Uma Demonstração do Teorema de Dirichlet sobre Primos em Progressões Aritméticas

Gustavo Lopes Rodrigues (gustaz123@yahoo.com.br)

Alveri Alves Sant'Ana (orientador)

Introdução

Bem sabemos que o conjunto $\mathbb{N}$ possui infinitos números primos. Mas, e se dirijirmos a nossa atenção para os conjuntos da forma $\{an+b;\ n \in \mathbb{N}\}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, em que circunstâncias poderemos afirmar que esses também possuirão infinitos primos? Se a e b forem divisíveis por um natural $d > 1$, então todo elemento da progressão aritmética $an + b$ será divisível por d, e portanto o conjunto em consideração não poderá ter mais que um primo. Logo, a condição de que a e b sejam primos entre si é necessária. O que Lejeune Dirichlet fez em 1837 foi mostrar que essa condição é também suficiente. Esse resultado tornou-se famoso e é hoje conhecido como o *teorema de Dirichlet sobre primos em progressões aritméticas*.

O objetivo deste pôster é o de apresentar uma seleção de definições e proposições utilizadas numa demonstração do teorema em consideração que julgo interessantes e que penso terem um caráter revelador. Ao final, exporei meus objetivos para com a apresentação como uma forma de convite.

Definições

Ao provar esse teorema, um aspecto interessante que se apresenta é o uso de ferramentas da análise na resolução de problemas que residem no escopo dos inteiros. Por exemplo, entre as várias demonstrações da infinitude dos primos em $\mathbb{N}$, uma que se destaca é a de fazermos isso por provarmos que a série $\sum p^{-1}$ diverge (com $p \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ representa o conjunto dos primos naturais). Analogamente, quando a e b forem primos entre si, mostrarei que a série $\sum p^{-1} \log p$ diverge (com $p \in \mathcal{P} \cap \{an+b;\ n \in \mathbb{N}\}$).

Com essa finalidade, introduzimos a notação Big-Oh: escrevemos $f(x) = O(g(x))$ $(x \in S)$ quando $\exists C > 0$, $\forall x \in S$, $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Uma expressão da forma $f(x) = g(x) + O(h(x))$ $(x \in S)$ significa que $f(x) - g(x) = O(h(x))$ $(x \in S)$.

Para nos apercebermos do porquê dessa notação ser interessante, comparêmo-la com a noção de limite. Esta serve para nos informar apenas a existência e a especificação de um valor limite. Em contrapartida, aquela nos fornece uma quantidade adicional de informações acerca do comportamento assintótico da função sob análise, e ainda assim sua manipulação permanece fácil o suficiente. Por exemplo, observemos as seguintes expressões

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)\ (x \geq 1)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. A primeira nos informa apenas que a série harmônica diverge, enquanto que a segunda nos diz inclusive o quão rápido ela diverge.

Chamaremos de *funções aritméticas* as funções complexas definidas nos naturais. Alguns exemplos relevantes:

- Função totiente de Euler φ:
$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|\ (n \geq 1)$$
- Dirichlet characters χ: Um character f de um grupo G é um homomorfismo de G no grupo multiplicativo dos números complexos. A função $f(n) = 1$ $(n \in G)$ é conhecida como o *character principal* de G. Para cada character f do grupo $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*$ associamos o Dirichlet character χ_f definido por
$$\chi_f(n) = \begin{cases} f(\bar{n}) & ((n,a) = 1) \\ 0 & ((n,a) > 1) \end{cases}$$
com $n \geq 1$. Denotamos por χ_1 o Dirichlet character associado ao character principal de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*$.

Chamamos de *séries de Dirichlet* as expressões da forma

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Proposições

Referente às séries de Dirichlet, para as presentes considerações será suficiente demonstrar que para $\chi \neq \chi_1$ teremos $L(1,\chi)$ convergente e $L(1,\chi) \neq 0$.

Um resultado crucial para a demonstração em questão é conhecido como o *Teorema Tauberiano de Shapiro*, provado em 1950. O que realmente nos interessa é na verdade a seguinte consequência desse teorema

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)\ (x \geq 1) \tag{1}$$

A partir dessa fórmula, construimos uma série de lemas auxiliares que nos conduzem à seguinte expressão (onde $(a,b) = 1$)

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv b \pmod{a} \\ p \text{ primo}}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(a)} \log x + O(1)\ (x > 1) \tag{2}$$

donde o teorema de Dirichlet é então derivado.

Note que o termo principal à direita de (2) independe de b. Temos então que os primos em cada uma das $\varphi(a)$ classes de equivalência inversíveis módulo a contribuem com a mesma parcela ao termo principal à direita de (1). Nesse contexto, as Dirichlet characters desempenharão um papel especial, através de uma relação de ortogonalidade cuja função aqui será o de separar os termos desejados de (1).

Objetivos

Embora esse teorema seja bastante conhecido e mencionado em muitos livros de introdução à Teoria dos Números, poucos na graduação são os que se depararam com uma demonstração dele. Esses mesmos livros que o citam, sempre dizem que 'uma prova do mesmo se encontra fora do escopo deste livro'. Sendo assim, me proponho a trazer aos ouvintes uma demonstração baseada no artigo de Harold Shapiro *On Primes in Arithmetic Progressions II*, publicado em 1950.

Referências

Tom M. Apostol. *Introduction to analytic number theory.* New York: Springer-Verlag, 1976.

N. G. de Bruijn. *Asymptotic methods in analysis.* Amsterdan: North-Holland Pub. Co., 1958.