

CNPq
apoio

 Karine Zaniol
bolsista
kakzaniol@gmail.com

 Sílvia R.C. Lopes
orientadora
silviarc.lopes@gmail.com

 Guilherme Pumi
colaborador
guipumi@gmail.com

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo empírico da distância de Mallows entre as componentes de processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) bidimensionais Gaussianos e não-Gaussianos, com o objetivo de analisar a possível relação da distância de Mallows com as componentes do processo, com o parâmetro de diferenciação d , com o tipo de ruído utilizado e com o grau de dependência induzido no ruído.

Este trabalho é baseado em simulações de Monte Carlo de processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) bidimensionais cujo processo de inovação é:

- ☒ Gaussiano,
- ☒ via cópulas Frank.

Para gerar as amostras, utilizamos o método de truncamento da representação média móvel infinita das componentes individuais do processo.

DEFINIÇÕES

Para $\alpha > 0$, denotamos por F_α espaço de todas as funções de distribuição tais que $\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha dF(x) < \infty$.

Distância de Mallows: seja $\alpha > 0$, F e G duas funções de distribuição em F_α . A distância de Mallows entre F e G é dada por

$$d_\alpha(F, G) := \inf_{A(F, G)} \left\{ \mathbb{E}(|X - Y|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad (1)$$

onde $A(F, G)$ é o conjunto de todos os pares (X, Y) de variáveis aleatórias com funções de distribuição marginais F e G , respectivamente.

Processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0): seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo m -dimensional com média $\boldsymbol{\mu}$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito um processo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), se ele é uma solução estacionária da equação de diferenças

$$\Phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d(X_t - \boldsymbol{\mu}) = \Theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

onde \mathcal{B} é o operador de defasagem, $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor das médias, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário m -dimensional, $\Theta(\mathcal{B})$ e $\Phi(\mathcal{B})$ são matrizes $m \times m$, dadas pela equação

$$\Phi(\mathcal{B}) = \sum_{j=0}^p \phi_j \mathcal{B}^j \quad \text{e} \quad \Theta(\mathcal{B}) = \sum_{k=0}^q \theta_k \mathcal{B}^k, \quad (3)$$

Com $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$, matrizes reais $m \times m$ e $\phi_0 = \theta_0 = \mathbf{I}_{m \times m}$, a matriz identidade $m \times m$.

Neste trabalho utilizamos $p=q$. Podemos simplificar a equação (2) para

$$(1 - \mathcal{B})^d(X_t - \boldsymbol{\mu}) = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

SIMULAÇÕES

☒ Conjunto de Dados

Os resultados são baseados em 1000 replicações de processos VARFIRMA(0, \mathbf{d} , 0) bidimensionais de tamanho 2000, para os parâmetros de diferenciação $d_i \in \{\mp 0.4, \mp 0.3, \mp 0.2, \mp 0.1\}$, com $i \in \{1, 2\}$, gerados a partir de ruídos Gaussianos com parâmetro de correlação $\rho \in \{0, 0.1, 0.5, 0.6, 0.95\}$ e a partir de cópulas Frank com parâmetro $\theta \in \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 10\}$.

☒ Ruído Gaussiano

Na Figura 1 e 2 apresentamos alguns resultados para a distância de Mallows em séries temporais bidimensionais VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) geradas a partir de ruídos Gaussianos com $\rho \in \{0.5, 0.95\}$.

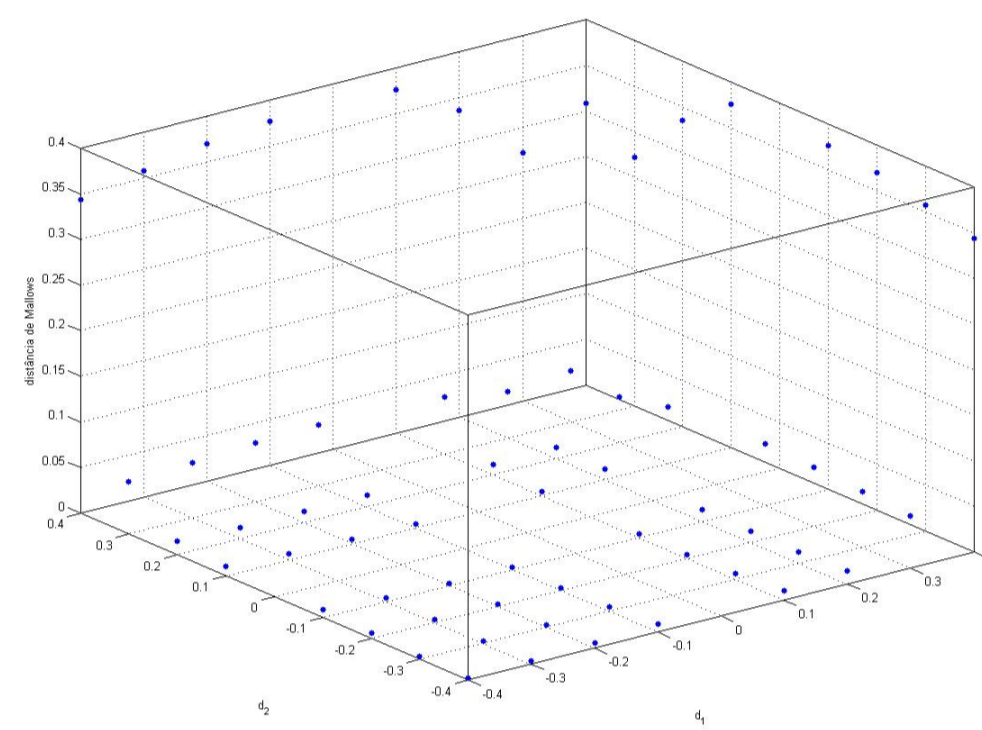


Figura 1: distância de Mallows em processos VARFIMA quando $\rho = 0.5$.

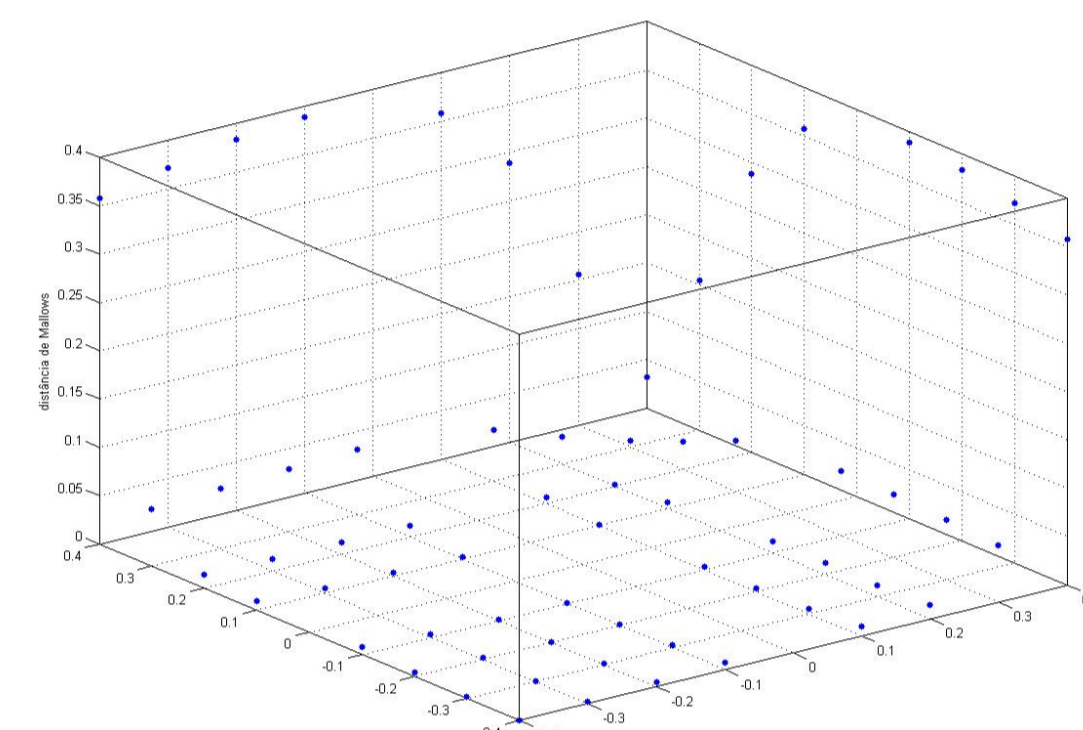


Figura 2: distância de Mallows em processos VARFIMA quando $\rho = 0.95$.

☒ Ruído Via Cópula Frank

Na Figura 3 apresentamos os resultados para a distância de Mallows em séries temporais bidimensionais VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) geradas a partir de ruídos via cópulas Frank com $\theta = -3$ e $\theta = 10$.

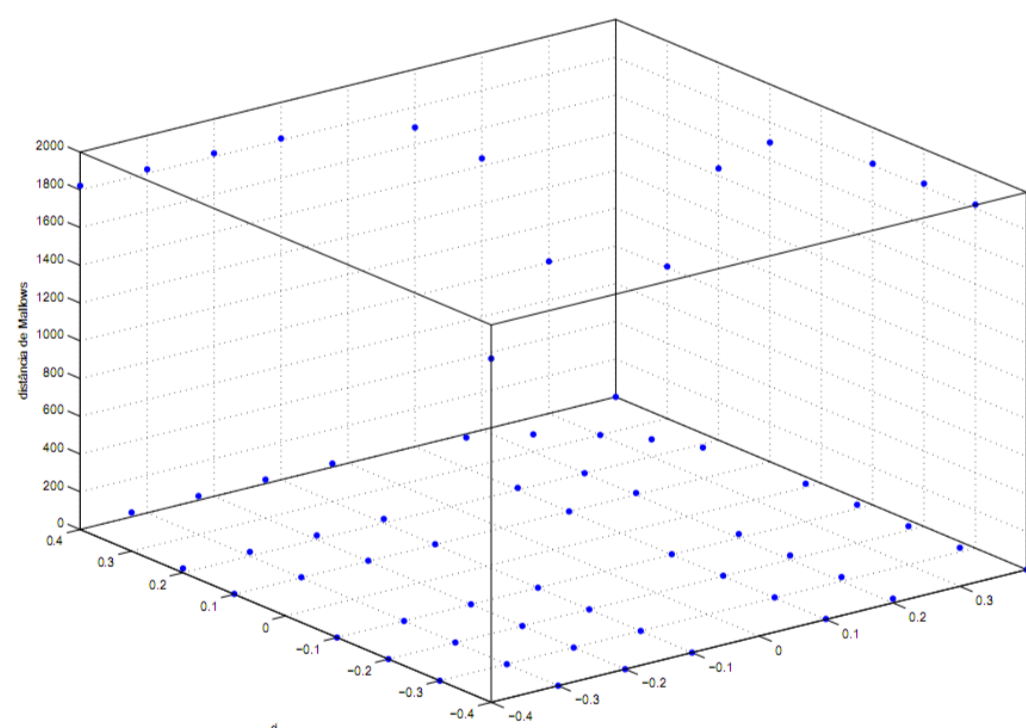


Figura 3: distância de Mallows com ruídos cópula Frank quando $\theta = -3$.

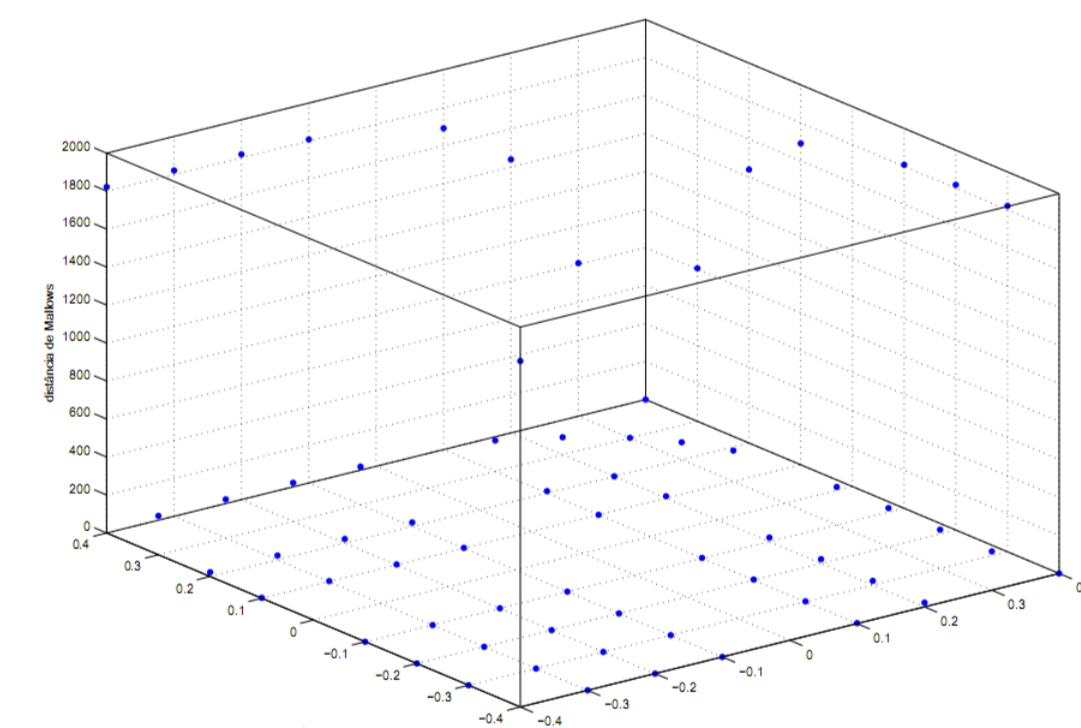


Figura 4: distância de Mallows com ruídos cópula Frank quando $\theta = 10$.

CONCLUSÕES

☒ Para séries temporais bidimensionais VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) geradas a partir de inovações Gaussianas, quanto maior o ρ , menor a média das distâncias de Mallows e o desvio padrão.

☒ Como podemos ver nas Figuras 3 e 4, o parâmetro θ não é significativamente sensível à distância de Mallows.

☒ As séries VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), tanto aquelas com ruídos gerados por inovações Gaussianas, quanto as geradas via cópulas Frank, tem distância Mallows pequena para $d_i \in \{-0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2\}$, aumentando significativamente para outros valores de d_i , com $i \in \{1, 2\}$. (ver Figuras 1 a 4).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

• Bickel, P. J. e Freedman, D. A. (1981). "Some Asymptotic Theory for the Bootstrap". *The Annals of Statistics*, **9**, 1196-1217.

• Ferreira, D. B. (2009). *Distância Mallows para a Estimação da Probabilidade da Ruína em Processos de Risco Clássico*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UnB, Brasília.

• Mallows, C. L. (1972). "A note on Asymptotic Joint Normality". *The Annals of Mathematical Statistics*, **43**, 508-515.

• Valk, M. (2007). *Estimação em Processos Fracionariamente Integrados Multivariados*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre.