

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DIFUSIVAS DA TEORIA
GERAL DE PERTURBAÇÃO PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA DE
LAPLACE**

por

Rosandra Santos Mottola Lemos

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2005

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DIFUSIVAS DA TEORIA
GERAL DE PERTURBAÇÃO PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA DE
LAPLACE**

por

Rosandra Santos Mottola Lemos

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Mena Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva

Aprovada por:

Prof. Dr. Volnei Borges (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Cláudio Graça (UFSM/RS)

Prof. Dr. Roberto Garcia(UFRJ/RJ)

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 14 de Janeiro de 2005

Para minha filha Deborah

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais uma etapa conquistada.

Ao professor Marco Tullio M. B. de Vilhena por sempre ter acreditado em mim.

Aos meus pais por todo o amor, o carinho e a dedicação que sempre estiveram presentes em nossas vidas .

Ao meu marido Carlos Alberto por ter sido paciente e compreensivo nas horas mais difíceis .

Ao professor Sérgio Wortmann pela amizade e pelas inúmeras ajudas prestadas .

E à CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma solução analítica para as equações difusivas unidimensionais da Teoria Geral de Perturbação em uma placa heterogênea, isto é, apresentamos as soluções analíticas para os problemas de autovalor para o fluxo de nêutrons e para o fluxo adjunto de nêutrons, para o cálculo do fator de multiplicação efetivo (k_{eff}), para o problema de fonte fixa e para o problema de função auxiliar. Resolvemos todos os problemas mencionados aplicando a Transformada de Laplace em uma placa heterogênea considerando um modelo de dois grupos de energia e realizamos a inversão de Laplace do fluxo transformado analiticamente através da técnica da expansão de Heaviside. Conhecendo o fluxo de nêutrons, exceto pelas constantes de integração, aplicamos as condições de contorno e de interface e resolvemos as equações algébricas homogêneas para o fator de multiplicação efetivo pelo método da bissecção. Obtemos o fluxo de nêutrons através da avaliação das constantes de integração para uma potência prescrita. Exemplificamos a metodologia proposta para uma placa com duas regiões e comparamos os resultados obtidos com os existentes na literatura.

ABSTRACT

In this work we present an analytical solution for the one-dimensional diffusion equations of the General Perturbation Theory in a multilayered slab, namely, the eigenvalue problem for the neutron flux and adjoint flux, the effective multiplication factor (k_{eff}), the fixed source problem and the auxiliary function problem. We solve all the problems regarding flux calculations by the application of the Laplace Transform in a multilayered slab considering two-group of energy and we perform the Laplace Inversion of the transformed flux analytically by the Heaviside expansion technique. Knowing the neutron flux, except for the integration constants, we apply the boundary and interface conditions and solve the resulting algebraic homogeneous equations for the effective multiplication factor by the bisection method. We evaluate the neutron flux by the evaluation of the integration constants for a prescribed power. We specialize the application for a two-layered slab and we perform numerical comparisons with the results in the literature.

ÍNDICE

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 2 | CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE FONTE FIXA | 5 |
| 2.1 | INTRODUÇÃO | 5 |
| 2.2 | PROBLEMA REAL DE FONTE FIXA | 5 |
| 2.3 | FUNÇÕES AUXILIARES | 6 |
| 2.4 | FUNÇÃO IMPORTÂNCIA | 9 |
| 2.4.1 | FUNÇÃO IMPORTÂNCIA REAL | 9 |
| 2.4.2 | FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA | 9 |
| 2.5 | EXEMPLOS DE FONTES FIXAS | 10 |
| 2.5.1 | FUNÇÃO AUXILIAR | 10 |
| 2.5.2 | FUNÇÃO IMPORTÂNCIA REAL | 10 |
| 2.5.3 | FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA | 11 |
| 3 | SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TEORIA GERAL DE PERTURBAÇÃO UTILIZANDO A TRANSFORMADA DE LAPLACE | 13 |
| 3.1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 3.2 | SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O FLUXO E O FLUXO ADJUNTO DE NÊUTRONS | 13 |
| 3.3 | SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DE FONTE FIXA | 20 |
| 3.3.1 | Verificação da Solução para o Problema de Fonte Fixa | 20 |
| 3.3.2 | Solução Analítica para o Problema de Fonte Fixa | 23 |
| 3.4 | SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DE FUNÇÃO AUXILIAR . | 26 |
| 4 | SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA PARA O FLUXO E O FLUXO ADJUNTO DE NÊUTRONS | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.1 | INTRODUÇÃO | 30 |
| 4.2 | SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA O FLUXO DE NÊUTRONS | 30 |
| 5 | SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DE FONTE FIXA | 41 |
| 5.1 | INTRODUÇÃO | 41 |
| 5.2 | VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE FONTE FIXA . | 41 |
| 5.3 | SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE FONTE FIXA | 43 |
| 6 | SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DE FUNÇÃO AUXILIAR..... | 46 |
| 7 | CONCLUSÃO | 55 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 56 |

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Romanos

| | |
|------------------|---|
| A: | matriz quadrada de ordem N que representa o operador diferencial da equação de difusão. |
| $a_i^{(r)}(x)$: | coeficientes para simplificação da notação definidos pelas Eqs. 3.6. |
| $b_i^{(r)}(x)$: | coeficientes para simplificação da notação definidos pelas Eqs. 3.7. |
| $c_i^{(r)}(x)$: | coeficientes de integração provenientes da Transformada de Laplace. |
| $D_g^{(r)}(x)$: | coeficiente de difusão de nêutrons no grupo g , região r e posição (x) . |
| E_R : | energia liberada por fissão. |
| F: | matriz com os termos de fissão. |
| g : | grupo de energia. |
| k_{eff} : | fator de multiplicação efetivo. |
| L : | espessura total da placa. |
| N : | número de regiões do domínio. |
| $M_{ij}^{(r)}$: | coeficientes das constantes $c_i^{(r)}$ definidos nas Eqs.3.46-3.53. |
| P : | potência do reator. |
| p : | parâmetro nuclear a ser perturbado. |
| r : | região do domínio. |
| S: | vetor de fonte virtual. |
| s : | parâmetro complexo proveniente da Transformada de Laplace. |
| $S_g^{(r)}$: | fonte virtual para o problema de função auxiliar. |

1. Caracteres Gregos

| | |
|--------------------------|--|
| Δ : | matriz diagonal de autovalores da matriz do problema transformado da velocidade. |
| λ : | parâmetro que entra na expressão da fonte virtual. |
| $\nu\Sigma_{fg}^{(r)}$: | produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão no grupo g , na região r e na posição (x) . |

- $\phi_g^{(r)}(x)$: fluxo de nêutrons presentes no grupo g, na região r e na posição (x).
 $\phi_g^{*(r)}(x)$: fluxo adjunto de nêutrons presentes no grupo g, na região r e na posição (x).
 $\Phi_g^{(r)}(s)$: fluxo de nêutrons transformado.
 $\psi_g^{(r)}(x)$: variável que representa a solução para o problema de fonte fixa.
 $\Sigma_{gg'}^{(r)}$: seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g, na região e na posição (x).
 $\Sigma_{Rg}^{(r)}$: seção de choque macroscópica de remoção no grupo g, na região r e na posição (x).
 $\varphi_g^{(r)}(x)$: variável que representa a solução para o problema de função auxiliar.
 χ_g : espectro integrado de fissão.

ÍNDICE DE FIGURAS

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 1 pela formulação proposta | 36 |
| 4.2 | Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 1 obtido por [Thomé, 1997] | 37 |
| 4.3 | Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 2 pela formulação proposta | 37 |
| 4.4 | Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 2 obtido por [Thomé, 1997] | 38 |
| 4.5 | Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 1 pela formulação proposta | 38 |
| 4.6 | Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 1 obtido por [Thomé, 1997] | 39 |
| 4.7 | Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 2 pela formulação proposta | 39 |
| 4.8 | Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 2 obtido por [Thomé, 1997] | 40 |
| 5.1 | Gráfico do Fluxo de Nêutrons | 45 |
| 5.2 | Gráfico da Solução para o Problema de Fonte Fixa | 45 |
| 6.1 | Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 1 obtido pela formulação proposta . . | 52 |
| 6.2 | Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 1 obtido por [Thomé, 1997] | 52 |
| 6.3 | Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 2 obtido pela formulação proposta . . | 53 |
| 6.4 | Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 2 obtido por [Thomé, 1997] | 53 |

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde o começo dos estudos da Física de Reatores que a Teoria de Perturbação vem sendo usada. Citando o trabalho de Silva, [Silva, 1989], o primeiro trabalho nesta área foi proposto por Wigner, [Wigner, 1945], para estudar valores de reatividade e a formulação que ele desenvolveu para este fim é hoje conhecida como Teoria de Perturbação Convencional (CPT). Todavia, devemos ressaltar que outros autores deram significantes contribuições à teoria. Relembramos, em particular, Soodak, [Soodak, 1948], que foi quem primeiro tentou dar interpretação física ao chamado fluxo de adjunto (consistentemente usado pela CPT), Usachev [Usachev, 1955] que desenvolveu uma nova formulação da teoria incluindo os nêutrons retardados e Lewins [Lewins, 1960] que identificou o fluxo adjunto como sendo a importância associada a um detector (resposta ou quantidade integral).

Além disso, mesmo fora do domínio da Física de Reatores, outros autores tais como Kadomtzev [Kadomtzev, 1957], Morse e Feshbach [Morse e Feshbach, 1953] e Pontryagin [Pontryagin, 1962] também contribuíram de forma significativa para consolidar a Teoria de Perturbação.

Mas com o conceito de importância, introduzido por Lewins, outros formalismos e métodos da Teoria de Perturbação foram desenvolvidos. Mencionamos, em particular, o trabalho pioneiro de Usachev [Usachev, 1964], que fez uso do conceito de ciclos de geração de nêutrons, e aquele de Lewins [Usachev, 1964] que, através do uso de técnicas variacionais, estendeu o formalismo da Teoria de Perturbação para incluir problemas não lineares. Significantes contribuições também foram dadas por Pomraning, Gandini, Komata, Stacey, Seki, Ronen, Becker, Greenspan et alli, Oblov, Harris e Backer, Williams e Cacuci et alli.

No Brasil, em particular na COPPE, os primeiros trabalhos que fizeram uso do formalismo da GPT foram desenvolvidos nas teses de mestrado de Cabral [Cabral, 1980],

Silva [Silva, 1981] e De Santo [Santo, 1982].

A teoria da difusão de nêutrons é amplamente utilizada na análise da criticalidade de reatores nucleares cujo conhecimento é fundamental em projetos neutrônicos para o funcionamento e manutenção dos mesmos. O problema de criticalidade, tratado através da equação da difusão, é um problema de autovalor, cuja solução fornece o fator de multiplicação (o autovalor) e o fluxo de nêutrons (o autovetor correspondente), a partir do qual podemos obter a distribuição de potência no núcleo do reator. A solução deste problema de autovalor, ou problema homogêneo, é utilizada para se definir o problema de fonte fixa (problema não homogêneo). O problema não homogêneo também aparece quando estamos considerando as chamadas funções auxiliares [Gandini, 1982], [White, 1990] ou então a função importância [Gandini, 1982], [Gandini, 1967], [Bell e Glasstone, 1970]. A fonte fixa nestes casos pode depender tanto do fluxo de nêutrons quanto do fluxo adjunto, ambos soluções de problemas de autovalor. Temos, então, três classes de problemas não-homogêneos: o problema de fonte fixa propriamente dita, de funções auxiliares e de função importância.

Podemos aplicar os métodos de diferenças finitas e dos elementos finitos ou os métodos nodais para discretizar as equações de fonte fixa, obter um sistema de equações lineares e algébricas e aplicar uma das técnicas iterativas bem estabelecidas para resolver tal sistema. Vale citar como exemplos os esquemas iterativos SOR (Successive Overrelaxation)[Wachspress, 1966], [Greenspan, 1968], [Press, 1992] ou ADI (Alternating Direction Implicit) [Bell e Glasstone, 1970], [Greenspan, 1968], [Press, 1992], [Montagnini, 1994]. Entretanto, estas técnicas iterativas necessitam de pelo menos um parâmetro de aceleração e os seus valores ótimos geralmente são difíceis de serem obtidos.

Todos os métodos de discretização citados anteriormente vêm sendo utilizados de modo eficiente na solução de problemas de criticalidade. O método de diferenças finitas vem sendo aplicado na equação da difusão de nêutrons em duas dimensões desde a década de 50 [Wachspress, 1966] e até os dias atuais ainda é muito utilizado. No entanto, este método deixa de ser eficiente quando o problema envolve um número muito alto de pontos de malha, aumentando o tempo de execução e consumindo espaço em memória para a sua execução. Essas dificuldades motivaram a pesquisa por métodos que utilizassem um número menor de pontos de malha sem reduzirem a precisão nos cálculos. Objetivando essas propriedades, foram desenvolvidos os métodos nodais [Lawrence, 1986]. Tais métodos apresentam um

espaçamento de malha maior do que aquele que se faz necessário no método de diferenças finitas.

Os métodos nodais podem ser classificados em métodos analíticos e métodos polinomiais [Lawrence, 1986]. Os métodos nodais analíticos estão baseados nas soluções analíticas das equações integradas transversalmente. Como exemplos desta classe de métodos podemos citar o ANM (Analytic Nodal Method)[Shober, 1977], o NGFM (Nodal Green's Function Method) [Lawrence, 1980] e o SNM (Spectral Nodal Method) [De Barros, 1992]. Já os métodos nodais polinomiais usam polinômios para representar os fluxos. Dentro desta classe temos como exemplos o NEM (Nodal Expansion Method) [Bennewitz, 1975] , um método de correntes de interface, que usa polinômios do quarto grau como solução das equações integradas transversalmente e o FEM (Flux Expansion Method), para grandezas médias [Montagnini, 1994], que usa um polinômio do terceiro grau para representar o próprio fluxo de nêutrons.

O método dos pseudos-harmônicos foi criado com o objetivo de contornar certas dificuldades na aplicação dos tradicionais métodos da Teoria de Perturbação. Esta metodologia tem mostrado a sua eficiência e é muito utilizada em Física de Reatores [Gomit, 1985], [Claro, 1992] . Na referência [De Abreu, 1988] de Abreu propôs uma versão alternativa do método dos pseudos-harmônicos e a mesma foi aplicada em duas dimensões, utilizando-se a discretização em diferenças finitas. Já no trabalho de Claro [Claro, 1992], foi proposta a união do método dos pseudos-harmônicos com a discretização nodal, para resolver problemas perturbativos.

Do formalismo do método dos pseudos-harmônicos decorre um sistema de equações não-homogêneas e os pseudos-harmônicos são usados para resolver tais equações. Devido a esta característica do método dos pseudos-harmônicos, surgiu a idéia de utilizá-lo na solução de problemas de fonte fixa, que são problemas não-homogêneos. Recentemente no trabalho de [Lima, 2004], o problema de fonte fixa foi resolvido combinando-se o método de expansão em pseudos-harmônicos com a discretização nodal FEM. Tratando-se ainda da solução do problema de criticalidade, no trabalho de Derivi et alii [Derivi, 2000] , foi utilizado o método \mathcal{LTS}_N em meio heterogêneo com multigrupos de energia em geometria cartesiana unidimensional (placas planas) e espalhamento isotrópico.

Recentemente, Lemos et alii [Lemos, 2002], resolveram de forma analítica o problema

de autovalor para o fluxo de nêutrons. A idéia básica consiste em aplicar a Transformada de Laplace no conjunto de equações de difusão numa placa plana em um meio heterogêneo considerando um modelo de multigrupo de energia. O fluxo escalar transformado é obtido resolvendo um sistema de equações algébricas e é recuperado através da inversão da Transformada de Laplace utilizando a técnica da expansão de Heaviside. Aplicando as condições de contorno e de continuidade do fluxo nas interfaces obtemos um sistema linear algébrico homogêneo cujo valor que anula o determinante da matriz associada a este sistema é o valor do fator de multiplicação efetivo procurado. Tal valor é encontrado ao aplicarmos o método da bissecção na equação transcendental obtida para o fator de multiplicação efetivo.

Outro avanço obtido por Lemos et alii [Lemos, 2003], foi no sentido de reduzir o número de constantes de integração provenientes da solução da equação da difusão. Isto é feito ao aplicarmos previamente as condições de continuidade do fluxo e considerando o desacoplamento da placa. Recentemente, Lemos [Lemos, 2004], resolveu de forma analítica o problema de fonte fixa, apresentando resultados numéricos para uma placa plana heterogênea considerando um modelo de duas regiões e dois grupos de energia.

Além disso, apresentamos simulações numéricas para os problemas de autovalor para o fluxo e para o fluxo adjunto de nêutrons, para o problema de fonte fixa e para o problema de função auxiliar, considerando uma placa plana com duas regiões e um modelo com dois grupos de energia.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos as equações que governam os problemas de autovalor para o fluxo e para o fluxo adjunto de nêutrons, as equações que governam o problema de fonte fixa e as equações que governam o problema de função auxiliar. No capítulo 3, apresentamos a metodologia proposta de forma genérica, para um número genérico de regiões. No capítulo 4, simulações numéricas para os problemas de autovalor para o fluxo e para o fluxo adjunto de nêutrons são apresentadas. No capítulo 5 as simulações numéricas mostradas, são para o problema de fonte fixa. E, finalmente, no capítulo 6, mostramos os resultados para o problema de função auxiliar.

CAPÍTULO 2

CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE FONTE FIXA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos as três diferentes classes de problemas de fonte fixa, para uma dimensão em geometria Cartesiana, e alguns exemplos desses problemas são descritos.

2.2 PROBLEMA REAL DE FONTE FIXA

Para este tipo de problema a equação da difusão unidimensional a dois grupos de energia é da seguinte forma:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_g(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_g(x) \right) + \Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) = \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}(x) \phi_{g'}(x) + S_g(x) \quad (2.1)$$

onde:

$D_g(x)$ é o coeficiente de difusão de nêutrons no grupo g e na posição (x) ,

$\phi_g(x)$ é o fluxo de nêutrons presentes no grupo g e na posição (x) ,

$\Sigma_{Rg}(x)$ é a seção de choque macroscópica de remoção no grupo g e na posição (x) ,

χ_g é o espectro integrado de nêutrons de fissão no grupo g ,

$\nu \Sigma_{fg'}(x)$ é o produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão no grupo g' e na posição (x) ,

$\Sigma_{gg'}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g

e na posição (x) e

$S_g(x)$ é uma fonte de nêutrons.

2.3 FUNÇÕES AUXILIARES

Uma função auxiliar é definida como sendo a derivada do fluxo de nêutrons com relação a um parâmetro nuclear qualquer e tem um papel importante quando se pretende aplicar a teoria de perturbação generalizada (GPT) em altas ordens [White, 1990], [Gandini, 1967], [Gandini, 1980]. Podemos encontrar na literatura uma variedade de trabalhos que envolvem estas funções. Como exemplo, citamos o trabalho de White [White, 1990] onde é desenvolvido um método prático para se implementar a GPT em segunda ordem. Podemos construir o problema de fonte fixa, relacionado às funções auxiliares, partindo-se do seguinte problema de autovalor (equação da difusão de nêutrons unidimensional a dois grupos):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_g(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_g(x) \right) + \Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}(x) \phi_{g'}(x) \quad (2.2)$$

que também pode ser representado matricialmente por,

$$\mathbf{A}\phi(x) = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{F}\phi(x) \quad (2.3)$$

ou ainda por,

$$\mathbf{A}\phi(x) = \lambda \mathbf{F}\phi(x) \quad (2.4)$$

onde definimos,

$$\lambda = \frac{1}{k_{eff}}, \quad (2.5)$$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

é o vetor do fluxo de nêutrons,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{S}, \quad (2.7)$$

onde,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1(x) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right) + \Sigma_{R1}(x) & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2(x) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right) + \Sigma_{R2}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

é a matriz das seções de choque de espalhamento e, finalmente,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \chi_1 \nu \Sigma_{f1}(x) & \chi_1 \nu \Sigma_{f2}(x) \\ \chi_2 \nu \Sigma_{f1}(x) & \chi_2 \nu \Sigma_{f2}(x) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

é a matriz dos produtos do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão.

Derivando a equação 2.4 com relação a um parâmetro qualquer do sistema, obtemos,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \phi(x) + \mathbf{A} \frac{\partial \phi(x)}{\partial p} = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \mathbf{F} \phi(x) + \lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \phi(x) + \lambda \mathbf{F} \frac{\partial \phi(x)}{\partial p} \quad (2.11)$$

reagrupando os termos na última equação,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{F}) \frac{\partial \phi(x)}{\partial p} = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \mathbf{F} \phi(x) + \left(\lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \right) \phi(x) \quad (2.12)$$

onde os termos presentes no lado direito da equação acima constituem a fonte fixa do problema.

Como o operador $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{F})$ é singular (vide problema de autovalor), a equação 2.12 só terá solução se

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p} \int_0^x \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^* \mathbf{F} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_0^x \boldsymbol{\phi}(x)^* \left(\lambda \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial p} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p} \right) \boldsymbol{\phi}(x) dx = 0 \quad (2.13)$$

isto deve-se ao Teorema da Alternativa de Fredholm e implica que a fonte fixa do problema deve ser virtual.

Sendo assim, temos que,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p} = \frac{\int_0^x \boldsymbol{\phi}(x)^* \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial p} - \lambda \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p} \right) \boldsymbol{\phi}(x) dx}{\int_0^x \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^* \mathbf{F} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (2.14)$$

Observamos que para resolver a equação 2.12 é necessário calcular previamente o fluxo de nêutrons $\boldsymbol{\phi}(x)$, o k_{eff} , que nesta equação é um parâmetro conhecido, e o fluxo adjunto de nêutrons $\boldsymbol{\phi}(x)^*$.

A propósito, a equação para o fluxo adjunto de nêutrons tem a seguinte forma,

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} (D_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^*(x)) + \Sigma_{R1}(x) \phi_1^*(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f1}(x) \sum_{g'=1}^2 \chi_{g'} \phi_{g'}^*(x) + \Sigma_{21} \phi_2^*(x) \\ -\frac{\partial}{\partial x} (D_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^*(x)) + \Sigma_{R2}(x) \phi_2^*(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f2}(x) \sum_{g'=1}^2 \chi_{g'} \phi_{g'}^*(x) + \Sigma_{12} \phi_1^*(x) \end{cases} \quad (2.15)$$

que por sua vez também constitui um problema de autovalor que pode ser representado matricialmente por,

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\phi}^*(x) = \lambda \mathbf{F}^T \boldsymbol{\phi}^*(x) \quad (2.16)$$

onde $\boldsymbol{\phi}^*(x)$ é o vetor do fluxo adjunto de nêutrons e \mathbf{A} , \mathbf{F} e λ são os mesmos definidos anteriormente.

2.4 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA

Na implementação dos métodos de teoria de perturbação generalizada (GPT) em altas ordens precisamos não só calcular as funções auxiliares como também determinar as funções importâncias associadas às quantidades integrais de interesse [White, 1990], [Bell e Glasstone, 1970], [Wachspress, 1966], [Gandini, 1980].

Dependendo da quantidade integral, necessitamos calcular a chamada função importância real ou a função importância adjunta ou até mesmo ambas. Nas subseções seguintes apresentamos as equações que governam tais funções.

2.4.1 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA REAL

O problema de fonte fixa para função importância real é da seguinte forma:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_g(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_g(x) \right) + \Sigma_{Rg}(x) \psi_g(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \psi_{g'}(x) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}(x) \psi_{g'}(x) + S_g(x) \quad (2.17)$$

onde a fonte fixa $S_g(x)$, que é uma fonte virtual, depende do fluxo de nêutrons e k_{eff} , como no caso de funções auxiliares, também é um parâmetro conhecido do problema de autovalor.

2.4.2 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA

O problema de fonte fixa para função importância adjunta ($\psi_g^*(x)$) é da seguinte forma:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_g(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_g^*(x) \right) + \Sigma_{Rg}(x) \psi_g^*(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{fg}(x) \sum_{g'=1}^2 \chi_{g'} \psi_{g'}^*(x) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{g'g}(x) \psi_{g'}^*(x) + S_g^+(x) \quad (2.18)$$

onde $S_g^+(x)$, também uma fonte virtual, depende do fluxo adjunto de nêutrons e k_{eff} , também é aqui um parâmetro conhecido.

2.5 EXEMPLOS DE FONTES FIXAS

2.5.1 FUNÇÃO AUXILIAR

Para o caso do parâmetro nuclear p_k ser a seção de choque macroscópica de captura do grupo g' , para um dado tipo de região do sistema, das equações 2.12 e 2.14, vem

$$S_{g,k}(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) - \frac{\partial \Sigma_{Rg}(x)}{\partial \Sigma_{cg'}^{tipo}} \phi_g(x) \quad (2.19)$$

e

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = \frac{\langle \sum_{g=1}^2 \phi_g^*(x) \frac{\partial \Sigma_{Rg}(x)}{\partial \Sigma_{cg'}^{tipo}} \phi_g(x) \rangle}{\langle \sum_{g=1}^2 \phi_g^*(x) \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) \rangle} \quad (2.20)$$

onde:

$$\frac{\partial \Sigma_{Rg}^{ij}(x)}{\partial \Sigma_{cg'}^{tipo}} = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g' \text{ e } x \in \text{tipo,} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.21)$$

onde *tipo* refere-se à região do domínio que estamos tratando e o símbolo $\langle \rangle$ indica integração em x .

2.5.2 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA REAL

Para uma quantidade integral representando um valor de reatividade, [Silva, 1989], temos que

$$S_g(x) = \frac{1}{Q_1} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_g(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_g(x) \right) + \right. \quad (2.22)$$

$$\left. \left(\Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) - \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}(x) \phi_{g'}(x) \right) \right] - \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{Q_2} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) \quad (2.24)$$

onde:

$$Q_1 = \langle \Phi^{*T}(x) A \Phi(x) \rangle, \quad (2.25)$$

e

$$Q_2 = \langle \Phi^{*T}(x) F \Phi(x) \rangle, \quad (2.26)$$

com

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\Phi^{*T}(x) = \begin{bmatrix} \phi_1^*(x) & \phi_2^*(x) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.5.3 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA

Para o caso de uma quantidade integral representando uma taxa de reação qualquer, [Silva, 1989], temos

$$S_g^+(x) = \frac{1}{Q_1} \Sigma_{xg}(x) - \frac{1}{Q_2} \nu \Sigma_{fg}(x) \quad (2.29)$$

onde:

$$Q_1 \equiv \left\langle \sum_{g=1}^2 \Sigma_{xg}(x) \phi_g(x) \right\rangle \quad (2.30)$$

e

$$Q_2 \equiv \left\langle \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}(x) \phi_g(x) \right\rangle, \quad (2.31)$$

com $\Sigma_{xg}(x)$ sendo a seção de choque para a reação do tipo x.

Neste trabalho resolvemos os problemas de autovalor para o fluxo de nêutrons e para o fluxo adjunto de nêutrons, para o cálculo do fator de multiplicação efetivo, para o problema de fonte fixa e para o problema de função auxiliar, pelo método da Transformada de Laplace para um domínio composto por N regiões e dois grupos de energia. Os resultados numéricos, entretanto, serão obtidos para um domínio composto por duas regiões e dois grupos de energia.

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TEORIA GERAL DE PERTURBAÇÃO UTILIZANDO A TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos a solução analítica dos problemas de fluxo de nêutrons e fluxo adjunto de nêutrons, de fonte fixa e do cálculo da função auxiliar em uma placa plana heterogênea com N regiões, aplicando a técnica da Transformada de Laplace.

3.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O FLUXO E O FLUXO ADJUNTO DE NÊUTRONS

Para resolver o problema de fonte fixa 2.12 em placa plana heterogênea e dois grupos de energia em forma analítica, resolvemos a equação de difusão estacionária aplicando a Transformada de Laplace na variável espacial.

Inicialmente resolvemos o seguinte problema de autovalores,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{(r)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(r)} \phi_1^{(r)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x) + \Sigma_{12}^{(r)} \phi_2^{(r)}(x), \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{(r)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(r)} \phi_2^{(r)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x) + \Sigma_{21}^{(r)} \phi_1^{(r)}(x), \quad (3.2)$$

onde:

(r) indica a região do domínio que estamos tratando,

$D_g^{(r)}$ é o coeficiente de difusão de nêutrons no grupo g, na região r,

$\phi_g^{(r)}(x)$ é o fluxo de nêutrons presentes no grupo g , na região r ,

$\Sigma_{Rg}^{(r)}$ é a seção de choque macroscópica de remoção no grupo g , na região r ,

χ_g é o espectro integrado de nêutrons no grupo g ,

$\nu\Sigma_{fg}^{(r)}$ é o produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão no grupo g , na região r e

$\Sigma_{gg'}^{(r)}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g , na região r .

Com condições de contorno,

$$\frac{\partial\phi_g^{(1)}}{\partial x}(0) = 0, \quad \phi_g^{(N)}(L) = 0, \quad (3.3)$$

e de continuidade de fluxo e corrente nas interfaces,

$$\phi_g^{(i)}(x_i) = \phi_g^{(i+1)}(x_i), \quad (3.4)$$

$$-D_g^{(i)}\frac{\partial\phi_g^{(i)}(x_i)}{\partial x} = -D_g^{(i+1)}\frac{\partial\phi_g^{(i+1)}(x_i)}{\partial x}, \quad (3.5)$$

em um domínio genérico,

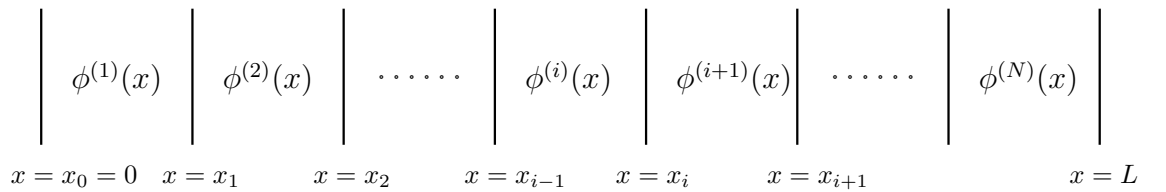


Figura 1. Modelo genérico para N regiões.

aqui, vale ressaltar que estamos considerando que os parâmetros nucleares são uniformes dentro de cada região.

Com o objetivo de simplificar a notação, definimos as seguintes constantes,

$$a_1^{(r)} = \frac{\chi_1\nu\Sigma_{f1}^{(r)}}{D_1^{(r)}}, \quad a_2^{(r)} = \frac{\Sigma_{R1}^{(r)}}{D_1^{(r)}}, \quad a_3^{(r)} = \frac{\chi_1\nu\Sigma_{f2}^{(r)}}{D_1^{(r)}}, \quad a_4^{(r)} = \frac{\Sigma_{12}^{(r)}}{D_1^{(r)}}, \quad (3.6)$$

$$b_1^{(r)} = \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f1}^{(r)}}{D_2^{(r)}}, \quad b_2^{(r)} = \frac{\Sigma_{21}^{(r)}}{D_2^{(r)}}, \quad b_3^{(r)} = \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f2}^{(r)}}{D_2^{(r)}}, \quad b_4^{(r)} = \frac{\Sigma_{R2}^{(r)}}{D_2^{(r)}}, \quad (3.7)$$

em termos destas novas constantes as Eqs. 3.1 e 3.2 são expressas como,

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(r)}(x)}{\partial x^2} + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} \phi_1^{(r)}(x) - a_2^{(r)} \phi_1^{(r)}(x) + \frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} \phi_2^{(r)}(x) + a_4^{(r)} \phi_2^{(r)}(x) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2^{(r)}(x)}{\partial x^2} + \frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} \phi_1^{(r)}(x) + b_2^{(r)} \phi_1^{(r)}(x) + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} \phi_2^{(r)}(x) - b_4^{(r)} \phi_2^{(r)}(x) = 0, \quad (3.9)$$

que é o problema inicial a ser resolvido por Transformada de Laplace, sujeito às condições de contorno dadas pela Eq. 3.3 e de continuidade de fluxo e corrente nas interfaces, dadas pelas Eqs. (3.4) e (3.5). Em cada região do domínio, resolvemos o problema descrito pelas Eqs. (3.1) e (3.2), separadamente, isto é, consideramos que o domínio é composto por N placas desacopladas cujo acoplamento é feito pelas condições de contorno e de continuidade de fluxo e corrente nas interfaces.

Aplicando a Transformada de Laplace nos sistemas de equações acima, obtemos,

$$\left[s^2 + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} - a_2^{(r)} \right] \Phi_1^{(r)}(s) + \left[\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} + a_4^{(r)} \right] \Phi_2^{(r)}(s) = c_1^{(r)} s + c_2^{(r)}, \quad (3.10)$$

$$\left[\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} + b_2^{(r)} \right] \Phi_1^{(r)}(s) + \left[s^2 + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} - b_4^{(r)} \right] \Phi_2^{(r)}(s) = c_3^{(r)} s + c_4^{(r)}, \quad (3.11)$$

onde $c_1^{(r)}, c_2^{(r)}, c_3^{(r)}$ e $c_4^{(r)}$ são as constantes resultantes da aplicação da Transformada de Laplace e que correspondem, respectivamente, aos valores $\phi_1^{(r)}(0)$, $\frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{(r)}(0)$, $\phi_2^{(r)}(0)$ e $\frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{(r)}(0)$. É importante observar que as constantes $c_2^{(1)}$ e $c_4^{(1)}$ são nulas porque correspondem às condições de contorno descritas pela Eq. (3.3). Resolvendo o sistema linear algébrico e simbólico dado pelas Eqs. (3.10) e (3.11) e procedendo à inversão do fluxo transformado obtemos as seguintes equações para o fluxo escalar da primeira região,

$$\phi_1^{(1)}(x) = T_{11}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + T_{13}^{(1)}(x)c_3^{(1)} \quad (3.12)$$

$$\phi_2^{(1)}(x) = T_{21}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + T_{23}^{(1)}(x)c_3^{(1)} \quad (3.13)$$

onde,

$$T_{11}^{(1)}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{Det^{(1)}(s)}\left(s^2 + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} - b_4^{(1)}\right)\right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(1)}\left((s_k^{(1)})^2 + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} - b_4^{(1)}\right)}{\frac{d}{ds}(Det^{(1)}(s_k^{(1)}))} e^{s_k^{(1)}x}, \quad (3.14)$$

$$T_{13}^{(1)}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{Det^{(1)}(s)}\left(-\frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} - a_4^{(1)}\right)\right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(1)}\left((s_k^{(1)})^2 + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} - b_4^{(1)}\right)}{\frac{d}{ds}(Det^{(1)}(s_k^{(1)}))} e^{s_k^{(1)}x}, \quad (3.15)$$

$$T_{21}^{(1)}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{Det^{(1)}(s)}\left(-\frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} - b_2^{(1)}\right)\right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(1)}\left(-\frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} - b_2^{(1)}\right)}{\frac{d}{ds}(Det^{(1)}(s_k^{(1)}))} e^{s_k^{(1)}x}, \quad (3.16)$$

$$T_{23}^{(1)}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{Det^{(1)}(s)}\left(s^2 + \frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} - a_2^{(1)}\right)\right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(1)}\left((s_k^{(1)})^2 + \frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} - a_2^{(1)}\right)}{\frac{d}{ds}(Det^{(1)}(s_k^{(1)}))} e^{s_k^{(1)}x}, \quad (3.17)$$

$$Det^{(1)}(s) = \left(s^2 + \frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} - a_2^{(1)}\right) \left(s^2 + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} - b_4^{(1)}\right) - \left(\frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} + a_4^{(1)}\right) \left(\frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} + b_2^{(1)}\right) \quad (3.18)$$

e $s_k^{(1)}$ são as raízes de $Det^{(1)}(s)$. Além disso, as equações do fluxo escalar para as outras regiões são,

$$\phi_1^{(r)}(x) = T_{11}^{(r)}(x)c_1^{(r)} + T_{12}^{(r)}(x)c_2^{(r)} + T_{13}^{(r)}(x)c_3^{(r)} + T_{14}^{(r)}(x)c_4^{(r)} \quad (3.19)$$

$$\phi_2^{(r)}(x) = T_{21}^{(r)}(x)c_1^{(r)} + T_{22}^{(r)}(x)c_2^{(r)} + T_{23}^{(r)}(x)c_3^{(r)} + T_{24}^{(r)}(x)c_4^{(r)} \quad (3.20)$$

onde

$$T_{11}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(s^2 + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} - b_4^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(r)} \left((s_k^{(r)})^2 + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} - b_4^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.21)$$

$$T_{12}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(s^2 + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} - b_4^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{\left((s_k^{(r)})^2 + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} - b_4^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.22)$$

$$T_{13}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(-\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} - a_4^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(r)} \left(-\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} - a_4^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.23)$$

$$T_{14}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(-\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} - a_4^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{\left(-\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} - a_4^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.24)$$

$$T_{21}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(-\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} - b_2^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(r)} \left(-\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} - b_2^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.25)$$

$$T_{22}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(-\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} - b_2^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{\left(-\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} - b_2^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.26)$$

$$T_{23}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(s^2 + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} - a_2^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{s_k^{(r)} \left((s_k^{(r)})^2 + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} - a_2^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.27)$$

$$T_{24}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\text{Det}^{(r)}(s)} \left(s^2 + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} - a_2^{(r)} \right) \right\} = \sum_{k=1}^4 \frac{\left((s_k^{(r)})^2 + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} - a_2^{(r)} \right)}{\frac{d}{ds}(\text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)}))} e^{s_k^{(r)} x}, \quad (3.28)$$

$$Det^{(r)}(s) = \left(s^2 + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}} - a_2^{(r)} \right) \left(s^2 + \frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}} - b_4^{(r)} \right) - \left(\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}} + a_4^{(r)} \right) \left(\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}} + b_2^{(r)} \right) \quad (3.29)$$

e $s_k^{(r)}$ são as raízes de $Det^{(r)}(s)$. Uma observação importante a ser feita é que o espectro dos polinômios $Det^{(r)}(s)$ é constituído por duas raízes reais e duas raízes imaginárias. Neste ponto, determinamos a constante de multiplicação efetiva aplicando a condição de contorno em $x = L$ e as condições de continuidade do fluxo e da corrente nas interfaces $x = x_i$, que resulta no seguinte sistema linear algébrico homogêneo,

$$\begin{aligned} T_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - T_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} - T_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)} &= 0 \\ T_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - T_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} - T_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)} &= 0 \\ D_1^{(1)} \frac{d}{dx} (T_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (-T_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\ &\quad - T_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = 0 \\ D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (T_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (-T_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\ &\quad - T_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

e assim sucessivamente,

$$\begin{aligned} T_{11}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + T_{12}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + T_{13}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + T_{14}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)} \\ - T_{11}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - T_{12}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - T_{13}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - T_{14}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)} &= 0 \\ T_{21}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + T_{22}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + T_{23}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + T_{24}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)} \\ - T_{21}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - T_{22}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - T_{23}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - T_{24}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)} &= 0 \\ D_1^{(i)} \frac{d}{dx} (T_{11}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + T_{12}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + T_{13}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + T_{14}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)}) \\ + D_1^{(i+1)} \frac{d}{dx} (-T_{11}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - T_{12}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - T_{13}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - T_{14}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)}) &= 0 \\ D_2^{(i)} \frac{d}{dx} (T_{21}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + T_{22}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + T_{23}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + T_{24}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)}) \\ + D_2^{(i+1)} \frac{d}{dx} (-T_{21}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - T_{22}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - T_{23}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - T_{24}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

e , finalmente, para a última região, aplicamos a condição de contorno em $x = L$,

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_1^{(N)} + T_{12}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_2^{(N)} + T_{13}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_3^{(N)} + & (3.32) \\
T_{14}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_4^{(N)} = 0 \\
T_{21}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_1^{(N)} + T_{22}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_2^{(N)} + T_{23}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_3^{(N)} + & \\
T_{24}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_4^{(N)} = 0
\end{aligned}$$

O problema algébrico homogêneo consistindo das Eqs. (3.30), (3.31) e (3.32), tem solução não trivial quando o determinante da matriz associada for nulo. O problema, então, consiste na determinação do fator de multiplicação efetivo de modo a anular o determinante da matriz. Realizamos este cálculo pelo método da bissecção. Para a determinação das constantes de integração, que permitirão calcular o fluxo de nêutrons, é necessário tornar o sistema algébrico homogêneo mencionado em um sistema não homogêneo. Atingimos este objetivo considerando que a potência da placa com N regiões é expressa por,

$$P = E_R \int_0^L \sum_{g=1}^2 \Sigma_{fg}(x) \phi_g(x) dx, \quad (3.33)$$

onde E_R é a energia liberada por fissão.

Para atingir o objetivo da determinação das constantes fazemos inicialmente a decomposição LU da matriz associada ao sistema dado pelas Eqs.(3.30)-(3.32), e a seguir substituímos a linha nula da matriz U pela condição de normalização. O sistema não homogêneo resultante é resolvido pelo método de Gauss. Uma vez determinadas estas constantes o fluxo escalar fica perfeitamente determinado em forma analítica no sentido de que nenhuma aproximação é feita ao longo de sua derivação. Procedimento similar ao descrito acima é feito para encontrar a solução para o fluxo adjunto de nêutrons que obedece às seguintes equações,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{*(r)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(r)} \phi_1^{*(r)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f1}^{(r)} \sum_{g=1}^2 \chi_g \phi_g^{*(r)}(x) + \Sigma_{21}^{(r)} \phi_2^{*(r)}(x), \quad (3.34)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{*(r)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(r)} \phi_2^{*(r)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f2}^{(r)} \sum_{g=1}^2 \chi_g \phi_g^{*(r)}(x) + \Sigma_{12}^{(r)} \phi_1^{*(r)}(x), \quad (3.35)$$

os passos seguidos são exatamente os mesmos utilizados para a solução do fluxo de nêutrons, sendo que, neste caso, trocamos os valores de $\nu \Sigma_{fg}^{(r)}$ por χ_g e de $\Sigma_{gg'}^{(r)}$ por $\Sigma_{g'g}^{(r)}$.

3.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DE FONTE FIXA

Nesta parte do trabalho, primeiramente, verificamos que a solução do problema do fluxo de nêutrons também é solução para o problema de fonte fixa. Em seguida, construímos a solução analítica para o problema de fonte fixa considerando a expressão obtida anteriormente para o fluxo de nêutrons como sendo a fonte da nova equação a ser resolvida.

3.3.1 Verificação da Solução para o Problema de Fonte Fixa

Desejamos agora mostrar que a solução do problema do fluxo de nêutrons também é solução para o problema de fonte fixa, para tal, consideremos as equações para o problema de fonte fixa,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^{(r)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(r)} \psi_1^{(r)}(x) - \Sigma_{12}^{(r)} \psi_2^{(r)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x), \quad (3.36)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_2^{(r)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(r)} \psi_2^{(r)}(x) - \Sigma_{21}^{(r)} \psi_1^{(r)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x), \quad (3.37)$$

onde o fluxo de nêutrons nas fontes das Eqs. (3.36) e (3.37) e k_{eff} , são agora, conhecidos. Considerando a notação proposta pelas Eqs. (3.6) e (3.7), reescrevemos as Eqs. (3.36) e (3.37) da seguinte maneira,

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(r)}(x)}{\partial x^2} - a_2^{(r)} \psi_1^{(r)}(x) + a_4^{(r)} \psi_2^{(r)}(x) = g_1^{(r)}(x), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{(r)}(x)}{\partial x^2} + b_2^{(r)} \psi_1^{(r)}(x) - b_4^{(r)} \psi_2^{(r)}(x) = g_2^{(r)}(x), \quad (3.39)$$

onde,

$$g_1^{(r)}(x) \equiv \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x), \quad (3.40)$$

$$g_2^{(r)}(x) \equiv \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \phi_g^{(r)}(x). \quad (3.41)$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas Eqs. (3.36) e (3.37), obtemos,

$$\begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(r)} & a_4^{(r)} \\ b_2^{(r)} & s^2 - b_4^{(r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1^{(r)}(s) \\ \Psi_2^{(r)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s c_1^{(r)} + c_2^{(r)} \\ s c_3^{(r)} + c_4^{(r)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1^{(r)}(s) \\ G_2^{(r)}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

ou, ainda, resolvendo a Eq. (3.42) para $\Psi_1^{(r)}(s)$ e $\Psi_2^{(r)}(s)$,

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^{(r)}(s) \\ \Psi_2^{(r)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(r)} & a_4^{(r)} \\ b_2^{(r)} & s^2 - b_4^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} s c_1^{(r)} + c_2^{(r)} \\ s c_3^{(r)} + c_4^{(r)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(r)} & a_4^{(r)} \\ b_2^{(r)} & s^2 - b_4^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G_1^{(r)}(s) \\ G_2^{(r)}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

onde $G_1^{(r)}(s)$ e $G_2^{(r)}(s)$ são, respectivamente, as Transformadas de Laplace de $g_1^{(r)}(x)$ e $g_2^{(r)}(x)$.

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace na Eq. (3.43), obtemos a solução para o problema de fonte fixa $\psi_g^{(r)}(x)$, pois os valores das constantes de integração já foram determinados no problema para o fluxo de nêutrons, sendo assim,

$$\phi_1^{(r)}(x) = M_{11}^{(r)}(x) c_1^{(r)} + M_{12}^{(r)}(x) c_2^{(r)} + M_{13}^{(r)}(x) c_3^{(r)} + M_{14}^{(r)}(x) c_4^{(r)} + F_1^{(r)}(x), \quad (3.44)$$

$$\phi_2^{(r)}(x) = M_{21}^{(r)}(x) c_1^{(r)} + M_{22}^{(r)}(x) c_2^{(r)} + M_{23}^{(r)}(x) c_3^{(r)} + M_{24}^{(r)}(x) c_4^{(r)} + F_2^{(r)}(x), \quad (3.45)$$

onde,

$$M_{11}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(s^2 - b_4^{(r)})s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{((s_k^{(r)})^2 - b_4^{(r)})s_k^{(r)}}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.46)$$

$$M_{12}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^2 - b_4^{(r)}}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{((s_k^{(r)})^2 - b_4^{(r)})}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.47)$$

$$M_{13}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-a_4^{(r)}s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{-a_4^{(r)}s_k^{(r)}}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.48)$$

$$M_{14}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-a_4^{(r)}}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{-a_4^{(r)}}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.49)$$

$$M_{21}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-b_2^{(r)}s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{-b_2^{(r)}s_k^{(r)}}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.50)$$

$$M_{22}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-b_2^{(r)}}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{-b_2^{(r)}}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.51)$$

$$M_{23}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(s^2 - a_2^{(r)})s}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{((s_k^{(r)})^2 - a_2^{(r)})s_k^{(r)}}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.52)$$

$$M_{24}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(s^2 - a_2^{(r)})}{\text{Det}^{(r)}(s)} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{((s_k^{(r)})^2 - a_2^{(r)})}{\frac{d}{ds} \text{Det}^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x}, \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(r)} = & \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(s^2 - b_4^{(r)})G_1^{(r)}(s)}{Det^{(r)}(s)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(-a_4^{(r)})G_2^{(r)}(s)}{Det^{(r)}(s)} \right) = \\
& \sum_{k=1}^4 \left(\frac{((s_k^{(r)})^2 - b_4^{(r)})G_1^{(r)}(s_k^{(r)})}{\frac{d}{ds} Det^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x} \right) + \sum_{k=1}^4 \left(\frac{(-a_4^{(r)})G_2^{(r)}(s_k^{(r)})}{\frac{d}{ds} Det^{(r)}(s_k^{(r)})} \right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{(r)} = & \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(s^2 - a_2^{(r)})G_2^{(r)}(s)}{Det^{(r)}(s)} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(-b_2^{(r)})G_1^{(r)}(s)}{Det^{(r)}(s)} \right) = \\
& \sum_{k=1}^4 \left(\frac{((s_k^{(r)})^2 - a_2^{(r)})G_2^{(r)}(s_k^{(r)})}{\frac{d}{ds} Det^{(r)}(s_k^{(r)})} e^{s_k^{(r)}x} \right) + \sum_{k=1}^4 \left(\frac{(-b_2^{(r)})G_1^{(r)}(s_k^{(r)})}{\frac{d}{ds} Det^{(r)}(s_k^{(r)})} \right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$Det^{(r)}(s) = s^4 - (a_2^{(r)} - b_4^{(r)})s^2 + a_2^{(r)}b_4^{(r)} - a_4^{(r)}b_2^{(r)}, \tag{3.56}$$

onde \mathcal{L}^{-1} indica a Transformada Inversa de Laplace. Observamos que, através de manipulações algébricas, podemos mostrar que as expressões para a solução do problema de fonte fixa, dadas pelas Eqs. (3.44)-(3.45), são exatamente as mesmas obtidas na seção anterior como solução para o fluxo de nêutrons. (Eqs. (3.19)-(3.20))

3.3.2 Solução Analítica para o Problema de Fonte Fixa

Aqui, obtemos a solução em forma analítica para o problema de fonte fixa. Para alcançarmos este objetivo, analogamente ao que foi feito na seção anterior, consideramos o fluxo de nêutrons nas fontes das Eqs. (3.36) e (3.37) e k_{eff} conhecidos. Os procedimentos algébricos são semelhantes aos da seção anterior, exceto que, agora, não consideramos como conhecidos os valores das constantes de integração determinadas no problema para o fluxo de nêutrons. Sendo assim, considerando as Eqs. (3.44) e (3.45), aplicando as condições de continuidade do fluxo e da corrente nas interfaces e a segunda condição de contorno em $x = L$, escrevemos o seguinte sistema linear algébrico para determinar as constantes de integração,

$$\begin{aligned}
& M_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - M_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)} = F_1^{(2)}(0) - F_1^{(1)}(x_1) \\
& M_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - M_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)} = F_2^{(2)}(0) - F_2^{(1)}(x_1) \\
& D_1^{(1)} \frac{d}{dx} (M_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (-M_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = D_1^{(2)} \frac{d}{dx} F_1^{(2)}(0) - D_1^{(1)} \frac{d}{dx} F_1^{(1)}(x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (M_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (-M_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = D_2^{(2)} \frac{d}{dx} F_2^{(2)}(0) - D_2^{(1)} \frac{d}{dx} F_2^{(1)}(x_1)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

a, assim, sucessivamente,

$$M_{11}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + M_{12}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + M_{13}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + M_{14}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)} + \\ - M_{11}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - M_{12}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - M_{13}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - M_{14}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)} = F_1^{(i+1)}(0) - F_1^{(i)}(x_i - x_{i-1})$$

$$M_{21}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + M_{22}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + M_{23}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + M_{24}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)} + \\ - M_{21}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - M_{22}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - M_{23}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - M_{24}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)} = F_2^{(i+1)}(0) - F_2^{(i)}(x_i - x_{i-1})$$

$$D_1^{(i)} \frac{d}{dx} (M_{11}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + M_{12}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + M_{13}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + M_{14}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)}) + \\ + D_1^{(i+1)} \frac{d}{dx} (-M_{11}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - M_{12}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - M_{13}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - M_{14}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)}) + \\ = D_1^{(i+1)} \frac{d}{dx} F_1^{(i+1)}(0) - D_1^{(i)} \frac{d}{dx} F_1^{(i)}(x_i - x_{i-1})$$

$$D_2^{(i)} \frac{d}{dx} (M_{21}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_1^{(i)} + M_{22}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_2^{(i)} + M_{23}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_3^{(i)} + M_{24}^{(i)}(x_i - x_{i-1})c_4^{(i)}) + \\ + D_2^{(i+1)} \frac{d}{dx} (-M_{21}^{(i+1)}(0)c_1^{(i+1)} - M_{22}^{(i+1)}(0)c_2^{(i+1)} - M_{23}^{(i+1)}(0)c_3^{(i+1)} - M_{24}^{(i+1)}(0)c_4^{(i+1)}) + \\ = D_2^{(i+1)} \frac{d}{dx} F_2^{(i+1)}(0) - D_2^{(i)} \frac{d}{dx} F_2^{(i)}(x_i - x_{i-1}) \quad (3.58)$$

finalmente, aplicando a segunda condição de contorno na última região,

$$M_{11}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_1^{(N)} + M_{12}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_2^{(N)} + M_{13}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_3^{(N)} + \quad (3.59) \\ M_{14}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_4^{(N)} = -F_1^{(N)}(x_N - x_{N-1}) \\ M_{21}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_1^{(N)} + M_{22}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_2^{(N)} + M_{23}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_3^{(N)} + \\ M_{24}^{(N)}(x_N - x_{N-1})c_4^{(N)} = -F_2^{(N)}(x_N - x_{N-1})$$

O sistema descrito pelas Eqs. (5.15), (3.58) e (3.59), não é homogêneo, portanto, pode ser resolvido diretamente. Tendo a solução deste sistema, ou seja, os valores das constantes de integração, podemos escrever as expressões para a solução do problema de fonte fixa dadas pelas Eqs. (3.44) e (3.45).

3.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DE FUNÇÃO AUXILIAR

Como foi definido na seção 2.3, uma função auxiliar é a derivada do fluxo de nêutrons com relação a um parâmetro nuclear qualquer, por exemplo, a seção de choque macroscópica de remoção. Sendo assim, chamando de α o parâmetro, a função auxiliar para o caso unidimensional e a dois grupos de energia,

$$\varphi_g^{(r)}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \phi_g^{(r)}(x), \quad (3.60)$$

com $g = 1, 2$, obedece ao seguinte sistema de equações,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1^{(r)}(x) + \Sigma_{R1}^{(r)} \varphi_1^{(r)}(x) \right) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \varphi_g^{(r)}(x) + \sum_{g=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'} \varphi_{g'}^{(r)}(x) + S_1^{(r)}(x), \quad (3.61)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2^{(r)}(x) + \Sigma_{R2}^{(r)} \varphi_2^{(r)}(x) \right) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)} \varphi_g^{(r)}(x) + \sum_{g=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'} \varphi_{g'}^{(r)}(x) + S_2^{(r)}(x), \quad (3.62)$$

onde,

$$S_1^{(r)} = \lambda \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)}(x) \phi_g^{(r)}(x) - p_1^{(r)}(x) \phi_1^{(r)}(x), \quad (3.63)$$

$$S_2^{(r)} = \lambda \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)}(x) \phi_g^{(r)}(x) - p_2^{(r)}(x) \phi_2^{(r)}(x), \quad (3.64)$$

com

$$\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_{eff}} \right) = \frac{\sum_{g=1}^2 \left(\int_0^L \phi_g^{*(r)}(x) p_g^{(r)}(x) \phi_g^{(r)}(x) dx \right)}{\sum_{g=1}^2 \chi_g \left(\int_0^L \phi_g^{*(r)} \left[\sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(r)}(x) \phi_g^{(r)}(x) \right] dx \right)} \quad (3.65)$$

e

$$p_g^{(r)} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \Sigma_{Rg}^{(r)}, \quad (3.66)$$

sendo $\phi_g^{(r)}(x)$ e $\phi_g^{*(r)}(x)$ o fluxo e o fluxo adjunto de nêutrons, respectivamente, cujas soluções foram obtidas anteriormente e, nas equações (3.61) e (3.62), k_{eff} é um parâmetro conhecido. Além disso, com λ da forma como foi definido, os termos de "fonte" $S_g^{(r)}(x)$ representam o que chamamos de fonte virtual, por não se tratar de uma fonte de nêutrons propriamente dita e ainda satisfazer a Alternativa de Fredholm, qual seja,

$$\sum_{g=1}^2 \left(\int_0^L \phi_g^{*(r)}(x) S_g^{(r)}(x) dx \right) = 0. \quad (3.67)$$

Quanto ao parâmetro $\alpha_g^{(r)}$, na definição de $p_g^{(r)}(x)$, depende do tipo e do grupo da seção de choque macroscópica de remoção ($\Sigma_{R,g}^{(r)}$) escolhidos.

Para resolver este problema, podemos representar o sistema de equações para o problema de função auxiliar descrito pela Eqs. (3.61) e (3.62), matricialmente da seguinte forma,

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{F} \right) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{S} \quad (3.68)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -D_1^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) + \Sigma_{R1}^{(r)}(\cdot) & -\Sigma_{12}^{(r)}(\cdot) \\ -\Sigma_{21}^{(r)}(\cdot) & -D_2^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) + \Sigma_{R2}^{(r)}(\cdot), \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \chi_1 \nu \Sigma_{f_1}^{(r)}(\cdot) & \chi_1 \nu \Sigma_{f_2}^{(r)}(\cdot) \\ \chi_2 \nu \Sigma_{f_1}^{(r)}(\cdot) & \chi_2 \nu \Sigma_{f_2}^{(r)}(\cdot), \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(r)}(x) \\ \varphi_2^{(r)}(x) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1^{(r)}(x) \\ S_2^{(r)}(x). \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Onde $\frac{1}{k_{eff}}$ foi determinado de modo a tornar os operadores $\left(\mathbf{A} - \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\right)$ e $\left(\mathbf{A}^* - \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}^*\right)$ singulares. Sendo assim, a solução da equação que governa a função auxiliar $\varphi_g^{(r)}(x)$, dada pela Eq. (3.68), pode ser obtida através de um processo iterativo. Primeiramente, reescrevemos a Eq. (3.68) da seguinte forma,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{S} \quad (3.73)$$

onde o vetor que multiplica $\frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}$ na Eq. (3.73) será considerado conhecido, isto é, não será mais uma incógnita, sendo um vetor de valores que serão previamente escolhidos. Sendo assim, o lado direito da Eq. (3.73) passa a ser visto como uma fonte para esta equação. Por exemplo, podemos começar o processo iterativo, fazendo,

$$\boldsymbol{\varphi}_{part}^{(0)} = \mathbf{1}, \quad (3.74)$$

ou seja, atribuindo o vetor unitário ao vetor que multiplica $\frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}$ na Eq. (3.73). A partir daí, fazemos,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_{part}^{(0)} + \mathbf{S}, \quad (3.75)$$

o vetor da próxima iteração deveria ser $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}$, entretanto, se assim o fizéssemos, a solução para a equação que governa a função auxiliar $\varphi_g^{(r)}(x)$, convergiria para a solução do problema homogêneo, isto é, para a solução do problema para o fluxo de nêutrons. Como não desejamos que isto ocorra, antes de o processo continuar, devemos proceder à descontaminação do modo fundamental e isto é feito da seguinte maneira,

$$\boldsymbol{\varphi}_{part}^{(1)} = \boldsymbol{\varphi}^{(1)} - \frac{\langle \boldsymbol{\phi}^{*T}\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}^{(1)} \rangle}{\langle \boldsymbol{\phi}^{*T}\mathbf{F}\boldsymbol{\phi} \rangle}\boldsymbol{\phi}, \quad (3.76)$$

onde $\langle \rangle$ indica o produto entre os vetores $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi}^{*T}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}$ e a matriz \mathbf{F} .

Genericamente, para a i -ésima iteração, podemos escrever,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_{part}^{(i-1)} + \mathbf{S}, \quad (3.77)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{part}^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}^{(i)} - \frac{\langle \boldsymbol{\phi}^{*T}\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \rangle}{\langle \boldsymbol{\phi}^{*T}\mathbf{F}\boldsymbol{\phi} \rangle}\boldsymbol{\phi}. \quad (3.78)$$

Adotamos como critério de convergência numérica do método iterativo discutido para uma dada precisão ε , a seguinte expressão,

$$\left| \frac{\varphi_g^{(i)} - \varphi_g^{(i+1)}}{\varphi_g^{(i+1)}} \right| < \varepsilon. \quad (3.79)$$

No próximo capítulo, aplicamos esta metodologia para um domínio composto por duas regiões considerando como critério de parada $\varepsilon = 10^{-2}$ e comparamos os resultados obtidos com os de [Thomé, 1997].

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA PARA O FLUXO E O FLUXO ADJUNTO DE NÊUTRONS

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, ilustramos a metodologia proposta, resolvendo o problema de autovvalor para o fluxo de nêutrons e para o fluxo adjunto de nêutrons em uma placa plana composta por duas regiões, bem como o cálculo do fator de multiplicação efetivo.

4.2 SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA O FLUXO DE NÊUTRONS

Agora vamos resolver as equações (3.1) e (3.2) considerando um modelo composto por duas regiões, ou seja, vamos resolver o problema descrito pelas equações,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{(1)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(1)} \phi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(1)} \phi_g^{(1)}(x) + \Sigma_{12}^{(1)} \phi_1^{(1)}(x), \quad (4.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{(1)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(1)} \phi_2^{(1)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(1)} \phi_g^{(1)}(x) + \Sigma_{21}^{(1)} \phi_1^{(1)}(x), \quad (4.2)$$

para a região 1, e pelas equações,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{(2)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(2)} \phi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(2)} \phi_g^{(2)}(x) + \Sigma_{12}^{(2)} \phi_1^{(2)}(x), \quad (4.3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{(2)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(2)} \phi_2^{(2)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(2)} \phi_g^{(2)}(x) + \Sigma_{21}^{(2)} \phi_1^{(2)}(x), \quad (4.4)$$

para a região 2, sujeitas às condições de contorno,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x}(0) = 0, & \quad \phi_1^{(2)}(L) = 0, \\ \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial x}(0) = 0, & \quad \phi_2^{(2)}(L) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

e de continuidade de fluxo e corrente,

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)}(x_1) &= \phi_1^{(2)}(0), \\ \phi_2^{(1)}(x_1) &= \phi_2^{(2)}(0), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} -D_1^{(1)} \frac{\partial \phi_1^{(1)}(x_1)}{\partial x} &= -D_1^{(2)} \frac{\partial \phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}, \\ -D_2^{(1)} \frac{\partial \phi_2^{(1)}(x_1)}{\partial x} &= -D_2^{(2)} \frac{\partial \phi_2^{(2)}(0)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

em um domínio com o seguinte perfil,

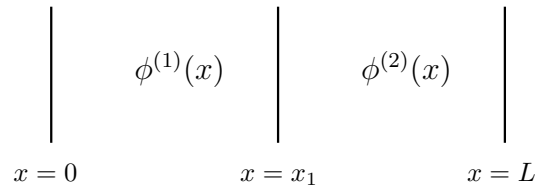


Figura 2. Modelo para duas regiões.

aqui, lembramos que os parâmetros nucleares são uniformes em cada uma das regiões e que estamos resolvendo o problema considerando que as placas são desacopladas.

Aplicando a notação proposta na seção (3.2) pelas Eqs. (3.6) e (3.7), reescrevemos as Eqs. (4.1)-(4.4) na seguinte maneira,

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(1)}(x)}{\partial x^2} + \frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} \phi_1^{(1)}(x) - a_2^{(1)} \phi_1^{(1)}(x) + \frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} \phi_2^{(1)}(x) + a_4^{(1)} \phi_2^{(1)}(x) = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2^{(1)}(x)}{\partial x^2} + \frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} \phi_1^{(1)}(x) + b_2^{(1)} \phi_1^{(1)}(x) + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} \phi_2^{(1)}(x) - b_4^{(1)} \phi_2^{(1)}(x) = 0, \quad (4.9)$$

para a região 1, e

$$\frac{\partial^2 \phi_1^{(2)}(x)}{\partial x^2} + \frac{a_1^{(2)}}{k_{eff}} \phi_1^{(2)}(x) - a_2^{(2)} \phi_1^{(2)}(x) + \frac{a_3^{(2)}}{k_{eff}} \phi_2^{(2)}(x) + a_4^{(2)} \phi_2^{(2)}(x) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2^{(2)}(x)}{\partial x^2} + \frac{b_1^{(2)}}{k_{eff}} \phi_1^{(2)}(x) + b_2^{(2)} \phi_1^{(2)}(x) + \frac{b_3^{(2)}}{k_{eff}} \phi_2^{(2)}(x) - b_4^{(2)} \phi_2^{(2)}(x) = 0, \quad (4.11)$$

para a região 2.

Aplicando a Transformada de Laplace nas Eqs. (4.8)-(4.11), obtemos,

$$\left[s^2 + \frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} - a_2^{(1)} \right] \Phi_1^{(1)}(s) + \left[\frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} + a_4^{(1)} \right] \Phi_2^{(1)}(s) = c_1^{(1)} s + c_2^{(1)}, \quad (4.12)$$

$$\left[\frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} + b_2^{(1)} \right] \Phi_1^{(1)}(s) + \left[s^2 + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} - b_4^{(1)} \right] \Phi_2^{(1)}(s) = c_3^{(1)} s + c_4^{(1)}, \quad (4.13)$$

para a região 1, e,

$$\left[s^2 + \frac{a_1^{(2)}}{k_{eff}} - a_2^{(2)} \right] \Phi_1^{(2)}(s) + \left[\frac{a_3^{(2)}}{k_{eff}} + a_4^{(2)} \right] \Phi_2^{(2)}(s) = c_1^{(2)} s + c_2^{(2)}, \quad (4.14)$$

$$\left[\frac{b_1^{(2)}}{k_{eff}} + b_2^{(2)} \right] \Phi_1^{(2)}(s) + \left[s^2 + \frac{b_3^{(2)}}{k_{eff}} - b_4^{(2)} \right] \Phi_2^{(2)}(s) = c_3^{(2)} s + c_4^{(2)}, \quad (4.15)$$

para a região 2. O objetivo, aqui, é determinar o valor da constante de multiplicação efetiva,

o k_{eff} . Para alcançarmos tal objetivo, resolvemos o sistema linear algébrico e simbólico dado pelas Eqs. (4.12)-(4.15) e procedemos à inversão do fluxo transformado, obtendo as seguintes equações para o fluxo escalar para a primeira região,

$$\phi_1^{(1)}(x) = T_{11}^{(1)}(x)C_1^{(1)} + T_{13}^{(1)}(x)C_3^{(1)} \quad (4.16)$$

$$\phi_2^{(1)}(x) = T_{21}^{(1)}(x)C_1^{(1)} + T_{23}^{(1)}(x)C_3^{(1)} \quad (4.17)$$

e para a segunda região,

$$\phi_1^{(2)}(x) = T_{11}^{(2)}(x)C_1^{(2)} + T_{12}^{(2)}(x)C_2^{(2)} + T_{13}^{(2)}(x)C_3^{(2)} + T_{14}^{(2)}(x)C_4^{(2)} \quad (4.18)$$

$$\phi_2^{(2)}(x) = T_{21}^{(2)}(x)C_1^{(2)} + T_{22}^{(2)}(x)C_2^{(2)} + T_{23}^{(2)}(x)C_3^{(2)} + T_{24}^{(2)}(x)C_4^{(2)} \quad (4.19)$$

onde os coeficientes de cada constante estão definidos na seção (3.2).

Para determinarmos o valor da constante de multiplicação efetiva, aplicamos a condição de contorno em $x = L$ e as condições de continuidade do fluxo e da corrente na interface $x = x_1$. Fazendo isto, resulta o seguinte sistema linear algébrico homogêneo,

$$\begin{aligned} T_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - T_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} - T_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)} &= 0 \\ T_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - T_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} - T_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)} &= 0 \\ D_1^{(1)} \frac{d}{dx}(T_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx}(-T_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\ &\quad - T_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = 0 \\ D_1^{(2)} \frac{d}{dx}(T_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + T_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx}(-T_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - T_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\ &\quad - T_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - T_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = 0 \quad (4.20) \\ T_{11}^{(2)}(L)c_1^{(2)} + T_{12}^{(2)}(L)c_2^{(2)} + T_{13}^{(2)}(L)c_3^{(2)} + T_{14}^{(2)}(L)c_4^{(2)} &= 0 \\ T_{21}^{(2)}(L)c_1^{(2)} + T_{22}^{(2)}(L)c_2^{(2)} + T_{23}^{(2)}(L)c_3^{(2)} + T_{24}^{(2)}(L)c_4^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

como foi dito na seção (3.2), este problema tem solução não nula quando o determinante da

matriz associada for nulo. Para a determinação do valor de k_{eff} que anula o determinante desta matriz, utilizamos o método da bissecção para o cálculo de raízes e, para o cálculo das constantes de integração, utilizamos a condição de normalização para um valor de potência prescrita, dada pela Eq. (3.33).

Igual procedimento foi feito para o cálculo do fluxo adjunto de nêutrons, neste caso, as equações a serem resolvidas são,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{*(1)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(1)} \phi_1^{*(1)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f1}^{(1)} \sum_{g=1}^2 \chi_g \phi_g^{*(1)}(x) + \Sigma_{21}^{(1)} \phi_2^{*(1)}(x), \quad (4.21)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{*(1)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(1)} \phi_2^{*(1)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f2}^{(1)} \sum_{g=1}^2 \chi_g \phi_g^{*(1)}(x) + \Sigma_{12}^{(1)} \phi_1^{*(1)}(x), \quad (4.22)$$

para a região 1 e,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^{*(2)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(2)} \phi_1^{*(2)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f1}^{(2)} \sum_{g=1}^2 \chi_g \phi_g^{*(2)}(x) + \Sigma_{21}^{(2)} \phi_2^{*(2)}(x), \quad (4.23)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{*(2)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(2)} \phi_2^{*(2)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{f2}^{(2)} \sum_{g=1}^2 \chi_g \phi_g^{*(2)}(x) + \Sigma_{12}^{(2)} \phi_1^{*(2)}(x), \quad (4.24)$$

para a região 2.

Para testar a metodologia proposta, resolvemos os problemas de autovalor para o fluxo e para o fluxo adjunto de nêutrons em uma placa plana de espessura $L = 30cm$ e para os parâmetros nucleares apresentados na Tabela 1,

Tabela 1. Paramêtros Nucleares

| Regiao | Grupo | D_g | Σ_{Rg} | $\nu\Sigma_{fg}$ | $\Sigma_{g'g}$ |
|--------|-------|--------|---------------|------------------|----------------|
| 1 | 1 | 1.6797 | 0.2309E-1 | 0.5008E-2 | 0.1423E-1 |
| 1 | 2 | 0.4754 | 0.7886E-1 | 0.9713E-1 | 0.0 |
| 2 | 1 | 0.6702 | 0.9013E-1 | 0.0 | 0.9084E-1 |
| 2 | 2 | 0.1509 | 0.3277E-1 | 0.0 | 0.0 |

com a potência prescrita de $10^{-6}W$ e com o valor de E_R de $200Mev/fissão$.

O resultado obtido para o valor da constante de multiplicação efetiva foi $k_{eff} = 0.70139961$ enquanto que o valor obtido por [Thomé, 1997] é de $k_{eff}^{ref} = 0.7014509$, ou seja, há uma diferença percentual relativa entre os dois resultados de 0.007% . Observamos que [Thomé, 1997] resolve as equações usando diferenças finitas, com malha fina, e o método das potências para o procedimento iterativo de cálculo, enquanto que, neste trabalho, as equações são resolvidas de forma analítica e é utilizado o método da bissecção para a obtenção do valor de k_{eff} .

As soluções para os problemas do fluxo e do fluxo adjunto de nêutrons encontram-se, respectivamente, nas Tabelas 2 e 3 . Os resultados obtidos foram comparados com os obtidos por [Thomé, 1997], onde nas tabelas que se seguem as expressões com índice superior "ref", referem-se aos valores obtidos por [Thomé, 1997] e a sigla D.R.P. significa Diferença Percentual Relativa.

Tabela 2. Resultados Numéricos para o Fluxo de Nêutrons

| x | $\phi_1(x)$ | $\phi_1^{ref}(x)$ | D.R.P. | $\phi_2(x)$ | $\phi_1^{ref}(x)$ | D.R.P. |
|----|------------------------|-------------------|--------|-----------------------|-------------------|--------|
| 0 | 121995 | 121975.9 | 0.015% | 22265 | 22262.30 | 0.012% |
| 5 | 113055 | 113038.4 | 0.014% | 23618.6 | 23617.55 | 0.04% |
| 10 | 78614.9 | 78604.42 | 0.013% | 45292.5 | 45299.33 | 0.015% |
| 20 | 2007.17 | 2007.317 | 0.007% | 9625.04 | 9624.780 | 0.002% |
| 30 | -7.45×10^{-9} | 0.0 | - | 1.19×10^{-7} | 0.0 | - |

Tabela 3. Resultados Numéricos para o Fluxo Adjunto de Nêutrons

| x | $\phi_1^*(x)$ | $\phi_1^{*ref}(x)$ | D.R.P. | $\phi_2^*(x)$ | $\phi_1^{*ref}(x)$ | D.R.P. |
|----|---------------|--------------------|--------|-----------------------|--------------------|----------|
| 0 | 20523 | 20524.33 | 0.006% | 34852.7 | 34852.68 | 0.00012% |
| 5 | 19264.6 | 19266.19 | 0.008% | 32302.6 | 32302.86 | 0.0008% |
| 10 | 15770.7 | 15773.04 | 0.015% | 22500.4 | 22500.35 | 0.00004% |
| 20 | 995.284 | 995.4744 | 0.019% | 212.962 | 213.0517 | 0.04% |
| 30 | 0.0 | 0.0 | - | 1.49×10^{-8} | 0.0 | - |

Seguem-se ainda as soluções para os problemas do fluxo e do fluxo adjunto de nêutrons sob a forma de gráficos nas figuras abaixo:

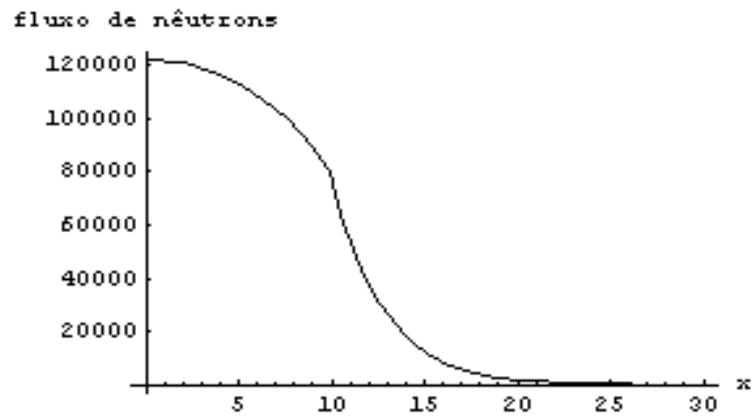


Figura 4.1 – Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 1 pela formulação proposta

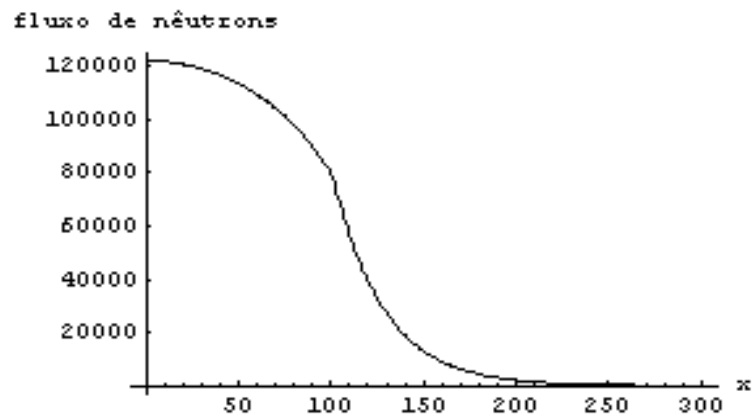


Figura 4.2 – Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 1 obtido por [Thomé, 1997]

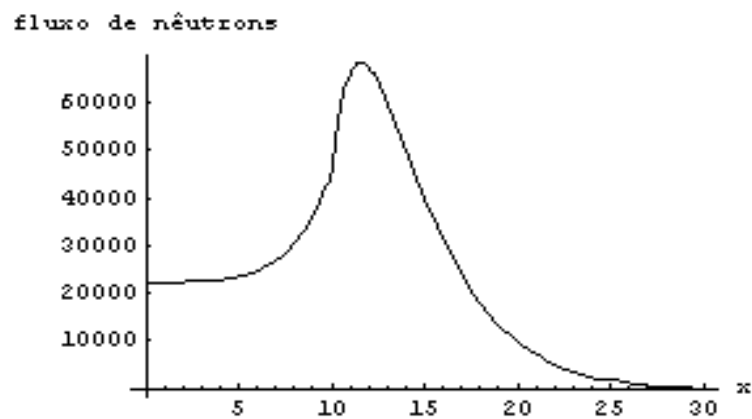


Figura 4.3 – Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 2 pela formulação proposta

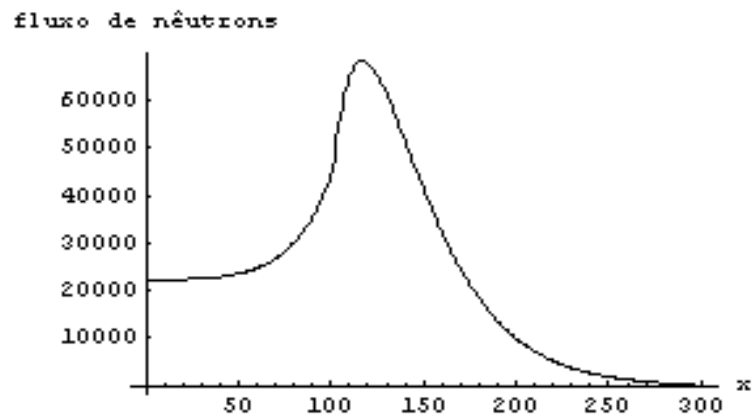


Figura 4.4 – Gráfico do Fluxo de Nêutrons para o grupo 2 obtido por [Thomé, 1997]

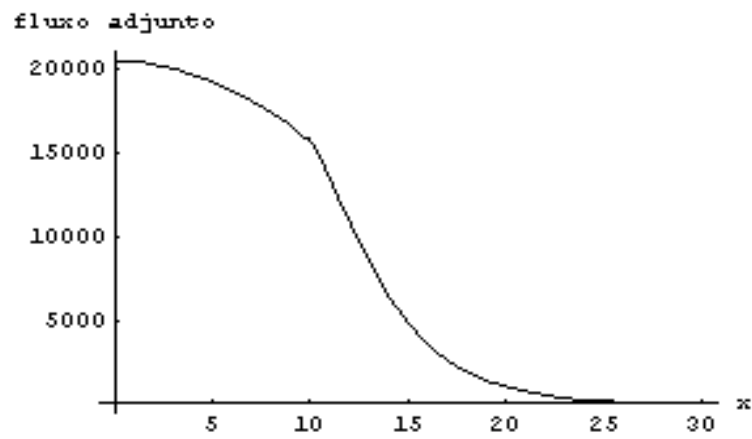


Figura 4.5 – Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 1 pela formulação proposta

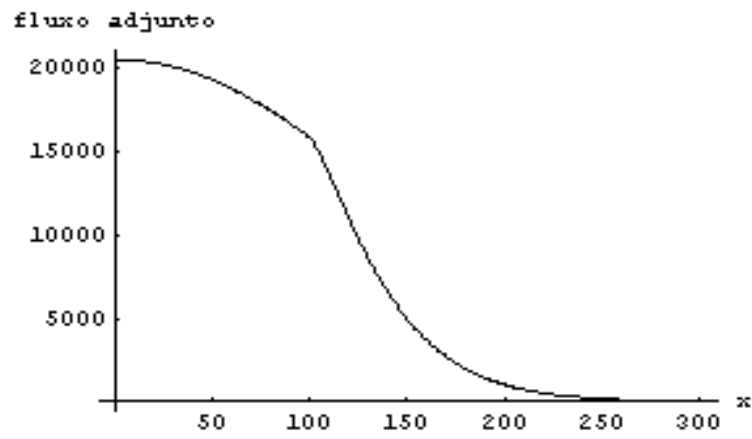


Figura 4.6 – Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 1 obtido por [Thomé, 1997]

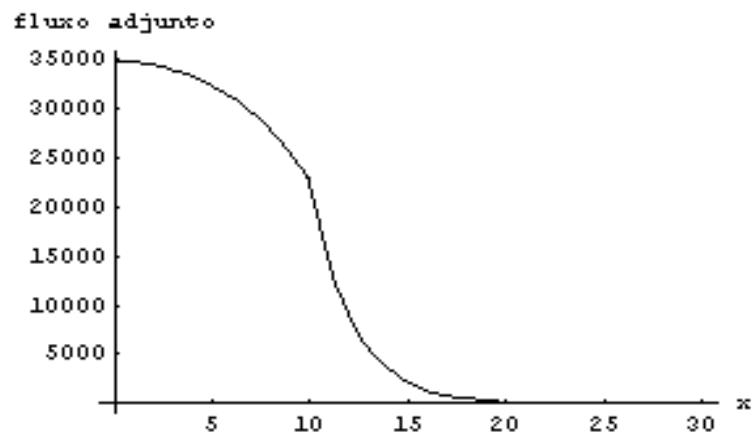


Figura 4.7 – Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 2 pela formulação proposta

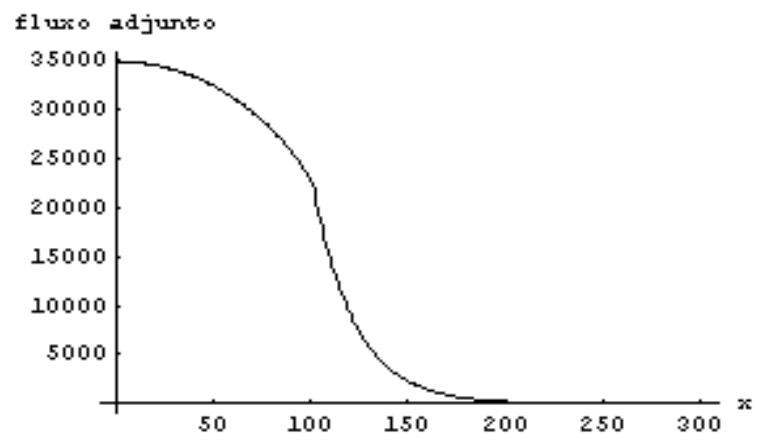


Figura 4.8 – Gráfico do Fluxo Adjunto de Nêutrons para o grupo 2 obtido por [Thomé, 1997]

CAPÍTULO 5

SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DE FONTE FIXA

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, exemplificamos esta metodologia resolvendo problemas com fonte, ou seja, resolvendo o problema de fonte fixa em uma placa plana composta por duas regiões. Primeiramente, procedemos à verificação de que a solução do problema do fluxo de nêutrons também é solução para o problema de fonte fixa e, em seguida, construímos a solução analítica para o problema de fonte fixa.

5.2 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE FONTE FIXA

Consideremos as equações para o problema de fonte fixa,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^{(1)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(1)} \psi_1^{(1)}(x) - \Sigma_{12}^{(1)} \psi_2^{(1)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(1)} \phi_g^{(1)}(x), \quad (5.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_2^{(1)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(1)} \psi_2^{(1)}(x) - \Sigma_{21}^{(1)} \psi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(1)} \phi_g^{(1)}(x), \quad (5.2)$$

para a primeira região e,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^{(2)}(x) \right) + \Sigma_{R1}^{(2)} \psi_1^{(2)}(x) - \Sigma_{12}^{(2)} \psi_2^{(2)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(2)} \phi_g^{(2)}(x), \quad (5.3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_2^{(2)}(x) \right) + \Sigma_{R2}^{(2)} \psi_2^{(2)}(x) - \Sigma_{21}^{(2)} \psi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(2)} \phi_g^{(2)}(x), \quad (5.4)$$

para a segunda região. Onde, agora, o fluxo de nêutrons nas fontes das Eqs. (5.1)-(5.4) e k_{eff} são conhecidos. Considerando a notação proposta pelas Eqs. (3.6) e (3.7), reescrevemos as Eqs. (5.1)-(5.4) da seguinte maneira,

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}(x)}{\partial x^2} - a_2^{(1)} \psi_1^{(1)}(x) + a_4^{(1)} \psi_2^{(1)}(x) = g_1^{(1)}(x), \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}(x)}{\partial x^2} + b_2^{(1)} \psi_1^{(1)}(x) - b_4^{(1)} \psi_2^{(1)}(x) = g_2^{(1)}(x), \quad (5.6)$$

para a primeira região, e,

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}(x)}{\partial x^2} - a_2^{(2)} \psi_1^{(2)}(x) + a_4^{(2)} \psi_2^{(2)}(x) = g_1^{(2)}(x), \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}(x)}{\partial x^2} + b_2^{(2)} \psi_1^{(2)}(x) - b_4^{(2)} \psi_2^{(2)}(x) = g_2^{(2)}(x), \quad (5.8)$$

para a segunda região, onde as expressões para $g_1^{(1)}(x)$, $g_2^{(1)}(x)$, $g_1^{(2)}(x)$ e $g_2^{(2)}(x)$ são definidas de acordo com a notação proposta pelas Eqs. (3.40) e (3.41) da seção (3.2).

Aplicando a Transformada de Laplace nas Eqs. (5.5)-(5.8) e resolvendo para os fluxos transformados de cada região, obtemos, para as regiões 1 e 2, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)}(s) \\ \Psi_2^{(1)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ b_2^{(1)} & s^2 - b_4^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} sc_1^{(1)} \\ sc_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ b_2^{(1)} & s^2 - b_4^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G_1^{(1)}(s) \\ G_2^{(1)}(s) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^{(2)}(s) \\ \Psi_2^{(2)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ b_2^{(2)} & s^2 - b_4^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} sc_1^{(2)} + c_2^{(2)} \\ sc_3^{(2)} + c_4^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ b_2^{(2)} & s^2 - b_4^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G_1^{(2)}(s) \\ G_2^{(2)}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

lembrando que os valores de $c_2^{(1)}$ e de $c_4^{(1)}$ são nulos, pois representam os valores da condição de contorno em $x = 0$. Aplicando a Transformada Inversa de Laplace nas Eqs. (5.9) e (5.10), obtemos a solução para o problema de fonte fixa, pois os valores das constantes de integração são os mesmos que foram determinados na seção anterior. Sendo assim,

$$\psi_1^{(1)}(x) = M_{11}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + M_{13}^{(1)}(x)c_3^{(1)} + F_1^{(1)}(x), \quad (5.11)$$

$$\psi_2^{(1)}(x) = M_{21}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + M_{23}^{(1)}(x)c_3^{(1)} + F_2^{(1)}(x), \quad (5.12)$$

para a região 1, e,

$$\psi_1^{(2)}(x) = M_{11}^{(2)}(x)c_1^{(2)} + M_{12}^{(2)}(x)c_2^{(2)} + M_{13}^{(2)}(x)c_3^{(2)} + M_{14}^{(2)}(x)c_4^{(2)} + F_1^{(2)}(x), \quad (5.13)$$

$$\psi_2^{(2)}(x) = M_{21}^{(2)}(x)c_1^{(2)} + M_{22}^{(2)}(x)c_2^{(2)} + M_{23}^{(2)}(x)c_3^{(2)} + M_{24}^{(2)}(x)c_4^{(2)} + F_2^{(2)}(x), \quad (5.14)$$

para a região 2, onde os coeficientes de cada constante de integração e as expressões relativas aos termos de fonte estão definidos na seção (3.3). A solução para o problema de fonte fixa, para o mesmo domínio e para os mesmos parâmetros nucleares considerados no capítulo 4, será apresentada sob a forma de gráficos que serão mostrados ao final deste capítulo.

5.3 SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE FONTE FIXA

Nesta parte do trabalho, desejamos construir a solução analítica para o problema de fonte fixa. Neste caso, não podemos considerar como conhecidas as constantes de integração

provenientes da aplicação da Transformada de Laplace. Sendo assim, considerando as Eqs. (5.1)- (5.4), aplicando as condições de continuidade do fluxo e da corrente na interface e a segunda condição de contorno em $x = L$, escrevemos o seguinte sistema linear algébrico para encontrarmos os valores das constantes de integração,

$$\begin{aligned}
& M_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - M_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)} = F_1^{(2)}(0) - F_1^{(1)}(x_1) \\
& M_{21}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{23}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)} - M_{21}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{22}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{23}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{24}^{(2)}(0)c_4^{(2)} = F_2^{(2)}(0) - F_2^{(1)}(x_1) \\
& D_1^{(1)} \frac{d}{dx} (M_{11}^{(1)}(x_1)c_1^{(1)} + M_{13}^{(1)}(x_1)c_3^{(1)}) + D_1^{(2)} \frac{d}{dx} (-M_{11}^{(2)}(0)c_1^{(2)} - M_{12}^{(2)}(0)c_2^{(2)} \\
& \quad - M_{13}^{(2)}(0)c_3^{(2)} - M_{14}^{(2)}(0)c_4^{(2)}) = D_1^{(2)} \frac{d}{dx} F_1^{(2)}(0) - D_1^{(1)} \frac{d}{dx} F_1^{(1)}(x_1) \\
& M_{11}^{(2)}(x_2 - x_1)c_1^{(2)} + M_{12}^{(2)}(x_2 - x_1)c_2^{(2)} + M_{13}^{(2)}(x_2 - x_1)c_3^{(2)} + M_{14}^{(2)}(x_2 - x_1)c_4^{(2)} = 0 \\
& M_{21}^{(2)}(x_2 - x_1)c_1^{(2)} + M_{22}^{(2)}(x_2 - x_1)c_2^{(2)} + M_{23}^{(2)}(x_2 - x_1)c_3^{(2)} + M_{24}^{(2)}(x_2 - x_1)c_4^{(2)} = 0 \quad (5.15)
\end{aligned}$$

aqui, nas duas últimas equações não aparecem os termos de fonte, pois nesta região não ocorre fissão. O sistema acima é não homogêneo, logo pode ser resolvido diretamente. A sua solução representa os valores das constantes de integração que queríamos encontrar. Agora, podemos escrever as expressões para a solução do problema de fonte fixa dadas pelas Eqs. (5.13) e (5.14).

Conforme mencionado, a solução para o problema de fonte fixa, para o mesmo domínio e para os mesmos parâmetros nucleares considerados no capítulo 4, é apresentada sob a forma de gráficos nas figuras abaixo,

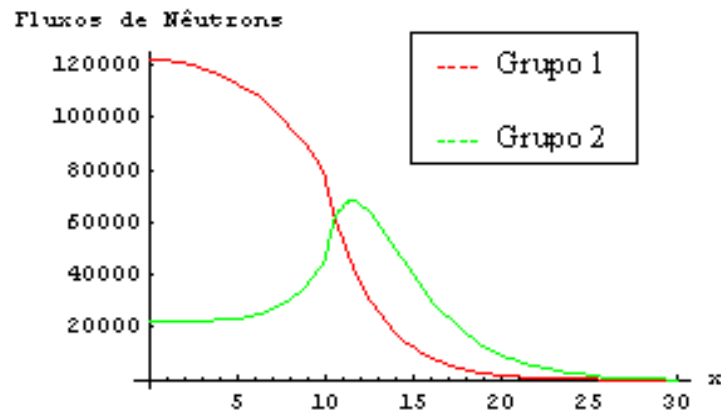


Figura 5.1 – Gráfico do Fluxo de Nêutrons

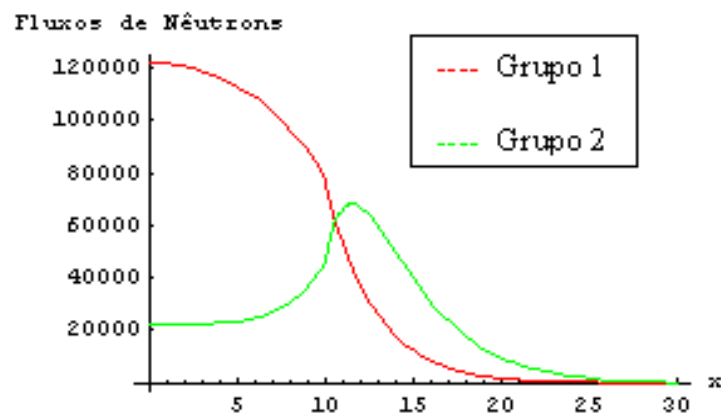


Figura 5.2 – Gráfico da Solução para o Problema de Fonte Fixa

Onde na Fig. (5.1) estão representados os gráficos dos fluxos de nêutrons para os dois grupos de energia e na Fig. (5.2), as soluções do problema de fonte fixa também para os dois grupos de energia. E como era esperado, são idênticos.

CAPÍTULO 6

SIMULAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DE FUNÇÃO AUXILIAR

Para resolver o problema de função auxiliar, descrito na seção 3.4 do capítulo 3, consideramos as Eqs. (3.61) e (3.62), escritas para um domínio composto de duas regiões,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1^{(1)}(x) + \Sigma_{R1}^{(1)} \varphi_1^{(1)}(x) \right) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(1)} \varphi_g^{(1)}(x) + \sum_{g=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'} \varphi_{g'}^{(1)}(x) + S_1^{(1)}(x), \quad (6.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2^{(1)}(x) + \Sigma_{R2}^{(1)} \varphi_2^{(1)}(x) \right) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(1)} \varphi_g^{(1)}(x) + \sum_{g=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'} \varphi_{g'}^{(1)}(x) + S_2^{(1)}(x), \quad (6.2)$$

para a região 1,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1^{(2)}(x) + \Sigma_{R1}^{(2)} \varphi_1^{(2)}(x) \right) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(2)} \varphi_g^{(2)}(x) + \sum_{g=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'} \varphi_{g'}^{(2)}(x) + S_1^{(2)}(x), \quad (6.3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2^{(2)}(x) + \Sigma_{R2}^{(2)} \varphi_2^{(2)}(x) \right) = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^{(2)} \varphi_g^{(2)}(x) + \sum_{g=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'} \varphi_{g'}^{(2)}(x) + S_2^{(2)}(x), \quad (6.4)$$

para a região 2, onde as expressões para os termos de fonte $S_1^{(1)}(x)$, $S_2^{(1)}(x)$, $S_1^{(2)}(x)$ e $S_2^{(2)}(x)$, estão definidas na seção 3.4 do capítulo 3. Novamente, vamos considerar a notação proposta pelas Eqs. (3.6) e (3.7) da seção 3.2 e que os parâmetros nucleares são uniformes em cada uma das regiões. Sendo assim, as Eqs. (6.1)-(6.4) podem ser reescritas como,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}(x)}{\partial x^2} + \frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_1^{(1)}(x) - a_2^{(1)} \varphi_1^{(1)}(x) + \frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_2^{(1)}(x) + a_4^{(1)} \varphi_2^{(1)}(x) = -\frac{S_1^{(1)}(x)}{D_1^{(1)}} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}(x)}{\partial x^2} + \frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_1^{(1)}(x) + b_2^{(1)} \varphi_1^{(1)}(x) + \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_2^{(1)}(x) - b_4^{(1)} \varphi_2^{(1)}(x) = -\frac{S_2^{(1)}(x)}{D_2^{(1)}} \quad (6.6)$$

para a região 1,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}(x)}{\partial x^2} + \frac{a_1^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_1^{(2)}(x) - a_2^{(2)} \varphi_1^{(2)}(x) + \frac{a_3^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_2^{(2)}(x) + a_4^{(2)} \varphi_2^{(2)}(x) = -\frac{S_1^{(2)}(x)}{D_1^{(2)}} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}(x)}{\partial x^2} + \frac{b_1^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_1^{(2)}(x) + b_2^{(2)} \varphi_1^{(2)}(x) + \frac{b_3^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_2^{(2)}(x) - b_4^{(2)} \varphi_2^{(2)}(x) = -\frac{S_2^{(2)}(x)}{D_2^{(2)}} \quad (6.8)$$

para a região 2. Para podermos aplicar o processo iterativo descrito na seção 3.4, devemos escrever as últimas equações da seguinte maneira,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}(x)}{\partial x^2} - a_2^{(1)} \varphi_1^{(1)}(x) + a_4^{(1)} \varphi_2^{(1)}(x) = -\frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_{1,pre}^{(1)}(x) - \frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_{2,pre}^{(1)}(x) - \frac{S_1^{(1)}(x)}{D_1^{(1)}} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}(x)}{\partial x^2} - b_4^{(1)} \varphi_2^{(1)}(x) + b_2^{(1)} \varphi_1^{(1)}(x) = -\frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_{1,pre}^{(1)}(x) - \frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} \varphi_{2,pre}^{(1)}(x) - \frac{S_2^{(1)}(x)}{D_2^{(1)}} \quad (6.10)$$

para a primeira região, e

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}(x)}{\partial x^2} - a_2^{(2)} \varphi_1^{(2)}(x) + a_4^{(2)} \varphi_2^{(2)}(x) = -\frac{a_1^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_{1,pre}^{(2)}(x) - \frac{a_3^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_{2,pre}^{(2)}(x) - \frac{S_1^{(2)}(x)}{D_1^{(2)}} \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}(x)}{\partial x^2} - b_4^{(2)} \varphi_2^{(2)}(x) + b_2^{(2)} \varphi_1^{(2)}(x) = -\frac{b_1^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_{1,pre}^{(2)}(x) - \frac{b_3^{(2)}}{k_{eff}} \varphi_{2,pre}^{(2)}(x) - \frac{S_2^{(2)}(x)}{D_2^{(2)}} \quad (6.12)$$

para a segunda região. Onde, agora, $\varphi_{1,pre}^{(1)}(x)$, $\varphi_{2,pre}^{(1)}(x)$, $\varphi_{1,pre}^{(2)}(x)$ e $\varphi_{2,pre}^{(2)}(x)$ são considerados como valores conhecidos que passam a fazer parte dos termos de fonte das Eqs. (6.9)- (6.12).

Aplicando a Transformada de Laplace nestas equações e resolvendo os sistemas resultantes para os fluxos transformados, obtemos,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)}(s) \\ \Psi_2^{(1)}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ b_2^{(1)} & s^2 - b_4^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{a_1^{(1)}}{k_{eff}} & -\frac{a_3^{(1)}}{k_{eff}} \\ -\frac{b_1^{(1)}}{k_{eff}} & -\frac{b_3^{(1)}}{k_{eff}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{1,pre}^{(1)}(s) \\ \Psi_{2,pre}^{(1)}(s) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \\ b_2^{(1)} & s^2 - b_4^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} sc_1^{(1)} - \frac{S_1^{(1)}}{D_1^{(1)}} \\ sc_3^{(1)} - \frac{S_2^{(1)}}{D_2^{(1)}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.13)$$

para a primeira região, e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_1^{(2)}(s) \\ \Psi_2^{(2)}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ b_2^{(2)} & s^2 - b_4^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{a_1^{(2)}}{k_{eff}} & -\frac{a_3^{(2)}}{k_{eff}} \\ -\frac{b_1^{(2)}}{k_{eff}} & -\frac{b_3^{(2)}}{k_{eff}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{1,pre}^{(2)}(s) \\ \Psi_{2,pre}^{(2)}(s) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} s^2 - a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \\ b_2^{(2)} & s^2 - b_4^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} sc_1^{(2)} + c_2^{(2)} \\ sc_3^{(2)} + c_4^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

para a segunda região. Aqui, os valores de $c_2^{(1)}$ e de $c_4^{(1)}$ são nulos porque correspondem à condição de contorno em $x = 0$, assim como os valores de $S_1^{(2)}(x)$ e $S_2^{(2)}(x)$, pois para o

problema que estamos resolvendo, na segunda região do domínio não há fissão.

Aplicando, agora, a Transformada Inversa de Laplace nas Eqs. (6.13) e (6.14), as expressões da solução para o problema de fonte fixa são,

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(x) = M_{11}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + M_{13}^{(1)}(x)c_3^{(1)} + \\ Mat_{11}^{(1)}(x) * \varphi_{1,pre}^{(1)}(x) + Mat_{12}^{(1)}(x) * \varphi_{2,pre}^{(1)}(x) + F_1^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(1)}(x) = M_{21}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + M_{23}^{(1)}(x)c_3^{(1)} + \\ Mat_{21}^{(1)}(x) * \varphi_{1,pre}^{(1)}(x) + Mat_{22}^{(1)}(x) * \varphi_{2,pre}^{(1)}(x) + F_2^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (6.16)$$

para a região 1, e

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2)}(x) = M_{11}^{(2)}(x)c_1^{(2)} + M_{12}^{(2)}(x)c_2^{(2)} + M_{13}^{(2)}(x)c_3^{(2)} + M_{14}^{(2)}(x)c_4^{(2)} + \\ Mat_{11}^{(2)}(x) * \varphi_{1,pre}^{(2)}(x) + Mat_{12}^{(2)}(x) * \varphi_{2,pre}^{(2)}(x), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(1)}(x) = M_{21}^{(1)}(x)c_1^{(1)} + M_{22}^{(2)}(x)c_2^{(2)} + M_{23}^{(2)}(x)c_3^{(2)} + M_{24}^{(2)}(x)c_4^{(2)} \\ Mat_{21}^{(1)}(x) * \varphi_{1,pre}^{(1)}(x) + Mat_{22}^{(1)}(x) * \varphi_{2,pre}^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (6.18)$$

para a região 2. Onde o símbolo * expressa a convolução das funções, os coeficientes das constantes de integração estão definidas pelas Eqs. (3.46)-(3.53) da seção 3.3.1 e,

$$Mat_{11}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Det^{(r)}(s)} \left[-\frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}}(s^2 - b_4^{(r)}) + \frac{a_4^{(r)}}{k_{eff}}b_1^{(r)} \right] \right\}, \quad (6.19)$$

$$Mat_{12}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Det^{(r)}(s)} \left[-\frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}}(s^2 - b_4^{(r)}) + \frac{a_4^{(r)}}{k_{eff}}b_3^{(r)} \right] \right\}, \quad (6.20)$$

$$Mat_{21}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Det^{(r)}(s)} \left[-\frac{b_1^{(r)}}{k_{eff}}(s^2 - a_2^{(r)}) + \frac{a_1^{(r)}}{k_{eff}}b_2^{(r)} \right] \right\}, \quad (6.21)$$

$$Mat_{22}^{(r)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Det^{(r)}(s)} \left[-\frac{b_3^{(r)}}{k_{eff}}(s^2 - a_2^{(r)}) + \frac{a_3^{(r)}}{k_{eff}}b_2^{(r)} \right] \right\}, \quad (6.22)$$

onde $r = 1, 2$ e,

$$F_1^{(1)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Det^{(1)}(s)} \left[-(s^2 - b_4^{(1)}) \frac{S_1^{(1)}(s)}{D_1^{(1)}} + \frac{a_4^{(1)} S_2^{(1)}}{D_2^{(1)}} \right] \right\}, \quad (6.23)$$

$$F_2^{(1)}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Det^{(1)}(s)} \left[-(s^2 - b_4^{(1)}) \frac{S_2^{(1)}(s)}{D_2^{(1)}} + \frac{b_2^{(1)} S_1^{(1)}}{D_1^{(1)}} \right] \right\}. \quad (6.24)$$

Para iniciarmos o processo iterativo para resolver o problema de função auxiliar, começamos fazendo,

$$\varphi_{pre}^{(1)(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_{pre}^{(2)(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

nas Eqs. (6.15)-(6.18), onde o segundo índice superior refere-se à iteração inicial. Desta maneira, podemos escrever um sistema de equações para as constantes de integração, utilizando as condições de continuidade do fluxo e da corrente na interface e a segunda condição de contorno em $x = L$, ou seja, resolvemos,

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(1)(0)}(x_1) &= \varphi_1^{(2)(0)}(0) \\
\varphi_2^{(1)(0)}(x_1) &= \varphi_2^{(2)(0)}(0) \\
-D_1^{(1)} \frac{d}{dx} \varphi_1^{(1)(0)}(x_1) &= -D_1^{(2)} \frac{d}{dx} \varphi_1^{(2)(0)}(0) \\
-D_2^{(1)} \frac{d}{dx} \varphi_2^{(1)(0)}(x_1) &= -D_2^{(2)} \frac{d}{dx} \varphi_2^{(2)(0)}(0) \\
\varphi_1^{(2)(0)}(L) &= 0 \\
\varphi_2^{(2)(0)}(L) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Resolvendo este sistema, obtemos uma primeira aproximação para o valor das constantes de integração. Este resultado é substituído nas Eqs. (6.15)-(6.18) para gerar o vetor da próxima iteração, antes, porém, de proceder à iteração seguinte, devemos efetuar a descontaminação do modo fundamental e isto é feito através da expressão dada pela Eq. (3.76) da seção 3.4, isto é, o vetor da próxima iteração será,

$$\varphi_{part}^{(r)(1)}(x) = \varphi^{(r)(1)}(x) - \frac{\langle \phi^{*T}(x) \mathbf{F} \varphi^{(r)(1)}(x) \rangle}{\langle \phi^{*T}(x) \mathbf{F} \phi(x) \rangle} \phi(x). \tag{6.27}$$

Este novo vetor é substituído nas Eqs. (6.15)-(6.18), onde a operação de convolução é efetuada numericamente e o processo reinicia até que o critério de convergência selecionado seja satisfeito. Este processo está sendo realizado, inicialmente, para encontrarmos os valores das constantes de integração que são válidos para todo o domínio. Após termos obtido tais valores, um segundo procedimento iterativo é realizado, agora, para a obtenção da solução do problema de função auxiliar, onde não mais precisamos resolver o sistema de Eqs.(6.26) para as constantes de integração.

Resultados numéricos para a solução do problema de fonte fixa, para o mesmo domínio e para os mesmos parâmetros nucleares descritos na seção 4.2, são apresentados na forma de gráficos nas figuras abaixo.

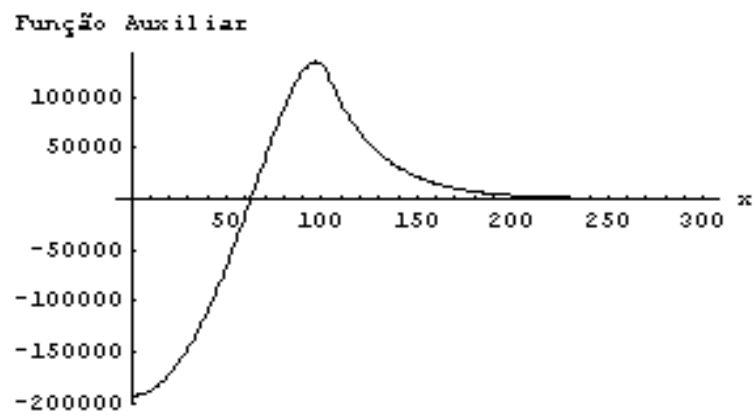


Figura 6.1 – Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 1 obtido pela formulação proposta

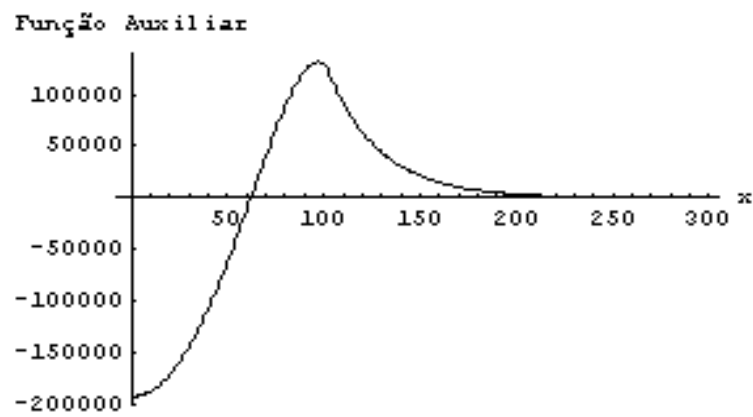


Figura 6.2 – Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 1 obtido por [Thomé, 1997]

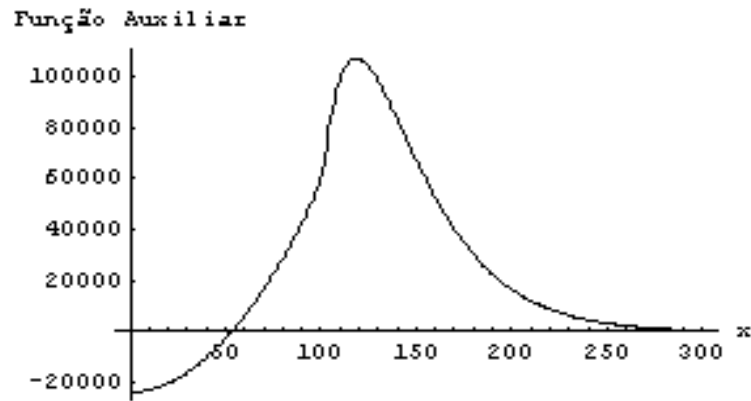


Figura 6.3 – Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 2 obtido pela formulação proposta

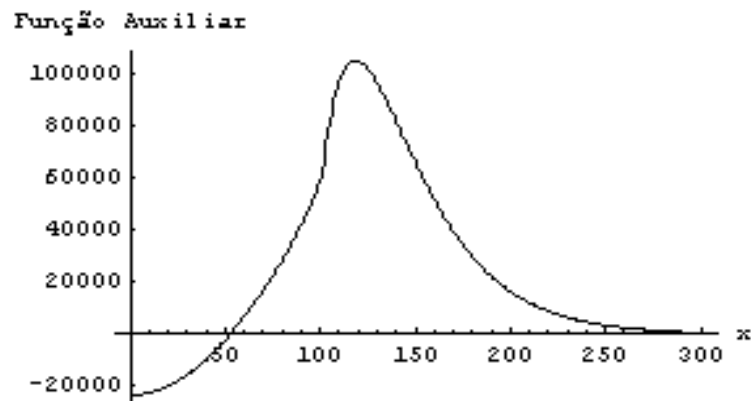


Figura 6.4 – Gráfico da Função Auxiliar para o grupo 2 obtido por [Thomé, 1997]

Conforme dito anteriormente, a função auxiliar é a derivada do fluxo de nêutrons com relação à seção de choque de captura do grupo 1 na região 1. Portanto, se dermos uma variação (positiva) nesta seção de choque, verifica-se, pelo comportamento da função auxiliar, que o fluxo de nêutrons sofrerá em decréscimo na região 1 (ou em grande parte dela) e um aumento na região 2 (ou em grande parte dela). Ou seja, uma função auxiliar nada mais é do que a sensibilidade do fluxo de nêutrons a um parâmetro qualquer do sistema.

Foram calculadas as diferenças relativas percentuais entre os resultados obtidos pela

metodologia proposta e aqueles obtidos por [Thomé, 1997], nos pontos $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 10$, $x = 12$, $x = 14$, $x = 16$, $x = 18$, $x = 20$, $x = 22$, $x = 24$, $x = 26$, $x = 28$, $x = 30$. Para o primeiro grupo de energia, a diferença relativa percentual mínima encontrada foi de 0.11%, a máxima, 2.56% sendo de 1.85% a diferença média percentual. Para o segundo grupo de energia, a diferença relativa percentual mínima encontrada foi de 0.28%, a máxima, 1.58% sendo de 1.36% a diferença média percentual.

Acreditamos que uma das possíveis causas para as diferenças relativas percentuais encontradas no problema de função auxiliar, além do caráter analítico da solução, são os diferentes critérios de convergência adotados em cada uma das metodologias. Neste trabalho, adotamos um critério de parada de 10^{-2} , enquanto que o adotado por [Thomé, 1997], foi de 10^{-5} .

Além disso, como todos os cálculos aqui presentes foram realizados utilizando computação simbólica, não apresentamos os dados relativos ao esforço computacional.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

A análise dos bons resultados comparados com os de [Thomé, 1997], permite-nos concluir que é possível construir uma solução analítica, no sentido de que nenhuma aproximação é feita ao longo de sua derivação, e que ela é válida para problemas com dois grupos de energia e N regiões. Embora os resultados tenham sido obtidos para um problema com duas regiões e dois grupos de energia, ela pode ser facilmente estendida para um maior número de grupos de energia. Esta metodologia é bastante geral no sentido de que também se aplica para problemas sem fonte e com fonte arbitrária. O caráter analítico da solução permite determinar o valor do fator de multiplicação efetivo (k_{eff}), pelo método da bissecção. Embora, neste trabalho, a matriz para a determinação do k_{eff} seja de ordem 6, o método da bissecção pode ser aplicado para matrizes de ordem até 150 seguindo o método desenvolvido por Orengo [Orengo, 2002]. Devemos observar também que soluções analíticas para esta classe de problemas, não são encontradas na literatura. Finalmente, acreditamos que esta metodologia pode ser generalizada para problemas difusivos cartesianos bidimensionais da Teoria Geral de Perturbação usando o método da GITT, que transforma o problema bidimensional em unidimensional, e obtendo a solução do problema unidimensional resultante pelo método proposto. Acreditamos também, que este é um método promissor para solucionar diferentes classes de problemas relacionadas à Teoria Geral de Perturbação. Como sugestão de trabalho futuro, sugerimos a solução do problema bidimensional bem como do problema unidimensional para multiregiões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, G. I. and Glasstone, S., 1970. **"Nuclear Reactor Theory"**. Van Nostrand Reinhold, New York.

Bennewitz, F., F. H. W. M. R., 1975. "Higher-Order Corrections in Nodal Reactor Calculations", **Trans. Am. Nucl.**, vol. 22, pp. 250–251.

Cabral, J., 1980. **"Aplicação da Teoria de Perturbação Generalizada ao Cálculo de Queima de Combustível no Código LEOPARD"**, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Claro, L. H., 1992. **"O Método dos Pseudo-Harmônicos: Uma Nova Opção Usando Discretização Nodal"**, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

De Abreu, M. P., 1988. **"Uma Metodologia Alternativa de Pseudo-Harmônicos: Aplicação ao Cálculo Bidimensional de Reatores"**, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

De Barros, R. C., 1992. "Um Método Numérico Livre de Erro de Truncamento Espacial para Cálculos Unidimensionais de Multigrupo Difusão", **IV Congresso Geral de Energia Nuclear**, vol. 1, pp. 377–382.

Derivi, A., 2000. **"Código Computacional para Cálculos de Criticalidade em Placas Planas Pelo Método LTSN"**, Dissertação de mestrado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.

Gandini, A., 1967. "A Generalized Perturbation Method for Bi-linear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes", **Journal of Nuclear Energy**, vol. 21, pp. 755–765.

Gandini, A., 1980. "Comments on Higher Order Generalized Perturbation Theory", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 73, pp. 289–294.

Gandini, A., 1982. "Métodos Perturbativos para a Análise de Reatores Nucleares", **Comitato Nazionale per la Ricerche e per lo Sviluppo dell'Energia Nucleare e delle Energia Alternative**.

Gomit, J. M., P. J. S. A., 1985. "La Méthode des Pseudo-Harmoniques Théories et Application", **E. D. F. Bulletin de la Direction des Études et Recherches**, vol. Série A(1), pp. 61–66.

Greenspan, H., K. C. N. O. D., 1968. "**Computing Methods in Reactor Physics**". Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Kadomtzev, B., 1957. "On the Importance Function in Radiation Transport Theory", **Dokl. Akad. Nauk**, vol. 113(3).

Lawrence, R. D., D. J. J., 1980. "A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 76, pp. 218–231.

Lawrence, R. D., 1986. "Progress in Nodal Methods for the Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 17(3), pp. 271–301.

Lemos, R. S. M., V. M. T. S. F. C. S. F. C., 2003. "Solution of the Diffusion Equation in the GPT Theory by the Laplace Transform Technique", **Anais do 18° ICTT**.

Lemos, R. S. M., V. M. T. S. F. C. W. S., 2004. "Simulação do Fator de Multiplicação Efetivo, do Fluxo de Nêutrons, do Fluxo Adjunto de Nêutrons e do Problema de Fonte Fixa, pela Solução da Equação de Difusão usando a Transformada de Laplace", **Anais do XXV CILAMCE**.

Lemos, R. S. M., V. M. T. S. F. C. Z. J., 2002. "Utilização da Transformada de Laplace na Teoria de Perturbação Generalizada", **Anais do XIII ENFIR**.

Lewins, J., 1960. "The Time Dependent Importance of Neutrons and Precursors", **Nuc. Sci. Eng.**, vol. 7.

Lima, Z.R., S. F. A. A., 2004. "Solution of the Fixed Source Neutron Diffusion Equation by Using the Pseudo-harmonics Method", **Annals of Nuclear Energy**, (31), pp. 1649–1666.

Montagnini, B., S. P. T. C. e. a., 1994. "A Well-Balanced Coarse-Mesh Flux Expansion Method", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(1), pp. 45–53.

Morse, P. and Feshbach, H., 1953. "**Methods of Theoretical Physics**". McGraw-Hill, New York.

Orengo, G., 2002. "**Desenvolvimento de um Código Computacional para Resolver Problemas em Geometria Plana em Teoria de Transporte Utilizando a Formulação do Método LTSN**", Tese de doutorado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.

Pontryagin, L.S., B. P. G. P. M. E., 1962. "The Mathematical Theory of Optimal Process", **Interscience**.

Press, H. W., T. S. A. V. W. T. e. a., 1992. "**Numerical Recipes in Fortran**". Cambridge University Press, New York, 2 ed. edition.

Santo, A., 1982. "**Cálculo de Sensibilidade em Parâmetros Integrais por Teoria de Perturbação Generalizada**", Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Shober, R. A., S. R. H. A. F., 1977. "Two Nodal Methods for Solving Time-Dependent Group Diffusion Equation", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 64, pp. 582–592.

Silva, F., 1981. "**Cálculo de Variações em Razões de Taxas de Reações Utilizando a Teoria de Perturbação Generalizada**", Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Silva, F., 1989. "**Desenvolvimento da Teoria de Perturbação Generalizada (GPT) e suas Aplicações à Física de Reatores**", Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Soodak, H., 1948. "**The Science and Engineering of Nuclear Power**". United Nations, New York.

Thomé, Z.D., S. F. A. A., 1997. "Application of Local Basis Pseudo-Harmonics Methods", **Ann. Nucl. Energy**, vol. 24(12), pp. 955–963.

Usachev, L., 1955. "Equation for the Importance of Neutrons, Reactor Kinetics and the Theory of Perturbations", **Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy**, (5), pp. 503–510.

Usachev, L., 1964. "Perturbation Theory for the Breeding Ratio and for Other Number Ratios Pertaining to Various Reactor Processes", **Journal of Nuclear Energy**, vol. 18.

Wachspress, E. L., 1966. "**Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics**". Prentice-hall, New Jersey.

White, J. R., S. G. A., 1990. "Development of a Technique for the Practical Implementation of Higher Order Perturbation Methods", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 105, pp. 160–173.

Wigner, E., 1945. "Effect of Small Perturbation on Pile Period", **Report CP-G**, (3048).