (Flaggs e Crossman, 1981)

$$D_{ij}(T, H, t) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M D_{ij}^p \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_{ij}^p}\right) \right] \quad (2.38)$$

$$C_{ij}(T, H, t) = C_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M C_{ij}^p \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t}{\lambda_{ij}^p}\right) \right] \quad (2.39)$$

onde os parâmetros  $D_{ij}^0$ ,  $D_{ij}^p$ ,  $\theta_{ij}^p$ ,  $C_{ij}^0$ ,  $C_{ij}^p$  e  $\lambda_{ij}^p$  são determinados experimentalmente para o material da lâmina a uma temperatura  $T$  e uma concentração de umidade  $H$ , sendo os parâmetros  $\theta_{ij}^p$  e  $\lambda_{ij}^p$  os tempos de retardação e de relaxação, respectivamente. O número de termos usados nas séries (2.38) e (2.39) depende da precisão que se deseja alcançar na análise.

## 2.6 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS COM ENVELHECIMENTO

Para materiais com envelhecimento, duas situações devem ser consideradas: materiais que aumentam de rigidez e materiais que diminuem de rigidez com o tempo de envelhecimento.

Para o primeiro caso, correspondente aos materiais que sofrem endurecimento ou “hardening” como é conhecido na literatura inglesa, pode-se escrever

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (2.40)$$

com  $\partial E(\tau)/\partial \tau > 0$  e  $\partial C(t, \tau)/\partial \tau < 0$ .

A parte instantânea da função de fluência (2.40) é função da idade  $\tau$  uma vez que o material endurece na configuração deformada e só reage aos incrementos de carga. Na ausência de viscoelasticidade  $C(t, \tau) = 0$ .

A relação geral para materiais viscoelásticos com envelhecimento cujo comportamento encontra-se ilustrado na figura 2.4, pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\partial D(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

sendo  $D(t, \tau)$  a resposta à aplicação de um passo unitário de tensão  $\sigma(t) = H(t - \tau)$  aplicado no tempo  $\tau$ .

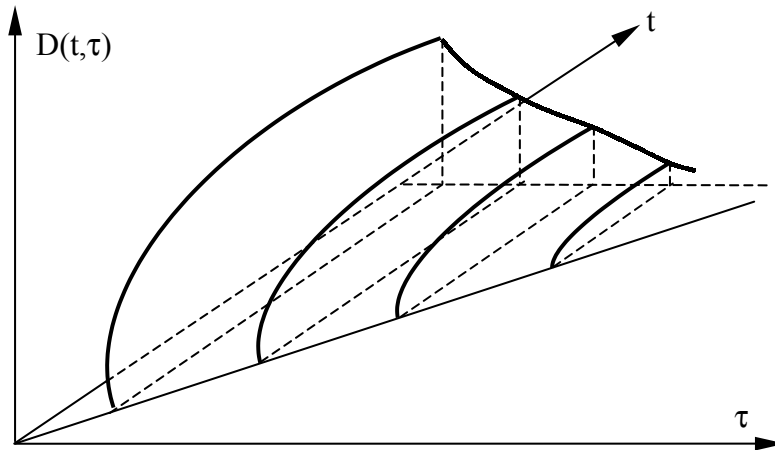


Figura 2.4 – Comportamento viscoelástico com envelhecimento (hardening)

Substituindo (2.40) com  $C(t, \tau) = 0$  em (2.41), obtém-se

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{E(\tau)} \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{1}{E(\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (2.42)$$

ou, na forma incremental

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} \quad (2.43)$$

Para materiais cuja rigidez degrada com o envelhecimento, ou seja, materiais que sofrem amolecimento ou “softening” como é conhecido na literatura inglesa, a parte instantânea da função de fluência é função do tempo  $t$ .

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau) \quad (2.44)$$



com  $\partial E(t)/\partial t < 0$  e  $\partial C(t, \tau)/\partial t > 0$ .

Substituindo (2.44) com  $C(t, \tau) = 0$  em (2.41), obtém-se

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} \quad (2.45)$$

ou, na forma incremental

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} - \frac{\sigma(t)\dot{E}(t)}{E^2(t)} \quad (2.46)$$

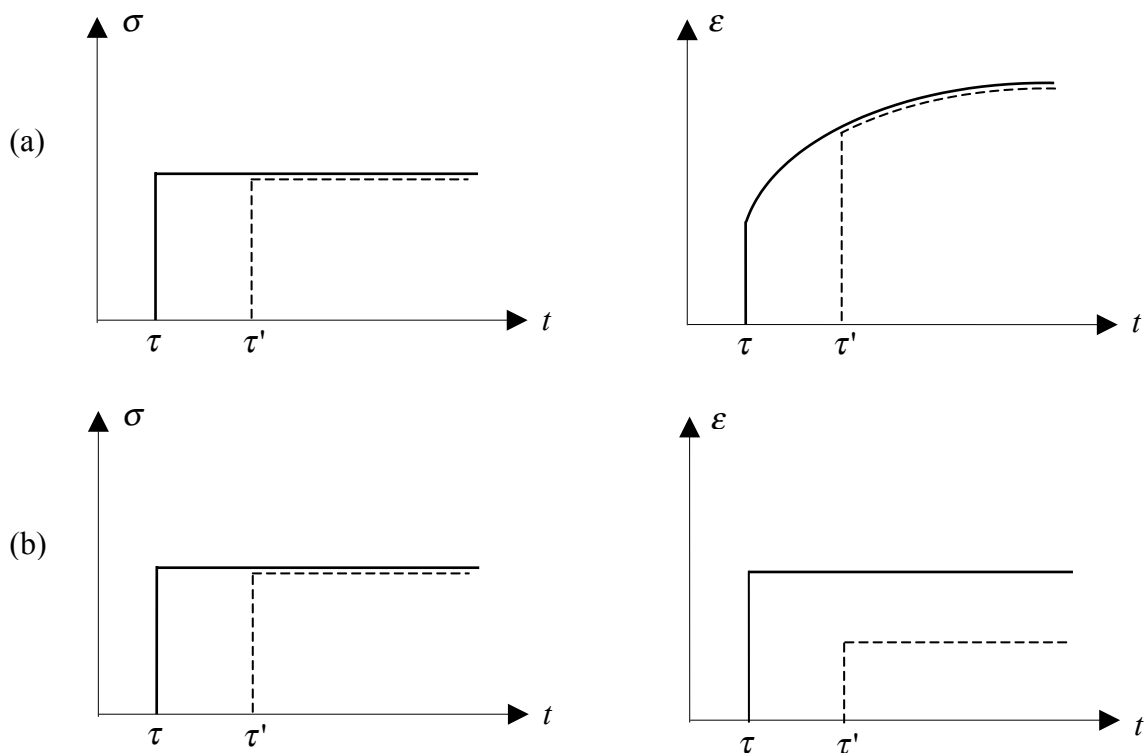


Figura 2.5 – Comportamento instantâneo para materiais com amolecimento e endurecimento.

Resposta típica  $\varepsilon$  correspondente a um passo de carga  $\sigma$ . (a) amolecimento ( $\dot{E} < 0$ ). (b) endurecimento ( $\dot{E} > 0$ ).

Os dois tipos de comportamento representados pelas equações (2.43) e (2.46) encontram-se ilustrados na figura 2.5. Observa-se, que o envelhecimento envolve, mesmo na ausência de viscoelasticidade, dependência da história e deformações residuais, características que usualmente não são associadas ao comportamento elástico. O envelhecimento, aparentemente, introduz um espécie de não linearidade nos processos de carregamento e descarregamento. A equação (2.43), em particular, é uma relação hipoeelástica.

### 3 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA COM ENVELHECIMENTO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas formas de representação do comportamento viscoelástico, modelos reológicos e formulação por meio de variáveis de estado. Além disto, é introduzida a proposta de formulação viscoelástica com envelhecimento.

#### 3.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE VISCOELASTICIDADE LINEAR

A representação mais geral de comportamento viscoelástico linear é dada pelo Teorema de Riesz

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (3.1)$$

onde  $D(t, \tau)$  é independente de  $\sigma(\tau)$ . E, se existe  $\dot{\sigma}(\tau) = \frac{d\sigma}{d\tau}$ , pode-se ainda escrever

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Demonstrações deste teorema podem ser encontradas em livros de Análise Funcional (ver, por exemplo, Liusternik e Sobolev, 1961).

Além das relações (3.1) e (3.2) usam-se, também, as relações inversas (3.3) e (3.4) onde tem-se as tensões em função das deformações

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t E(t, \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.3)$$

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t E(t, \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

sendo  $E(t, \tau)$  as funções de relaxação do material.

Integrando por partes a equação (3.1), obtém-se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t d(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} d(t, \tau) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) \\ E(t) &= 1/D(t, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

A representação integral acima é a representação básica geral da viscoelasticidade que utiliza o conceito de fluência (“compliance”). Existem outros tipos de representação, como aquelas baseadas em módulo dinâmico. Teoricamente estas representações são equivalentes, mas na prática, devido a limitações experimentais, esta equivalência não é verificada (Plazek, 2000).

Para materiais estruturais sujeitos a cargas estáticas e que possuem vida útil mensurada em décadas, o uso da representação básica mostrada acima mostra-se conveniente.

Similarmente, da equação (3.4) obtém-se

$$\sigma(t) = E(t)\epsilon(t) + \int_{\tau_0}^t e(t, \tau)\epsilon(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

onde

$$e(t, \tau) = -\frac{\partial E(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (3.8)$$

$$E(t) = E(t, t)$$

Pode-se separar o efeito viscoelástico em suas componentes instantânea e diferida da seguinte forma

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (3.9)$$

$$E(t, \tau) = E(\tau) + R(t, \tau)$$

As relações viscoelásticas podem, ainda, ser escritas nas formas simbólicas

$$\varepsilon = D * \sigma \quad (3.10)$$

$$\sigma = E * \varepsilon$$

as quais devem ser interpretadas como notações alternativas para (3.1) e (3.3) respectivamente. Como os operadores lineares  $E^*$  e  $D^*$  afora alguns cuidados, podem ser tratados como quantidades algébricas, esta notação proporciona simplificação nos cálculos.

### 3.3 MODELOS REOLÓGICOS

O uso de modelos reológicos para explicar o comportamento dos materiais é bastante comum (Christensen, 1971, Creus, 1986). Aqui são introduzidos alguns modelos que podem ser empregados em situações com envelhecimento.

#### 3.3.1 Modelos com Parâmetros Dependentes do Tempo

Modelos reológicos com parâmetros dependentes do tempo (ou dependentes da idade) são úteis para representar o comportamento de materiais que sofrem envelhecimento, ou seja, sofrem modificações em suas propriedades ao longo de sua vida útil, como concreto e polímeros em geral.

### 3.3.1.1 Modelo Elástico

A relação entre tensão e deformação para uma mola com módulo de elasticidade variável  $E(t)$  depende da história de tensões. Esta relação deve ser escrita na forma incremental para levar em conta os processos físicos que ocorrem em materiais reais (por exemplo, a gradual solidificação da pasta de cimento e a lenta quebra das cadeias constituintes dos polímeros).

Derivando-se a relação elástica usual

$$\sigma(t) = E(t)\epsilon(t) \quad (3.11)$$

obtém-se

$$\dot{\sigma}(t) = E(t)\dot{\epsilon}(t) + \dot{E}(t)\epsilon(t) \quad (3.12)$$

É importante ressaltar que a equação (3.12) é válida apenas no caso de amolecimento, ou seja  $\dot{E} < 0$ , pois, mesmo sob tensão constante, as deformações aumentam devido a perda de resistência e rigidez.

Se a relação (3.12) for usada em casos de endurecimento ( $\dot{E} > 0$ ), em um ensaio de tensão constante teria-se

$$\dot{\sigma}(t) = 0 \quad (3.13)$$

$$\dot{E}(t)\epsilon(t) = -E(t)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.14)$$

E, para um material como o concreto, com endurecimento ao longo do tempo, resultaria na diminuição progressiva das deformações ( $\dot{\epsilon}(t) < 0$ ). Isto é equivalente a uma laje de concreto ter sua flecha reduzida em função do ganho de rigidez e resistência do material ao longo do tempo, o que não ocorre. O material endurece e se torna rígido na configuração deformada.

Para o caso de endurecimento ( $\dot{E} > 0$ ) deve-se usar a formulação em taxas

$$\dot{\sigma}(t) = E(t)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.15)$$

### 3.3.1.2 Modelo de Kelvin com Envelhecimento

O modelo Kelvin é formado por uma mola e um amortecedor em paralelo (figura 3.1). Para endurecimento a equação da mola é dada por

$$\dot{\epsilon}_E(t) = \frac{\dot{\sigma}_E(t)}{E(t)} \quad (3.16)$$

e para o amortecedor usa-se a relação

$$\sigma_\eta(t) = \eta(t)\dot{\epsilon}_\eta(t) \quad (3.17)$$

As equações de equilíbrio e compatibilidade são, respectivamente

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t) \quad (3.18)$$

$$\epsilon(t) = \epsilon_E(t) = \epsilon_\eta(t) \quad (3.19)$$

E, desta forma, tem-se, para o modelo

$$\sigma(t) = \eta(t)\dot{\epsilon}(t) + \int_{\tau_0}^t E(\tau)\dot{\epsilon}(\tau)d\tau \quad (3.20)$$

Derivando com relação a t, tem-se a equação diferencial

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\epsilon}(t)[E(t) + \dot{\eta}(t)] + \eta(t)\ddot{\epsilon}(t) \quad (3.21)$$

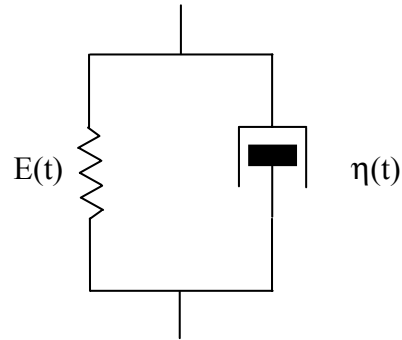


Figura 3.1 – Modelo Kelvin com parâmetros dependentes do tempo

Introduzindo na equação (3.21) as seguintes hipóteses constitutivas adicionais

$$\begin{aligned} E(t) + \dot{\eta}(t) &= \gamma \eta(t) \\ \gamma &= \text{constante} \end{aligned} \quad (3.22)$$

obtém-se a equação diferencial (3.23) que determina função de fluência (3.24).

$$\ddot{\epsilon} + \gamma \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta(t)} \quad (3.23)$$

$$D(t, \tau) = \frac{1}{\gamma \eta(\tau)} [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (3.24)$$

E, desta forma, corresponde a um material com  $C(t, \tau) = \phi(\tau)f(t - \tau)$ . Tal modelo é conhecido com Modelo de Arutyunyan e é empregado na simulação do comportamento do concreto.

No caso de amolecimento, partindo da relação constitutiva

$$\epsilon_E(t) = \frac{\sigma_E(t)}{E(t)} \quad (3.25)$$

obtém-se

$$\sigma(t) = E(t)\epsilon(t) + \eta(t)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.26)$$



### 3.3.1.3 Modelo Maxwell com Envelhecimento

O modelo Maxwell é formado por uma mola e um amortecedor em série (figura 3.2). Para endurecimento a equação da mola é dada por

$$\dot{\varepsilon}_E(t) = \frac{\dot{\sigma}_E(t)}{E(t)} \quad (3.27)$$

e para o amortecedor usa-se a relação

$$\sigma_\eta(t) = \eta(t)\dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad (3.28)$$

As equações de equilíbrio e compatibilidade são, respectivamente

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) = \sigma_\eta(t) \quad (3.29)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t) \quad (3.30)$$

E, desta forma, o modelo de Maxwell é representado pela seguinte equação

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \frac{\sigma(t)}{\eta(t)} \quad (3.31)$$

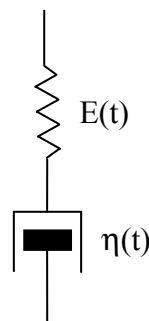


Figura 3.2 – Modelo Maxwell com parâmetros dependentes do tempo

Introduzindo-se as seguintes hipóteses constitutivas

$$\begin{aligned} E(t) &= E = \text{constante} \\ \eta(t) &= \eta_0 e^{\gamma(t-\tau_0)} \text{ com } \eta_0, \tau_0, \gamma \text{ constantes} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Integrando (3.31) para um passo unitário de tensão, obtém-se

$$\begin{aligned} D(t, \tau) &= \frac{1}{E} + \frac{1}{\gamma \eta_0} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \\ &= \frac{1}{E} + \frac{1}{\gamma \eta_0} [e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} - e^{-\gamma(t-\tau_0)}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Que corresponde a um material com envelhecimento com  $C(t, \tau) = \phi(\tau)f(t - \tau)$  ou  $C(t, \tau) = g(t) - g(\tau)$ . Este modelo é conhecido com Modelo de Dischinger e é, também, usado no estudo do concreto.

No caso de amolecimento, partindo da relação para a mola

$$\varepsilon_E(t) = \frac{\sigma_E(t)}{E(t)} \quad (3.34)$$

e derivando-se

$$\dot{\varepsilon}_E(t) = \frac{\dot{\sigma}_E(t)}{E(t)} - \frac{\sigma_E(t)\dot{E}(t)}{E^2(t)} \quad (3.35)$$

obtém-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} - \frac{\sigma(t)\dot{E}(t)}{E^2(t)} + \frac{\sigma(t)}{\eta(t)} \quad (3.36)$$

### 3.4 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO NÃO LINEAR

Muitas equações para representar o comportamento viscoelástico não linear têm sido propostas (Schapery, 2000) com diferentes graus de complexidade. No presente modelo

analítico-numérico que utiliza formulação em variáveis de estado, um modelo utilizando uma cadeia Kelvin não linear é definido.

### 3.4.1 Modelo Kelvin Não Linear

Um modelo não linear simples pode ser obtido usando a estrutura topológica do modelo Standard e empregando molas não lineares (Fig. 3.3).

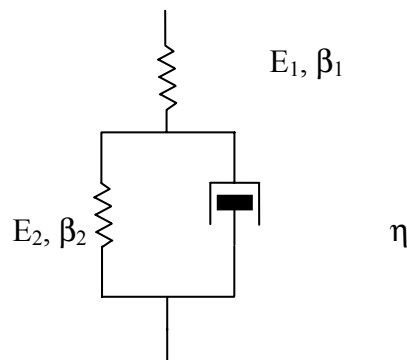


Figura 3.3 – Modelo Standard não linear

Para a primeira mola, assume-se a seguinte relação entre tensões e deformações

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 (1 - \beta_1 \varepsilon_1) \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq 1/\beta_1 \quad (3.37)$$

onde  $\beta$  é a constante que caracteriza o comportamento não linear. Esta equação define uma tensão máxima  $\sigma^{\max} = E_1 / 4\beta_1$  e a correspondente deformação  $1/2\beta_1$ . Deformações crescentes de  $1/2\beta_1$  até  $1/\beta_1$  ocorrem com tensões decrescentes. Deformações maiores que  $1/\beta_1$  não são consideradas.

As relações (3.37) correspondem a um modelo simplificado das curvas tensão-deformação de materiais reais com dano, como concreto e outros. Este tipo de comportamento é causado pela presença de defeitos distribuídos aleatoriamente no material, principalmente microfissuras. Tais defeitos, não devem ser considerados como propriedades pontuais do contínuo, mas como uma propriedade global sobre um pequeno volume finito. Esta formulação pode ser útil para representar algumas situações simples.

O elemento Kelvin não linear (ver Figura 3.4) ou Modelo de Helman (Helman e Creus, 1975) constituído pela mola 2 e pelo amortecedor é responsável pelo comportamento dependente do tempo. A mola 2 e o amortecedor são definidos pelas relações

$$\begin{aligned}\sigma &= E_2 \varepsilon_2 (1 - \beta_2 \varepsilon_2) \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon_2 \leq 1/\beta_2 \\ \sigma_\eta &= \eta \dot{\varepsilon}\end{aligned}\tag{3.38}$$

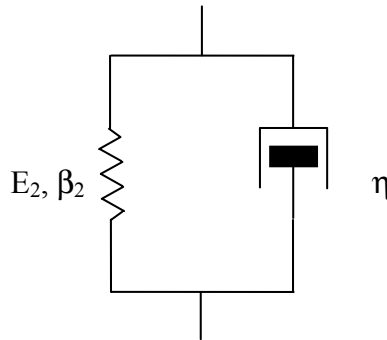


Figura 3.4 – Elemento Kelvin não linear

Usando as condições de equilíbrio e compatibilidade para o modelo de Kelvin obtém-se

$$\dot{\varepsilon}_2 - \frac{\beta_2 E_2}{\eta} \varepsilon_2^2 + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{\eta}\tag{3.39}$$

que corresponde a uma equação diferencial não linear de primeira ordem de Ricatti a qual pode ser transformada em uma equação diferencial linear de segunda ordem. Esta equação modela os principais efeitos da viscoelasticidade não linear: aumento da fluência com o aumento de tensão e fadiga estática.

Existem vários outros modelos como, por exemplo, os modelos empíricos que representam o comportamento viscoelástico de polímeros de forma exponencial (Schapery, 1975) e modelos com teoria de dano (Masuero e Creus, 1995). Estes modelos são de difícil extensão ao caso multiaxial e de complicada implementação computacional.

### 3.5 REPRESENTAÇÃO EM TERMOS DE VARIÁVEIS DE ESTADO

#### 3.5.1 Viscoelasticidade Linear

Para cada modelo reológico pode-se obter uma relação diferencial e uma relação integral. A representação através de variáveis de estado constitui-se, no entanto, em uma particular e bastante conveniente forma diferencial

Partindo-se da forma geral da representação integral para um material sem envelhecimento dada pela equação (3.40)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{\tau_0}^t d(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (3.40)$$

Pode-se aproximar a função  $d(t-\tau)$  em termos de séries exponenciais, também chamadas de séries de Dirichlet-Prony.

$$d(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} e^{-\frac{(t-\tau)}{\theta_i}} \quad (3.41)$$

Tal aproximação pode ser tão boa quanto se queira, dependendo do número de termos incluídos na série. Desta forma, são introduzidos  $n$  valores

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\eta_i} e^{-\frac{(t-\tau)}{\theta_i}} \sigma(\tau)d\tau \quad (3.42)$$

e, diferenciando-se (3.42) com relação a  $t$  (regra de Leibnitz) obtém-se

$$\dot{q}_i(t) + \frac{q_i(t)}{\theta_i} = \frac{\sigma(t)}{\eta_i} \quad (3.43)$$

que é um sistema de equações diferenciais desacopladas lineares de primeira ordem que, juntamente com condições iniciais apropriadas (por exemplo  $q_i = 0$  para  $t = \tau_0$ ), pode ser resolvido numericamente e permite a determinação das variáveis de estado.

Desta forma, com

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \sum_{i=1}^n q_i \quad (3.44)$$

que resulta da combinação das equações(3.40), (3.41) e (3.42) pode-se determinar a deformação.

Cabe observar que as equações (3.43) e (3.44) correspondem, neste caso, ao Modelo de Kelvin generalizado com molas de constante  $\eta_i / \theta_i$  e amortecedores com constante  $\eta_i$ , ( $\eta_0 = 0$ ). De (3.43) e (3.44) pode-se ver que, quando  $q_i$  são conhecidas em um dado instante de tempo  $t$ , então  $\varepsilon(t)$  podem ser determinados para  $\tau \geq t$  se são conhecidas  $\sigma(t)$  para  $\tau \geq t$ . Desta forma, se as deformações são mensuradas para  $\tau \geq t$  com respeito à configuração no instante  $t$ , o comportamento do material no intervalo  $(t, \tau)$  dependerá somente do valor das tensões no intervalo  $(t, \tau)$  e do valor de  $q_i$  no tempo  $t$ .

As observações acima justificam a nomenclatura "variáveis de estado" que foi primeiramente proposta por Onat (1966). Esta representação é bastante geral e pode ser estendida à problemas não lineares. Estas variáveis podem, ainda, ser relacionadas com a estrutura microscópica do material. Finalmente, esta formulação é muito conveniente para soluções numéricas de problemas viscoelásticos, usando, por exemplo, elementos finitos.

## 3.5.2 Materiais com Envelhecimento

### 3.5.2.1 Modelo Reológico

Para aplicação do método das variáveis de estado é conveniente escolher um modelo reológico que forneça uma representação completa, ou em outras palavras, um modelo que,

quando considerado em série, possa aproximar qualquer função de fluência tão precisamente quanto se queira.

O modelo reológico escolhido na presente formulação encontra-se ilustrado na figura 3.1 e corresponde a um modelo Kelvin com módulo de elasticidade da mola  $E(t)$  e viscosidade do amortecedor  $\eta(t)$ .

### 3.5.2.2 Amolecimento (“Softening”)

Para a mola e o amortecedor da figura 3.1 pode-se escrever

$$\sigma_E(t) = E(t)\varepsilon(t) \quad (3.45)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta(t)\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.46)$$

Considerando as equações (3.45) e (3.46) obtém-se a equação diferencial

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) + \eta(t)\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.47)$$

Que também pode ser escrita na forma

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E(t)}{\eta(t)}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta(t)} \quad (3.48)$$

Usando a seguinte mudança de variáveis

$$y = \varepsilon(t); \quad \dot{y} = \dot{\varepsilon}(t); \quad \frac{\sigma(t)}{\eta(t)} = r(t); \quad \frac{E(t)}{\eta(t)} = p(t) \quad (3.49)$$

resulta

$$\dot{y} + p(t)y = r(t) \quad (3.50)$$

A solução da equação (3.50) é

$$y = e^{-\int_{\tau_0}^t p d\tau} \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} p ds} r(\tau) d\tau + y_0 e^{-\int_{\tau_0}^t p dt}; y_0 = \varepsilon(\tau_0) \quad (3.51)$$

Considerando a condição inicial  $\varepsilon(\tau_0) = 0$ , tem-se

$$\varepsilon(t) = e^{-\int_{\tau_0}^t \frac{E(\tau)}{\eta(\tau)} d\tau} \int_{\tau_0}^t e^{\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{E(s)}{\eta(s)} ds} \frac{\sigma(\tau)}{\eta(\tau)} d\tau \quad (3.52)$$

E, para o caso em que

$$\frac{E(t)}{\eta(t)} = \frac{1}{\theta} = \text{cte} \quad (3.53)$$

resulta

$$\varepsilon(t) = e^{-(t-\tau_0)/\theta} \int_{\tau_0}^t e^{(\tau-\tau_0)/\theta} \frac{\sigma(\tau)}{\eta(\tau)} d\tau \quad (3.54)$$

ou

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{\eta(\tau)} e^{-(t-\tau)/\theta} d\tau \quad (3.55)$$

É possível aproximar a função de fluência através de séries exponenciais de Dirichlet-Prony como

$$D(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i(\tau)} e^{-(t-\tau)/\theta_i} \quad (3.56)$$

Definindo a variável de estado da seguinte forma

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{\eta_i(\tau)} e^{-(t-\tau)/\theta_i} d\tau \quad (3.57)$$



É possível escrever

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (3.58)$$

A equação (3.58) corresponde a uma mola com módulo elástico dependente do tempo e n modelos Kelvin com parâmetros dependentes do tempo em série, como mostrado na figura 3.5.

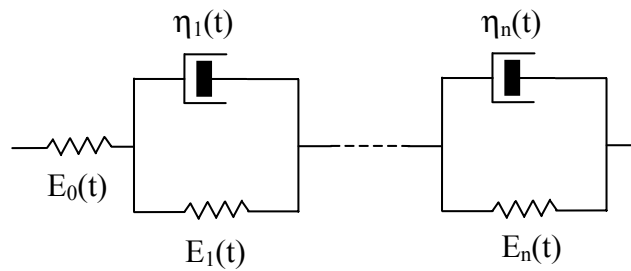


Figura 3.5 – Modelo reológico com parâmetros dependentes do tempo empregado na formulação presente.

Considerando a variável de estado  $q_i$  nos intervalos de tempo  $t$  e  $t+\Delta t$

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\eta_i(t)} e^{-(t-\tau)/\theta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (3.59)$$

$$q_i(t + \Delta t) = \int_{\tau_0}^{t+\Delta t} \frac{1}{\eta_i(t)} e^{-(t+\Delta t-\tau)/\theta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (3.60)$$

Obtém-se

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\eta_i(\tau)} e^{-(t+\Delta t-\tau)/\theta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (3.61)$$

Considerando  $\sigma(\tau)$  constante em  $\Delta t$  e igual a  $\sigma(t)$ , é possível escrever

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \frac{\sigma(t)}{E_j(t)} (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (3.62)$$

### 3.5.2.3 Endurecimento (“Hardening”)

No caso de endurecimento, para a mola e o amortecedor da figura 3.1, pode-se escrever

$$\dot{\sigma}_E(t) = E(t)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.63)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta(t)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.64)$$

$$\dot{\sigma}_\eta(t) = \eta(t)\ddot{\epsilon}(t) + \dot{\eta}(t)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.65)$$

Considerando as equações (3.63) e (3.65) resulta

$$\dot{\sigma}(t) = E(t)\dot{\epsilon}(t) + \dot{\eta}(t)\dot{\epsilon}(t) + \eta(t)\ddot{\epsilon}(t) \quad (3.66)$$

ou

$$\ddot{\epsilon}(t) + \frac{E(t) + \dot{\eta}(t)}{\eta(t)}\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\eta(t)} \quad (3.67)$$

Usando a seguinte mudança de variáveis

$$y = \dot{\epsilon}(t); \quad \dot{y} = \ddot{\epsilon}(t); \quad \frac{\dot{\sigma}(t)}{\eta(t)} = r(t); \quad \frac{E(t) + \dot{\eta}(t)}{\eta(t)} = p(t) \quad (3.68)$$

considerando

$$\frac{E(t) + \dot{\eta}(t)}{\eta(t)} = \frac{1}{\theta} = \text{cte} \quad (3.69)$$

e usando o mesmo procedimento apresentado na seção anterior sobre amolecimento, resulta

$$\dot{\epsilon}(t) = e^{-(t-\tau_0)/\theta} \int_{\tau_0}^t e^{(\tau-\tau_0)/\theta} \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{\eta(\tau)} d\tau \quad (3.70)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{\eta(\tau)} e^{-(t-\tau)/\theta} d\tau \quad (3.71)$$

Aproximando-se a derivada da função de fluência através de séries exponenciais de Dirichlet-Prony

$$\dot{D}(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i(\tau)} e^{-(t-\tau)/\theta_i} \quad (3.72)$$

e definindo a variável de estado da seguinte forma

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{\eta_i(\tau)} e^{-(t-\tau)/\theta_i} d\tau \quad (3.73)$$

é possível escrever

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (3.74)$$

Usando um procedimento similar ao mostrado na seção anterior é possível obter

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_i(t) + \dot{\eta}_i(t)} (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (3.75)$$

## 3.6. EXTENSÃO PARA CASOS MULTIAXIAIS

### 3.6.1 Amolecimento

A relação geral para um material viscoelástico linear com envelhecimento é dada por

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\partial D(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma(\tau) d\tau \quad (3.76)$$

A equação anterior pode ser generalizada para o caso multiaxial como (Halpin, 1968 e Christensen, 1971)

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t, \tau) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.77)$$

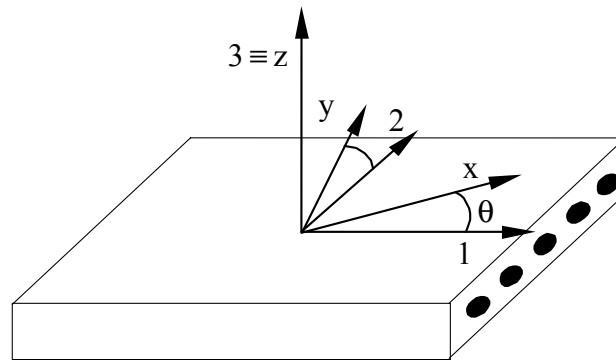


Figura 3.6 – Sistema de coordenadas para lâmina ortotrópica

Neste trabalho o material compósito é modelado como sendo ortotrópico (ver figura 3.6). Desta forma,  $\varepsilon_i(t)$  são as componentes do vetor de deformações,  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}$  e  $\sigma_j(t)$  são as componentes do vetor de tensões  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ , no tempo  $t$ . As componentes  $\varepsilon_{33}$  e  $\sigma_{33}$  não são consideradas na presente formulação.  $D_{ij}(t, \tau)$  são as funções de fluência correspondentes as componentes  $\varepsilon_i$  e  $\sigma_j$ . Integrando-se por partes, a equação(3.77) pode ser escrita como

$$\varepsilon_i(t) = D_{ij}(t, t) \sigma_j(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} D_{ij}(t, \tau) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (3.78)$$

Aproximando as funções de fluência por séries de Dirichlet-Prony, pode-se escrever

$$D_{ij}(t, \tau) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M D_{ij}^p \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_{ij}^p}\right) \right] \quad (3.79)$$

onde  $D_{ij}^0$ ,  $D_{ij}^p$  e  $\theta_{ij}^p$  são parâmetros que devem ser determinados através de resultados experimentais.  $M$  é o número de termos significantes nas séries e depende da precisão desejada. Os parâmetros  $\theta_{ij}^p$  são os tempos de retardação.

Substituindo (3.79) em (3.78), tem-se

$$\varepsilon_i(t) = D_{ij}(t, t)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^M \int_0^t d_{ij}^p(t, \tau)\sigma_j(\tau) d\tau \quad (3.80)$$

sendo

$$d_{ij}^p = \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_{ij}^p}\right) \quad (3.81)$$

e a notação indicial somatória não deve ser aplicada em  $i, j$ . Desta forma, tem-se

$$\varepsilon_i(t) = D_{ij}(t, t)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (3.82)$$

onde

$$\begin{aligned} q_{i1}^p(t) &= \int_0^t d_{i1}^p(t, \tau)\sigma_1(\tau) d\tau \\ q_{i2}^p(t) &= \int_0^t d_{i2}^p(t, \tau)\sigma_2(\tau) d\tau \\ &\dots \\ q_{i5}^p(t) &= \int_0^t d_{i5}^p(t, \tau)\sigma_5(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.83)$$

são as variáveis de estado.

### 3.6.2 Endurecimento

Para casos de endurecimento deve-se trabalhar com formulação em taxas e, desta forma, tem-se

$$\dot{\epsilon}(t) = \int_{\tau_0}^t \dot{D}(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (3.84)$$

A equação anterior pode ser generalizada para o caso multiaxial como

$$\dot{\epsilon}_i(t) = \int_0^t \dot{D}_{ij}(t, \tau) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.85)$$

Sendo os vetores  $\{\epsilon\}$  e  $\{\sigma\}$  os vetores de deformações e tensões no tempo  $t$ , respectivamente.

$\dot{D}_{ij}(t, \tau)$  são as derivadas das funções de fluência correspondentes as componentes  $\epsilon_i$  e  $\sigma_j$ .

Usando-se um procedimento similar ao apresentado na seção anterior, obtém-se

$$\dot{\epsilon}_i(t) = D_{ij}(t, t) \dot{\sigma}_j(t) + \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (3.86)$$

onde

$$\begin{aligned} q_{i1}^p(t) &= \int_0^t d_{i1}^p(t, \tau) \dot{\sigma}_1(\tau) d\tau \\ q_{i2}^p(t) &= \int_0^t d_{i2}^p(t, \tau) \dot{\sigma}_2(\tau) d\tau \\ &\dots \\ q_{i5}^p(t) &= \int_0^t d_{i5}^p(t, \tau) \dot{\sigma}_5(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.87)$$

são as variáveis de estado.

### 3.7 TÉCNICAS DE “TIME-SHIFTING”

Alguns autores (ver, por exemplo, Gates et al., 1997) representam o efeito do envelhecimento utilizando deslocamento ou “shift” horizontal. Este procedimento é similar ao utilizado para a representação dos efeitos de temperatura (Christensen, 1971).

O procedimento é, de uma forma resumida, o seguinte: na idade  $\tau_0$  tem-se  $D(t)$ , na idade  $\tau$  tem-se  $\hat{D}(t, \tau)$ . Desta forma,

$$\hat{D}(t, \tau_0) = D(t) \quad (3.88)$$

Usando a mudança de variáveis  $D(t) = L(\log t)$ , é possível escrever para  $\chi(\tau_0) = 1$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial \tau} > 0$

$$\hat{D}(t, \tau) = L[\log t + \log \chi(\tau)] = L[\log t \chi(\tau)] = L(\log \xi) = D(\xi) \quad \text{where } \xi = \chi t \quad (3.89)$$

E assim, reduz-se a equação constitutiva com envelhecimento a uma equação constitutiva sem envelhecimento, através da introdução do tempo reduzido  $\xi$ . A relação entre o tempo real e o tempo reduzido deve ser obtida experimentalmente através de testes de fluência e relaxação. Expressões semiempíricas como as equações WLF (Ferry, 1970) podem, também ser utilizadas.

É interessante observar que o deslocamento (“shifting”) dos dados de propriedades mecânicas paralelamente ao eixo do tempo, não modifica seus valores inicial e final, somente os valores para tempos intermediários. Desta forma, tal procedimento pode falhar na representação adequada do envelhecimento, com exceção de alguns intervalos de tempo.

Por exemplo, considerando um elemento Kelvin com  $D(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-t/\theta})$ , tem-se

$$\hat{D}(t, \tau) = D(\xi) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\xi/\theta}) = \frac{1}{E}(1 - e^{-t/\hat{\theta}}); \hat{\theta} = \frac{\theta}{\chi} \quad (3.90)$$

O comportamento para diferentes valores de  $\chi$  (ou idade) é mostrado na figura 3.7. As deformações finais não são alteradas no procedimento de “time-shifting”. Isto pode levar a

erros principalmente quando existe interesse na análise de longos períodos de tempo (comportamento assintótico).

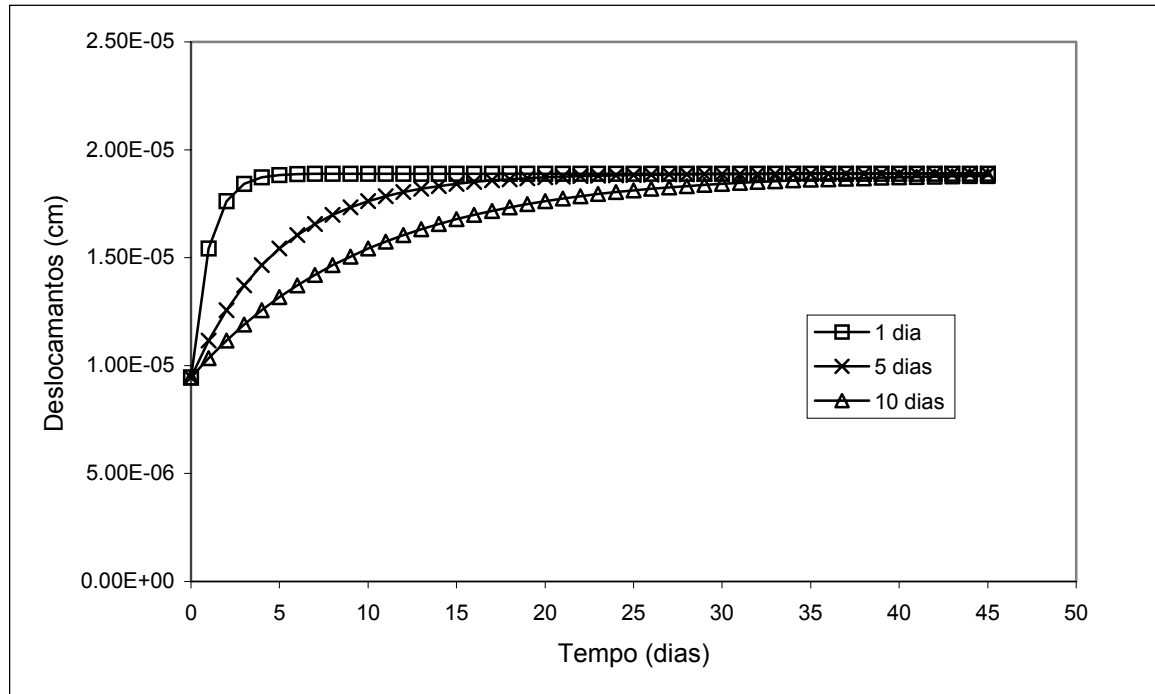


Figura 3.7 – Comportamento para diferentes idades

Materiais para os quais o tempo de relaxação é dominado por processo termicamente ativados, obedecem a equação de Arrhenius

$$v = v_0 e^{-\frac{U}{RT}} \quad (3.91)$$

onde  $T$  é a temperatura. Tais materiais são naturalmente termo-reologicamente simples. No entanto, se houver múltiplos mecanismos de relaxação, cada um com sua própria dependência da temperatura, o material não será termo-reologicamente simples. Se ocorrer uma mudança de fase ou o material apresentar alterações químicas como decomposição, oxidação ou novas ligações intermoleculares (“cross-linkings”), também não será termo-reologicamente simples (Plazek, 1965 e Plazek, 1996).



Uma vez que o “time-shifting” horizontal não pode representar adequadamente o envelhecimento em todos casos, uma variante da equação (3.88) é proposta (Sullivan et al., 1993)

$$\hat{D}(t, \tau) = B(t)D(\xi) \quad (3.92)$$

onde o fator  $B(t)$  representa o “shift” vertical.

## 4 FORMULAÇÃO PARA FALHAS PROGRESSIVAS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo trata da análise de falha progressivas em materiais compósitos laminados. Apresentam-se as considerações relativas aos principais tipos de falhas que ocorrem nas lâminas de materiais compósitos reforçadas por fibras, assim como os critérios macroscópicos utilizados na detecção destes tipos de falhas.

Um modelo de degradação de rigidez de uma lâmina, em presença de falhas é apresentado, considerando os diferentes modos de falha e sua correspondente modificação na matriz constitutiva do material.

No presente estudo propõe-se um modelo de falhas que considere a idade do material, ou seja, quanto maior o tempo de envelhecimento, maior a suscetibilidade para ocorrência de falhas.

A degradação provocada pelo envelhecimento nos materiais compósitos, em geral, afeta de forma mais intensa a matriz por isso as propriedades que dela dependem apresentam uma maior redução. O critério de falha com envelhecimento deve, portanto, considerar que, a medida que o material envelhece, a probabilidade de falha na matriz é proporcionalmente mais elevada a probabilidade de falha nas fibras.

### 4.2 ABORDAGEM DE FALHAS

Os materiais compósitos possuem mecanismos de falhas bem mais complexos que os materiais isotrópicos, até porque, no caso dos primeiros, deve-se considerar todos os tipos de falhas de cada um dos materiais componentes, acrescidos das falhas de degradação do compósito.

As falhas nas estruturas de materiais compósitos de lâminas constituídas de fibras e matriz ocorrem, basicamente, de quatro modos:

- ruptura por tração e flambagem por compressão das fibras;
- ruptura da matriz no sentido paralelo às fibras;
- perda de aderência entre fibras e matriz;
- delaminação.

Nos três primeiros, a falha relaciona-se com as propriedades e características dos materiais constituintes das lâminas, enquanto que no último, tem-se a dependência do esquema de laminação e das tensões interlaminares geradas.

O estudo de falhas nos compósitos pode ser abordado segundo a micro ou macromecânica, porém, os aspectos micro-estruturais da falha são tão complexos que seria difícil a resolução destes problemas com base nos métodos da micromecânica. Por isso, normalmente adotam-se os conceitos de critérios de falha, baseados na abordagem macromecânica. Neste caso, tem-se falhas na direção das fibras, falhas na direção perpendicular a esta e delaminação, mas não são consideradas falhas separadamente nas fibras e matriz.

Os critérios de falha são representados por superfícies de ruptura no espaço de tensões ou deformações. Matematicamente, tem-se:

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) = 1 \quad (4.1)$$

ou

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 1 \quad (4.2)$$

Existem vários tipos de critérios de falha. Quanto a sua apresentação matemática, podem ser polinomiais ou apenas fornecerem um limite de tensões ou deformações nas direções principais do material. Os critérios polinomiais tem a forma

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1 \quad (4.3)$$

em termos de tensões e

$$G_i \varepsilon_i + G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + G_{ijk} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k + \dots = 1 \quad (4.4)$$

em termos de deformações. Os coeficientes dos polinômios são obtidos de dados experimentais.

No caso do critério ser apenas um limite para tensões ou deformações, os efeitos da interação das mesmas são negligenciados. Já entre os critérios polinomiais, o polinômio linear, normalmente subestima a resistência do material, sendo, portanto, mais comumente utilizados polinômios de ordens mais elevadas.

Quanto ao tipo de análise de falha, tem-se os critérios que identificam simplesmente a ocorrência de falha e os que consideram os diferentes modos de falha e, por isso, servem para serem empregados em análises de falhas progressivas.

A seguir são apresentados os critérios que encontram-se implementados nesta formulação, cabendo, ainda, salientar que, neste trabalho, a lâmina é considerada transversalmente isotrópica, com o plano de isotropia sendo o plano 2-3. Neste caso temos que as resistências ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3, são iguais. As direções principais da lâmina (1, 2 e 3) encontram-se representadas na figura 4.1. E para as equações apresentadas no seguinte tópico vale a notação abaixo.

$X_t$  - resistência à tração na direção 1

$Y_t$  - resistência à tração na direção 2

$X_c$  - resistência à compressão na direção 1

$Y_c$  - resistência à compressão na direção 2

$S_A$  - resistência ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3

$S_T$  - resistência ao cisalhamento no plano 2-3

É importante observar que, na presente formulação, a resistência do material varia em função da idade do mesmo, ou seja, as resistências limite, cuja notação foi apresentada no parágrafo anterior são, na realidade, funções do tempo e não valores constantes como utiliza-se em análises sem consideração de efeitos de envelhecimento.

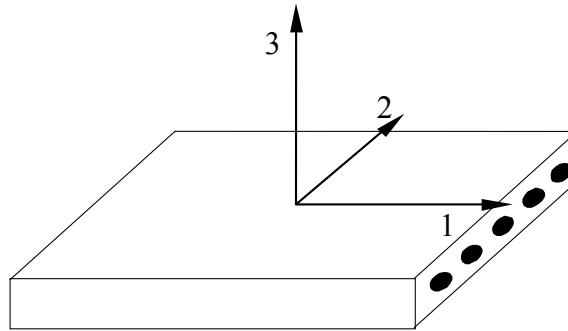


Figura 4.1 - Direções principais da lâmina

### 4.3 CRITÉRIOS DE FALHA

#### 4.3.1 Critério de Tsai-Wu para Materiais com Envelhecimento

Este critério, apresenta forma polinomial quadrática e pode ser expresso em termos de tensões ou deformações.

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (4.5)$$

Onde, para um material com diferentes resistências em tração e compressão, os parâmetros  $F_i$  e  $F_{ij}$  são calculados como segue

$$F_1 = \frac{1}{X_t(t)} - \frac{1}{X_c(t)} \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{Y_t(t)} - \frac{1}{Y_c(t)}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t(t) X_c(t)} \quad ; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t(t) Y_c(t)} \quad (4.6)$$

$$F_{33} = F_{44} = \frac{1}{(S_A(t))^2} \quad ; \quad F_{55} = \frac{1}{(S_T(t))^2}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$$

O fator  $F_{12}^*$  é determinado por intermédio de uma variedade de testes de tensão biaxiais tração-tração, tração-compressão e compressão-compressão. Estes testes são de difícil execução e existem incertezas quanto ao fato dos valores obtidos nos diferentes testes poderem ser aproximados. Além disto, os testes deveriam ser feitos para diferentes idades do material.

Tendo em conta que a falha ou resistência de falha do material não varia com a mudança de sinal das tensões de cisalhamento, ao contrário do que acontece no caso das tensões normais, os termos lineares referentes à tensões de cisalhamento devem desaparecer.

A expressão do Critério de Tsai-Wu em termos de tensões para uma lâmina transversalmente isotrópica fica

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\sigma_4^2 + F_{55}\sigma_5^2 = 1 \quad (4.7)$$

Alternativamente pode-se escrever o critério em função de deformações.

$$G_i\varepsilon_i + G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = 1 \quad (4.8)$$

A principal limitação do Critério de Tsai-Wu é que ele não considera o fato de que as falhas nas fibras e matriz ocorrem de modos muito distintos, pois define a ocorrência de falha através de um única expressão e por isso não serve para análises de falhas progressivas.

#### 4.3.2 Critério de Hashin para Materiais com Envelhecimento

Hashin (1980), considerando que uma lâmina reforçada por fibras unidirecionais, dispostas na direção 1, é transversalmente isotrópica no plano perpendicular à direção das fibras, afirmou que o critério de falha não deve variar devido à rotações no plano 2-3 e, portanto, deve ser função dos invariantes de tensão com relação às rotações em torno do eixo 1, dados nas equações (4.9).

$$I_1 = \sigma_{11}$$

$$I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_3 = \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} \quad \text{ou} \quad I_3 = \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{23}^2 \quad (4.9)$$

$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2$$

$$I_5 = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

As componentes de tensão que aparecem em (4.9) são aquelas representadas na figura 2.1. Cabe lembrar que, como os eixos 2 e 3 podem girar em torno do eixo 1, a componente  $\sigma_{33}$  pode não ser normal ao plano médio da lâmina.

Afirmando, ainda que a aproximação quadrática é a mais simples entre as que apresentam bons resultados, Hashin (1980) propôs um critério polinomial quadrático que apresenta a seguinte forma geral

$$A_1 I_1 + B_1 I_1^2 + A_2 I_2 + B_2 I_2^2 + C_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_4 I_4 = 1 \quad (4.10)$$

Sendo  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$  e  $C_{12}$  constantes do material dependentes do modo de falha e  $I_1, I_2, I_3, I_4$  e  $I_5$ , os invariantes de tensão no plano 2-3 dados pelas equações (4.9).

O Critério de Hashin leva em conta os diferentes modos de falha e foi enunciado como segue:

Modo de tração nas fibras

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{X_t(t)} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_A(t)^2} \right) = 1 \quad (4.11)$$

Modo de compressão nas fibras

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{X_c(t)} \right)^2 = 1 \quad (4.12)$$

Modo de tração na matriz

$$\frac{1}{Y_t(t)} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T(t)^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_A(t)^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.13)$$

Modo de compressão na matriz

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y_c} \left( \frac{Y_c^2}{4S_T(t)^2} - 1 \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_T(t)^2} (\sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2) + \\ + \frac{1}{S_T(t)^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_A(t)^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Critério de Lee para Materiais com Envelhecimento

Lee (1980 e 1982) propôs um critério de determinação direta do modo de falha baseado inteiramente no empirismo.

Modo de tração nas fibras

$$\frac{\sigma_{11}}{X_t(t)} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_A(t)^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.15)$$

Modo de compressão nas fibras

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{X_c(t)} \right)^2 = 1 \quad (4.16)$$



Modo de tração na matriz

$$\frac{\sigma_{22}}{Y_t(t)} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_T(t)^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) = 1 \quad (4.17)$$

Modo de compressão na matriz

$$\left( \frac{\sigma_{22}}{Y_c(t)} \right)^2 = 1 \quad (4.18)$$

Delaminação

$$\frac{\sigma_{33}}{Y_t(t)} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_A(t)^2} (\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.19)$$

Tanto no Critério de Lee como no Critério de Hashin admite-se que a falha é produzida apenas pelas tensões que agem no plano da mesma.

No Critério de Lee as tensões normais e de cisalhamento são consideradas independentemente.

#### 4.3.4 Critério da Máxima Deformação para Materiais com Envelhecimento

Este critério é bastante intuitivo, pois estabelece que a falha se dá quando uma das componentes de deformação atuantes segundo as direções principais da lâmina atinge o seu respectivo valor limite determinado experimentalmente.

No presente trabalho considera-se que os limites de deformação última do material variem de acordo com a idade do mesmo.

Segundo o Critério da Máxima Deformação a falha ocorre quando uma das condições abaixo for satisfeita.

Alongamento

$$\left( \frac{\varepsilon_{11}}{X_{et}(t)} \right)^2 = 1 \quad \left( \frac{\varepsilon_{22}}{Y_{et}(t)} \right)^2 = 1 \quad (4.20)$$

Encurtamento

$$\left( \frac{\varepsilon_{11}}{X_{ec}(t)} \right)^2 = 1 \quad \left( \frac{\varepsilon_{22}}{Y_{ec}(t)} \right)^2 = 1 \quad (4.21)$$

Distorção

$$\left( \frac{\varepsilon_{12}}{S_{\varepsilon A}(t)} \right)^2 = 1 \quad \left( \frac{\varepsilon_{13}}{S_{\varepsilon A}(t)} \right)^2 = 1 \quad \left( \frac{\varepsilon_{23}}{S_{\varepsilon T}(t)} \right)^2 = 1 \quad (4.22)$$

onde

$X_{et}$  – limite de deformação de alongamento na direção 1

$X_{ec}$  – limite de deformação de encurtamento na direção 1

$Y_{et}$  – limite de deformação de alongamento na direção 2

$Y_{ec}$  – limite de deformação de encurtamento na direção 2

$S_{\varepsilon A}$  – limite de deformação de cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3

$S_{\varepsilon T}$  – limite de deformação de cisalhamento no plano 2-3

Estes limites devem ser obtidos experimentalmente.

O critério da máxima deformação é um critério de falha que, embora seja simples, fornece bons resultados em comparação com outros critérios e dados experimentais (Oliveira e Creus, 2000). Além disto, é um critério de aplicação direta e fornece a diferenciação entre os modos de falha, o que é necessário em análises de falhas progressivas. Por estas razões, ele é o critério preferencial no presente trabalho e é adotado nas análises de falhas apresentadas no capítulo de exemplos.

#### 4.4 FALHAS PROGRESSIVAS

Para levar em conta os efeitos do envelhecimento na análise de falhas, a degradação causada pela temperatura, umidade, radiação UV deve ser considerada. A formulação para análise de falhas progressivas apresentada por Oliveira e Creus (2000) e Oliveira (1999) deve ser rescrita introduzindo-se os efeitos do envelhecimento.

Para a análise de falhas progressivas necessita-se de critérios que considerem os diferentes modos de falha. Dentre estes, os implementados no modelo computacional foram os de Hashin (Hashin, 1980), Lee (Lee 1980 e 1982) e Máxima Deformação.

A fim de realizar a referida análise, necessita-se empregar um modelo de degradação da lâmina para efetuar as modificações na rigidez do material à medida que as falhas avançam. Tal degradação, na realidade, ocorre de maneira bastante complexa devido às características dos materiais compósitos. No entanto, para análise por elementos finitos, optou-se por um modelo simples de degradação que consiste em anular ou reduzir convenientemente os termos da matriz constitutiva do material referentes ao modo de falha ocorrido. Este procedimento encontra-se ilustrado em alguns trabalhos como Lee (1982), Tolson e Zabarás (1991) e Cheung et al (1995).

Apresenta-se a seguir os modelos de degradação da rigidez utilizados na presente formulação.

##### 4.4.1 Modelos de Degradação da Lâmina

Para utilizar o Critério da Máxima Deformação em análise de falhas progressivas, considerou-se três diferentes tipos de falhas, quais sejam, falha na direção 1 (direção das fibras), falha na direção 2 (direção perpendicular às fibras) e falha por cisalhamento. As direções 1, 2 e 3 são as direções principais da lâmina (Fig. 4.2)

A falha por alongamento ou encurtamento pode ocorrer na direção das fibras ou na direção perpendicular às mesmas, e uma vez que ela ocorra, procede-se as correspondentes modificações na matriz constitutiva.

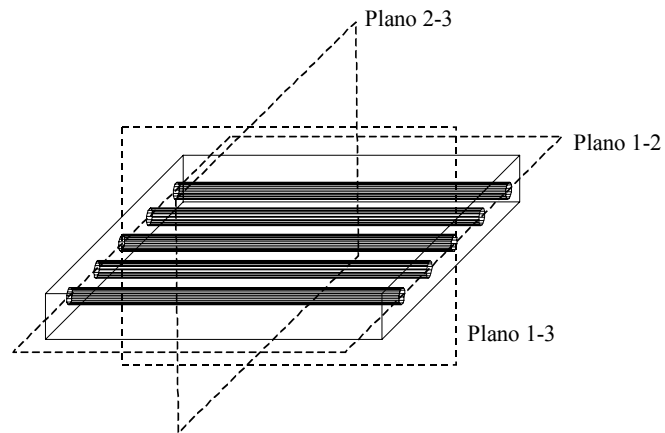


Figura 4.2 - Planos principais da lâmina

#### 4.4.1.1 Falha na direção das fibras (direção 1)

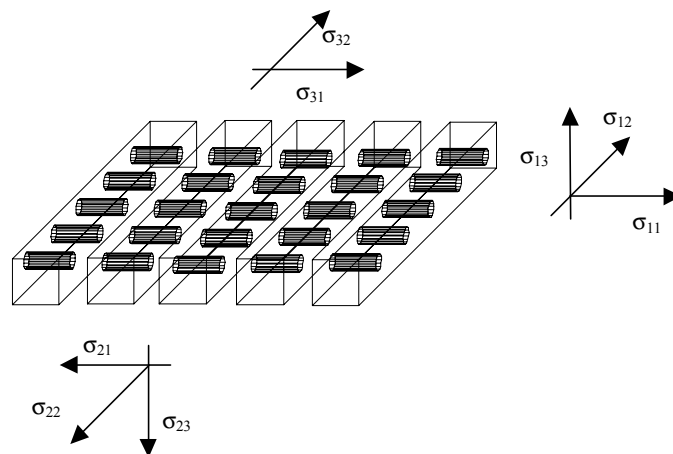


Figura 4.3 – Falha na direção 1

A figura 4.3 esquematiza a ocorrência de falha na direção das fibras pela observação da mesma pode-se concluir que, neste caso

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 0 \\
 \sigma_{12} &= 0 \\
 \sigma_{13} &= 0 \\
 \sigma_{22} &\neq 0 \\
 \sigma_{23} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Desta forma, a matriz constitutiva do material para o modo de falha nas fibras, fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} \\ \sigma_3 &= \sigma_{12} \\ \sigma_4 &= \sigma_{13} \\ \sigma_5 &= \sigma_{23} \end{aligned} \quad (4.25)$$

#### 4.4.1.2 Falha na direção perpendicular às fibras (direção 2)

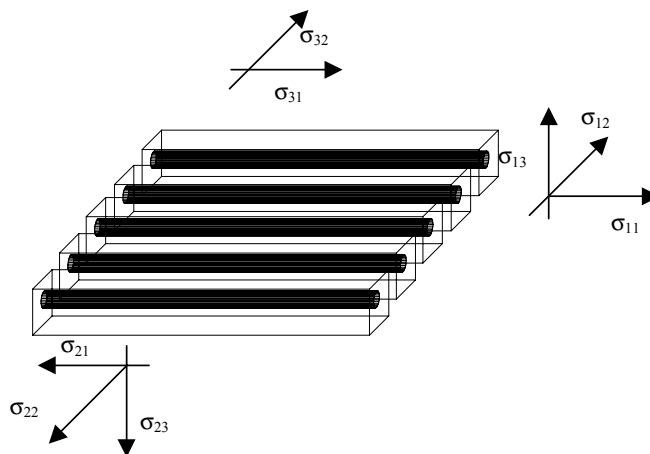


Figura 4.4 - Falha na direção 2

Observando a figura 4.4 vê-se que, para este tipo de falha as tensões nas direções principais do material ficariam

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} &= 0 \\
 \sigma_{21} &= 0 \\
 \sigma_{23} &= 0 \\
 \sigma_{11} &\neq 0 \\
 \sigma_{13} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

E a matriz constitutiva correspondente ao modo de falha na matriz assume a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix}
 \tag{4.27}$$

A falha por cisalhamento pode ocorrer nos planos 1-2, 1-3 e 2-3 (Figura 4.2).

#### 4.4.1.3 Falha por cisalhamento no plano 1-2

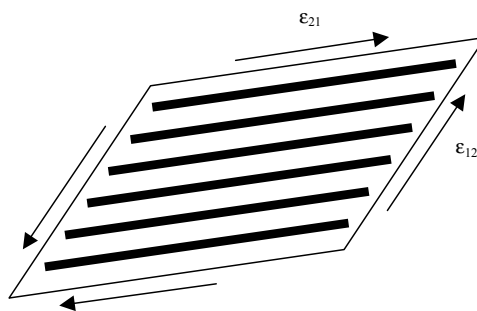


Figura 4.5 - Cisalhamento 1-2

Considerando que as fibras possuem maior resistência que a matriz a ruptura se daria da seguinte forma

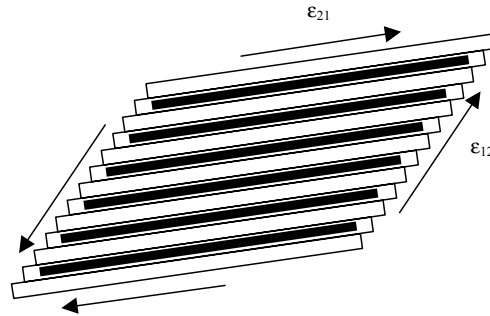


Figura 4.6 – Ruptura por cisalhamento no plano 1-2

O que caracteriza falha na matriz e neste caso a matriz constitutiva sofre as modificações devidas a este tipo de falha (equação (4.27)).

#### 4.4.1.4 Falha por cisalhamento no plano 1-3

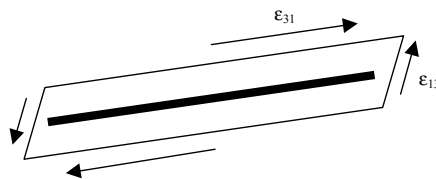


Figura 4.7 – Cisalhamento 1-3

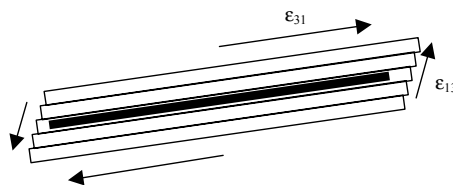


Figura 4.8 – Ruptura por cisalhamento no plano 1-3

Neste caso ocorreria uma espécie de "delaminação" na matriz da lâmina e esta perderia sua resistência aos cisalhamentos  $\epsilon_{13}$  e  $\epsilon_{23}$ . Assim sendo, as tensões ficariam

$$\begin{aligned}
 \sigma_{23} &= 0 \\
 \sigma_{13} &= 0 \\
 \sigma_{11} &\neq 0 \\
 \sigma_{22} &\neq 0 \\
 \sigma_{21} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

E matriz constitutiva fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix}
 \tag{4.29}$$

#### 4.4.1.5 Falha por cisalhamento no plano 2-3

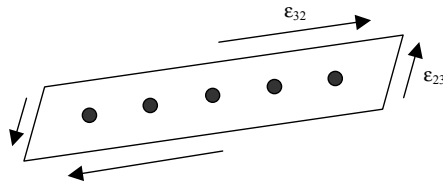


Figura 4.9 – Cisalhamento 2-3

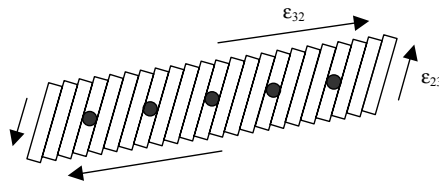


Figura 4.10 – Ruptura por cisalhamento no plano 2-3

Neste caso haveria ruptura da matriz equação (4.27).



É importante observar que o envelhecimento pode alterar os modos de falha. Um material que apresenta comportamento dúctil, após sofrer os efeitos do envelhecimento, pode apresentar uma ruptura característica de um comportamento frágil (Scida et al., 2002).

#### 4.4.2 Cálculo do Fator de Carga

A análise de falhas progressivas é feita por meio de incrementos de carga que podem levar a estrutura até sua falha última. O procedimento consiste em, dado um incremento de carga verificar se este incremento provoca falha ou não. Em caso positivo, deve-se obter o menor fator de carga capaz de provocar a falha. Se a falha ocorrida não compromete completamente a capacidade de carga da estrutura, são feitas as modificações devidas na rigidez do material e a análise prossegue, caso contrário, tem-se a falha última (LPF – Last Ply Failure).

A figura 4.11 mostra uma superfície de falha e o incremento dado que deve ser subtraído de uma quantidade (seta com linha pontilhada), para obter-se o fator de carga de falha.

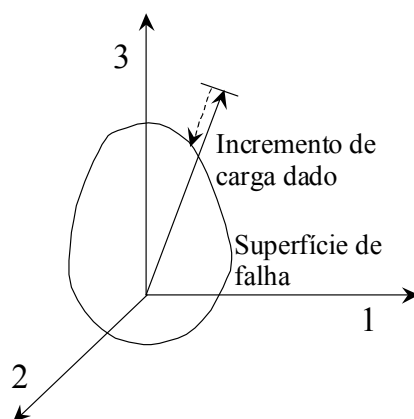


Figura 4.11 – Fator de carga para falha

## 4.5 PLASTICIDADE PARA MATERIAIS LAMINADOS

Para a análise de plasticidade de materiais laminados utilizou-se o Critério de von Mises, portanto, apenas lâminas de material isotópico são consideradas. A representação do comportamento do material após a plastificação é feita por meio da introdução de danos na matriz constitutiva do mesmo.

Duas formulações plásticas foram implementadas. Na primeira, após ocorrer a plastificação, é feita uma redução no módulo de elasticidade do material. Na segunda, utiliza-se o procedimento apresentado por Groehs e Creus (1977) que será descrito a seguir.

### 4.5.1 Formulação Plástica

No presente modelo, tem-se a possibilidade de optar entre dois tipos de dano a serem introduzidos no material após a plastificação. Pode-se simplesmente reduzir o módulo de elasticidade de um valor que deve ser fornecido pelo usuário ou usar a formulação descrita em Groehs e Creus (1977).

Em ambos os casos o critério de plastificação é o critério de von Mises (equação (4.30)) e neste caso considera-se que cada lâmina é individualmente composta por um material homogêneo e isotrópico e está sujeita a um estado plano de tensões.

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_e^2 \quad (4.30)$$

A matriz constitutiva elastoplástica é dada pela equação (4.31) (Simo e Hughes, 1998).

$$\mathbf{E}_{ep} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E}}{H' + \left( \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma} \right)} \quad (4.31)$$

onde

$Y$  - é o Critério de von Mises

$E$  - é a matriz constitutiva elástica

$\sigma$  - é o tensor de tensões

$H$  - que neste trabalho é assumido como sendo zero

Expressando (4.31) matricialmente tem-se

$$\mathbf{E}_{ep} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S_5} & \frac{E}{1-\nu^2} \nu - \frac{S_1 S_2}{S_5} & -\frac{S_1 S_3}{S_5} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \nu - \frac{S_1 S_2}{S_5} & \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_2^2}{S_5} & -\frac{S_2 S_3}{S_5} \\ -\frac{S_1 S_3}{S_5} & -\frac{S_2 S_3}{S_5} & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{S_3^2}{S_5} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

sendo

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (s_{11} + \nu s_{22}) \quad (4.33)$$

$$S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu s_{11} + s_{22}) \quad (4.34)$$

$$S_3 = \frac{E}{1+\nu} s_{12} \quad (4.35)$$

$$S_4 = S_1 s_{11} + S_2 s_{22} + 2 S_3 s_{12} \quad (4.36)$$

$$S_5 = \frac{4}{9} H' + S_4 \quad (4.37)$$

onde

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma_{ij}) \delta_{ij} \quad (4.38)$$

## 5 MODELO NUMÉRICO PARA DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO E ANÁLISE ESTRUTURAL

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os procedimentos matemáticos para análise não linear de cascas laminadas de material compósito reforçado por fibras por meio do Método dos Elementos Finitos. Tais procedimentos baseiam-se em uma descrição cinemática do tipo Lagrangeana Total apresentada em Bathe (1996) porém, modificados pela inclusão de deformações viscoelásticas e higrótérmicas (Marques, 1994).

As equações fundamentais de equilíbrio da mecânica do contínuo formuladas para um elemento finito tridimensional degenerado para análise de cascas constituídas de várias lâminas são apresentadas. A formulação presente permite a consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações, em um modelo constitutivo de viscoelasticidade linear no qual as deformações dependentes do tempo são avaliadas em termos de variáveis de estado (Creus, 1986).

Apresentam-se ainda, neste capítulo, a forma incremental-iterativa da equação de equilíbrio bem como os procedimentos para a definição dos intervalos de tempo na análise viscoelástica. São expostos também os métodos numéricos utilizados para a solução das equações não lineares de equilíbrio (Método de Newton-Raphson e o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados) e os procedimentos numéricos usados para avaliação das deformações viscoelásticas por meio das variáveis de estado.

### 5.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Considerando um corpo em um espaço definido por um sistema fixo de coordenadas cartesianas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , podendo estar sujeito a grandes deslocamentos e rotações e

apresentando resposta não linear, deseja-se conhecer sua configuração para diferentes estágios de carga (figura 5.1). Para tanto, normalmente utilizam-se processos incrementais que, para um dado estágio de carga, admitem como conhecidas todas as configurações anteriores.

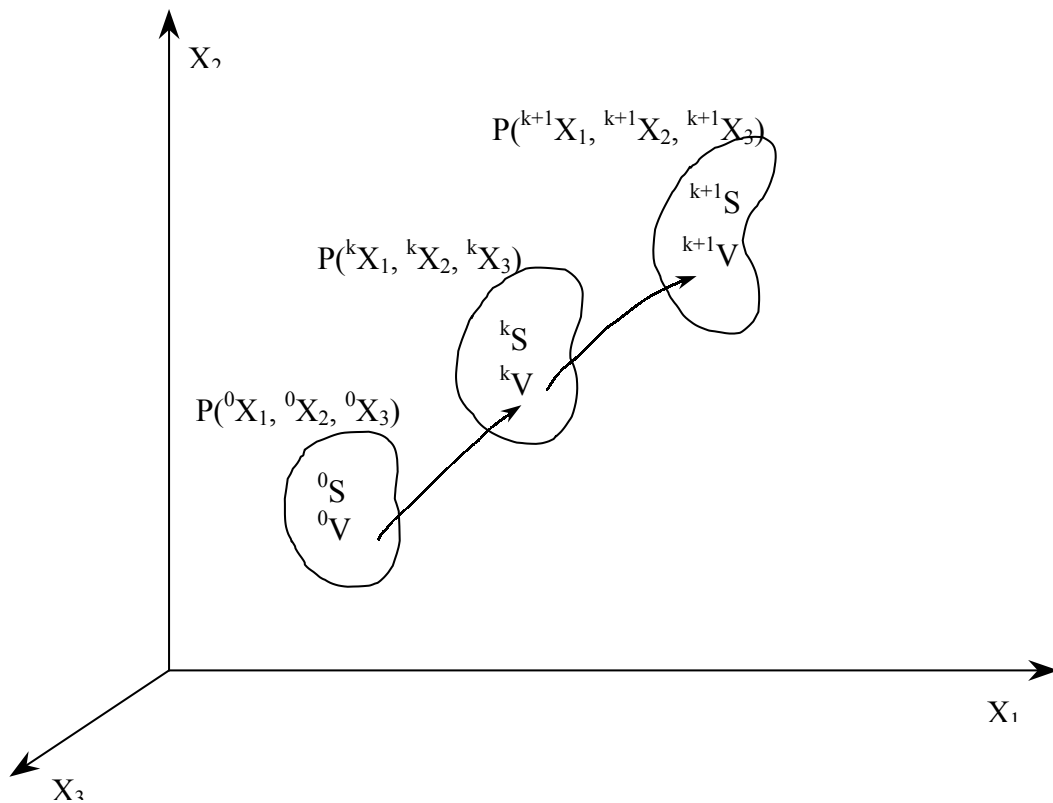


Figura 5.1 – Configurações de um corpo no sistema de coordenadas Cartesiano

No presente modelo utiliza-se uma formulação Lagrangeana Total (Bathe, 1996) a qual baseia-se em uma descrição cinemática em que as variáveis referem-se à configuração inicial.

Para uma análise incremental, a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser escrita como (Bathe, 1996)

$$\int_{0V} {}^{k+1}S_{ij} \delta {}^{k+1}\epsilon_{ij} d^0V = {}^{k+1}R \quad (5.1)$$

onde  ${}^0V$  é o volume do corpo na configuração inicial,  ${}^{k+1}S_{ij}$  são componentes do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff no passo  $k+1$ ,  ${}^{k+1}\epsilon_{ij}$  são componentes do Tensor de Deformações de Green-Lagrange no passo  $k+1$ , ambos referidos à configuração inicial, e  ${}^{k+1}R$  é o trabalho virtual das forças externas no passo incremental  $k+1$ , que pode ser calculado por

$${}^{k+1}R = \int_{{}^0V} {}^{k+1}q_i^B \delta u_i d^0V + \int_{{}^0S} {}^{k+1}q_i^S \delta u_i d^0S \quad (5.2)$$

sendo que  ${}^{k+1}q_i^B$  e  ${}^{k+1}q_i^S$  representam as cargas de volume e de superfície, atuantes sobre o corpo na configuração do instante  $k+1$  e  ${}^0S$  indica a área do corpo sobre a qual atuam as cargas de superfície, medidas em relação à configuração inicial.

Pode-se escrever a seguinte decomposição

$${}^{k+1}S_{ij} = {}^kS_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (5.3)$$

$${}^{k+1}\epsilon_{ij} = {}^k\epsilon_{ij} + {}_0\epsilon_{ij}$$

onde  ${}_0S_{ij}$  são incrementos nas componentes de tensão e  ${}_0\epsilon_{ij}$  são incrementos nas componentes de deformação, que ocorrem quando o corpo passa da configuração do instante  $k$  para a do instante  $k+1$ .

Os incrementos de deformação podem, ainda, ser decompostos em uma parte linear  ${}_0e_{ij}$  e outra não linear  ${}_0\eta_{ij}$ , como mostra a equação (5.4)

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (5.4)$$

Considerando um corpo viscoelástico sujeito a cargas convencionais e a variações de temperatura e umidade, os incrementos de deformação decompostos em suas componentes elástica, viscoelástica, térmica e higroscópica, podem ser escritos como (Marques e Creus, 1994)

$${}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = {}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + {}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^v + {}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^T + {}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^H \quad (5.5)$$

A relação constitutiva linearizada para incrementos de tensão e deformação, apresentada por Bathe (1996), pode ser escrita na forma

$${}_0\mathbf{S}_{ij} = {}_0\mathbf{C}_{ijrs} [{}_0\mathbf{e}_{rs} - {}_0\mathbf{e}_{rs}^v - {}_0\mathbf{e}_{rs}^T - {}_0\mathbf{e}_{rs}^H] \quad (5.6)$$

onde  ${}_0\mathbf{C}_{ijrs}$  representa o tensor constitutivo incremental de quarta ordem do material.

Usando as equações (5.1), (5.3), (5.4) e (5.6), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}_0\mathbf{C}_{ijrs} {}_0\mathbf{e}_{rs} \delta {}_0\mathbf{e}_{ij} d^0V + \int_{0V} {}_0^k\mathbf{S}_{ij} \delta {}_0\boldsymbol{\eta}_{ij} d^0V = \\ & = {}^{k+1}\mathbf{R} - \int_{0V} {}_0^k\mathbf{S}_{ij} \delta {}_0\mathbf{e}_{ij} d^0V + \int_{0V} {}_0\mathbf{C}_{ijrs} {}_0\mathbf{e}_{rs}^v \delta {}_0\mathbf{e}_{ij} d^0V + \\ & + \int_{0V} {}_0\mathbf{C}_{ijrs} ({}_0\mathbf{e}_{rs}^T + {}_0\mathbf{e}_{rs}^H) \delta {}_0\mathbf{e}_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (5.7)$$

que é a equação incremental de equilíbrio do corpo de acordo com a descrição cinemática Lagrangeana Total.

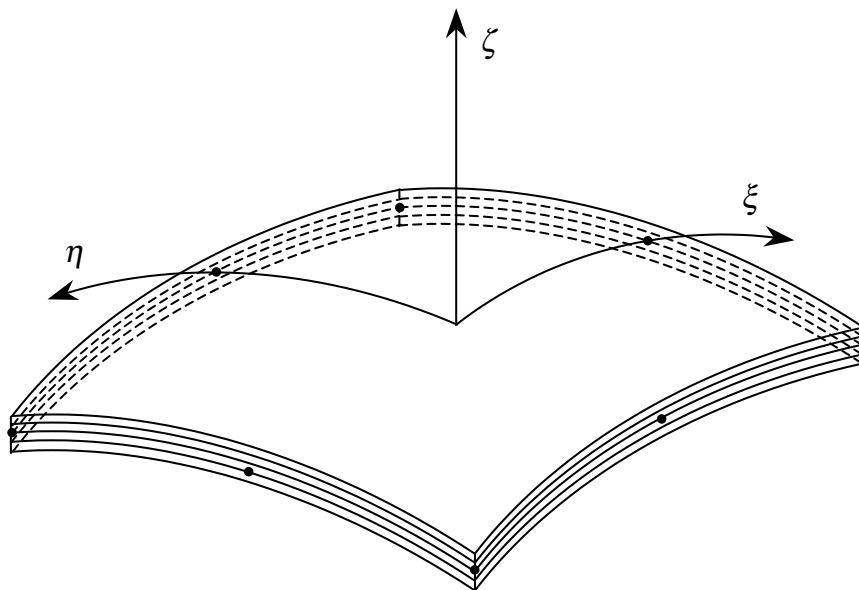


Figura 5.2 – Elemento finito de casca laminada

No presente modelo computacional utiliza-se elementos finitos tridimensionais degenerados do tipo isoparamétrico (figura 5.2), deduzidos para análise de estruturas de cascas. Foi escolhida uma formulação de elementos finitos isoparamétricos devido ao fato de que, em uma análise incremental não linear geométrica, os deslocamentos totais são calculados através da soma dos incrementos de deslocamentos obtidos no corrente passo com as correspondentes coordenadas dos pontos no passo anterior. Sendo assim, é interessante que as funções utilizadas para interpolar deslocamentos sejam as mesmas utilizadas para interpolar as coordenadas do elemento.

As hipóteses consideradas na dedução destes elementos são as mesmas consideradas na análise linear de Ahmad et al. (1970). Mais detalhes podem ser vistos em Hughes (1987)

Trabalhando com notação matricial e considerando o Método dos Elementos Finitos, a equação (5.7), para cada elemento, assume a forma (Marques, 1994)

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} [{}^k B_L]^T [{}_0 C] [{}^k B_L] d^0 V + \int_{V_0} [{}^k B_{NL}]^T [{}_0 S] [{}^k B_{NL}] d^0 V \{U\} = \\ & = \{{}^{k+1} P\} - \int_{V_0} [{}^k B_L]^T [{}_0 S] d^0 V + \int_{V_0} [{}^k B_L]^T [{}_0 C] \left( \{e^v\} + \{e^T\} + \{e^H\} \right) d^0 V \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $\{U\}$  é o vetor dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento,  $[{}^k B_L]$  e  $[{}^k B_{NL}]$  são as matrizes que relacionam, respectivamente, as partes linear e não linear das deformações com os deslocamentos nodais. Para mais detalhes sobre estas matrizes, ver Bathe (1996).  $\{{}^{k+1} P\}$  é o vetor das cargas nodais externas na configuração  $k+1$ .

Ainda na equação (5.8) vale ressaltar que  $[ ]^T$  indica a transposta da matriz.

Avaliando as integrais de volume acima em cada uma das  $N$  camadas do volume  $V_q$  pode-se escrever

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N \left\{ \int_{V_q} [{}^k B_L]^T [{}_0 C] [{}^k B_L] d^0 V_q + \int_{V_q} [{}^k B_{NL}]^T [{}_0 S] [{}^k B_{NL}] d^0 V_q \right\} \{U\} = \\ & = \{{}^{k+1} P\} - \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k B_L]^T [{}_0 S] d^0 V_q + \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k B_L]^T [{}_0 C] \{e^v\} d^0 V_q + \\ & + \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k B_L]^T [{}_0 C] \{e^T\} d^0 V_q + \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k B_L]^T [{}_0 C] \{e^H\} d^0 V_q \end{aligned} \quad (5.9)$$



ou, na forma compacta

$$\left( \begin{bmatrix} {}^k\mathbf{K}_L \\ {}_0\mathbf{K}_{NL} \end{bmatrix} \right) \{\mathbf{U}\} = \{ {}^{k+1}\mathbf{P} \} - \{ {}^k\mathbf{F} \} + \{ {}_0\mathbf{F}^v \} + \{ {}_0\mathbf{F}^T \} + \{ {}_0\mathbf{F}^H \} \quad (5.10)$$

sendo

$${}^k\mathbf{K}_L = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}^k\mathbf{B}_L] d^0V_q \quad (5.11)$$

$${}_0\mathbf{K}_{NL} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_{NL}]^T [{}^k\mathbf{S}] [{}^k\mathbf{B}_{NL}] d^0V_q \quad (5.12)$$

$$\{ {}^k\mathbf{F} \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T \{ {}^k\mathbf{S} \} d^0V_q \quad (5.13)$$

$$\{ {}_0\mathbf{F}^v \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{ {}_0\mathbf{e}^v \} d^0V_q \quad (5.14)$$

$$\{ {}_0\mathbf{F}^T \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{ {}_0\mathbf{e}^T \} d^0V_q \quad (5.15)$$

$$\{ {}_0\mathbf{F}^H \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{ {}_0\mathbf{e}^H \} d^0V_q \quad (5.16)$$

Nas expressões acima,  ${}^k\mathbf{K}_L$  e  ${}_0\mathbf{K}_{NL}$  são as matrizes de rigidez tangentes linear e não-linear, respectivamente, correspondentes ao passo  $k$ ,  $\{ {}^k\mathbf{F} \}$  é o vetor das forças nodais equivalentes às tensões no elemento no passo  $k$  e, finalmente,  $\{ {}_0\mathbf{F}^v \}$ ,  $\{ {}_0\mathbf{F}^T \}$  e  $\{ {}_0\mathbf{F}^H \}$  são os vetores das cargas viscoelásticas, térmicas e higroscópicas, respectivamente.

### 5.3 MODELO DE VISCOELASTICIDADE DO MATERIAL

No presente trabalho o material constituinte do laminado é considerado homogêneo e ortotrópico, sendo esta uma aproximação aceitável do ponto de vista macroscópico. Além

disto, assume-se que o material é viscoelástico linear e a representação geral usa a relação viscoelástica linear incluindo, ainda, os efeitos de temperatura e umidade. No procedimento numérico, esta representação geral é aproximada, tanto quanto se queira, em termos de variáveis de estado (Creus, 1986).

Outra alternativa é o uso de soluções no espaço transformado de Laplace, mas este procedimento não pode ser facilmente estendido à situações com envelhecimento ou materiais que apresentem não linearidades. Além disto, aplicações (Pacheco e Creus, 1997) mostram que códigos empregando transformada numérica de Laplace não são mais eficientes do que aqueles que empregam variáveis de estado.

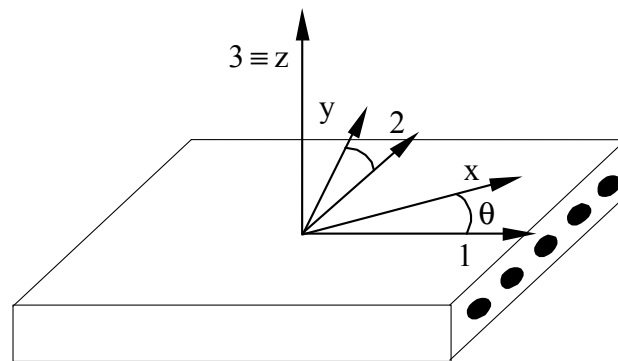


Figura 5.3 - Sistemas de coordenadas para uma lâmina ortotrópica

A figura 5.3 mostra uma lâmina feita de material ortotrópico e viscoelástico linear. Mais especificamente, trata-se de uma lâmina de material compósito reforçada por fibras, na qual as direções principais do material coincidem com os eixos 1, 2 e 3.

A relação constitutiva da lâmina, referida às direções principais do material, para cargas mecânicas e higrotérmicas, pode ser escrita como (Creus, 1986 e Marques e Creus, 1994)

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T, H, t - \tau) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{T^*}^T \alpha_i(T, H) dT + \int_{H^*}^H \beta_i(T, H) dH \quad (5.17)$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, 5$

onde  $\epsilon_i(t)$  são as componentes do vetor de deformações  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23}\}$  e  $\sigma_j(t)$  são as componentes do vetor de tensões  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ , para o tempo  $t$ , consideradas em um espaço reduzido de deformações e tensões onde as componentes  $\epsilon_{33}$  e  $\sigma_{33}$  são desconsideradas.  $T$  e  $H$  indicam os campos de temperatura e umidade, respectivamente.

Na equação (5.17),  $D_{ij}(T, H, T - \tau)$  são as funções de fluência do material correspondentes às componentes  $\epsilon_i$  e  $\sigma_j$ ,  $\alpha_i(T, H)$  são os coeficientes de dilatação térmica e  $\beta_i(T, H)$  são os coeficientes de expansão por umidade que, em geral, dependem das condições de temperatura e umidade.  $T^*$  e  $H^*$  são os valores de temperatura e concentração de umidade para os quais o material não apresenta deformação. Vale lembrar que  $\epsilon_i$ ,  $\sigma_j$ ,  $T$  e  $H$  são campos variáveis e, desta forma, mudam, em geral, de ponto a ponto no material ainda que esta dependência não apareça de forma explícita.

Assumindo-se que o material é higrotermo-reologicamente simples ou, em outras palavras, usando o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Umididade para o qual as curvas das funções de relaxação do material em uma temperatura  $T$  podem ser superpostas às correspondentes curvas de relaxação do material em uma temperatura de referência através de simples translações horizontais, pode-se escrever (Lin e Yi, 1991)

$$D_{ij}(T, H, t) = D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij}) \quad (5.18)$$

onde  $T_0$  e  $H_0$  são valores de referência para temperatura e concentração de umidade, respectivamente, e  $\xi_{ij}$  são os tempos reduzidos os quais são determinados através da expressão

$$\xi_{ij} = \int_0^t \varphi_{ij}(T(\tau), H(\tau)) d\tau \quad (5.19)$$

sendo  $\varphi_{ij}$  os fatores de translação no tempo ou, como são conhecidos na literatura inglesa, "the temperature-moisture shift factors", que devem ser determinados experimentalmente.

Cabe ressaltar que a hipótese de material higrotermo-reologicamente simples representa satisfatoriamente bem o comportamento dos materiais usados na prática em compósitos.

Substituindo (5.18) em (5.17) tem-se

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{T^*}^T \alpha_i(T, H) dT + \int_{H^*}^H \beta_i(T, H) dH \quad (5.20)$$

onde

$$\xi'_{ij} = \int_0^t \varphi_{ij}(T(s), H(s)) ds \quad (5.21)$$

Pode-se decompor as componentes totais de deformação,  $\varepsilon_i$  nas partes viscoelástica  $\bar{\varepsilon}_i$  térmica  $\varepsilon_i^T$  e higroscópica  $\varepsilon_i^H$

$$\varepsilon_i(t) = \bar{\varepsilon}_i(t) + \varepsilon_i^T(T, H) + \varepsilon_i^H(T, H) \quad (5.22)$$

Integrando por partes a primeira integral em (5.20), que corresponde à parte viscoelástica, pode-se escrever

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = D_{ij}(T_0, H_0, 0) \sigma_j(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (5.23)$$

O comportamento das funções de fluência ao longo do tempo permite aproximá-las por séries de Dirichlet-Prony, e tem-se

$$D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M D_{ij}^p \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \right] \quad (5.24)$$

onde  $D_{ij}^0$ ,  $D_{ij}^p$  e  $\theta_{ij}^p$  são constantes do material que devem ser determinadas experimentalmente.  $M$  é o número de termos usados na expansão da série acima e depende da precisão almejada na análise. Os parâmetros  $\theta_{ij}^p$  são conhecidos como tempos de retardação do material.

Derivando a equação (5.24) com relação a  $\tau$ , tem-se

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \tau} = \sum_{p=1}^M \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \varphi_{ij} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \quad (5.25)$$

E substituindo (5.25) em (5.23) obtém-se

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = D_{ij}(T_0, H_0, 0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^M \int_0^t d_{ij}^p(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij})\sigma_j(\tau) d\tau \quad (5.26)$$

onde

$$d_{ij}^p = \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \varphi_{ij} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \quad (5.27)$$

e, neste caso, notação indicial de somatório não deve ser aplicada.

A equação (5.26) pode, também, ser escrita na seguinte forma

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = D_{ij}(T_0, H_0, 0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (5.28)$$

onde

$$q_{i1}^p(t) = \int_0^t d_{i1}^p(T_0, H_0, \xi_{i1} - \xi'_{i1})\sigma_1(\tau) d\tau$$

$$q_{i2}^p(t) = \int_0^t d_{i2}^p(T_0, H_0, \xi_{i2} - \xi'_{i2})\sigma_2(\tau) d\tau$$

...

$$q_{i5}^p(t) = \int_0^t d_{i5}^p(T_0, H_0, \xi_{i5} - \xi'_{i5})\sigma_5(\tau) d\tau \quad (5.29)$$

são as variáveis de estado.

Da equação (5.28) observa-se que a deformação total no tempo  $t$ ,  $\bar{\varepsilon}_i$ , pode ser considerada como a soma de duas componentes, a deformação elástica instantânea  $\varepsilon_i^e$  e a deformação dependente do tempo  $\varepsilon_i^v$  dadas, respectivamente, por

$$\varepsilon_i^e = D_{ij}(T_0, H_0, 0)\sigma_j(t) \quad (5.30)$$

$$\varepsilon_i^v = \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (5.31)$$

Derivando-se cada uma das expressões (5.29) com relação ao limite superior das integrais  $t$ , tem-se

$$\frac{\partial q_{11}^p}{\partial t} + \frac{\varphi_{11}}{\theta_{11}^p} q_{11}^p = \frac{D_{11}^p}{\theta_{11}^p} \varphi_{11} \sigma_1(t)$$

$$\frac{\partial q_{12}^p}{\partial t} + \frac{\varphi_{12}}{\theta_{12}^p} q_{12}^p = \frac{D_{12}^p}{\theta_{12}^p} \varphi_{12} \sigma_2(t)$$

...

$$\frac{\partial q_{55}^p}{\partial t} + \frac{\varphi_{55}}{\theta_{55}^p} q_{55}^p = \frac{D_{55}^p}{\theta_{55}^p} \varphi_{55} \sigma_5(t) \quad (5.32)$$

que é um sistema de equações diferenciais desacopladas lineares de primeira ordem que, juntamente com a condição inicial  $q_{ij}^p = 0$  para  $t = 0$ , pode ser resolvido numericamente através de procedimentos envolvendo diferenças finitas, como mostra a seção 5.4.

A solução do sistema de equações (5.32) leva à determinação das variáveis de estado  $q_{ij}^p$  e, assim, pode-se calcular as componentes de deformação viscoelástica através da equação (5.31).

## 5.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

### 5.4.1 Forma Incremental-Iterativa da Equação de Equilíbrio

A solução numérica do problema formulado na seção 5.2, correspondente à análise geometricamente não linear de uma estrutura, pode ser obtida através de um procedimento iterativo para o qual a equação incremental não linear de equilíbrio, em um passo incremental  $k+1$  (equação (5.10)) é escrita na forma

$$\left( \left[ {}_0^{k+1} \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[ {}_0^{k+1} \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right) \{ \mathbf{U} \}^i = \{ \mathbf{P} \}^{k+1} - \{ \mathbf{F} \}^{k+1, i-1} + \{ \mathbf{F}^v \}^i + \{ \mathbf{F}^T \}^i + \{ \mathbf{F}^H \}^i \quad (5.33)$$

onde o índice  $i$  indica o número do passo iterativo.

Na equação (5.33) os vetores de cargas viscoelástica, térmica e higroscópica são tomados como nulos para  $i \geq 2$ . Para a primeira iteração, ou seja,  $i=1$ , de cada passo incremental, estes vetores são determinados através das equações (5.14), (5.15) e (5.16), respectivamente.

A equação (5.33) pode ser escrita, em uma forma alternativa, como

$$\left( \left[ {}_0^{k+1} \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[ {}_0^{k+1} \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right) \{ \mathbf{U} \}^i = \Delta \lambda^i \{ \bar{\mathbf{P}} \} + \{ \mathbf{F} \}^{k+1, i-1} + \{ \mathbf{F}^v \}^i + \{ \mathbf{F}^T \}^i + \{ \mathbf{F}^H \}^i \quad (5.34)$$

onde  $\Delta \lambda^i$  é o fator de carga correspondente à iteração  $i$  do passo incremental  $k+1$ ,  $\{ \mathbf{F} \}^{k+1, i-1}$  é o vetor de forças desequilibradas no final da iteração  $i-1$  e  $\{ \bar{\mathbf{P}} \}$  representa um vetor de cargas externas de referência.

Na equação (5.34) os vetores de incrementos de cargas térmicas e higroscópicas são calculados através das equações (5.15) e (5.16), para a iteração  $i=1$ . Usa-se como incremento de deformações térmicas e higroscópicas os valores correspondentes aos incrementos de temperatura  $\Delta \lambda^1 \bar{T}$  e de concentração de umidade  $\Delta \lambda^1 \bar{H}$ , sendo  $\bar{T}$  e  $\bar{H}$  valores tomados como referência.

O vetor de incrementos de cargas viscoelásticas que aparece na equação (5.34) é determinado na iteração  $i=1$  para o intervalo de tempo  $\Delta t$  correspondente ao passo incremental  $k+1$ .

#### 5.4.2 Determinação dos Intervalos de Tempo na Análise Viscoelástica

Na presente formulação a definição dos intervalos de tempo correspondentes aos passos incrementais na análise viscoelástica, pode ser feita de duas maneiras. Na primeira delas, o intervalo de tempo é pré-estipulado e mantém-se constante ao longo da análise. Deve-se, contudo, ter cuidado pois a precisão dos resultados e a estabilidade do processo numérico dependem da grandeza dos intervalos de tempo adotados.

Na segunda maneira, a escolha dos intervalos de tempo é feita adotando-se um procedimento que considera intervalos de tempo crescentes. Este procedimento é bastante lógico, tendo em vista que as funções de fluência dos sólidos usuais apresentam como característica uma contínua redução de inclinação ao longo do tempo e, portanto, um mesmo incremento de deformação viscoelástica deve ocorrer para intervalos de tempo cada vez maiores. Desta forma, adotar um pequeno e constante intervalo de tempo poderia tornar desnecessariamente longa a análise.

A definição dos intervalos de tempo, neste segundo procedimento, é feita por meio de um processo que, partindo de um pequeno intervalo de tempo inicial, previamente escolhido, permite a obtenção automática dos demais intervalos de tempo, com valores progressivamente crescentes e sendo garantida a estabilização do processo numérico de avaliação das deformações viscoelásticas. No presente trabalho é adotado um processo auto-adaptável para definição dos intervalos de tempo na análise viscoelástica (Masuero, 1992).

Para descrever o processo acima mencionado, considera-se um sólido cujo comportamento viscoelástico seja modelado por um simples elemento Kelvin, com uma mola de constante  $E$  e um tempo de retardação  $\theta$  (figura 5.4).



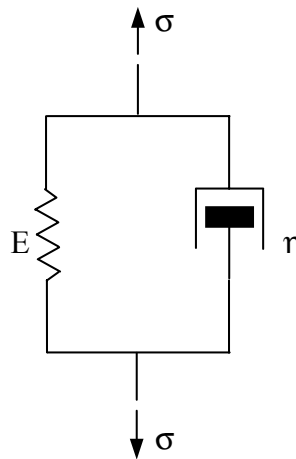


Figura 5.4 – Elemento Kelvin submetido à tensão axial

Admitindo-se uma tensão axial  $\sigma$  atuando sobre este modelo tem-se que a deformação viscoelástica no tempo  $t$  é dada por

$$\varepsilon^v(t) = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \right) \quad (5.35)$$

e, para o tempo  $t+\Delta t$

$$\varepsilon^v(t + \Delta t) = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - e^{-\frac{t+\Delta t}{\theta}} \right) \quad (5.36)$$

Subtraindo-se (5.35) de (5.36), chega-se ao incremento de deformação

$$\Delta\varepsilon^v(t + \Delta t) = \frac{\sigma}{E} e^{-\frac{t}{\theta}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta}} \right) \quad (5.37)$$

Fazendo os incrementos de deformação viscoelásticas, dados por (5.37), iguais a  $\Delta\varepsilon^v$  no tempo  $t=0$  e considerando o incremento de tempo inicial  $\Delta t_0$  como uma fração  $f$  do tempo de retardação  $\theta$  ( $\Delta t_0 = \theta/f$ ), obtém-se (Masuero, 1992)

$$\Delta t = -\theta \ln \left[ 1 - e^{\frac{t}{\theta}} + e^{\frac{t-1}{\theta}} \right] \quad (5.38)$$

O uso da equação (5.38) proporciona, em geral, valores crescentes de  $\Delta t$ , devido à forma da função de fluência. Mas, em alguns casos, quando a deformação viscoelástica total não é múltiplo inteiro da deformação viscoelástica correspondente ao intervalo de tempo inicial, a expressão entre colchetes que aparece em (5.38), resulta negativa. Quando isto acontecer, sugere-se que o mesmo intervalo de tempo do passo anterior seja adotado.

Quando o comportamento do material é modelado por uma ou mais cadeias de elementos Kelvin, ou equivalentemente por séries como aquelas dadas em (5.24), com diferentes tempos de retardação, pode-se adotar como o valor de  $\theta$ , na expressão (5.38), o menor tempo de retardação das cadeias, ou das séries.

Em análises de flambagem viscoelástica, a curva deslocamento x tempo, para cargas maiores que a carga de flambagem, apresenta um aumento de declividade com o passar do tempo. Por isso, a idéia de intervalos de tempo crescentes ao longo da análise, não reproduz bem o comportamento da estrutura nestes casos (Oliveira, 1999).

### 5.4.3 Métodos de Solução da Equação de Equilíbrio

Para solução numérica das equações de equilíbrio não-lineares (5.34), no presente programa computacional foram implementados dois métodos, o Método de Newton-Raphson e o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados proposto por Yang e Shieh (1990).

Ao empregar-se o Método de Newton-Raphson, o valor do fator de carga  $\Delta \lambda^i$  é previamente fixado. O desvantagem apresentada por este método é a impossibilidade de conduzir a análise em situações em que a matriz de rigidez tangente da estrutura deixa de ser definida positiva. Nestes casos, o processo numérico torna-se, em geral, divergente.

Utilizando-se o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, o vetor de incrementos de deslocamentos é decomposto da forma

$$\{U\}^i = \Delta\lambda^i \{U_1\}^i + \{U_2\}^i \quad (5.39)$$

sendo os vetores  $\{U_1\}^i$  e  $\{U_2\}^i$  dados por

$$\left\{ \left[ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} K_L \right]^{i-1} + \left[ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} K_{NL} \right]^{i-1} \right\} \{U_1\}^i = \{\bar{P}\} \quad (5.40)$$

$$\left\{ \left[ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} K_L \right]^{i-1} + \left[ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} K_{NL} \right]^{i-1} \right\} \{U_2\}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \Psi \right\}^{i-1} \quad (5.41)$$

As expressões propostas pelo método em questão para determinação dos fatores de carga nas iterações correspondentes ao passo genérico  $k$  são

$$\Delta\lambda_k^1 = \pm \Delta\lambda_1^1 \frac{\langle U_1 \rangle_1^1 \{U_1\}_1^1}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^1} \quad \text{para } i=1 \quad (5.42)$$

e

$$\Delta\lambda_k^i = - \frac{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_2\}_k^i}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^i} \quad \text{para } i \geq 2 \quad (5.43)$$

sendo que  $\Delta\lambda_1^1$  é o fator de carga inicial previamente estipulado e  $\langle \rangle$  indica vetor linha.

O Método de Controle por Deslocamentos Generalizados é particularmente apropriados para análise de estruturas em estágio pós-crítico. No programa computacional a que se refere o presente trabalho este método é utilizado somente se a análise for elástica, pois em análises viscoelásticas, normalmente, deseja-se estudar o comportamento das estruturas submetidas a uma carga constante, não sendo possível, desta forma, utilizar um método baseado na variação do fator de carga.

Em ambos os métodos admite-se como atingido o equilíbrio da estrutura no final da iteração  $i$  de um passo incremental genérico  $k$  se for satisfeito o seguinte critério de convergência

$$\frac{\|U^i\|}{\|U_a\|} \leq \rho \quad (5.44)$$

onde  $\|U^i\|$  é a norma euclidiana do vetor de incrementos de deslocamentos na iteração  $i$ ,  $\|U_a\|$  é a norma euclidiana do vetor de deslocamentos totais acumulados para a mesma iteração e  $\rho$  é um fator de tolerância.

#### 5.4.4 Avaliação das Variáveis de Estado

As deformações viscoelásticas são determinadas através das variáveis de estado obtidas da resolução do sistema de equações diferenciais (5.32) Para tanto, utiliza-se o procedimento numérico que é descrito a seguir.

É possível avaliar as variáveis de estado  $q_i^p$ , no tempo  $t+\Delta t$  como funções de seus valores no tempo  $t$ . Este procedimento de cálculo somente é válido quando são adotados intervalos de tempo para os quais os valores das componentes de tensão podem ser considerados praticamente constantes. Outros procedimentos para a solução numérica da equação (5.45) são apresentados por Creus(1986) e Masuero e Creus (1993).

##### 5.4.4.1 Amolecimento

Considerando a variável de estado  $q_i$  nos intervalos de tempo  $t$  e  $t+\Delta t$ .

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\eta_i(t)} e^{-(t-\tau)/\theta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (5.45)$$

$$q_i(t + \Delta t) = \int_{\tau_0}^{t+\Delta t} \frac{1}{\eta_i(t)} e^{-(t+\Delta t-\tau)/\theta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (5.46)$$

obtém-se

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\eta_i(\tau)} e^{-(t+\Delta t-\tau)/\theta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (5.47)$$

Considerando  $\sigma(\tau)$  constante em  $\Delta t$  e igual a  $\sigma(t)$ , é possível escrever

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \frac{\sigma(t)}{E_j(t)} (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (5.48)$$

#### 5.4.4.2 Comportamento em endurecimento

Similarmente ao caso de amolecimento, pode-se escrever

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i(t) + \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_j(t) + \dot{\eta}_i(t)} (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (5.49)$$

#### 5.4.4.3 Comportamento não linear

Neste caso, a relação constitutiva em termos de variáveis de estado pode ser expressa como

$$\dot{q}_i = -\frac{q_i(1 + \beta q_i)}{\theta_i} + \frac{\sigma}{\eta_i} \quad (5.50)$$

## 6 EXEMPLOS DE ANÁLISES

### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos nos quais consideram-se estruturas de materiais elásticos e viscoelásticos feitas em material compósito ou homogêneo. Alguns destes exemplos visam demonstrar as possibilidades e as limitações da presente formulação, bem como comparar seus resultados com outros obtidos analiticamente ou por outras formulações.

São apresentados exemplos de representação numérica do comportamento de materiais com envelhecimento. Os casos de endurecimento e amolecimento são considerados nas análises. Exemplos de vigas de parede delgada, análise não linear geométrica em flambagem elástica e viscoelástica e influência da umidade na carga de flambagem também são analisados.

Exemplos de análise de falhas progressivas em estruturas laminadas de materiais compósitos sob os efeitos do envelhecimento são apresentados. Estuda-se o comportamento da estrutura à medida que o envelhecimento altera as propriedades do material e as falhas avançam.

### 6.1 ANÁLISE DE UM LAMINADO SUJEITO A CARGA SENOIDAL

Este exemplo consiste na análise de um laminado quadrado de lado 'a' e espessura 'h', composto de quatro camadas orientadas a (0°/90°/90°/0°), as quais possuem iguais espessuras. A placa é simplesmente apoiada em todos os lados e está sujeita a uma carga de pressão senoidal, como está esquematizado na figura 6.1. A carga é dada pela seguinte equação

$$p_z = P \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (6.1)$$

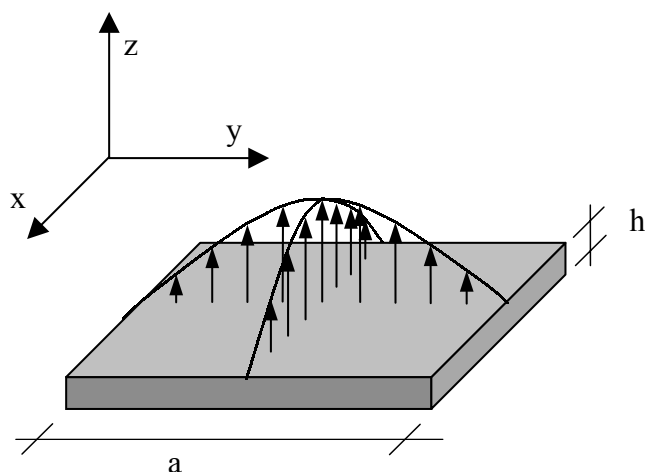


Figura 6.1 – Geometria e carga do laminado

Devido às considerações de simetria, somente um quarto da placa foi considerado na análise (figura 6.2).

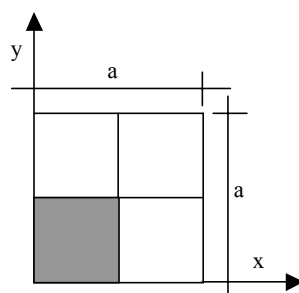


Figura 6.2 – Consideração de simetria

As propriedades do material são as seguintes

$$E_1 = 25,0 E_2$$

$$G_{12} = G_{13} = 0,5 E_2$$

$$G_{23} = 0,2 E_2$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

Para discretização da estrutura utilizou-se duas malhas com 121 nós, uma com 5x5 elementos de nove nós e integração reduzida (2x2 pontos de integração) e outra com 10x10 elementos de quatro nós e integração completa (2x2 pontos de integração). As referidas malhas são apresentadas na figura 6.3.

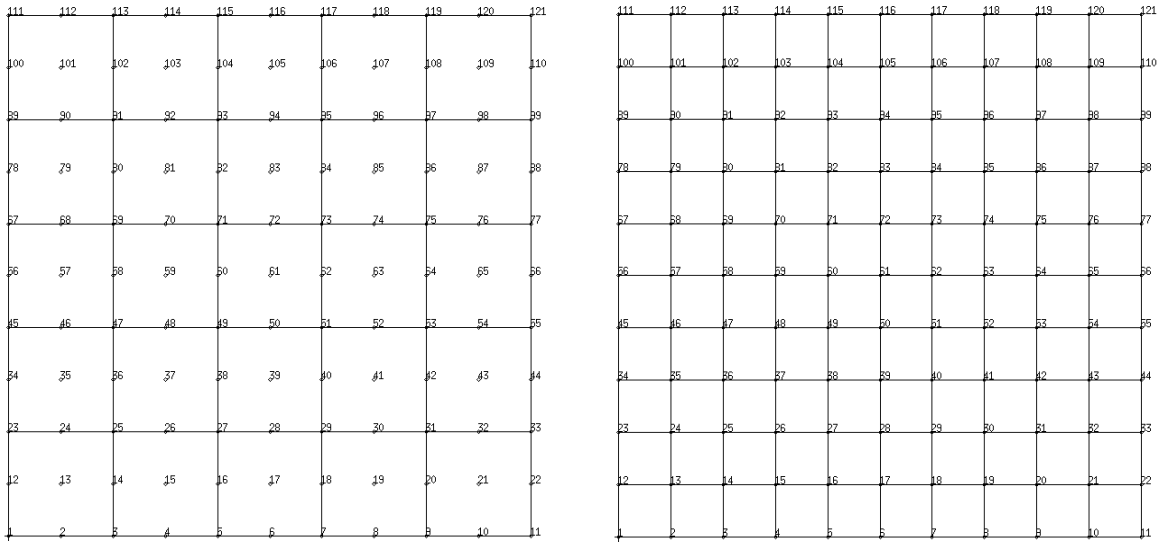


Figura 6.3 – Malhas de Elementos Finitos

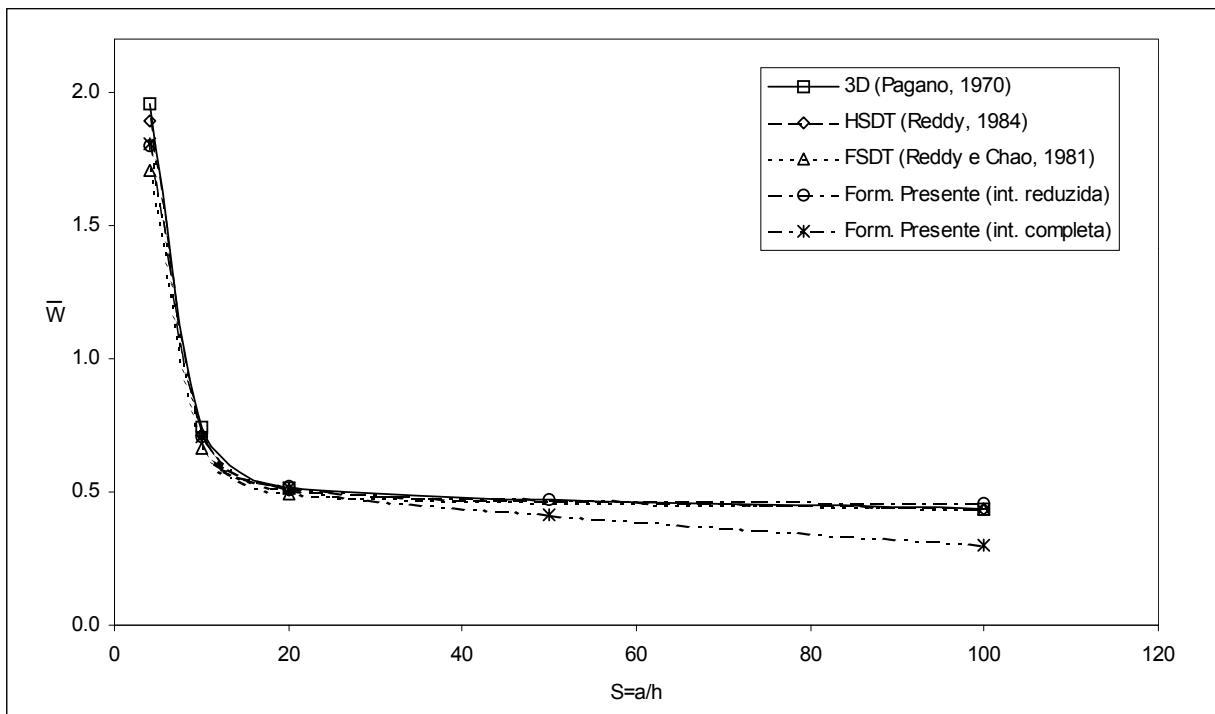


Figura 6.4 – Comparação entre soluções numérica e analítica para diferentes razões a/h.

A figura 6.4 mostra a comparação entre a deflexão adimensional resultante no centro da placa dada por

$$\bar{w} = \frac{10^2 w h^3 E_2}{P a^4} \tag{6.2}$$



para a formulação presente, a solução analítica dada pela “First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)” (Reddy e Chao, 1981), “Higher-Order Shear Deformation Theory (HSDT)” (Reddy, 1984) e a solução elástica tridimensional de Pagano (1970), para alguns valores da razão lado-espessura da placa.

Observando a figura 6.4 percebe-se que para placas espessas o modelo apresentado mostrou-se um pouco rígido para alcançar os resultados obtidos pela solução elástica tridimensional, enquanto que no caso de placas finas observou-se o fenômeno de travamento (“locking”), quando é utilizada integração completa. Tal fenômeno desaparece com a utilização de integração reduzida.

A configuração deformada da placa encontra-se representada na figura 6.5.

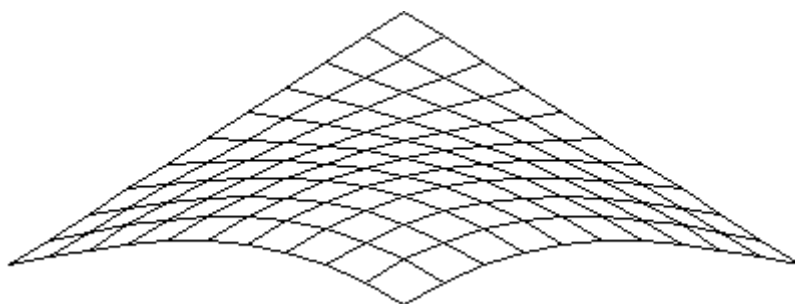


Figura 6.5 – Deformada da placa

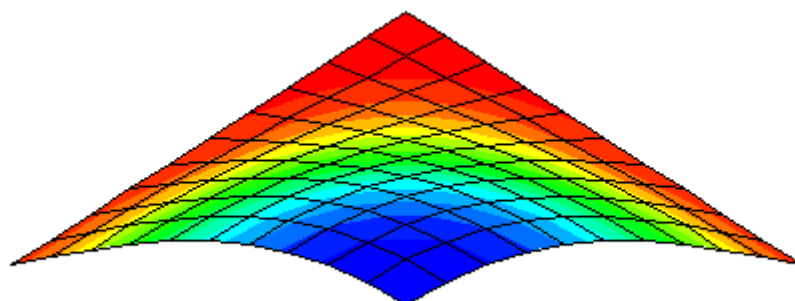


Figura 6.6 – Representação das tensões  $\sigma_{xx}$  da camada 1 sobre a configuração deformada

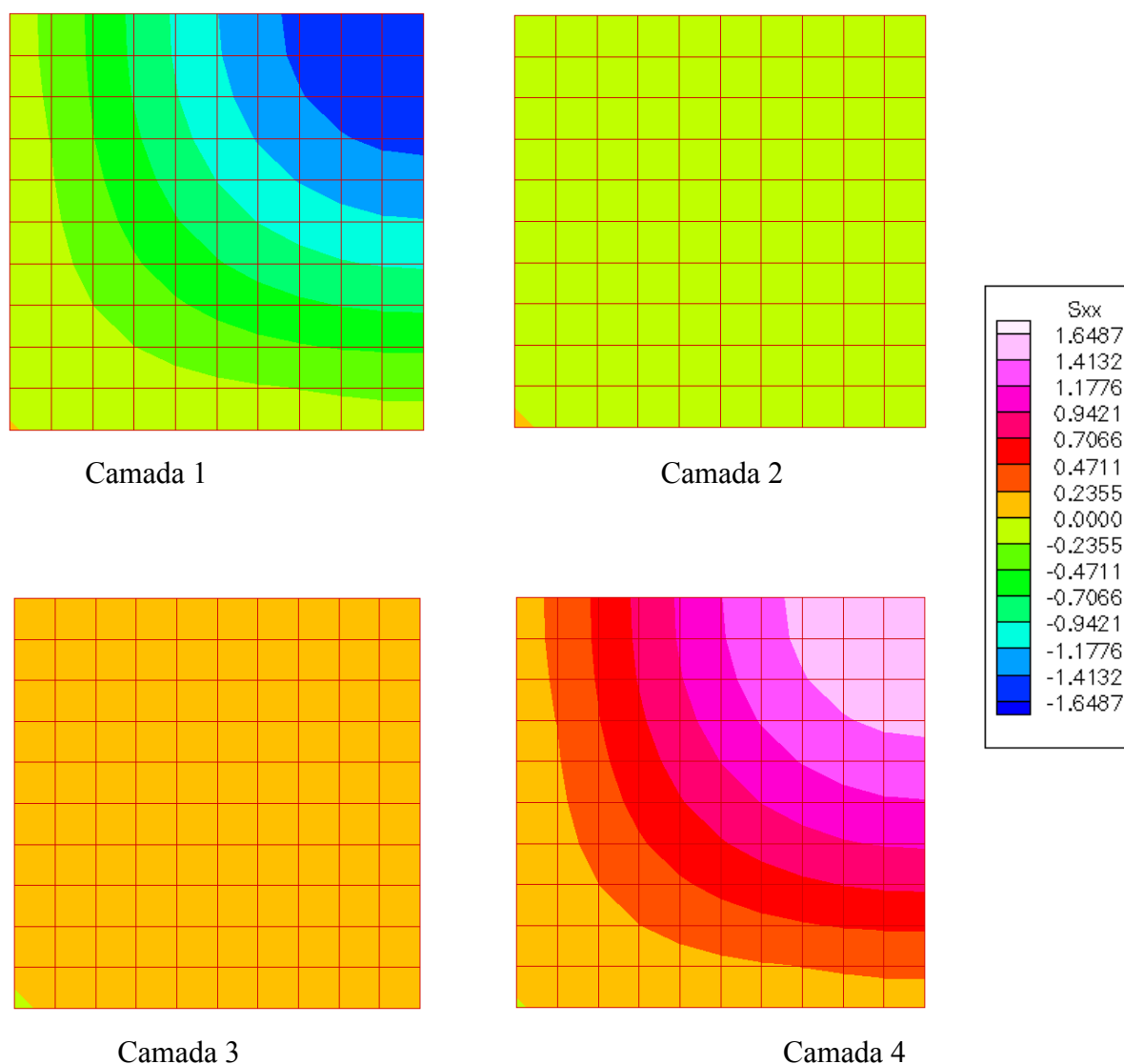


Figura 6.7 – Distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  nas várias camadas do laminado

Adotando-se o valor de  $E_2 = 19$  GPa, obteve-se valores numéricos para as propriedades da placa em estudo. As tensões  $\sigma_{xx}$  obtidas para a camada 1 do laminado aparecem representadas sobre a configuração deformada na figura 6.6.

A figura 6.7 mostra a distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  nas camadas constituintes do laminado e utilizou-se a mesma escala de cores para todas as camadas, o que fornece uma idéia global da distribuição das tensões no laminado. Os valores de tensões apresentados estão em MPa.

## 6.2 ANÁLISE DE UMA VIGA EM BALANÇO

Uma viga em balanço sujeita a uma carga  $P$  em sua extremidade livre, como mostra a figura 6.8, e feita de um material homogêneo e isotrópico, foi analisada e comparou-se os resultados numéricos com aqueles obtidos analiticamente.

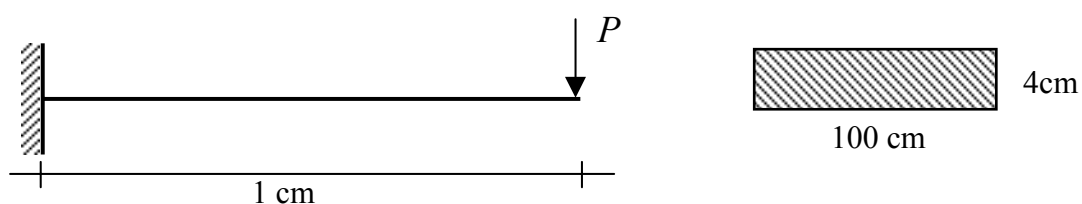


Figura 6.8 – Dimensões e carregamento da viga analisada

O material usado possui as seguintes propriedades

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

Na discretização da estrutura empregou-se uma malha de elementos de oito nós com 405 nós e 100 elementos com  $2 \times 2$  pontos de integração por camada. A malha em questão é mostrada na figura 6.9.

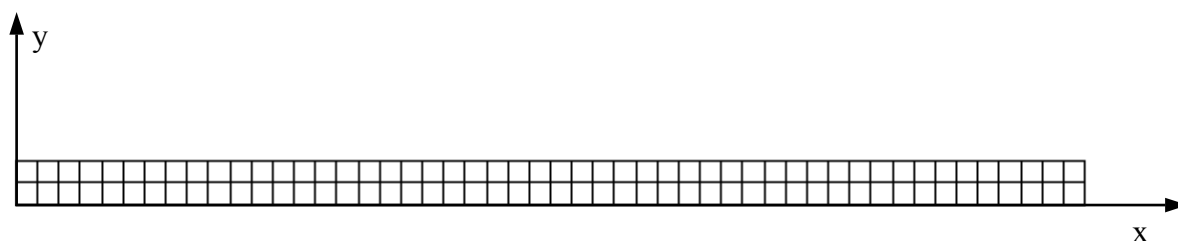


Figura 6.9 – Malha de elementos finitos

O deslocamento analítico no extremo livre da viga e a tensão  $\sigma_{xx}$  máxima na seção do engaste são dados, respectivamente, pelas equações (Popov, 1984)

$$v = \frac{P L^3}{3 E I} \quad (6.3)$$

$$\sigma = \frac{M y}{I} = \frac{P L y}{I} \quad (6.4)$$

sendo

L – comprimento da viga

I – momento de inércia da seção

Y – a distância da linha neutra da seção até a fibra mais afastada.

Aplicando-se uma carga  $P= 4$  N, obteve-se os resultados para o deslocamento na extremidade do balanço e tensão  $\sigma_{xx}$  no engaste mostrados na tabela abaixo.

	v (cm)	$\sigma_{xx}$ (MPa)
Analítico	0,200	6,00
Numérico (10 camadas)	0,202	5,43
Numérico (20 camadas)	0,200	5,69

Tabela 6.1 – Comparação entre resultados analíticos e numéricos

Observando-se os resultados apresentados na tabela 6.1, pode-se concluir que, como é de se esperar, uma vez que utiliza-se um critério de convergência em deslocamentos, uma discretização na espessura, ou seja, um número de camadas, que forneça bons resultados no que se refere aos deslocamentos, pode não representar de uma forma mais precisa a distribuição das tensões na seção.

A configuração deformada da viga é mostrada na figura 6.10, considerando-se a análise feita com dez camadas. Apresenta-se, ainda, na figura 6.11, a distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  na camada 10, ou seja, a camada superior da viga.

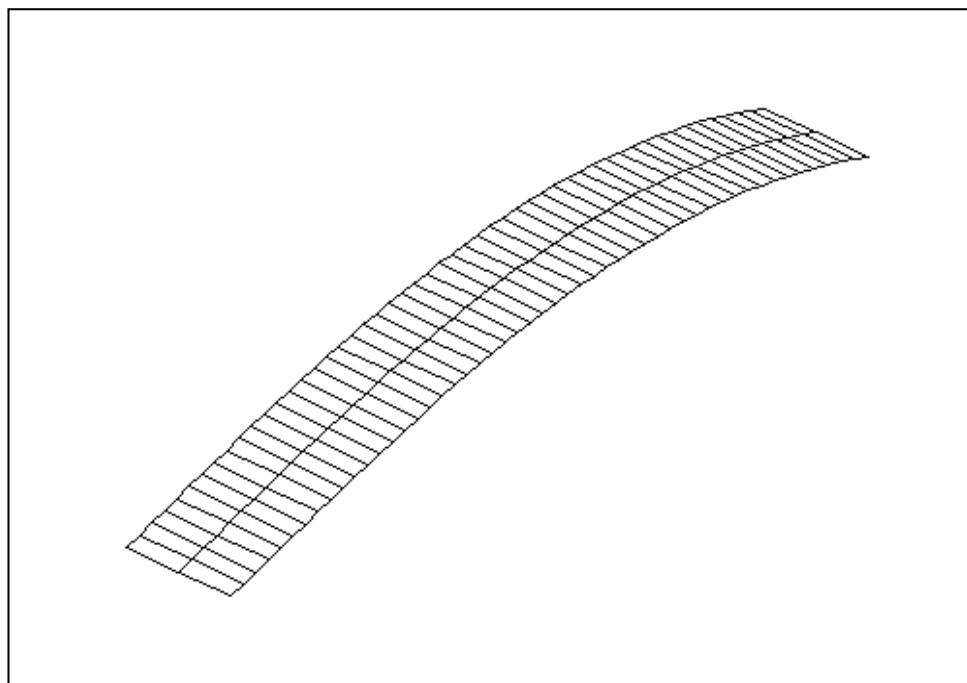


Figura 6.10 – Deformada do plano médio da viga

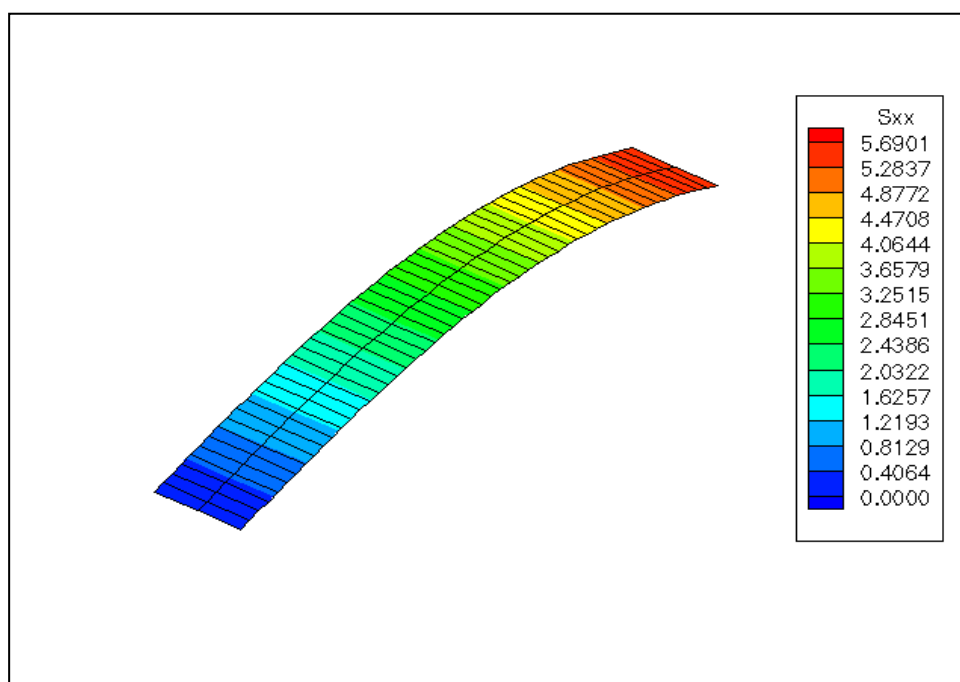


Figura 6.11 – Distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  na camada 10 da viga

### 6.3 ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA

Uma casca esférica de raio 'R' e espessura 't' está sujeita a um par de cargas como esquematizado na figura 6.12.

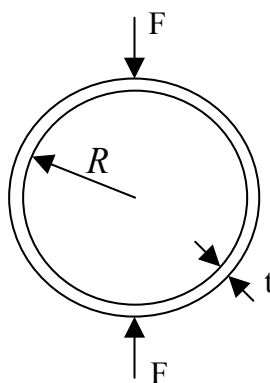


Figura 6.12 – Configuração de carga e geometria da casca esférica

A casca é feita de um material homogêneo e isotrópico. E, utilizando-se os seguintes valores numéricos

$$E = 100 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$F = 10,0 \text{ N}$$

$$R = 20,0 \text{ cm}$$

$$t = 0,4 \text{ cm}$$

fez-se a análise da casca pela presente formulação.

Devido às considerações de simetria, apenas um oitavo da casca foi considerado. A malha utilizada na análise possui 48 elementos de oito nós e é apresentada na figura 6.13. Utilizou-se 2x2 pontos de integração.

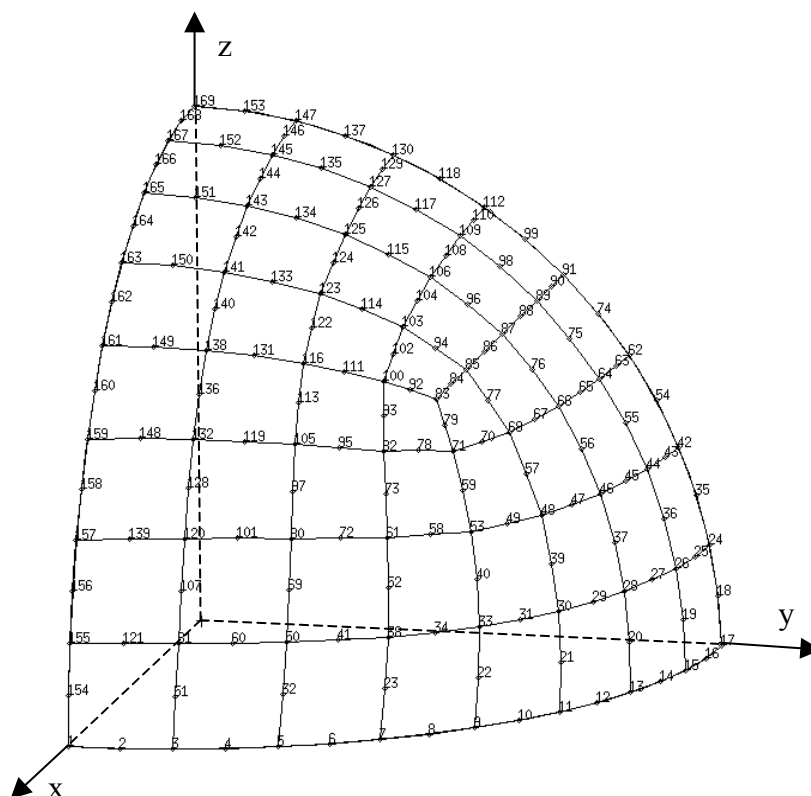


Figura 6.13 – Malha de elementos finitos para análise da casca esférica

O resultado para o deslocamento calculado no ponto de aplicação da carga é mostrado na tabela 6.2 em comparação com os resultados numéricos apresentados por Liu et al (1998), para malhas com 36 e 64 elementos, e com a solução analítica proposta por Koiter, citado por Liu et al (1998).

	$w_{\max}$ (cm)
form. Presente (48 elem.)	$5.02 \times 10^{-5}$
Liu et al (1998) (36 elem.)	$4.79 \times 10^{-5}$
Liu et al (1998) (64 elem.)	$5.06 \times 10^{-5}$
Solução analítica <sup>1</sup>	$5,15 \times 10^{-5}$

Tabela 6.2 – Resultados para o deslocamento no ponto de aplicação da carga

<sup>1</sup> No trabalho de Liu et al (1998), apresentou-se o valor do deslocamento calculado analiticamente como sendo de  $5,15 \times 10^5$  cm, caso seja esta a unidade adotada. Obviamente, o sinal negativo da potência de dez foi esquecido. O valor apresentado no tabela 6.2 já possui a necessária correção.

#### 6.4 ANÁLISE DE FALHAS PARA UMA LAMINADO SUJEITO À CARGA SENOIDAL

Um placa quadrada de lado 'a' e espessura 'h' feita de material laminado, possui quatro camadas iguais orientadas a ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). O carregamento é a mesma carga senoidal aplicada no exemplo 6.1 (ver figura 6.1) e a placa é simplesmente apoiada. Utilizou-se o Critério de Lee para a análise de falhas.

Propriedades do material:

$$E_1 = 180,00 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10,60 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7,56 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,28$$

Propriedades de resistência:

$$X_t = 1500 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1500 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 40 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 250 \text{ MPa}$$

$$S_A = 68 \text{ MPa}$$

$$S_T = 68 \text{ MPa}$$

Devido à considerações de simetria somente um quarto do laminado foi analisado. As malhas utilizadas na discretização foram as mesmas do exemplo 6.1, ou seja, duas malhas com 121 nós, uma com 5x5 elementos de nove nós e integração reduzida e outra com 10x10 elementos de quatro nós e integração completa.

A variação da carga de falha última do laminado pelo Critério de Lee em função da razão lado/espessura é apresentada nas figuras 6.14 e 6.15. Os resultados obtidos com a formulação presente para as duas malhas analisadas, são mostrados em comparação com os resultados numéricos obtidos por Cheung e Akhras (1995).



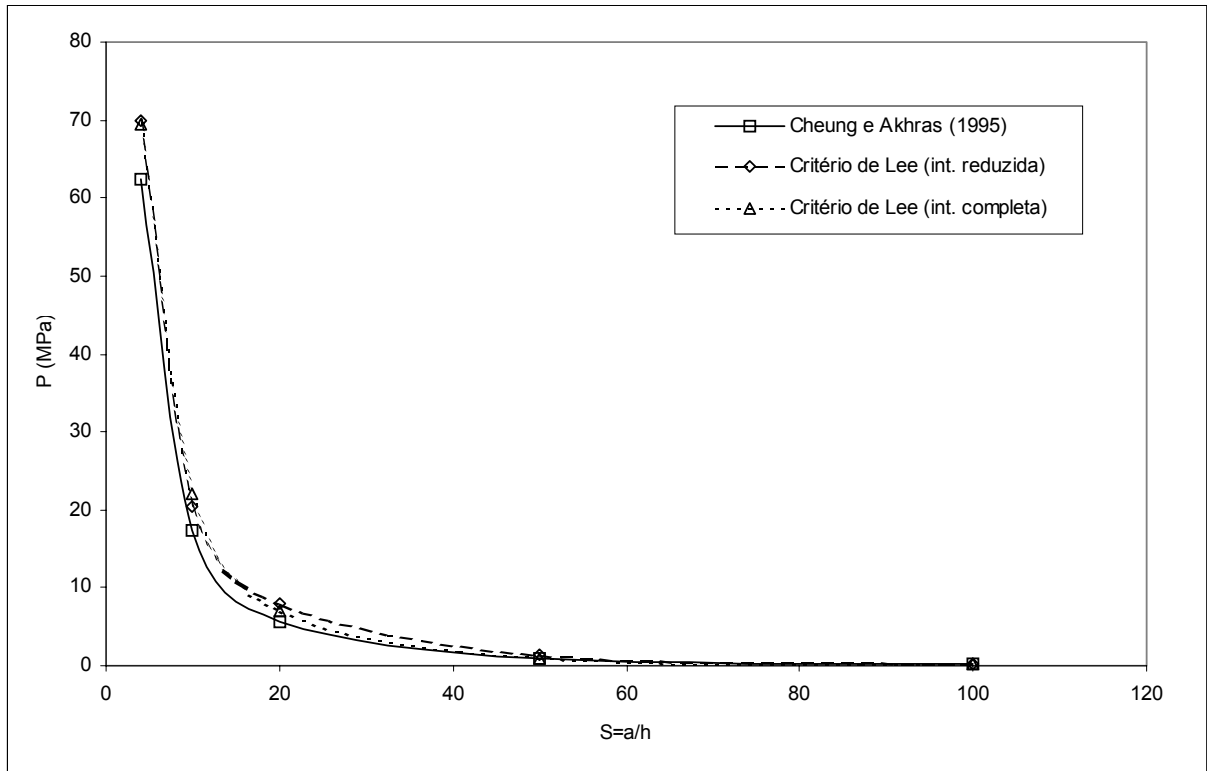


Figura 6.14 – Variação da carga última com a razão lado /espessura

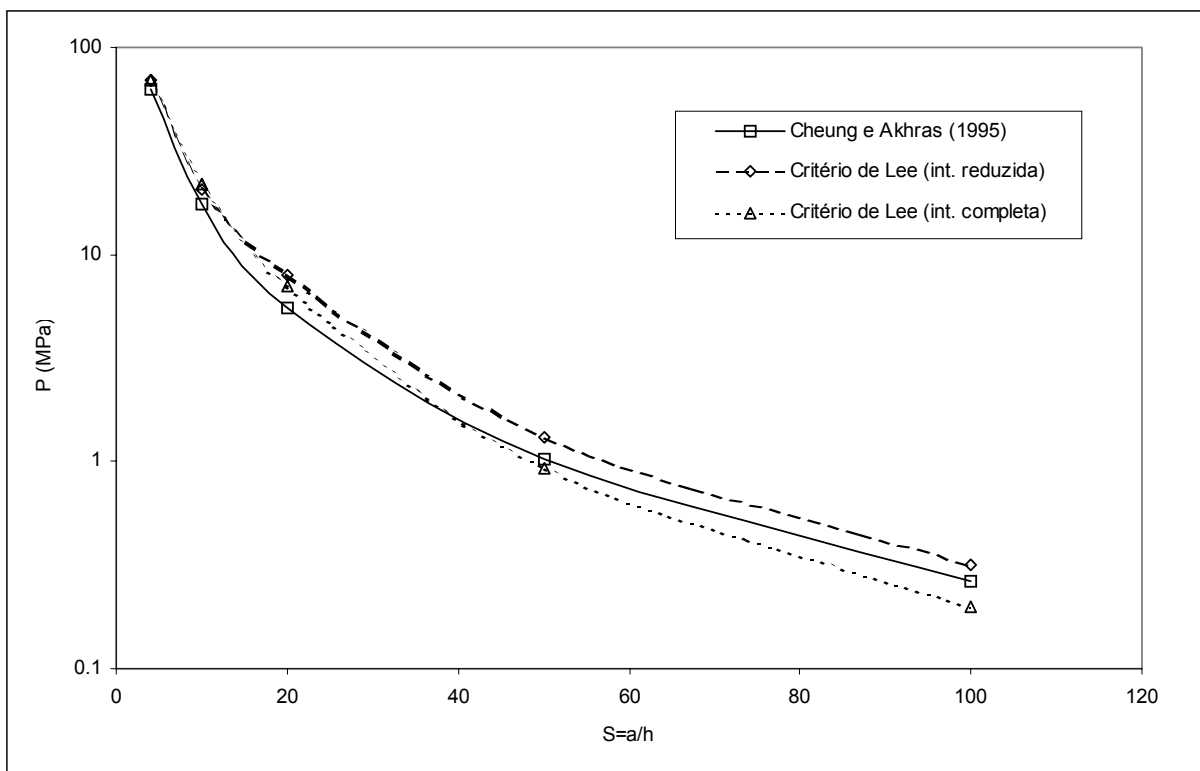


Figura 6.15 – Variação da carga última, em escala logarítmica, com a razão lado/espessura

No gráfico da figura 6.15 onde apresenta-se a carga última em escala logarítmica, pode-se observar o fenômeno de “locking” quando não é utilizada integração reduzida.

Após isto analisou-se o mesmo exemplo porém utilizando-se o Critério da Máxima Deformação. Como não se dispunha dos limites de deformação do material, usou-se a seguinte aproximação

$$X_{\varepsilon t} = X_t/E_1 = 1500 \text{ MPa}/180,00 \text{ GPa} = 8,3333$$

$$X_{\varepsilon c} = X_c/E_1 = 1500 \text{ MPa} /180,00 \text{ GPa} = 8,3333$$

$$Y_{\varepsilon t} = Y_t/ E_2 = 40 \text{ MPa} /10,60 \text{ GPa} = 3,7736$$

$$Y_{\varepsilon c} = Y_c/ E_2 = 250 \text{ MPa} /10,60 \text{ GPa} = 2,3585 \times 10^1$$

$$S_{\varepsilon A} = S_A/G_{12} = 68 \text{ MPa} /7,76 \text{ GPa} = 8,7629$$

$$S_{\varepsilon T} = S_T/G_{23} = 68 \text{ MPa} /7,76 \text{ GPa} = 8,7629$$

Os resultados de carga última e sua comparação com os resultados obtidos com o Critério de Lee para a presente formulação e para Cheung e Akhras (1995), são apresentados nas figuras 6.16 e 6.17.

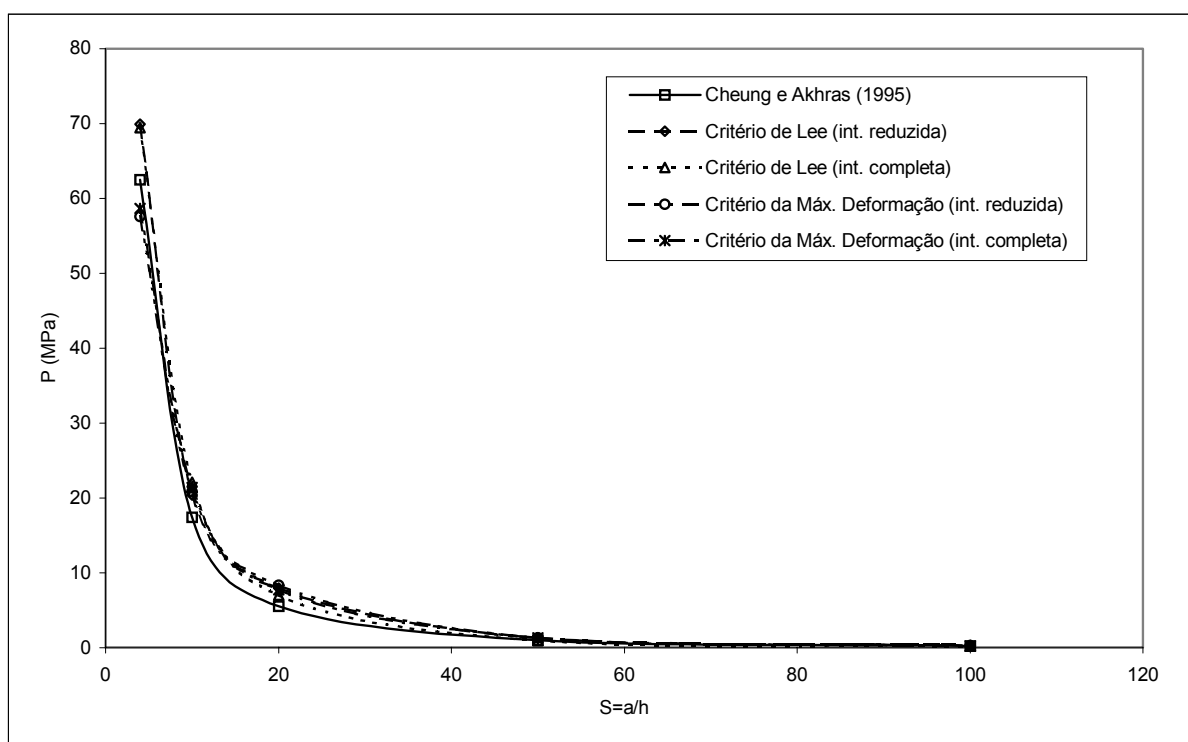


Figura 6.16 – Comparação entre cargas últimas obtidas com o Critério de Lee e Critério da Máxima Deformação

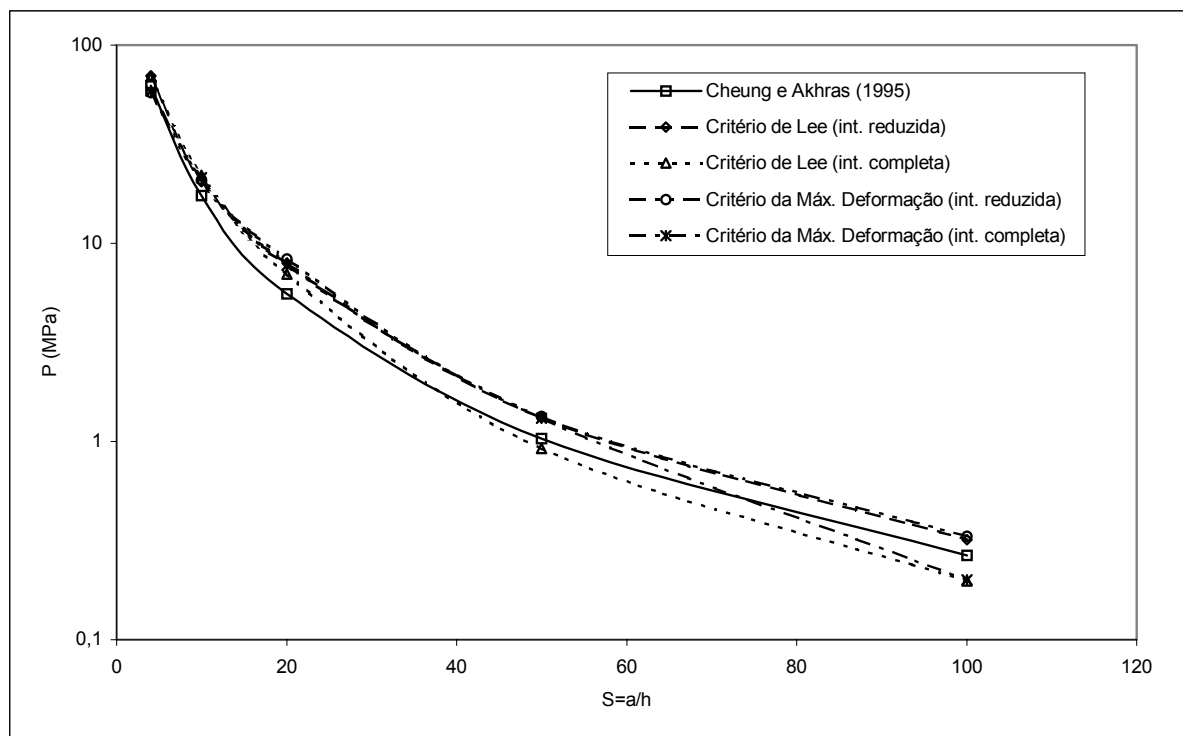


Figura 6.17 – Comparação entre cargas últimas em escala logarítmica obtidas com o Critério de Lee e Critério da Máxima Deformação

Como pode ser observado nos gráficos das figuras anteriores, o Critério da Máxima Deformação fornece resultados coerentes com outras formulações.

## 6.5 ANÁLISE DE VIGA I EM MATERIAL COMPÓSITO VISCOELÁSTICO

A viga de seção I mostrada na figura 6.19 é feita de um material compósito que apresenta comportamento viscoelástico linear representado por Modelo Standard (figura 6.18). As propriedades do material são as seguintes:

$$E_{11}=76,0 \text{ GPa}$$

$$E_{22}=5,56 \text{ GPa}$$

$$G_{12}=G_{13}=2,30 \text{ GPa}$$

$$G_{23}=1,56 \text{ GPa}$$

$$\nu=0,34$$

$$\theta=10 \text{ seg.}$$

A seqüência de laminação é  $(+30/-30/0)_s$ .

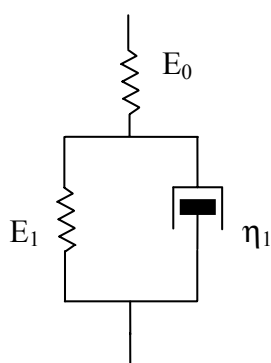


Figura 6.18 – Modelo Standard

A viga foi discretizada através da malha apresentada na figura 6.20. O resultado obtido para o deslocamento  $v$  no extremo livre da viga no instante inicial foi 14,02 mm. O resultado apresentado por Barbero (1998) é de 13,41 mm.

A figura 6.21 mostra a distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  em MPa no instante inicial sobre a configuração deformada da viga na primeira camada do laminado. A curva deslocamentos em função do tempo é mostrada na figura 6.22 e pode-se perceber o efeito da viscoelasticidade do material.

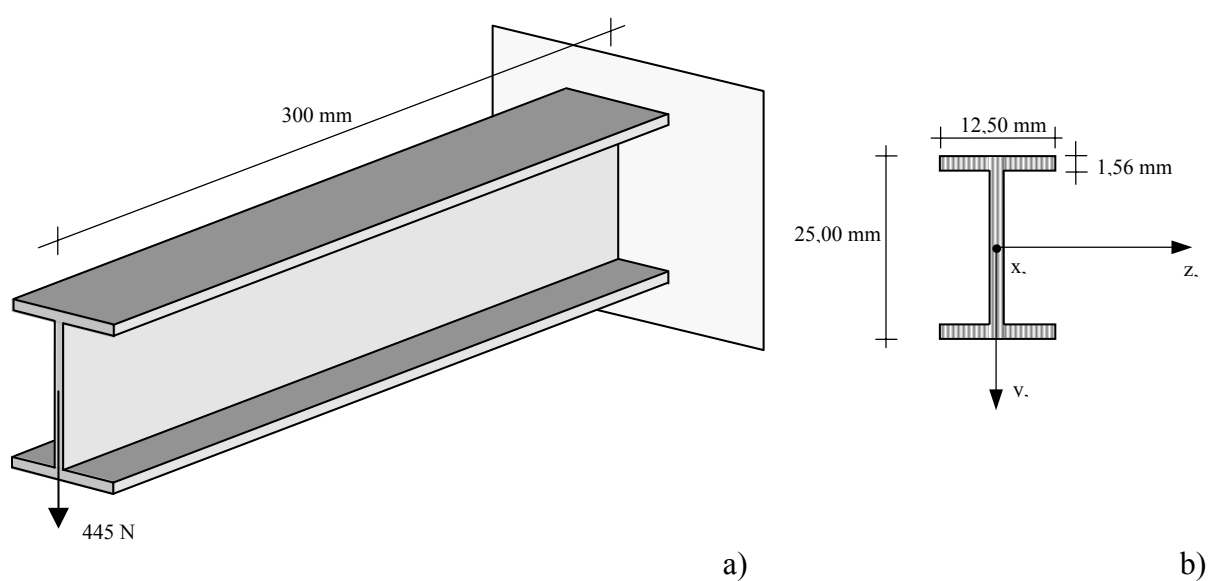


Figura. 6.19 - Viga I a) Geometria e carregamento b) Seção transversal

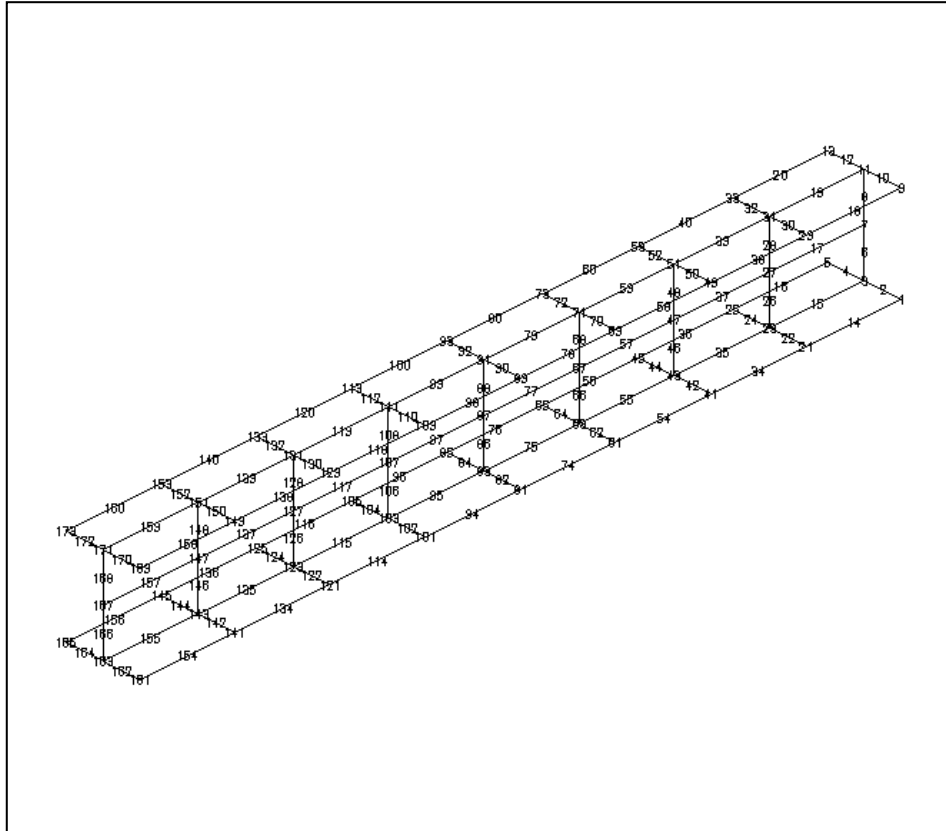


Figura 6.20 - Malha de elementos finitos

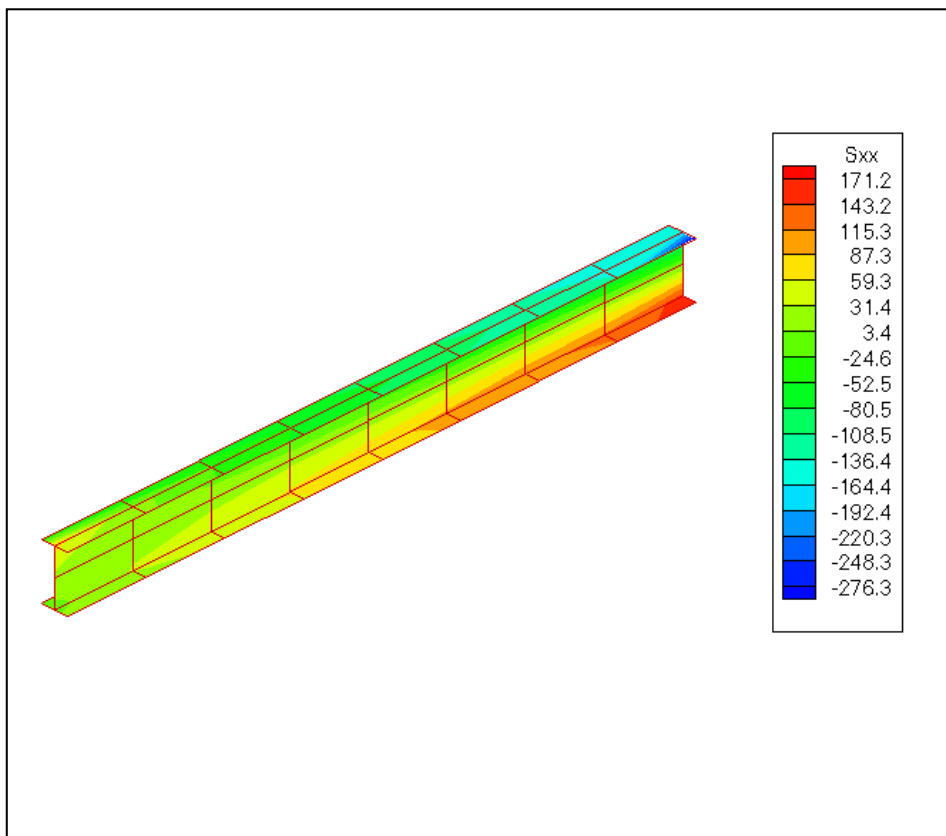


Figura 6.21 – Tensões  $\sigma_{xx}$  em MPa sobre a configuração deformada

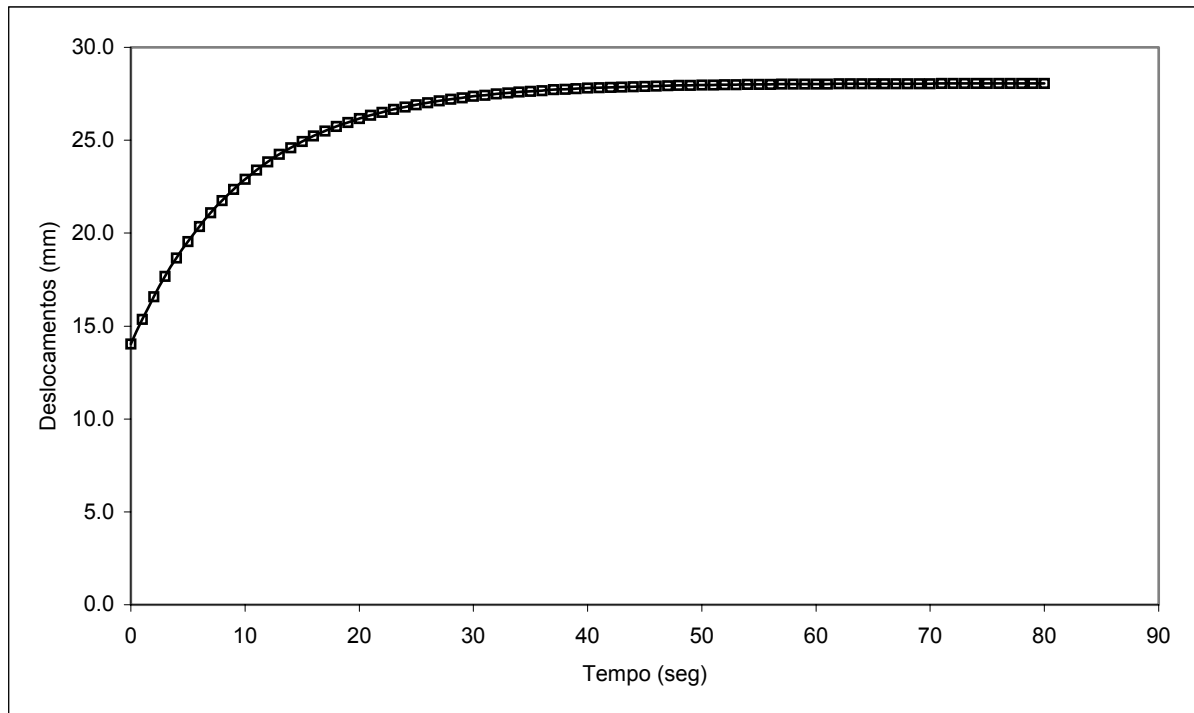


Figura 6.22 – Deslocamentos em função do tempo

## 6.6 ANÁLISE PLÁSTICA DE UMA PLACA DE MATERIAL LAMINADO

No presente exemplo é feita a análise plástica da placa mostrada na figura 6.23. A placa é constituída de um material laminado como ilustrado na figura 6.24. As camadas 1 e 4 são constituídas por um material com tensão de escoamento  $\sigma_e = 900 \text{ MPa}$  e as camadas 2 e 3 por um material com  $\sigma_e = 300 \text{ MPa}$ . Ambos os materiais possuem  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ .

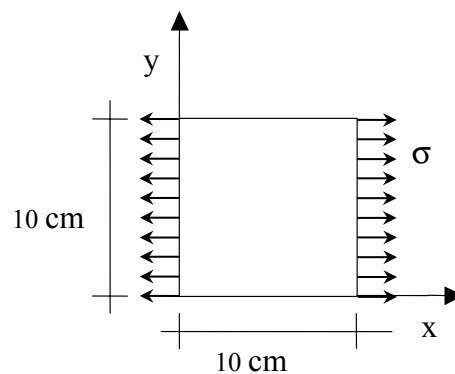


Figura 6.23 – Geometria e carregamento da estrutura

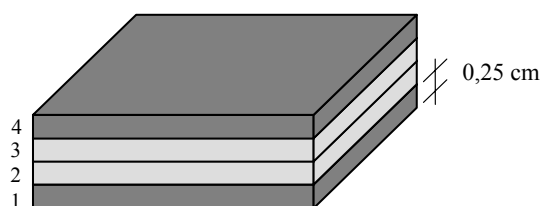


Figura 6.24 – Disposição do laminado

Os resultados obtidos na análise são mostrados nas figuras 6.25 e 6.26, para as duas formulações plásticas disponíveis no modelo. Pode-se observar que, com a utilização da formulação plástica proposta por Groehs e Creus (1977), o dano introduzido na matriz constitutiva do material é mais significativo.

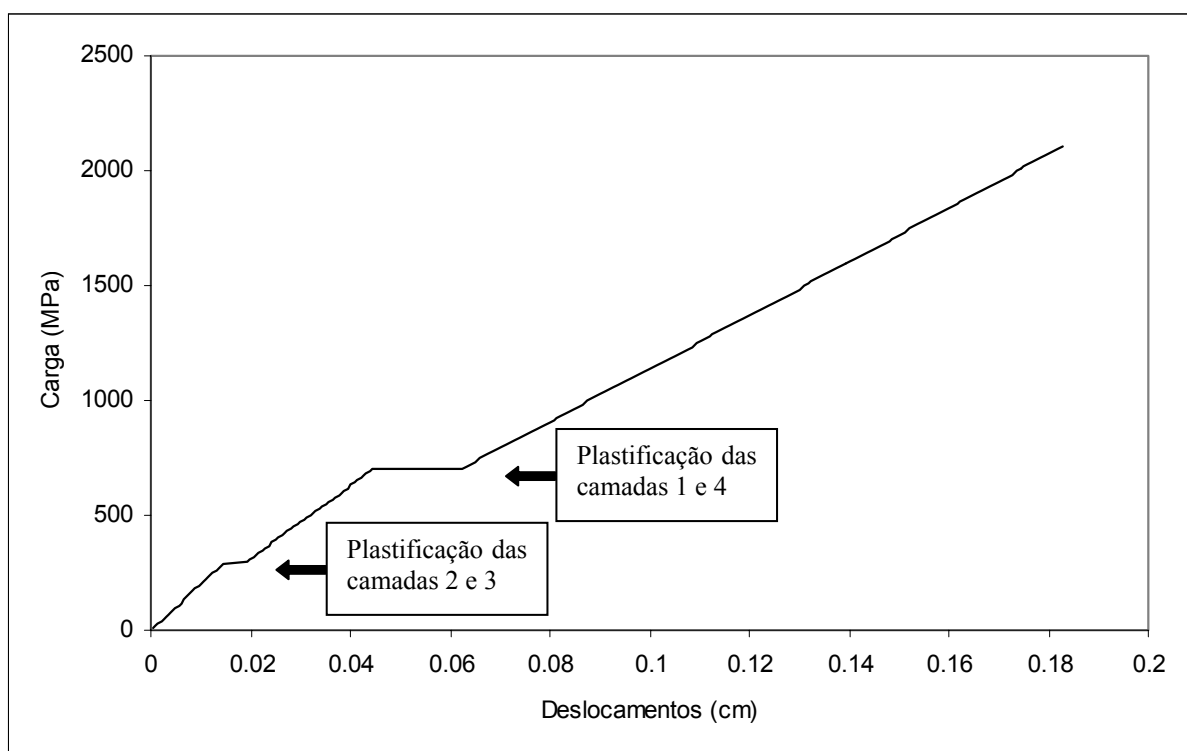


Figura 6.25 – Curva Carga x Deslocamento considerando uma redução de 40% no módulo de elasticidade após a plastificação de cada par de camadas

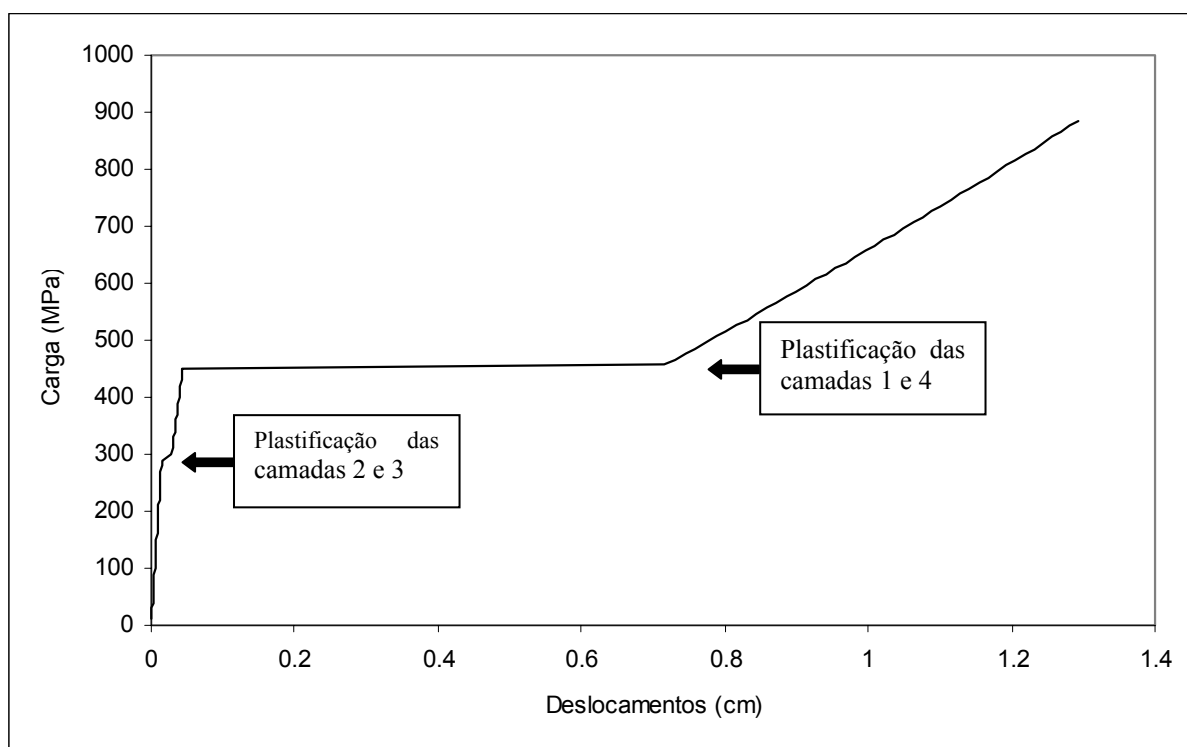


Figura 6.26 – Curva Carga x Deslocamento considerando a formulação plástica apresentada por Groehs e Creus (1977) após a plastificação de cada par de camadas

## 6.7 ANÁLISE PLÁSTICA COM FALHAS PROGRESSIVAS

Este exemplo trata da análise de um placa engastada-livre submetida à flexão como mostra a figura 6.27. A placa é quadrada com 10 cm de lado e é constituída conforme mostrado na figura 6.28. O material da parte superior (concreto) possui  $E = 20 \text{ GPa}$  e o material da fina camada inferior (aço) possui  $E=200\text{GPa}$ . Foi considerado  $\nu = 0$ .

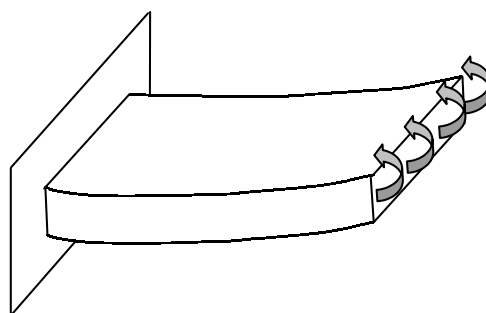


Figura 6.27 - Placa engastada-livre submetida à flexão



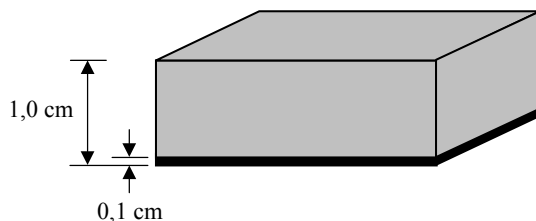


Figura 6.28 – Placa de concreto com a última camada em aço

O concreto está sujeito a falhas. Adotou-se uma resistência à tração de 3 MPa e uma resistência à compressão de 30 MPa. O aço possui uma tensão de escoamento de 300 MPa.

Para a análise de falhas progressivas foi empregado o Critério de Hashin. A parte de concreto foi discretizada em dez camadas enquanto que o aço corresponde a uma única camada.

Os resultados obtidos são apresentados na figura 6.29. No gráfico pode-se observar a perda de rigidez devido à falha das camadas tracionadas do concreto e, com a plastificação da camada de aço tem-se o colapso da estrutura.

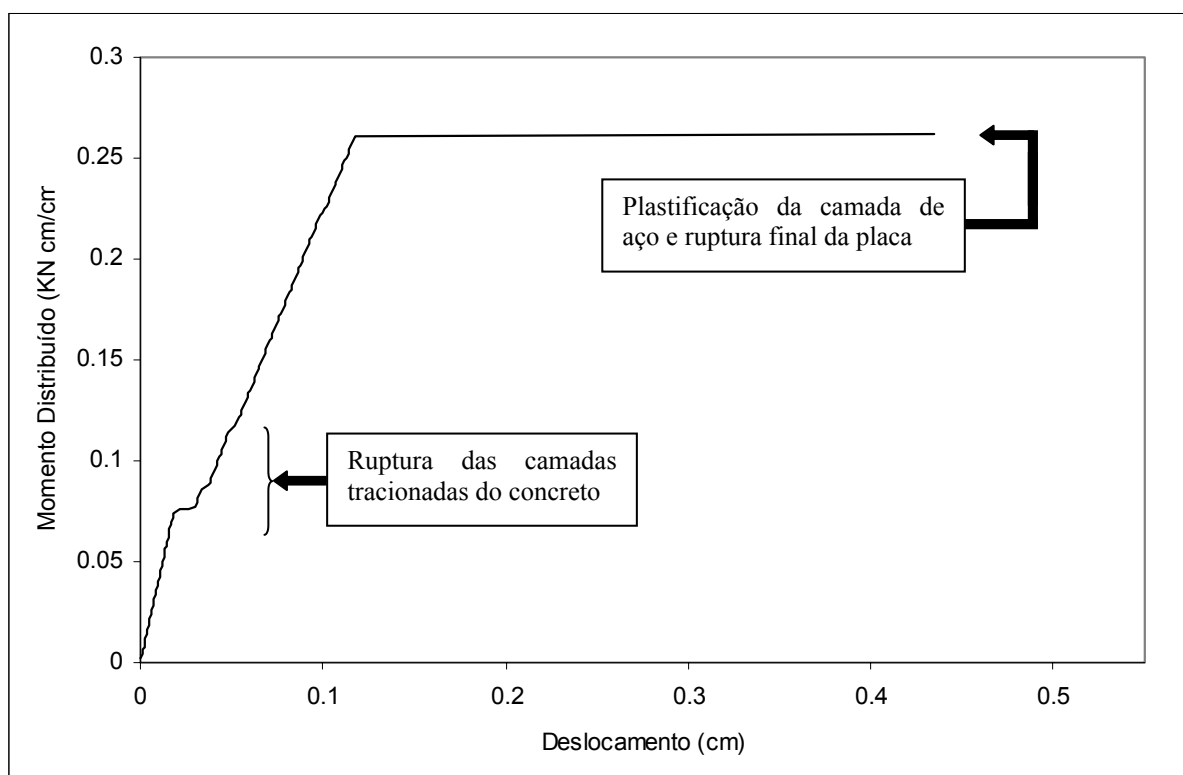


Figura 6.29 - Curva Carga x Deslocamento no extremo livre da placa

## 6.8 ANÁLISE VISCOELÁSTICA NÃO LINEAR

Este exemplo visa demonstrar a eficiência da presente formulação na representação do comportamento viscoelástico não linear das estruturas. Tal representação pode ser usada na modelagem do fenômeno fadiga estática, que ocorre em materiais sujeitos aos efeitos do envelhecimento.

Uma placa laminada quadrada com 10 cm de lado e 0,2 cm de espessura, foi discretizada por meio de uma malha de 2x2 elementos de nove nós com 2x2 pontos de integração. O material do qual a placa é constituída apresenta comportamento viscoelástico não linear representado pelo modelo mostrado na figura 6.30.

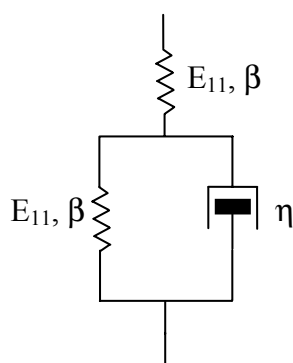


Figura 6.30 – Modelo Standard não linear

As propriedades do material são as seguintes:

$$E_{11} = 2 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,30$$

$$\theta = 100 \text{ min}$$

É aplicada uma tração constante de  $3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  na placa (ver figura 6.31). As curvas apresentadas na figura 6.32 apresentam a comparação entre os comportamento viscoelástico linear e não linear. As curvas de viscoelasticidade não linear foram obtida para três diferentes valores de  $\beta$ .

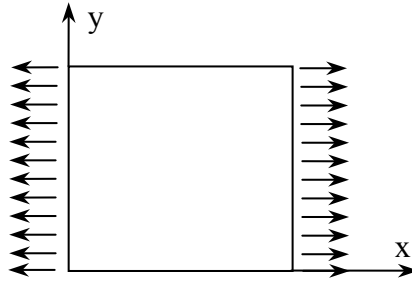


Figura 6.31 – Condição de carregamento

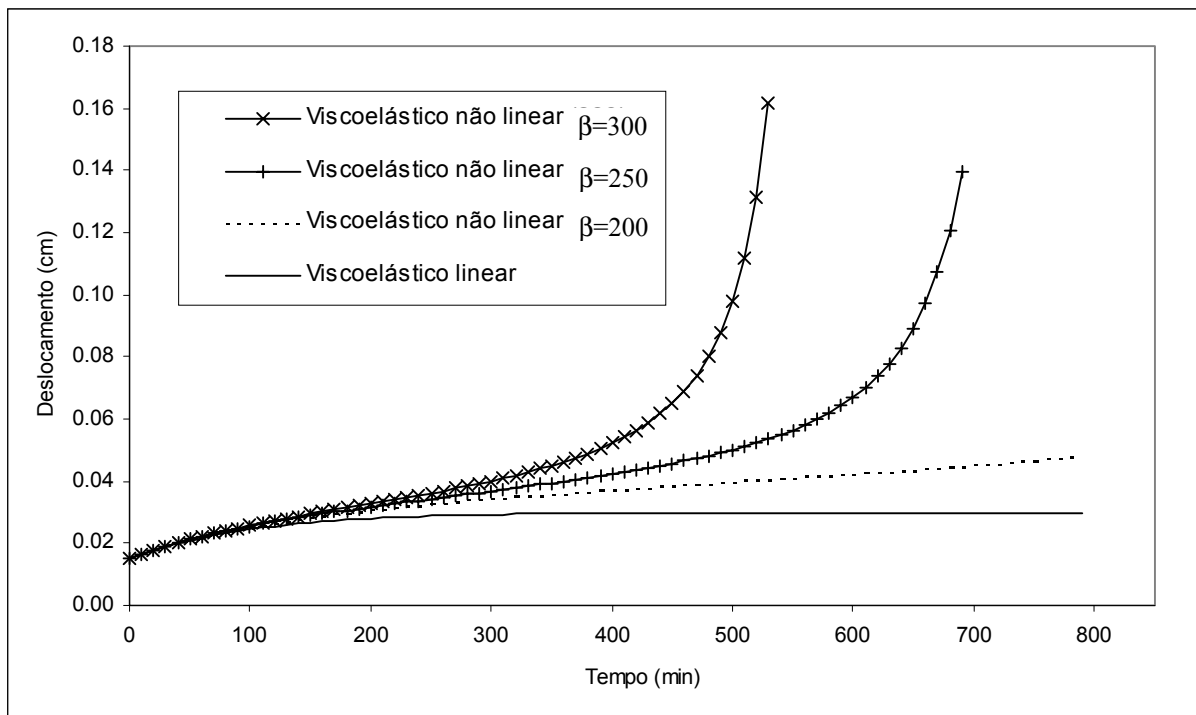


Figura 6.32 – Deslocamento em função do tempo

## 6.9 COMPARAÇÃO ENTRE COMPORTAMENTOS DE ENVELHECIMENTO EM ENDURECIMENTO E AMOLECIMENTO

Uma placa quadrada com 1 m de lado e 0,1 m de espessura, feita de um material homogêneo e isotrópico, está sujeita a uma carga de tração como no caso do exemplo anterior (figura 6.31).

Os casos de envelhecimento com endurecimento e amolecimento são considerados na análise. No caso de endurecimento, o módulo elástico é dado pela equação (6.5) e no caso de amolecimento, é dado pela equação (6.6).

$$E(t) = E_0 + E_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} \right) \quad (6.5)$$

$$E(t) = E_0 - E_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} \right) \quad (6.6)$$

Sendo  $E_1 = 200$  GPa,  $E_2 = 100$  GPa e  $\alpha = 100$  seg. A figura 6.33 mostra o módulo de elasticidade em função do tempo para endurecimento e amolecimento.

A carga de tensão é aplicada com mostrado na figura 6.34. No tempo  $t=0$ , é aplicado  $10 \text{ N/m}^2$  e no tempo  $t=221$  dias, é aplicado mais  $10 \text{ N/m}^2$ .

A figura 6.35 mostra as curvas de deslocamentos em função do tempo para os casos de amolecimento e endurecimento, obtidas com o presente modelo em comparação com resultados analíticos. Os resultados ilustram muito bem as duas situações de envelhecimento em estudo. Quando o material sofre amolecimento devido ao envelhecimento, mesma sob carga constante, os deslocamentos aumentam. Quando o material endurece com o tempo de envelhecimento, os deslocamentos, obviamente, não diminuem. O enrijecimento da estrutura ocorre na configuração deformada.

Os resultados analíticos para endurecimento e amolecimento são obtidos através das equações (6.7) e (6.8) respectivamente.

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} \quad (6.7)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} - \frac{\sigma(t)\dot{E}(t)}{E^2(t)} \quad (6.8)$$

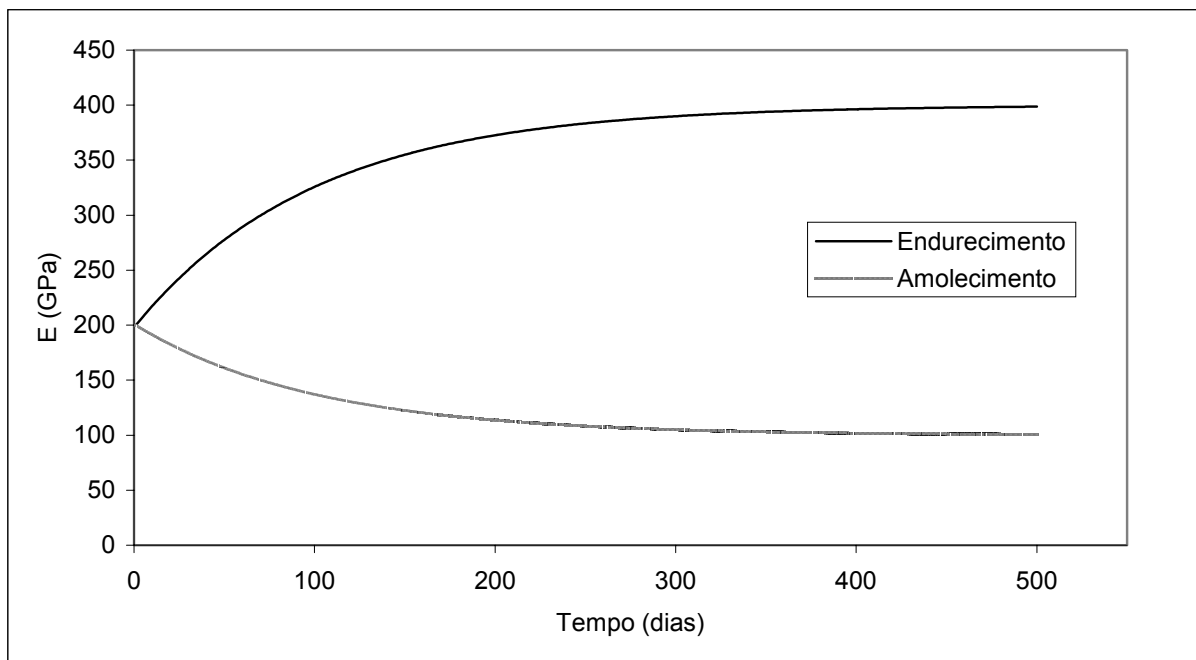


Figura 6.33 – Variação do módulo de elasticidade em função do tempo

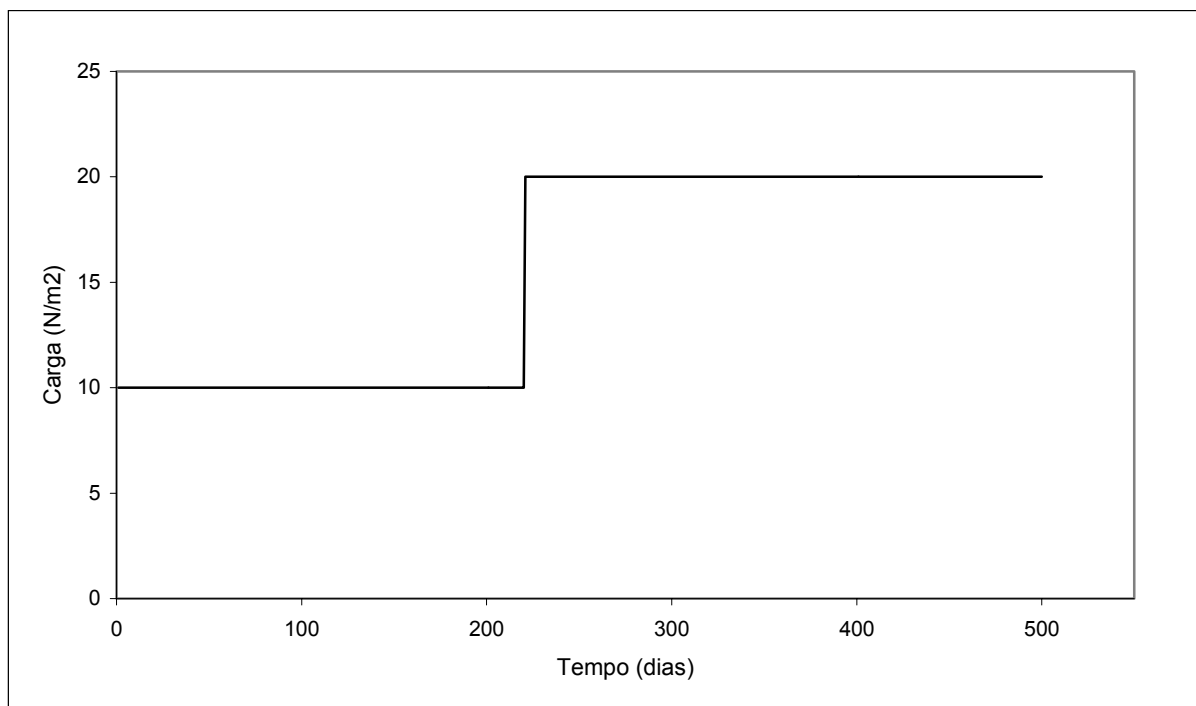


Figura 6.34 – História de carregamento

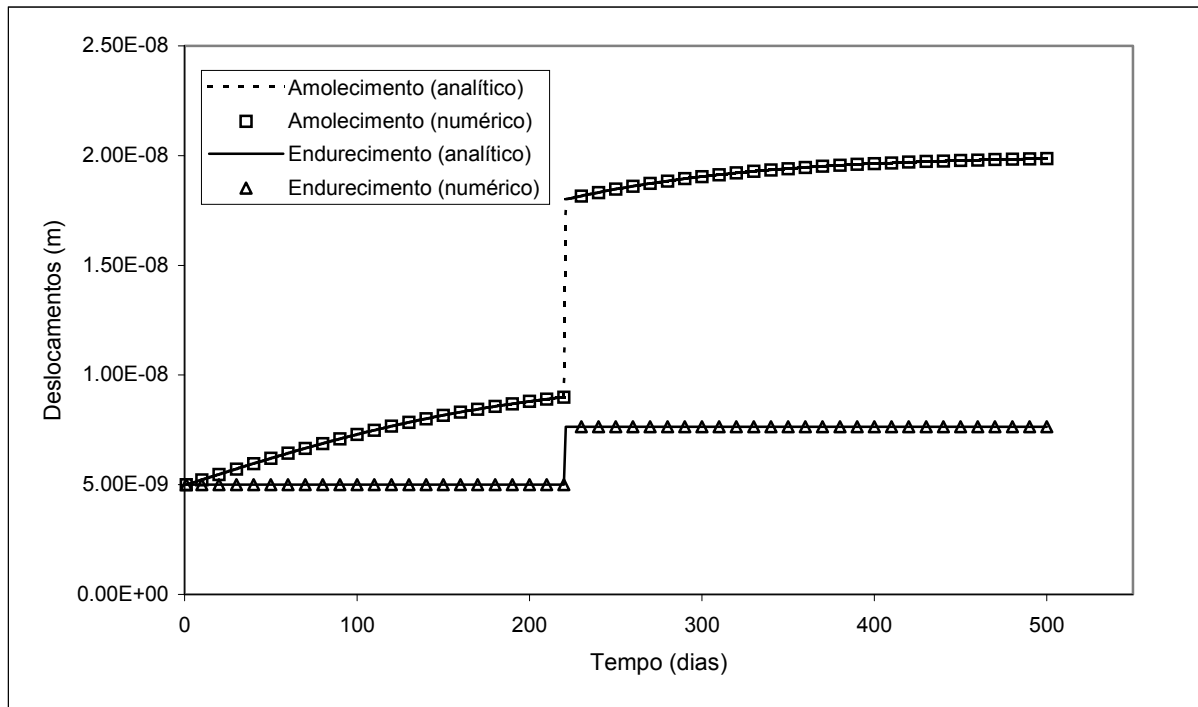


Figura 6.35 – Curvas deslocamentos x tempo

## 6.10 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA COM ENVELHECIMENTO

Um painel feito de um material homogêneo e isotrópico, com as dimensões especificadas na figura 6.36 e uma deflexão inicial na direção z dada por

$$w_0(x) = b_0 \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right); \quad b_0 = 0,2 \text{cm} \quad (6.9)$$

está sujeito a uma carga de compressão na direção x em ambos os extremos.

Devido à simetria observada tanto na geometria quanto no carregamento, somente metade do painel foi analisado. A figura 6.36a mostra a malha utilizada na discretização do painel.

As deflexões adicionais do painel devido à carga de compressão podem ser calculadas analiticamente através da seguinte equação

$$w(x, t) = b(t) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (6.10)$$

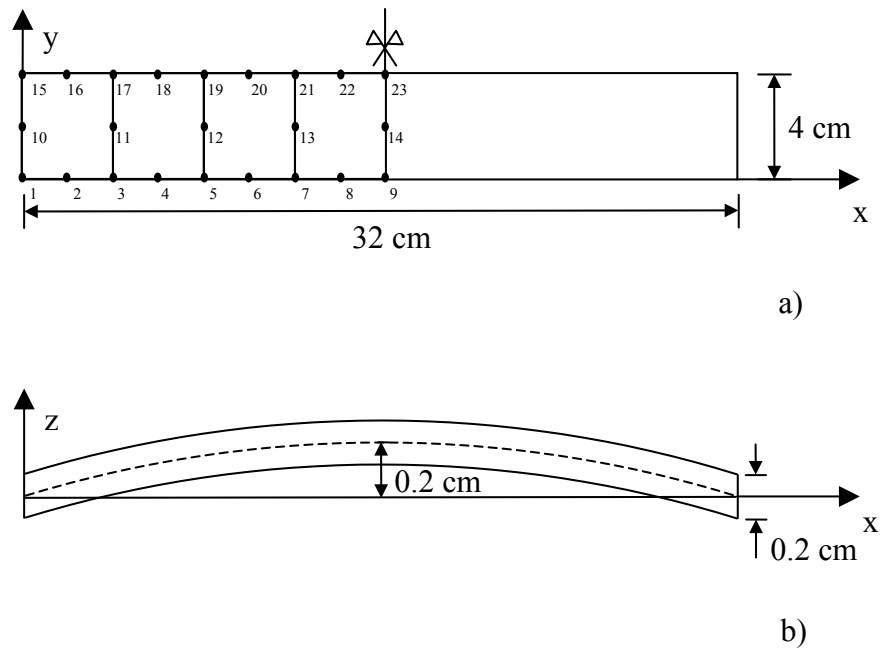


Figura 6.36 – Geometria do painel. a) vista do plano xy e malha empregada; b) vista do plano xz e deflexão inicial.

A carga de flambagem elástica considerando módulo de elasticidade dependente do tempo dada pela fórmula de Euler é

$$P_E(t) = \frac{\pi^2 E(t) I}{L^2} \quad (6.11)$$

No caso de amolecimento, quando a rigidez do material degrada com o tempo ( $\dot{E} < 0$ ), a deflexão do painel é governada pela seguinte relação

$$-P(t)[w_0 + w(x, t)] = E(t) I \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.12)$$

Substituindo (6.9) e (6.10) em (6.12), obtém-se a deflexão analítica (teoria linearizada) no centro do painel como

$$b(t) = \frac{b_0}{\frac{P_E(t)}{P(t)} - 1} \quad (6.13)$$

O módulo de elasticidade em função do tempo para o caso de amolecimento, é assumido como sendo dado pela equação

$$E(t) = E_0 - \frac{E_0}{2} [1 - \exp(-t/\alpha)] \quad (6.14)$$

sendo  $\alpha=100$  segundos e  $E_0=132.30$  GPa.

Para o caso de endurecimento, quando o material torna-se mais rígido com a idade ( $\dot{E} > 0$ ), o momento fletor relaciona-se com a curvatura através da equação (6.15) que é uma relação em taxas.

$$-\overbrace{P(t)[w_0 + w(x,t)]}^{\dot{\quad}} = E(t)I \frac{\partial^2 \dot{w}(x,t)}{\partial x^2} \quad (6.15)$$

Substituindo (6.9) e (6.10) em (6.15) obtém-se a equação diferencial

$$\frac{\dot{b}}{b + b_0} = \frac{\dot{P}}{P_E - P} \quad \text{for } t \geq 0 \quad (6.16)$$

que deve ser considerada em conjunto com a condição inicial (em  $t=0$ ) dada pela equação (6.13).

Integrando-se a equação (6.16) tem-se

$$b(t) = [b_0 + b(0)] \exp \left\{ \int_{0^+}^t \frac{\dot{P}(\tau)}{P_E(\tau) - P(\tau)} d\tau \right\} - b_0 \quad (6.17)$$



Uma vez que a deflexão  $b(t)$  depende do módulo de elasticidade  $E(t)$  e da carga aplicada  $P(t)$ , a carga crítica e o tempo crítico para os quais ocorrerá o colapso do painel dependem da taxa de variação de carregamento e de envelhecimento.

Considerando a equação 6.18 como sendo representativa da variação do módulo de elasticidade em função do tempo de envelhecimento

$$E(t) = E_0 + \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \right] \quad (6.18)$$

E adotando-se a seguinte história de carregamento

$$P(t) = A \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \right] \quad (6.19)$$

onde  $A=800$  N e  $\alpha=100$  segundos. Pode-se substituir (6.18) e (6.19) em (6.17) e obter a expressão explícita para  $b(t)$

$$b(t) = b_0 \exp \left[ 2 \frac{A \left( \ln(2) - \ln \left( -\exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) E_0 \frac{\pi^2 I}{L^2} + 2 \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) A + 3 E_0 \frac{\pi^2 I}{L^2} - 2 A \right) + \ln \left( E_0 \frac{\pi^2 I}{L^2} \right) \right)}{2A - E_0 \frac{\pi^2 I}{L^2}} \right] \quad (6.20)$$

Usando-se a presente formulação, realizou-se uma análise não linear geométrica e obteve-se as deflexões no centro do painel e sua variação de acordo com a carga aplicada  $P(t)$ . Estas curvas são apresentadas na figura 6.37 em comparação com os resultados analíticos para envelhecimento nos casos de amolecimento e endurecimento e, também, para o caso sem envelhecimento.

Na análise de flambagem com envelhecimento, existe um tempo crítico  $t_c$  para o qual  $P(t_c) = P_E(t_c)$ , e ocorre a flambagem. Este tempo crítico  $t_c$  pode ser calculado analiticamente resolvendo-se a seguinte equação

$$P(t_c) - P_E(t_c) = 0 \quad (6.21)$$

sendo  $P(t_c)$  e  $P_E(t_c)$  dadas pelas equações (6.19) e (6.11), respectivamente.

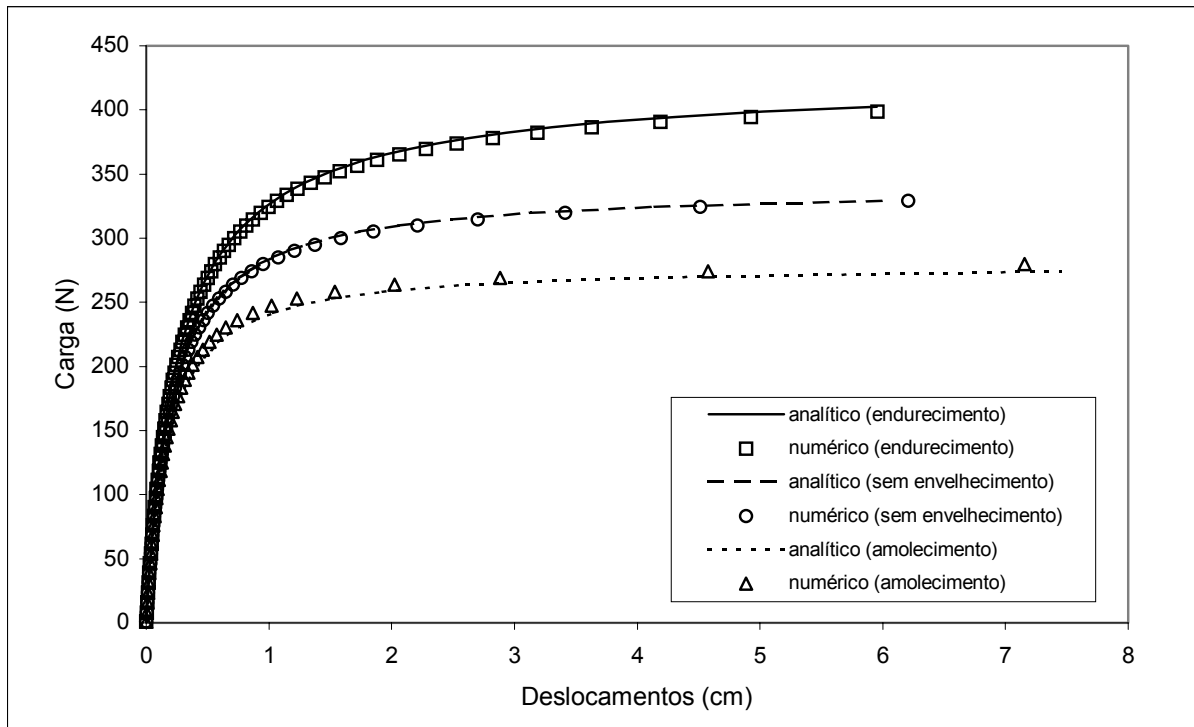


Figura 6.37 – Comparação entre deflexões numéricas e analíticas

A solução da equação (6.21) para o caso de amolecimento é

$$t_c = -\ln\left(-\frac{\pi^2 I E_0 - 2AL^2}{\pi^2 I E_0 + 2AL^2}\right)\alpha \quad (6.22)$$

e usando os valores numéricos do presente exemplo, obtém-se  $t_c = 43,16$  seg.

Quando não há envelhecimento, a carga de flambagem elástica é constante e vale 340,04N, pois o módulo de elasticidade não se altera, permanecendo com seu valor inicial até o fim da análise. Neste caso a expressão para o tempo crítico  $t_c$  é

$$t_c = -\ln\left(-\frac{\pi^2 I E_0 - AL^2}{AL^2}\right)\alpha \quad (6.23)$$

e usando os valores numéricos dados, obtém-se  $t_c = 55,35$  seg.

Para o caso de envelhecimento com endurecimento, a expressão de  $t_c$  é

$$t_c = -\ln\left(-\frac{3\pi^2 I E_0 - 2AL^2}{\pi^2 I E_0 - 2AL^2}\right)\alpha \quad (6.24)$$

e usando os valores numéricos dados resulta  $t_c = 77,60$  seg.

A figura 6.38 mostra as curvas deslocamento-tempo para os dois comportamentos de envelhecimento considerados e para o caso onde não há consideração de envelhecimento. Observa-se a boa concordância das curvas numéricas com os tempos críticos previstos analiticamente.

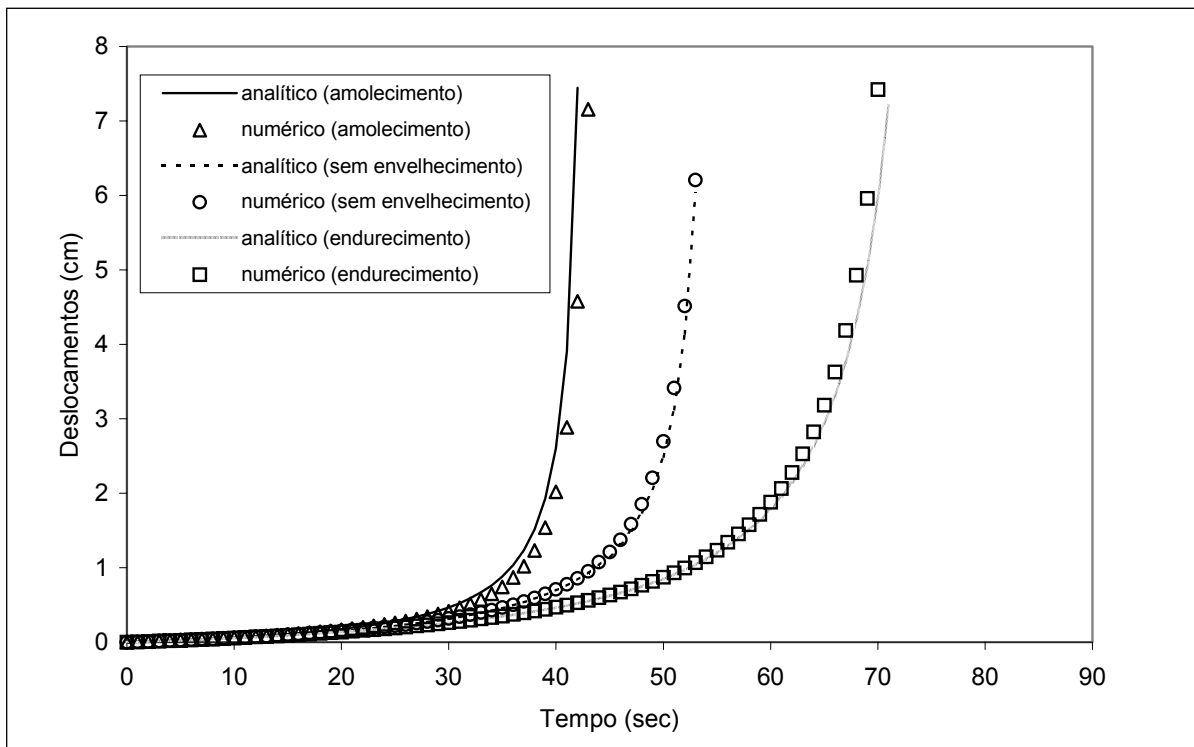


Figura 6.38 – Tempos críticos.

## 6.11 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA COM ENVELHECIMENTO

O mesmo painel analisado no exemplo anterior é novamente considerado e um material viscoelástico com envelhecimento, representado pelo modelo standard com parâmetros dependentes do tempo apresentado na figura 6.39, é empregado.

As propriedades do material são:

$$E_1(0)=132.30 \text{ GPa}$$

$$E_2(0)=132.30 \text{ GPa}$$

$$\eta_1=1323.0 \text{ GPa}\cdot\text{seg}$$

$$\theta=10\text{seg.}$$

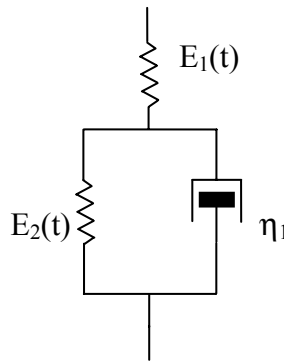


Figura 6.39 – Modelo standard com envelhecimento

A carga de flambagem viscoelástica é dada por

$$P_D = \frac{\pi^2 E_\infty(t) I}{L^2}, \text{ onde } E_\infty(t) = \frac{E_1(t) E_2(t)}{E_1(t) + E_2(t)} \quad (6.25)$$

O efeito do envelhecimento é simulado através da equação (6.26) em amolecimento e da equação (6.27) em endurecimento

$$E_1(t) = E_2(t) = E_0 - \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \right] \quad (6.26)$$

$$E_1(t) = E_2(t) = E_0 + \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \right] \quad (6.27)$$

sendo  $E_0 = 132,30$  GPa e  $\alpha=100$ seg.

A figura 6.40 mostra as deflexões no centro do painel em função do tempo para uma carga aplicada de  $P=150$  N. Para um material sem envelhecimento, com módulo de elasticidade  $E_1(t) = E_2(t) = 132,30$  GPa, para qualquer  $t$ , a carga de flambagem viscoelástica é  $P_D=170.02$ N.

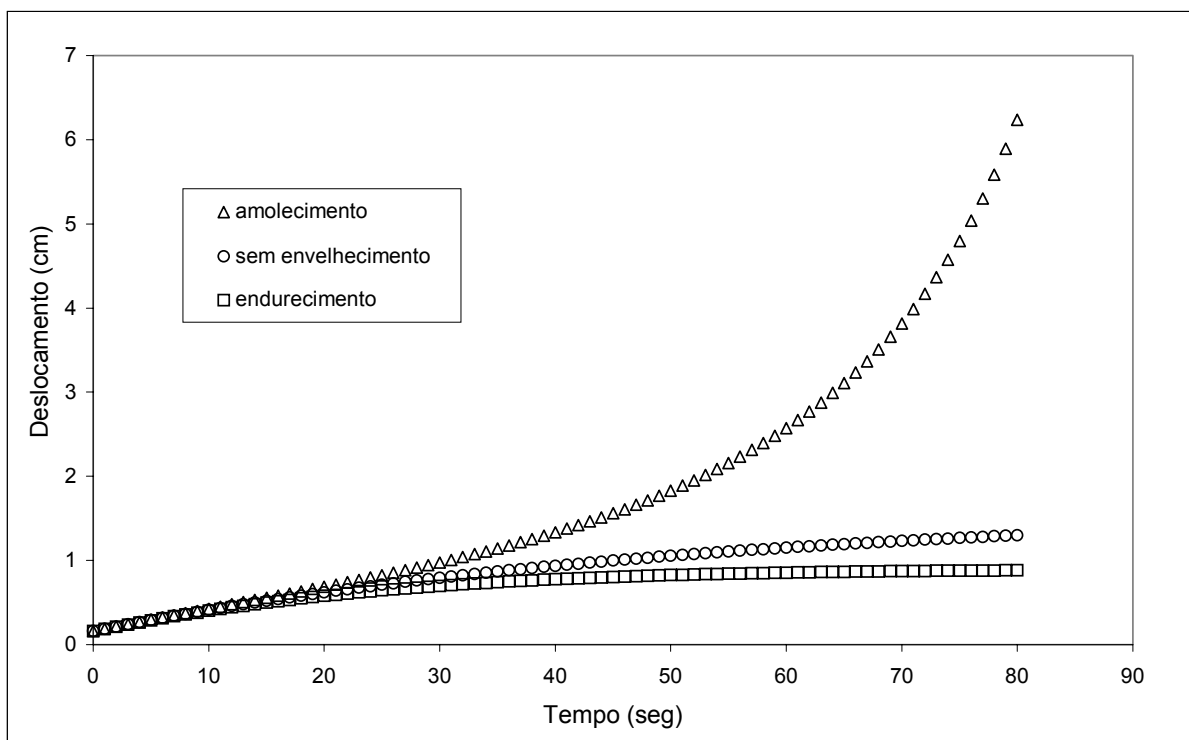


Figura 6.40 – Curvas deflexão x tempo para análise de flambagem viscoelástica com envelhecimento

Na situação sem envelhecimento e no caso de envelhecimento com endurecimento, a flambagem não ocorre devido ao fato de que a carga aplicada não atinge o valor da carga de flambagem viscoelástica.

No caso de envelhecimento com amolecimento, a flambagem viscoelástica ocorre quando a seguinte equação é satisfeita

$$P - P_D(t_c) = 0 \quad (6.28)$$

A solução da equação anterior é

$$t_c = -\ln\left(-\frac{\pi^2 I E_0 - 4PL^2}{\pi^2 I E_0}\right)\alpha \quad (6.29)$$

e usando os valores numéricos dados par este exemplo, obtém-se o tempo crítico  $t_c = 26.85 \text{seg.}$

No gráfico da figura 6.40 pode-se observar que a partir do tempo crítico a curva viscoelástica torna-se uma curva de flambagem viscoelástica e, após isto, as deflexões aumentam até a ocorrência do colapso do painel.

## 6.12 INFLUÊNCIA DA UMIDADE ABSORVIDA NO COMPORTAMENTO EM FLAMBAGEM DE COLUNAS FEITAS EM POLÍMEROS

A absorção de umidade é um importante aspecto a ser considerado no estudo do envelhecimento causado por fatores ambientais. Moléculas de água podem unir-se a polímeros hidrofílicos através de ligações de hidrogênio. A disponibilidade para tais ligações é, justamente, o que distingue os polímeros hidrofílicos dos demais polímeros. O sistema resultante da interação do sólido com a umidade, pode ser tratado como um novo material, com diferentes propriedades.

A relação constitutiva uniaxial de polímeros hidrofílicos, contrasta com a relação constitutiva de metais por ser não linear mesmo na região elástica. Os coeficientes das equações dependem da umidade relativa ambiental. O papel pode absorver até 30% do seu peso em umidade e o nylon, até aproximadamente 8%. As propriedades do material alteram-se a medida que a umidade é absorvida pelo mesmo.

Neste exemplo o modelo de Nissan (Nissan, 1976) para o módulo de elasticidade em função da umidade é empregado. Este modelo foi aplicado para papel e nylon 66, que são hidrofílicos. A equação de Nissan é

$$E = E_0 e^{(a-bm)} \quad (6.30)$$

onde  $E = E_0 e^a$  é o módulo de elasticidade para o material seco,  $m$  é a quantidade de umidade e  $a$  e  $b$  são constantes do material.

Neste exemplo é feita um análise de flambagem considerando-se o efeito da umidade. Uma coluna quadrada de 2.19 cm de lado (figura 6.41), discretizada pela mesma malha empregada no exemplo 6.10 (apenas as dimensões dos elementos foi alterada), é sujeita a uma carga de compressão e são apresentadas na figuras 6.42 e 6.43 curvas do deslocamento em função da carga aplicada para diferentes umidades relativas para papel e nylon, respectivamente.

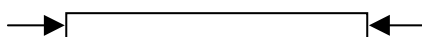


Figura 6.41 – Coluna analisada

Os resultados obtidos possuem boa concordância com os resultados apresentados por Haslach Jr.(1992) para uma coluna circular com o mesmo momento de inércia da coluna quadrada analisada neste exemplo, que são mostrados nas tabelas 6.3 e 6.4.

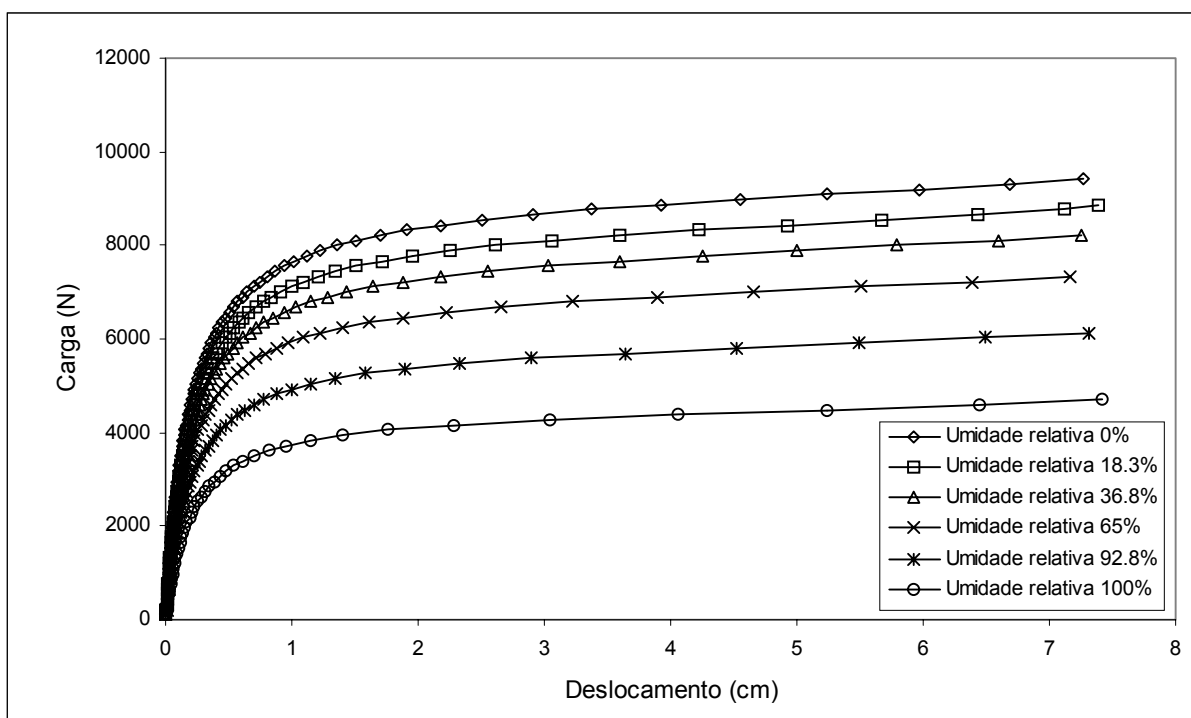


Figura 6.42 – Curvas de flambagem para Nylon 66 para vários valores de umidade relativa.

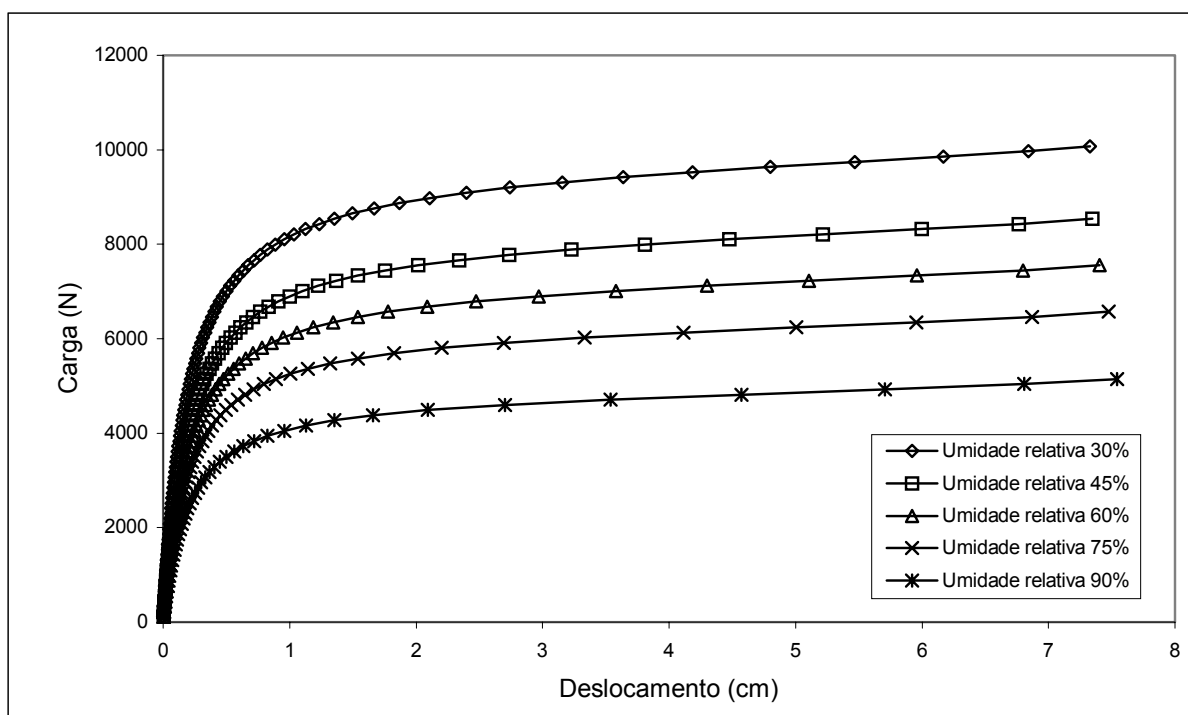


Figure 6.43 – Curvas de flambagem para papel (corrugação média) para vários valores de umidade relativa.

Umidade relativa(%)	E (MPa)	Módulo tangente (MPa)	Carga crítica (N)
0	3173	3099,6	9386
18,3	2954	2890,0	8751
36,8	2753	2697,1	8167
65,0	2455	2410,1	7298
92,8	2030	1998,9	6053
100,0	1539	1520,9	4605

Tabela 6.3 – Resultados para Nylon 66

Umidade relativa (%)	E (MPa)	Módulo tangente (MPa)	Carga crítica (N)
30	3715,6	3312,9	10031
45	3293,2	2799,4	8477
60	2904,2	2465,6	7466
75	2592,9	2130,6	6451
90	2110,3	1655,6	5013

Tabela 6.4 – Resultados para papel de corrugação média (33-pound)



### 6.13 INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DE CORTE NA FLAMBAGEM LATERAL DE UMA VIGA I

Nos casos reais de envelhecimento, é comum o módulo de corte degradar-se mais rapidamente que o módulo de elasticidade longitudinal. Uma vez que este último, em muitas seqüências de laminação, depende mais das propriedades das fibras que, com exceção das fibras orgânicas, sofrem em menor escala os efeitos do envelhecimento se comparadas à matriz do compósito.

Neste exemplo, analisa-se a flambagem lateral da viga I mostrada nas figuras 6.44 e 6.45. Os gráficos das figuras 6.46 e 6.47 mostram o deslocamento lateral correspondente a diferentes rigidezes de corte, caracterizadas através da relação entre o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o módulo de elasticidade transversal  $G$ .

Duas condições de carregamento são analisadas: carga concentrada no centro do vão e carga uniformemente distribuída no vão da viga. Uma pequena carga transversal é usada para perturbar a solução e simular as imperfeições que ocasionam o início do processo de flambagem.

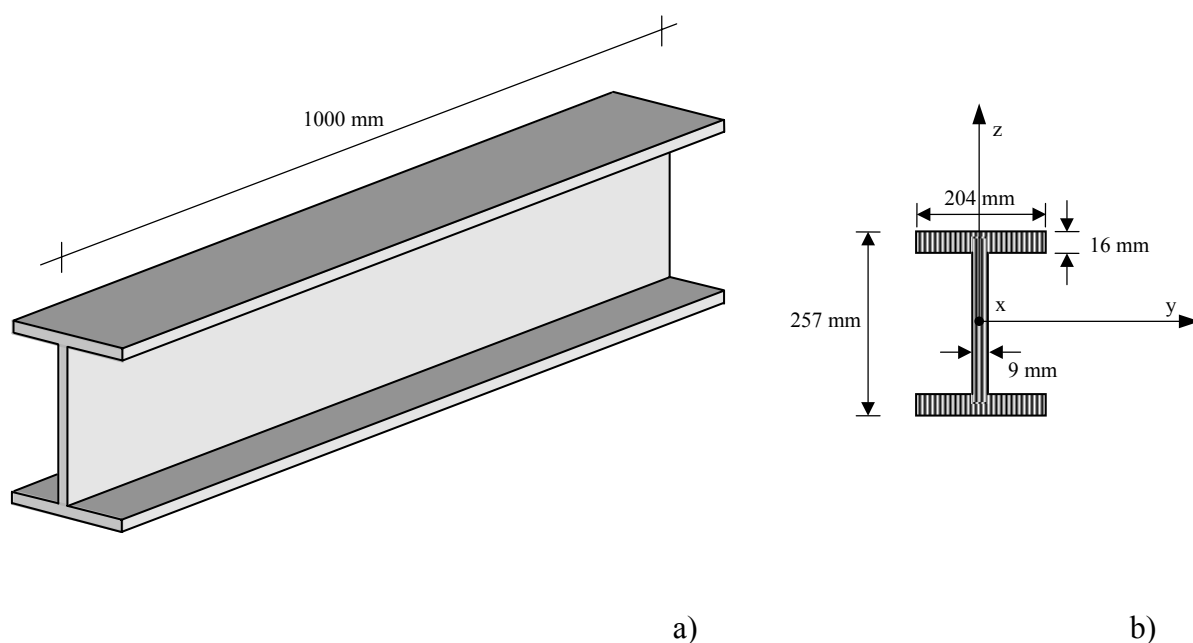


Figura. 6.44 - Viga I a) Geometria b) Seção transversal

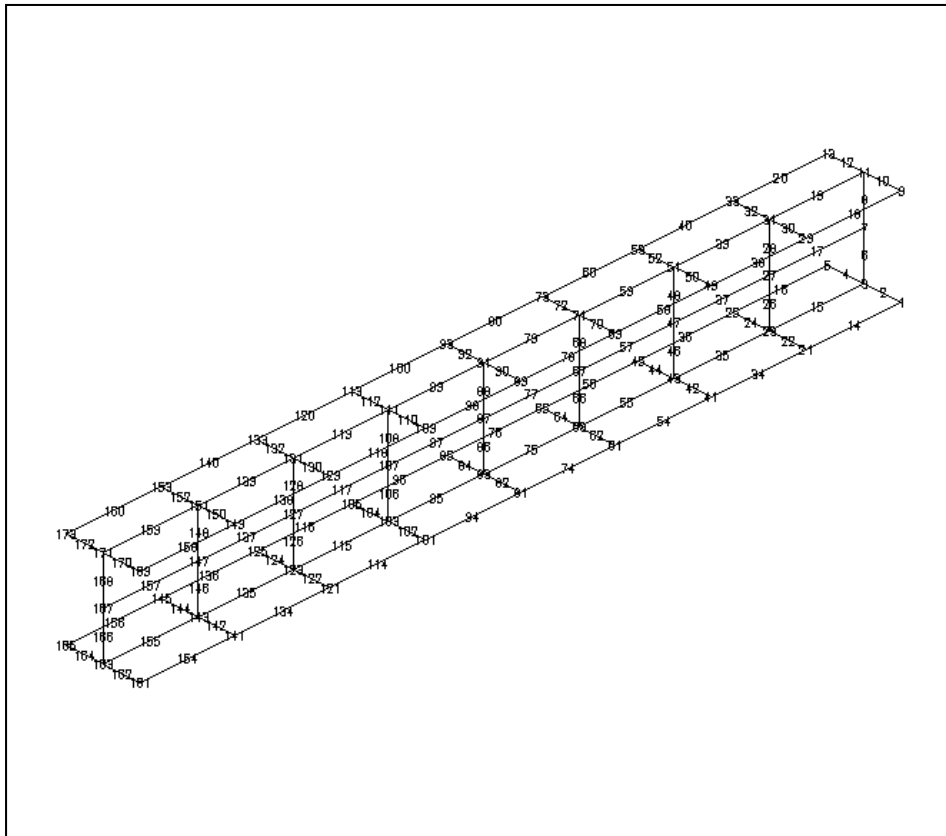


Figura 6.45 - Malha de Elementos Finitos

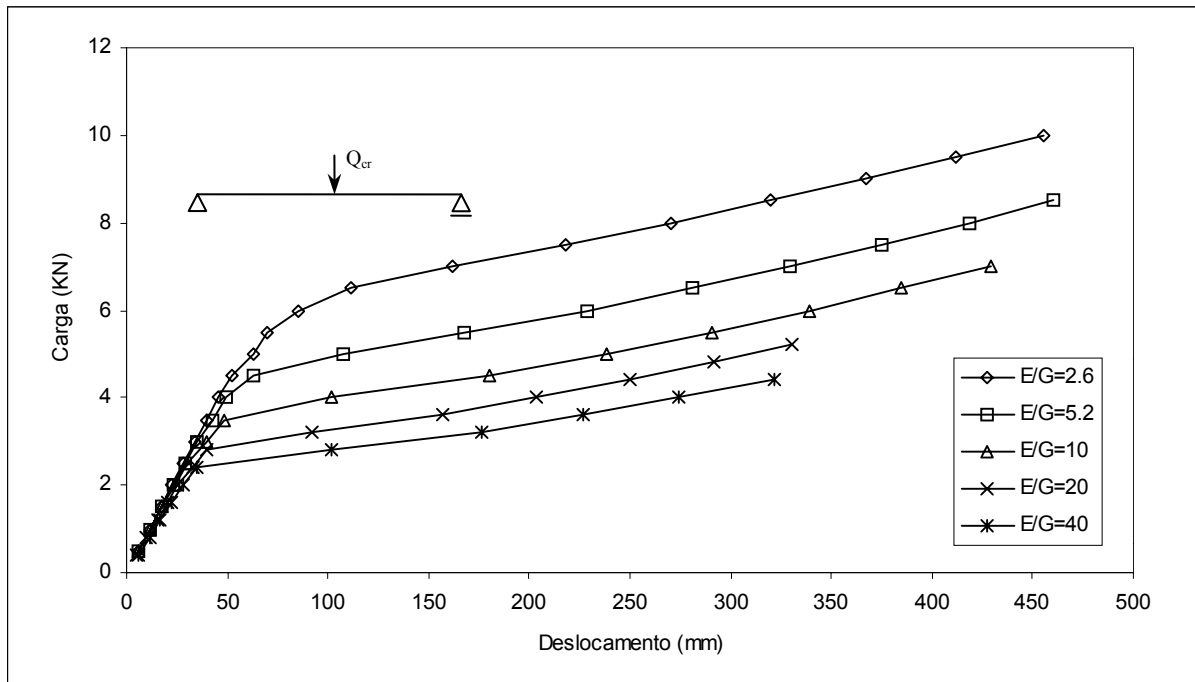


Figura 6.46 -Curvas carga x deslocamentos lateral para carga concentrada

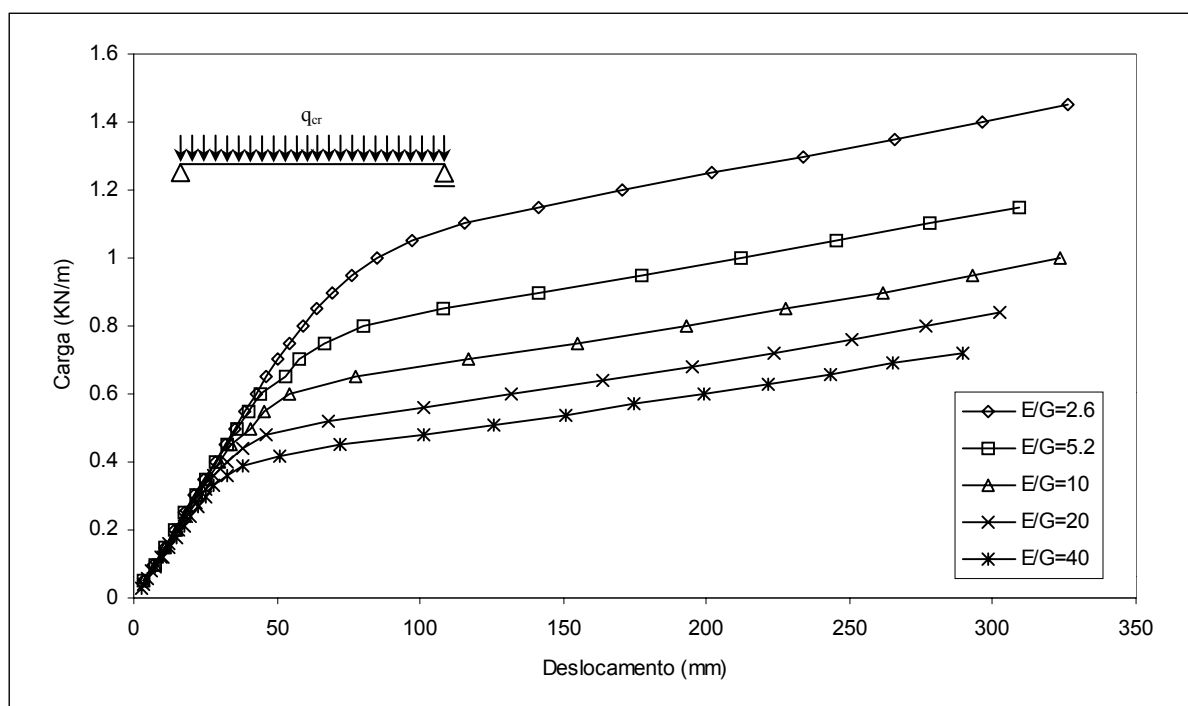


Figura 6.47 -Curvas carga x deslocamentos lateral para carga distribuída

Observa-se que a rigidez de transversal apresenta grande influência na flambagem lateral de vigas I, uma vez que sua diminuição implica em grandes reduções na carga de flambagem.

Na tabela 6.5 são apresentados os resultados obtidos por Lin et. Al (1996) em comparação com os resultados obtidos com a presente formulação. Os dados são apresentados sob a forma da relação entre a carga crítica e a carga crítica para um material isotrópico ( $E/G=2,6$  e  $\nu=0,3$ ). Observa-se a boa concordância entre os resultados obtidos com a presente formulação e os da literatura.

E/G	Lin et al. (1996)		Formulação presente	
	$Q_{cr}/Q_{cr(\nu=0,3)}$	$q_{cr}/q_{cr(\nu=0,3)}$	$Q_{cr}/Q_{cr(\nu=0,3)}$	$q_{cr}/q_{cr(\nu=0,3)}$
2,6	1,00	1,00	1,00	1,00
5,2	0,75	0,74	0,75	0,75
10	0,59	0,59	0,58	0,60
20	0,48	0,48	0,47	0,48
40	0,41	0,42	0,40	0,39

Tabela 6.5 – Resultados de carga crítica.

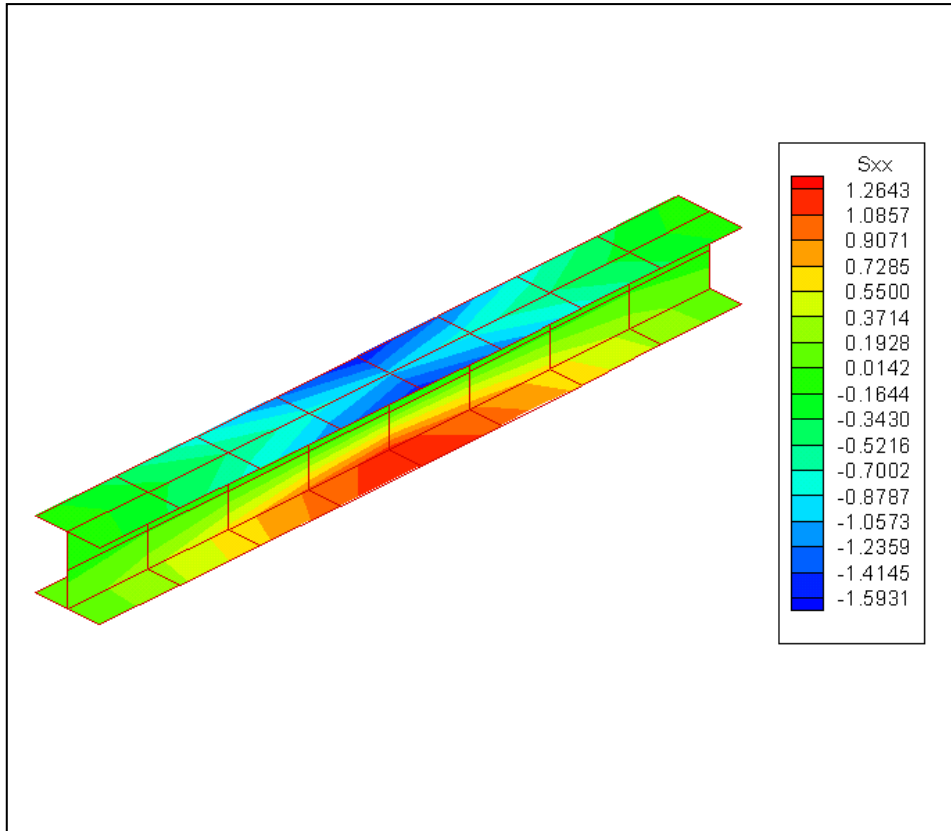


Figura 6.48 - Tensões  $\sigma_{xx}$  em MPa sobre a configuração deformada para uma carga de 0,5 kN

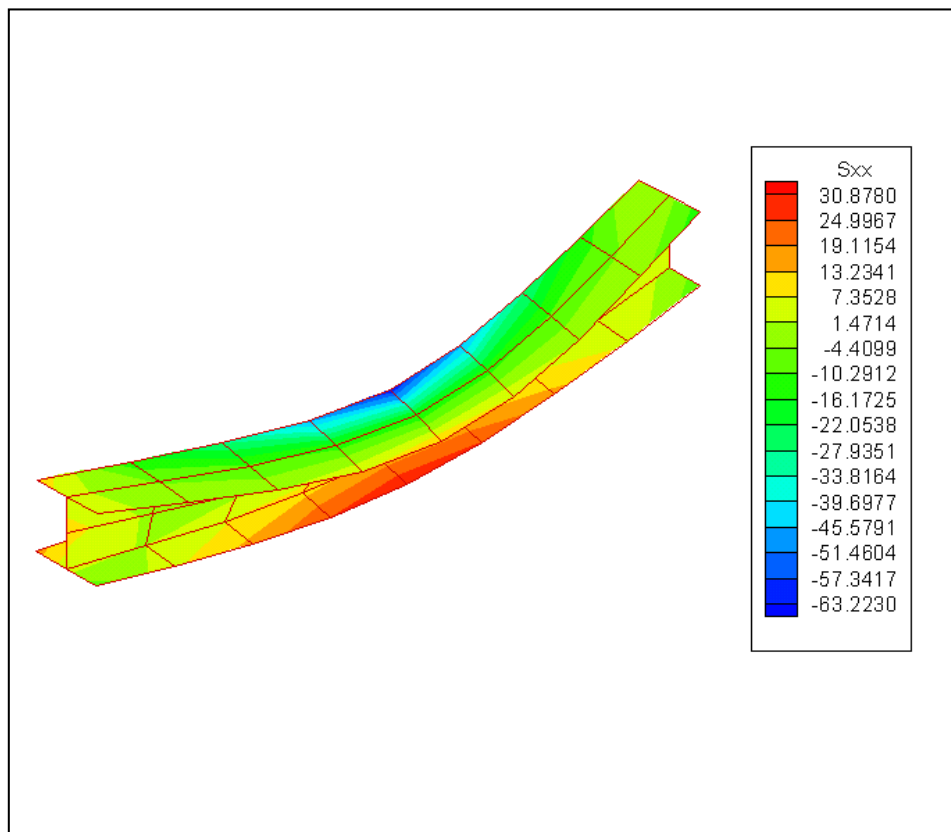


Figura 6.49 - Tensões  $\sigma_{xx}$  em MPa sobre a configuração deformada para uma carga de 7 kN

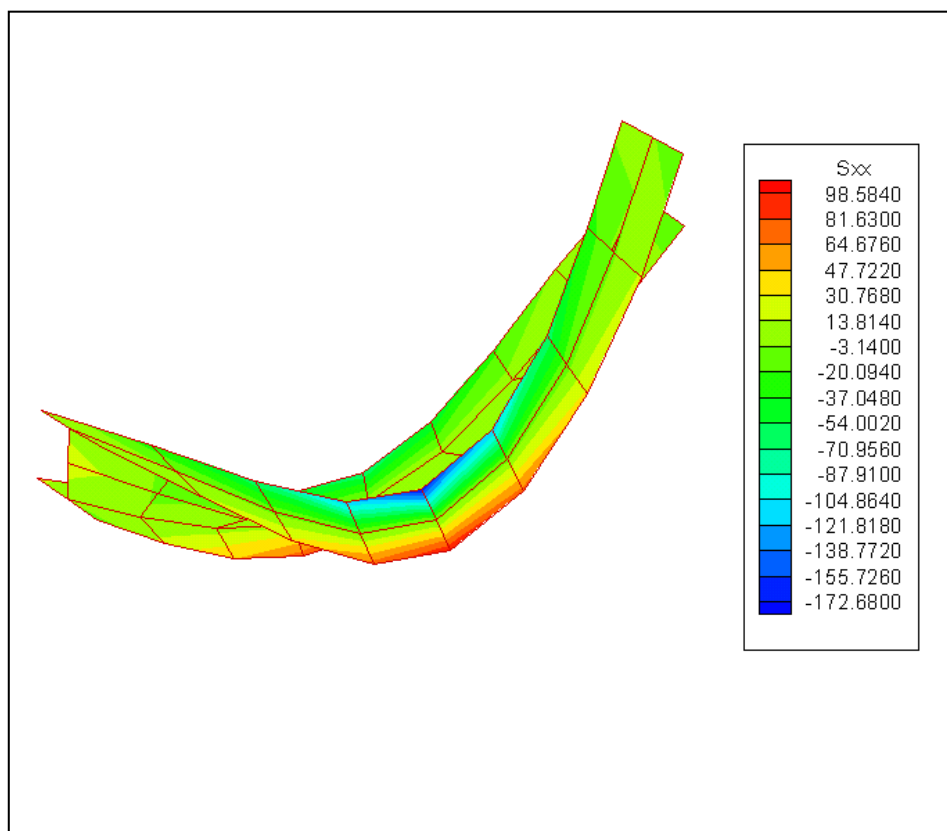


Figura 6.50 - Tensões  $\sigma_{xx}$  em MPa sobre a configuração deformada para uma carga de 10 kN

As figuras 6.48, 6.49 e 6.50 apresentam as tensões  $\sigma_{xx}$  sobre a configuração deformada da viga com  $E/G= 2,6$  para uma carga de 0,5 kN ( primeiro passo da análise) 7 kN (início do processo de flambagem) e 10 kN (fim da análise), respectivamente.

#### 6.14 ANÁLISE DE FALHAS COM CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DO ENVELHECIMENTO

Este exemplo considera uma placa laminada quadrada com 50 cm de lado, sujeita a uma tensão biaxial. A placa é feita de boro-epoxy com as seguintes propriedades:

$$E_{11}=204 \text{ GPa}$$

$$E_{22}=19 \text{ GPa}$$

$$G_{12}=G_{13}=G_{23}=5.6 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12}=0.25$$

Aplaca possui 0.5 cm de espessura e, devido a condições de simetria, somente um quarto do laminado foi analisado (ver figura 6.51).

O Critério da Máxima Deformação foi utilizado na análise. As curvas de primeira falha (First Ply Failure (FPF)) e falha última (Last Ply Failure (LPF)) para um laminado  $(0/\pm 45/90)_s$  são apresentadas na Fig. 6.51. Considerou-se o exemplo com e sem o efeito do envelhecimento.

Para o material não envelhecido, adotou-se os seguintes limites máximos de deformação:

$$X_{\epsilon T} = 6.1765 \times 10^{-3}$$

$$X_{\epsilon C} = 1.2255 \times 10^{-2}$$

$$Y_{\epsilon T} = 3.2105 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\epsilon C} = 1.0632 \times 10^{-2}$$

$$S_{\epsilon A} = S_{\epsilon T} = 1.3571 \times 10^{-2}$$

No caso do material já envelhecido, considerou-se os seguintes limites máximos de deformação:

$$X_{\epsilon T} = 6.1765 \times 10^{-3}$$

$$X_{\epsilon C} = 1.2255 \times 10^{-2}$$

$$Y_{\epsilon T} = 1.6053 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\epsilon C} = 5.3160 \times 10^{-3}$$

$$S_{\epsilon A} = S_{\epsilon T} = 6.7855 \times 10^{-3}$$

Pode-se observar que, neste exemplo, apenas os limites de deformação relacionados com a performance da matriz foram afetados pelo envelhecimento. Este tipo de comportamento é encontrado em situações práticas, devido ao fato de que, usualmente, a matriz degrada-se mais rapidamente que as fibras.

A curva de falha última (LPF) altera-se pouco com a consideração do envelhecimento, uma vez que ocorre na direção das fibras e estas não sofreram alteração em suas propriedades neste exemplo.

A curva de primeira falha (FPF) para o caso com envelhecimento ocorre a níveis de tensão que correspondem aproximadamente à metade daqueles observados para o material não envelhecido. Isto é explicado pelo fato de que a FPF corresponde a modo de falha na matriz e, deste modo, é afetada pela redução nos limites de deformação da mesma.

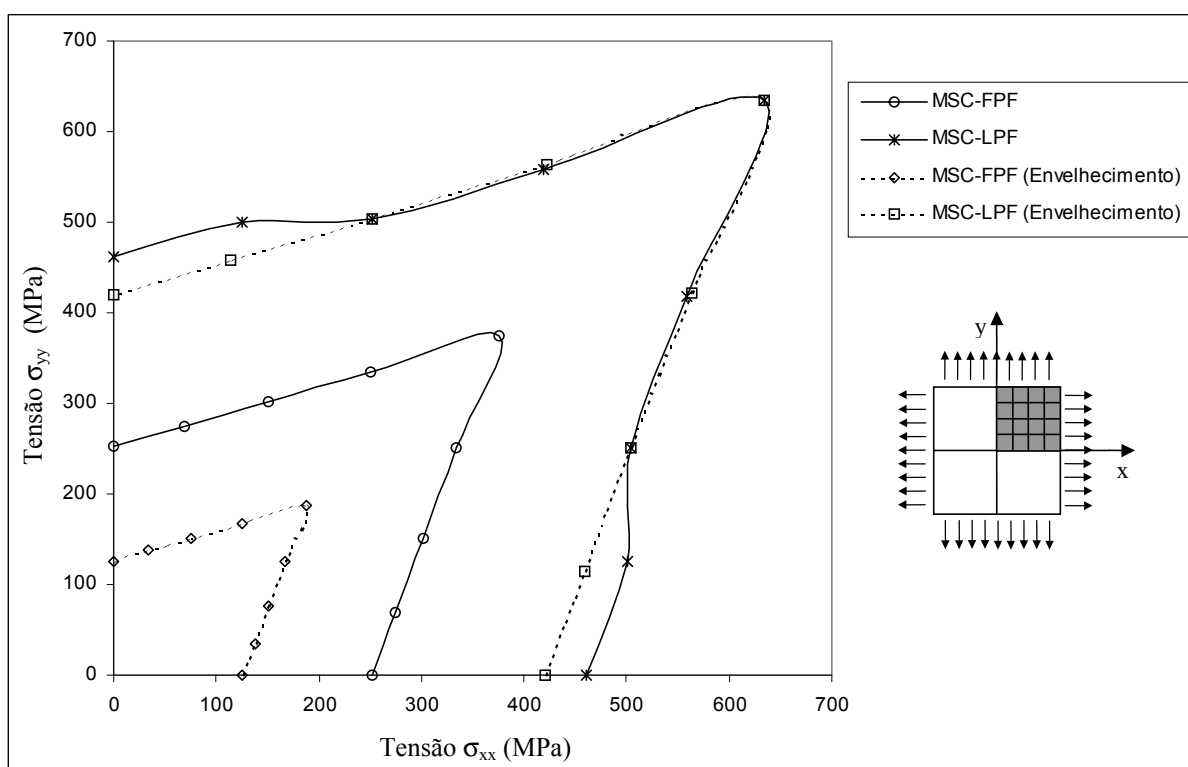


Figura 6.51 - Curvas de FPF e LPF e geometria da placa analisada

## 6.15 ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO COM CONSIDERAÇÃO DE ENVELHECIMENTO

Considerou-se um painel com as mesmas características geométricas do painel do exemplo 6.10, mas sem a deflexão inicial apresentada por aquele. A malha utilizada na análise também foi a mesma do exemplo 6.10 (ver figura 6.36).

O painel é feito de quatro camadas com iguais espessuras e orientação das fibras como está representado na figura 6.52.

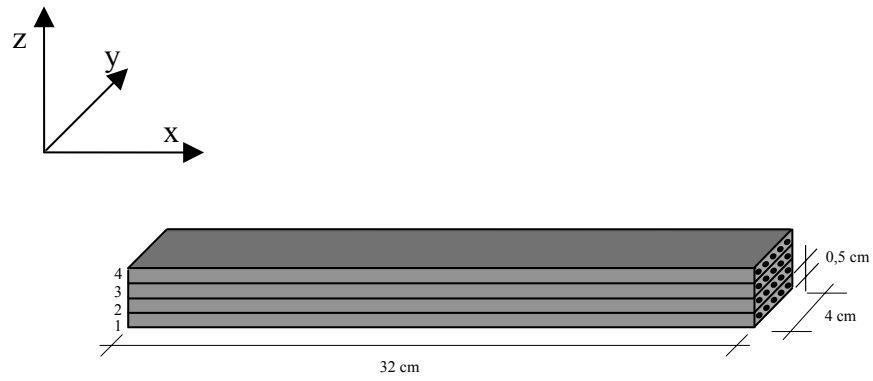


Figura 6.52 – Esquema de laminação do painel

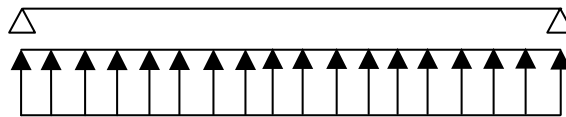


Figura 6.53 – Carregamento do painel

As lâminas são feitas de grafite/epoxy e possuem as seguintes propriedades

Propriedades elásticas

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,24$$

Propriedades de falha iniciais

Camadas 1 e 4

$$X_{\text{et}} = 1,1431 \times 10^{-3}$$

$$X_{\text{ec}} = 1,2811 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{et}} = 4,0698 \times 10^{-4}$$

$$Y_{\text{ec}} = 4,0698 \times 10^{-4}$$

$$S_{\text{eA}} = 1,5363 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eT}} = 1,9853 \times 10^{-3}$$



Camadas 2 e 3

$$X_{\text{et}} = 5,7155 \times 10^{-3}$$

$$X_{\text{ec}} = 6,4055 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{et}} = 2,0349 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{ec}} = 2,0349 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eA}} = 7,6815 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eT}} = 9,9265 \times 10^{-3}$$

O painel é simplesmente apoiado e foi submetido à uma carga uniformemente distribuída aplicada no sentido positivo do eixo z, ou seja, de baixo para cima como mostra a figura 6.53.

Foi realizada uma análise de falhas progressivas por meio do Critério da Máxima Deformação para Materiais com Envelhecimento. A degradação das deformações máximas de falha é dada pela expressão (6.31).

$$X(t) = \frac{X}{2} + \left( \frac{X}{2} \frac{180 - t}{180} \right) \quad (6.31)$$

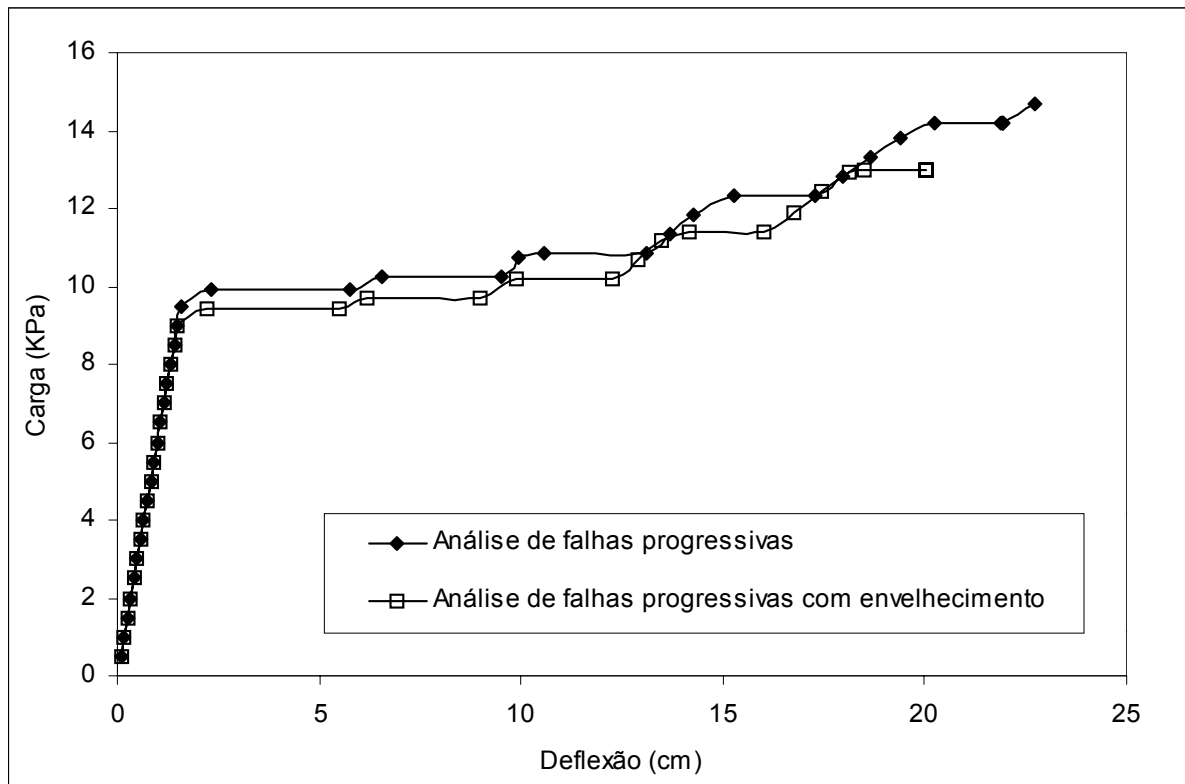


Figura 6.54 – Curva carga x deflexão máxima para situações com e sem envelhecimento

A equação (6.31) expressa um decréscimo linear dos limites de deformação de falha e representa uma diminuição de 50% no valor destes limites após 180 dias (aproximadamente 6 meses), o que é consistente com situações reais de envelhecimento (Parvatareddy et al., 1995).

A curva carga x deslocamento máximo do painel obtida para situações com e sem envelhecimento são mostradas na figura 6.54. Pode-se observar, na análise de envelhecimento, que o nível de carga das linhas horizontais que representam um rápido aumento na deflexão devido a cada falha, diferem da situação sem envelhecimento mais e mais conforme o tempo avança.

#### 6.16 ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO VISCOELÁSTICO COM CONSIDERAÇÃO DE ENVELHECIMENTO

Neste exemplo analisou-se o mesmo painel do exemplo anterior, porém com consideração de viscoelasticidade. Para tanto, foi empregado um material viscoelástico com as seguintes propriedades

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,24$$

$$\theta = 10 \text{ dias}$$

Os limites de deformação das camadas, utilizados na análise de falhas progressivas feita por meio do Critério da Máxima Deformação, também são os mesmos do exemplo anterior.

A curva obtida para o deslocamento máximo, ou seja, no centro do painel, em função do tempo, é apresentada na figura 6.55 para situações com e sem envelhecimento, para um valor de carga de pressão uniforme aplicada de 75 kPa. A falha última (LPF) ocorre aos 40 dias para o caso sem envelhecimento e aos 22 dias para o caso com envelhecimento.

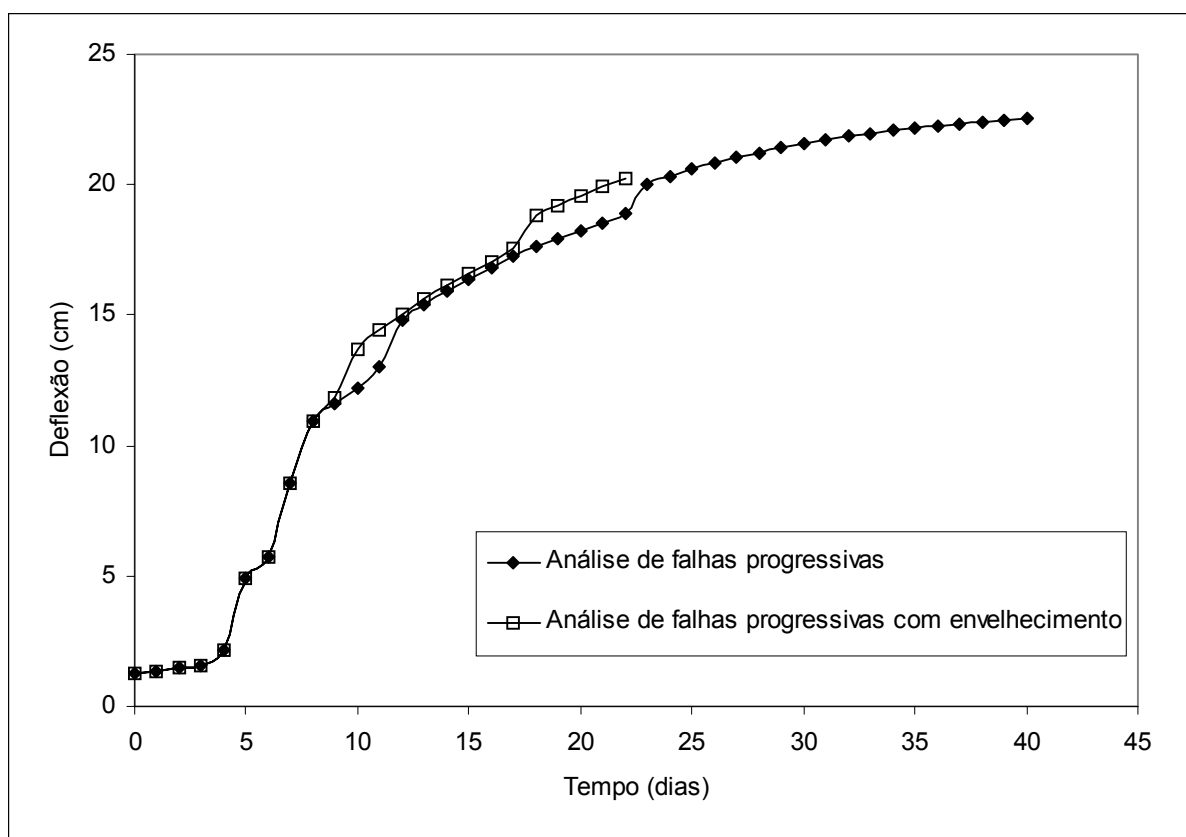


Figura 6.55 – Curva deslocamento máximo x tempo para situações com e sem envelhecimento

### 6.17 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS E ENVELHECIMENTO

O mesmo painel analisado no exemplo 6.10 é novamente considerado. Neste exemplo, o painel é constituído por vinte camadas de 0,01cm de espessura e é feita uma análise não linear geométrica considerando-se falhas progressivas e envelhecimento. É utilizado o critério da máxima deformação para materiais com envelhecimento, e os seguintes limites de deformação iniciais são adotados

Camadas 1 e 20

$$X_{\text{et}} = 1,1431 \times 10^{-5}$$

$$Y_{\text{et}} = 4,0698 \times 10^{-6}$$

$$S_{\text{eA}} = 1,5363 \times 10^{-5}$$

$$X_{\text{ec}} = 1,2811 \times 10^{-5}$$

$$Y_{\text{ec}} = 4,0698 \times 10^{-6}$$

$$S_{\text{eT}} = 1,9853 \times 10^{-5}$$

Camadas 2 e 19

$$\begin{array}{ll} X_{\varepsilon t} = 1,1431 \times 10^{-3} & X_{\varepsilon c} = 1,2811 \times 10^{-3} \\ Y_{\varepsilon t} = 4,0698 \times 10^{-4} & Y_{\varepsilon c} = 4,0698 \times 10^{-4} \\ S_{\varepsilon A} = 1,5363 \times 10^{-3} & S_{\varepsilon T} = 1,9853 \times 10^{-3} \end{array}$$

Camadas 3 e 18

$$\begin{array}{ll} X_{\varepsilon t} = 1,1431 \times 10^{-2} & X_{\varepsilon c} = 1,2811 \times 10^{-2} \\ Y_{\varepsilon t} = 4,0698 \times 10^{-3} & Y_{\varepsilon c} = 4,0698 \times 10^{-3} \\ S_{\varepsilon A} = 1,5363 \times 10^{-2} & S_{\varepsilon T} = 1,9853 \times 10^{-2} \end{array}$$

Camadas 4 e 17

$$\begin{array}{ll} X_{\varepsilon t} = 1,1431 \times 10^{-1} & X_{\varepsilon c} = 1,2811 \times 10^{-1} \\ Y_{\varepsilon t} = 4,0698 \times 10^{-2} & Y_{\varepsilon c} = 4,0698 \times 10^{-2} \\ S_{\varepsilon A} = 1,5363 \times 10^{-1} & S_{\varepsilon T} = 1,9853 \times 10^{-1} \end{array}$$

Demais camadas

$$\begin{array}{ll} X_{\varepsilon t} = 1,1431 & X_{\varepsilon c} = 1,2811 \\ Y_{\varepsilon t} = 4,0698 \times 10^{-1} & Y_{\varepsilon c} = 4,0698 \times 10^{-1} \\ S_{\varepsilon A} = 1,5363 & S_{\varepsilon T} = 1,9853 \end{array}$$

A degradação das deformações máximas de falha é dada pela equação (6.31), como nos exemplos anteriores.

A figure 6.56 mostra as curvas de deslocamento em função da carga aplicada com e sem consideração de falhas progressivas para situações com e sem envelhecimento.

Após a falha das camadas 1, 2, 19 e 20, o painel apresenta uma redução em sua espessura efetiva de 0.2cm para 0.16cm. Desta forma, ocorre uma redução do valor da carga de flambagem de 340.04 N para 174.10 N. O Método de Controle por Deslocamentos Generalizados (GDCM) é usado na análise e após a ruptura progressiva das camadas 1, 2, 19 e 20, o nível de carga decresce e ocorre a flambagem da nova configuração do laminado. Neste tipo de análise necessita-se de métodos como o GDCM, que ajustam o fator de carga de acordo com a nova configuração da estrutura.

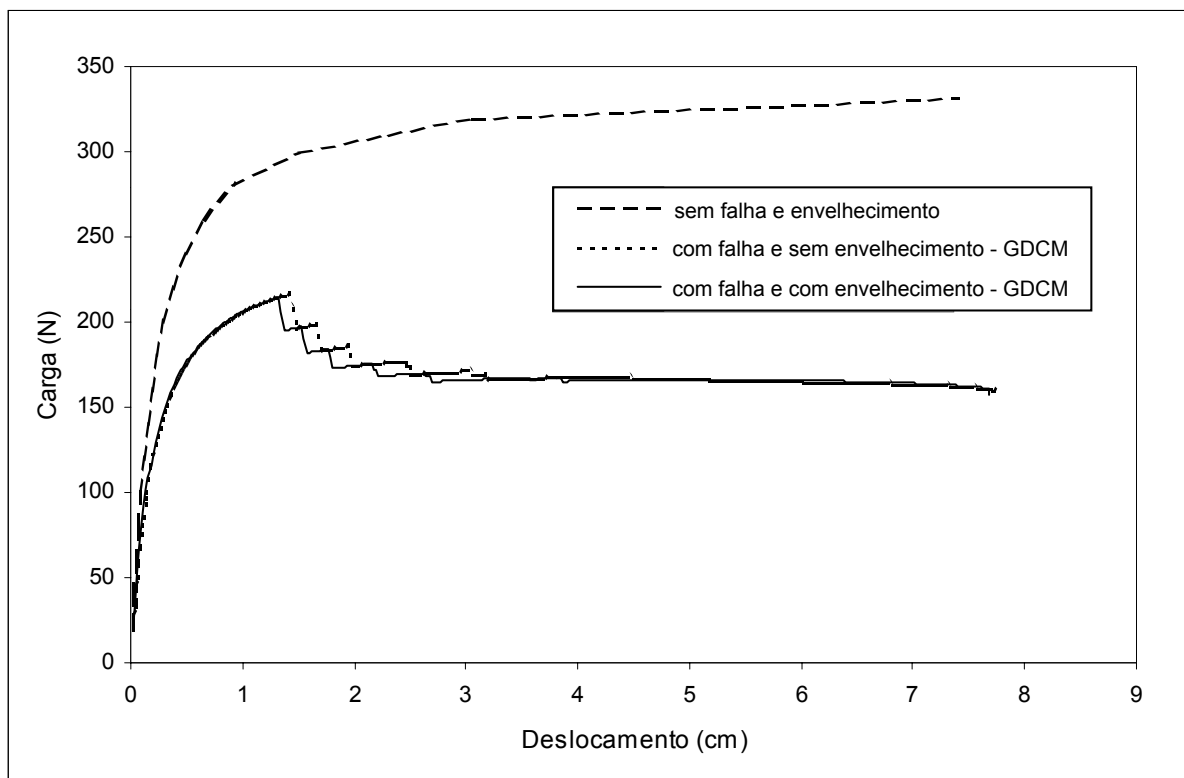


Figura 6.56 – Análise de flambagem com falhas progressivas e envelhecimento com GDCM

## 6.18 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS E ENVELHECIMENTO

Este exemplo trata do mesmo painel analisado no exemplo 6.11. Os seguintes limites iniciais de deformação são adotados

Camadas 1 e 10

$$X_{\text{et}} = 1,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{et}} = 4,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eA}} = 1,50 \times 10^{-6}$$

$$X_{\text{ec}} = 1,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{ec}} = 4,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eT}} = 2,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 2 e 9

$$X_{\text{et}} = 2,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{et}} = 8,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eA}} = 3,00 \times 10^{-6}$$

$$X_{\text{ec}} = 2,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{ec}} = 8,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eT}} = 4,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 3 e 8

$$X_{\text{et}} = 4,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{et}} = 16,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eA}} = 6,00 \times 10^{-6}$$

$$X_{\text{ec}} = 4,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{ec}} = 16,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eT}} = 8,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 4 e 7

$$X_{\text{et}} = 11,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{et}} = 30,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eA}} = 15,00 \times 10^{-6}$$

$$X_{\text{ec}} = 11,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{ec}} = 30,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eT}} = 17,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 5 e 6

$$X_{\text{et}} = 16,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{et}} = 64,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eA}} = 17,50 \times 10^{-6}$$

$$X_{\text{ec}} = 16,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\text{ec}} = 64,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\text{eT}} = 18,00 \times 10^{-6}$$

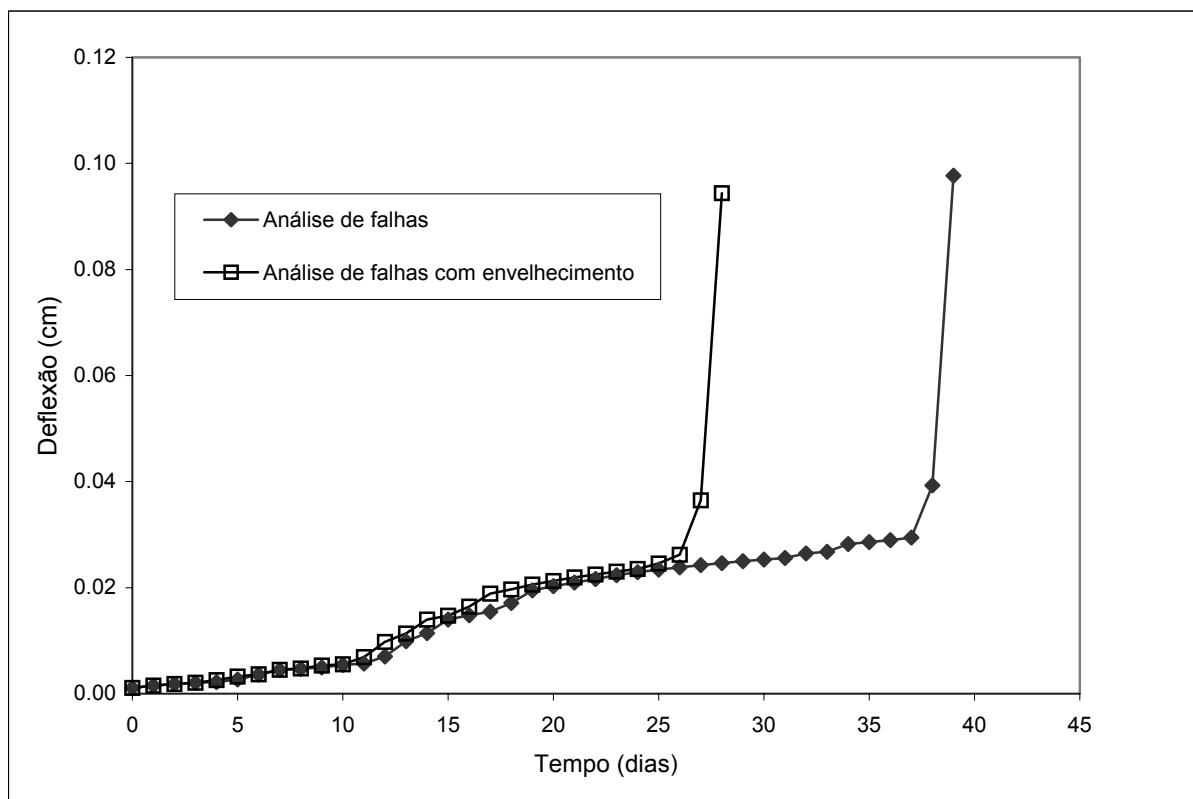


Figura 6.57 – Análise de flambagem viscoelástica com falhas progressivas e envelhecimento.

A figura 6.57 apresenta a variação da deflexão máxima do painel com o tempo. Após a falha de algumas camadas, a carga aplicada que é de 20 N, torna-se a carga de flambagem viscoelástica e a deflexão cresce rapidamente até a falha última do painel.

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No presente trabalho apresentou-se um modelo analítico numérico para análise de envelhecimento em estruturas de material compósito baseado em uma descrição cinemática Lagrangeana Total e em elementos finitos tridimensionais degenerados. O modelo inclui efeitos de não linearidades geométricas, viscoelasticidade não linear, falhas progressivas e envelhecimento com consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Espera-se que este modelo permita uma melhor integração dos resultados provenientes de testes experimentais realizados a nível de material e o estabelecimento de relações constitutivas para materiais com envelhecimento e sua aplicação a análises e projetos estruturais.

As diferenças essenciais entre os processos de amolecimento, quando a rigidez do material diminui, que deve ser modelado com propriedades dependentes do tempo em uma análise incremental, e endurecimento, no qual o material solidifica em sua configuração real, que deve ser modelado com propriedades dependentes do tempo com formulação em taxas em uma análise incremental, foram descritos. A formulação adequada para a análise destas duas situações de envelhecimento foi apresentada para os casos elástico e viscoelástico.

Uma forma conveniente para determinação direta das funções de fluência em situações com envelhecimento, apresentada como uma alternativa à técnica de “time-shift”, foi fundamentada e mostrou-se eficiente na representação do comportamento viscoelástico com envelhecimento.

Um modelo de viscoelasticidade não linear capaz de representar o aumento da fluência e fadiga estática característicos do comportamento viscoelástico não linear, foi descrito e implementado.

As lâminas das quais as estruturas são constituídas são reforçadas por fibras e foram consideradas ortotrópicas podendo, o material das mesmas, apresentar envelhecimento com



comportamento elástico ou viscoelástico, na direção das fibras, na direção perpendicular a estas e, também, em cisalhamento.

O presente modelo numérico permite a consideração de falhas progressivas com envelhecimento ou degradação das propriedades de falhas. As falhas nas lâminas podem ocorrer por quebra ou flambagem das fibras, por fissuração na matriz no sentido paralelo às fibras e delaminação. Os critérios disponíveis na análise de falha são os de Tsai-Wu, Hashin, Lee e Máxima Deformação.

Os modelos de degradação da rigidez do material empregados, embora simples frente a complexidade dos mecanismos de falha em materiais compostos, apresentam bons resultados, quando comparados com outros resultados numéricos encontrados na literatura e com dados experimentais (Oliveira, 1999 e Oliveira e Creus, 2000).

Valer ressaltar que o envelhecimento pode alterar os modos de falha. Um material que apresenta comportamento dúctil, após sofrer os efeitos do envelhecimento, pode apresentar uma ruptura frágil (Scida et al., 2002). Desta forma, seria interessante implementar um modelo de falhas progressivas onde não apenas os limites de resistência sejam afetados pelo envelhecimento, mas, também, os modos de falha.

Apresentou-se, ainda, uma formulação plástica para representação da plastificação dos materiais. Porém, a formulação utilizada parte de um critério de plastificação para materiais isotrópicos (von Mises). Isto limita bastante as possibilidades de análise, visto que, muitos materiais laminados, muitas vezes, são constituídos por lâminas de materiais anisotrópicos. Desta forma, se faz interessante a implementação de um critério de escoamento para materiais anisotrópicos possibilitando a análise de estruturas com este tipo de material.

O elemento de casca empregado na formulação presente mostrou-se eficiente para análise de cascas uma vez que estas não sejam muito espessas, pois nestes casos o modelo utilizado mostrou-se um pouco rígido para reproduzir os resultados obtidos pela Teoria da Elasticidade (Pagano, 1970). No caso de placas finas observou-se o fenômeno de “locking” que se dá nos efeitos de cisalhamento e flexão de membrana, tornando-se a estrutura ficticiamente mais rígida. Tal fenômeno foi superado com o emprego de uma regra de integração reduzida.

A comparação entre os métodos empregados para solução numérica das equações de equilíbrio não-lineares mostrou que o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados apresenta maior versatilidade na representação do comportamento das estruturas, permitindo uma adaptação do fator de carga com a condição de degradação do material. Porém, este método conduz a análises demasiadamente longas em casos onde, a um pequeno aumento no fator de carga, está associado um grande incremento nos deslocamentos. Além disto, nas análises viscoelásticas, onde, normalmente, deseja-se estudar o comportamento dependente do tempo da estrutura submetida à uma carga constante no tempo, não é possível empregar o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, pois sua formulação parte da definição de fatores de carga variáveis.

Vários exemplos são apresentados para mostrar a performance da análise numérica. Os exemplos escolhidos são propositadamente restritos a situações simples com solução analítica sendo usada quando possível. O programa permite, no entanto, análise de vigas, placas e cascas em geral.

Existe ainda grande demanda por estudos mais precisos dos efeitos do envelhecimento a longo prazo em aplicações estruturais. A maioria dos testes e dados disponíveis referem-se somente a painéis isolados e muito deve ser feito no sentido de usar estes dados na análise de estruturas reais. Além disto, é muito importante estabelecer-se modelos eficientes para representação da evolução das propriedades dos compósitos com o tempo.

Ainda como sugestões para continuidade deste estudo pode-se melhorar os modelos de degradação das propriedades dos materiais através de um trabalho conjunto entre testes experimentais e numéricos.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMAD, S.; IRONS, B. M. ; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v.2, p.419-451, 1970.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs N.J.: Prentice-Hall, 1996.

BARBERO, E. J. **Introduction to Composite Materials Design**. Taylor and Francis, Philadelphia, PA, 1998.

BARBERO E. J.; DAMIANI T. M. Phenomenological prediction of the strength of E-glass composites from available aging and stress corrosion data. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v.22, n.4, p.373-394, 2003.

BARBERO E. J.; DAMIANI T. M. Interaction between static fatigue and zero-stress aging in E-glass fiber composites. **Journal of Composites for Construction**, v.7, n.1, p.3-9, 2003(2).

BARRAL, L. et al. Physical aging of an epoxy/cycloaliphatic amine resin **European Polymer Journal**, v.35, p.403-411, 1999.

BINDER K.; BASCHNAGEL J.; PAUL W. Glass transition in polymer melts: test of theoretical concepts by computer simulation. **Progress in Polymer Science**, v.28, p.115-172, 2003.

BRINSON L. C.; GATES T. Effects of Physical Aging on long term creep of polymers and polymer matrix composites. **International Journal of Solids and Structures**, v.32, n.6/7, p.827-846, 1995.

- CHEUNG, M. S.; AKHRAS, G.; LI, W. Progressive Failure Analysis of Composite Plates by the Finite Strip Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.124, n.1-2, p.49-61, 1995.
- CHRISTENSEN, R.M. **Theory of Viscoelasticity. An introduction** Academic Press, New York, 1971.
- CREUS, G. J. **Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures**. Springer-Verlag, 1986. (Lectures Notes in Engineering, 16).
- DANIEL, M.I.; LUO, J.J.; SUN, Z. Physical Aging and Creep Characterization of a carbon/Polyimide Composite In: 12th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPOSITE MATERIALS, Paris, France, 1999.
- FERRY J. D. **Viscoelastic properties of Polymers**. Wiley, New York, 1970.
- FLAGGS, D. L.; CROSSMAN F. W. Analysis of the viscolastic response of composite lamintes during hygrothermal exposure. **Journal of Composite Materials**, v.15, p.21-40, 1981.
- GATES, T. S.; VEAZIE, D. R.; BRINSON, L. C. Creep and Physical Aging in a Polymeric Composite: Comparison of Tension and Compression **Journal of Composite Materials**, v.31, n.24, p.2478-2505, 1997.
- GROEHS, A. G. e CREUS, G. J., Análise elastoplástica de estado plano de tensões utilizando elementos finitos, In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 4, 1977, Florianópolis, p.1479-1490.
- HALPIN, J. C. Introduction to viscoelasticity. In Composite Materials Workshop, **Progress in Materials Science Series**. vol. 1. Technomic, 1968.
- HALPIN, J. R. **Primer on Composite Materials: Analysis**. Technomic Publishing Company, 1984.
- HASHIN, Z. Failure Criteria for Unidirecional Fiber Composites. **Journal of Applied Mechanics**, v.47, p.329-334, June 1980.

- HASHIN, Z. Viscoelastic Fiber Reinforced Materials. **AIAA Journal**, v.4, n.8, p.1411-1417, August 1966.
- HASLACH JR. H. W. Influence of adsorbed moisture on the elastic post-buckling behaviour of columns made of non-linear hydrophilic polymers. **Int. J. Non-Linear Mechanics**, v.27, n.4, p.527-546, 1992.
- HELMAN, H.; CREUS, G.J. A Nonlinear Rheological Model Describing Time Dependent Deformations and Failure **International Journal of Nonlinear Mechanics**, v.10, n.3, p.159 - 167, 1975.
- HU H.; SUN C. T. The characterization of physical aging in polymeric composites. **Composites Science and Technology**, v.60, p.2693-2698, 2000.
- HUANG, N. N.; CHEN, H.; LEE, C. F. The Effect of Physical Aging on the Viscoelastic Response of Cross-Ply Laminates to In-Plane Compression **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, v.21, n.2, p.159-170, 1998.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1987.
- LEADERMAN H. Elastic and creep properties of filamentous materials and other high polymers, The textile foundation, Washington,DC, 1943.
- LEE, J. D. Three Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminate. **Computers & Structures**, v.15, n.3, p.335-350, 1982.
- LEE, J. D. Three Dimensional Finite Element Analysis of Layered Fiber-Reinforced Composite Materials. **Computers & Structures**, v.12, n.3, p.319-339, Sept, 1980.
- LENE, F.; LEGUILLON, D. Homogenized Constitutive Law for a Partially Cohesive Composite Material. **International Journal of Solids and Structures**, v.5, p.443-458, 1982.

- LEON R.; WEITSMAN Y. J. Time-to-failure of randomly reinforced glass strand/urethane matrix composites: data, statistical analysis and theoretical prediction. **Mechanics of Materials**, v.33, p.127-137, 2001.
- LIAO, C. L.; REDDY, J. N. **An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures**. Blackburg: Virginia, Polytechnic Institute and State University, 1987.
- LIAO, K., SCHULTHEISZ, C. R., HUNSTON, D. L. Effects of environmental aging on the properties of pultruded GFRP **Composites Part B: Engineering**, v.30, n.5, p.485-493, 1999.
- LIAO, K.; SCHULTHEISZ, C. R.; HUNSTON, D. L. et al. Long-term durability of fiber-reinforced polymer-matrix composite materials for infrastructure applications: A review **Journal of Advanced Materials**, v.30, n.4, p.3-40, 1998.
- LIAO K.; SCHULTHEISZ C.; BRINSON C.; MILKOVICH S. Environmental durability of fiber-reinforced composites for infrastructure applications: a brief overview. Proceedings of the Forth ITI Bridge NDE Users Group Conference, Absecon, NJ, November 1-3, 1995.
- LIAO, K., SCHULTHEISZ, C. R., HUNSTON, D. L. Long-term environmental fatigue of pultruded glass-fiber-reinforced composites under flexural loading **International Journal of Fatigue**, v.21, n.5, p.485-495, 1999.
- LIAO K.; TAN Y. M. Influence of moisture induced stress on in situ fiber strength degradation of unidirectional polymer composites. **Composites Part B: Engineering**, v.32, p.365-370, 2001.
- LIN Z. M.; POLYZOIS D.; SHAH A. Stability of thin-walled pultruded structural members by the finite element method. **Thin-Walled Structures**, v.24, n.1, p.1-18, 1996.
- LIN, K. Y.; YI, S. Analysis of Interlaminar Stresses in Viscoelastic Composites **International Journal of Solids and Structures**, v.27, n.7., p.929-945, 1991.

- LIU, W. K. et al. A multiple-quadrature eight-node hexaedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.154, n.1/2, p.69-132, Feb. 1998.
- LIUSTERNIK, L.A.; SOBOLEV, V.J. **Elements of Funcional Analysis**. Frederick Ungar, New York, 1961.
- MARQUES S. P. C; CREUS G. J. Geometrically Nonlinear Finite Elements Analysis of Viscoelastic Composite Materials under Mechanical and Hicrothermal Loads. **Computers and Structures**, v.53, n.2, p.449-456, 1994.
- MARQUES, S. P. C. **Um Modelo Numérico para Análise de Estruturas de Materiais Compostos Considerando Efeitos Viscoelásticos e Falhas Progressivas**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1994. 182p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC/UFRGS.
- MASUERO, J. R. **Análise de Fratura Viscoelástica pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1992. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC/UFRGS.
- MASUERO, J.R.; CREUS, G.J. Crack-Growth Initiation in Concrete-Like Materials in the Presence of Creep **Nuclear Engineering and Design**, v.156, n.1-2, p.209-218, 1995.
- MASUERO, J.R.; CREUS, G.J. Finite-Elements Analysis of Viscoelastic Fracture **International Journal of Fracture**, v.60, n.3, p.267-282, 1993.
- MIRANDA GUEDES R et al. Prediction of long-term behaviour of composite materials. **Computers and Structures**, v.76, p.183-194, 2000.
- MORGAN R. J. Aging of Polymer Matrix Fibrous Composites. In: Lee SM, editor. **International Encyclopedia of Composites**, VCH Publishers,1991.

- NISSAN A. H. H-bond dissociation in hydrogen bond dominated solids. **Macromolecules**, v.9, n.5, p.840-850, 1976.
- OCHOA, O. O.; ROSS, G. R. Hybrid Composites: Models and Tests for Environmental Aging. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v.17, n.9, p.787-799, 1998.
- OLIVEIRA B.F. **Programa computacional para modelagem de cascas de materiais compostos com análise acoplada de viscoelasticidade e falhas progressivas**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1999. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas)-PPGEC/UFRGS.
- OLIVEIRA B.F.; CREUS G. J. Viscoelastic Failure Analysis of Composite Plates and Shells. **Composite Structures**, v.49, n.4, p. 369-384, 2000.
- OLIVEIRA B.F.; CREUS G. J. Viscoelastic Failure Analysis of Composites. In: Proceedings of the 6th Annual International Conference on Composite Engineering, Orlando, USA, p.141-142, 1999.
- OLIVEIRA B.F.; CREUS G. J. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Thin-Walled Beams in Composite Material. **Thin-Walled Structures**, v.41, p.957-971, 2003.
- ONAT, E.T. Description of Mechanical Behavior of Inelastic Solids In: 5th US NATIONAL CONGRESS OF APPLIED MECHANICS, p.421-434, 1966.
- PACHECO, A. R.; CREUS, G. J. Análise viscoelástica de estruturas laminadas mediante o emprego de inversão numérica da transformada de Laplace **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, Barcelona, España, v.13, n.4, p.1-12, 1997.
- PAGANO, N. J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. **Journal of Composite Materials**, v.4, p.20-34, Jan. 1970.



- PARVATAREDDY, H. et al. Environmental Aging of High-Performance Polymeric Composites: Effects on Durability **Composites Science and Technology**, v.53, p.399-409, 1995.
- PARVATAREDDY, H.; WILSON TSANG, P. H.; DILLARD, D. A. Impact Damage Resistance and Tolerance of High-Performance Polymeric Composites Subjected to Environmental Aging **Composites Science and Technology**, v.56, p.1129-1140, 1996.
- PLAZEK, D. J. Don't cry for me Charlie Brown, or with compliance comes comprehension. **Journal of Rheology**, v.44, n.4, p.831-841, 2000.
- PLAZEK, D. J. 1995 Bingham Medal Address: Oh, thermorheological simplicity, wherefore art thou? **Journal of Rheology**, v.40, n.6, p.987-1014, 1996.
- PLAZEK D. J. Temperature dependence of the viscoelastic behavior of polystyrene. **Journal of Physical Chemistry**, v.69, p.3480-3487, 1965
- POPOV, E. P. **Resistência dos Materiais**. 2.ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1984. 507p.
- POTHAN, L. A.; THOMAS, S.; NEELAKANTAN, N. R. Short Banana Fiber Reinforced Polyester Composites: Mechanical, Failure and Aging Characteristics **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v.16, n.8, p.744-765, 1997.
- REDDY, J. N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates **Journal of Applied Mechanics**, v.51, n.4, p.745-752, 1984.
- REDDY, J. N.; CHAO W. C. A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick Laminated Anisotropic Rectangular Plates. **Nuclear Engineering and Design**, v.64, n.2, p.153-167, 1981.
- SCHAPERLY, R. A. Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media .1. Theoretical Development **International Journal of Fracture**, v.11, n.1, p.141-159, 1975.

- SCHAPERLY R. A. Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations with growing damage. **International Journal of Fracture**, v.97, n.1-4, p.33-66, 1999.
- SCHAPERLY R. A. Nonlinear viscoelastic solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.37, n.1-2, p.359-366, 2000.
- SCIDA D.; ABOURA Z.; BENZEGGAGH M. L. The effect of ageing on the damage events in woven-fibre composite materials under different loading conditions. **Composites Science and Technology**, v.62, p.551-557, 2002.
- SIMO, J. C., HUGUES, T. J. R. **Computational Inelasticity** New York: Springer-Verlag, 1998.
- STRUIK L. C. E. **Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials**. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, 1978.
- SULLIVAN J. L. Creep and physical aging of composites. **Composite Science and Technology**, v.39, p.207-232, 1990.
- SULLIVAN J. L.; BLAIS E. J.; HOUSTON D. Physical aging in the creep behaviour of thermosetting and thermoplastic composites. **Composites Science and Technology**, v.47, p.389-403, 1993.
- TOLSON, S.; ZABARAS, N. Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates. **Computers & Structures**, v.38, n.3, p. 361-376, 1991.
- TSOTSIS, T. K. Long-Term Thermo-Oxidative Aging in Composite Materials: Experimental Methods **Journal of Composite Materials**, v.32, n.11, p.1115-1135, 1998.
- TSOTSIS, T. K.; LEE, S. M. Long-Term Thermo-Oxidative Aging in Composite Materials: Failure Mechanisms **Composite Science and Technology**, v.58, p.355-368, 1998.
- VINSON, J. R., **The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials**. Kluwer Academic Publishers, 1993.

- WANG J. Z. et al. Physical aging behavior of high-performance composites. **Composites Science and Technology**, v.54, p.405-415, 1995.
- WHITE J. R.; TURNBULL A. Weathering of Polymers - Mechanisms of Degradation and Stabilization, Testing Strategies and Modeling. **Journal of Materials Science**, v.29, n.3, p.584-613, 1994.
- WILLIAMS M. L.; LANDEL R. F.; FERRY J. D. Temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. **Physical Review**, v.98, p.1549-1549, 1955.
- WILSON, D. W.; VINSON, J. R. Viscoelastic Analysis of Laminated Plate Buckling. **AIAA Journal**, v.22, n. 7, p.982-988, July 1984.
- WOOD C. A.; BRADLEY W. L. Determination of the effect of seawater on the interfacial strength of an interlayer e-glass:graphite/epoxy composite by in situ observation of transverse cracking in an environmental SEM. **Composites Science and Technology**, v.57, p.1033-1043, 1997.
- YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v.28, n.12, p.2110-2116, 1990.(ver también KUO S. R.; YANG Y. B. Tracing Postbuckling Paths of Structures Containing Multi-loops. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p.4053-4075, 1995.)