

Uma visão geral da transformação de um problema de Programação Linear para o seu dual

GUILHERME TADEWALD VARELLA

PROFESSOR ORIENTADOR: VILMAR TREVISAN

MATEMÁTICA LICENCIATURA (NOTURNO)- INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS

INTRODUÇÃO

Problemas de Programação Linear (PL) são problemas que buscam a otimização de uma função dada (chamada de função objetivo), cujas variáveis terão que respeitar uma série de restrições. A função objetivo e as restrições do problema são representadas por funções lineares. Dentre as propriedades que um problema de Programação Linear possui, está a dualidade. Dado um problema de Programação Linear, podemos sempre gerar o seu dual.

Nesse trabalho, apresentarei quais serão as transformações a serem feitas de um dado problema de Programação Linear para o seu dual, tanto algebricamente como também intuitivamente, visto que, quando é dado um exemplo do cotidiano que pode ser resolvido por Programação Linear, a construção do dual pode ser interpretada a partir de modificações no enunciado do problema. Na apresentação veremos que transformações são estas.

EXEMPLO

PROBLEMA DA DIETA

Cinco alimentos devem ser selecionados em determinada quantidade para uma dieta de modo que o consumidor tenha custo mínimo. Porém, a escolha dos alimentos deve ser dada de tal forma que sua combinação garanta um número mínimo de calorias e vitaminas.

$$\begin{aligned} \text{Mín. } & 20x_1 + 25x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 \\ & x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 21 \\ & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12 \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mín. (para garantir a oferta do consumidor)} \quad & c^T x = Q_x \\ & Ax \geq b \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

- a_{1j} (elementos da primeira linha da matriz A): quantidade de calorias que o alimento j possui.
- a_{2j} (elementos da segunda linha da matriz A): quantidade de vitaminas que o alimento j possui.
- x_j : quantidade de alimento j consumida.
- c_j : preço do alimento j .
- b_1 : **mínimo** de quantidade de calorias permitida.
- b_2 : **mínimo** de quantidade de vitaminas permitida.



DUAL

Uma empresa farmacêutica decide lançar no mercado pílulas de calorias e vitaminas, contendo uma unidade cada. Seu principal objetivo é competir com os alimentos do problema anterior, de forma que um indivíduo possa se alimentar exclusivamente das pílulas e não gaste mais do que gastaria com os alimentos.

$$\begin{aligned} \text{Máx. } & 21w_1 + 12w_2 \\ & 1w_1 \leq 20 \\ & 1w_2 \leq 25 \\ & 1w_1 + 2w_2 \leq 31 \\ & 1w_1 + 1w_2 \leq 11 \\ & 2w_1 + 1w_2 \leq 12 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Máx. (para garantir o lucro da empresa)

$$\begin{aligned} b^T w &= Q_w \\ A^T w &\leq c \\ w_j &\geq 0 \end{aligned}$$

- a_{1j} (elementos da primeira coluna da matriz A^T): quantidade de calorias que o alimento j possui.
- a_{2j} (elementos da segunda coluna da matriz A^T): quantidade de vitaminas que o alimento j possui. (A utilidade dos coeficientes a_{ij} neste problema será mais bem descrita quando formos falar sobre o c_j .)
- w_j $\begin{cases} w_1: \text{preço de uma pílula de caloria.} \\ w_2: \text{preço de uma pílula de vitamina.} \end{cases}$
- c_j : preço **máximo** que certa combinação ($a_{1j} + a_{2j}$) de pílulas (onde a_{1j} é a quantidade de caloria enquanto a_{2j} é a de vitamina) pode ter (isto está relacionado com alimento j que tiver tal combinação).
- b_1 : quantidade de pílulas de caloria que podemos utilizar na dieta (quantas unidades de calorias).
- b_2 : quantidade de pílulas de vitamina que podemos utilizar na dieta (quantas unidades de vitaminas).

RELAÇÕES ENTRE O PRIMAL E O DUAL

	MATRICIALMENTE	COEFICIENTES DE A	COEFICIENTES DE c	COEFICIENTES DE b	VARIÁVEIS (x e w)
Primal	$\begin{matrix} A & x & \geq & b \\ c^T & & = & Q_x \end{matrix}$ <p>(Mín.)</p>	Vimos que os coeficientes de A no primal desenvolvem o papel de ilustrar quantos nutrientes possui cada um dos 5 alimentos.	No primal, a compra de um determinado alimento (com certa composição de nutrientes) tem um preço específico (coeficientes de c).	No primal, os coeficientes de b determinam um valor mínimo de vitaminas e calorias que o consumo dos alimentos deve cumprir.	No primal, a quantidade de cada um dos alimentos (solução de x) vai ser dada da maneira mais barata possível (minimizar) de se realizar a dieta.
Dual	$\begin{matrix} A^T & w & \leq & c \\ b^T & & = & Q_w \end{matrix}$ <p>(Máx.)</p>	Já no dual, vemos que eles determinam 5 combinações diferentes de nutrientes (5 combinações de unidades de pílulas).	A mesma composição utilizada nos alimentos do primal deverá ser dada no dual de tal forma que não ultrapasse o preço dos alimentos (valor máximo).	No dual, eles serão exatamente o número de unidades de calorias e vitaminas que será utilizada na dieta, por meio das pílulas que contém uma unidade de cada.	No dual, o preço das pílulas (solução de w) será dada de tal maneira que seja a mais cara possível (maximizar) de se realizar a dieta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em problemas de PL voltadas pra realidade, é muito comum enxergar o seu dual como uma outra alternativa de resolver aquele problema, visto que, por resultado teórico (Teorema da Dualidade), a função otimizada tanto no primal quanto no dual têm o mesmo valor. A diferença é que os coeficientes da função objetivo de um tornam-se restrições para o outro e, enquanto queremos maximizar a função objetivo e atribuir valores máximos nas restrições de um, queremos minimizar a função objetivo e atribuir valores mínimos nas restrições de outro. Em outras palavras, também podemos dizer que as soluções básicas viáveis do problema que utiliza a maximização atribuem valores menores que o valor da função otimizada, enquanto que as do problema que utiliza minimização atribui valores maiores.